

DESY-Bibliothek  
- 9. JULI 1965

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

**DESY**

DESY 65/4

Mai 1965

Beschleuniger

INTENSITÄTSUNABHÄNGIGE LAGEMESSUNG  
BEIM GEPULSTEN ELEKTRONENSTRAHL

von

M. Swars

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY

2 HAMBURG-GR. FLOTTBEK 1, NOTKESTIEG 1

### Zusammenfassung

Das hier beschriebene Verfahren zur intensitätsunabhängigen Lage-  
messung von Elektronenstrahlen benutzt zwei Abtastspulen, welche ein  
logarithmisches Verstärkerpaar ansteuern. Für die von einem Spulen-  
paar abgegebene Klemmenspannung werden Formeln abgeleitet. Dabei er-  
weist sich, dass Eisenkernspulen eine grössere Spannung als Luft-  
spulen abgeben. Eine Untersuchung des Rauschverhaltens verschiedener  
Eingangsschaltungen zeigt eine Überlegenheit der Gitterbasisschaltung  
gegenüber der Kathodenbasisschaltung.

### Abstract

The method for inductive measurement of the electron beam position  
which is described below uses two pick-up coils which, in connection  
with a pair of logarithmic amplifiers, effect an indication independent  
of the beam intensity. Formulas about the terminal voltage of the coils  
are explained. Hence it follows that ferrit core coils are better than  
air core coils. An analysis of the noise behaviour shows the superiori-  
ty of a grid-grounded preamplifier to a cathode-grounded one.

### Inhaltsübersicht:

Einleitung	S. 2
Spulensystem	S. 7
Logarithmische Verstärker	S. 21
Frequenzabhängiges Verhalten	S. 24
Rauschverhalten	S. 27

## Einleitung

Die folgenden Ausführungen behandeln die induktive Messung der Position von Elektronenbahnen, welche innerhalb eines Hohlzylinders, etwa eines Vakuumrohres, beliebige zur Zylinderachse parallele oder fast parallele Lagen einnehmen können. Bei merklicher Strahldicke erscheint dabei als Position das Integral der elektrischen Wirkung aller Stromelemente über den Strahlquerschnitt auf die Meßapparatur. Ist nun bei Parallelverschiebung eines Stromelements die Änderung der elektrischen Wirkung dessen Lageänderung proportional (keine Geometrieverzerrungen), dann nennt man die mit einer derartigen Anordnung gemessene Position den Schwerpunkt des Strahles. Derselbe wird zweckmässig in kartesischen Koordinaten angegeben, welche die horizontale und vertikale Abweichung des Strahls ( $x$  und  $y$ ) von einer durch den Ursprung des Koordinatensystems gelegten wagerechten Zylinderachse  $z$ , der "Sollbahn", darstellen können. Dies bedingt zwei gleich aufgebaute, um  $90^\circ$  gegeneinander verdrehte Meßapparaturen, deren jede eine Koordinate auszuwerten hat. Man trachtet danach, die Meßeinrichtung für die  $x$ -Richtung gegenüber Strahlverschiebungen in der  $y$ -Richtung möglichst unempfindlich zu machen und umgekehrt. In den nachfolgenden Erörterungen wird aber auf Geometrie-probleme nicht eingegangen, sondern so getan, als ob die angegebenen Spulenanordnungen innerhalb des in Betracht gezogenen Bereichs fehlerfrei arbeiten.

Da eine in der  $xy$ -Bezugsebene liegende Meßschleife keine Kraftlinien des Strahlstroms schneiden kann, müssen die Meßspulen zwangsläufig in der  $z$ -Richtung ausgedehnt sein (Abb.2). Die Länge derselben richtet sich nach dem inneren Störpegel der Meßapparatur. Bei grösserer  $z$ -Länge wächst entsprechend die vom Strahl aufgenommene Energie, so dass bei langen Spulen das Eigenrauschen mehr in den Hintergrund tritt. Experimentell ergab sich mit Eisenkernspulen bei einem Verhältnis Spulenabstand zur Länge wie  $3 : 1$ , also einer ungünstigen kurzen Bauform, und einem Strahlstrom von  $1 \text{ mA}$  eine totale Rauschamplitude von etwa  $1 \%$  des Spulenabstands. Der Frequenzbereich am Ausgang erstreckte sich dabei von  $30 \text{ KHz}$  bis  $3 \text{ MHz}$ .

Im Gegensatz zum gewöhnlichen Transformator, bei dem die Kopplung zwi-

schen Primär- und Sekundärkreis von massgebendem Einfluss auf die obere Grenzfrequenz ist, gibt es hier keine Rückwirkung der Sekundärspulen auf den die Primärwindung darstellenden Strahl, da letzterer eine praktisch unendliche Quellenimpedanz besitzt. Dies bedeutet, dass hier der Kopplungsgrad des Strahls mit der Spule keinen Einfluss mehr auf die obere Grenzfrequenz hat. Letztere ist aber auch nicht von der Eigenkapazität  $C_0$  der Spule abhängig, da diese Kapazität in der Regel durch einen niederohmigen Abschluss überbrückt ist (Abb.1). Lediglich die inneren Teilkapazitäten der Wicklung  $C_i$  und die Teilkapazitäten gegen Erde  $C_E$  bilden schliesslich ein unüberwindbares Hindernis für die hohen Frequenzen, wobei es in der Nähe der oberen Grenzfrequenz noch zu Eigenresonanzen mit Wicklungsteilen, den sogen. Partialschwingungen, kommt. Vieldrähtige Spulen müssen deshalb noch über einige Anzapfungen mit Dämpfungswiderständen versehen werden. Massgebend für die untere Grenzfrequenz ist der Abschlusswiderstand  $R$ . Wird er verkleinert, so ergibt sich eine tiefere Eckfrequenz, welche aber mit einem Verlust an induzierter Spannung erkauft wird. Je nach dem gewünschten Rauschabstand dieser Spannung kommt man auf einen Frequenzbereich der Spulen von 100 bis 1000. Um nun dieses ausnutzbare Frequenzintervall an den Frequenzinhalt des Elektronenstrahls anzupassen, muss noch die Windungszahl entsprechend gewählt werden. Bei gleichbleibender räumlicher Konfiguration bringt eine Verdopplung der Windungszahl wegen der Vervierfachung der Induktivität eine Halbierung der oberen und unteren Grenzfrequenz, wenn dabei, um wieder die gleiche induzierte Spannung zu bekommen, der Abschlusswiderstand ebenfalls verdoppelt wird. Für die Lagemessung eines mit 1 MHz gepulsten Strahles ergeben sich etwa 50 Windungen je Spule.

Ausgangspunkt der rechnerischen Behandlung ist der vom Strahlstrom  $i$  herrührende, die Sekundärspule durchsetzende mittlere Windungsfluss, in Funktionsschreibweise  $\Phi(i,x)$  bzw.  $\Phi(i,y)$  für in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung ausgerichtete Spulen, wobei sich mindestens eine der eingeklammerten Variablen zeitlich ändern muss, damit eine Induktionswirkung zustande kommt. Das Induktionsgesetz für die Klemmenspannung der offenen Spule  $u \sim d\Phi(i,x)/dt$  verwandelt sich bekanntlich bei geeignetem Ohm'schen Abschluss, für den die Zeitabhängigkeit  $\Phi(t)$  innerhalb des Frequenzbereichs der Apparatur liegt ( $R \ll \omega_{\Phi} L$ ), in die integrierte Form:

$$u \sim \Phi(i, x)$$

Es kommt nun darauf an, aus den Klemmenspannungen von Meßspulen, welche immer in der expliziten Form  $u(t)$  vorliegen, die Variable  $x$  zu eliminieren. Dazu werden noch zwei Voraussetzungen gemacht.

1.) Die Meßspulen seien lineare Schaltelemente. Dann ist

$$\Phi(i)_{(x=\text{const})} = \text{const}_1 i$$

2.) Die Flußabhängigkeit von  $x$  sei ebenfalls linear (keine Geometrieverzerrungen). Dies bedeutet

$$\Phi(x)_{(i=\text{const})} = \Phi(x=0) + \text{const}_2 x$$

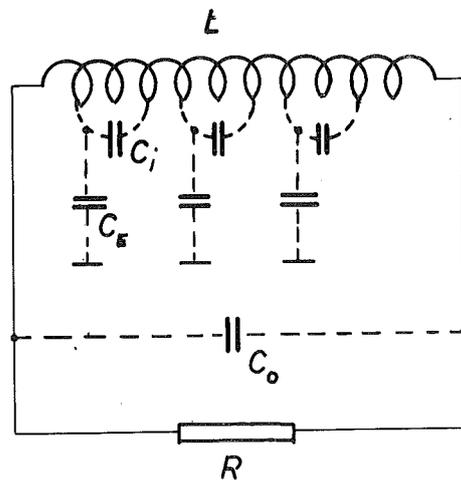
Aufgrund dieser Voraussetzungen kann man die dem Fluss proportionale Klemmenspannung einer Meßspule innerhalb ihres Arbeitsfrequenzbereichs in der Form  $u = i(A+Bx)$  anschreiben, worin  $A$  und  $B$  neue Konstanten und  $u, i, x$  Funktionen der Zeit sind.

Zur Eliminierung von  $x$  wird noch eine zweite Aussage benötigt. Bei der gewöhnlichen Lagemessung ist man darauf angewiesen, dazu mit einer getrennten Apparatur den Strom zu messen. Die Spannung der Lagespule wird dann durch den Strom (auch Strahlintensität genannt) dividiert. Hierfür ist die Spulenform nach Abb.2a vorteilhaft, welche wegen der Symmetrie zur  $z$ -Achse keinen Fluss umfasst, wenn der Strahl durch die Mitte geht, d.h.  $\Phi(x=0) = 0$ . Dann verschwindet die Konstante  $A$  und die Meßspannung

$$u = i \cdot B \cdot x$$

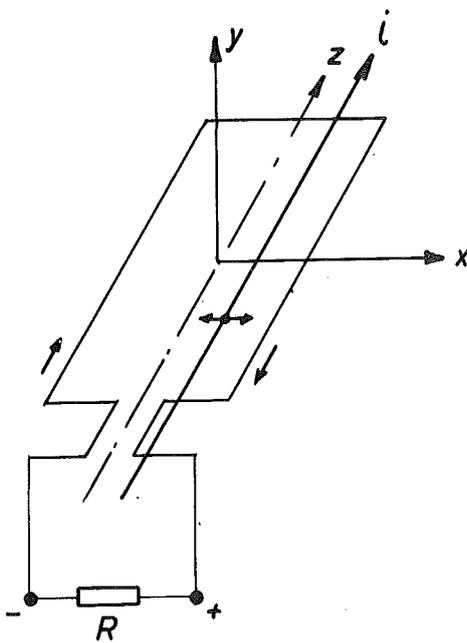
wird der Strahlauslenkung proportional. In einfachen Fällen, wenn z.B.  $i$  aus Rechteckimpulsen mit konstanter Amplitude besteht, unterscheiden sich  $u$  und  $x$  nur noch um einen Maßstabfaktor und die Lage kann oszillographisch abgelesen werden. Hierbei ist jedoch die zusätzlich erforderliche Kontrolle des Stroms unhandlich. Ausserdem ist die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens in Frage gestellt, weil vielfach sowohl der Strom als auch die Lage hochfrequenten Änderungen unterworfen sind und dann natürlich die Meßspannung nicht mehr den Verlauf der Lage wiedergibt.

Genaueren Aufschluss über die hochfrequente Struktur der Strahllage lie-

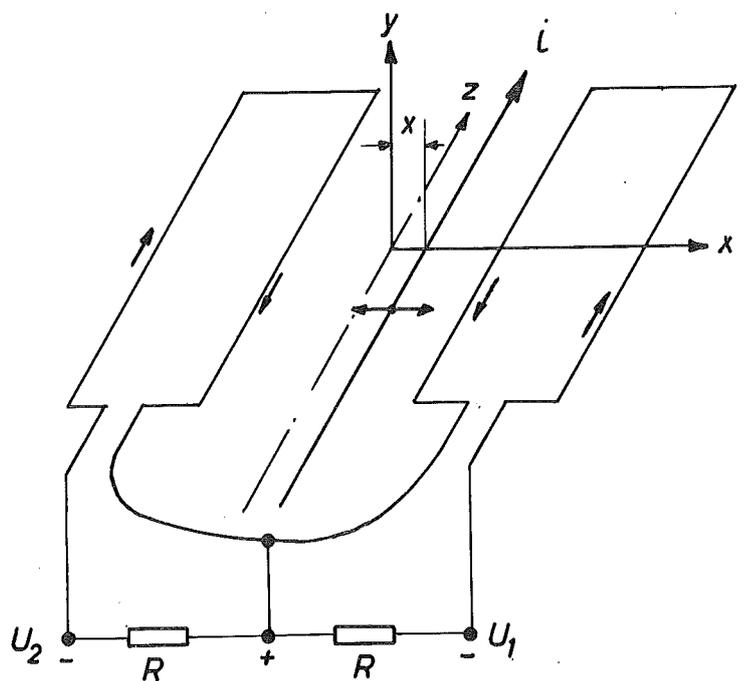


$\omega C_o R < 1$  für die  
Arbeitsfrequenzen

**Abb.1: Spulenkapazitäten**



**Abb.2a**  
Spulenanordnung für  
gewöhnliche Lage-  
messung



**Abb. 2b**  
Spulenanordnung für intensitäts-  
unabhängige Lagemessung

fert erst die Durchführung der Division Lagesignal / Strom im hochfrequenten Bereich. Leider versagen dabei die Methoden der herkömmlichen Analogrechen-technik, welche auf der Verwendung von Verstärkerschaltungen und Rückkopplungswegen zwischen irgendwelchen Verstärkeraus- und -eingängen basieren. Es zeigt sich nämlich, dass in Rechensystemen mit Rückführungen der innere Frequenzbereich der Apparaturen wesentlich umfangreicher als der Frequenzbereich der zu verarbeitenden Eingangsgrößen sein muss. Wenn nun letztere bereits hochfrequent sind, gibt es natürlich technische Schwierigkeiten bei der Realisierung der Verstärkerschaltungen. Einen Ausweg bietet die Verwendung von auf das spezielle Problem zugeschnittenen elektronischen Funktionsgebern. Für die intensitätsunabhängige Lagemessung eignen sich Verstärkerschaltungen, welche eine dem Logarithmus des Eingangssignals proportionale Ausgangsspannung abgeben.

$$u_{\text{aus}} \sim \ln u_{\text{ein}}$$

Der Versuch, damit ein Rechenprogramm für eine Lagespule nach Abb.2a  $u_1 = B \cdot i \cdot x$  und einen getrennten Stromtrafo  $u_2 = \text{const} \cdot i$  aufzustellen, scheitert zunächst an der Möglichkeit des Nulldurchgangs der Strahl- lage, weil dort ein Pol vorhanden ist;  $\ln 0 = -\infty$ . Diese Schwierigkeit entfällt bei einer Spule nach Abb.2b  $u = i (A+Bx)$ , wenn der Faktor von  $i$  stets positiv ist. Diese Bedingung ist immer erfüllt, weil z.B. der von der rechten Spule eingefangene Fluss, für den obige Gleichung gilt, bei einer Strahlauslenkung von der Spule weg, also zu negativen  $x$ -Werten hin, dem Wert Null zustrebt, ohne ihn ganz zu erreichen (dass nominell für  $-x > A/B$  etwas negatives herauskommt, liegt an der An- nahme der fehlenden Geometrieverzerrungen. In Wirklichkeit kommen noch Glieder höherer Ordnung vor, welche aber, da sich der Bereich der Lage- messung auf kleinere  $x$ -Werte beschränken wird, vernachlässigt worden sind). Bei der intensitätsunabhängigen Lagemessung verzichtet man nun auf die getrennte Apparatur zur Intensitätsmessung und verwendet statt dessen als zweite elektrische Aussage zur Eliminierung der Lagevariablen  $x$  die zur ersten Meßschleife spiegelbildlich gelegene Spule (Abb.2b lks). Deren Klemmenspannung ergibt sich, wenn in der Formel  $x$  durch  $-x$  er- setzt wird. Das Programm der Auswertung verläuft jetzt folgendermassen:

$$\begin{aligned} \text{Spule } u_1 &= i(A+Bx) = iA(1+Bx/A) \\ \text{Spiegelbildspule } u_2 &= i(A-Bx) = iA(1-Bx/A) \end{aligned}$$

nach der logarithmischen Umformung

$$\begin{aligned} u_{\text{aus } 1} &= \ln u_1 = \ln(iA) + \ln(1+Bx/A) \\ u_{\text{aus } 2} &= \ln u_2 = \ln(iA) + \ln(1-Bx/A) \end{aligned}$$

Bei der Differenzbildung fällt  $i$  heraus

$$u_{\text{aus } 1} - u_{\text{aus } 2} = \ln(1+Bx/A) - \ln(1-Bx/A) = \ln \frac{1+\frac{B}{A}x}{1-\frac{B}{A}x}$$

Man bekommt so ein echtes Lagesignal  $u_{\text{aus}} = f(x)$ . Die Brauchbarkeit des Verfahrens ist jedoch erst sichergestellt, wenn sich die Abweichung dieser Ausgangsfunktion von einem idealen Ausgangssignal  $u_{\text{aus}} = \text{const.} \cdot x$  als hinreichend klein erweist. Zum Nachweis eignet sich die Potenzreihendarstellung

$$\ln \frac{1+m}{1-m} = 2\left(m + \frac{m^3}{3} + \frac{m^5}{5} + \dots\right) \quad \text{mit } m = \frac{B}{A} x$$

Darin liefert, da  $A$  und  $B$  Konstanten sind, das erste Glied der Reihe bereits ein richtiges Lagesignal

$$u_{\text{aus } 1} - u_{\text{aus } 2} = u_{\text{Lage}} \approx \frac{2B}{A} \cdot x$$

Der Rest der Reihe ergibt dann, durch  $m$  gekürzt, den relativen Fehler

$$\delta = \frac{m^2}{3} + \frac{m^4}{5} + \dots$$

Für  $m = 0,3$  bekommt man  $\delta = 0,032$  und  $(1+m) / (1-m) = 1,86$ . Der Fehler beträgt also erst 3 %, wenn sich die beiden Eingangsspannungen nahezu um den Faktor 2 unterscheiden, der auch etwa den experimentell erhaltenen Werten für maximale Strahlauslenkung entspricht, womit die Brauchbarkeit der Methode erwiesen ist. Danach ergibt sich eine echte Lageanzeige, wenn die von einem Spulenpaar gelieferten Spannungen in getrennten Kanälen zwei gleich aufgebauten Verstärkern mit logarith-

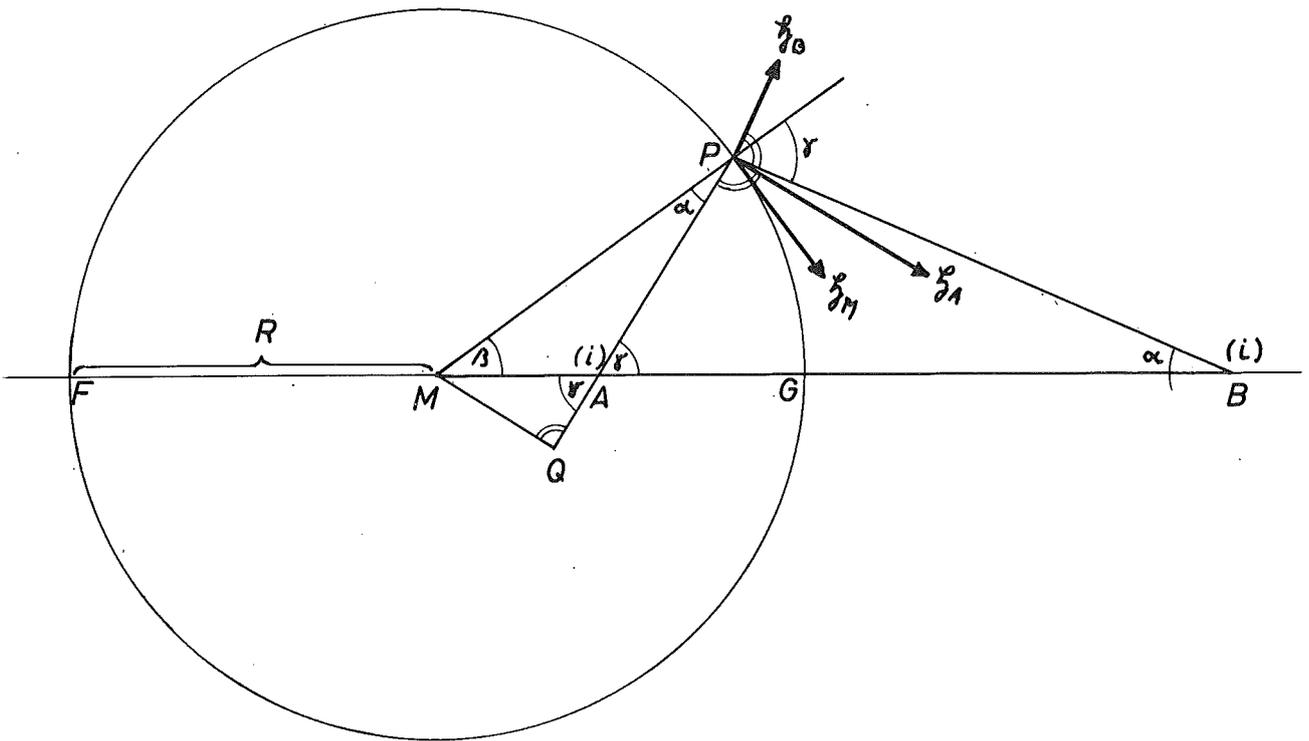


Abb. 4: Apolloniuskreis zur Ermittlung von Feldstärkekomponenten

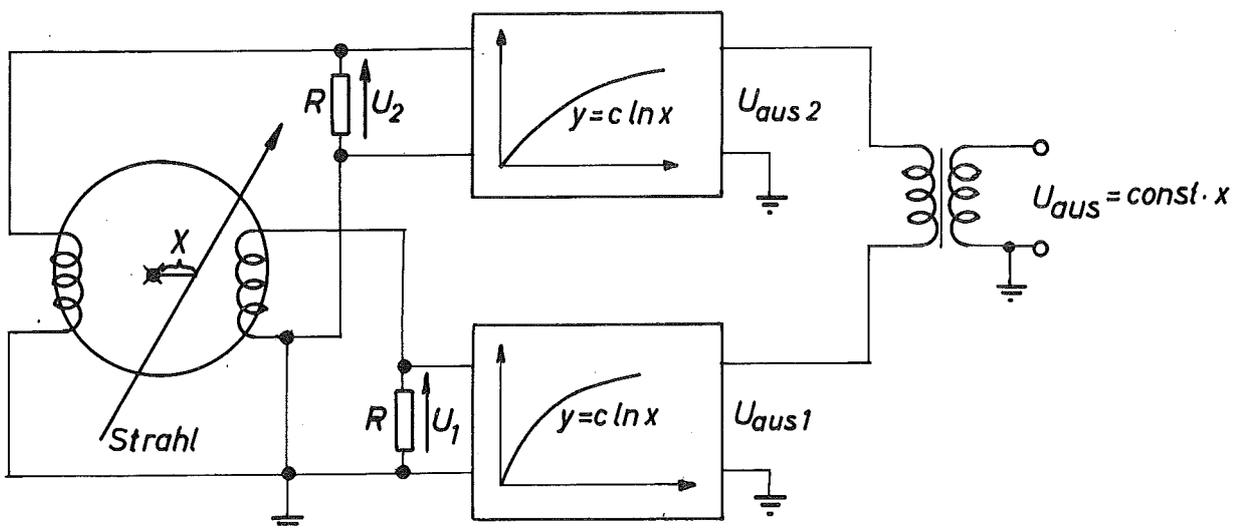


Abb. 3: Blockschema für echte Lageanzeige

mischer Amplitudencharakteristik zugeführt werden. Das an den Ausgängen derselben entstehende Differenzsignal ist dann ein intensitätsunabhängiges Lagesignal, wenn sich die Eingangsamplituden der Verstärker innerhalb ihres logarithmischen Kennlinienbereiches bewegen (Abb.3).

### Das Spulensystem

Die in Abb.2 im Prinzip dargestellten Meßspulen können entweder als Luftspulen oder als Eisenkernspulen ausgeführt werden. In letzterem Falle muss man sich den in Abb.2b bei Rotation der Meßschleifen um die z-Achse entstehenden Ring mit Eisen ausgefüllt denken. Gegen die Verwendung von Eisenkernspulen wird vielfach der Einwand erhoben, dass dieselben zur Lagemessung ungeeignet sein sollen, weil der Strahl von dem Eisenkern umschlossen wird und somit bei grosser Permeabilität wegen der Konzentration der Kraftlinien im Eisen eine Meßspule auf dem Kern unabhängig von der Strahllage praktisch immer den gleichen Fluss umfassen muss. Hiernach soll es insbesondere bei der Permeabilität unendlich keine Lageabhängigkeit mehr geben. Diese Auffassung ist jedoch irrig. Es zeigt sich vielmehr sogar noch eine Überlegenheit der Eisenkernspulen gegenüber Luftspulenanordnungen, was anschliessend nachgewiesen wird. Selbst bei praktisch unendlicher Ringkernpermeabilität ist in Wirklichkeit noch die volle Lageabhängigkeit vorhanden.

Eine theoretische Behandlung dieses Komplexes ist, obwohl es sich um Systeme in Medien mit verschiedener Permeabilität handelt, noch mit erträglichem Aufwand möglich und erleichtert die Beantwortung der Frage, ob Luft- oder Eisenkernspulen zweckmässiger sind. Es werden dabei langgestreckte Anordnungen vorausgesetzt, für welche die Berechnungsmethoden der Mehrleitersysteme anwendbar sind. Die Berechnung erfolgt in Anlehnung an ein in (1) angegebenes Verfahren, welches dort den Fall eines exzentrischen Stromes in einem Eisenzylinder erwähnt. Hier erfolgt die allgemeine, sowohl auf Eisen- als auch auf Luftspulen in zylindrischem Abschirmgehäuse anwendbare Lösung für zwei beliebige Permeabilitäten im Innen- und Aussenraum des Zylinders. Man denkt sich dazu die Abb.4 als Schnitt durch ein Mehrleitersystem mit den festen

Punkten M, A und B als Spuren von senkrecht zur Zeichenebene verlaufenden Drähten. Wahlweise können durch einen oder mehrere davon Ströme geschickt werden, wobei die in einem beliebigen Punkt P auf dem Kreis herrschenden Feldstärken interessieren. Der Radius sei mittlere Proportionale mit

$$MA / MP = \varepsilon = MP / MB \text{ als Exzentrizität}$$

daraus und aus dem gemeinsamen Winkel  $\beta$  folgt

$$\triangle MPA \sim \triangle MBP \text{ mit } MP = R$$

Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\sphericalangle MPA = \sphericalangle MBP = \alpha$$

und

$$AP / BP = MP / MB = \varepsilon$$

Es ist also auf dem ganzen Kreis, in der Geometrie Apolloniuskreis genannt, das Verhältnis der Abstände eines Punkts P von A und B konstant und damit auch das Feldstärkeverhältnis zweier gleicher durch A und B fließender Ströme in P. Für Einheitsströme durch A bzw. B ergeben sich die Tangentialkomponenten der Feldstärke

$$H_{At} = \frac{\cos \alpha}{2\pi AP} \quad \text{und} \quad H_{Bt} = - \frac{\cos \beta}{2\pi BP}$$

$$\left( \text{Es ist } \int H_{ds} = 1 = 2\pi r H ; \quad |H| = \frac{1}{2\pi r} \right)$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch vereinfachen. In dem rechtwinkligen Dreieck QMP ist

$$PQ = R \cdot \cos \alpha = AP + AQ = AP + \varepsilon \cdot R \cdot \cos \gamma$$

durch  $2\pi R \cdot AP$  gekürzt:

$$\frac{\cos \alpha}{2\pi AP} = \frac{1}{2\pi R} + \frac{\cos \gamma}{2\pi BP}$$

$\frac{1}{2\pi R}$  ist aber die Feldstärke des Einheitsstroms durch den Kreismittelpunkt. Man kann also schreiben

$$H_{At} = H_{Mt} - H_{Bt} \quad \text{für die Tangentialkomponenten.}$$

Für die Normalkomponenten ergibt sich ähnlich

$$H_{An} = \frac{\sin \alpha}{2\pi AP} \quad \text{und} \quad H_{Bn} = \frac{\sin \gamma}{2\pi BP}$$

nach dem Sinussatz ist nur  $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{BP}{AP}$

daraus folgt  $H_{An} = H_{Bn}$ . Ausserdem ist  $H_{Mn} = 0$ , weil der Leiter im Zentrum nur ein tangenciales Feld erzeugt.

Mit Hilfe dieser für den ganzen Kreis geltenden Beziehungen kann jetzt das Feld berechnet werden, wenn ein durch den Kreis angegebener Zylinder Grenzfläche zweier Medien mit verschiedener Permeabilität ist. Im Falle langgestreckter Eisenkernspulen vom Innendurchmesser  $2R$  hätte man innen Luft mit der Permeabilität  $\mu_r = 1$  und aussen Eisen mit  $\mu_r = \mu_E$  anzusetzen. Um nun das Feldbild im Luftraum für den exzentrischen Strom  $i$  durch A zu erhalten, denkt man sich das Eisen fort und an dessen Stelle einen fiktiven Strom  $i'$  durch B fliessend, der die ursprünglichen Feldverzerrungen im Luftraum wiederherstellt. Dies Verfahren ist natürlich nur dann richtig, wenn dabei die Bedingungen für Grenzflächen erfüllt bleiben, d.h. die Tangentialkomponenten der Feldstärke und die Normalkomponenten der Induktion müssen stetig ineinander übergehen. Da die Grenzkomponenten insgesamt drei linear voneinander unabhängige Terme enthalten, benötigt man auch drei zusätzliche fiktive Ströme (Bildströme), um das Problem zu lösen. Als nächsten Schritt denkt man sich, um das Feld im Eisen zu bekommen, den ganzen Raum mit Eisen ausgefüllt. Um dabei den ursprünglichen Feldverlauf im Eisen des Aussenraums zu bekommen, muss dann der Strom  $i$  in A durch die beiden noch erforderlichen Bildströme  $i''$  in M und  $i'''$  in A ersetzt werden. Die Grenzbedingungen müssen dabei wieder mit denjenigen der ersten Annahme übereinstimmen.

Im allgemeinen Fall hat man für die Feldberechnung im Kreis die Permeabilität  $\mu_I$  und die Ströme  $i$  in A und  $i'$  in B anzusetzen. Dann gilt

$$H_T \text{ innen} = i \cdot H_{At} + i' \cdot H_{Bt} = i \cdot H_{At} + i' H_{Mt} - i' H_{At}$$

$$B_N \text{ innen} = \mu_I \cdot i \cdot H_{An} + \mu_I \cdot i' \cdot H_{Bn} = \mu_I \cdot H_{An} (i + i')$$

Für das Feld im Aussenraum mit der Permeabilität  $\mu_{II}$  gilt mit den Strömen  $i''$  in M und  $i'''$  in A

$$H_T \text{ aussen} = i'' H_{Mt} + i''' H_{At}$$

$$B_N \text{ aussen} = \mu_{II} i'' H_{Mn} + \mu_{II} i''' H_{An} = \mu_{II} i''' H_{An}$$

Jetzt erfolgt die Gleichsetzung

$$H_T \text{ innen} = H_T \text{ aussen} ; (i - i') H_{At} + i' H_{Mt} = i'' H_{Mt} + i''' H_{At}$$

$$B_N \text{ innen} = B_N \text{ aussen} ; \mu_I H_{An} (i + i') = \mu_{II} i''' H_{An}$$

das bedeutet auch  $(i - i') = i'''$   
 $i' = i''$

und  $\mu_I (i + i') = \mu_{II} i'''$ . Daraus ergeben sich die Bildströme

$$i' = i'' = \frac{\mu_{II} - \mu_I}{\mu_{II} + \mu_I} \cdot i \quad \text{und} \quad i''' = \frac{2 \mu_I}{\mu_I + \mu_{II}} \cdot i$$

Diese Methode ist ausser bei Eisenkernspulen auch noch bei Luftspulen in einer zylindrischen Abschirmhülle anwendbar. In letzterem Falle setzt man für Frequenzen mit geringer Eindringtiefe (HF) formal  $\mu = 0$  für den Aussenraum an. Für einen Leiter mit Abschirmung nach Abb.6 ergibt sich danach bei  $\mu_I = 1$  und  $\mu_{II} = 0$

$$i' = -i ; (i'' \text{ und } i''' \text{ interessieren nicht}).$$

Für den Leiter im Eisenkern hat man mit  $\mu_I = 1$  und  $\mu_{II} = \mu_E$

$$i' = i'' = \frac{\mu_E - 1}{\mu_E + 1} \cdot i \quad \text{und} \quad i''' = \frac{2}{\mu_E + 1} \cdot i$$

Für den praktisch wichtigen Fall grosser Permeabilität ist näherungsweise  $\mu_E = \infty$

und  $i' = i'' = i ; i''' = 0$



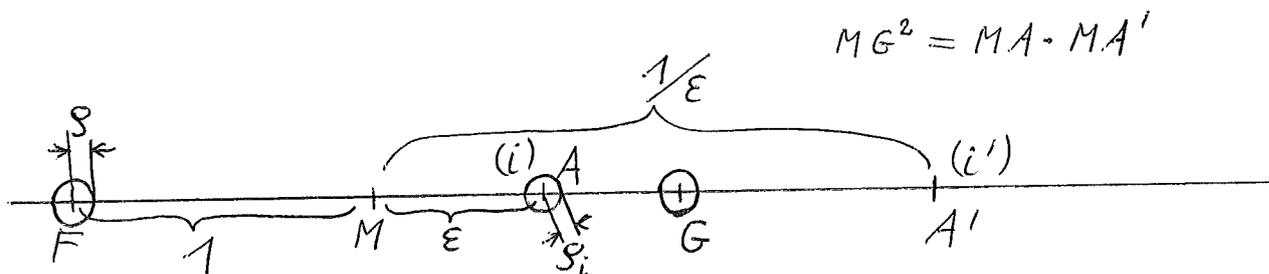
Das Verschwinden von  $i'''$  bedeutet, dass die Kraftlinien im Eisen unabhängig von der Lage des Stroms konzentrische Kreise bilden. Dann sind aber auch die unter der Voraussetzung des unbegrenzt ausgedehnten Eisenraums gewonnenen Resultate auf Rohrkerne mit endlicher Dicke anwendbar, da ja durch "Herausstanzen" solcher Kerne keine Kraftlinien zerschnitten und somit keine Feldverzerrungen im Innenraum verursacht werden können.

Zur Einführung in den Berechnungsgang dient das Beispiel einer von Eisen umgebenen Leiterschleife FG in Abb.5. Dort umfasst der mit der Schleife verkettete Fluss  $\Phi_{i(FG)}$  die Feldlinien 3 bis 8, also 5 Flusseinheiten, während es ohne Eisen nur  $6,4 - 3,7 = 2,7$  Flusseinheiten sind. Man erkennt einen durch die Anwesenheit des Eisens fast verdoppelten Spulenfluss, wobei das Feld auf der eisenfernen Seite des Leiters verdichtet und auf der eisennahen Seite verdünnt wird. Das Flusselement eines Leiters von der Länge  $z$  im Abstand  $r$  beträgt

$$d\Phi = B \cdot dF = \mu_o/\mu_r H \cdot z dr = \mu_o/\mu_r \cdot z \cdot \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r} = k \cdot \mu_r \cdot i \frac{dr}{r}$$

mit der Systemkonstante  $k = \mu_o \cdot z/2\pi = 0,2 \cdot 10^{-8} \cdot z_{(cm)} \text{ (H)}$

Der zu Abb.5 gehörende Leiterplan wird auf den Kernradius 1 normiert.



Es gelten für die Feldberechnung im Luftraum der Strom  $i$  in A und der fiktive Strom  $i' = \frac{\mu_E - 1}{\mu_E + 1} \cdot i$  in A' und der mit dem Leiter F verkettete Fluss von A ist (ohne innere Induktivitäten)

$$\Phi_{AF} = k \cdot i \left\{ \int_{S_i}^{1+\epsilon} \frac{dr}{r} + \left( \frac{\mu_E - 1}{\mu_E + 1} \right) \cdot \int_{\left(\frac{1}{\epsilon} - \epsilon\right)}^{\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)} \frac{dr}{r} \right\} =$$

$$= x \cdot i \left\{ \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho_i}\right) + \frac{\mu_E - 1}{\mu_E + 1} \ln\left(\frac{\frac{1}{\varepsilon} + 1}{\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon}\right) \right\} =$$

$$= x \cdot i \cdot \overline{M}_{AF} = i \cdot M_{AF}$$

Entsprechend gilt für den Leiter G

$$\Phi_{AG} = x \cdot i \left\{ \ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\rho_i}\right) + \frac{\mu_E - 1}{\mu_E + 1} \ln\left(\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon}\right) \right\}$$

$$= x \cdot i \cdot \overline{M}_{AG} = i \cdot M_{AG}$$

Für den mit der Schleife FG verketteten Fluss gilt

$$\Phi_{AF} - \Phi_{AG} = \Phi_{A(FG)} = i \cdot M_{A(FG)} =$$

$$= x \cdot i \left\{ \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) + \frac{\mu_E - 1}{\mu_E + 1} \ln\left(\frac{\frac{1}{\varepsilon} + 1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\right) \right\}$$

$$\Phi_{A(FG)} = x \cdot i \cdot \frac{2\mu_E}{\mu_E + 1} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Dies Ergebnis besagt, dass der Schleifenfluss in Luft ( $\mu_E = 1$ ) durch das Einbringen einer Eisenhülle mit grosser Permeabilität verdoppelt wird. In der Folge wird der Einfachheit halber bei Eisenspulen unter der Voraussetzung grosser Permeabilitäten ( $\mu_E > 100$ ) stets  $i' = i$  gesetzt. Die hier eingeführten Teilinduktivitäten  $M = x \cdot \overline{M}$  können sowohl Bestandteile von Selbst- als auch von Gegeninduktivitäten sein. So setzt sich die Selbstinduktivität einer Schleife aus zwei Teilinduktivitäten zusammen, z.B.

$$M_{FG} + M_{GF} = 2 M_{FG} = L_{FG}, \text{ wenn } \mathcal{S}_F = \mathcal{S}_G$$

die  $\overline{M}$  Werte lassen sich in der bisherigen Weise aus dem Leiterplan ablesen, wobei zu beachten ist, dass zu dem ersten Index (stromdurchflossener Leiter) immer der zugehörige Bildstrom nach Ort und Betrag berücksichtigt werden muss.

In dem mit Abschlusswiderständen versehenen System der Abb. 6 fliessen durch sämtliche Leiter Ströme und es gibt dann prinzipiell bei n Leitern n (n-1), im vorliegenden Falle bei 5 Leitern bzw. Leiterbündeln

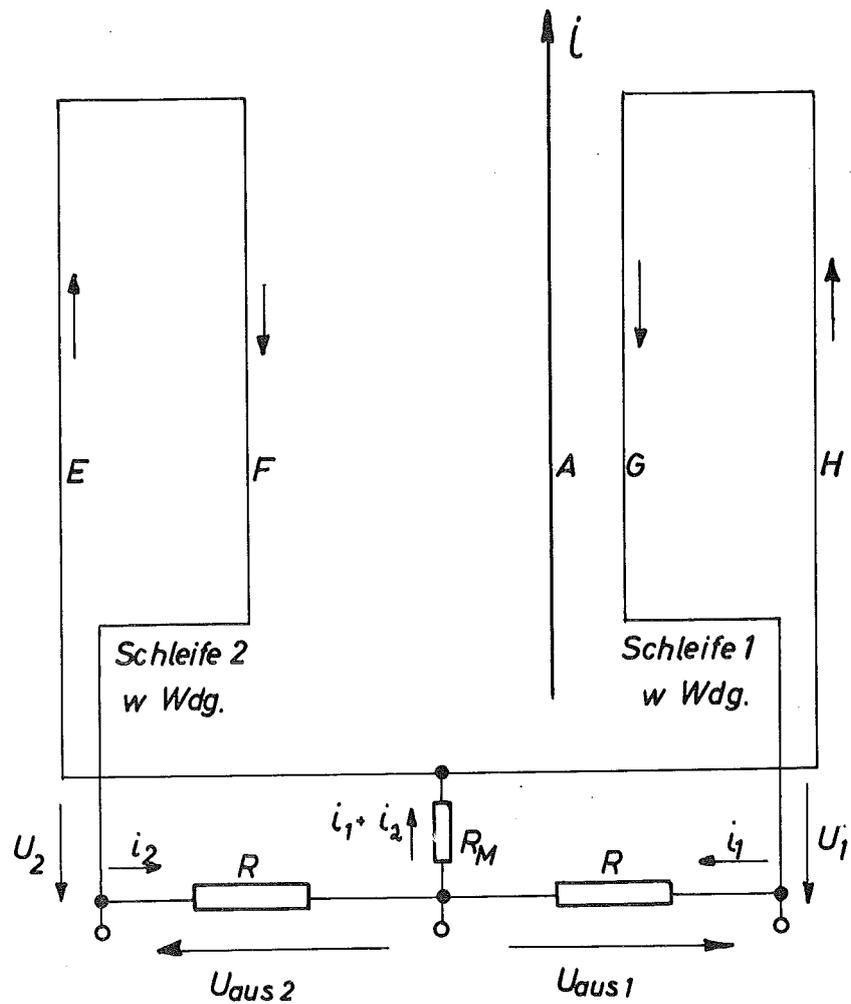
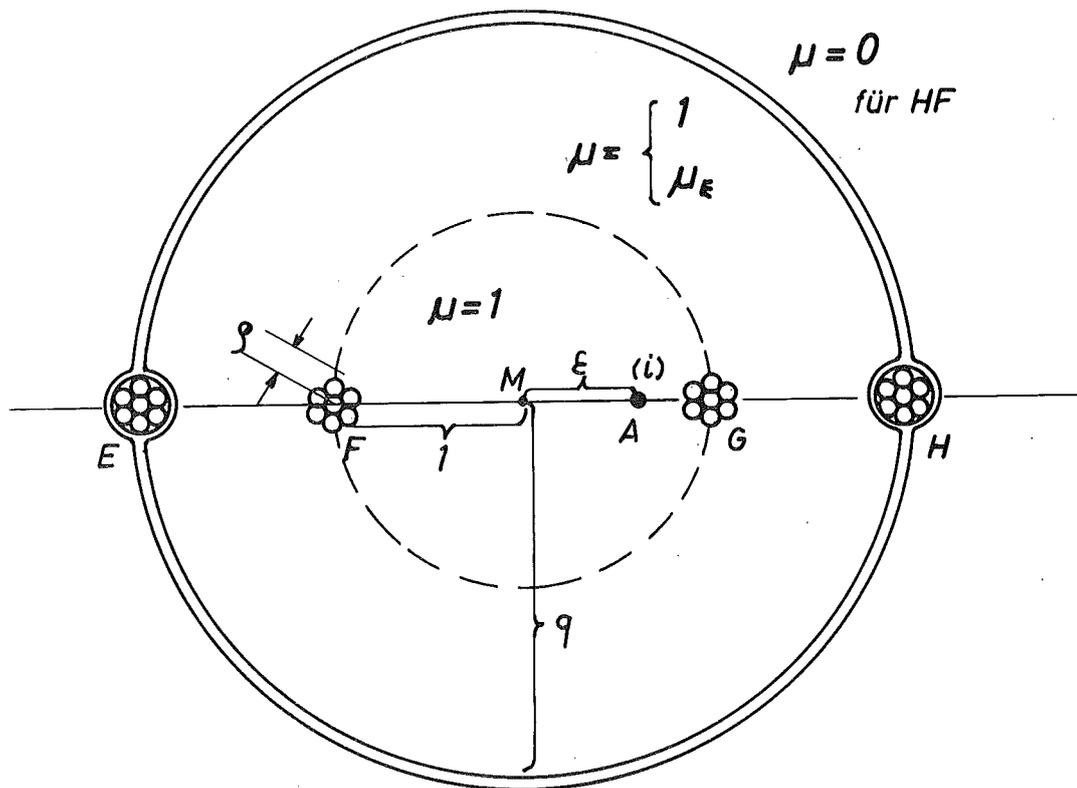


Abb. 6: Spulen in zylindrischer Abschirmhülle

20 magnetische Wechselwirkungen, welche durch Teilinduktivitäten gekennzeichnet werden können. Nun sind davon wegen der hohen Strahl-impedanz bereits die Rückwirkungen der Spulenströme auf den Strahl ( $M_{EA}, M_{FA}, M_{GA}, M_{HA}$ ) unwirksam. Der Abschirmzylinder bewirkt für Hochfrequenz gleiches magnetisches Potential der beiden in die Hülle eingebetteten Wicklungsteile. Daraus und aus Symmetriegründen folgt

$$M_{EH} = 0, \quad M_{HE} = 0, \quad M_{AH} = M_{AE}$$

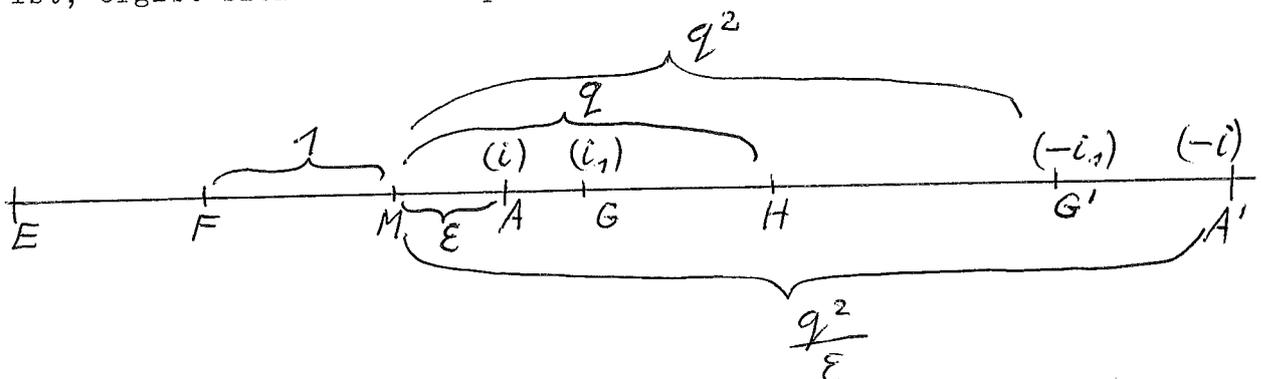
$$M_{FH} = M_{GE} = M_{FE} = M_{GH}, \quad M_{FG} = M_{GF}$$

Da nun Ströme längs der geschlossenen Hülle bekanntlich kein Magnetfeld im Innern erzeugen können, verschwinden auch alle Flussanteile mit E bzw. H als erstem Index, also

$$M_{EF} = M_{EG} = M_{HF} = M_{HG} = 0$$

In dem System sind also ausser den drei durch den Strom  $i$  hervorgerufenen Flussanteilen  $M_{AF}, M_{AG}, M_{AH}$  nur noch  $M_{GF}$  und  $M_{GH}$  zu berechnen.

Bei einer Luftspulenordnung nach Abb.6 trennt der Apolloniuskreis über EH das Innere mit  $\mu = 1$  vom Aussenraum mit  $\mu = 0$ . Für diesen Fall war  $i' = -i$ . Unter Beachtung der Tatsache, dass der Radius  $q$  mittlere Proportionale zwischen einem Punkt im Innern und dessen Spiegelpunkt ist, ergibt sich der Leiterplan



Dem Plan werden folgende Teilinduktivitäten entnommen:

$$\bar{M}_{AF} = \ln \frac{1+\varepsilon}{S_A} - \ln \frac{\frac{q^2}{\varepsilon} + 1}{\frac{q^2}{\varepsilon} - \varepsilon} = \ln \left( \frac{1+\varepsilon}{S_A} \right) \left( \frac{q^2 - \varepsilon^2}{q^2 + \varepsilon} \right)$$

$$\bar{M}_{AG} = \ln \frac{1-\varepsilon}{S_A} - \ln \frac{\frac{q^2}{\varepsilon} - 1}{\frac{q^2}{\varepsilon} - \varepsilon} = \ln \left( \frac{1-\varepsilon}{S_A} \right) \left( \frac{q^2 - \varepsilon^2}{q^2 - \varepsilon} \right)$$

$$\bar{M}_{AH} = \ln \frac{q-\varepsilon}{S_A} - \ln \frac{\frac{q^2}{\varepsilon} - q}{\frac{q^2}{\varepsilon} - \varepsilon} = \ln \left( \frac{q^2 - \varepsilon^2}{S_A q} \right)$$

$$\bar{M}_{GF} = \ln \frac{2}{S} - \ln \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} = \ln \frac{2}{S} \left( \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1} \right)$$

$$\bar{M}_{GH} = \ln \frac{q-1}{S} - \ln \left( \frac{q^2 - q}{q^2 - 1} \right) = \ln \left( \frac{q^2 - 1}{S q} \right)$$

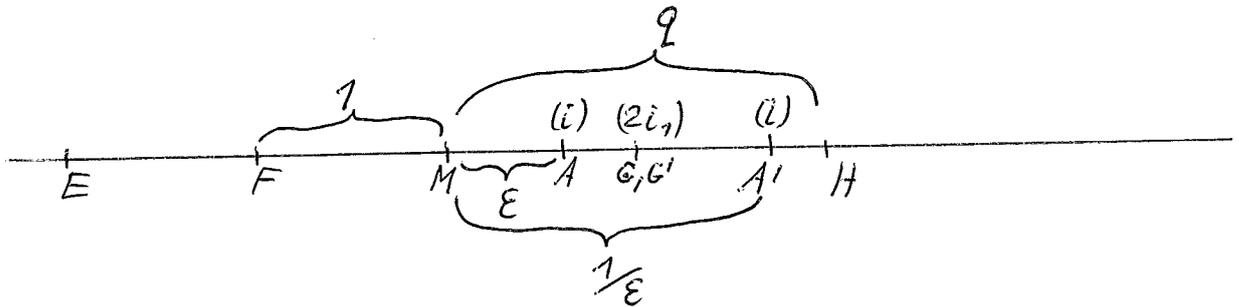
Hierbei ist  $S$  der effektive Radius der Leiterbündel und  $S_A$  der Strahlradius, welcher sich aber in den Endergebnissen heraushebt. Später werden noch folgende Kombinationen benötigt:

$$2 \bar{M}_{AH} - (\bar{M}_{AF} + \bar{M}_{AG}) = \ln \frac{(q^2 - \varepsilon^2)^2}{S_A^2 q^2} - \ln \frac{(1 - \varepsilon^2)(q^2 - \varepsilon^2)^2}{S_A^2 (q^2 + \varepsilon)(q^2 - \varepsilon)} = \ln \frac{q^4 - \varepsilon^2}{q^2(1 - \varepsilon^2)}$$

$$2 \bar{M}_{GH} - \bar{M}_{GF} = \ln \frac{(q^2 - 1)^2}{S^2 q^2} - \ln \frac{2}{S} \frac{(q^2 - 1)}{(q^2 + 1)} = \ln \frac{q^4 - 1}{2 S q^2}$$

$$\bar{M}_{AF} - \bar{M}_{AG} = \ln \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \left( \frac{q^2 - \varepsilon}{q^2 + \varepsilon} \right)$$

Die Berechnung der Teilinduktivitäten für die Eisenspulen, bei denen der Ringraum in Abb.6 mit Eisen ausgefüllt ist, basiert auf der vereinfachenden Annahme grosser Permeabilitäten, so dass für die Ermittlung der Flüsse im Eisen  $i''' = 0$  und  $i'' = i$  gesetzt werden kann. Die Grenzfläche ist der Apolloniuskreis über FG und für den Innenraum gelten dann  $i$  in A und  $i' = +i$  in A'



Für den kombinierten Eisen- und Luftfluss  $\bar{M}_{AH} = \bar{M}_{AE}$  wäre es sinnlos, den Luftanteil desselben entsprechend der jeweiligen Lage von A zu berechnen, da ja der durch die Näherung für die Bildströme  $i''$  und  $i'''$  bedingte Fehler des Eisenflusses sicher in der Grössenordnung der Luftflussänderung bei Verschiebung von A liegen würde. Man denkt sich deshalb auch für den Luftanteil des Flusses den Strom  $i$  im Zentrum fließend. Das ergibt

$$\bar{M}_{AH} = \bar{M}_{MH} = \mu_E \ln q + \ln \frac{1}{S_A}$$

Daneben ist der Eisenfluss  $\bar{M}_{GH} = \mu_E \ln q$

Die Luftflüsse betragen

$$\bar{M}_{AF} = \ln \frac{1+\varepsilon}{S_A} + \ln \frac{2\varepsilon+1}{2\varepsilon-\varepsilon} = \ln \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{S_A}$$

$$\bar{M}_{AG} = \ln \frac{1-\varepsilon}{S_A} + \ln \frac{2\varepsilon-1}{2\varepsilon-\varepsilon} = \ln \left( \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{S_A}$$

$$\bar{M}_{GF} = 2 \ln \frac{2}{S}$$

Daraus ergeben sich noch die Kombinationen

$$2 \bar{M}_{AH} - (\bar{M}_{AF} + \bar{M}_{AG}) = 2 \mu_E \ln q$$

$$2 \bar{M}_{GH} - \bar{M}_{GF} = 2 \mu_E \ln q - 2 \ln \frac{2}{S} \approx 2 \mu_E \ln q$$

Für  $\mu_E > 100$ ,  $q > 1,3$

$$\bar{M}_{AF} - \bar{M}_{AG} = 2 \ln \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)$$

Die in dem Spulensystem herrschenden Spannungen und Ströme können nun unter Beachtung der Windungszahlen und Pfeilrichtungen in Abb.6 nach den Regeln elektrischer Netzwerke berechnet werden. Im Frequenzbereich der Laplace-Transformation bekommt man als induzierte Spannungen

$$u_1 = w(M_{AH} - M_{AG}) p i - w^2 \underbrace{(M_{FH} - M_{FG})}_{M_{GH} \quad M_{GF}} p i_2 - w^2 M_{GH} p i_1$$

$$u_2 = w \underbrace{(M_{AE} - M_{AF})}_{M_{AH}} p i - w^2 \underbrace{(M_{GE} - M_{GF})}_{M_{GH}} p i - w^2 \underbrace{M_{FE}}_{M_{GH}} p i_2$$

Es seien die auf die Windungszahl  $w$  bezogenen Teilinduktivitäten  $\hat{M} = w^2 \cdot M = k \cdot w^2 \cdot \bar{M}$

Die Selbstinduktivität einer Schleife EF oder GH ist dabei  $w^2 \cdot M_{GH} = \hat{M}_{GH} = L$ . Damit erhält man

$$u_1 = (\hat{M}_{AH} - \hat{M}_{AG}) p \frac{i}{w} - (L - \hat{M}_{GF}) p i_2 - L p i_1 = \quad (I)$$

$$= R_M (i_1 + i_2) + i_1 R$$

$$u_2 = (\hat{M}_{AH} - \hat{M}_{AF}) p \frac{i}{w} - (L - \hat{M}_{GF}) p i_1 - L p i_2 = \quad (II)$$

$$= R_M (i_1 + i_2) + i_2 R$$

$$u_1 - u_2 = (\hat{M}_{AF} - \hat{M}_{AG}) p \frac{i}{w} - \hat{M}_{GF} p (i_1 - i_2) = R (i_1 - i_2) \quad (III)$$

Die Differenzspannung hängt also nicht von der Schleifeninduktivität ab. Daneben ist noch

$$u_1 + u_2 = (2\hat{M}_{AH} - \hat{M}_{AG} - \hat{M}_{AF}) p \frac{i}{w} - (2L - \hat{M}_{GF}) p (i_1 + i_2) = \quad (IV)$$

$$= (2R_M + R) (i_1 + i_2)$$

Aus III ergibt sich

$$i_1 - i_2 = \frac{i}{w} \frac{(\hat{M}_{AF} - \hat{M}_{AG}) p}{R + \hat{M}_{GF} p} = \frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2}{R} \quad (V)$$

$$\text{und } i_1 + i_2 = \frac{i \cdot (2\hat{M}_{AH} - \hat{M}_{AG} - \hat{M}_{AF})p}{w \cdot 2R_M + R + (2L - \hat{M}_{GF})p} = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2R_M + R} \quad (\text{VI})$$

Als Erregung des Systems wird die Sprungfunktion gewählt.  $i = I$  für  $t > 0$ . Dann ist  $i(p) = \frac{I}{p}$  und der Übergang in den Zeitbereich für die aus V und VI durch Addition bzw. Subtraktion gewonnenen Ausdrücke

$$\left. \begin{array}{l} u_{\text{aus } 1} \\ u_{\text{aus } 2} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} i_1 R \\ i_2 R \end{array} = \frac{R}{2} \left\{ \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2R_M + R} + \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{R} \right\} \quad (\text{VII})$$

liefert die Ausgangsspannungen

$$\left. \begin{array}{l} u_{\text{aus } 1} \\ u_{\text{aus } 2} \end{array} \right\} = \frac{I \cdot R}{2w} \left\{ \frac{2\bar{M}_{AH} - (\bar{M}_{AG} + \bar{M}_{AF})}{2\bar{M}_{GF} - \bar{M}_{GF}} \cdot e^{-\frac{(2R_M + R)}{\kappa \cdot w^2 (2\bar{M}_{GF} - \bar{M}_{GF})} t} + \frac{(\bar{M}_{AF} - \bar{M}_{AG})}{\bar{M}_{GF}} \cdot e^{-\frac{R}{\kappa \cdot w^2 \bar{M}_{GF}} t} \right\} \quad (\text{VIII})$$

Aus dieser noch allgemein gültigen Form entstehen durch Einsetzen der entsprechenden Werte für die  $\bar{M}$  getrennte Gebrauchsformeln für die beiden Bauformen.

$$\text{Luftpulen: } \left. \begin{array}{l} u_{\text{aus } 1} \\ u_{\text{aus } 2} \end{array} \right\} = \frac{I \cdot R}{2w} \left\{ \frac{\ln \left[ \frac{q^4 - \varepsilon^2}{q^2(1 - \varepsilon^2)} \right]}{\ln \left( \frac{q^4 - 1}{2\vartheta q^2} \right)} \cdot e^{-\frac{(2R_M + R)}{\kappa \cdot w^2 \ln \left( \frac{q^4 - 1}{2\vartheta q^2} \right)} t} + \left[ \frac{\ln \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \left( \frac{q^2 - \varepsilon}{q^2 + \varepsilon} \right)}{\ln \frac{2}{\vartheta} \left( \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1} \right)} \right] \cdot e^{-\frac{R}{\kappa w^2 \ln \frac{2}{\vartheta} \left( \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1} \right)} t} \right\} \quad (\text{IX})$$

Eisenkernspulen:  $\mu_E > 100$  ;  $q > 1,3$  (X)

$$\left. \begin{array}{l} u_{\text{aus } 1} \\ u_{\text{aus } 2} \end{array} \right\} = \frac{I \cdot R}{2w} \left\{ e^{-\frac{(2R_M + R)}{2\kappa w^2 \mu_E \ln q} t} + \left[ \frac{\ln \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)}{\ln \frac{2}{\vartheta}} \right] \cdot e^{-\frac{R}{2\kappa w^2 \ln \frac{2}{\vartheta} t}} \right\}$$

Für den speziellen Wert des effektiven Leiterradius  $\mathcal{S} = 0,1$  ergeben sich für kleine Strahlauslenkungen  $\mathcal{E}$  unter Berücksichtigung der Reihenentwicklungen bis zur zweiten Potenz von  $\mathcal{E}$  die vereinfachten Formeln

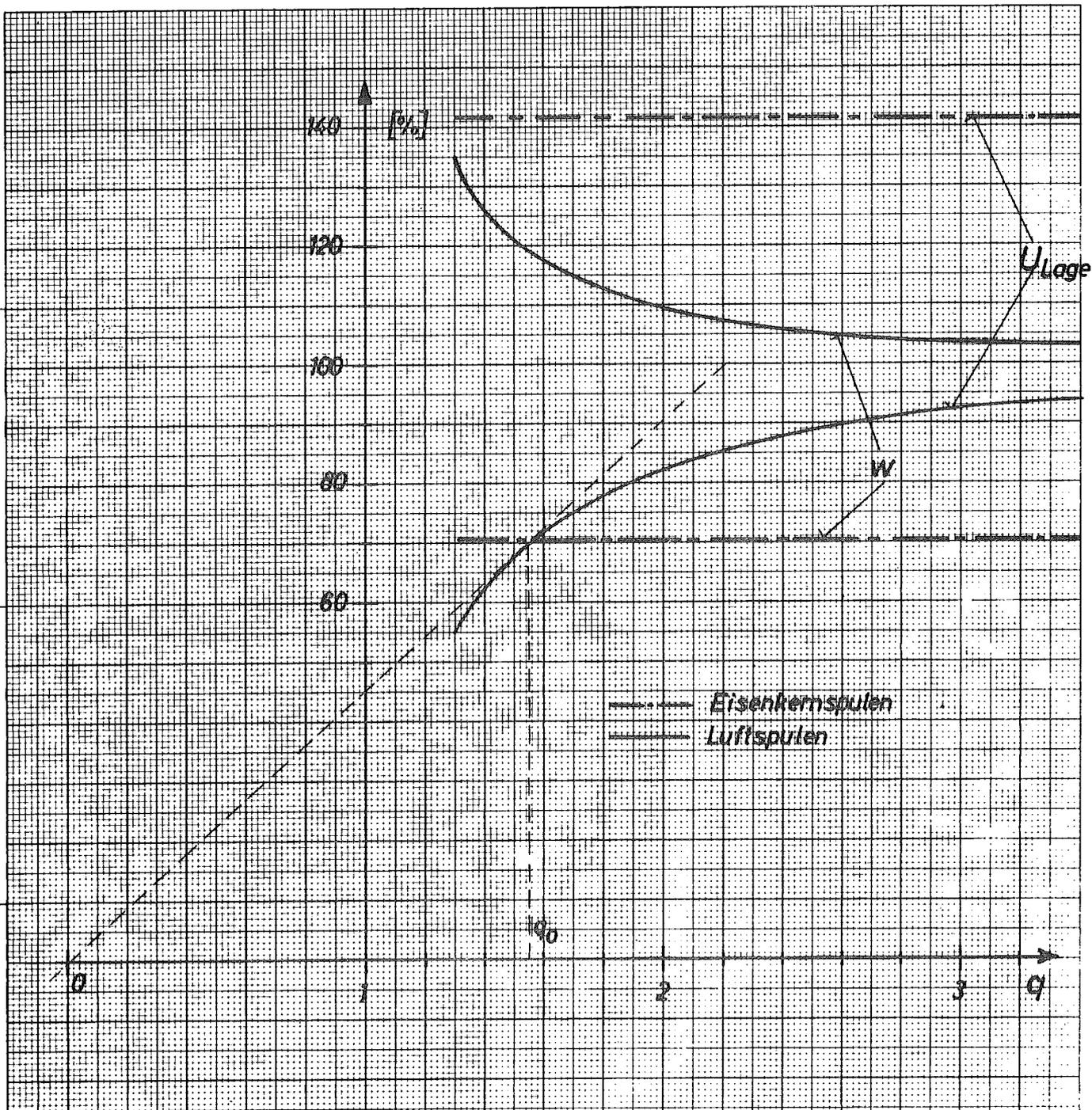
Luftspulen:  $\mathcal{S} = 0,1$

$$(XI) \quad \left. \begin{aligned} u_{\text{aus } 1} \\ u_{\text{aus } 2} \end{aligned} \right\} = \frac{I \cdot R}{2W} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\mathcal{E}^2 \left(1 - \frac{1}{q^4}\right) + \ln q^2}{1,6 + \ln \left(q^2 - \frac{1}{q^2}\right)} \right] \cdot e^{-\frac{(2R_M + R)}{\kappa W^2 [1,6 + \ln \left(q^2 - \frac{1}{q^2}\right)]} t} \\ & + \left[ \frac{2\mathcal{E} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)}{3 - \ln \left(\frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}\right)} \right] \cdot e^{-\frac{R}{\kappa W^2 \left(3 - \ln \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}\right)} t} \end{aligned} \right\}$$

Eisenkernspulen:  $\mathcal{S} = 0,1$ ;  $\mu_E > 100$ ;  $q > 1,3$

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{aus } 1} \\ u_{\text{aus } 2} \end{aligned} \right\} = \frac{IR}{2W} \left\{ e^{-\frac{(2R_M + R)}{2\kappa W^2 \mu_E \ln q} t} \pm \frac{2}{3} \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{R}{6\kappa W^2} t} \right\} \quad (XII)$$

Da die ersten Terme der Gleichungen IX und X nahezu von der Lagevariablen  $\mathcal{E}$  unabhängig sind (bei den Luftspulen gilt dies zumindest für kleine  $\mathcal{E}$ ), kann man von einem im Gleichtakt auftretenden Intensitätssignal mit der Intensitätszeitkonstanten  $\tau_i$  (Exponent  $-t/\tau_i$ ) sprechen. Diesem Signal ist der zweite lageabhängige Term mit der Lagezeitkonstante  $\tau_L$ , dem Betrage nach stets kleiner als der erste Term und Lage-signal genannt, im Gegenteil überlagert, so dass beide Ausgangsspannungen immer die gleiche Polarität aufweisen. Letztere sind unabhängig von der Baulänge, weil die Systemzeitkonstante  $\kappa = 0,2 \cdot 10^{-8}$  nur im Exponenten auftritt und damit lediglich die untere Grenzfrequenz beeinflusst. Natürlich kommt man, wenn letztere gleichgehalten wird, über eine Reduzierung der Windungszahl zu höheren Ausgangsspannungen, so ergibt sich dabei wegen  $\kappa \cdot W^2 \sim Z \cdot W^2$  bei einer Vervierfachung der Baulänge über eine Halbierung der Windungszahl eine Verdoppelung der



**Abb. 7: Amplitude des Lagesignals und Windungszahlen in Abhängigkeit vom Verhältnis Hüllendurchmesser / Spulenweite = q**

bei gleicher Lagezeitkonstante und Strahlauslenkung.

100% = Werte für Luftspulen bei  $q = \infty$  und  $\tau_L = \frac{3 \times w^2}{R}$   
 mit  $U_{\text{aus1}} - U_{\text{aus2}} = \frac{2}{3} \frac{I R}{w} \epsilon$  und  $x = 0.2 \cdot 10^{-3} Z$  [H]  
 Z in cm

Ausgangsspannungen, welche die Windungszahl im Nenner enthalten. Ein Vergleich der Formeln IX und X zeigt ferner, dass das Lagesignal der Eisenspulen unabhängig von der Weite der Abschirmhülle  $q$  und der Permeabilität  $\mu_E$  gleich dem Grenzwert ist, dem das Lagesignal der Luftspulen mit wachsender Hüllenweite zustrebt. Bezogen auf die unendlich ferne Abschirmhülle bei Luftspulen besitzen die Eisenkernspulen die doppelte Lagezeitkonstante. Dies bedeutet eine um mehr als den Faktor  $\sqrt{2}$  grössere Lageamplitude der Eisenspulen bei derselben unteren Grenzfrequenz beider Bauformen. Ein Blick auf die Gegenüberstellung beider Bauformen in Abb.7 lässt die Unterschiede bei gleicher Baulänge erkennen. Das folgende Beispiel soll die Verhältnisse veranschaulichen:

Spulenweite: 12 (cm)  
 Baulänge:  $z = 30$  (cm)  
 Abschlusswiderstände:  $R = 10$  ( $\Omega$ )  
 geforderte Lagezeitkonstante:  $T_L = 10$  ( $\mu s$ )

Dann gilt für Luftspulen mit  $q = \infty; T_L = \frac{3k \cdot w^2}{R}$

$$\text{und es ist } w = \sqrt{\frac{R \cdot T_L}{3k}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-8} \cdot 30}} = 24 \text{ (Wdg.)}$$

bei  $q = 2$  beträgt der Durchmesser der Abschirmhaube  $2 \times 12 = 24$  (cm). Bei einem Strahlstrom  $I = 1$  (mA) sei die absolute Strahlauslenkung 1 (cm). Dann ist die relative Strahlauslenkung  $\epsilon = 1/6$  und

$$u_{\text{aus } 1} - u_{\text{aus } 2} = \frac{2}{3} \frac{I \cdot R}{w} \cdot \epsilon = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{3 \cdot 24,6} = 46 \text{ } [\mu V] \text{ für } q = \infty$$

Der Übergang auf  $q = 2$  liefert aus Abb.7 110% der Windungszahl für Luftspulen, d.h. 26 Wdg. und  $24/\sqrt{2} = 17$  Wdg. für Eisenkernspulen. Für die Amplituden ergibt sich entsprechend 82% bzw.  $100 \cdot \sqrt{2}\%$  von 46 ( $\mu V$ ). Die Empfindlichkeit beträgt dann

$$3,8 \left[ \frac{\mu V}{\text{mA} \cdot \text{mm}} \right] \text{ für Luftspulen, } q = 2$$

$$6,5 \left[ \frac{\mu V}{\text{mA} \cdot \text{mm}} \right] \text{ für Eisenkernspulen, } q \geq 1,3$$

Da die Eisenspulen um den Spannungsfaktor 1,7 besser sind, müsste die

Baulänge der Luftspulen auf den  $1,7^2 = 2,9$ fachen Betrag erhöht werden, um die Empfindlichkeit der ersteren zu erreichen. Nun nehmen die Luftspulen ohnehin schon den  $(2/1,3)^2 = 2,3$  fachen Raum in der Breite als Eisenpulven mit  $q = 1,3$  ein. Eisenkernspulen gleicher Empfindlichkeit benötigen danach nur etwa  $1/6$  des Bauvolumens von Luftspulen. Eine Verdoppelung der Spulenweite hätte eine Halbierung der relativen Strahlauslenkung und damit der Ausgangsspannung zur Folge, was wiederum durch eine Vervierfachung der Baulänge ausgeglichen werden könnte, wobei ausserdem noch das Volumen durch die Verdoppelung der Hüllweite um den gleichen Faktor zunehmen würde. Bei gleicher Empfindlichkeit wächst also das Bauvolumen mit der vierten Potenz der lichten Weite der Apparatur. Die Tangente vom Ursprung an die Kurve  $u_{Lage}$  in Abb.7 liefert den Wert  $q_0 = 1,55$ , für den die Empfindlichkeit der Luftspulen bei vorgegebenem Bauvolumen zum Maximum wird. Derselbe besitzt aber nur theoretische Bedeutung, da in der Praxis meist die Baulänge und nicht das Volumen beschränkt ist, so dass grössere Werte von  $q$  angebracht sind.

Die Luftspulen bilden, da bei ihnen die Intensitätszeitkonstante nur unwesentlich grösser als die Lagezeitkonstante ausfällt, praktisch ein elektrisches System erster Ordnung. Dagegen stellen Eisenkernspulen ohne Fußpunktwidestand ( $R_M = 0$ ) stets ein System zweiter Ordnung mit zwei stark voneinander verschiedenen Zeitkonstanten dar (Abb.12a). Für das intensitätsunabhängige Verfahren ist nun, wie später noch erörtert wird, ein System erster Ordnung erwünscht. Diese Forderung lässt sich aber erfüllen, indem durch eine passende Wahl von  $R_M$  die Intensitätszeitkonstante auf den Wert der Lagezeitkonstante herabgedrückt wird. Die Bedingung für diese Widerstandsanpassung lautet

$$\tau_i = \tau_L \text{ bei } R_{M_{opt.}} = \frac{R}{6} (\mu_E \ln q - 3)$$

In dem Beispiel werde ein Ferritkern mit der Permeabilität 300 und  $q = 1,3$  verwendet. Dann ist das Verhältnis  $\tau_{i0}/\tau_L = (\mu_E \ln q)/3 = 300 \cdot 0,26/3 = 26$ , d.h.  $\tau_{i0} = 260$  ( $\mu s$ ). Im Anpassungsfall benötigt man einen Fusspunktwidestand von  $R_{M_{opt.}} = 125 \mu\Omega$ , um auf  $\tau_i = 10$   $\mu s$  zu kommen. Bei noch höheren Permeabilitäten würde derselbe entsprechend grösser

ser ausfallen, jedoch setzen die Wicklungskapazitäten eine obere Grenze, ab einigen hundert Ohm gibt es deswegen schon merkliche Verzerrungen bei den hohen Frequenzen. Da andererseits erst Permeabilitäten über 100 die volle Empfindlichkeit bei kleiner Ringdicke ergeben, sind Permeabilitäten um 200 als optimal anzusehen. Die Formel des angepassten Systems lautet

$$u_{\text{aus } 1} = \frac{I \cdot R}{2W} \left( 1 \pm \frac{2}{3} \epsilon \right) \cdot e^{-\frac{R}{6xw^2} t}$$

bei  $R_M = R_{\text{opt}}$ .

### Logarithmische Verstärker

Aus der Vielzahl der Möglichkeiten zur Erzeugung logarithmischer Kennlinien sind hier zwei mit aktiven Elementen arbeitende Methoden herausgestellt.

#### Verfahren I

Der nachstehend beschriebene Verstärker beruht auf einer Kaskadenschaltung mehrerer gleich aufgebauter Einzelverstärker mit Sättigungscharakteristik. Seine Ausgangsspannung ist gleich der Summe der Ausgangsspannungen der einzelnen Verstärker. Ein für die Auswertung der bei der induktiven Lagemessung anfallenden Eingangsgrößen geeignetes Verstärkerpaar zeigt Abb.8. Dort werden die Verstärkerausgänge zwei getrennten Summierern zugeführt, deren Ausgangsspannungen in einer anschließenden Differenzverstärkerschaltung voneinander subtrahiert, dann das endgültige intensitätsunabhängige Lagesignal liefern. Zur Erläuterung der Wirkungsweise genügt es, solche Eingangsspannungen zu betrachten, für welche ein Verstärkerausgang gerade die Sättigungsspannung  $\bar{u}_s$  erreicht hat. Die Beiträge der nicht ausgesteuerten Verstärker zur Summenbildung seien zunächst vernachlässigt. Dann gilt für einen n-stufigen Verstärker folgende Zuordnung:

$u_{\text{ein}}$	$u_{\text{aus}}$	Stufenzahl $n$
$\bar{u}_0 / V^{n-1}$	$\bar{u}_s$	letzter Verstärker ausgesteuert
$\bar{u}_0 / V^{n-2}$	$2 \cdot \bar{u}_s$	vorletzter Verstärker ausgesteuert
$\vdots$	$\vdots$	
$V^n \cdot \left(\frac{\bar{u}_0}{V^n}\right)$	$K \cdot \bar{u}_s$	$K$ Verstärker ausgesteuert
$\vdots$	$\vdots$	
$\bar{u}_0$	$n \cdot \bar{u}_s$	alle Verstärker ausgesteuert

Man setzt nun

$$\ln\left(\bar{u}_{\text{ein}} \cdot \frac{V^n}{\bar{u}_0}\right) = \alpha \cdot \sum \bar{u}_{\text{aus}}$$

Für die  $k$ te Zeile gilt dann

$$\ln V^k = k \cdot \ln V = \alpha \cdot k \cdot \bar{u}_s$$

und  $\alpha = \ln V / \bar{u}_s$  ist eine Konstante, womit der logarithmische Zusammenhang bewiesen ist. Der logarithmische Kennlinienbereich erstreckt sich etwa von der Eingangsspannung  $\bar{u}_0 / V^n$  bis zur Übersteuerung sämtlicher Verstärker, was einem Intensitätsbereich von  $V^n$  entspricht.

Da  $K$  als Anzahl der übersteuerten Verstärker nur ganzzahlig sein kann, gilt der hier nachgewiesene Zusammenhang zunächst nur für  $n$  diskrete Werte der Eingangsspannung, welche sich um Potenzen von  $V$  unterscheiden. Zur Ermittlung von Zwischenwerten müssten daneben auch die Ausgangsspannungen der nicht ausgesteuerten Verstärker berücksichtigt werden. Dabei erweist es sich als unmöglich, die Krümmung der Verstärkerkennlinie für einen durchgehend exakt logarithmischen Verlauf der Summenspannung auszulegen. In der praktischen Ausgangsfunktion ist dem Logarithmus daher noch eine gewisse Welligkeit überlagert, deren Periodenzahl gleich der Anzahl der Verstärkerstufen ist (Abb.9). Empirisch ergibt sich dabei eine etwa quadratische Abhängigkeit der Welligkeit von der Verstärkungsziffer. So darf für intensitätsabhängige Schwankungen des Lagesignals unter  $\pm 5\%$  die Verstärkung nicht wesent-

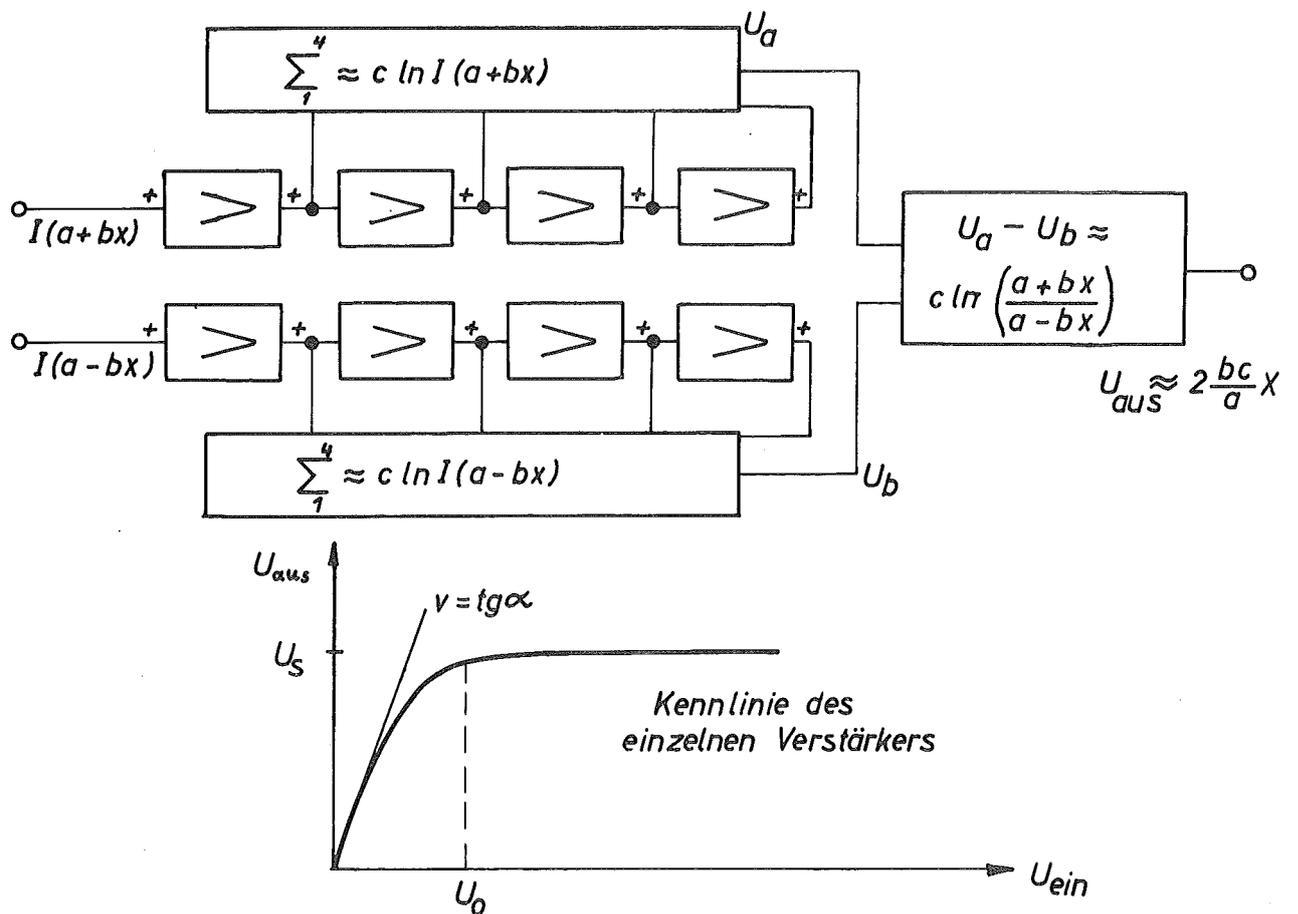


Abb.8: Logarithmisches Verstärkerpaar für phasenrichtige Verstärkerelemente ( $n=4$ )

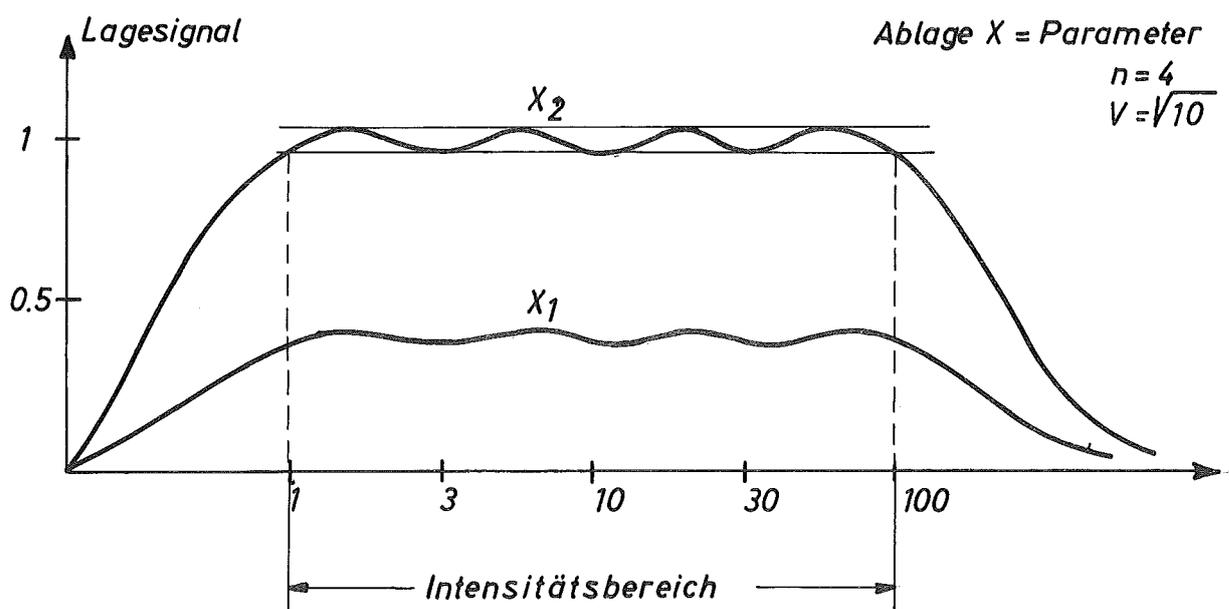


Abb.9: Abhängigkeit des Lagesignals von der Intensität beim logarithmischen Verfahren

lich grösser als 3 gewählt werden. Hieraus resultiert eine Faustregel, wonach der Intensitätsbereich in Neper die Anzahl der benötigten Stufen angibt.

Ein Verstärker des Schemas Abb.8, bei welchem sich Ein- und Ausgangsspannung in Phase befinden, benötigt zwei Röhren je Einheit, weil ja das einzelne Verstärkerelement die Phase umkehrt. Lässt man aber eine Phasenumkehr zu, so verringert sich der Aufwand auf eine Röhre je Verstärker. Dabei würde jedoch jeder zweite Verstärker dem Summierer anstelle des gewünschten positiven ein negatives Signal liefern und das Verfahren wäre unbrauchbar. Diese Schwierigkeit lässt sich aber mit einem Kunstgriff vermeiden. Man führt die Ausgangsspannungen mit der falschen Polarität einfach dem gegenüberliegenden Summierer zu (Abb.10). Im nachfolgenden Differenzverstärker wird dann die Ausgangsspannung des anderen Summierers negativ bewertet und damit im Endeffekt die richtige Polarität wieder hergestellt. Bei dieser Methode ist der Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung und der Ausgangsspannung hinter dem Summierer nicht mehr logarithmisch. Lediglich beim Betrieb des Verstärkerpaares mit nur einer Eingangsspannung, was bei der Lage-messung nicht vorkommt, tritt dann hinter dem Differenzverstärker der Logarithmus der Eingangsgrösse noch explizit auf.

## Verfahren II

An die Stelle der aus aktiven Elementen aufgebauten Verstärkerkaskade kann auch eine passive Widerstandsteilerkette nach Abb.11 treten. Dort wird die Spannung von Abgriff zu Abgriff um einen konstanten Faktor, dem Schrittverhältnis  $q$ , heruntersetzt. Die zur Erzielung des logarithmischen Effekts erforderlichen konstanten Beträge, um die sich die Ausgangsspannung bei Division der Eingangsspannung durch den Faktor  $q < 1$  ändern muss, liefern die Triodensysteme, welche bei Erhöhung der negativen Eingangsspannung nacheinander, von links nach rechts fortschreitend, in den stromlosen Zustand gesteuert werden. Ein Betrieb in der Nähe des unteren Kennlinienknicks mit  $1/2$  bis  $1/3$  der normalen Röhrensteilheit gewährleistet eine günstige Kennlinienkrümmung. Bei hinreichend kleinem gemeinsamen Anodenwiderstand können sich die Ströme in den einzelnen Systemen unabhängig voneinander ausbilden und es

findet dann eine exakte Summierung derselben statt. Die Abhängigkeit des Lagesignals von der Intensität besitzt hierbei ebenfalls den in Abb.9 gezeigten Verlauf.

### Frequenzabhängiges Verhalten

Nachfolgend werden Impulszeiten betrachtet, welche nicht mehr klein gegenüber der Eigenzeitkonstante der Meßspulen sind. Die Gleichung XII lieferte die Spannungen eines Spulenpaares nach einem Stromsprung. In allgemeinerer Schreibweise sind dies

$$u_1(t) = I(\alpha e^{-t/\tau_i} + \beta x e^{-t/\tau_i})$$

$$u_2(t) = I(\alpha e^{-t/\tau_i} - \beta x e^{-t/\tau_i})$$

Es wird jetzt  $e^{-t/\tau_i}$  vor die Klammer gesetzt:

$$\left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\} (t) = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau_i}} \left[ \alpha \pm \beta x \cdot e^{-t \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_i} \right)} \right]$$

mit x als Strahlablage

Bei angepassten Abschlusswiderständen ist  $\tau_i = \tau_L$  (siehe S.20). Dann entartet der letzte Term zum Faktor eins und es gibt nur noch die Lageszeitkonstante

$$\left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\} (t) = \alpha \cdot I \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}} \left( 1 \pm \frac{\beta}{\alpha} \cdot x \right) \text{ bei Anpassung}$$

Hinter einem Umformerpaar  $u_{\text{aus}} = c \cdot \ln \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\}$  ergeben sich

$$\frac{u_{\text{aus } 1}}{c} = \ln(\alpha I) - \frac{t}{\tau_L} + \ln \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot x \right)$$

$$\frac{u_{\text{aus } 2}}{c} = \ln(\alpha I) - \frac{t}{\tau_L} + \ln \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} \cdot x \right) \quad (\text{Abb. 14})$$

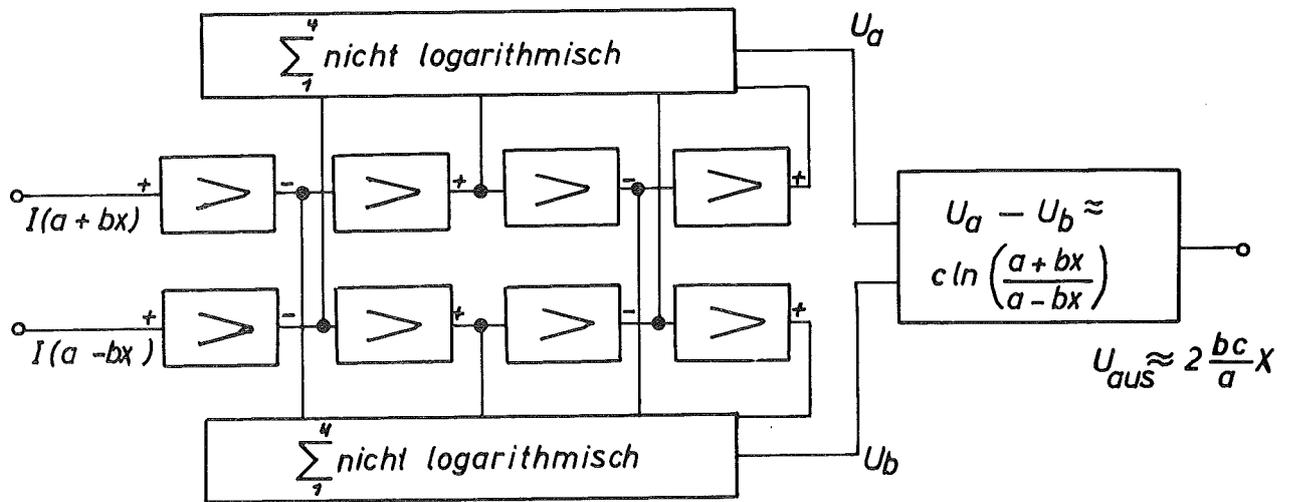


Abb.10: Verstärkerpaar für phasendrehende Verstärkerelemente ( $n=4$ )

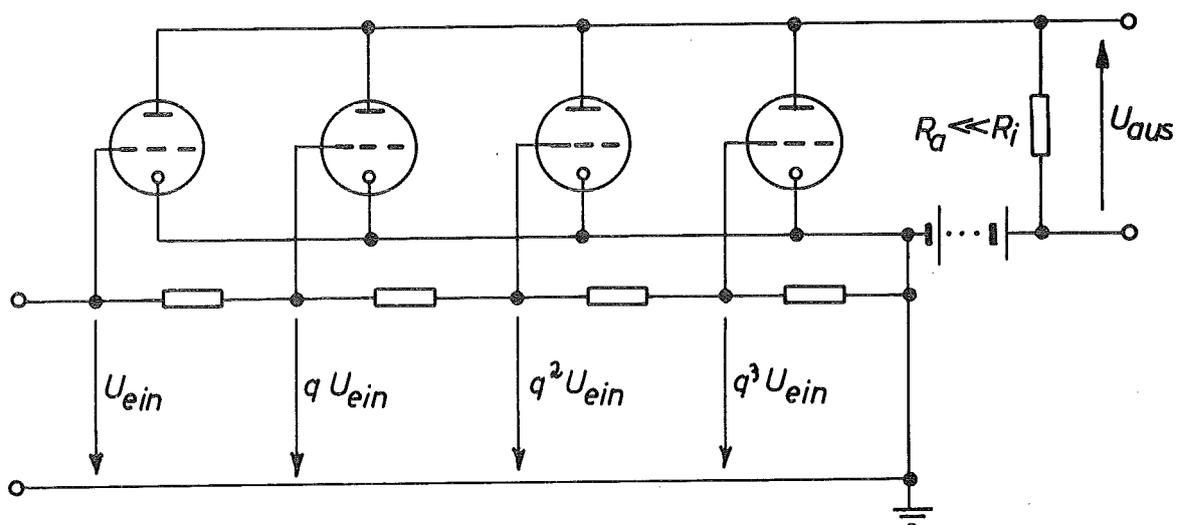


Abb.11: Prinzip des logarithmischen Verstärkers mit Teilerkette

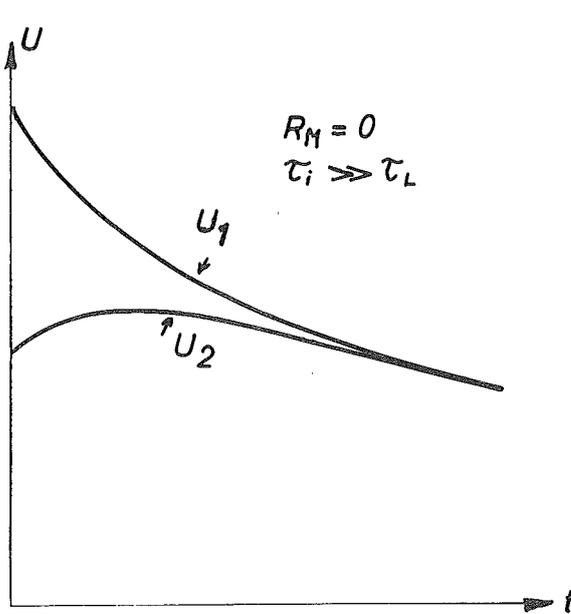


Abb. 12 a

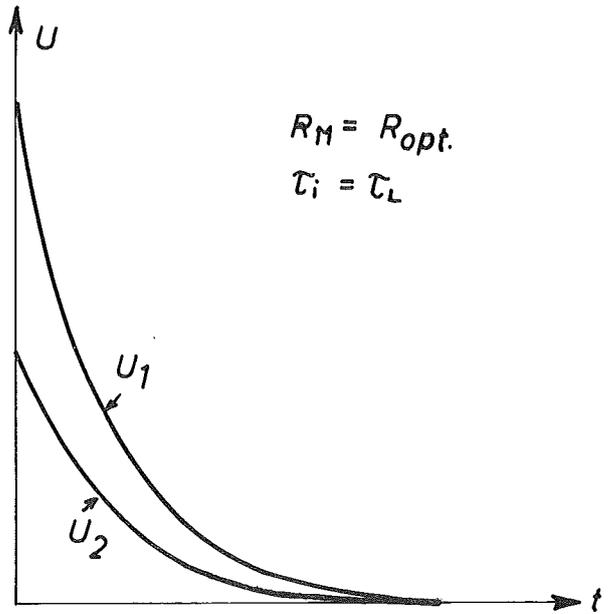


Abb. 12 b

Übergangsfunktionen eines Spulenpaares mit Eisenkern  
 a) unangepaßt      b) mit Widerstandsanpassung

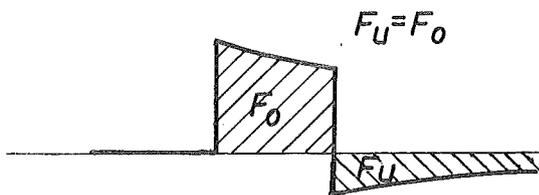


Abb. 13 a

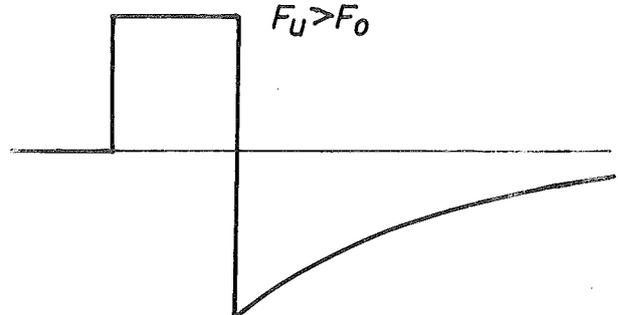


Abb. 13 b

Verzerrungen eines Rechteckimpulses  
 a) lineares System      b) hinter logar. Verstärkerpaar

Die einzelnen Amplituden fallen also zeitlinear ab. Deren Differenz ergibt wieder das Lagesignal

$$u_L = u_{\text{aus } 1} - u_{\text{aus } 2} = c \cdot \ln \left( \frac{1 + \frac{c}{a} x}{1 - \frac{c}{a} x} \right) \approx \frac{2cb}{a} \cdot x$$

In der Ausgangsspannung tritt die Zeit nicht mehr auf. Bei der intensitätsunabhängigen Lageanzeige wird also die Eigenzeitkonstante des Spulenpaares kompensiert. Damit entfällt die sonst zu beobachtende Dachschräge bei der Auswertung von rechteckförmigen Stromimpulsen, wenn für die Abschlusswiderstände der Spulenhälften die Bedingung  $R_M = R_{M\text{opt}}$  erfüllt ist.

Allerdings ist diese Kompensation in der Praxis nicht für beliebig lange Impulszeiten gültig, sondern nur solange, wie sich die Amplitude der Übergangsfunktion innerhalb des logarithmischen Kennlinienbereichs bewegt, was in der formalen Herleitung wegen des dort angenommenen idealen logarithmischen Umformers natürlich nicht zum Ausdruck kommen konnte. So wird z.B. bei einem Intensitätsbereich oberhalb 10 mA und einer Lagezeitkonstante von 5  $\mu$ s für einen Rechteckimpuls von 50 mA die Dachschräge  $5 \cdot \ln 50/10 = 8 \mu$ s lang kompensiert.

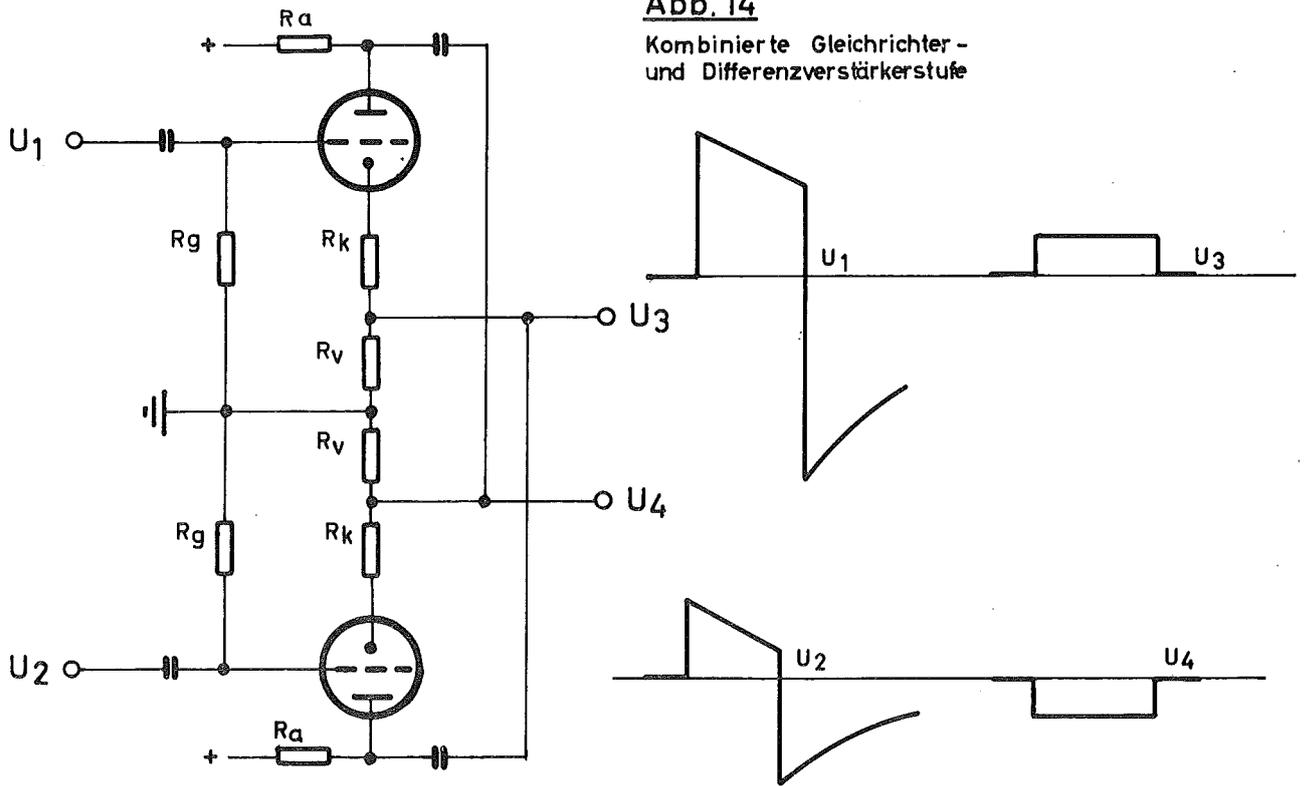
Ausser der Form des Impulsdachs interessiert bei Rechteckimpulsen noch der Amplitudenverlauf nach dem Impuls. Bei der normalen Lageanzeige ergibt sich das für lineare Systeme typische Impulsbild Abb.13a, bei welchem die Flächen oberhalb und unterhalb der Nulllinie gleich sind, weil Spulen keinen Gleichstrom übertragen können. Bei im Verhältnis zur Zeitkonstante kleinen Impulslängen ist dieses Überschwingen gering und stört nur unwesentlich. Im Gegensatz hierzu gibt es beim intensitätsunabhängigen Verfahren Schwierigkeiten, weil dann wegen des Gleichrichtereffekts der logarithmisch gekrümmten Kennlinien  $F_u > F_o$  wird. Man kann dies auch so deuten: Da der Logarithmus nur für positive Argumente existiert, muss schon vor dem Nulldurchgang des Arguments, d.h. der Eingangsspannung, der logarithmische Kennlinienbereich und die damit verbundene Amplitudenkontraktion nicht mehr gültig sein (praktisch gibt es ja immer einen Intensitätsschwellwert, oberhalb dessen die Apparatur erst intensitätsunabhängig arbeitet). Demzufolge

wird das Überschwingen nach einem Impuls etwa intensitätsproportional sein. Bei grösseren Intensitäten kann dabei sogar das negative Überschwingen grösser als die positive logarithmische Impulshöhe ausfallen, was natürlich stören würde. Abhilfe hiergegen schafft eine Gleichrichtung der Signale hinter den Ausgängen eines logarithmischen Verstärkerpaares. Der nachfolgende Differenzverstärker zur Gewinnung des Lage-signals vermag, wenn jede Eingangsspannung desselben für sich gleichgerichtet wird, nach wie vor je nach Strahllage sowohl positive als auch negative Polarität abzugeben. Die Elektronik für die intensitäts-unabhängige Lagemessung enthält daher ausser dem logarithmischen Verstärkerpaar ein Gleichrichterpaar sowie den Differenzverstärker, der eine gute Gleichtaktunterdrückung aufweisen muss. Die beiden letztgenannten Funktionen lassen sich auch in einer Röhrenstufe nach Abb.14 vereinigen. Die Schaltung wird mit positiven Impulsen betrieben und liefert die Differenz der Eingangsspannungen im Gegentakt. Die Kathoden-vorwiderstände  $R_V$  sind so hochohmig, dass die Triodensysteme als Anodengleichrichter arbeiten. Die Kathodenwiderstände  $R_M$  linearisieren die dynamische Röhrenkennlinie und verhindern eine Übersteuerung der Röhren durch grosse Eintaktkomponenten. Die Verstärkung ist wie bei der Anodenbasisschaltung kleiner als eins.

Bisher sind als Erregung Einzelimpulse angenommen worden. Für die Verarbeitung beliebig langer Pulsfolgen mit im Verhältnis zur Spulenzzeitkonstante kleinen Impulsabständen eignet sich der direkt gekoppelte logarithmische Verstärker nach Abb.11, wobei noch zusätzlich durch eine parallel zum Eingang geschaltete Diode ein Überschwingen der Eingangsspannung nach positiven Werten in den Impulslücken vermieden wird. Dann stellt sich, wenn der Strom periodisch auf Null zurückgeht, wie es z.B. in den Inflektorlücken des DESY-Synchrotrons der Fall ist, nach jedem Impuls zwangsläufig der ursprüngliche Zustand am Verstärker-eingang wieder ein. Der Aussteuerbereich des im allgemeinen kapazitiv angekoppelten Vorverstärkers muss dabei wegen der unvermeidlichen Abhängigkeit des Arbeitspunkts vom Tastverhältnis gegenüber dem Bereich für die Verarbeitung von Einzelimpulsen verdoppelt werden. Die Impuls-formerstufe hinter dem logarithmischen Verstärker ist nach Abb.14b abzuwandeln. In der dortigen Schaltung lautet die Bedingung für die

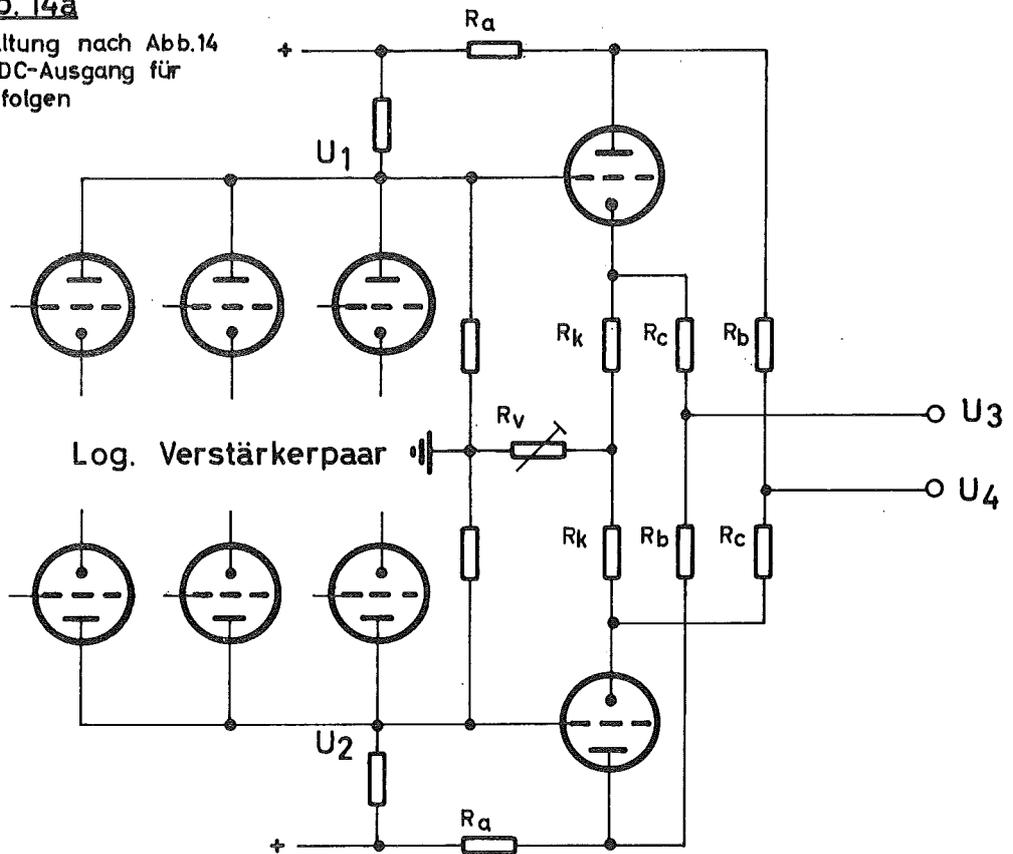
**Abb. 14**

Kombinierte Gleichrichter-  
und Differenzverstärkerstufe



**Abb. 14a**

Schaltung nach Abb. 14  
mit DC-Ausgang für  
Pulsfolgen



Gleichtaktunterdrückung  $R_b/R_c = R_a / (R_k + 2R_v)$ . Die Anodenspannungsteiler des Verstärkers sind so auszulegen, dass die Röhren des Impulsformers im Ruhezustand gerade gesperrt sind. Auch die dahinter liegende Schaltung sollte durchgehend bis zu den Ausgangsklemmen des Endverstärkers in Gleichstromkopplung ausgeführt werden. Dann kann man neben der oszillographischen Beobachtung noch den Lagemittelwert von Impulsfolgen mit einem Gleichstrominstrument ablesen.

### Rauschverhalten

Die von einem Spulenpaar gelieferte Gleichtaktkomponente der Klemmenspannungen, das Intensitätssignal, beträgt stets ein Vielfaches der Gegentaktkomponenten des Lagesignals bei den rauschmässig kritischen kleinen Strahlauslenkungen. Es genügt deshalb, für Rauschuntersuchungen lediglich das Lagesignal heranzuziehen. Als Gütekriterium hat sich der Begriff "Grenzempfindlichkeit" eingebürgert. Hier sei die Grenzempfindlichkeit diejenige Strahlauslenkung in mA x mm, für welche am Verstärkerausgang die Leistung des Lagesignals gleich der Leistung des inneren Störpegels ist. Dabei ist eine Erregung mit Rechteckimpulsen vorausgesetzt. In der Praxis wählt man aber anstelle des Ausgangs einen weiter vorne liegenden Bezugspunkt zum Leistungsvergleich, hinter dem keine zum Rauschen merklich beitragenden Schaltelemente mehr liegen. Bei der Kathodenbasisschaltung kann dieser Punkt bereits das Gitter der ersten Verstärkerröhre sein.

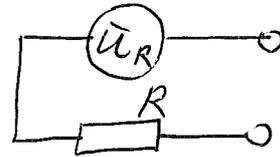
Das Rauschen von Elektronenröhren wird unterhalb 10 KHz durch das mit abnehmender Frequenz anwachsende Funkelrauschen bestimmt, während bei höheren Frequenzen das frequenzunabhängige Schrotrauschen massgebend ist. In dem Beispiel auf Seite 19 entspricht die Lagezeitkonstante von 10  $\mu$ s einer unteren Grenzfrequenz von 16 KHz. Dann kann der im Bereich des Schrotrauschens gültige äquivalente Rauschwiderstand  $R_{\text{äq}}$  benutzt werden. Dabei wird das Röhrenrauschen durch das Rauschen eines vor dem Gitter gedachten ohmschen Widerstandes  $R_{\text{äq}}$  ersetzt. Nach Lit. [2] gilt für Trioden

$$R_{\text{äq}} \approx \frac{3}{S}$$

Ohmsche Widerstände zeigen ein weisses Rauschen. Dessen Anteil inner-

halb eines  $\Delta f$  breiten Frequenzbandes gehorcht der Nyquistformel

$$\Delta N = 4kT_0 \Delta f = \bar{u}_R^2 / R$$



Rauschersatzschaltung

Darin sind

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} [W_s / ^\circ K]$  Boltzmannkonstante

$T_0 = 293 [^\circ K]$  Rauschbezugstemperatur

$\bar{u}_R^2 =$  mittleres Betragsquadrat des Effektivwerts der Rauschspannung (Rauschspannungsquadrat)

So ist für eine Triode mit der Steilheit  $S = 10 \text{ mA/v}$  der Widerstand  $R_{\text{äq}} = 300 \Omega$  und das Rauschspannungsquadrat desselben

$$u_R^2 = 1200 k T_0 \Delta f$$

In elektrischen Netzwerken mit Blindwiderständen wird das weisse Rauschspektrum der ohmschen Widerstände durch die Frequenzabhängigkeit der ersteren verzerrt. Die sich dann ergebende Rauschtönung ist vom Frequenzgang  $\bar{u}_{\text{Raus}} / \bar{u}_{\text{Rein}} = \eta(f)$  abhängig. Aus dem Rauschspannungsquadrat des Widerstandes im Leerlauf

$$\Delta N_R \sim \bar{u}_{\text{Rein}}^2 = 4kT_0 R \cdot \Delta f \quad (1)$$

wird dann in einem Bezugspunkt mit dem Frequenzgang  $\eta(f)$

$$N_{\text{Raus}} \sim \bar{u}_{\text{Raus}}^2 = 4kT_0 R \int_{f_{\text{ü}}}^{f_0} |\eta|^2 df \quad (2)$$

als Integral der spektralen Leistungsverteilung über die Bandbreite. Beim Zusammenwirken einer Signalspannungsquelle mit mehreren Rauschquellen (Röhren, Widerstände), welche den inneren Störpegel repräsentieren, ergibt sich die Grenzepfindlichkeit, wenn die Signalleistung gleich der Summe aller im Bezugspunkt wirksamen, von den nicht korrelierten Rauschquellen herrührenden Rauschleistungsanteile gesetzt wird. Man kann aber auch die Summe der durch einen konstanten Faktor mit der Leistung verknüpften Rauschspannungsquadrate dem Nutzspannungsquadrat

des Lagesignals gleichsetzen. Letzteres tritt als Gegentaktkomponente an zwei symmetrischen Bezugspunkten des von den beiden Spulenhälften gespeisten Zweikanalverstärkers auf. Während die Rauschquellen  $\bar{u}_R$  der Verstärkerhälften nicht korreliert sind und sich im Gegentaktsignal zur  $\sqrt{2}$  fachen Amplitude entsprechend  $2 \bar{u}_R^2$  zusammensetzen, liefert das Nutzsinal die doppelte Amplitude einer Hälfte entsprechend  $4 \bar{u}_N^2$  wenn  $\bar{u}_R$  bzw.  $\bar{u}_N$  für eine Verstärkerhälfte berechnet werden. Für die Grenzemfindlichkeit gilt daher

$$2 \bar{u}_N^2 = \sum \bar{u}_R^2 \quad (3)$$

Nach Formel XII beträgt das Lagesignal von Eisenkernspulen, welche mit einem Sprung I des Strahlstroms erregt werden, für eine Hälfte der Schaltung

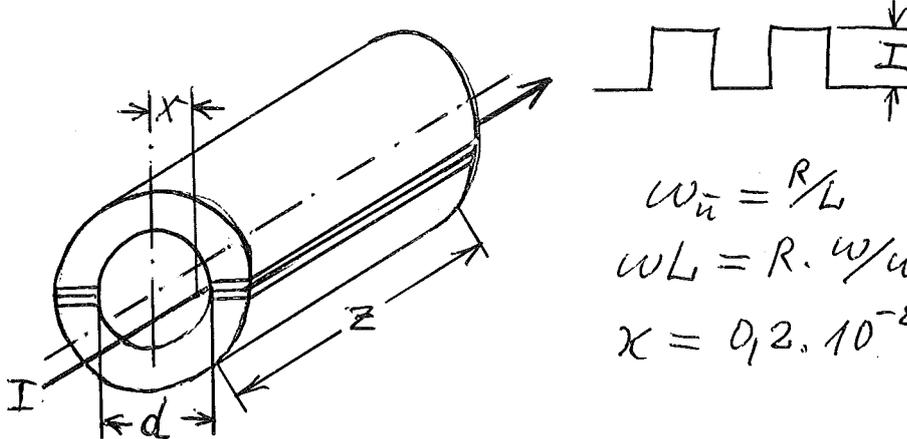
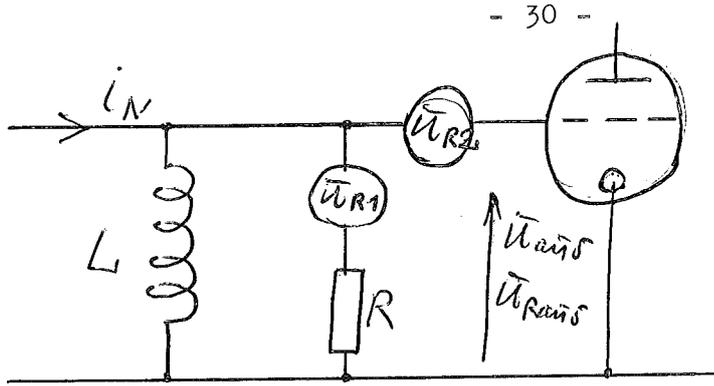
$$\bar{u}_{Lage} = \frac{\epsilon}{3w} \cdot IR \cdot e^{-\frac{R}{6\pi w^2} t} \quad (4)$$

Während sich die Definition der Grenzemfindlichkeit bei der angenommenen rechteckförmigen Erregung auf den Sprungwert I bezieht, ist für den Spannungsvergleich der Effektivwert I/2 massgebend. Dann wird die effektive Nutzsannung

$$\bar{u}_N = \frac{\epsilon}{6w} IR \cdot e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{R}{3w} \left( \frac{x \cdot I}{d} \right) e^{-\frac{R}{L} t} = i_N \cdot R \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \quad (5)$$

mit  $L = 6\pi w^2$  und  $\epsilon = 2x/d$

Die Frequenz der Erregung sei so gross, dass  $e^{-\frac{R}{L} t} \approx 1$  gesetzt werden kann., Für die Speisung einer Kathodenbasisschaltung gilt nachstehendes Ersatzschaltbild



$$\omega_{\bar{u}} = R/L$$

$$\omega L = R \cdot \omega / \omega_{\bar{u}}$$

$$x = 0,2 \cdot 10^{-8} \cdot z$$

Die obere Grenzfrequenz  $\omega_0$  wird im Endverstärker bewirkt. Im einzelnen gilt für

Rauschquelle Röhre:  $\bar{u}_{R2}^2 = \frac{2kT_0}{\pi} R_{\bar{u}q} \cdot \Delta\omega$

Rauschquelle R :  $\bar{u}_{R1}^2 = \frac{2kT_0}{\pi} R \cdot \Delta\omega$

Der Frequenzgang des Widerstandsrauschens ist

$$\eta_1 = \frac{\bar{u}_R}{\bar{u}_{R1}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \quad \text{und} \quad |\eta_1|^2 = \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} = 1 - \frac{1}{1 + (\omega/\omega_{\bar{u}})^2}$$

und daraus das Rauschen im Bezugspunkt

$$\bar{u}_{Raus1} = \frac{2kT_0}{\pi} \cdot R \int_0^{\omega_0} |\eta_1|^2 d\omega = \frac{2kT_0}{\pi} \cdot R \left[ \omega - \omega_{\bar{u}} \arctg \frac{\omega}{\omega_{\bar{u}}} \right]$$

$$= \frac{2kT_0}{\pi} \cdot R (\omega_0 - \omega_{\bar{u}} \arctg \frac{\omega_0}{\omega_{\bar{u}}}) \approx \frac{2kT_0}{\pi} R \omega_0$$

Der Arcusterm ist zu vernachlässigen, da bei aperiodischer Abtastung immer  $\omega_0 \gg \omega_{\bar{u}}$  ist. Die Kathodenbasisschaltung liefert also ein praktisch weisses Rauschen. Für das Röhrenrauschen gilt noch

$$\eta_2 = 1 \quad \text{und} \quad \bar{u}_{Raus2}^2 = \frac{2kT_0}{\pi} R_{\bar{u}q} \cdot \omega_0$$

Jetzt werden die Nutz- und Rauschanteile gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} \sum \tilde{u}_{\text{Raus}}^2 &= \frac{2kT_0}{\pi} (R + R_{\text{äq}}) \omega_0 = 2 \tilde{u}_N^2 = \frac{2R^2}{9w^2} \left( \frac{xI}{d} \right)^2 = \\ &= \frac{2}{9} \frac{R^2}{L} \cdot 6\kappa (\dots)^2 = \frac{4}{3} \kappa R \omega_{\tilde{u}} \left( \frac{x \cdot I}{d} \right)^2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Grenzempfindlichkeit bei der aperiodischen Abtastung über langgestreckte Eisenkernspulen mit Kathodenbasiseingang

$$(x \cdot I)_{KB} = d \cdot \sqrt{\frac{3 k T_0}{2 \pi \kappa} \cdot \frac{f_0}{f_{\tilde{u}}} \left( 1 + \frac{R_{\text{äq}}}{R} \right)} \quad (6)$$

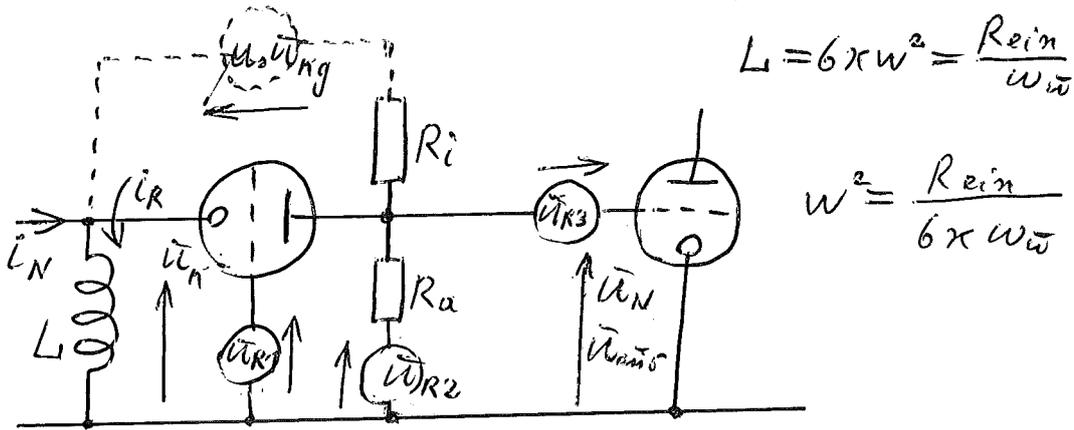
Durch Einsetzen der Zahlenwerte für die Konstanten entsteht daraus die Gebrauchsformel

$$\left( x_{\text{[mm]}} \cdot I_{\text{[mA]}} \right)_{KB} = \frac{d_{\text{[cm]}}}{100 \sqrt{z_{\text{[cm]}}}} \cdot \sqrt{\frac{f_0}{f_{\tilde{u}}} \left( 1 + \frac{R_{\text{äq}}}{R} \right)} \quad (7)$$

Um etwas konkretes vor Augen zu haben, wird an das Beispiel von S. 19 angeknüpft. Bei einer angenommenen oberen Grenzfrequenz  $f_0 = 10$  MHz ist bei  $\tau = 10 \mu\text{s}$   $f_u = 16$  KHz, d.h.  $f_0/f_u = 600$ . Mit der Spulenlänge  $z = 30$  cm, der Spulenweite  $d = 12$  cm, den beiden Abschlusswiderständen  $R = 150 \Omega$  und Trioden mit  $S = 10$  mA/v in der ersten Verstärkerstufe ergibt sich  $R_{\text{äq}} = 300 \Omega$  und

$$(x \cdot I) = \frac{12}{100} \cdot \sqrt{\frac{600}{30}} \cdot \sqrt{3} = 0,12 \sqrt{60} = 0,93$$

Man bekommt also  $1 \text{ [mA} \times \text{mm]}$  als Grenzempfindlichkeit bei ohmschem Spulenabschluss. Sollte diese Empfindlichkeit noch nicht befriedigen, muss zu elektronischen Eingangswiderständen übergegangen werden. Hier bietet sich zunächst die Gitterbasisschaltung an.



Es gilt für das Nutzsignal der elektronische Eingangswiderstand

$$R_{\text{ein}} = \frac{\bar{u}_N}{i_N} = \frac{\bar{u}_R(R_a + R_i)}{\bar{u}_N + \mu \bar{u}_R} = \frac{R_a + R_i}{\mu + 1} = \omega_w \cdot L \approx \frac{R_a + R_i}{\mu} \quad (8)$$

Der Bezugspunkt ist jetzt das Gitter der zweiten Röhre. Analog der Entwicklung bei der Kathodenbasisschaltung bekommt man für das Nutzsignal entsprechend der Gleichung (5)

$$\bar{u}_N = i_N R_a = \frac{R_a}{3w} \left( \frac{x \cdot I}{d} \right) \text{ und}$$

$$2\bar{u}_N^2 = \frac{2R_a^2}{9w^2} \left( \frac{x \cdot I}{d} \right)^2 = \frac{2R_a^2 \cdot 6xw_w}{9R_{\text{ein}}} (\dots)^2 = \frac{4}{3} x \frac{R_a^2}{R_{\text{ein}}} w_w \left( \frac{x \cdot I}{d} \right)^2$$

Für die Rauschquellen gilt:

$$\text{Röhren: } \bar{u}_{R1}^2 = \bar{u}_{R3}^2 = \frac{2kT_0}{\pi} R_{\text{äq}} \Delta \omega$$

$$\text{Anodenwiderstand: } \bar{u}_{R2}^2 = \frac{2kT_0}{\pi} R_a \Delta \omega$$

Anhand des Ersatzschaltbildes wird nun die Übertragungsfunktion der Rauschanteile ermittelt

$$\mu(\bar{u}_{R1} - i_R j \omega L) + \bar{u}_{R2} = i_R (R_a + R_i + j \omega L)$$

$$\bar{u}_{\text{aus}} = \bar{u}_{R2} + \bar{u}_{R3} - i_R \cdot R_a$$

Es ist noch

$$R_a + R_i = \mu R_{\text{ein}} \text{ und } \omega L / R_{\text{ein}} = \omega / \omega_w$$

Man erhält dann

$$\bar{u}_{aus} = \bar{u}_{R2} + \bar{u}_{R3} - \frac{R_a (\mu \bar{u}_{R1} + \bar{u}_{R2})}{\mu R_{ein} (1 + j \omega / \omega_{\bar{u}})}$$

für die Rauschanteile.

Die drei Rauschquellen sind voneinander unabhängig und es werden deshalb bei der Ermittlung des Frequenzgangs  $\eta_v$  jeweils alle von  $\bar{u}_{Rv}$  verschiedenen Rauschkomponenten Null gesetzt. Auf diese Weise ergeben sich

$$-\frac{\bar{u}_{aus}}{\bar{u}_{R1}} = \eta_1 = \frac{R_a}{R_{ein} (1 + j \omega / \omega_{\bar{u}})} ; \frac{\bar{u}_{aus}}{\bar{u}_{R3}} = \eta_3 = 1$$

$$\frac{\bar{u}_{aus}}{\bar{u}_{R2}} = \eta_2 = 1 - \frac{R_a}{\mu R_{ein} (1 + j \omega / \omega_{\bar{u}})} \approx 1 \text{ für } \omega / \omega_{\bar{u}} \gg 1$$

$$|\eta_1|^2 = \frac{R_a^2}{R_{ein}^2} \cdot \frac{1}{[1 + (\omega / \omega_{\bar{u}})^2]} ; |\eta_2|^2 = 1 ; |\eta_3|^2 = 1 \quad (9)$$

Hier ist im Gegensatz zur Kathodenbasisschaltung kein weisses Rauschen mehr vorhanden, sondern die Gitterbasisschaltung bevorzugt wegen der Frequenzabhängigkeit im Nenner von  $\eta_1$  die tiefen Frequenzen, was auch ohne mathematische Herleitung plausibel ist, weil das Rauschen der ersten Röhre durch den im Kathodenkreis liegenden Blindwiderstand der Spule bei höheren Frequenzen stärker gegengekoppelt wird. Die Grenzempfindlichkeit ergibt sich wieder durch Gleichsetzung der Rausch- und Nutzspannungsquadrate.

$$\sum \bar{u}_{aus}^2 = \frac{2KT_0}{en} \left\{ R_{\bar{u}g} \int_0^{\omega_0} |\eta_1|^2 d\omega + (R_a + R_{\bar{u}g}) \int_0^{\omega_0} d\omega \right\}$$

$R_{\bar{u}g} \ll R_a$

Obwohl durch einen Hochpass im Endverstärker das Rauschspektrum unterhalb  $\omega_{\bar{u}}$  herausgefiltert werden könnte, wird, um sicher zu geben, mit der ungünstigeren Integrationsgrenze Null gearbeitet.

Es ist

$$\int_0^{\omega_0} |\eta_1|^2 d\omega = \frac{R_a^2}{R_{ein}^2} \omega_{\bar{u}} \int_0^{\omega_0} \frac{d(\omega/\omega_{\bar{u}})}{1 + (\omega/\omega_{\bar{u}})^2} = \left[ \arctg \frac{\omega}{\omega_{\bar{u}}} \right]_0^{\omega_0} \approx \frac{\pi}{2} \text{ für } \frac{\omega_0}{\omega_{\bar{u}}} \gg 1$$

$$2 \bar{u}_N^2 = \frac{4}{3} \chi \frac{R_a^2}{R_{ein}} \omega_{\bar{u}} \left( \frac{\chi I}{d} \right)^2 = \sum \bar{u}_{aus}^2 = \frac{2KT_0}{\pi} \frac{R_a^2 \omega_{\bar{u}}}{R_{ein}} \left\{ \frac{\pi R_{\ddot{a}q}}{2 R_{ein}} + \frac{R_{ein} \omega_0}{R_a \omega_{\bar{u}}} \right\}$$

Aus dieser Gleichung bekommt man schliesslich

$$(X \cdot I)_{GB} = d \sqrt{\frac{3KT_0}{2\pi\chi} \left( \frac{\pi R_{\ddot{a}q}}{2 R_{ein}} + \frac{f_0 R_{ein}}{f_{\bar{u}} R_a} \right)} \quad (10)$$

als Gebrauchsformel geschrieben

$$\left( \frac{X}{[mm]} \cdot \frac{I}{[mA]} \right)_{GB} = \frac{d [cm]}{100 \sqrt{Z [cm]}} \cdot \sqrt{\frac{\pi R_{\ddot{a}q}}{2 R_{ein}} + \frac{f_0 R_{ein}}{f_{\bar{u}} R_a}} \quad (11) \text{ für } \frac{f_0}{f_{\bar{u}}} \gg 1$$

als Grenzempfindlichkeit bei der aperiodischen Abtastung über langgestreckte Eisenkernspulen mit Gitterbasiseingang. Gegenüber der Kathodenbasisschaltung (7) ist wegen  $R_{ein}/R_a \ll 1$  eine wesentliche Verbesserung der Grenzempfindlichkeit festzustellen, welche sich am einfachsten bei grossen Anodenwiderständen abschätzen lässt.

Es ist  $\lim_{R_a \rightarrow \infty} R_{ein} \approx \frac{R_a}{\mu} \gg R_{\ddot{a}q}$

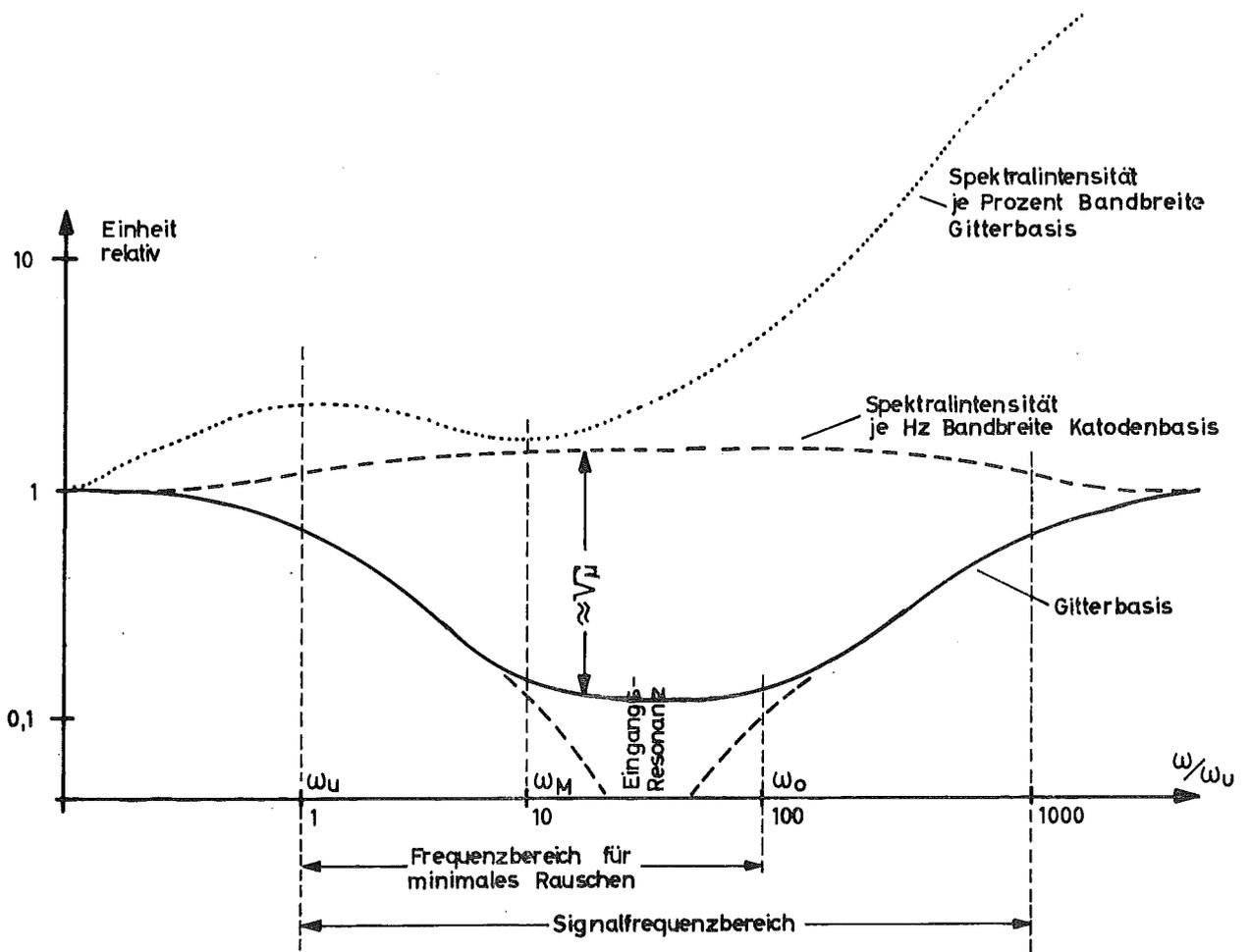
dann gilt

$$\lim_{R_a \rightarrow \infty} (X \cdot I)_{GB} = d \sqrt{\frac{3KT_0 \cdot 1}{2\pi\chi \mu f_{\bar{u}}}} \cdot \lim_{R_a \rightarrow \infty} (X \cdot I)_{KB} = d \sqrt{\frac{3KT_0 \cdot f_0}{2\pi\chi f_{\bar{u}}}}$$

das ergibt

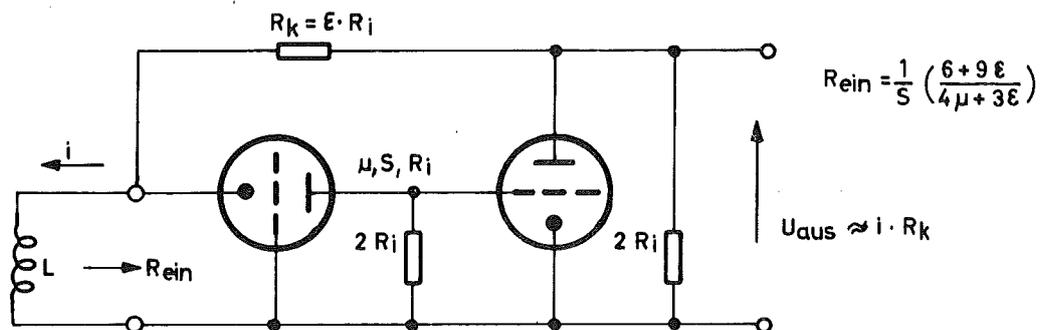
$$(X \cdot I)_{GB} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot (X \cdot I)_{KB} \quad (12)$$

Diese Beziehung gilt für  $f_0/f_u \geq 3\mu$  und  $R_{ein} \geq R_{\ddot{a}q}$ , letzteres ist wegen  $R_{\ddot{a}q} = 3/S$  (Trioden) gleichbedeutend mit  $R_a \geq 2 R_i$ .



**Abb. 15**

Frequenzgang des Rauschens bei aperiodisch gedämpftem Eingangskreis



**Abb. 16**

Niederohmige Eingangsschaltung

Den bisherigen Überlegungen haftet noch etwas Unbefriedigendes an, weil die bei Hochfrequenz sicher wirksamen Röhren- und Schaltkapazitäten bisher im Interesse einer möglichst einfachen Herleitung der Formeln unberücksichtigt blieben. Deren Einfluss lässt sich jedoch leicht abschätzen. Die dem Anodenwiderstand parallelen Kapazitäten des Anodenkreises vermindern in gleicher Weise den Signal- und den Rauschpegel und können daher ohne nachteiligen Einfluss auf die Grenzempfindlichkeit durch eine entsprechende Höhenentzerrung im Endverstärker wieder ausgeglichen werden, sofern deren Reaktanz noch den äquivalenten Rauschwiderstand der zweiten Röhre übersteigt. Ungünstiger verhalten sich die Eingangskapazitäten. In dem Rauschspektrum der Gitterbasisschaltung (Abb. 15) dominiert bei tiefen Frequenzen das Rauschen der ersten Röhre, bedingt durch den berechneten Frequenzgang  $\eta_1$ . Infolge zunehmender Gegenkopplung durch die Spuleninduktivität verringert sich dieser Rauschanteil nach höheren Frequenzen hin derart, dass in dem Plateau das weisse Rauschspektrum des Anodenwiderstandes ( $\eta_2$ ) überwiegt. Bei noch höheren Frequenzen oberhalb der Eingangsrésonanz beginnen schliesslich die Eingangskapazitäten den Kathodenkreis kurzzuschliessen, so dass ab  $\omega_p$  wieder das Rauschen der ersten Röhre in Erscheinung tritt und die Grenzempfindlichkeit verschlechtert. In einer für minimales Rauschen ausgelegten Schaltung kann deshalb nicht die volle Signalbandbreite des Eingangskreises ausgenutzt werden, sondern es müssen die Frequenzen oberhalb  $\omega_0$  durch nachfolgende Tiefpassglieder unterdrückt werden. Bei der oberen Rauschgrenzfrequenz  $\omega_3$  sind die Spektralintensitäten beider Rauschanteile gerade gleich stark vertreten, was zur Berechnung von  $\omega_3$  ausgenutzt wird. Dazu benutzt man einen anderen Ausdruck für das Verhältnis  $\omega/\omega_0$  in Formel (9):

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega L}{\omega_0 L} = \frac{X}{R_{ein}} \quad ; \quad \text{dann wird } |\eta_1|^2 = \frac{R_a^2}{R_{ein}^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{X}{R_{ein}}\right)^2\right]}$$

$X$  ist der Blindwiderstand im Kathodenkreis. Wegen der Gleichheit beider Spektralintensitäten folgt unter Benutzung der Formel (2) die Beziehung

$$\frac{\Delta(\tilde{u}_{Raus1}^2)}{\Delta(\tilde{u}_{Raus2}^2)} = 1 = \frac{R_{\ddot{a}g} |\eta_1|^2}{R_{\alpha} |\eta_2|^2} = \frac{R_{\alpha} R_{\ddot{a}g}}{R_{ein}^2 + X^2}$$

daraus ergibt sich

$$X = \frac{1}{\omega_0 C_{Ein}} = \sqrt{R_{\ddot{a}g} R_{\alpha} - R_{ein}^2} \quad (13)$$

und es wird die obere Grenzfrequenz für optimales Rauschen

$$\omega_0 \approx \frac{1}{C_{Ein} \sqrt{R_{\alpha} R_{\ddot{a}g}}} \quad \text{für } R_{\alpha} > R_i \quad (14)$$

Zur Illustration der Verhältnisse wird noch ein auf minimales Rauschen gezüchtetes Abtastsystem bei geringen Anforderungen an die Übertragungsgüte ( $f_o/f_u = 100$ ) durchgerechnet. Die Eisenkernspulen besitzen die Länge  $z = 50$  cm und die lichte Weite  $d = 12$  cm. Als Eingangsröhre wird die Type D3a mit  $R_{\alpha} = 5,6 \text{ k}\Omega$  gewählt. In der Triodenschaltung sind deren Daten:

$$\mu = 77; I_{\alpha} = 24 [\text{mA}]; U_{BA} = 160 [\text{V}]$$

$$S = 40 [\text{mA/V}]; R_{\ddot{a}g} = 75 [\Omega]; C_E = 2,0 [\text{pF}]$$

Danach beträgt die Betriebsspannung

$$160 + 5,6 \cdot 24 \approx 300 [\text{V}]$$

$$\text{Es ist } R_i = \mu/s = 1,9 [\text{k}\Omega]$$

$$\text{und } R_{ein} = \frac{R_{\alpha} + R_i}{\mu + 1} = \frac{7500}{78} = 96 [\Omega]$$

Dann beträgt die Grenzempfindlichkeit nach Formel (11)

$$\left( X_{\text{[mm]}} \cdot I_{\text{[mA]}} \right) = \frac{12}{100 \sqrt{50}} \sqrt{\frac{\pi \cdot 75}{2 \cdot 96} + \frac{100 \cdot 96}{5600}} = 0,12 \sqrt{0,059} = 0,029$$

Man bekommt eine Grenzempfindlichkeit von  $30 [\mu\text{A} \times \text{mm}]$ .

Für die Spulen- und Schaltkapazitäten werden  $C_s = 30 [\text{pF}]$  angenommen.

Das ergibt  $C_{\text{ein}} = C_E + C_S = 50 \text{ [pF]}$  und es wird nach Formel (14)

$$\omega_0 = \frac{1}{50 \cdot 10^{-12} \sqrt{5600 \cdot 75}} = 3,1 \cdot 10^7$$

Die obere Rauschgrenzfrequenz beträgt also 5 [MHz]. Die hier angenommene Spulenkapazität von nur 30 pF wird sich bei den für Eingangswiderstände um 100  $\Omega$  erforderlichen vieladräftigen, 50 cm langen Abtastspulen schwerlich realisieren lassen. Es ist aus elektrischen und auch aus konstruktiven Gründen vorteilhaft, in solchen Fällen das Abtastorgan primitiv etwa in Form eines Drahtbügelpaars (eine Windung) auszuführen und die Anpassung an die Verstärkerimpedanzen über Zwischenübertrager vorzunehmen. Dann ist nur noch die Kapazität des Transformators, welche sich mühelos auf den veranschlagten Wert bringen lässt, wirksam.

Es gibt noch einen anderen Grund für die Wahl eines eindräftigen Spulensystems. Streuelektronen, welche in den Spulendrähten steckenbleiben, liefern einen galvanischen Störbeitrag zum Strom. Während nun Spulen verschiedener Windungszahl diesen Elektronen etwa die gleiche Auffangfläche darbieten und deshalb auch ungefähr denselben Störstrom aufnehmen werden, verhält sich der Signalstrom umgekehrt proportional zur Windungszahl. Dadurch fällt dieser Störeffekt bei vieladräftigen Spulen entsprechend stärker ins Gewicht.

Die bisher behandelte aperiodische Abtastung gestattet zwar die formgetreue Registrierung hochfrequenter Schwankungen der Strahllage, jedoch wird die dazu erforderliche Bandbreite mit einem entsprechend hohen Rauschpegel erkauft. Manchmal ist man aber nur an der Aufzeichnung des Lagemittelwerts von Impulsfolgen interessiert, welche bei DESY, bedingt durch die Inflektorlücke in dem umlaufenden Strahl, mit einer Frequenz von etwa 1 MHz durchlaufen. Bei dieser primitiveren Information ermöglicht eine Resonanzabtastung, wie anschliessend dargelegt wird, eine wesentlich bessere Grenzempfindlichkeit. Eingangsstufe sei wieder eine Gitterbasisschaltung, die gewünschte Informationsbandbreite soll durch Selektionsmittel im Endverstärker erzeugt werden. Dann interessiert nur der vom Endverstärker durchgelassene

schmalbandige Teil ( $\Delta \ll 1$ ) des Spektrums  $\Delta \cdot \omega$  um die Bandmittenfrequenz  $\omega$  herum. Der günstigste Arbeitspunkt für  $\omega$  ist das Minimum der Spektralintensität für prozentuale Bandbreite innerhalb des Signalfrequenzbereichs, welches nach Abb. 15 mit der unteren Eckfrequenz  $\omega_M$  des Plateaus zusammenfällt. Dabei erscheint bemerkenswert, dass die günstigste Arbeitsfrequenz für die Resonanzabtastung nicht mit der Resonanzfrequenz des Eingangs identisch ist. Für die Eckfrequenz  $\omega_M$  sind die beiden am Spektrum beteiligten Rauschanteile (Röhre und Anodenwiderstand) gerade gleich gross. Da bereits auf S. 36 die obere Eckfrequenz berechnet wurde, braucht man für die untere Eckfrequenz in der dortigen Formel lediglich  $\omega_M L$  anstelle von  $1/\omega_0 C$  zu setzen. Das ergibt

$$X = \omega_M L = \frac{\omega_M}{\omega_{\bar{u}}} \cdot R_{\text{ein}} = \sqrt{R_{\bar{u}q} R_a - R_{\text{ein}}^2} \approx \sqrt{R_{\bar{u}q} R_a} \quad (15)$$

Bei einem angenommenen Tastverhältnis von 1 : 1 für die Rechteckimpulse des Nutzsignals beträgt der Effektivwert der ausgefilterten Grundwelle einer Rechteckschwingung

$$i_{\text{eff } \Delta} = 0,9 \cdot i_{\text{eff } \square}$$

Unter Berücksichtigung dieses Faktors ergibt sich analog den früheren Ableitungen

$$2U_N^2 = 0,9^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R_a^2}{R_{\text{ein}}} \omega_{\bar{u}} \left( \frac{X \cdot I}{d} \right)^2 = \sum \bar{u}_{\text{Raus}}^2$$

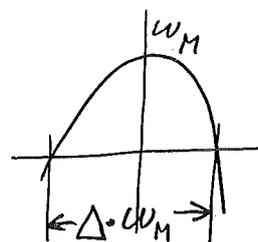
Für das doppelte Rauschspannungsquadrat des Anodenwiderstandes  $\sum \bar{u}_{\text{Raus}}^2$  erhält man nach den Formeln (2) und (15)

$$\sum \bar{u}_{\text{Raus}}^2 = \frac{2kT_0}{\pi} \left\{ 2 \cdot \Delta \cdot \omega_M R_a \right\} = \frac{2kT_0}{\pi} \cdot \frac{R_a^2 \omega_{\bar{u}}}{R_{\text{ein}}} \left\{ 2 \Delta \sqrt{\frac{R_{\bar{u}q}}{R_a}} \right\}$$

Die Gleichsetzung der Rausch- und Nutzanteile liefert daraus die Grenzempfindlichkeit

$$\left( \frac{X \cdot I}{[u_{\text{min}}] [i_{\text{min}}]} \right)_{\omega_M} = \frac{d_{[\text{cm}]}}{90 \sqrt{Z_{[\text{cm}]}}} \cdot \sqrt{2 \Delta \cdot \sqrt{\frac{R_{\bar{u}q}}{R_a}}} \quad (16)$$

Resonanzabtastung  $\Delta \ll 1$



bei Resonanzabtastung, bezogen auf ein Tastverhältnis von 1 : 1 und eine niederfrequente Bandbreite von  $\omega_M \cdot \Delta / 2$ . Bei anderen Tastverhältnissen verschlechtert sich die Grenzempfindlichkeit.

Die Verringerung des Rauschpegels demonstriert das Beispiel mit  $30 \mu\text{A} \times \text{mm}$ , wobei jetzt statt der aperiodischen Abtastung eine Resonanzabtastung mit einer niederfrequenten Bandbreite von 100 KHz gewählt wird. Es sei  $\omega_M = 1 \text{ MHz}$ . Dann ist  $\Delta = 0,2$  und die Werte  $R_{\text{äq}} = 75 \Omega$  und  $R_a = 5,6 \text{ K}\Omega$  bleiben dieselben. Dann ergibt sich

$$\left( X \cdot I \right)_{\text{[mm]}} = \frac{12}{90 \sqrt{50}} \cdot \sqrt{2 \cdot 0,2 \sqrt{\frac{75}{5600}}} = 0,0189 \sqrt{0,0464} = 0,0041$$

Man bekommt  $(X \cdot I)_{1 \text{ MHz}} = 4 \text{ [}\mu\text{A} \times \text{mm]}$  bei Resonanzabtastung und einer NF-Bandbreite von 100 KHz.

Die Tatsache, dass die Grenzempfindlichkeit nicht von der absoluten, sondern von der relativen Bandbreite  $\Delta$  abhängt, eröffnet die Möglichkeit, höherfrequente Strahlstrukturen zur Verbesserung der Empfindlichkeit auszunutzen. So ist beim DESY-Synchrotron aufgrund des Beschleunigungsmechanismus der Strahlstrom mit einer Frequenz von 500 MHz durchmoduliert. Wird diese Frequenz abgetastet und demoduliert, so verbleibt als Niederfrequenz der gewünschte Informationsinhalt. Hierbei lässt sich die Grenzempfindlichkeit abschätzen. Bei der Bandbreite des Beispiels für die aperiodische Abtastung von 5 MHz beträgt die hochfrequente Bandbreite 10 MHz und dann ist  $\Delta = 10/500 = 0,02$ . Als Abtastorgan werden Luftspulen mit einer Baulänge von  $\lambda/4 = 15 \text{ cm}$  angenommen. Da letztere um den Faktor 1,7 schlechter als Eisenkernspulen sind, ergibt sich folgender Ansatz:

$$(X \cdot I) = \frac{12 \cdot 1,7}{100 \sqrt{15}} \sqrt{2 \cdot 0,02 \sqrt{\frac{75}{5600}}} = 0,0037$$

Das bedeutet  $(X \cdot I) \approx 4 \text{ [}\mu\text{A} \times \text{mm]}$  bei der 500 MHz-Abtastung. Dieses Ergebnis kann allerdings nur als Anhaltswert angesehen werden, da bei 500 MHz sowohl die Rauscheigenschaften der Röhren als auch die nicht mehr quasistationären Spulen bereits ein gegenüber den tiefen Frequenzen abweichendes Verhalten aufweisen.

Die vorhergehenden Beispiele zeigten, dass bei der rauschoptimalen Gitterbasisschaltung Eingangswiderstände um  $100 \Omega$  zu erwarten sind. Nun ist die Herstellung der für derart grosse Eingangswiderstände erforderlichen vieldräftigen Spulensysteme relativ kompliziert und es besteht daher der Wunsch nach niederohmigeren Eingangsschaltungen, deren Spulen nur noch wenige Drähte benötigen. Eine dafür geeignete Schaltung zeigt Abb.16. Dort reduziert die Gegenkopplung über den Widerstand  $R_k$  den Eingangswiderstand und die demselben proportionale untere Grenzfrequenz  $\omega_{\alpha} = R_{\text{ein}}/L$ . Dies bedingt in Abb.15 eine entsprechende Erweiterung des linken mit  $1/\omega$  ansteigenden Bereichs des Rauschspektrums nach den tiefen Frequenzen hin. Beträgt diese Erweiterung mindestens eine Grössenordnung, so wird das Rauschen bei den üblichen Werten von einigen hundert für  $\omega_0/\omega_{\alpha}$  praktisch nur noch durch diesen abfallenden Kurvenast repräsentiert, so dass dann in den Formeln der Rauschanteil des Anodenstroms vernachlässigt werden kann. Das ergibt

$$(X \cdot I) \approx d \sqrt{\frac{3}{2} \frac{KT_0}{\pi \kappa} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{R_{\text{äq}}}{R_{\text{ein}}}} \quad (17)$$

anders geschrieben:

$$(X \cdot I)_{\text{Gegenk.}} \approx \frac{d [\text{cm}]}{80 \sqrt{Z [\text{cm}]}} \cdot \sqrt{\frac{R_{\text{äq}}}{R_{\text{ein}}}} \quad \text{bei } R_{\text{ein}} \ll \begin{cases} R_{\text{äq}} \\ R_k \end{cases} \quad (18)$$

für die Schaltung nach Abb.16. Man erkennt, dass eine Verringerung des im Nenner stehenden elektronischen Eingangswiderstandes mit einer Verschlechterung der Grenzempfindlichkeit erkauft wird.

-----

Literatur:

- (1) Küpfmüller, Einf. in die theor. Elektrotechnik, Berlin 1955, S. 227
- (2) Telefunken-Laborbuch Band 3, München 1964