DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON DESY

DESY 66/36
November 1966
Theorie

EIGENSCHAFTEN DER KOEFFIZIENTEN DER ZERLEGUNG DES FELDOPERATORS NACH ASYMPTOTISCHEN FELDERN

K. Pohlmeyer

II. Institut für Theoretische Physik - Universität Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

A b s t r a c t

In the Wightman framework of axiomatic quantum field theory it is proved that the interpolating field can be expanded in terms of the asymptotic fields on a dense set. The distribution character of the expansion coefficients is established, and their asymptotic behaviour, their smoothness properties and their one-particle structure are investigated.
The interrelation among these expansion coefficients and their connection with the amputated retarded functions is studied.

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung

Im LSZ-Zugang zur Theorie der Elementarteilchen formuliert man den Inhalt der Theorie in einem System von Distributionen, den sogenannten retardierten Funktionen. Im Fall einer einzigen Sorte von neutralen, skalaren Teilchen der Masse $m > 0$, die mit sich selbst wechselwirken - im folgenden werden wir uns stets auf diesen Fall beschränken - sollen diese retardierten Funktionen r die folgenden Bedingungen erfüllen:

1° <u>Symmetrie:</u> Sei $\mathfrak{S}^n$ die symmetrische Gruppe von n Objekten. Dann gilt für $P \in \mathfrak{S}^n$:

$$r(x; x_{P(1)}, \dots, x_{P(n)}) = r(x; x_1, \dots, x_n)$$

2° a. <u>Translationsinvarianz:</u> r hängt nur von den Differenzen $\xi_i = x - x_i$ ab:

$$r(x; x_1, \dots, x_n) = r'(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

b. <u>Invarianz unter der beschränkten homogenen Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$:</u>

$$r'(\Lambda\xi_1, \dots, \Lambda\xi_n) = r'(\xi_1, \dots, \xi_n) \qquad \Lambda \in L_+^\uparrow$$

3° <u>Retardierung:</u> der Träger von r' ist im Durchschnitt aller abgeschlossenen Vorwärtskegel enthalten

$$\operatorname{supp} r' \subset \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi_i \in \overline{V}_+,\ i = 1, \dots, n\}$$

4° <u>Realität:</u> r' ist eine reelle Distribution.

5° Die retardierten Funktionen sind durch die <u>Unitaritätsgleichungen</u> gekoppelt:

$$r(x; y, x_1, \dots, x_n) - r(y; x, x_1, \dots, x_n) = -i \sum_A \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int \prod_{i=1}^{l} du_i\, dv_i\; r(x; X_A, u_1, \dots, u_l) \prod_{i=1}^{l} \Delta_m^+(u_i - v_i)\, r(y; X_B, v_1, \dots, v_l) - (x \leftrightarrow y)$$

Die A-Summation läuft hier über alle Partitionen der Variablen x_i in zwei Untermengen X_A, X_B, von denen die eine leer sein kann.

Umgekehrt haben Glaser, Lehmann und Zimmermann[1)] dargelegt, wie aus einem System von Distributionen r mit den Eigenschaften 1^o bis 5^o ein hermitesches, lokales, skalares Feld A(x) mit allen nötigen Eigenschaften konstruiert werden kann derart, dass gilt:

$$r(x;x_1,\dots,x_n) = (-i)^n \sum_{P\in S^n} \Theta(x-x_{P(1)})\Theta(x_{P(1)}-x_{P(2)})\cdots\Theta(x_{P(n-1)}-x_{P(n)})\langle[\cdots[[A(x)A(x_{P(1)})]A(x_{P(2)})]\cdots A(x_{P(n)})]\rangle$$

Dieses Feld A(x) ist gegeben durch

$$A(x) = A_{in}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n K_{x_1}\cdots K_{x_n} r(x;x_1,\dots,x_n) :A_{in}(x_1)\cdots A_{in}(x_n):$$

Wir wollen hier nicht versuchen, im <u>LSZ-Rahmen</u> die Schlussweisen, die zu dieser Art "Reconstruction Theorem" führen, mathematisch hieb- und stichfest zu machen. Vielmehr wollen wir vom Wightman-Rahmen der Theorie einer einzigen Sorte von neutralen, skalaren Teilchen der Masse $m > 0$ ausgehend die Entwickelbarkeit des Feldoperators nach dem einlaufenden Feld

$$A(x) = A_{in}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\, C(x;x_1,\dots,x_n) :A_{in}(x_1)\cdots A_{in}(x_n):$$

auf einer dichten Menge von Vektoren zeigen, wobei die Koeffizienten-"funktionen" dieser Entwicklung sich als lineare stetige Funktionale über einem noch zu bestimmenden linearen Raum herausstellen werden. Es soll dann untersucht werden, welche Eigenschaften dieser linearen stetigen Funktionale aus den Wightman Axiomen folgen.

Die Wightman Axiome für den Fall einer einzigen Sorte von neutralen, skalaren Teilchen der Masse $m > 0$ lauten:

0 Den Zuständen der Theorie sind Einheitsstrahlen in einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ eineindeutig zugeordnet. Das relativistische Transformationsgesetz der Zustände wird durch eine stetige unitäre Darstellung der inhomogenen SL(2, C) gegeben:

$$(b,B) \to U(b,B)$$

Da die U(b, 1) unitär sind, kann man schreiben: $U(b,1) = e^{iP^\nu b_\nu}$, wobei P^ν unbeschränkte, wesentlich selbstadjungierte Operatoren sind, die als Energie-Impulsoperatoren der Theorie interpretiert werden. Der Operator $P^\nu P_\nu$ hat in dieser Interpretation die Bedeutung des Massenquadrats. Die Spektra der Operatoren P^ν liegen in $P=0$, auf dem oberen Blatt des Hyperboloiden $P^\nu P_\nu = m^2$ und in $\overline{V_+^{2m}} = \{ P \mid P^0 \geq \sqrt{4m^2 + \vec{P}^2} \}$ (Spektrumsbedingung)

Es gibt in $\mathcal{H}$ einen bis auf einen Phasenfaktor eindeutigen, unter den U(b, B) invarianten Vektor $|0\rangle$, das Vakuum:

$$\mathcal{U}(b,B)|0\rangle = |0\rangle$$

(Eindeutigkeit des Vakuums)

I Zu jeder Testfunktion $f \in \mathcal{S}(R^4)$ gibt es einen Operator $A(f)$. Dieser Operator, zusammen mit seinem adjungierten ist auf einem in $\mathcal{H}$ dichten Bereich von Vektoren D definiert. Darüber hinaus sei D ein linearer Raum, der $|0\rangle$ enthalten soll, und U(b, B) und $A(f)$ bzw. $A(f)^*$ sollen die Vektoren in D wieder in Vektoren in D abbilden:

$$\mathcal{U}(b,B)\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}\,, \quad A(f)\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}\,, \quad A(f)^*\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$$

Wenn $\Phi, \Psi \in \mathcal{D}$, dann soll $(\Phi, A(f)\Psi)$ eine temperierte Distribution sein, betrachtet als ein Funktional von f.

Auf D soll gelten: $A(f)^* = A(f^*)$ für alle $f \in \mathcal{S}(R^4)$. Die Polynome $P[A(f)]$, angewandt auf das Vakuum, erzeugen eine in $\mathcal{H}$ dichte Menge von Vektoren D_0.

II Es gilt die Gleichung

$$\mathcal{U}(b,B)\,A(f)\,\mathcal{U}(b,B)^{-1} = A(f\{B^{-1}(x-b)\})$$

wenn jede Seite auf irgendeinen Vektor aus D angewandt wird.

III Wenn der Träger von f und der Träger von g raumartig voneinander getrennt sind, dann gilt: $(f, g \in \mathcal{S}(R^4))$

$$[A(f), A(g)] = 0$$

wenn die linke Seite angewandt wird auf irgendeinen Vektor aus D.

(Kausalität)

Diese Axiome sind äquivalent den folgenden Eigenschaften der Wightmanfunktionen $\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \langle A(x_1) \cdots A(x_n) \rangle$

1) $\mathcal{W}^{(n)}(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}'(R^{4n})$

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^N \{\mathcal{W}^{(n)}(x_1,\dots,x_j,x_{j+1}+\lambda a,\dots,x_n+\lambda a) - \mathcal{W}^{(j)}(x_1,\dots,x_j)\mathcal{W}^{(n-j)}(x_{j+1},\dots,x_n)\} = 0$
für jede natürliche Zahl N , falls $a^2 < 0$.

3) $\mathcal{W}^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \mathcal{W}^{(n)}(\Lambda x_1+b,\dots,\Lambda x_n+b) \qquad \Lambda \in L_+^{\uparrow},\ b \in R^4$

4) $\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}(p_1,\dots,p_n) = (2\pi)^4 \delta(\sum_{i=1}^{n} p_i)\, \tilde{W}^{(n)}(p_1, p_1+p_2,\dots,p_1+\dots+p_{n-1})$
$\tilde{W}^{(n)}(q_1,\dots,q_{n-1}) = 0$ falls nicht alle $q_i \in \overline{V_+^{(2m)}}$ oder $q_i^0 = \sqrt{m^2+\vec{q}_i^{\,2}}$ oder $q_i = 0$ erfüllen.

5) $\mathcal{W}^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \overline{\mathcal{W}^{(n)}(x_n,\dots,x_1)}$

6) Für jedes j : $\mathcal{W}^{(n)}(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2},\dots,x_n) = \mathcal{W}^{(n)}(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},x_j,x_{j+2},\dots,x_n)$
wenn $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$.

7) $\sum_{j,k} \int\cdots\int dx_1\cdots dx_j\, dy_1\cdots dy_k\, \overline{f_j(x_1,\dots,x_j)}\, \mathcal{W}^{(j+k)}(x_j,\dots,x_1,y_1,\dots,y_k)\, f_k(y_1,\dots,y_k)$
≥ 0
für alle endlichen Folgen $f_0, f_1(x_1), f_2(x_1,x_2), \dots$ von Testfunktionen aus der Klasse $\mathcal{S}$, $= 0$ nur für solche Folgen, für die

$$\sum_1 \int dx_1\cdots dx_j\, f_j(x_1,\dots,x_j)\, A(x_1)\cdots A(x_j)\,|0\rangle = 0 .$$

Die Einteilchenzustände sollen von $A(x)$ angewandt auf das Vakuum erzeugt werden, d.h. wir nehmen für die Zweipunktfunktion eine Källén-Lehmann Darstellung an:

8) $\langle A(x)\, A(y)\rangle = \mathcal{W}^{(2)}(x,y) = i\Delta_m^+(x-y) + i\int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2 \rho(\varkappa^2)\Delta_\varkappa^+(x-y)$

wobei $\rho(\varkappa^2)$ ein temperiertes, positives Mass ist. Es gibt also eine Konstante $C>0$ und eine natürliche Zahl N derart, dass

$$\left|\int_{4m^2}^{M^2} d\varkappa^2 \rho(\varkappa^2)\right| < C\,(m^2+M^2)^{N/2}$$

Für die Untersuchungen dieser Arbeit ist das Verständnis der Asymptotenbedingung von grundlegender Wichtigkeit. Deshalb sollen hier kurz die wichtigsten Ergebnisse der Haag-Ruelle-Hepp'schen Arbeiten

2), 3), 4), 5) zur Asymptotenbedingung und Streutheorie wiederholt werden. In der Bezeichnungsweise schliessen wir uns diesen Arbeiten und 7) an.

Mit K. Hepp bilden wir für irgendeine beliebige Testfunktion $f \in \mathcal{S}(R^4)$ und alle t den in $\mathcal{H}$ wohldefinierten Operator

$$A(f,t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dp\, \tilde{f}^*(p) \tilde{A}(p) \exp[-i(p^0 - \omega)t] \quad , \quad \omega = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

Sei $G_c = \{ p \in R^4 \mid p^0 > 0 \quad |p^2 - m^2| < c \}$

$$\mathcal{S}(G_c) = \{ \tilde{f} \in \mathcal{S}(R^4) \mid \operatorname{supp} \tilde{f} \subset G_c \}$$

Für $\tilde{f} \in \mathcal{S}(G_c)$, c genügend klein, z. B. $\leq \frac{m^2}{2}$, erzeugt $A(f,t)^*$ angewandt auf das Vakuum einen Einteilchenzustand mit der Wellenfunktion

$$\hat{f}(\vec{p}) = \tilde{f}(\omega, \vec{p}) \in \mathcal{S}(R^3)$$

$$A(f,t)^* |0\rangle = |\hat{f}) \quad , \quad A(f,t) |0\rangle = 0$$

K. Hepp hat (in einer Abwandlung eines Beweises von R. Haag und D. Ruelle) gezeigt, dass für $\tilde{f}_i \in \mathcal{S}(G)$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^{(*)} |0\rangle$$

im starken Sinne existiert. Die Zustände (ex = in, out)

$$\lim_{t \to \pm\infty} \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^* |0\rangle = |\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n^{\,ex})$$

spannen Fockräume $\mathcal{H}^{ex}$ von Streuzuständen auf. Diese Streuzustände werden beschrieben durch die einlaufenden Wellenpakete $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n$ und auslaufende Wellen nach der Streuung bzw. durch auslaufende Wellenpakete $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n$ und einlaufende Wellen vor der Streuung.

Wir wollen noch von diesen Fockräumen verlangen:

IV
bzw. 9)

$$\mathcal{H}^{in} = \mathcal{H} = \mathcal{H}^{out}$$

(asymptotische Vollständigkeit)

Wenn die $\tilde{f}'_i \in \mathcal{S}(R^4)$ keinen ihre Träger betreffenden Beschränkungen unterworfen sind, dann existieren

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\Phi^{ex} | \prod_{i'=1}^{n'} A(f'_{i'}, t)^* |0\rangle = (\Phi^{ex} | \hat{f}'_1, \ldots, \hat{f}'^{\,ex}_{n'})$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\Phi^{ex} | \prod_{i'=1}^{n'} A(f'_{i'}, t) \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^* |0\rangle = (\Phi^{ex} | \prod_{i'=1}^{n'} a_{ex}(\hat{f}'^{*}_{i'}) | \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n^{\,ex})$$

für alle $\Phi^{ex} \in \mathcal{H}^{ex}$ und $\{f_i\} \subset \mathcal{S}(G)$. $\prod_{i=1}^{n'} A(f_i',t)^*|0\rangle$ bzw. $\prod_{i=1}^{n'} A(f_i',t)\prod_{i=1}^{n} A(f_i,t)^*|0\rangle$ konvergieren also schwach gegen $|\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_n{}^{ex})$ bzw. $\prod_{i=1}^{n'} a_{ex}(\hat{f}_i'^{*})|\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_n{}^{ex})$

Hierbei sind die freien Felder folgendermassen definiert

$$A_{ex}(f) = \sqrt{2\pi}\left[a_{ex}(\hat{f}_2) + a_{ex}^*(\hat{f}_1)\right] \qquad \text{für } \tilde{f} \in \mathcal{S}(R^4)$$

$$\hat{f}_1(\vec{p}) = \tilde{f}(\omega,\vec{p})\,,\quad \hat{f}_2(\vec{p}) = \tilde{f}(-\omega,-\vec{p})$$

Wir nennen $\{\tilde{f}_i\} \subset \mathcal{S}(G)$ nicht überlappend, wenn für alle $p_i = (p_i^0,\vec{p}_i) \in \operatorname{supp} \tilde{f}_i$ gilt:

$$\vec{v}_i = \vec{p}_i\,\omega_i^{-1} \neq \vec{p}_j\,\omega_j^{-1} = \vec{v}_j$$

Sei $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(G^n)$ nicht-überlappend:

$$\Phi(\varphi,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int d^{4n}p\;\tilde{\varphi}(-p)\exp\Big[i\sum_{\nu=0}^{n}(p_\nu^0+\omega_\nu)t\Big]\tilde{A}(p_1)\cdots\tilde{A}(p_n)|0\rangle$$

$\Phi^{ex}(\hat{\varphi})$ sei dessen asymptotischer limes, beschrieben durch die n-Teilchen Wellenfunktion

$$\hat{\varphi}(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{Q\in S^n}\tilde{\varphi}(\omega_{Q(1)},\vec{p}_{Q(1)},\dots,\omega_{Q(n)},\vec{p}_{Q(n)})$$

Es gelten folgende Aussagen[5)]

1) $\Phi(\varphi,t) \to \Phi^{ex}(\hat{\varphi})$ schneller als jede inverse Potenz von $|t|$.

2) der Definitionsbereich D des Abschlusses $\overline{A(f)}$ des Operators A(f) enthält die lineare Hülle

$$\mathcal{LH}\Big\{\lim_{t\to\pm\infty}\int\prod_{i=1}^{m}dp_i\;\tilde{f}(-p_1,\dots,-p_m)\prod_{i=1}^{m}\tilde{A}(p_i)\,\Phi(\varphi,t)\,,\ \tilde{f}\in\mathcal{S}(R^{4m}),$$
$$\tilde{\varphi}\in\mathcal{S}(G^n)\ \text{nicht-überlappend}\Big\} = D'_{ex}$$

D' = lineare Hülle von D'_{in} und D'_{out}.

$$\mathcal{U}(b,B)D' \subset D'\,,\quad \overline{A(f)}D' \subset D'\,,\quad \overline{A(f)}\,D' \subset D'$$

$$\overline{A(f)}^*_{/D'} = \overline{A(f^*)}_{/D'}\ ;\ \mathcal{U}(b,B)\overline{A(f)}\,\mathcal{U}(b,B)^{-1}_{/D'} = \overline{A(f\{B^{-1}(x-b)\})}_{/D'}$$

$$D_0^{ex} = \{\Phi^{ex}(\hat{\varphi})\,|\,\hat{\varphi}\ \text{nicht-überlappend}\} \subset D'\ ;\ \{P[A(f)]|0\rangle\} \subset D'$$

$(\Psi|\overline{A(f)}|\Phi)$ ist für $\Psi,\Phi \in D'$ eine temperierte Distribution als Funktional von f.

Seien die Träger von f_1 und f_2 raumartig voneinander getrennt.

Dann gilt: $\quad (f_1, f_2 \in \mathcal{S}(R^4))$

$$[\overline{A(f_1)}, \overline{A(f_2)}]_{/\mathcal{D}'} = 0$$

3) $\mathcal{D}_0^{ex}$ ist dicht in $\mathcal{H}^{ex}$ (in der $\sum L^2_{\pi \Omega_+}$-Norm).

Auf $\mathcal{D}_0^{ex}$ ist eine Art LSZ-Asymptotenbedingung erfüllt:

Für $\{f_i\} \subset \mathcal{S}(G)$, $\Phi^{ex} \in \mathcal{D}_0^{ex}$: $\prod_{i=1}^{n} A(f_i,t)^{(*)} \Phi^{ex} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{s} \prod_{i=1}^{n} a_{ex}(\hat{f}_i^{*})^{(*)} \Phi^{ex}$ wie $|t|^{-3/2}$

Für $\{f_i\} \subset \mathcal{S}(G)$, $\{f'_i\} \subset \mathcal{S}(R^4)$, $\Phi^{ex} \in \mathcal{D}_0^{ex}$, $\Psi^{ex} \in \mathcal{H}^{ex}$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\Psi^{ex} | \prod_{i=1}^{n'} A(f'_i,t)^* \Phi^{ex}) = (\Psi^{ex} | \prod_{i=1}^{n'} a^*_{ex}(\hat{f}'_i) \Phi^{ex})$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\Psi^{ex} | \prod_{i=1}^{n'} A(f'_i,t) \prod_{i=1}^{n} A(f_i,t)^* \Phi^{ex}) = (\Psi^{ex} | \prod_{i=1}^{n'} a_{ex}(\hat{f}'^{*}_i) \prod a^*_{ex}(\hat{f}_i) \Phi^{ex})$$

Ein weiteres wichtiges Resultat der Hepp'schen Arbeit ist der Beweis der Yang-Feldman Gleichung:

Für $\Phi^{ex} \in \mathcal{D}_0^{ex}$ gilt im Sinne einer Distributionsidentität in $\mathcal{S}'(R^4)$:

$$A(x)\Phi^{in/out} = A_{in/out}(x)\Phi^{in/out} + \int dy\, \Delta_{ret/adv}(x-y)[\Box_y + m^2] A(y)\Phi^{in/out}$$

II Distributionscharakter der Vakuumerwartungswerte von repetierten Kommutatoren des Feldoperators $A(x)$ mit den Operatoren $A_{in}(x_i)$ des einlaufenden Feldes. $m = 1$

Sei $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ die Menge aller solcher Funktionen aus $\mathcal{S}(R^{3n})$, die mit allen ihren Ableitungen in denjenigen Punkten verschwinden, in denen irgend zwei (Vektor-) Argumente übereinstimmen:

$$\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n}) = \{\hat{\varphi}(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n) \in \mathcal{S}(R^{3n}) \mid D^p\hat{\varphi}(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n) = 0$$

$\vec{k}_i = \vec{k}_j$ für irgend zwei $1 \leq i \neq j \leq n\} = \mathring{\mathcal{S}}$, $D^p = D^{(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_n)} = \left(\frac{\partial^{p_1^1}}{\partial k_1^{1\,p_1^1}},\dots,\frac{\partial^{p_n^3}}{\partial k_n^{3\,p_n^3}}\right)$

$\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ ist eine lineare Menge. Im folgenden wollen wir $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ versehen mit der von $\mathcal{S}(R^{3n})$ induzierten Topologie. Wir wählen eine Umgebungsbasis, die zu derjenigen Umgebungsbasis, die durch die übliche induziert wird, äquivalent ist, gegeben durch die Mengen $\mathcal{U}(K_e, L_{ij}, M; \varepsilon_\nu)$; K_e, L_{ij}, M nat. Zahlen, $0 < \varepsilon_\nu \to 0$;

$\hat{\varphi}(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n) \in \mathcal{U}(K_e, L_{ij}, M; \varepsilon_\nu)$ falls $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ und

$$\sup_{|p| \leq M}\left|\frac{\prod_{l=1}^{n}\left[1+\vec{k}_l^2\right]^{K_e/2}}{\prod_{i<j}\left[\frac{[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}\right]^{L_{ij}/2}} D^p\hat{\varphi}(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)\right| < \varepsilon_\nu \; ; \; |p| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} p_i^j$$

Damit haben wir:

$\mathring{\mathcal{S}}$ ist ein lokal konvexer, vollständiger topologischer Vektorraum zu einer abzählbaren Umgebungsbasis, also ein Frechet-Raum. $\mathring{\mathcal{S}}$ und $\mathcal{S}$ haben viele Eigenschaften miteinander gemein, so ist z.B. mit $\mathcal{S}$ auch $\mathring{\mathcal{S}}$ ein Montel-Raum. Der Dualraum $\mathring{\mathcal{S}}'$ ist ein lokal konvexer, vollständiger Vektorraum zu einer überabzählbaren Umgebungsbasis. Auf den beschränkten Mengen von $\mathring{\mathcal{S}}$ bzw. $\mathring{\mathcal{S}}'$ stimmen die starke und die schwache Topologie überein. $\mathring{\mathcal{S}}$ bzw. $\mathring{\mathcal{S}}'$ ist reflexiv.

Über den Distributionscharakter der folgenden Vakuumerwartungswerte (VEV)

$$\langle[\cdot[[\cdot\,[\tilde{A}(k)a_{in}(\vec{k}_1')]\cdots,a_{in}(\vec{k}_n')]a_{in}^*(\vec{k}_1)]\cdots,a_{in}^*(\vec{k}_n)]\rangle = (-1)^{n'}\tilde{h}(k|\vec{k}_1',\dots,\vec{k}_{n'}';-k_1,\dots,-k_n)\Big|_{\substack{k_i'^0=\omega_i'\\ k_i^0=\omega_i}}$$

gibt uns das folgende Theorem Aufschluss:

Theorem 1: $({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 | \tilde{A}(k) | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in}) \in \mathcal{T}'\{\mathcal{S}(R^{3n'}), \mathcal{S}(R^4), \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})\} \cap \mathcal{T}'\{\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'}), \mathcal{S}(R^4), \mathcal{S}(R^{3n})\}$

wobei das Symbol $\mathcal{T}'\{M_1, M_2, M_3\}$ den linearen Raum der (einzeln) stetigen Trilinearformen auf den Räumen M_1, M_2, M_3 bezeichnet.

Beweis: Wir wollen zeigen

$$({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 | \tilde{A}(k) | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in}) \in \mathcal{T}'\{\mathcal{S}(R^{3n'}), \mathcal{S}(R^4), \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})\}$$

Die Aussage $({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 | \tilde{A}(k) | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in}) \in \mathcal{T}'\{\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'}), \mathcal{S}(R^4), \mathcal{S}(R^{3n})\}$

folgt analog.

Sei $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(R^{3n'})$ und $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$. Sei weiterhin

$$\tilde{\varphi}_0(k_i) = \Theta(k_i^0)\overline{\varphi_0}(k_i^2 - m^2) : \overline{\varphi_0}(u) \in C^\infty$$

$$\overline{\varphi_0}(u) \equiv 1 : u \in \left[-\tfrac{m^2}{4}, +\tfrac{m^2}{4}\right], \; 0 \leq \overline{\varphi_0}(u) \leq 1, \; \overline{\varphi_0}(u) \equiv 0 : u \notin \left[-\tfrac{m^2}{2}, +\tfrac{m^2}{2}\right]$$

$$\Phi(\tilde{\varphi}, t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int d^{4n}k \prod_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_0(k_i)\, \hat{\varphi}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)\, e^{i\sum_{\nu=1}^{n}(k_\nu^0 + \omega_\nu)t} \tilde{A}(-k_1) \cdots \tilde{A}(-k_n)|0\rangle$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int d^{4n}k\; \tilde{\varphi}(k_1, \dots, k_n) \exp\{i\textstyle\sum(k_\nu^0 + \omega_\nu)t\} \tilde{A}(-k_1) \cdots \tilde{A}(-k_n)|0\rangle$$

$$(\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) | \Phi^{in}(\hat{\varphi})) = \lim_{t \to -\infty} (\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) | \Phi(\tilde{\varphi}, t))$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} dt \frac{d}{dt} (\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) \Phi(\tilde{\varphi}, t)) + (\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) \Phi(\tilde{\varphi}, 0))$$

$$(\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) \Phi(\tilde{\varphi}, 0)) = (\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int d^{4n}k \prod_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_0(k_i) \hat{\varphi}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \times$$
$$\times \tilde{A}(-k_1) \cdots \tilde{A}(-k_n)\rangle \in \mathcal{T}'\{\mathcal{S}(R^{3n'}), \mathcal{S}(R^4), \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})\}$$

$$\int_{-T}^{0} dt (\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) \frac{d}{dt} \Phi(\tilde{\varphi}, t)) \in \mathcal{T}'\{\mathcal{S}(R^{3n'}), \mathcal{S}(R^4), \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})\}$$

$$\left| \int_{-T_2}^{-T_1} dt (\Phi^{in}(\hat{\psi}^*) | \tilde{A}(f) \frac{d}{dt} \Phi(\tilde{\varphi}, t)) \right| \leq \left| \int_{-T_2}^{-T_1} dt \, \|\Phi^{in}(\hat{\psi})\| \cdot \|\tilde{A}(f) \frac{d}{dt} \Phi(\tilde{\varphi}, t)\| \right|$$

$$\leq \left| \int_{-T_2}^{-T_1} dt \, \|\Phi^{in}(\hat{\psi}^*)\| \sqrt{\|\tilde{A}(f)^* \tilde{A}(f) \frac{d}{dt} \Phi(\tilde{\varphi}, t)\| \cdot \|\frac{d}{dt} \Phi(\tilde{\varphi}, t)\|} \right|$$

$\|\tilde{A}(f)^* \tilde{A}(f) \frac{d}{dt} \Phi(\tilde{\varphi}, t)\|$ wächst wegen des temperierten Distributionscharakters der Wightmanfunktionen höchstens wie ein Polynom in $|t|$ an.

Wir wollen nun zeigen, dass $\|\frac{d}{dt}\Phi(\tilde{\varphi},t)\|$ schneller als jede negative Potenz von $|t|$ abfällt.

Hilfssatz 1: Zu $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ definieren wir wie oben $\tilde{\varphi}$. Dann gilt folgende Abschätzung: zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine Konstante $0 < c_N < \infty$ mit

$$\left\|\frac{d}{dt}\Phi(\tilde{\varphi},t)\right\| < \frac{c_N}{[1+|t|]^N}$$

Diesen Hilfssatz beweisen wir im Anhang A.

Es ist nun sehr einfach, den Beweis des Theorems 1 zu vervollständigen.

Wegen der Temperiertheit der Wightmanfunktionen gibt es eine natürliche Zahl M und eine Konstanten $0 < d_M < \infty$ derart, dass

$$\left\|\tilde{A}(f)^*\tilde{A}(f)\frac{d}{dt}\Phi(\tilde{\varphi},t)\right\| < d_M[1+|t|]^M$$

$$\left|\int_{-T_2}^{-T_1} dt\left(\Phi^{in}(\hat{\psi}^*)\middle|\tilde{A}(f)\frac{d}{dt}\Phi(\tilde{\varphi},t)\right)\right| \leqslant \|\Phi^{in}(\hat{\psi}^*)\|\sqrt{d_M c_{M+4}}\left|\int_{-T_2}^{-T_1}\frac{dt}{[1+|t|]^2}\right|$$

Daher konvergiert die Menge der stetigen Trilinearformen

$$-\int_{-T}^{0} dt\left(\Phi^{in}(\hat{\psi}^*)\middle|\tilde{A}(f)\frac{d}{dt}\Phi(\tilde{\varphi},t)\right) + \left(\Phi^{in}(\hat{\psi}^*)\middle|\tilde{A}(f)\Phi(\tilde{\varphi},0)\right)$$

schwach in $\mathcal{T}'\{\mathcal{S}(R^{3n'}),\mathcal{S}(R^4),\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})\}$, daraus folgt aber, dass der limes $T \to \infty$ eine stetige Trilinearform aus $\mathcal{T}'\{\mathcal{S}(R^{3n'}),\mathcal{S}(R^4),\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})\}$ definiert. q.e.d.

Der limes $T \to \infty$ definiert aber sogar ein stetiges lineares Funktional $\tilde{T}_1$ über $\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$ und ein stetiges lineares Funktional $\tilde{T}_2$ über $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$, da abgeschlossene lineare Unterräume (hier: $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ bzw. $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'})$, $\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$ bzw. $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$) von nuklearen Räumen (hier: $\mathcal{S}(R^{3n})$ bzw. $\mathcal{S}(R^{3n'})$, $\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$) wieder nuklear sind und in nuklearen Räumen das Kerntheorem gilt.[6]

Es soll nun gezeigt werden, dass der limes $T \to \infty$ auch auf

$$\overset{\square}{\mathcal{S}}(R^{3n'} \times R^4 \times R^{3n}) = \overline{\mathcal{L}\mathcal{H}\{\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}) \cup \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})\}}$$

ein stetiges lineares Funktional definiert.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, dass $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ auf

$$\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}) \cap \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n}) = \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$$

übereinstimmen. Das folgt unmittelbar aus

$$\tilde{T}_1 \Big/_{\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'}) \otimes \mathcal{S}(R^4) \otimes \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})} = \tilde{T}_2 \Big/_{\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'}) \otimes \mathcal{S}(R^4) \otimes \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})}$$

und der Eindeutigkeit des Kerntheorems:

$$\tilde{T}_1 \Big/_{\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})} = \tilde{T}_2 \Big/_{\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})}$$

Wir können daher die beiden stetigen linearen Funktionale $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ (eindeutig) zu einem linearen Funktional $\tilde{T}$ auf

$$\mathcal{LH}\left\{ \mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}) \cup \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n}) \right\}$$

linear fortsetzen. Es muss nun die Stetigkeit des so definierten linearen Funktionals $\tilde{T}$ gezeigt werden.

Dazu beweisen wir im Anhang B den folgenden

<u>Hilfssatz 2</u>: Auf $\mathcal{LH}\{ \mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}) \cup \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n}) \}$ sei eine Cauchyfolge

$$\{ \varphi_\mu(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}_1, k, \vec{k}_{n1}, \dots, \vec{k}_n) \}$$

gegeben. Dann kann man eine Zerlegung

$$\varphi_\mu = \varphi_\mu^{(1)} + \varphi_\mu^{(2)}, \quad \varphi_\mu^{(1)} \in \mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}), \quad \varphi_\mu^{(2)} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$$

derart finden, dass $\{\varphi_\mu^{(1)}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)\}$ eine konvergente Cauchyfolge in $\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$ und $\{\varphi_\mu^{(2)}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)\}$ eine konvergente Cauchyfolge in $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$ bildet.

Sei $\{ \varphi_\mu(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \}$ irgend eine Cauchyfolge auf $\mathcal{LH}\{ \mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}) \cup \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n}) \}$. Nach Hilfssatz 2 gibt es nun eine Zerlegung

$$\varphi_\mu = \varphi_\mu^{(1)} + \varphi_\mu^{(2)}, \quad \varphi_\mu^{(1)} \in \mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}), \quad \varphi_\mu^{(2)} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$$

wobei $\{\varphi_\mu^{(1)}\}$ eine konvergente Cauchyfolge auf $\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$ und $\{\varphi_\mu^{(2)}\}$ eine konvergente Cauchyfolge auf $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$ ist.

Wegen

$$|\tilde{T}(\varphi_\mu - \varphi_\nu)| \leq |\tilde{T}_1(\varphi_\mu^{(1)} - \varphi_\nu^{(1)})| + |\tilde{T}_2(\varphi_\mu^{(2)} - \varphi_\nu^{(2)})|$$

gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ so, dass

$$|\tilde{T}(\varphi_\mu) - \tilde{T}(\varphi_\nu)| = |\tilde{T}(\varphi_\mu - \varphi_\nu)| < \varepsilon \qquad \text{, falls } \mu,\nu > N(\varepsilon)$$

So ergibt sich schliesslich: $\{\tilde{T}(\varphi_\mu)\}$ konvergiert. q.e.d.

$\tilde{T}$ ist also ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $\mathring{\mathcal{J}}$ aller solcher Testfunktionen $\varphi(\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \in \mathcal{J}(R^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$ die in den Punkten des Durchschnitts zweier Hyper"ebenen"

$$\vec{k}'_{i'} = \vec{k}'_{j'} \quad 1 \leq i' \neq j' \leq n' ; \quad \vec{k}_i = \vec{k}_j \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$

mit allen ihren Ableitungen verschwinden. (stetig in der von induzierten Topologie).

Wir merken noch an:

$\tilde{T}$ ist wegen der Lorentzinvarianz der Trilinearform

$$({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 | A(k) | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in}) \qquad \text{auf} \qquad \mathcal{J}(R^{3n'}) \otimes \mathcal{J}(R^4) \otimes \mathcal{J}(\mathring{R}^{3n})$$

der Lorentzinvarianz der Trilinearform

$$({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 | \tilde{A}(k) | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in}) \qquad \text{auf} \qquad \mathcal{J}(\mathring{R}^{3n'}) \otimes \mathcal{J}(R^4) \otimes \mathcal{J}(R^{3n})$$

wegen der Eindeutigkeitsaussage des Kerntheorems und der Konstruktion von $\tilde{T}$ als (stetige) Fortsetzung durch Linearität eine lorentzinvariante, stetige Linearform auf $\mathring{\mathcal{J}}$.

$\mathring{\mathcal{J}}$ ist ein Frechet-Raum und ist als solcher tonneliert. Daher gibt es eine <u>Umgebung</u> $\mathcal{U} \subset \mathring{\mathcal{J}}$, so dass für alle $\varphi \in \mathcal{U}$

$$|\langle \tilde{T}, \varphi \rangle| < 1$$

Daraus folgt insbesondere folgende Darstellung für $\tilde{T}$; es gibt natürliche Zahlen $K, K'_{l'}, K_l, L_{i'j'\atop ij}, (p'), (q), (p)$, so dass

$$\tilde{T} = \frac{\prod_{l'=1}^{n'} [1 + \vec{k}'^2_{l'}]^{K'_{l'}/2} \prod_{l=1}^{n} [1 + \vec{k}_l^2]^{K_l/2} [1 + k_0^2 + \vec{k}^2]^{K/2}}{\prod\limits_{i'<j' \atop i<j} \left[\frac{[\vec{k}'_{i'} - \vec{k}'_{j'}]^2 + [\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1 + [\vec{k}'_{i'} - \vec{k}'_{j'}]^2 + [\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2} \right]^{L_{i'j'\atop ij}/2}} D^{((p'),(q),(p))} \tilde{f}(\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$$

wobei $\tilde{f}$ eine - in ganz $R^{3n'+4+3n}$ bis auf die Durchschnitte der Hyper"ebenen" $\vec{k}'_{i'} = \vec{k}'_{j'}, 1 \leq i' \neq j' \leq n', \vec{k}_i = \vec{k}_j, 1 \leq i \neq j \leq n$ - stetige, beschränkte Funktion ist.

Von den Matrixelementen $({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 | A(k) | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in})$ kehren wir zurück zu $\tilde{h}^{(n'|n)}(k | k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) =$

$$=(-1)^{n'}\langle[\cdots[[\cdots[\tilde{A}(k)a_{in}(\vec{k}_1')]\cdots,a_{in}(\vec{k}_{n'}')]\,a^*_{in}(\vec{k}_1)]\cdots,a^*_{in}(\vec{k}_n)]\rangle$$

(F) $\tilde{h}^{(n',n)}(k|\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)$ ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathring{\mathcal{S}}(R^4\times R^{3n'}\times R^{3n})$

(T) $\tilde{h}^{(n',n)}(k|\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)=\delta(k+\sum_{i=1}^{n'}k_i'-\sum_{i=1}^{n}k_i)\,\hat{h}^{(n',n)}(\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)$

wobei $\hat{h}^{(n',n)}(\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathring{\mathcal{S}}(R^{3n'}\times R^{3n})$ ist.

(S) $\hat{h}^{(n',n)}(\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)=\hat{h}^{(n',n)}(\dots,-\vec{k}_i,\dots,\vec{k}_i',\dots)$

(L) $\hat{h}^{(n',n)}(\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)=\hat{h}^{(n',n)}(\Lambda\vec{k}_{n'}',\dots,\Lambda\vec{k}_1',-\Lambda\vec{k}_1,\dots,-\Lambda\vec{k}_n)\quad\forall\Lambda\in L_+^\uparrow$

(R) $\hat{h}^{*(n',n)}(\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)=\hat{h}^{(n,n')}(\vec{k}_n,\dots,\vec{k}_1,-\vec{k}_1',\dots,-\vec{k}_{n'}')$

(D) Es gibt natürliche Zahlen K , L und $(p'),(p)$ so, dass

$$\hat{h}^{(n',n)}(\vec{k}_{n'}',\dots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n'}[1+\vec{k}_i'^2]^{K/2}\prod_{i=1}^{n}[1+\vec{k}_i^2]^{K/2}}{\prod_{\substack{i,j\\ i<j}}\left[\frac{[\vec{k}_i'-\vec{k}_j']^2+[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i'-\vec{k}_j']^2+[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}\right]^{L/2}}\,D^{((p'),(p))}\hat{F}^{(n',n)}(\omega_{n'}',\vec{k}_{n'}';\dots;-\omega_n,-\vec{k}_n)$$

wobei $\hat{F}^{(n',n)}$ eine - in ganz $R^{3n'}\times R^{3n}$ bis auf die Punkte der Durchschnitte zweier Hyper"ebenen" $\vec{k}_i'=\vec{k}_j'$ $1\leq i\neq j\leq n'$, $\vec{k}_i=\vec{k}_j$ $1\leq i\neq j\leq n$ stetige, über $R^{3n'}\times R^{3n}$ beschränkte Funktion ist, die symmetrisch ist unter Vertauschung von

$$\overset{(+)}{-}\omega_\varrho^{(1)},\ \overset{(+)}{-}\vec{k}_\varrho^{(1)}\ \longleftrightarrow\ \overset{(+)}{-}\omega_\sigma^{(1)},\ \overset{(+)}{-}\vec{k}_\sigma^{(1)}$$

und die folgende Realitätseigenschaft besitzt:

$$\hat{F}^{*(n',n)}(\omega_{n'}',\vec{k}_{n'}';\dots;\omega_1',\vec{k}_1';-\omega_1,-\vec{k}_1;\dots;-\omega_n,-\vec{k}_n)$$
$$=\hat{F}^{(n,n')}(\omega_n,\vec{k}_n;\dots;\omega_1,\vec{k}_1;-\omega_1',-\vec{k}_1';\dots;-\omega_{n'}',-\vec{k}_{n'}')$$

- - - - - - - - - - -

Damit sind unsere Aussagen über den Distributionscharakter der VEV von repetierten Kommutatoren des Feldes A(x) mit den Operatoren $A_{in}(x_i)$ des einlaufenden Feldes jedoch noch keineswegs erschöpft: Für $\hat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$, $f\in\mathcal{S}(R^4)$ definiert $\tilde{A}(f)\Phi^{in}(\hat{\varphi})$ einen Vektor im

Hilbertraum. Folglich ist $({}^{m'}\vec{k}'_{n'},\ldots,\vec{k}'_1|\tilde{A}(\vec{\xi})|\Phi^{m}(\hat{\varphi}))$ eine symmetrische, $L^2_{\pi\Omega_+}$-integrierbare Funktion. Gleiches gilt natürlich auch für $(\Phi^{m}(\hat{\varphi})|\tilde{A}(k)|\vec{k}_{n},\ldots,\vec{k}_{n}^{m})$

$\widehat{h}^{(m',m)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)$ ist ein bilineares stetiges Funktional über dem Raum der stark abfallenden, $L^2_{\pi\Omega_+}$-integrierbaren Funktionen - versehen mit der durch die folgende Umgebungsbasis $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_{\mathfrak{U}}\}$ definierten Topologie: Sei (K'_ℓ) ein n'-Tupel von natürlichen Zahlen, $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{U}}((K'_\ell);\varepsilon) = \left\{\hat{\varphi}(\vec{k}'_{n'},\ldots,\vec{k}'_1)\in L^2_{\pi\Omega_+} : \int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\prod[1+\vec{k}'^2_\ell]^{K'_\ell}|\hat{\varphi}(\vec{k}'_{n'},\ldots,\vec{k}'_1)|^2<\varepsilon\right\} -$$

$\otimes\,\mathcal{S}(R^{3n})$ = bilineares stetiges Funktional über abzählbar Hilbert'schem Raum $\otimes$ nuklearem Raum.

Sei $\mathcal{S}^0_{R^{3n}}\left(\bigcap_{\ell=0}^{\infty} L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}\right)$ der Raum der Funktionen über R^{3n} mit Werten im abzählbar Hilbert'schen Raum der stark abfallenden $L^2_{\pi\Omega_+}$-integrierbaren Funktionen: $\bigcap_{\ell=0}^{\infty} L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}$, unendlich oft differenzierbar (in der Topologie von $\bigcap_{\ell=0}^{\infty} L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}$), die mit allen ihren Ableitungen $\bar{D}^p$ in $\vec{k}_i=\vec{k}_j$ für irgend zwei $1\le i\neq j\le n$ verschwinden und die so beschaffen sind, dass die $L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}$ - Normen ihrer Werte stark abfallen.

Auf $\mathcal{S}^0_{R^{3n}}\left(\bigcap_{\ell=0}^{\infty} L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}\right)$ betrachten wir die durch die folgende Umgebungsbasis $\mathfrak{B}=\{\mathcal{V}_{\mathfrak{B}}\}$ definierte Topologie: Seien $K'_\ell, K_\ell, L_{ij}, M$ natürliche Zahlen, $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{B}}(K'_\ell,K_\ell,M,L_{ij};\varepsilon) = \left\{\hat{\varphi}(\vec{k}'_{n'},\ldots,\vec{k}'_1,-\vec{k}_1,\ldots,-\vec{k}_n)\in \mathcal{S}^0_{R^{3n}}\left(\bigcap_{\ell=0}^{\infty} L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}\right) :\right.$$

$$\left.\sup_{\substack{\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n\\ |p|\le M}}\frac{\prod_{\ell=1}^{n}[1+\vec{k}_\ell^2]^{K_\ell/2}}{\prod_{i<j}\left[\frac{[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}\right]^{L_{ij}/2}}\left[\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\prod_{\ell=1}^{n'}[1+\vec{k}'^2_\ell]^{K'_\ell}|\bar{D}^p\hat{\varphi}(\vec{k}'_{n'},\ldots,-\vec{k}_n)|^2\right]^{1/2}<\varepsilon\right\}$$

$\mathcal{S}^0_{R^{3n}}\left(\bigcap_{\ell=0}^{\infty} L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}\right)$ mit dieser Topologie versehen ist ein lokal konvexer, vollständiger topologischer Vektorraum zu einer abzählbaren Umgebungsbasis, also ein Frechet-Raum.

Nach dem Kerntheorem ist $\widehat{h}^{(m',m)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)$ ein stetiges lineares Funktional über dem (Frechet-) Raum $\mathcal{S}^0_{R^{3n}}\left(\bigcap_{\ell=0}^{\infty} L^2_{\pi[1+\vec{k}'^2]^{\ell/2}\Omega_+}\right)$.

Daher können wir schliessen: $\widehat{h}^{(m',m)}$ besitzt die beiden Darstellungen: es gibt natürliche Zahlen $K_j, L_j, (p_j)$ $j=1,2$ derart, dass

$$\hat{h}^{(n',n)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n) = \frac{\prod_{i}^{n'}[1+\vec{k}_i'^2]^{K_1}\prod_{i}^{n}[1+\vec{k}_i^2]^{K_1}}{\prod_{i<j}\left[\frac{[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2}\right]^{L_1}}\,\overline{D}^{((0),(p_1))}\,\hat{f}_1^{(n',n)}(\omega'_{n'},\vec{k}'_{n'};\ldots;-\omega_n,-\vec{k}_n)$$

wobei $\hat{f}_1^{(n',n)} \in L^2_{\pi\Omega_1}(R^{3n'}\times R^{3n})$

und $\hat{f}_1^{(n',n)}(\omega'_{P(n')},\vec{k}'_{P(n')};\ldots;\omega'_{P(1)},\vec{k}'_{P(1)};-\omega_{Q(1)},-\vec{k}_{Q(1)};\ldots;-\omega_{Q(n)},-\vec{k}_{Q(n)}) = \hat{f}_1^{(n',n)}(\omega'_{n'},\vec{k}'_{n'};\ldots;-\omega_n,-\vec{k}_n)$ $\quad P\in S^{n'},\ Q\in S^{n}$

bzw. es gibt natürliche Zahlen $K_2, L_2, (p_2)$ derart, dass

$$\hat{h}^{(n',n)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n) = \frac{\prod_{i}^{n'}[1+\vec{k}_i'^2]^{K_2}\prod_{i}^{n}[1+\vec{k}_i^2]^{K_2}}{\prod_{i<j}\left[\frac{[\vec{k}'_i-\vec{k}'_j]^2}{1+[\vec{k}'_i-\vec{k}'_j]^2}\right]^{L_2}}\,\overline{D}^{((p_2),(0))}\,\hat{f}_2^{(n',n)}(\omega'_{n'},\vec{k}'_{n'};\ldots;-\omega_n,-\vec{k}_n)$$

wobei $\hat{f}_2^{(n',n)} \in L^2_{\pi\Omega_2}(R^{3n'}\times R^{3n})$

und $\hat{f}_2^{(n',n)}(\omega'_{P(n')},\vec{k}'_{P(n')};\ldots;\omega'_{P(1)},\vec{k}'_{P(1)};-\omega_{Q(1)},-\vec{k}_{Q(1)};\ldots;-\omega_{Q(n)},-\vec{k}_{Q(n)}) = \hat{f}_2^{(n',n)}(\omega'_{n'},\vec{k}'_{n'};\ldots;-\omega_n,-\vec{k}_n)$ $\quad P\in S^{n'},\ Q\in S^{n}$

Die natürlichen Zahlen können insbesondere so gewählt werden, dass

$$\overline{D}^{((0),(p_1))}\hat{f}_1^{*(n',n)}(\omega'_{n'},\vec{k}'_{n'};\ldots;\omega'_1,\vec{k}'_1;-\omega_1,-\vec{k}_1;\ldots;-\omega_n,-\vec{k}_n)$$
$$= \overline{D}^{((p_2),(0))}\,\hat{f}_2^{(n,n')}(\omega_n,\vec{k}_n;\ldots;\omega_1,\vec{k}_1;-\omega'_1,-\vec{k}'_1;\ldots;-\omega'_{n'},-\vec{k}'_{n'}).$$

Wir wollen hier noch anmerken, dass

$\hat{h}^{(n',0)}(k'_{n'},\ldots,k'_1)$ $\qquad n' = 2,3,\ldots$

$\hat{h}^{(0,n)}(-k_1,\ldots,-k_n)$ $\qquad n = 2,3,\ldots$

symmetrische, lokal L^2 -integrierbare Funktionen sind, und schliesslich wollen wir noch den Distributionscharakter von $\hat{h}^{(n',1)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1)$ bzw. von $\hat{h}^{(1,n)}(k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)$ enger begrenzen:

$$\hat{h}^{(n',1)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1) = (1-\Delta)^{\{\frac{3}{4}n'+\frac{3}{4}\}}\,\hat{C}(\vec{k}'_{n'},\ldots,\vec{k}'_1,-\vec{k}_1)$$

$\hat{C}\in L^p$ mit $p < \dfrac{1}{1-\frac{2\{\frac{3}{4}n'+\frac{3}{4}\}+\frac{3}{2}}{3(n'+1)}}$ lokal. $\quad \Delta = \sum_{\substack{j=1,2,3\\ i=1,\ldots,n'}}\partial^2/\partial k_i'^{j\,2} + \sum_{j=1}^{3}\partial^2/\partial k_1^{j\,2}$

$\{x\}$ soll dabei die kleinste ganze Zahl $> x$ bezeichnen.

<u>Beweis:</u> Sei $\quad B(x^0,\vec{x}) = \int dx'\, f(x')\, \underset{\sim}{A}(x'+x) \qquad f\in \mathcal{S}(R^4)$

$$\hat{f}_i^{a_i}(\vec{k}_i) = \hat{f}_i(\vec{k}_i)e^{i\vec{k}_i\vec{a}_i}$$

$B_i(\hat{f}_i,t) = \int_{x'^0=t} d\vec{x}'\, U(x',1)\,\underset{\sim}{B}_i\,U(-x',1)\overleftrightarrow{\partial}_{x'^0}\, f_i^{*}(x')\ ;\ \underset{\sim}{B}_i$ = quasilokaler Operator mit: $\quad \underset{\sim}{B}_i(\hat{f}_i,t)|0\rangle,\ \underset{\sim}{B}_i(\hat{f}_i,t)^*|0\rangle = |f_i^{m_i 1}\rangle$

Sei d der Durchmesser der Konfiguration $\vec a'_{n'}, \cdots, \vec a'_1, \vec x, \vec a_1$

Man betrachte für $-\frac{d}{9} \leq x^0 \leq 0$ den folgenden VEV:

$$\langle [[\cdots[B(x^0,\vec x), a_{in}(\hat f_1'^{\vec a_1'})], \cdots, a_{in}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}})] a^*_{in}(\hat f_1^{\vec a_1})]\rangle = (-1)^{n'} ({}^{in}\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, \cdots, \hat f_1'^{\vec a_1'} | B(x^0,\vec x) | \hat f_1^{\vec a_1}\,{}^{in})$$
$$+ \sum (-1)^{n'-1} ({}^{in}\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, \cdots, \widehat{\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}}}, \cdots, \hat f_1'^{\vec a_1'} | B(x^0,\vec x)\rangle ({}^{in}\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}} | \hat f_1^{\vec a_1}\,{}^{in})$$
$$= (-1)^{n'} ({}^{in}\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, \cdots, \hat f_1'^{\vec a_1'} | B(x^0,\vec x) \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle + (-1)^{n'-1} \sum ({}^{in}\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, \cdots, \widehat{\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}}}, \cdots, \hat f_1'^{\vec a_1'} |$$
$$B(x^0,\vec x)\rangle ({}^{in}\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}} | \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle = (-1)^{n'-1} \int_{-\infty}^{-\frac{d}{9}} dt \frac{d}{dt} \langle \underset{\sim}{B}_{n'}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, t) \cdots \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1'^{\vec a_1'}, t) B(x^0,\vec x) \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle$$
$$- (-1)^{n'-1} \sum_{i'} \int_{-\infty}^{-\frac{d}{9}} dt \frac{d}{dt} \langle \underset{\sim}{B}_{n'}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, t) \cdots \widehat{\underset{\sim}{B}_{i'}(\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}}, t)} \cdots \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1'^{\vec a_1'}, t) B(x^0,\vec x)\rangle \langle \underset{\sim}{B}_{i'}(\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}}, t) \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle$$
$$+ (-1)^{n'} \langle \underset{\sim}{B}_{n'}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, -\tfrac{d}{9}) \cdots \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1'^{\vec a_1'}, -\tfrac{d}{9}) B(x^0,\vec x) \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle^T$$
$$|\langle [[\cdots[B(x^0,\vec x) a_{in}(\hat f_1'^{\vec a_1'})] \cdots, a_{in}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}})] a^*_{in}(\hat f_1^{\vec a_1})]\rangle| \leq C^{(1)}[1+(\tfrac{d}{9})^2]^{-\frac{1}{4}} + C_N^{(2)}[1+d^2]^{-N/2}$$

$0 \leq C^{(1)} < \infty$; $0 < C_N^{(2)} < \infty$ für jede natürliche Zahl N.

Man betrachte nun denselben VEV wie oben, diesmal für $x^0 < -\frac{d}{9}$:

$$\langle [[\cdots[B(x^0,\vec x) a_{in}(\hat f_1'^{\vec a_1'})] \cdots, a_{in}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}})] a^*_{in}(\hat f_1^{\vec a_1})]\rangle$$
$$= (-1)^{n'-1} \int_{-\infty}^{+x^0} dt \frac{d}{dt} \langle \underset{\sim}{B}_{n'}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, t) \cdots \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1'^{\vec a_1'}, t) B(x^0,\vec x) \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle$$
$$- (-1)^{n'-1} \sum_{i'} \int_{-\infty}^{x^0} dt \frac{d}{dt} \langle \underset{\sim}{B}_{n'}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, t) \cdots \widehat{\underset{\sim}{B}_{i'}(\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}}, t)} \cdots \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1'^{\vec a_1'}, t) B(x^0,\vec x)\rangle \langle \underset{\sim}{B}_{i'}(\hat f_{i'}'^{\vec a'_{i'}}, t) \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle$$
$$+ (-1)^{n'} \langle \underset{\sim}{B}_{n'}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}}, x^0) \cdots \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1'^{\vec a_1'}, x^0) B(x^0,\vec x) \underset{\sim}{B}_1(\hat f_1^{\vec a_1}, x^0)^*\rangle^T$$
$$|\langle [[\cdots[B(x^0,\vec x) a_{in}(\hat f_1'^{\vec a_1'})] \cdots, a_{in}(\hat f_{n'}'^{\vec a'_{n'}})] a^*_{in}(\hat f_1^{\vec a_1})]\rangle| \leq C^{(3)}[1+x^{02}]^{-\frac{1}{4}} + C_N^{(4)}[1+d^2]^{-N/2}$$

Daraus folgt nach [6] tome II, p. 112:

$$\widehat{h^{(n',1)}}(k'_{n'}, \cdots, k'_1, -k_1) = [1-\Delta]^{\{\frac{3}{4}n' + \frac{1}{2}\}} \hat C(\vec k'_{n'}, \cdots, \vec k'_1, \vec k_1)$$

$\hat C$ lokal p-integrierbar mit: $$p < \frac{1}{1 - \frac{2\{\frac{3}{4}n' + \frac{1}{2}\} + \frac{1}{2}}{3(n'+1)}}$$

Die entsprechende Aussage für $\widehat{h^{(1,n)}}$ folgt aus der Eigenschaft (R).

Anmerkungen

a) In der Arbeit[5] beweist K. Hepp das folgende Theorem:

"Für nicht-überlappende $\{\tilde f_i\} \subset \mathcal{S}(G)$ gilt:

$$\left\| \frac{d}{dt} \prod A(f_{i},t)^{(*)} |0\rangle \right\| < C_N (1+|t|)^{-N}$$

mit $0 < C_N < \infty$ für alle natürlichen Zahlen N."

Dieses Theorem kann etwas verallgemeinert werden. In Wirklichkeit ist es nicht nötig, vorauszusetzen, dass alle $\tilde{f}_{i} \in \mathcal{S}(G)$ sich nicht überlappen sollen. Es genügt vielmehr, zu fordern, dass sich diejenigen $\tilde{f}_{i}$, die zu $A(f_{i},t)^{*}$ gehören, untereinander nicht überlappen.

Beweis: Wir zerlegen $\left\| \frac{d}{dt} \prod A(f_{i},t)^{(*)} |0\rangle \right\|$ in eine Summe von Produkten von trunkierten Vakuumerwartungswerten (TVEV). Es verbleiben nur solche Summanden, die mindestens eine trunkierte j-Punkt-Funktion mit $j \geq 4$ als Faktor enthalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben solche Faktoren die Form

$$\langle A(f_{i_1},t)\, A(f_{i_2},t)^{(*)} \cdot \ldots \cdot A(f_{i_{j-2}},t)^{(*)} A(f_{i_{j-1}},t)^{*} A(f_{i_j},t)^{*} \rangle^{T}$$

mit $\frac{\vec{k}_{i_{j-1}}}{\omega_{i_{j-1}}} \neq \frac{\vec{k}_{i_j}}{\omega_{i_j}}$ $\quad (k^0_{i_{j-1}}), \vec{k}_{i_{j-1}} \in \operatorname{supp} \tilde{f}_{i_{j-1}}, \; (k^0_{i_j}), \vec{k}_{i_j} \in \operatorname{supp} \tilde{f}_{i_j}$

oder

$$\langle A(f_{i_1},t)\, A(f_{i_2},t)^{(*)} \cdot \ldots \cdot A(f_{i_{j-2}},t)^{(*)} A(f_{i_{j-1}},t)\, A(f_{i_j},t)^{*} \rangle^{T}$$

Den ersten Fall diskutiert K. Hepp. Im zweiten Fall dürfen $\tilde{f}_{i_{j-1}}$ und $\tilde{f}_{i_j}$ sich gegenseitig überlappen. Nach einem bekannten Lemma (vgl. [8]) I, Lemma (11.1) gilt die folgende Zerlegung (, in der $A(f_{i_{j-1}},t)|0\rangle = 0$ schon berücksichtigt worden ist):

$$\langle A(f_{i_1},t)\, A(f_{i_2},t)^{(*)} \cdots A(f_{i_{j-2}},t)^{(*)} A(f_{i_{j-1}},t)\, A(f_{i_j},t)^{*} \rangle^{T} =$$

$$= \sum_{\{I_\nu\}} c_{\{I_\nu\}} \langle \prod_{i_{\lambda_1} \in I_1} A(f_{i_{\lambda_1}},t)^{(*)} \rangle \cdots \langle \prod_{i_{\lambda_{r-1}} \in I_{r-1}} A(f_{i_{\lambda_{r-1}}},t)^{(*)} \rangle \langle \prod_{i_{\lambda_r} \in I_r} A(f_{i_{\lambda_r}},t)^{(*)} E_0^{\perp} A(f_{i_{j-1}},t) A(f_{i_j},t)^{*} \rangle$$

Nun enthält der Zustand $A(f_{i_{j-1}},t)A(f_{i_j},t)^{*}|0\rangle$ aber nur solche Impulse P, für die $P^2 < m^2$ gilt. Daher tritt wegen der Spektrumsbedingung der zweite Fall garnicht auf.

b) In der Arbeit [4] wurde von K. Hepp die folgende Darstellung bewiesen: zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine natürliche Zahl M derart, dass gilt

$$\langle A(x_1) \cdots A(x) \cdots A(x_n) \rangle^T = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[1 + (x_i^0 - x^0)^2\right]^{M/2}}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{3} \left[1 + (x_i^j - x^j)^2\right]^{N/2}} \, T(x_1^0 - x^0, \ldots, x_n^0 - x^0; \vec{x}_1 - \vec{x}, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x})$$

wobei T eine beschränkte Distribution ist, die selbst wieder die folgende Darstellung zulässt:

$$T(x_1^0 - x^0, \ldots, x_n^0 - x^0; \vec{x}_1 - \vec{x}, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x}) = \sum_{(q)=(0)}^{|q| \leq Q < \infty} D^q F_q(x_1^0 - x^0, \ldots, x_n^0 - x^0; \vec{x}_1 - \vec{x}, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x})$$

mit den Monomen in $\partial/\partial(x_1^0 - x^0), \ldots \partial/\partial(x_n^0 - x^0); \partial/\partial(x_1^j - x^j) \ldots \partial/\partial(x_n^j - x^j)$ D^q und einer Funktion $F_q \in L^\infty$.

Es kann nun ein Zusammenhang zwischen M und N in Form einer Abschätzung angegeben werden: zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine natürliche Zahl M :

$$M \leq n \cdot N + f(n)$$

so dass die obige Darstellung gilt.

Diese Abschätzung soll hier nicht hergeleitet werden.

III Abfallseigenschaften der Vakuumerwartungswerte von den repetierten Kommutatoren des Feldes $A(x)$ mit den Operatoren $A_{in}(x_i)$ des einlaufenden Feldes.

Nach Axiom I ist der Feldoperator $\tilde{A}(\tilde{f}),\ f \in \mathcal{S}(R^4)$ auf dem Vakuum definiert und die Zweipunktfunktion hat nach I. 8) folgende Struktur:

$$\langle A(g_2)^* A(g_1)\rangle = \int d\mu(p)\, \tilde{g}_2^*(p)\, \tilde{g}_1(p)$$

$$d\mu(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p^2 < 0 \\ 0 & \text{falls } p^0 < 0 \\ 2\pi\, d\rho(p^2) \dfrac{d^3p}{2\sqrt{p^2+\vec{p}^{\,2}}} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $d\rho(p^2)$ ein positives Mass auf der Halbachse $0 < p^2 < \infty$ ist, dessen Träger das Massenspektrum der Theorie widergibt:

$$d\rho(p^2) = \delta(p^2 - m^2)\, dp^2 + d\sigma(p^2)$$

wobei der Träger von $d\sigma(p^2)$ in $4m^2 \leq p^2 < \infty$ enthalten ist.

Andererseits $\langle A(g_2)^* A(g_1)\rangle = \int dk' dk\, \tilde{g}_2^*(k')\, g_1(-k) \langle \tilde{A}(k') \tilde{A}(k)\rangle$

$$= \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \cdots \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'} \int dk' dk\, \tilde{g}_2^*(k')\, \tilde{g}_1(-k) \langle \tilde{A}(k') a_{in}^*(\vec{k}_1') \cdots a_{in}^*(\vec{k}_{n'}')\rangle$$

$$\langle a_{in}(\vec{k}_{n'}') \cdots a_{in}(\vec{k}_1') \tilde{A}(k)\rangle$$

$$= \int dk' dk\, \tilde{g}_2^*(k')\, \tilde{g}_1(-k) \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \cdots \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'}\, \delta(k' - \sum k_i')\, \delta(k + \sum k_i')$$

$$|\hat{h}^{(n',0)}(k_{n'}', \ldots, k_1')|^2 \qquad \hat{h}^{(1,0)} \equiv 1$$

$$= \int dk'\, \tilde{g}_2^*(k')\, \tilde{g}_1(k') \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \cdots \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'}\, \delta(k' - \sum k_i')\, |\hat{h}^{(n',0)}(k_{n'}', \ldots, k_1')|^2$$

$$\sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \cdots = \begin{cases} 0 & \text{falls } k'^2 < 0 \\ 0 & \text{falls } k^{0\prime} < 0 \\ \tilde{F}(k'^2) & \text{falls } k^{0\prime} > 0,\ k'^2 > 0 \end{cases}$$

Nun gilt aber für $\Lambda \in L_+^\uparrow$:

$$\langle A(g_2)^* A(g_1)\rangle = \int dk'\, \tilde{g}_2^*(k')\, \tilde{g}_1(k') \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \cdots \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'}\, \delta(\Lambda k' - \sum k_i')\, |\hat{h}^{(n',0)}(k_{n'}', \ldots, k_1')|^2$$

$$d\mu(k') = 2\pi\, d\rho(k'^2) \frac{d^3k'}{2\sqrt{k'^2 + \vec{k}'^2}} = dk'^2 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \cdots \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'}\, \delta^{(1)}(\sqrt{k'^2} - \sum \omega_i')\, \delta^{(3)}(\sum \vec{k}_i') \times$$

$$\times\, |\hat{h}^{(n',0)}(k_{n'}', \ldots, k_1')|^2 \frac{d^3k'}{2\sqrt{k'^2 + \vec{k}'^2}}$$

$$d\rho(k'^2) = \frac{1}{2\pi}\, dk'^2 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \cdots \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'}\, \delta^{(1)}(\sqrt{k'^2} - \sum \omega_i')\, \delta^{(3)}(\sum \vec{k}_i')\, |\hat{h}^{(n',0)}(k_{n'}', \ldots, k_1')|^2$$

Nach I. 8) gibt es eine positive Konstante C und eine natürliche Zahl N, so dass

$$\int_0^{M^2} d\varrho(\varkappa^2) \leq C\,[m^2+M^2]^{N/2} \qquad \text{für alle } M$$

$$\int_0^{M^2} d\varrho(\varkappa^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^M 2\varkappa\, d\varkappa \sum_{n'=1}^{\{\varkappa/m\}} \frac{1}{n'!}\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\,\delta^{(1)}(\varkappa-\textstyle\sum\omega'_i)\,\delta^{(3)}(\textstyle\sum \vec k'_i)\,\left|\hat h^{(n',0)}(k'_{n'},\dots,k'_1)\right|^2$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n'=1}^{\{M/m\}}\frac{1}{n'!}\int_{n'm}^{M} d\varkappa \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\,\delta^{(1)}(\varkappa-\textstyle\sum\omega'_i)\,\delta^{(3)}(\textstyle\sum \vec k'_i)\,\left|\sqrt{\textstyle\sum\omega'_i}\,\hat h^{(n',0)}(k'_{n'},\dots,k'_1)\right|^2 \leq C\,[m^2+M^2]^{N/2}$$

Daraus folgt insbesondere:

$$\text{(0-P)}\quad \int_0^M d\varkappa' \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\,\delta^{(1)}(\varkappa'-\textstyle\sum\omega'_i)\,\delta^{(3)}(\textstyle\sum \vec k'_i)\,\left|\sqrt{\textstyle\sum\omega'_i}\,\hat h^{(n',0)}(k'_{n'},\dots,k'_1)\right|^2 \leq n'!\,\pi\, C\,[m^2+M^2]^{N/2}$$

Andererseits genügt aber diese letztere Ungleichung, um die Temperiertheit der Zwei-Punkt-Funktion zu garantieren: (Wir setzen vorübergehend $m = 1$)

$$g_1, g_2 \in \mathcal{S}(R^4):\ \langle A(g_2)^* A(g_1)\rangle = 2\pi \int d\varrho(k'^2)\,\frac{d^3k'}{2\sqrt{k'^2+\vec k'^2}}\,\tilde g_2^*(k')\,\tilde g_1(k') =$$

$$= 2\pi\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{n'!}\int_{n'}^{\infty} 2\varkappa'\, d\varkappa' \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\,\delta^{(1)}(\varkappa'-\textstyle\sum\omega'_i)\,\delta^{(3)}(\textstyle\sum \vec k'_i)\,\left|\hat h^{(n',0)}(k'_{n'},\dots,k'_1)\right|^2 \times$$

$$\times \int dk'\,\delta(k'^2-\varkappa'^2)\,\chi_{\bar V_+^{1/2}}(k')\,\tilde g_2^*(k')\,\tilde g_1(k')$$

wobei $\chi_{\bar V_+^{1/2}} \equiv 1$ in $\overline{V}_+^{1/2}$, $\equiv 0$ ausserhalb von $\bar V_+^{1/4}$, ansonsten

$$0 \leq \chi_{\bar V_+^{1/2}} \leq 1\ ,\ \in C^\infty$$

$$\int dk'\,\delta(k'^2-\varkappa'^2)\,\chi_{\bar V_+^{1/2}}(k')\,\tilde g_2^*(k')\,\tilde g_1(k') \doteq (M^+\tilde g_2^*\cdot\tilde g_1)(\varkappa') \in \mathcal{S}([0,\infty))$$

$$|\langle A(g_2)^* A(g_1)\rangle| = \left|2\pi\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{n'!}\int_{n'}^{\infty} d\varkappa\,\frac{d}{d\varkappa}(M^+\tilde g_2^*\tilde g_1)(\varkappa)\int_{n'}^{\varkappa} d\varkappa'\, 2\varkappa' \int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\right.$$

$$\left.\delta^{(1)}(\varkappa'-\textstyle\sum\omega'_i)\,\delta^{(3)}(\textstyle\sum \vec k'_i)\,\left|\hat h^{(n',0)}(k'_{n'},\dots,k'_1)\right|^2\right|$$

$$\leq 2\pi^2 C' \sum_{n'=1}^{\infty}\int_{n'}^{\infty} d\varkappa\,[1+\varkappa]^N\,\frac{1}{[1+\varkappa]^{N+4}} \leq C''\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{1+n'^2}\int_{n'}^{\infty}\frac{d\varkappa}{1+\varkappa^2} \leq C'''\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Aus dieser Abschätzung und der Tatsache, dass M^+ eine stetige Abbildung ist, folgt, dass die Zwei-Punkt-Funktion als temperierte Distribution definiert ist.

$d\varrho(\varkappa^2)$ ist ein positives Mass. Daher sind

$$\int_0^{M^2} d\varrho(\varkappa^2) \quad , \quad \int^{M} d\varkappa' \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \, \delta(\varkappa' - \sum \omega'_i) \, \delta^{(3)}(\sum \vec{k}'_i) \left| \sqrt{\sum \omega'_i} \, \widehat{h}^{(n'|0)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1) \right|^2$$

linksseitig stetig und es gilt:

$$\int_{M-\delta M}^{M+\delta M} d\varkappa' \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \, \delta^{(3)}(\sum \vec{k}'_i) \, \delta^{(1)}(\varkappa' - \sum \omega'_i) \left| \sqrt{\sum \omega'_i} \, \widehat{h}^{(n'|0)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1) \right|^2 \leq \pi \cdot n'! \int_{(M-\delta M)^2}^{(M+\delta M)^2} d\varrho(\varkappa'^2)$$

Wir interessieren uns nun für das n'-Teilchen Phasenraumvolumen zwischen den beiden Hyperflächen zu den Massen $M-\delta M$ und $M+\delta M$: +)

$$\int_{M-\delta M}^{M+\delta M} d\varkappa' \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \, \delta^{(3)}(\sum \vec{k}'_i) \, \delta(\varkappa' - \sum \omega'_i) = \int_{M-\delta M}^{M+\delta M} d\varkappa' \, J(\varkappa')$$

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \, \delta(\sum \vec{k}'_i) \, \delta(\varkappa' - \sum \omega'_i) = \begin{cases} J(\varkappa') = \varkappa'^{2n-4} \displaystyle\int \frac{d^3K'_1}{2\sqrt{K'^2_1 + \frac{m^2}{\varkappa'^2}}} \cdots \frac{d^3K'_{n'}}{2\sqrt{K'^2_{n'} + \frac{m^2}{\varkappa'^2}}} \, \delta(\sum \vec{K}'_i) \, \delta(\sum \sqrt{K'^2_i + \tfrac{m^2}{\varkappa'^2}} - 1) & \text{für } \varkappa' \geq n' \cdot m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $\varkappa' \geq n' m$ und $\sum \sqrt{K'^2_i + \frac{m^2}{\varkappa'^2}} = 1$ gilt folgende Abschätzung: 9)

$$\int \frac{d^3K'_1}{2\sqrt{K'^2_1 + \frac{m^2}{\varkappa'^2}}} \cdots \frac{d^3K'_{n'}}{2\sqrt{K'^2_{n'} + \frac{m^2}{\varkappa'^2}}} \, \delta^{(3)}(\sum \vec{K}'_i) \, \delta(\sum \sqrt{K'^2_i + \tfrac{m^2}{\varkappa'^2}} - 1) \geq \frac{n'^{n'}}{2^{n'}} \int d^3K'_1 \cdots d^3K'_{n'} \, \delta^{(3)}(\sum \vec{K}'_i) \times$$

$$\times \, \delta\left(\sum |\vec{K}'_i| - \left(1 - \frac{n' m}{\varkappa'}\right)\right) = \frac{n'^{n'}}{2^{n'}} \, \frac{1}{2^3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n'-1} \frac{(4n'-4)! \left[1 - \frac{n' m}{\varkappa'}\right]^{3n'-4}}{(3n'-4)! \, [(2n'-1)!]^2}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{n'^{n'}}{2^{n'}} \varkappa'^{2n'-4} \frac{1}{2^3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n'-1} \frac{(4n'-4)! \left[1 - \frac{n' m}{\varkappa'}\right]^{3n'-4}}{(3n'-4)! \, [(2n'-1)!]^2} \leq J(\varkappa') \leq \varkappa'^{2n'-4} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n'-2)! \, (n'-1)!} = J_{m=0}(\varkappa')$$

$$\overline{\left| \widehat{h}^{(n'|0)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1) \right|}^{\delta M} = \sqrt{\frac{\displaystyle\int_{M-\delta M}^{M+\delta M} \varkappa' d\varkappa' \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \, \delta(\varkappa' - \sum \omega'_i) \, \delta(\sum \vec{k}'_i) \left| \widehat{h}^{(n'|0)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1) \right|^2}{\displaystyle\int_{M-\delta M}^{M+\delta M} \varkappa' d\varkappa' \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \, \delta(\varkappa' - \sum \omega'_i) \, \delta(\sum \vec{k}'_i)}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{[(2n'-1)!]^2 \, (3n'-4)! \, n'! \, 2^{2n'+2} \displaystyle\int_{(M-\delta M)^2}^{(M+\delta M)^2} d\varrho(\varkappa'^2) \, [M+\delta M]^{n'-1}}{n'^{n'} \, \pi^{n'-2} \, (4n'-4)! \, A\left(\frac{\delta M}{M - n' m}\right) \cdot 2\delta M \cdot [M - n' m]^{3n'-4}}}$$

$$A\left(\frac{\delta M}{M - n' m}\right) \to 1 \quad \text{für} \quad \frac{\delta M}{M - n' \cdot m} \longrightarrow 0$$

Aus dieser Abschätzung ersieht man, dass $\widehat{h}^{(n'|0)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1)$ für $\sum_{i=1}^{\infty} \omega'_i \to \infty$ nicht stärker als $\left[\sum_{i=1}^{n'} \omega'_i\right]^{\frac{N+4-3n'}{2}}$ ansteigen kann bzw. für hinreichend grosses n' stärker als $\left[\sum_{i=1}^{n'} \omega'_i\right]^{\frac{N+4-3n'}{2}}$ abfallen muss.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die einlaufenden Felder auf Zuständen der Form $P[a_{in}, a_{in}^*]\, A(f)|0\rangle$, $f \in \mathcal{S}(R^4)$ definiert werden können.

Dazu genügt es, nachzuweisen, dass es zu jedem Paar von Testfunktionen $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(R^{3n})$ eine positive Konstante C gibt, so dass

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}\Big(\sum k_i + \sum k'_i\Big) \hat{\varphi}(\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)\, \widehat{h}^{(n'+n,0)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, k_n, \ldots, k_1) \right|^2$$

$$\leq [n'-2]!\ \text{Const}:$$

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}\Big(\sum k_i + \sum k'_i\Big) \hat{\varphi}(\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)\, \widehat{h^{(n'+n,0)}}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, k_n, \ldots, k_1) \right|^2$$

$$\leq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \cdots \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \left| \tilde{g}\Big(\sum k_i + \sum k'_i\Big) \left[\frac{1+\sum \omega_i + \sum \omega'_i}{m}\right]^{\frac{n}{2}} \widehat{h^{(n'+n,0)}}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, k_n, \ldots, k_1) \right|^2$$

$$\times \left[\int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} |\hat{\varphi}(\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)|^2 \right] \frac{1}{\left[\frac{1+(n'+n)m}{m}\right]^n}$$

$$\leq \frac{[n'+n-2]!}{[n'+n]^n}\ \text{Const}' \leq [n'-2]!\ \text{Const}.$$

Insbesondere ist daher mit $({}^{in}\vec{q}_1 | \tilde{A}(k') \tilde{A}(k) | \vec{p}_1{}^{in})$, integriert über $\vec{q}_1$ und $\vec{p}_1$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^3)$ auch $\langle [a_{in}(\vec{q}_1) \tilde{A}(k')][\tilde{A}(k) a_{in}^*(\vec{p}_1)] \rangle$ integriert über $\vec{q}_1$ und $\vec{p}_1$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^3)$ eine temperierte Distribution in k und k' und umgekehrt.

Temperierte Distributionen sind aber von endlicher Ordnung. Daher gibt es a) zu jedem Paar von Testfunktionen $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$, $\hat{\varphi}_1 \in \mathcal{S}(R^3)$ eine positive Konstante C derart, dass

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \hat{\varphi}_1(\vec{k}_1)\, \tilde{g}\Big(\sum k'_i - k_1\Big) \widehat{h^{(n',1)}}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1) \right|^2 \leq [n'-2]!\, C$$

und b) eine natürliche Zahl N derart, dass für $\hat{\varphi}_1 \in \mathcal{S}(R^3)$

$$\left\langle \left[a_{in}(\hat{\varphi}_1^*), \tilde{A}\Big(\frac{1}{[1+k'^{02}+\vec{k}'^2]^{N/2}}\Big)^* \right] \left[\tilde{A}\Big(\frac{1}{[1+k^{02}+\vec{k}^2]^{N/2}}\Big) a_{in}^*(\hat{\varphi}_1) \right] \right\rangle$$

$$= \int \frac{dk'}{[1+k'^{02}+\vec{k}'^2]^{N/2}} \frac{dk}{[1+k^{02}+\vec{k}^2]^{N/2}} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \left\{ \int \frac{d^3k_{11}}{2\omega_{11}} \widehat{h^{(1,n')}}^*(k_{11}, -k'_1, \ldots, -k'_{n'}) \right.$$

$$\left. \hat{\varphi}_1^*(\vec{k}_{11})\, \delta\Big(k' + k_{11} - \sum k'_i\Big) \right\} \left\{ \int \frac{d^3k_{12}}{2\omega_{12}} \widehat{h^{(n',1)}}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_{12})\, \hat{\varphi}(\vec{k}_{12})\, \delta\Big(k + \sum k'_i - k_{12}\Big) \right\}$$

$$= \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1}{n'!} \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \frac{h^{(n',1)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1)\, \hat{\varphi}(\vec{k}_1)}{[1+(\sum \omega'_i - \omega_1)^2 + (\sum \vec{k}'_i - \vec{k}_1)^2]^{N/2}} \right|^2$$

Die Temperiertheit von $\langle [a_{in}(\varphi_1^*)\tilde{A}(k')][\tilde{A}(k)a_{in}^*(\hat{\varphi}_1)]\rangle$ impliziert die Existenz einer positiven Konstante B und einer natürlichen Zahl N , so dass

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{1}{[1+\sum\omega'_i]^N}\left|\int\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\frac{\widehat{h}^{(n'|1)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1)\hat{\varphi}_1(\vec{k}_1)}{\left[\frac{1+(\sum\omega'_i-\omega_1)^2+(\sum\vec{k}'_i-\vec{k}_1)^2}{1+(\sum\omega'_i)^2+(\sum\vec{k}'_i)^2}\right]^{1/2}}\right| \leq B\cdot n'!$$

Im nächsten Schritt wollen wir nun zeigen, dass die Operatoren des einlaufenden Feldes auf Zuständen der Form $P[a_{in}, a_{in}^*]\tilde{A}(f)a_{in}^*(\hat{\varphi}_1)|0\rangle$, $f\in\mathcal{S}(R^4)$, $\hat{\varphi}_1\in\mathcal{S}(R^3)$ definiert werden können.

Dazu genügt es, nachzuweisen, dass es zu jedem Tripel von Testfunktionen $\tilde{g}\in\mathcal{S}(R^4)$, $\hat{\varphi}_1\in\mathcal{S}(R^3)$, $\hat{\psi}\in\mathcal{S}(R^{3n})$ eine positive Konstante C derart gibt, dass

$$J = \int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\left|\int\frac{d^3p_n}{2\omega_{p_n}}\cdots\frac{d^3p_1}{2\omega_{p_1}}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\tilde{g}(\sum p_j+\sum k'_i-k_1)\hat{\psi}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n)\hat{\varphi}_1(\vec{k}_1)\times\right.$$
$$\left.\widehat{h}^{(n'+n|1)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,p_n,\ldots,p_1,-k_1)\right|^2 \leq [n'-2]!\,C:$$

$$J \leq \int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3p_n}{2\omega_{p_n}}\cdots\frac{d^3p_1}{2\omega_{p_1}}\left|\int\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\tilde{g}(\sum p_j+\sum k'_i-k_1)\hat{\varphi}_1(\vec{k}_1)\left\{\sum_{\nu=0}^{m}\binom{n}{\nu}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega_1}{m}\right)^{\frac{n-\nu}{2}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\frac{1+\sum\omega_{p_j}+\sum\omega'_i}{m}\right]^{1/2}\right\}\widehat{h}^{(n'+n|1)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,p_n,\ldots,p_1,-k_1)\right|^2\int\frac{d^3p_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3p_n}{2\omega_n}\left|\hat{\psi}(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n)\right|^2\frac{1}{[n'+n]^n}$$
$$\leq\frac{[n'+n-2]!}{[n'+n]^n}\,\mathrm{Const}\leq[n'-2]!\,\mathrm{Const}$$

....

Mit $({}^{in}\vec{q}_{n'},\ldots,\vec{q}_1|\tilde{A}(k')\tilde{A}(k)|\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n{}^{in})$, $\forall n',n$ integriert über die $\vec{q}_i$ und $\vec{p}_i$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'})$ und $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ definieren insbesondere also auch $\langle[a_{in}(q_{n'}),\cdots[a_{in}(\vec{q}_1)\tilde{A}(k')]\cdots][\cdots[\tilde{A}(k)a_{in}^*(\vec{p}_1)],\cdots a_{in}^*(\vec{p}_n)]\rangle$ integriert über die $\vec{q}_i$ und $\vec{p}_i$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'})$ und $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ temperierte Distributionen in k und k' und umgekehrt. Temperierte Distributionen sind aber von endlicher Ordnung. Daher gibt es a) zu jedem Paar von Testfunktionen $\tilde{g}\in\mathcal{S}(R^4)$, $\hat{\varphi}_n\in\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ eine positive Konstante C derart, dass

$$\left|\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\left|\int\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\tilde{g}(\sum k'_i-\sum k_i)\hat{\varphi}_n(\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n)\widehat{h}^{(n'|n)}(k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)\right|\right|$$
$$\leq[n'-2]!\,C$$

und b) eine natürliche Zahl N derart, dass für $\hat{\varphi}_n\in\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$:

$$\int \frac{dk'}{[1+k'^{0\,2}+\vec{k}'^{2}]^{N/2}} \frac{dk}{[1+k^{0\,2}+\vec{k}^{2}]^{N/2}} \int \frac{d^3q_m}{2\omega_{q_m}} \cdots \frac{d^3q_1}{2\omega_{q_1}} \frac{d^3p_1}{2\omega_{p_1}} \cdots \frac{d^3p_m}{2\omega_{p_m}} \hat{\varphi}^*_m(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_m)\, \hat{\varphi}_m(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m)$$

$$\langle [a_{in}(\vec{q}_m), \cdots [a_{in}(\vec{q}_1)\tilde{A}(k')] \cdots][\cdots [\tilde{A}(k)a^*_{in}(\vec{p}_1)] \cdots, a^*_{in}(\vec{p}_m)] \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3k'_n}{2\omega'_n} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{1}{[1+(\sum \omega'_i)^2+(\sum \vec{k}'_i)^2]^N} \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_m}{2\omega_m} \hat{h}^{(n,m)}(k'_n, \cdots, k_m) \times \right.$$

$$\left. \frac{\hat{\varphi}_m(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_m)}{\left[\dfrac{1+(\sum\omega'_i-\sum\omega_i)^2+(\sum\vec{k}'_i-\sum\vec{k}_i)^2}{1+(\sum\omega'_i)^2+(\sum\vec{k}'_i)^2}\right]^{N/2}} \right|^2$$

Die Temperiertheit von $\langle [a_{in}(\vec{q}_m), \cdots [a_{in}(\vec{q}_1)\tilde{A}(k')] \cdots][\cdots [\tilde{A}(k)a^*_{in}(\vec{p}_1)] \cdots, a^*_{in}(\vec{p}_m)] \rangle$ als Distribution in k und k' ist äquivalent mit der Existenz einer positiven Konstante B (zu jeder Testfunktion $\hat{\varphi}_m \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3m})$) und einer natürlichen Zahl N , so dass

$$(n\text{-}P) \int \frac{d^3k'_n}{2\omega'_n} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{1}{[1+(\sum\omega'_i)^2]^N} \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_m}{2\omega_m} \frac{\hat{h}^{(n,m)}(k'_n, \cdots, k'_1, -k_1, \cdots, -k_m)\,\hat{\varphi}_m(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_m)}{\left[\dfrac{1+(\sum\omega'_i-\sum\omega_i)^2+(\sum\vec{k}'_i-\sum\vec{k}_i)^2}{1+(\sum\omega'_i)^2+(\sum\vec{k}'_i)^2}\right]^{N/2}} \right|^2$$

$$\leq n!\,B$$

Die Operatoren des einlaufenden Feldes sind auf Zuständen der Form

$$P[a^*_{in}, a_{in}]\tilde{A}(f) \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_m}{2\omega_m} \hat{\varphi}_m(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_m) a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_m)|0\rangle \qquad \begin{array}{l} f \in \mathcal{S}(R^4) \\ \hat{\varphi}_m \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3m}) \end{array}$$

definiert (bzw. wie man mit ähnlichen Methoden zeigen kann) auf Zuständen aus der Menge:

$$\mathcal{LH}\left\{ P_1[a_{in}, a^*_{in}]\, P_2[A] \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_m}{2\omega_m} \hat{\varphi}_m(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_m) a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_m)|0\rangle \right\},$$

wobei $\hat{\varphi}_m \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3m})$

$$P_1[a^*_{in}, a_{in}] = \sum_{i,j}^{<\infty} \int \frac{d^3p_1}{2\omega_{p_1}} \cdots \frac{d^3p_j}{2\omega_{p_j}} \frac{d^3q_1}{2\omega_{q_1}} \cdots \frac{d^3q_i}{2\omega_{q_i}} \hat{\psi}_{ij}(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_j, \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_i) a^*_{in}(\vec{p}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{p}_j) \times$$

$$\times\, a_{in}(\vec{q}_1) \cdots a_{in}(\vec{q}_i) \quad , \hat{\psi}_{ij} \in \mathcal{S}(R^{3(j+i)})$$

$$P_2[A] = \sum_{\ell}^{<\infty} \int dk_1 \cdots dk_\ell\, \tilde{g}_\ell(k_1, \cdots, k_\ell)\tilde{A}(k_1) \cdots \tilde{A}(k_\ell),\ \tilde{g}_\ell \in \mathcal{S}(R^{4\ell})$$

$$\int_{E-\epsilon}^{E+\epsilon} d\varkappa \frac{1}{[1+\varkappa^2]^N} \int \frac{d^3k'_n}{2\omega'_n} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \delta(\varkappa - \sum\omega'_i) \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_m}{2\omega_m} \frac{\hat{h}^{(n,m)}(k'_n, \cdots, -k_m)\,\hat{\varphi}_m(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_m)}{\left[\dfrac{1+\sum(\omega'_i-\sum\omega_i)^2+(\sum\vec{k}'_i-\sum\vec{k}_i)^2}{1+(\sum\omega'_i)^2+(\sum\vec{k}'_i)^2}\right]^{N/2}} \right|^2 \leq n!B$$

Daher haben wir für $\hat{\varphi}_m \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3m})$:

$$\left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_m}{2\omega_m} \hat{h}^{(n,m)}(k'_n, \cdots, k'_1, -k_1, \cdots, -k_m) \frac{\hat{\varphi}_m(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_m)}{\left[\dfrac{1+(\sum\omega'_i-\sum\omega_i)^2+(\sum\vec{k}'_i-\sum\vec{k}_i)^2}{1+(\sum\omega'_i)^2+(\sum\vec{k}'_i)^2}\right]^{N/2}} \right|_\epsilon <$$

$$\leq \sqrt{\frac{B \cdot n'! \, [1+E^2]^N}{\int\limits_{E-\epsilon}^{E+\epsilon} dx \int \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \cdots \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \, \delta(x - \sum_{i=1}^{n'} \omega'_i)}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{B \cdot n'! \, [1+E^2]^N (3n'-1)!}{2\epsilon \, n'^{n'} E^{2n'-1} (4\pi)^{n'} \left(1 - \frac{n' \cdot m}{E}\right)^{3n'-1} A\left(\frac{\epsilon}{E-n' \cdot m}\right)}}$$

$$\leq \mathrm{Const} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi n'}}{(4\pi e)^{n'}} \cdot \frac{(3n'-1)! \, L(n')}{A\left(\frac{\epsilon}{E-n' m}\right) 2\epsilon}} \; \frac{E^{N+\frac{n'}{2}}}{[E-n' \cdot m]^{\frac{3n'-1}{2}}}$$

wobei $A\left(\frac{\epsilon}{E-n'm}\right) \to 1$ für $\frac{\epsilon}{E-n'm} \to 0$, $L(n') \to 1$ für $n' \to \infty$

Die Aussagen können noch konkreter gefasst werden:

Wie im Abschnitt 2 schliesst man, dass

$$\langle [a_{in}(\vec{q}_{n'}), \cdots [a_{in}(\vec{q}'_1) \tilde{A}(k')] \cdots] [\cdots [\tilde{A}(k) \, a^*_{in}(\vec{p}_1)] \cdots , a^*_{in}(\vec{p}_n)] \rangle$$

ein stetiges lineares Funktional über $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$ ist.

Da dieses Funktional aber von endlicher Ordnung ist, gibt es eine Konstante B und eine natürliche Zahl N so, dass

$$\left(\tilde{g}(k) \, \hat{\varphi}_n(\vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_n) \longrightarrow \frac{1}{[1+(k^0+\sum \omega_i)^2 + (\vec{k}+\sum \vec{k}_i)^2]^{N/2}} \prod_{i<j} \left[\frac{[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}\right]^{N/2} \frac{1}{[1+(\sum \omega_i)^2]^{N/2}} \right)$$

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{1}{[1+(\sum_i \omega'_i)^2 + (\sum_i \vec{k}'_i)^2]^N} \left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \prod \left[\frac{[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}\right]^{N/2} \times \right.$$

$$\left. \frac{\widehat{h}^{(n',n)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \cdots, -k_n)}{[1+(\sum \omega_i)^2]^{N/2}} \right|^2 \leq n'! \cdot B$$

$$\overline{\left| \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \prod_{i<j} \left[\frac{[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}\right]^{N/2} \frac{\widehat{h}^{(n',n)}(k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \cdots, -k_n)}{[1+(\sum \omega_i)^2]^{N/2}} \right|}^{\,\epsilon}$$

$$\leq \sqrt{\frac{B \cdot n'! \, 2^N \, [1+E^2]^N}{\int\limits_{E-\epsilon}^{E+\epsilon} dx \int \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \cdots \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \, \delta(x - \sum \omega'_i)}}$$

$$\leq \mathrm{Const} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi n'}}{(4\pi e)^{n'}} \; \frac{(3n'-1)! \, L(n')}{A\left(\frac{\epsilon}{E-n'm}\right) 2\epsilon}} \; \frac{E^{N+\frac{n'}{2}}}{[E-n'm]^{\frac{3n'-1}{2}}}$$

wobei $A\left(\frac{\epsilon}{E-n'm}\right) \to 1$ für $\frac{\epsilon}{E-n' \cdot m} \to 0$. $L(n') \to 1$ für $n' \to \infty$.

Das aber heisst, dass $\int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \prod_{i<j} \left[\frac{[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i-\vec{k}_j]^2} \right]^{N/2} \frac{\hat{h}^{(n',n)}(k_{n'}, \ldots, -k_n)}{[1+(\sum \omega_i)^2]^{N/2}}$ für grosse $E = \sum \omega_i'$ (im Mittel) nicht stärker als $E^{\frac{N+1}{2}-n'}$ ansteigen darf bzw. für hinreichend grosse n' stärker als $E^{\frac{N+1}{2}-n'}$ abfallen muss.

IV Asymptotische Vollständigkeit und Entwickelbarkeit des Feldes $A(x)$ nach dem einlaufenden Feld.

Das folgende Theorem wird uns erlauben, von dem Axiomensystem 0, I, II, III, IV bzw. von dem dazu (u.a. auf Grund der TPC-Invarianz) äquivalenten System 0, I' (d.i. Axiom I ohne die Forderung, dass das Vakuum zyklisch sein soll bezüglich des Rings aller Polynome in $A(f), f \in \mathcal{S}(R^4)$), II, III, IV' : $\mathcal{H}^{in} = \mathcal{H}$ zu einem gleichwertigen neuen Axiomensystem überzugehen, in welchem die Forderung nach der Vollständigkeit der einlaufenden Zustände ersetzt ist durch die Forderung, dass sich der Feldoperator $A(x)$ nach den Operatoren des einlaufenden Feldes $A_{in}(x_i)$ entwickeln lässt.

<u>Theorem 2</u>: Seien die Axiome 0, I', II und III erfüllt. Dann ist mit dem Axiom IV' äquivalent die Aussage

IV^o: Das Feld $\tilde{A}(k)$ gestattet auf dem Bereich D von Axiom I' eine Entwicklung nach den Operatoren des einlaufenden Feldes

$$\tilde{A}(k) = \sum_{n'+n>0} \frac{1}{n'!}\frac{1}{n!}\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\tilde{C}^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)\, a^*_{in}(\vec{k}'_{n'})\cdots a^*_{in}(\vec{k}'_1)\, a_{in}(\vec{k}_1)\cdots a_{in}(\vec{k}_n)$$

wobei die Koeffizienten"funktionen" $\tilde{C}^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)$ $(\tilde{C}^{(n',n)} = \delta \cdot \tilde{\hat{C}}^{(n',n)})$ lineare stetige Funktionale auf einem Testfunktionsraum $\mathcal{J}_D$ sind, der $\mathcal{S}(\mathring{R}^4 \times R^{3n'} \times R^{3n})$ umfasst, und folgende Vollständigkeitsforderung erfüllen: (V) "Sei B ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$. Falls für alle $\hat{\varphi}_{n'} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'})$, $\hat{\psi}_n \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$, $n', n = 0, 1, 2, \dots$; $\tilde{f} \in \mathcal{S}(R^4)$:

$$\sum_{\ell'} \frac{1}{\sqrt{\ell'!}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\substack{\lambda=0\\ P\in S_\lambda}}^{\min\{\ell',n\}}\sum_{I'_\lambda, I_\lambda}\int \frac{d^3k'_{\ell'}}{2\omega'_{\ell'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\tilde{f}\Big(\sum_{i=1}^{\ell'}k'_i - \sum_{i=1}^{n}k_i\Big)\big(B\Phi^{in}(\hat{\varphi}_{n'})\big)^*_{\ell'}(\vec{k}'_1,\dots,\vec{k}'_{\ell'})$$
$$\hat{C}^{(\ell',n)}(k'_{\ell'},\dots,\widehat{k'_{I'_\lambda(\lambda)}},\dots,\widehat{k'_{I'(1)}},\dots,k'_1,-k_1,\dots,\widehat{-k_{I_\lambda(1)}},\dots,\widehat{-k_{I_\lambda(\lambda)}},\dots,-k_n)\,\hat{\psi}_n(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)\times$$
$$\times\, 2\omega'_{I'_\lambda(1)}\delta(\vec{k}'_{I'_\lambda(1)}-\vec{k}_{I_\lambda(P(1))})\cdots 2\omega'_{I'_\lambda(\lambda)}\delta(\vec{k}'_{I'_\lambda(\lambda)}-\vec{k}_{I_\lambda(P(\lambda))}) = \sum_{\ell}\frac{1}{\sqrt{\ell!}}\frac{1}{\sqrt{n'!}}\sum_{\substack{\lambda=0\\ P\in S^\lambda}}^{\min\{\ell,n'\}}\sum_{I_\lambda, I'_\lambda}\int\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\cdots\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}$$
$$\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_\ell}{2\omega_\ell}\tilde{f}\Big(\sum_{i=1}^{n'}k'_i - \sum_{i=1}^{\ell}k_i\Big)\hat{\varphi}^*_{n'}(\vec{k}'_1,\dots,\vec{k}'_{n'})\hat{C}^{(n',\ell)}(k'_{n'},\dots,\widehat{k'_{I'_\lambda(\lambda)}},\dots,\widehat{k'_{I'_\lambda(1)}},\dots,k'_1,$$
$$-k_1,\dots,\widehat{-k_{I_\lambda(1)}},\dots,\widehat{-k_{I_\lambda(\lambda)}},\dots,-k_\ell)\big(B^*\Phi^{in}(\hat{\psi}_n)\big)(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_\ell)\,2\omega'_{I'_\lambda(1)}\delta(\vec{k}'_{I'_\lambda(1)}-\vec{k}_{I_\lambda(P(1))})\cdots 2\omega'_{I'_\lambda(\lambda)}\delta(\vec{k}'_{I'_\lambda(\lambda)}-\vec{k}_{I_\lambda(P(\lambda))})$$

gilt, folgt: $\quad B = b \cdot 1$ "

Beweis: Wir werden zunächst zeigen, dass aus den Axiomen 0, I', II, III und IV' die behauptete Darstellung folgt.

Dazu setzen wir $\tilde{C}_0^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n) = \tilde{h}^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)$

$$= (-1)^{n'} \langle [\cdots[[\cdots[\tilde{A}(k)\, a_{in}(\vec{k}'_1)]\cdots, a_{in}(\vec{k}'_{n'})]\, a^*_{in}(\vec{k}_1)]\cdots, a^*_{in}(\vec{k}_n)] \rangle$$

betrachtet über dem Testfunktionsraum $\overset{\square}{\mathcal{S}}(R^4 \times R^{3n'} \times R^{3n})$.

Mit dieser Wahl ist $\tilde{C}_0^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\overset{\square}{\mathcal{S}}(R^4 \times R^{3n'} \times R^{3n})$. Es gelten auf diesem Testfunktionsraum überdies die Eigenschaften (S), (T), (L), (R), "nach Integration über die Impulse des einen Blattes des Massenhyperboloids mit Testfunktionen aus $\mathring{\mathcal{S}}$ sind die $\tilde{C}_0^{(n',n)}$ lokal L^2 -integrierbar in den Impulsen des anderen Massenhyperboloidblattes" und die Eigenschaften (0-P), ..., (n-P), ... Diese Eigenschaften garantieren uns, dass die Reihe Σ =

$$\sum_{\substack{n',n\ge 0\\ n'+n>0}} \frac{1}{n'!}\frac{1}{n!}\int dk\, \tilde{f}(k) \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\tilde{C}_0^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)\, a^*_{in}(\vec{k}'_{n'})\cdots a^*_{in}(\vec{k}'_1)\, a_{in}(\vec{k}_1)\cdots a_{in}(\vec{k}_n)$$

für $f \in \mathcal{S}(R^4)$ auf D_0^{in}, der linearen Hülle der einlaufenden Zustände mit nicht-überlappenden, unendlich oft differenzierbaren, stark abfallenden Wellenfunktionen, (einer in $\mathcal{H}$ in der Topologie $\sum L^2_{\pi\Omega_+}$ dichten Menge von Vektoren) stark konvergiert. Damit definiert die Reihe einen linearen Operator $\tilde{A}'_0(\tilde{f})$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$, dessen Definitionsbereich D'_0 die lineare Menge D_0^{in} umfasst. Darüber hinaus definiert die Reihe

$$\tilde{A}'_0(k) = \sum \frac{1}{n'!}\frac{1}{n!}\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\tilde{C}_0^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)\, a^*_{in}(\vec{k}'_{n'})\cdots a^*_{in}(\vec{k}'_1)\, a_{in}(\vec{k}_1)\cdots a_{in}(\vec{k}_n)$$

eine operatorwertige, temperierte Distribution. Es gilt: $\tilde{A}'_0(\tilde{f}^*) \subset \tilde{A}'_0(\tilde{f})^*$. Insbesondere hat $\tilde{A}'_0(\tilde{f})$ einen (eindeutigen) Abschluss und i.a. nicht eindeutige maximale "symmetrische" Erweiterungen.

Man verifiziert nun leicht die folgende Identität für $\Phi^{in} \in D_0^{in}, \Psi^{in} \in \mathcal{H}^{in}$:

$$(\Psi^{in}|\, \tilde{A}'_0(k)\, |\Phi^{in}) = (\Psi^{in}|\tilde{A}(k)|\Phi^{in})$$

woraus auf D_0^{in} folgt:

$$\tilde{A}(k) = \sum_{\substack{n',n\ge 0\\ n'+n>0}} \frac{1}{n'!}\frac{1}{n!}\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\tilde{C}_0^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)\, a^*_{in}(\vec{k}'_{n'})\cdots a_{in}(\vec{k}_n)$$

Wir haben nun noch darzulegen, dass $\tilde{A}(k)$ auf dem ganzen Bereich von Axiom I' nach den einlaufenden Feldern entwickelbar ist:

Dem Übergang von $\tilde{A}/_{D_0^{in}}$ zu $\tilde{A}/_{D}$ entspricht eine bestimmte Fortsetzung der auf $\overset{\square}{\mathcal{S}}(R^4 \times R^{3n'} \times R^{3n})$ linearen stetigen Funktionale

$$\tilde{h}^{(n'|n)}(k|k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n) = (-1)^{n'}\langle[\ldots[[\ldots[\tilde{A}(k)a_{in}(\vec{k}'_1)]\ldots,a_{in}(\vec{k}'_{n'})]a^*_{in}(\vec{k}_1)]\ldots,a^*_{in}(\vec{k}_n)]\rangle$$

bzw. von Summen von Produkten von ihnen (zu einer Variablen $\vec{k}_i$ gibt es in jedem Summanden höchstens zwei Faktoren, von denen der eine $\vec{k}_i$ als Argument hat und der andere $-\vec{k}_i$: über solche zweimal vorkommenden Variablen ist dann integriert) zu linearen stetigen Funktionalen auf grösseren Testfunktionsräumen $\overset{\square}{\mathcal{S}}_D$.

Der Umstand, dass $\int dp_1 \ldots dp_n \tilde{\varphi}(p_1,\ldots,p_n)\tilde{A}(-p_1)\ldots\tilde{A}(-p_n)\Phi^{in}$; $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(R^{4n})$, $\Phi^{in} \in D_0^{in}$ wieder einen Vektor in $\mathcal{H}$ definiert, drückt sich in den entsprechenden (wahrscheinlich unerhört schwer als Eigenschaften der einzelnen $\tilde{h}^{(n'|n)}$ angebbaren) Abfallseigenschaften der $\tilde{h}^{(n'|n)}(k|k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)$ bzw. von Summen von Produkten von ihnen aus. Diese zusätzlichen Eigenschaften der $\tilde{h}^{(n'|n)}$ garantieren, dass mit der Wahl

$$\tilde{C}^{(n'|n)}(k|k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n) = \tilde{h}^{(n'|n)}(k|k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)$$

die Reihe Σ stark konvergiert und daher einen linearen Operator $\tilde{A}'(\varphi)$ in $\mathcal{H}$ mit dem Definitionsbereich D - eine Erweiterung von $\tilde{A}'_0(\varphi)$ - definiert und überdies die Reihe:

$$+)\ \tilde{A}'(k) = \sum \frac{1}{n'!}\frac{1}{n!}\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\ldots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\ldots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\tilde{C}^{(n'|n)}(k|k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)a^*_{in}(\vec{k}'_{n'})\ldots a^*_{in}(\vec{k}'_1)a_{in}(\vec{k}_1)\ldots a_{in}(\vec{k}_n)$$

eine operatorwertige, temperierte Distribution erklärt.

Man verifiziert dann wie oben folgende Identität für $\Phi \in D$, $\Psi^{in} \in \mathcal{H}^{in}$

$$(\Psi^{in}|\tilde{A}'(k)|\Phi) = (\Psi^{in}|\tilde{A}(k)|\Phi)$$

woraus auf D die behauptete Entwicklung nach den Operatoren des einlaufenden Feldes folgt, wenn wir noch die Eigenschaft (V) beweisen können.

Diese Eigenschaft der Koeffizienten"funktionen" folgt aber unmittelbar aus dem folgenden Hilfssatz (durch Einsetzen der Entwicklung +))

<u>Hilfssatz 3:</u> Seien die Axiome 0, I', II, III, IV' erfüllt. Falls für einen linearen beschränkten Operator B in $\mathcal{H}$ für alle $\Phi^{in}, \Psi^{in} \in D_0^{in}$

und alle $f \in \mathcal{S}(R^4)$ gilt:

$$(B\Phi^{in}|\tilde{A}(f)|\Psi^{in}) = (\tilde{A}(f)^*\Phi^{in}|B^*|\Psi^{in})$$

folgt: $$B = b \cdot \mathbb{1}$$

Beweis des Hilfssatzes 3: Man betrachte das Matrixelement

$$(B|\hat{f}'_1, \dots, \hat{f}'_{n'}{}^{in}), |\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in})) \quad , \{\tilde{f}'_i\}, \{\tilde{f}_i\} \subset \mathcal{S}(G) \text{ nicht-überlappend}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen: $n' \geq n$.

$$(B|\hat{f}'_1, \dots, \hat{f}'_{n'}{}^{in}), |\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in})) = (|\hat{f}'_1, \dots, \hat{f}'_{n'}{}^{in}), B^*|\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in}))$$
$$= \lim_{t \to -\infty} (A(f'_1,t)^*|\hat{f}'_2, \dots, \hat{f}'_{n'}{}^{in}), B^*|\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in}))$$
$$= \lim_{t \to -\infty} (B|\hat{f}'_2, \dots, \hat{f}'_{n'}{}^{in}), A(f'_1,t)|\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in}))$$
$$= \sum_i (B|\hat{f}'_2, \dots, \hat{f}'_{n'}{}^{in}), |\hat{f}_1, \dots, \widehat{\hat{f}_i}, \dots, \hat{f}_n{}^{in}))({}^{in}\hat{f}'_1|\hat{f}_i{}^{in})$$
$$= \dots$$
$$= (B|\hat{f}'_{n+1}, \dots, \hat{f}'_{n'}{}^{in}), |0\rangle)\, ({}^{in}\hat{f}'_{n}, \dots, \hat{f}'_1|\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in})$$
$$= \delta_{n'n}(B|0\rangle, |0\rangle)({}^{in}\hat{f}'_{n'}, \dots, \hat{f}'_1|\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in}) = b^*({}^{in}\hat{f}'_{n'}, \dots, \hat{f}'_1|\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in})$$

Da die Menge der Vektoren $|\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n{}^{in})$ $n = 0, 1, \dots$ $\{f_i\} \subset \mathcal{S}(G)$ nicht-überlappend, in D_o^{in} bzw. in $\mathcal{H}^{in}$ total ist, folgt:

$$B = b \cdot \mathbb{1} \qquad \text{q.e.d.}$$

Damit ist das Theorem 2 in der einen Richtung bewiesen.

Nun soll die Umkehrung gezeigt werden. Wir gehen also aus von den Axiomen 0, I', II, III, (konstruieren die einlaufenden Zustände nach[2), 3)], sei P^{in} der Projektionsoperator auf den in $\mathcal{H}$ abgeschlossenen Hilbertraum $\mathcal{H}^{in}$ der einlaufenden Zustände) und Aussage IV^o. Wir bemerken, dass P^{in} die Voraussetzungen am den linearen Operator B in der Formulierung von (V) erfüllt. Daher ist P^{in} ein Vielfaches des Einheitsoperators und es gilt also nach (V), Teil der Aussage IV^o: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{in}$.

Damit ist das Theorem 2 auch in der anderen Richtung bewiesen.

Im verbleibenden Teil dieser Arbeit werden wir das (dem in der Einleitung aufgeführten Axiomensystem äquivalente) System der Axiome 0, I', II, III, IV^{o} zugrundelegen.

Wir notieren sogleich den folgenden Zusammenhang von den Koeffizienten"funktionen" mit den VEV von repetierten Kommutatoren des Feldes A(x) mit den Operatoren des einlaufenden Feldes $A_{in}(x_i)$:

$$\tilde{C}^{(n'|n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n) = (-1)^{n'} \langle [\dots[[\dots[\tilde{A}(k) a_{in}(\vec{k}'_1)] \dots, a_{in}(\vec{k}'_{n'})] a^*_{in}(\vec{k}_1)] \dots, a^*_{in}(\vec{k}_n)]\rangle_0$$

betrachtet als lineare stetige Funktionale auf $\mathcal{S}_D$. Für die Koeffizienten"funktionen", die wir im folgenden auch mit $\tilde{h}^{(n'|n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)$ bezeichnen werden, gelten über dem Testfunktionsraum $\mathcal{S}_D$ die Eigenschaften (T), (S), (L), (R); ausserdem: "nach Integration über die Impulse des einen Blattes des Massenhyperboloids mit Testfunktionen aus einem gewissen Raum $\mathring{\mathcal{S}}_D$, der $\mathring{\mathcal{S}}$ umfasst, sind die $\hat{h}^{(n'|n)}$ lokal L^2-integrierbar und von höchstens polynomialem Anstieg (im Mittel) in den Impulsen des anderen Blattes", und die Eigenschaften (V) und (0-P), ..., (n-P), ... sind erfüllt.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu untersuchen, welche weiteren Eigenschaften dieser Koeffizienten"funktionen" $\tilde{h}^{(n'|n)}$ aus den Axiomen 0, I', II, III, IV^{o} folgen.

0 Zunächst ist klar, dass die <u>Spektrumsbedingung</u> keine weiteren Einschränkungen an die Koeffizienten"funktionen" bewirken kann, denn diese Bedingung ist durch die postulierte Entwickelbarkeit des Feldes A(x) nach den Operatoren des einlaufenden Feldes $A_{in}(x_i)$ automatisch erfüllt.

Ebenso schränkt die Forderung <u>positiver Definitheit</u> die Koeffizienten"funktionen" nicht weiter ein, denn für $\tilde{g}_\ell \in \mathcal{D}$ $0 \leq \ell \leq N$

$$\sum_{i,i'}^{N<\infty} \int dk'_1 \dots dk'_{i'}\, \tilde{g}^*_{i'}(k'_1,\dots,k'_{i'}) \int dk_1 \dots dk_i\, \tilde{g}_i(k_1,\dots,k_i) \langle \tilde{A}(k'_{i'}) \dots \tilde{A}(k'_1) \tilde{A}(-k_1) \dots \tilde{A}(-k_i)\rangle$$

$$= \sum_{i,i'}^{N<\infty} \sum_{n=0}^{<\infty} \int \frac{d^3p_1}{2\omega_1} \dots \frac{d^3p_n}{2\omega_n}\, \hat{\chi}^*_{i'}(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_n) \hat{\chi}_i(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_n) \geq 0, \text{ mit } \hat{\chi}_\ell \in L^2_{\Pi\Omega_+}$$

- das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle $\hat{\chi}_\ell \in L^2_{\Pi \Omega_\ell}$ identisch 0 sind. - und für jedes N-Tupel von Testfunktionen $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1(k_1), \ldots$ $\tilde{f}_N(k_1, \ldots, k_N)$ aus $\mathbb{C}, \mathcal{S}(R^4), \ldots, \mathcal{S}(R^{4N})$ eine Folge von N-Tupeln von Testfunktionen $\tilde{g}_0^{(\nu)}, \tilde{g}_1^{(\nu)}(k_1), \ldots, \tilde{g}_N^{(\nu)}(k_1, \ldots, k_N)$ aus $\mathbb{C}, \mathcal{D}(R^4), \ldots, \mathcal{D}(R^{4N})$ existiert derart, dass

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{i,i'}^{N} \int dk_{i'}' \cdots dk_1' \, dk_1 \cdots dk_i \, \tilde{g}_{i'}^{(\nu)*}(k_1', \ldots, k_{i'}') \, \tilde{g}_i^{(\nu)}(k_1, \ldots, k_i) \langle \tilde{A}(k_{i'}') \cdots \tilde{A}(k_1') \tilde{A}(-k_1) \cdots \tilde{A}(-k_i) \rangle$$

$$= \sum_{i,i'}^{N} \int dk_{i'}' \cdots dk_1' \, dk_1 \cdots dk_i \, \tilde{f}_{i'}^{*}(k_1', \ldots, k_{i'}') \, \tilde{f}_i(k_1, \ldots, k_i) \langle \tilde{A}(k_{i'}') \cdots \tilde{A}(k_1') \tilde{A}(-k_1) \cdots \tilde{A}(-k_i) \rangle,$$

I Die im Axiom I' aufgeführte Forderung, dass $\tilde{A}(f^*) \subset \tilde{A}(f)^*$ bewirkt genau die Eigenschaft (R) auf $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$.

Der Versuch, die distributionstheoretischen Forderungen des Axioms I' unmittelbar in Aussagen über die Koeffizienten-"funktionen" umzusetzen, ist bislang gescheitert an Schwierigkeiten, die wir hier kurz andeuten wollen. Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir die Forderung herausgreifen, dass

$$(\ldots \vec{k}_1', \vec{k}_1 \,|\, \int dk \, dk' \, \tilde{\psi}(k+k', k') \tilde{A}(k) \tilde{A}(k') \rangle \in L^2 \quad \text{für } \tilde{\psi} \in \mathcal{D}(R^8)$$

und hieraus (indem wir, wenn sich die Gelegenheit bieten sollte, auch ausnutzen werden, dass die VEV von Produkten von Feldoperatoren temperierte Distributionen definieren) Aussagen über die $\tilde{h}^{(n',n)}$ zu gewinnen versuchen.

Wir setzen die Entwicklung des interpolierenden Feldes nach dem einlaufenden Feld ein und erhalten

$$\sum_{\ell=2}^{<\infty} \frac{1}{(\ell-2)!} \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_{\ell-2}}{2\omega_{\ell-2}} \tilde{\psi}\Big(-k_1'-k_2', -k_1'-k_2'-\sum_{i=1}^{\ell-2} k_i\Big) \widehat{h}^{(2,\ell-2)}(-k_1, \ldots, -k_{\ell-2}) \times$$
$$\times \widehat{h}^{(\ell,0)}(k_2', k_1', k_{\ell-2}, \ldots, k_1)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{<\infty} \frac{1}{(\ell-1)!} \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_{\ell-1}}{2\omega_{\ell-1}} \tilde{\psi}\Big(-k_1'-k_2', -k_1'-\sum_{i=1}^{\ell-1} k_i\Big) \widehat{h}^{(1,\ell-1)}(k_2', -k_1, \ldots, -k_{\ell-1}) \times$$
$$\times \widehat{h}^{(\ell,0)}(k_1', k_{\ell-1}, \ldots, k_1)$$

$$+ \sum^{<\infty} \frac{1}{(\ell-1)!} \int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_{\ell-1}}{2\omega_{\ell-1}} \tilde{\psi}\Big(-k_1'-k_2', -k_2'-\sum_{i=1}^{\ell-1} k_i\Big) \widehat{h}^{(1,\ell-1)}(k_1', -k_1, \ldots, -k_{\ell-1}) \times$$
$$\times \widehat{h}^{(\ell,0)}(k_2', k_{\ell-1}, \ldots, k_1) \qquad +$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_l}{2\omega_l}\,\tilde{\psi}\Big(-k_1'-k_2',-\sum_{i=1}^{l}k_i\Big)\,\widehat{h}^{(2,l)}(k_2',k_1',-k_1,\ldots,-k_l)\,\times$$
$$\times\,\widehat{h}^{(l,0)}(k_l,\ldots,k_1)$$

Im nächsten Schritt werden wir natürlich versuchen, Eigenschaften der einzelnen Summanden zu erschliessen: in den ersten 3 Summen ist jeder Term wohldefiniert, wenn wir über $\vec{k}_1'$ und $\vec{k}_2'$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^6)$ integrieren; in der letzten Summe sind wir dessen aber nur gewiss, wenn wir über $\vec{k}_1'$ und $\vec{k}_2'$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3\cdot 2})$ integrieren.

Es wäre also z.B. unsere Aufgabe, insbesondere aus der Kenntnis, dass

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\frac{d^3k_2'}{2\omega_2'}\frac{d^3k_1'}{2\omega_1'}\,\hat{\varphi}(\vec{k}_1',\vec{k}_2')\int\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_l}{2\omega_l}\,\tilde{\psi}\Big(-k_1'-k_2',-\sum k_i\Big)\,\times$$
$$\widehat{h}^{(2,l)}(k_2',k_1',-k_1,\ldots,-k_l)\,\widehat{h}^{(l,0)}(k_l,\ldots,k_1)$$

eine Distribution definiert, d.h.

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_l}{2\omega_l}\,\delta\Big(k-\sum^{l}k_i\Big)\,\widehat{h}^{(2,l)}(k_2',k_1',-k_1,\ldots,-k_l)\,\widehat{h}^{(l,0)}(k_l,\ldots,k_1)$$
$$\in\mathcal{D}'(R^4\times R^{3\cdot 2})$$

auf notwendige Bedingungen für die einzelnen $\widehat{h}^{(2,l)},\widehat{h}^{(l,0)}$ zu schliessen. Das hätte in zwei Schritten zu erfolgen:

1) es müssten Eigenschaften der einzelnen Summanden gefolgert werden, 2) müsste dann daraus auf die einzelnen $\widehat{h}^{(2,l)},\widehat{h}^{(l,0)}$ $l=1,2,\ldots$ geschlossen werden.

Für $k^2=\big(\sum_{i=1}^{l}k_i\big)^2\geq 4m^2$ reicht aber die verbliebene Freiheit in der Wahl der Testfunktionen aus $\mathcal{D}(R^4\times R^{3\cdot 2})$ nicht aus, die Summanden zu trennen. Damit ist schon die Ausführung des ersten Schrittes der angedeuteten Schlussweise nicht möglich.

II Die Forderung der Lorentzinvarianz bewirkt genau die Eigenschaften (T) und (L) auf $\mathring{\mathcal{J}}_{\mathcal{D}}$.

V Glattheitseigenschaften der Koeffizienten"funktionen" auf der Massenschale

In Analogie zu dem Sachverhalt, dass die trunkierten Wightmanfunktionen im Impulsraum nach Abspaltung der 4-dimensionalen δ -Funktion und Integration über die 0-Komponenten mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}$ in den verbleibenden räumlichen Impulsen Funktionen aus $\mathcal{O}_M$ sind, wollen wir zeigen, dass auch die Koeffizienten"funktionen" Glattheitseigenschaften besitzen.
Wir werden zwei verschiedene Methoden kennenlernen, solche Eigenschaften zu beweisen. Der ersten Methode (Ausnutzung gleichmässiger Konvergenz) werden wir in den Beweisen von den Hilfssätzen 4 und 5 begegnen, der zweiten in den Beweisen der Theoreme 5 und 6.

<u>Hilfssatz 4:</u> Für $g \in \mathcal{S}(R^4)$ und nicht-überlappende $\{\tilde{f}_i\} \subset \mathcal{S}(G)$ gilt:

$$({}^{ex}\vec{k}\,|A(g)|\,\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n{}^{ex}) \in \mathcal{S}(R^3)$$

<u>Beweis:</u> $({}^{ex}\vec{k}\,|A(g)|\,\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n{}^{ex}) \propto \lim_{t \to \pm\infty} \langle \tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \rangle$

wobei $\quad \tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}}}(\vec{k}) = \int dk^0\, \Theta(k^0)\, \tilde{f}(k^{0\,2} - \vec{k}^2 - m^2)\, \tilde{A}(k)$

d.h. $\quad \tilde{f}_{-,\vec{k}}(k) = \Theta(-k^0)\, \tilde{f}(k^{0\,2} - \vec{k}^2 - m^2)$

$$\tilde{f}(u) \in \mathcal{S}(R^1),\ \tilde{f}(u) \equiv 1 \text{ für } |u| < \frac{m^2}{4},\ \tilde{f}(u) \equiv 0 \text{ für } |u| > \frac{m^2}{2}$$

α) $\langle \tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \rangle \in \mathcal{O}_M$ für jedes endl. feste t

β) $\frac{d}{dt} \langle \tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \rangle \in \mathcal{O}_M$ für jedes endl. feste t

$$= \langle [\tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}} e^{i(k^0+\omega)t}}(\vec{k}), A(g)]\, \frac{d}{dt}\{A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^*\} \rangle + \langle A(g)\, \tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}} e^{i(k^0+\omega)t}}(\vec{k})\, \frac{d}{dt}\{A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^*\} \rangle$$

γ) Es gibt Konstanten B , K und L derart, dass

$$\| [A(g)^*, (\tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}} e^{i(k^0+\omega)t}}(\vec{k}))^*]\,|0\rangle \| < B\,(1+|t|)^K\,[m^2+\vec{k}^2]^{L/2}$$

δ) Zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine natürliche Zahl M und eine Konstante $0 < D_{N,M} < \infty$ derart, dass

$$\| \tilde{A}^{\tilde{f}_{-,\vec{k}} e^{i(k^0+\omega)t}}(\vec{k})\, \frac{d}{dt}\{A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^*\}\,|0\rangle \| < D_{N,M}\, \frac{[m^2+\vec{k}^2]^{M/2}}{[1+|t|]^N}$$

ε) Zu jeder natürlichen Zahl N' gibt es eine Konstante $0 < C_{N'} < \infty$ derart, dass

$$\left\| \frac{d}{dt} \{ A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \} |0\rangle \right\| < C_{N'} [1+|t|]^{-N'}$$

Zu α), β), γ) und δ) gelangt man, indem man zunächst nach TVEV zerlegt und dann die Darstellung

$$\tilde{W}_T^{(\ell)}(k_1,\ldots,k_\ell) = \delta(\sum_i^\ell k_i)\, \hat{W}_T^{(\ell)}(k_2,\ldots,k_\ell)$$

ausnützt, wobei $\hat{W}_T^{(\ell)} \in \mathcal{O}_M$ nach Integration über $k_2^0,\ldots,k_\ell^0$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^{\ell-1})$.

$$\langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \rangle - \int_{-\infty}^{t} ds \frac{d}{ds} \langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,s)^* \cdots A(f_n,s)^* \rangle$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \rangle$$

$$\langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \rangle + \int_t^{+\infty} ds \frac{d}{ds} \langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,s)^* \cdots A(f_n,s)^* \rangle$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,t)^* \cdots A(f_n,t)^* \rangle$$

Aus β), γ), δ) und ε) folgt: zu jeder natürlichen Zahl $\overset{\circ}{N}$ gibt es eine natürliche Zahl $\overset{\circ}{M}$ und Konstanten $A^{(1)}_{\overset{\circ}{N}}$ und $A^{(2)}_{\overset{\circ}{N}}$ derart, dass

$$\left| \int_{-\infty}^{T} ds \frac{\frac{d}{ds} \langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,s)^* \cdots A(f_n,s)^* \rangle}{[m^2+\vec{k}^2]^{\overset{\circ}{M}/2}} \right| < \frac{A^{(1)}_{\overset{\circ}{N}}}{[1+|T|]^{\overset{\circ}{N}}} \qquad T<0$$

$$\left| \int_{T}^{\infty} ds \frac{\frac{d}{ds} \langle \tilde{A}^{f,-\vec{k}}(\vec{k}) A(g) A(f_1,s)^* \cdots A(f_n,s)^* \rangle}{[m^2+\vec{k}^2]^{\overset{\circ}{M}/2}} \right| < \frac{A^{(2)}_{\overset{\circ}{N}}}{[1+|T|]^{\overset{\circ}{N}}} \qquad T>0$$

Die Tatsache, dass die Integranden unendlich oft differenzierbar sind und ähnliche Abschätzungen wie die beiden letzten auch für die mehrmals differenzierten Integranden gelten, führt zu dem Resultat: $({}^{ex}\vec{k} \,|\, A(g) \,|\, \hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n{}^{ex}) \in \mathcal{O}_M$

Wegen der Translationsinvarianz aber gilt:

$$({}^{ex}\vec{k} \,|\, A(g) \,|\, \hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_n{}^{ex}) \in \mathcal{S}(R^3) \qquad \text{q.e.d.}$$

Corollar: Für $g \in \mathcal{S}(R^4)$ und nicht-überlappende $\{\hat{f}_i\} \subset \mathcal{S}(G_1)$ gilt:

$$\langle [\cdots[[A(g)\, a_{ex}(\vec{k})]\, a^*_{ex}(\hat{f}_1)] \ldots, a^*_{ex}(\hat{f}_n)]\rangle \in \mathcal{S}(R^3)$$

Dieses Ergebnis kann nun leicht auf Testfunktionen aus $\mathring{\mathcal{S}}$ ausgedehnt werden. Das führt schliesslich zu dem ersten Teil des Theorems 3:

Theorem 3: Für $\hat{\varphi}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ gilt:

$$\int \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \hat{h}^{(1,n)}(k'_1, -k_1, \dots, -k_n)\, \hat{\varphi}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \in C^\infty(R^3),$$

$$\hat{h}^{(1,1)}(k', -k) \in C^\infty(R^4)$$

und

$\hat{h}^{(2,0)}(k'_2, k'_1)$ ist in $\langle 4m^2, 9m^2 \rangle$ analytisch bis auf evtl. in diesem Intervall isoliert liegende Pole.

Die zweite Aussage des Theorems 3 folgt unmittelbar aus

$$\langle \tilde{A}^{\tilde{f}_1 \vec{k}'}(\vec{k}')\, A(g)\, (\tilde{A}^{\tilde{f}_1 \vec{k}}(\vec{k}))^* \rangle \in \mathcal{O}_M(\vec{k}', \vec{k})$$

Die dritte Aussage des Theorems 3 ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen $\hat{h}^{(2,0)}$ und der Vertexfunktion $V([k'_2+k'_1]^2)$: $V(z)$ ist eine in der von $(2m)^2$ bis $+\infty$ aufgeschnittenen z-Ebene analytische Funktion, die sich nach [10] durch den 2-Teilchen-Verzweigungsschnitt analytisch ins zweite Blatt der Riemann'schen Fläche fortsetzen lässt. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit der folgenden Überlegungen wollen wir die evtl. in dem Intervall $\langle 4m^2, 9m^2 \rangle$ isoliert liegenden Pole ignorieren.)

Hilfssatz 5: Falls die $\tilde{f}_{i'}$, $i' = 1, \dots, n'$ und $\tilde{f}_i$ $i = 1, \dots, n$ sich jeweils untereinander nicht überlappen und falls

$\tilde{f} \in \mathcal{S}(R^1)$, $\operatorname{supp} \tilde{f}(u) \subset \{u \mid u < 3m^2\}$, gilt:

$$\langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}^{\tilde{f}\vec{k}}(\vec{k})\, a_{ex}(\hat{f}_1'^*)] \cdots a_{ex}(\hat{f}_{n'}'^*)]\, a_{ex}^*(\hat{f}_1)] \cdots, a_{ex}^*(\hat{f}_n)] \rangle \in \mathcal{S}(R^3).$$

Beweis: $\langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}^{\tilde{f}\vec{k}}(\vec{k})\, a_{ex}(\hat{f}_1'^*)] \cdots, a_{ex}(\hat{f}_{n'}'^*)]\, a_{ex}^*(\hat{f}_1)] \cdots, a_{ex}^*(\hat{f}_n)] \rangle$

$$\propto \lim_{t \to \pm\infty} \langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}^{\tilde{f}\vec{k}}(\vec{k})\, A(f_1', t)], \cdots A(f_{n'}', t)]\, A(f_1, t)^*], \cdots, A(f_n, t)^*] \rangle$$

$\alpha)$ $\langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}^{\tilde{f}\vec{k}}(\vec{k})\, A(f_1', t)], \cdots, A(f_{n'}', t)]\, A(f_1, t)^*] \cdots, A(f_n, t)^*] \rangle \in \mathcal{S}(R^3)$
für jedes endl. feste t

$\beta)$ $\frac{d}{dt} \langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}^{\tilde{f}\vec{k}}(\vec{k})\, A(f_1', t)] \cdots, A(f_{n'}', t)]\, A(f_1, t)^*] \cdots, A(f_n, t)^*] \rangle \in \mathcal{S}(R^3)$
für jedes endl. feste t

$\gamma)$ Zu jeder natürlichen Zahl N gibt es natürliche Zahlen M_i und Konstanten $0 < C_N^{(i)} < \infty$ derart, dass

$$\left|\tfrac{d}{dt}\langle\ \rangle\right| \leq C_N^{(2)} \frac{[m^2+\vec{k}^2]^{M_2/2}}{[1+|t|]^N} + \left|\langle[\cdot\cdot[[\cdot\cdot[[[\tfrac{d}{dt}A(f_1',t)A(f_2',t)]\tilde{A}^{\tilde{f}}(\vec{k})]A(f_3',t)]\cdot\cdot]]\cdot A(f_m,t)^*]]\rangle\right|$$

$$\leq C_N^{(2)} \frac{[m^2+\vec{k}^2]^{M_2/2}}{[1+|t|]^N} + \left|\langle[\cdot[[\cdot[[[\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}}(\vec{k})A(f_1',t)][\tfrac{d}{dt}A(f_1',t)A(f_2',t)]A(f_3',t)]\cdot\cdot A(f_{n'}',t)]A(f_1,t)^*]\cdot A(f_m,t)^*]]\rangle\right|$$

$$+\left|\langle[\cdot[[\cdot[[[[\tfrac{d}{dt}A(f_1',t)A(f_2',t)]A(f_3',t)]\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}}(\vec{k})]A(f_4',t)],\cdot\cdot A(f_{n'}',t)]A(f_1,t)^*]\cdot A(f_m,t)^*]]\rangle\right|$$

$$\leq C_N^{(3)} \frac{[m^2+\vec{k}^2]^{M_3/2}}{[1+|t|]^N} + \left|\langle[\cdot[[\cdot[[[[\tfrac{d}{dt}A(f_1',t),A(f_2',t)]A(f_3',t)]\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}}(\vec{k})]A(f_4',t)]\cdot\cdot A(f_{n'}',t)]A(f_1,t)^*]\cdot A(f_m,t)^*]]\rangle\right|$$

$$\leq \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$\leq C_N^{(n+m)} \frac{[m^2+\vec{k}^2]^{M_{n+m}/2}}{[1+|t|]^N} + \left|\langle[[\cdot[[\cdot[\tfrac{d}{dt}A(f_1',t),A(f_2',t)]\cdot,A(f_{n'}',t)]A(f_1,t)^*]\cdot\cdot A(f_m,t)^*]\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}}(\vec{k})]\rangle\right|$$

$$\leq C_N^{(n+m)} \frac{[m^2+\vec{k}^2]^{M_{n+m}/2}}{[1+|t|]^N} + \left|\langle[\cdot[[\cdot[\tfrac{d}{dt}A(f_1',t)A(f_2',t)]\cdot A(f_{n'}',t)]A(f_1,t)^*]\cdot\cdot A(f_m,t)^*]\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}e^{i(k^0-\omega)t}}(\vec{k})\rangle\right|$$

$$+\left|\langle\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}e^{i(k^0+\omega)t}}(\vec{k})[\cdot[[\cdot[\tfrac{d}{dt}A(f_1',t),A(f_2',t)]\cdot\cdot A(f_{n'}',t)]A(f_1,t)^*]\cdot A(f_m,t)^*]\rangle\right|$$

$$\leq C_N \frac{[m^2+\vec{k}^2]^{M/2}}{[1+|t|]^N}$$

Bei diesen Abschätzungen wurde mehrmals Gebrauch gemacht von der Jacobi-Identität, von dem Theorem 2.1 der Arbeit[5] und von der Tatsache, dass sich die Hauptbeiträge von f_1' und f_2' linear in $|t|$ räumlich trennen.

Wie im Beweis zum Hilfssatz 4 folgern wir

$$\langle[\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}}(\vec{k})a_{ex}(\hat{f}_1'^*)]\cdot\cdot a_{ex}(\hat{f}_{n'}'^*)]a_{ex}^*(\hat{f}_1)]\cdot\cdot,a_{ex}^*(\hat{f}_m)]\rangle \in \mathcal{O}_M$$

Die Translationsinvarianz impliziert

$$\langle[\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}^{\tilde{f}_{\vec{k}}}(\vec{k})a_{ex}(\hat{f}_1'^*)]\cdot\cdot a_{ex}(\hat{f}_{n'}'^*)]a_{ex}^*(\hat{f}_1)]\cdot\cdot,a_{ex}^*(\hat{f}_m)]\rangle \in \mathcal{S} \quad \text{q. e. d.}$$

Dieses Ergebnis lässt sich leicht verallgemeinern auf den Fall, dass die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit Testfunktionen aus $\bar{\mathcal{S}}(R^{3n'} \times R^{3n})$ integriert werden.

Für die Koeffizienten"funktionen" formulieren wir diesen Sachverhalt in dem folgenden

<u>Theorem 4</u>: Sei $\hat{\varphi}(\vec{k}_{n'},\cdot\cdot,\vec{k}_1',\vec{k}_1,\cdot\cdot,\vec{k}_n) \in \bar{\mathcal{S}}(R^{3n'} \times R^{3n})$, $\tilde{f} \in \mathcal{S}(R^1)$, $\operatorname{supp}\tilde{f} \subset$ $\subset \{u \mid u < 4m^2\}$.

Dann gilt:

$$\int dk^0\, \tilde{f}(k^2) \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n}\, \tilde{h}^{(n',n)}(k|k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n)\, \hat{\varphi}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)$$

$\in \mathcal{S}(R^3)$.

Wir werden nun eine andere Methode heranziehen, weitergehende Glattheitseigenschaften der Koeffizienten"funktionen" auf der Massenschale herzuleiten. Dazu werden wir ein Theorem beweisen, welches zuerst von S. Coleman[11] aufgestellt worden ist und auch für sich selbst genommen, d.h. unabhängig von den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit von Interesse ist.

Theorem 5: Falls die Funktionen $\tilde{f}'_{i'j'} \in \mathcal{S}(G), 0 \leq i' \leq n'\ 0 \leq j' \leq K'_{i'}$ bzw. $\tilde{f}_{ij} \in \mathcal{S}(G), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq K_i$ sich jeweils untereinander nicht überlappen, definiere man die offene Menge $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ als Menge aller solcher n-Tupel von 3-komponentigen Einheitsvektoren mit folgenden Eigenschaften:

Für alle $0 \leq i'_1 < i'_2 \leq n$ bzw. $0 \leq i_1 < i_2 \leq n$ gilt:

$$\left\{ \frac{\vec{k}'_{i'_1 j'_1}}{\omega'_{i'_1 j'_1}} + \lambda'_{i'_1} \vec{e}_{i'_1} \,\middle|\, (k'^0_{i'_1 j'_1}), \vec{k}'_{i'_1 j'_1} \in \operatorname{supp} \tilde{f}'_{i'_1 j'_1}, 0 \leq j'_1 \leq K'_{i'_1}, \lambda'_{i'_1} \geq 0 \right\} \cap$$

$$\cap \left\{ \frac{\vec{k}'_{i'_2 j'_2}}{\omega'_{i'_2 j'_2}} + \lambda'_{i'_2} \vec{e}_{i'_2} \,\middle|\, (k'^0_{i'_2 j'_2}), \vec{k}'_{i'_2 j'_2} \in \operatorname{supp} \tilde{f}'_{i'_2 j'_2}, 0 \leq j'_2 \leq K'_{i'_2}, \lambda'_{i'_2} \geq 0 \right\} = \emptyset$$

und

$$\left\{ \frac{\vec{k}_{i_1 j_1}}{\omega_{i_1 j_1}} + \lambda_{i_1} \vec{e}_{i_1} \,\middle|\, (k^0_{i_1 j_1}), \vec{k}_{i_1 j_1} \in \operatorname{supp} \tilde{f}_{i_1 j_1}, 0 \leq j_1 \leq K_{i_1}, \lambda_{i_1} \geq 0 \right\} \cap$$

$$\cap \left\{ \frac{\vec{k}_{i_2 j_2}}{\omega_{i_2 j_2}} + \lambda_{i_2} \vec{e}_{i_2} \,\middle|\, (k^0_{i_2 j_2}), \vec{k}_{i_2 j_2} \in \operatorname{supp} \tilde{f}_{i_2 j_2}, 0 \leq j_2 \leq K_{i_2}, \lambda_{i_2} \geq 0 \right\} = \emptyset$$

Sei $\mathcal{K}$ eine kompakte Menge in $\mathcal{E}$ und $\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ ihre charakteristische Funktion. Dann gilt für alle $\mu_l \geq 0\ \ l = 1, \ldots, n$:

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \left| \left({}^{in}_{out}\widehat{f}'^{\vec{0}}_{00} \cdots \widehat{f}'^{\vec{0}}_{0K'_0}, \ldots, \widehat{f}'^{\mu_n \vec{e}_n}_{n0}, \ldots, \widehat{f}'^{\mu_n \vec{e}_n}_{nK'_n} \middle| B_0(\vec{0}) \cdots B_n(\mu_n \vec{e}_n) \middle| \widehat{f}^{\vec{0}}_{00}, \widehat{f}^{\vec{0}}_{0K_0}, \ldots, \widehat{f}^{\mu_n \vec{e}_n}_{n0}, \ldots, \widehat{f}^{\mu_n \vec{e}_n}_{nK_n}\, {}^{out}_{in} \right)^{\dagger} \right| \leq \frac{\mathrm{Const}(N, \mathcal{K})}{[1 + d^2]^{N/2}}$$

mit $0 \leq \mathrm{Const}(N, \mathcal{K}) < \infty$ für jede natürliche Zahl N und jede kompakte Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$. Dabei ist:

$$\widehat{g}^{a}(\vec{p}) = \widehat{g}(\vec{p})\, e^{-i\vec{p}\vec{a}}$$

$$B(\vec{b}) = \mathcal{U}((0, \vec{b}), \mathbb{1})\, B\, \mathcal{U}^{-1}((0, \vec{b}), \mathbb{1})$$

B = quasilokaler Operator

$\left(\begin{smallmatrix}in\\out\end{smallmatrix} \cdot \big| \cdot \big| \cdot \begin{smallmatrix}in & out\\ out & in\end{smallmatrix}\right)^{\oplus}$ ist rekursiv definiert durch:

$$\left(\begin{smallmatrix}in\\out\end{smallmatrix} \cdot \big| \cdot \big| \cdot \begin{smallmatrix}in & out\\ out & in\end{smallmatrix}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \sum_{\text{Part.}} \prod_{l=0}^{\varkappa} \left(\begin{smallmatrix}in\\out\end{smallmatrix} \prod_{i\in X_l} \left\{\widehat{f_{i0}^{\mu_i \vec{e}_i}}, \dots, \widehat{f_{ik_i}^{\mu_i \vec{e}_i}}\right\} \Big| \prod_{j\in X_l} B_j(\mu_j \vec{e}_j) \Big| \prod_{i\in X_l} \left\{\widehat{f_{i0}^{\mu_i \vec{e}_i}}, \dots, \widehat{f_{ik_i}^{\mu_i \vec{e}_i}}\right\} \begin{smallmatrix}in & out\\ out & in\end{smallmatrix}\right)^{\oplus}$$

$\sum\limits_{\text{Part.}}$ = Summe über alle Partitionen von $(0, \dots, n)$ in $\varkappa+1$ Untermengen $(X_0, \dots, X_\varkappa)$; natürliche Reihenfolge innerhalb der einzelnen X_l.

Mit d bezeichnen wir den Durchmesser der Konfiguration

$$\vec{0}, \mu_1\vec{e}_1, \dots, \mu_n\vec{e}_n$$

Dieses Theorem wollen wir für den Fall $\left(out \cdot \big| \cdot \big| \cdot in\right)^{\oplus}$ beweisen. Ein mehr auf die Bedürfnisse der später folgenden Untersuchungen zugeschnittenes Hilfsmittel werden wir in dem anschliessenden Theorem 6 kennenlernen.

<u>Beweis</u> von " $\chi_{\bar{K}} \left|\left(out \cdot \big| \cdot \big| \cdot in\right)^{\oplus}\right| \leq \dfrac{Const(N, \bar{K})}{[1+d^2]^{N/2}}$ "

1) Die Behauptung des Theorems ist für n = 0 richtig.

2) Angenommen, die Behauptung sei für $0, \dots, n-1$ richtig. Dann gilt sie auch für n :

Wir betrachten eine bestimmte Konfiguration

$$0, \mu_1\vec{e}_1, \dots, \mu_n\vec{e}_n = (\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_n)$$

Der Durchmesser dieser Konfiguration wird gegeben durch:

$$d^2 = \max_{i \neq i'} (\vec{a}_i - \vec{a}_{i'})^2$$

Wir nehmen an, dass dieses Maximum für i = j, i' = j' realisiert wird, so dass $d^2 = (\vec{a}_j - \vec{a}_{j'})^2$. Daneben betrachten wir die Familie aller Partitionen der Menge $(0, \dots, n)$ in zwei Untermengen X, X', so dass $j \in X$, $j' \in X'$. Das Maximum δ des Abstands der Konfigurationen $(\vec{a}_i)_{i\in X}, (\vec{a}_{i'})_{i'\in X'}$ ist gegeben durch:

$$\delta^2 = \max_X \left[\min_{i\in X, i'\in X'} (\vec{a}_i - \vec{a}_{i'})^2\right]$$

Wir denken uns, dass das Maximum für die Partition X = Y, X' = Y' angenommen wird und dass $\delta^2 = (\vec{a}_l - \vec{a}_{l'})^2$.

Wir können nun feststellen: $n\delta \geq d$.

Die Konfiguration $(\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_n)$ soll sich zunächst nur so ändern, dass j, j', l, l'; Y, Y' dieselben bleiben.

$$\chi_\varepsilon(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\Big({}^{out}\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n}\cdots\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{n0},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{0K_0},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{00}\Big|B_0(\vec{0})\cdots B_n(\mu_n\vec{e}_n)\Big|\widehat{f}^{\vec{0}}_{00}\cdots\widehat{f}^{\vec{0}}_{0K_0},\dots,\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{n0},\dots,\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n}{}^{in}\Big)^{T}$$

$$=\chi_\varepsilon(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\Big\{\Big({}^{out}\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n}\cdots\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{n0},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{0K_0},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{00}\Big|B_0(\vec{0})\cdots B_n(\mu_n\vec{e}_n)\Big|\widehat{f}^{\vec{0}}_{00},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{0K_0},\dots,\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{n0},\dots,\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n}\Big)$$

$$-\sum_{r=0}^{n}\sum_{X\in\mathcal{P}_r}\prod_{i=0}^{r}\Big({}^{out}\prod_{j\in X_i}\Big\{\widehat{f}^{\mu_j\vec{e}_j}_{jK_j}\cdots\widehat{f}^{\mu_j\vec{e}_j}_{j0}\Big\}\Big|\prod_{\ell\in X_i}B_\ell(\mu_\ell\vec{e}_\ell)\Big|\prod_{j\in X_i}\Big\{\widehat{f}^{\mu_j\vec{e}_j}_{j0},\dots,\widehat{f}^{\mu_j\vec{e}_j}_{jK_j}\Big\}^{in}\Big)^{T}\Big\}$$

$$=\chi_\varepsilon(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\Big\{\Big({}^{out}\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n}\cdots\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{n0},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{0K_0},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{00}\Big|B_0(\vec{0})\cdots B_n(\mu_n\vec{e}_n)\Big|\widehat{f}^{\vec{0}}_{00},\dots,\widehat{f}^{\vec{0}}_{0K_0},\dots,\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{n0},\dots,\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n}\Big)$$

$$-\Big({}^{out}\prod_{i\in Y}\Big\{\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{iK_i},\dots,\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{i0}\Big\}\Big|\prod_{j\in Y}B_j(\mu_j\vec{e}_j)\Big|\prod_{i\in Y}\Big\{\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{i0},\dots,\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{iK_i}\Big\}^{in}\Big)\Big({}^{out}\prod_{i\in Y'}\Big\{\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{iK_i},\dots,\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{i0}\Big\}\Big|$$

$$\prod B_j(\mu_j\vec{e}_j)\Big|\prod\Big\{\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{i0},\dots,\widehat{f}^{\mu_i\vec{e}_i}_{iK_i}\Big\}^{in}\Big)$$ [nach Induktionsvoraussetzung] $+\ \mathcal{O}(\delta^{-\infty})$

Im Abschnitt II hatten wir angemerkt, dass es zu jeder natürlichen Zahl N eine natürliche Zahl $M \leq n\cdot N + f(n)$ gibt derart, dass

$$\langle A(x_1)\cdots A(x)\cdots A(x_n)\rangle^{T}=\frac{\prod_{i=1}^{n}[1+(x_i^0-x^0)^2]^{M/2}}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}[1+(x_i^j-x^j)^2]^{N/2}}\,T(x_1^0-x^0,\dots,x_n^0-x^0;\vec{x}_1-\vec{x},\dots,\vec{x}_n-\vec{x})$$

mit $T\in\mathcal{B}'$.

Daraus folgt nun sofort: zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine natürliche Zahl $M \leq 2n^2\cdot N + g(n)$ derart, dass gilt $(x_0 = x)$:

$$\langle A(x_1)\cdots A(x)\cdots A(x_n)\rangle^{T}=\frac{\prod_{i=1}^{n}[1+(x_i^0-x_{i-1}^0)^2]^{M/2}}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{3}[1+(x_i^j-x_{i-1}^j)^2]^{N/2}}\,S(x_1^0-x^0,\dots,x_n^0-x_{n-1}^0;\vec{x}_1-\vec{x},\dots,\vec{x}_n-\vec{x}_{n-1})$$

mit $S\in\mathcal{B}'$. Damit erhalten wir für hinreichend grosses N:

$$\Big|\chi_\varepsilon(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\Big\langle\mathcal{B}_{nK_n}\big(\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n},d^{\frac{1}{8S(s+1)}}\big)\cdots\mathcal{B}_{00}\big(\widehat{f}^{\vec{0}}_{00},d^{\frac{1}{8S(s+1)}}\big)B_0(\vec{0})\cdots B_n(\mu_n\vec{e}_n)\mathcal{B}_{00}\big(\widehat{f}^{\vec{0}}_{00},d^{\frac{1}{8S(s+1)}}\big)\cdots\mathcal{B}_{nK_n}\big(\widehat{f}^{\mu_n\vec{e}_n}_{nK_n},d^{\frac{1}{8S(s+1)}}\big)\Big\rangle^{T}\Big|$$

$$<\mathring{B}_N\frac{[1+d^{\frac{1}{8S(s+1)}}]^{4S(s+1)N}}{[1+d^2]^{2N/2}}<C_N\frac{1}{[1+d^2]^{N/2}}\qquad\text{mit}\quad 0<\mathring{B}_N,\,C_N<\infty$$

wobei $B_i = \int dx_{i1}\cdots dx_{is_i}\,\varphi_i(x_{i1},\dots,x_{is_i})A(x_{i1})\cdots A(x_{is_i})\,,\ \varphi_i\in\mathcal{S}(R^{4s_i})$

und[3] $$B_{il}(\widehat{f}_{il},t) = -i\int_{x_{il}^0=t} d^3x_{il}\, f^*_{il}(x_{il})\overleftrightarrow{\partial}_{x_{il}^0}B(x_{il})$$

$$\Big(f_{il}(x_{il}) = (2\pi)^{-3/2}\int dk\,\delta_+(k^2-m^2)\widehat{f}_{il}(k)\,e^{-ikx_{il}}\Big)$$

$$\mathcal{B}_{il} = \int dx_{il1}\cdots dx_{ils_{il}}\,\varphi_{il}(x_{il1},\dots,x_{ils_{il}})A(x_{il1})\cdots A(x_{ils_{il}})\ ;\ \varphi_{il}\in\mathcal{S}(R^{4s_{il}})$$

$$'\mathcal{B}_{il} = \int dx_{il1}'\cdots dx_{il s_{il}'}'\,\varphi_{il}'(x_{il1}',\dots,x_{il s_{il}'}')A(x_{il1}')\cdots A(x_{il s_{il}'}')\ ;\ \varphi_{il}'\in\mathcal{S}(R^{4s_{il}'})$$

Operatoren sind, die Einteilchenzustände mit den Wellenfunktionen $\hat{f}_{i\iota}$ vom Vakuum erzeugen:

$$\underset{\sim}{B}_{i\iota}(\hat{f}_{i\iota}, t)|0\rangle = {}'\underset{\sim}{B}_{i'\iota'}(\hat{f}'_{i'\iota'}, t)|0\rangle = 0$$

$$\underset{\sim}{B}_{i\iota}(\hat{f}_{i\iota}, t)^*|0\rangle = |\hat{f}_{i\iota}^{\,in}), \quad {}'\underset{\sim}{B}_{i'\iota'}(\hat{f}'_{i'\iota'}, t)^*|0\rangle = |\hat{f}'^{\,out}_{i'\iota'})$$

$$s = \sum s_{i\iota} + \sum s'_{i'\iota'} + \sum s_i$$

Die obige Abschätzung ist richtig, auch wenn nur die Gesamtkonfiguration, die sich durch Überlagerung der tatsächlich im out-Zustand auftretenden Konfiguration, der tatsächlich in den "gesandwichten" Operatoren auftretenden Konfiguration und der tatsächlich im in-Zustand auftretenden Konfiguration ergibt, den Durchmesser d hat.

Wir zerlegen

$$\chi_\chi(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)\langle {}'\underset{\sim}{B}_{nK'_n}(\hat{f}'^{\,\mu_n \vec{e}_n}_{nK'_n}, d^{\frac{1}{8s(s+1)}}) \cdots {}'\underset{\sim}{B}_{00}(\hat{f}'^{\,\vec{0}}_{00}, d^{\frac{1}{8s(s+1)}}) B_0(\vec{0}) \cdots B_n(\mu_n \vec{e}_n) \underset{\sim}{B}_{00}(\hat{f}^{\,\vec{0}}_{00}, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}})^* \cdots \underset{\sim}{B}_{nK_n}(\hat{f}^{\,\mu_n \vec{e}_n}_{nK_n}, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}})^*\rangle$$

nach TVEV und finden unter Ausnutzung der obigen Abschätzung mit der folgenden Abkürzung:

$$\begin{aligned}
&\chi_\chi(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)\Big\{\langle {}'\underset{\sim}{B}_{nK'_n}(\hat{f}'^{\,\mu_n \vec{e}_n}_{nK'_n}, t') \cdots {}'\underset{\sim}{B}_{00}(\hat{f}'^{\,\vec{0}}_{00}, t') B_0(\vec{0}) \cdots B_n(\mu_n \vec{e}_n) \underset{\sim}{B}_{00}(\hat{f}^{\,\vec{0}}_{00}, t)^* \cdots \underset{\sim}{B}_{nK_n}(\hat{f}^{\,\mu_n \vec{e}_n}_{nK_n}, t)^*\rangle \\
&- \langle \prod_{i \in Y} \{ {}'\underset{\sim}{B}_{iK'_i}(\hat{f}'^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{iK'_i}, t') \cdots {}'\underset{\sim}{B}_{i0}(\hat{f}'^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{i0}, t')\} \prod_{j \in Y} B_j(\mu_j \vec{e}_j) \prod_{i \in Y} \{\underset{\sim}{B}_{i0}(\hat{f}^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{i0}, t)^* \cdots \underset{\sim}{B}_{iK_i}(\hat{f}^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{iK_i}, t)^*\}\rangle \\
&\times \langle \prod_{i \in Y'} \{ {}'\underset{\sim}{B}_{iK'_i}(\hat{f}'^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{iK'_i}, t') \cdots {}'\underset{\sim}{B}_{i0}(\hat{f}'^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{i0}, t')\} \prod_{j \in Y'} B_j(\mu_j \vec{e}_j) \prod_{i \in Y'} \{\underset{\sim}{B}_{i0}(\hat{f}^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{i0}, t)^* \cdots \underset{\sim}{B}_{iK_i}(\hat{f}^{\,\mu_i \vec{e}_i}_{iK_i}, t)^*\}\rangle\Big\} \\
&\doteq F(t', t; (\mu_i \vec{e}_i))
\end{aligned}$$

$$F(d^{\frac{1}{8s(s+1)}}, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}; (\mu_j \vec{e}_j)) \doteq F_4(d^{\frac{1}{8s(s+1)}}, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}; (\mu_j \vec{e}_j)) = O(d^{-\infty})$$

Wie wir gesehen haben:

$$\begin{aligned}
&\chi_\chi(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)\left({}^{out}\hat{f}'^{\,\mu_n \vec{e}_n}_{nK'_n}, \ldots, \hat{f}'^{\,\vec{0}}_{00} \middle| B_0(\vec{0}) \cdots B_n(\mu_n \vec{e}_n) \middle| \hat{f}^{\,\vec{0}}_{00}, \ldots, \hat{f}^{\,\mu_n \vec{e}_n\, in}_{nK_n}\right)^{T} \\
&= -\int_{T'}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{-T} dt \frac{d}{dt'} \frac{d}{dt} F(t', t; (\mu_j \vec{e}_j)) + \int_{T'}^{\infty} dt' \frac{d}{dt'} F(t', -T; (\mu_j \vec{e}_j)) \\
&- \int_{-\infty}^{-T} dt \frac{d}{dt} F(T', t; (\mu_j \vec{e}_j)) + F(T', -T; (\mu_j \vec{e}_j)) + O(d^{-\infty}) \doteq \sum_{g=1}^{4} F_g(T', -T; (\mu_j \vec{e}_j)) \\
&+ O(d^{-\infty})
\end{aligned}$$

In der Arbeit[13)] beweist K. Hepp, dass es zu jeder natürlichen Zahl N Konstanten $0 < C^{(1)}_{N,K}, C^{(2)}_{N,K} < \infty$ gibt derart, dass

$$\chi_K(\vec e_1,\dots,\vec e_n)\left\|\frac{d}{dt'}\{B_{00}(\hat f^{\,\vec 0}_{00},t')^* \cdots {}'B_{nK_n}(\hat f'^{\,\mu_n\vec e_n}_{nK_n},t')^*\}|0\rangle\right\| < \frac{C^{(1)}_{N,K}}{[1+t'^2]^{N/2}}$$

$$\chi_K(\vec e_1,\dots,\vec e_n)\left\|\frac{d}{dt}\{B_{00}(\hat f^{\,\vec 0}_{00},t)^* \cdots B_{nK_n}(\hat f^{\,\mu_n\vec e_n}_{nK_n},t)^*\}|0\rangle\right\| < \frac{C^{(2)}_{N,K}}{[1+t^2]^{N/2}}$$

Das genügt, um zu zeigen, dass sich zu jeder natürlichen Zahl N Konstanten $0 < {}^{(j)}C_{N,K} < \infty$; $j=1,2,3$ finden lassen mit:

$$\left| F_j\left(d^{\frac{1}{8s(s+1)}}, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}; (\mu_j \vec e_j)\right)\right| < \frac{{}^{(j)}C_{N,K}}{[1+d^2]^{N/2}} \qquad j=1,2,3$$

Zusammen mit der im ersten Teil dieses Beweises abgeleiteten Abschätzung folgt daher:

$$\chi_K(\vec e_1,\dots,\vec e_n)\left({}^{out}\hat f^{\,\mu_n\vec e_n}_{nK'_n},\dots,\hat f^{\,\vec 0}_{10}\,\middle|\,B_0(\vec 0)\cdots B_n(\mu_n\vec e_n)\,\middle|\,\hat f^{\,\vec 0}_{00},\dots,\hat f^{\,\mu_n\vec e_n}_{nK_n}{}^{in}\right)^{T} = O(d^{-\infty})$$

Das gilt für jede der endlich vielen Kombinationen: j, j'; Y, Y'; 1, 1'. Daher können wir die Beschränkung bezüglich der Veränderungen der Konfiguration $\vec 0, \mu_1\vec e_1,\dots,\mu_n\vec e_n$ fallen lassen.

Damit ist die Behauptung auch für n bewiesen. Folglich gilt das Theorem für alle positiven ganzen Zahlen.

Zum Beweis der Behauptung für den Fall $({}^{in}\cdot|\cdot|\cdot{}^{out})^{T}$ beachte man:

$$\left(\Phi^{in}(\hat\varphi)\,\middle|\,\prod_{i=1}^{n} B_i\,\middle|\,\Phi^{out}(\hat\varphi)\right)^{T} = \overline{\left(\Phi^{out}(\hat\varphi)\,\middle|\,\prod_{i=1}^{n} B^*_{n-i+1}\,\middle|\,\Phi^{in}(\hat\varphi)\right)^{T}}$$

Die Fälle $({}^{out}\cdot|\cdot|\cdot{}^{out})^{T}$ beweist man analog.

Mehr auf unsere Bedürfnisse zugeschnitten ist immerhin (vergleiche auch[12])

Theorem 6: Die Funktionen $\tilde f'_{i'} \in \mathcal S(G)$ $i'=1,\dots,n'$ bzw. $\tilde f_i \in \mathcal S(G)$ $i=1,\dots,n$ $\max\{n',n\}\geq 2$ sollen sich jeweils untereinander nicht überlappen. Wir definieren die Menge $\mathcal E$ und die Menge $\mathcal K$ mit der charakteristischen Funktion χ_K wie im vorangehenden Theorem. ($n_{\text{Theorem 5}} = n' + n$

$0,\dots,K'_0 = \emptyset$ $\qquad$ $0,\dots,K_0 = \emptyset$

$0,\dots,K'_{n+i} = \emptyset \quad 1 \leq i \leq n$ $\qquad$ $0,\dots,K_{i'} = \emptyset \quad 1 \leq i' \leq n'$

$K'_{i'} = 0 \quad 1 \leq i' \leq n'$ $\qquad$ $K_{n'+i} = 0 \quad 1 \leq i \leq n$)

ebenso die Wellenfunktionen $\hat{g}^{\alpha}$. Sei B ein quasilokaler Operator

$$B(x) = \mathcal{U}(x,\mathbb{1})\, B\, \mathcal{U}^{-1}(x,\mathbb{1})$$

Dann lässt sich zu jeder natürlichen Zahl N und jeder kompakten Menge $\mathfrak{L} \subset \mathcal{E}$ eine Konstante $0 < Const(N,\mathfrak{L}) < \infty$ derart finden, dass für $x^0 \leqslant 0$ gilt:

$$\chi_{\mathfrak{L}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n'+n}) \left| \left({}^{in}\hat{f}^{\,\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}_{n'} \ldots \hat{f}^{\,\mu_1\vec{e}_1}_{1} \,\middle|\, B(x^0,\vec{x}) \,\middle|\, \hat{f}^{\,\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}_{1} \ldots \hat{f}^{\,\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}\,in}_{n} \right)^{\boxed{T}} \right|$$

$$\leqslant \frac{Const.(N,\mathfrak{L})}{[1+d^2]^{N/2}\,[1+x^{02}]^{N/2}}$$

Dabei ist d der Durchmesser der Konfiguration

$$\mu_{n'}\vec{e}_{n'}, \ldots, \mu_1\vec{e}_1, \vec{x}, \mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}, \ldots, \mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}$$

und die Trunkierung $\boxed{T}$ wird folgendermassen rekursiv definiert:

$$\left({}^{in}\hat{f}^{\,\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}_{n'}, \ldots, \hat{f}^{\,\mu_1\vec{e}_1}_{1} \,\middle|\, B(x^0,\vec{x}) \,\middle|\, \hat{f}^{\,\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}_{1}, \ldots, \hat{f}^{\,\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}\,in}_{n} \right)$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{n'+n} \sum_{Part.} \prod_{\ell=0}^{\varkappa} \left({}^{in}\prod_{i\in X_\ell} \hat{f}^{\,\mu_i\vec{e}_i}_{i} \,\middle|\, \delta_{0,X_\ell} B(x^0,\vec{x}) + (1-\delta_{0,X_\ell})E \,\middle|\, \prod_{i\in X_\ell} \hat{f}^{\,\mu_i\vec{e}_i\,in}_{i-n'} \right)^{\boxed{T}}$$

$$\delta_{0,X_\ell} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \in X_\ell \\ 0 & \text{für } 0 \notin X_\ell \end{cases}$$

Die Summe erstreckt sich über alle Partitionen von $(1, \ldots, n', 0, n'+1, \ldots, n'+n)$ in $\varkappa+1$ Untermengen $(X_0, \ldots, X_\varkappa)$; ungeänderte Reihenfolge innerhalb der einzelnen X_1.

<u>Beweis:</u> 1) Sei zunächst $-d^{\frac{1}{8s(s+1)}} < x^0 \leqslant 0$.

Wir denken uns das $\boxed{T}$-trunkierte Matrixelement durch die entsprechenden gewöhnlichen Matrixelemente ausgedrückt und schliessen à la Hepp

$$\chi_{\mathfrak{L}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n'+n}) \left({}^{in}\hat{f}^{\,\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}_{n'}, \ldots, \hat{f}^{\,\mu_1\vec{e}_1}_{1} \,\middle|\, B(x^0,\vec{x}) \,\middle|\, \hat{f}^{\,\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}_{1}, \ldots, \hat{f}^{\,\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}\,in}_{n} \right)^{\boxed{T}}$$

$$= \chi_{\mathfrak{L}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n'+n}) \left\langle B_{n'}\!\left(\hat{f}^{\,\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}_{n'}; -d^{\frac{1}{8(s+1)s}}\right) \ldots B_1\!\left(\hat{f}^{\,\mu_1\vec{e}_1}_{1}; -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}\right) B(x^0,\vec{x})\, B_1\!\left(\hat{f}^{\,\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}_{1}; -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}\right)^{*} \ldots B_n\!\left(\hat{f}^{\,\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}}_{n}; -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}\right)^{*} \right\rangle^{T}$$

$$+ \mathcal{O}(d^{-\infty})$$

Wir benutzen wie im Beweis des vorangehenden Theorems die Darstellung der TVEV durch beschränkte Distributionen. So finden wir, dass

$$\langle \mathcal{B}_{n'}(\hat{f}'^{\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}_{n'}, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}) \cdots \mathcal{B}_1(\hat{f}'^{\mu_1\vec{e}_1}_1, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}})\, B(x^0,\vec{x})\, \mathcal{B}_1(\hat{f}^{\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}_1, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}})^* \cdots \mathcal{B}_n(\hat{f}^{\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}}_n, -d^{\frac{1}{8s(s+1)}})^* \rangle^T$$

selbst vom Typ $\mathcal{O}(d^{-\infty})$ ist. Daher gilt für $-d^{\frac{1}{8s(s+1)}} < x^0 \leqslant 0$.

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_{n_1}, \ldots, \vec{e}_{n'+n})\left({}^{in}\hat{f}'^{\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}_{n'}, \ldots, \hat{f}'^{\mu_1\vec{e}_1}_1 \,|B(x^0,\vec{x})|\, \hat{f}^{\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}_1, \ldots, \hat{f}^{\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}}_n {}^{in}\right)^{\boxplus} = \mathcal{O}\left(\{\max(|x^0|, d^{\frac{1}{8s(s+1)}})\}^{-\infty}\right)$$

2) Sei $x^0 < -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}$. Mit den Operatoren $A(h(x-(0,\mu\vec{e}), t)$ (siehe Seite 5) anstelle der quasilokalen Bildungen $B(\hat{h}^{\mu\vec{e}}, t)$ schliessen wir:

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_{n_1}, \ldots, \vec{e}_{n'+n})\Big\{\left({}^{in}\hat{f}'^{\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}_{n'}, \ldots, \hat{f}'^{\mu_1\vec{e}_1}_1 \,|B(x^0,\vec{x})|\, \hat{f}^{\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}_1, \ldots, \hat{f}^{\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}}_n {}^{in}\right)^{\boxplus} -$$

$$\langle A(f_{n'}(x_{n'}-(0,\mu_{n'}\vec{e}_{n'})), x^0) \cdots A(f_1'(x_1'-(0,\mu_1\vec{e}_1)), x^0)\, B(x^0,\vec{x})$$

$$A(f_1(x_1-(0,\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1})), x^0)^* \cdots A(f_n(x_n-(0,\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n})), x^0)^* \rangle^T \Big\}$$

$$= \mathcal{O}(|x^0|^{-\infty})$$

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_{n_1}, \ldots, \vec{e}_{n'+n}) \langle A(f'_{n'}(x'_{n'}-(0,\mu_{n'}\vec{e}_{n'})), x^0) \cdots A(f_1'(x_1-(0,\mu_1\vec{e}_1)), x^0)\, B(x^0,\vec{x})$$

$$A(f_1(x_1-(0,\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1})), x^0)^* \cdots A(f_n(x_n-(0,\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n})), x^0)^* \rangle^T$$

$$= \chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n'+n}) \int \prod dk_i' \prod dk_i \exp\Big[ix^0\Big(\sum_{i=1}^{n'} \omega'_{n'-i+1} - \sum_{i=1}^{n} \omega_i\Big) - i\sum \vec{k}'_i(\vec{x}-\mu_i\vec{e}_i) - \sum \vec{k}_i(\vec{x}-\mu_{n'+i}\vec{e}_{n'+i})\Big]\hat{\chi}(\vec{k}_{n'}, \ldots, \vec{k}_n)$$

wobei $\hat{\chi} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$

Die Hauptbeiträge zu den obigen TVEV trennen sich raumartig linear in $|x^0|$. Daher folgt für $x^0 < -d^{\frac{1}{8s(s+1)}}$:

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n'+n})\left({}^{in} \cdot | \cdot | \cdot {}^{in}\right)^{\boxplus} = \mathcal{O}\left(\{\max(|x^0|, d^{\frac{1}{8s(s+1)}})\}^{-\infty}\right)$$

1) und 2) beweisen das Theorem.

<u>Corollar:</u> Zu jeder natürlichen Zahl N und zu jeder kompakten Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ mit der charakteristischen Funktion $\chi_{\mathcal{K}}$ lässt sich eine Konstante $0 < \mathrm{Const}(N, \mathcal{K}) < \infty$ finden derart, dass für $x^0 \leqslant 0$ gilt:

$$\Big|\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}_{n_1}, \ldots, \vec{e}_{n'+n}) \int dk\, e^{-i[k^0x^0 - \vec{k}\vec{x}]}\, \tilde{g}(-k) \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n}\, e^{i\sum_{i=1}^{n'} \vec{k}'_{n'-i+1}\mu_{n'-i+1}\vec{e}_{n'-i+1}}$$

$$e^{i\sum_{i=1}^{n} \vec{k}_i \mu_{n'+i}\vec{e}_{n'+i}}\, \hat{f}'^{*}_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots \hat{f}'^{*}_1(\vec{k}'_1)\, \hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n)\, \tilde{h}^{(n',n)}(k|k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n)\Big|$$

$$< \frac{\mathrm{Const}(N,\vec{k})}{[1+d^2]^{N/2}[1+x^{0\,2}]^{N/2}} .$$

Zum Beweis brauchen wir nur zu beachten:

$$\langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}(\tilde{g})a_{in}(\widehat{f_1^{*\,1\mu_1\vec{e}_1}})], \cdot\cdot, a_{in}(\widehat{f_{n'}^{*\,1\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}})]a^*_{in}(\widehat{f_1^{\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}})] \cdot\cdot, a^*_{in}(\widehat{f_n^{\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}}})]\rangle$$

$$= \langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[\tilde{A}(\tilde{g})a_{in}(\widehat{f_1^{*\,1\mu_1\vec{e}_1}})] \cdot\cdot, a_{in}(\widehat{f_{n'}^{*\,1\mu_{n'}\vec{e}_{n'}}})]a^*_{in}(\widehat{f_1^{\mu_{n'+1}\vec{e}_{n'+1}}})], \cdot\cdot, a^*_{in}(\widehat{f_n^{\mu_{n'+n}\vec{e}_{n'+n}}})]\rangle^{\mathrm{T}}$$

Wir wollen nun das Corollar dazu benutzen, Glattheitseigenschaften für die Koeffizienten"funktionen" auf der Massenschale herzuleiten.

In den einfachsten Fällen

1) $\hat{h}^{(1,1)}(k'_1, -k_1)$ und 2) $\hat{h}^{(2,0)}(k'_2, k'_1)$

werden wir schon bekannte Eigenschaften wiederfinden.

1) Im Fall $n' = 1$, $n = 1$ muss das Theorem samt seinem Corollar abgeändert werden. Das Corollar geht in diesem Fall über in die Aussage:

$$\left| \int \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1} e^{i[\omega'_1-\omega_1]x^0} e^{-i[\vec{x}-\vec{y}'_1]\vec{k}'_1} e^{-i[x-\vec{y}_1]\vec{k}_1} \tilde{g}\binom{\omega'_1-\omega_1}{\vec{k}'_1-\vec{k}_1} \hat{f}^{*\prime}_1(\vec{k}'_1)\hat{f}_1(\vec{k}_1)\hat{h}^{(1,1)}(k'_1, k_1) \right|$$

$$< \frac{C_N}{[1+[x-y'_1]^2]^{N/2}[1+[\vec{x}-\vec{y}_1]^2]^{N/2}[1+x^{0\,2}]^{N/4}} \qquad \begin{array}{l}\text{falls } \vec{x}-\vec{y}'_1 \notin C_\eta(f'_1, x^0)\\ \text{oder falls } \vec{x}-\vec{y}_1 \notin C_\eta(f_1, x^0)\end{array}$$

wobei $C_\eta(f,t) = \{\vec{x} : \vec{x} = \frac{\vec{k}}{\omega}t,$ so dass zumindest ein $(k^0, \vec{k})$ in der η -Umgebung des Trägers von $\tilde{f}$ enthalten ist.$\}$

Aus dieser Abschätzung folgern wir mit Hilfe der Theoreme IX und XV von[7] tome II, p. 100, p. 124:

$$\hat{h}^{(1,1)}(k'_1, -k_1) \in \mathcal{O}_M(\vec{k}'_1, \vec{k}_1)$$

Andererseits folgt umgekehrt aus dieser Eigenschaft unter Zuhilfenahme der Majorisierungen der glatten Lösungen der Klein-Gordon Gleichung die obige Abschätzung.

2) Für den Fall $n' = 2$, $n = 0$ lautet das Corollar: falls die Funktionen $\tilde{f}_2', \tilde{f}_1' \in \mathcal{S}(G)$ sich nicht überlappen und $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$, falls weiterhin $\mathcal{E}$ die Menge aller Einheitsvektoren $\vec{e}$ ist mit:

$$\left\{ \frac{\vec{k}_1'}{\omega_1'} + \mu\vec{e} \,;\, (k_1'^0), \vec{k}_1' \in \operatorname{supp} \tilde{f}_1', \mu \geq 0 \right\} \cap \left\{ \frac{\vec{k}_2'}{\omega_2'} \,;\, (k_2'^0), \vec{k}_2' \in \operatorname{supp} \tilde{f}_2' \right\} = \emptyset$$

so gilt für $x^0 \lessgtr 0$:

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}) \left| \int dk\, e^{-i[k^0x^0 - \vec{k}\vec{x}]} \tilde{g}(-k) \int \frac{d^3k_2'}{2\omega_2'} \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} e^{i\vec{k}_1' \cdot \mu\vec{e}} \hat{f}_2'^*(\vec{k}_2') \hat{f}_1'^*(\vec{k}_1') \tilde{h}^{(2,0)}(k|k_2', k_1') \right|$$

$$< \frac{\mathrm{Const.}(N, \mathcal{K})}{[1+x^{02}]^{N/2}[1+\vec{x}^2]^{N/2}[1+\mu^2]^{N/2}}$$

wobei $0 < \mathrm{Const}(N, \mathcal{K}) < \infty$ für alle natürlichen Zahlen N und alle kompakten Mengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$.

Auch diese Aussage folgt aus schon bekannten Eigenschaften, in diesem Fall der Vertexfunktion.

Sei nämlich $\zeta(u) \in C^\infty$, $0 \leq \zeta(u) \leq 1$, $\operatorname{supp} \zeta(u) \subset \langle -\infty, 9m^2]$, $\zeta(u) \equiv 1$ für $u \in \langle -\infty, 8m^2]$. Dann gilt:

$$\hat{f}_2'^*(\vec{k}_2') \hat{f}_1'^*(\vec{k}_1') \tilde{g}\begin{pmatrix} \omega_2' + \omega_1' \\ \vec{k}_2' + \vec{k}_1' \end{pmatrix} \zeta([\omega_2' + \omega_1']^2 - [\vec{k}_2' + \vec{k}_1']^2) \hat{h}^{(2,0)}(k_2', k_1') \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3 \cdot 2})$$

Aus den Majorisierungen der glatten Lösungen der Klein-Gordon Gleichung folgt damit für

$$\mathcal{J}_{1,\mathcal{K}}(x^0, \vec{x}; \mu\vec{e}) = \chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}) \int \frac{d^3k_2'}{2\omega_2'} \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \hat{f}_2'^*(\vec{k}_2') \hat{f}_1'^*(\vec{k}_1') \tilde{g}\begin{pmatrix} \omega_2' + \omega_1' \\ \vec{k}_2' + \vec{k}_1' \end{pmatrix} \zeta([\omega_2' + \omega_1']^2 - [\vec{k}_2' + \vec{k}_1']^2)$$
$$\hat{h}^{(2,0)}(k_2', k_1') \exp[ix^0(\omega_2' + \omega_1') - i\vec{k}_2'\vec{x} - i\vec{k}_1'(\vec{x} - \mu\vec{e})]$$

$$|\mathcal{J}_{1,\mathcal{K}}(x^0, \vec{x}; \mu\vec{e})| < \frac{\mathrm{Const}^{(1)}(N, \mathcal{K})}{[1+x^{02}]^{N/2}[1+\vec{x}^2]^{N/2}[1+\mu^2]^{N/2}}$$

, wobei $0 < \mathrm{Const}^{(1)}(N, \mathcal{K}) < \infty$ für alle natürlichen Zahlen N und alle kompakten Mengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf:

$$\mathcal{J}_2(x^0, \vec{x}; \mu\vec{e}) = \chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}) \int \frac{d^3k_2'}{2\omega_2'} \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \hat{f}_2'^*(\vec{k}_2') \hat{f}_1'^*(\vec{k}_1') \tilde{g}\begin{pmatrix} \omega_2' + \omega_1' \\ \vec{k}_2' + \vec{k}_1' \end{pmatrix} [1 - \zeta([\omega_2' + \omega_1']^2 - [\vec{k}_2' + \vec{k}_1']^2)]$$
$$\hat{h}^{(2,0)}(k_2', k_1') \exp[i\omega_2' x^0 + i\omega_1' x^0 - i\vec{k}_2'\vec{x} - i\vec{k}_1'(\vec{x} - \mu\vec{e})]$$

Nach [4] ist $\hat{h}^{(2,0)}(k_2', k_1')$ eine temperierte Distribution $h(\varkappa)$ von der Invarianten $\varkappa = \sqrt{[\omega_2' + \omega_1']^2 - [\vec{k}_2' + \vec{k}_1']^2 - 4m^2}$. Wegen des Zusammenhangs mit der Vertexfunktion ist $h(\varkappa)$ Randwert einer in der ganzen oberen Halbebene analytischen Funktion. Nach einem bekannten Theorem gilt daher:

$$\operatorname{supp}[\bar{\mathcal{F}}\check{h}](x^4) \subset [0,\infty\rangle$$

$$\mathcal{J}_{2,\chi}(x^0,\vec{x},\mu\vec{e}) = \chi_\chi(\vec{e})\int dx^4 [\bar{\mathcal{F}}\check{h}](x^4)\int 2\varkappa d\varkappa \int \frac{d^3k_2'}{2\omega_2'}\frac{d^3k_1'}{2\omega_1'}\widehat{f_2'}^*(\vec{k}_2')\widehat{f_1'}^*(\vec{k}_1')\tilde{g}\begin{pmatrix}\omega_2'+\omega_1'\\ \vec{k}_2'+\vec{k}_1'\end{pmatrix}$$
$$[1-\zeta([\omega_2'+\omega_1']^2-[\vec{k}_2'+\vec{k}_1']^2)e^{i[\omega_2'+\omega_1']x^0-i\vec{k}_2'\vec{x}-i\vec{k}_1'[\vec{x}-\mu\vec{e}]}e^{-i\varkappa x^4}$$
$$\Theta(\varkappa)\delta(\varkappa^2-\{[\omega_2'+\omega_1']^2-[\vec{k}_2'+\vec{k}_1']^2-4m^2\})$$

$$=\chi_\chi(\vec{e})\int dx^4[\bar{\mathcal{F}}\check{h}](x^4)\int dk^0\cdots dk^4\check{f}(k^1,\cdots,k^4;\mu\vec{e})e^{ik^0x^0-i\sum_{i=1}^4 k^ix^i}\Theta(k^0)\delta(k^{02}-\sum_{i=1}^4 k^{i2}-4m^2)$$

wobei $\chi_\chi(\vec{e})\check{f}(k^1,\cdots,k^4;\mu\vec{e})\in\mathcal{S}(R^4\times[0,\infty\rangle)$ "glm." in $\vec{e}$

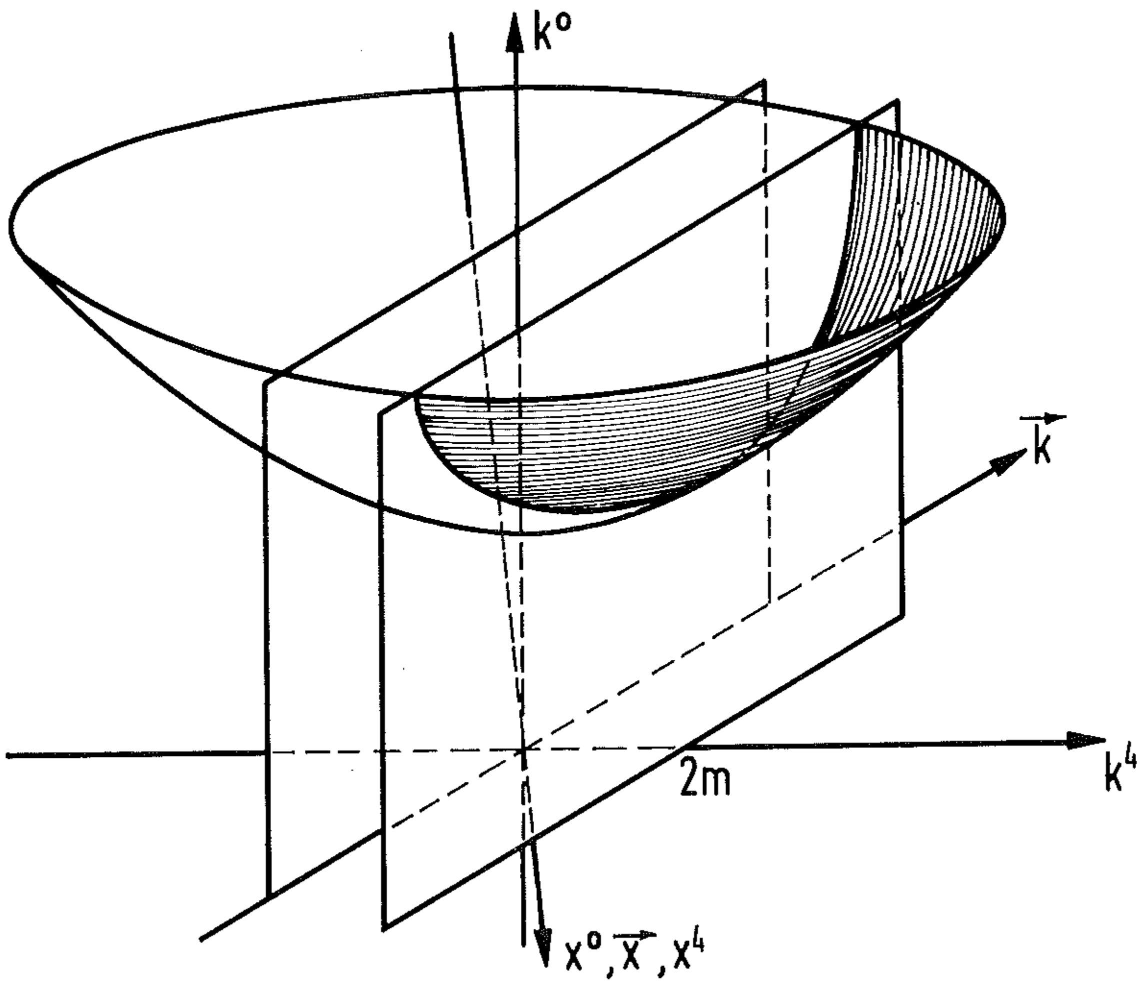
$$\operatorname{supp}\check{f}(k^1,\cdots,k^4;\mu\vec{e})\subset\{k^1,\cdots,k^4;\mu \mid k^4>2m\}$$

$$\int\prod_{i=0}^4 dk^i\check{f}(k^1,\cdots,k^4;\mu\vec{e})e^{ik^0x^0-i\sum_{i=1}^4k^ix^i}\Theta(k^0)\delta(k^{02}-\sum_{i=1}^4k^{i2}-4m^2)=F(x^0,\cdots,x^4;\mu\vec{e})$$

ist eine glatte Lösung positiver Fre~~u~~quenz der Gleichung:

$$[\Box_5+4m^2]F(x^0,\cdots,x^4;\mu\vec{e})=0$$

mit folgendem Träger im Impulsraum:



Für $x^0 \leqslant 0$, $x^4 \geqslant 0$ trifft die Verbindungsgerade von (0) und (x) den Träger im Impulsraum nicht. Ähnlich wie im Fall glatter Lösungen positiver Frequenz der Gleichung

$$[\Box_4 + m^2] f(x) = 0$$

kann man daher schliessen, dass es zu jeder natürlichen Zahl N und zu jeder kompakten Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ Konstanten $0 < K(N, \mathcal{K}) < \infty$ gibt derart, dass für $x^0 \leqslant 0$, $x^4 \geqslant 0$ gilt:

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}) \left| \mathcal{F}(x^0, \cdots, x^4; \mu\vec{e}) \right| < \frac{K(N, \mathcal{K})}{[1+x^{0\,2}]^{N/2} [1+\vec{x}^2]^{N/2} [1+x^{4\,2}]^{N/2}}$$

Daher erhalten wir für $x^0 \leqslant 0$ die Abschätzung

$$\left| \mathcal{I}_{2,\mathcal{K}}(x^0, \vec{x}; \mu\vec{e}) \right| = \chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}) \left| \int_0^\infty dx^4 [\bar{\mathcal{F}} \check{h}](x^4) \mathcal{F}(x^0, \cdots, x^4; \mu\vec{e}) \right| < \frac{C^{(2)}(N, \mathcal{K})}{[1+x^{0\,2}]^{N/2} [1+\vec{x}^2]^{N/2} [1+\mu^2]^{N/2}}$$

mit $0 < C^{(2)}(N, \mathcal{K}) < \infty$ für alle natürlichen Zahlen N und alle kompakten Mengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$.

Wir bemerken noch:

$$\chi_{\mathcal{K}}(\vec{e}) \int dk\, e^{-i[k^0 x^0 - \vec{k}\vec{x}]} \tilde{g}(k) \int \frac{d^3k_2'}{2\omega_2'} \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} e^{i\vec{k}_1', \mu\vec{e}} \hat{f}_2^{\prime *}(\vec{k}_2') \hat{f}_1^{\prime *}(\vec{k}_1') \tilde{h}^{(2,0)}(k | k_2', k_1')$$
$$= \mathcal{I}_{1,\mathcal{K}}(x^0, \vec{x}, \mu\vec{e}) + \mathcal{I}_{2,\mathcal{K}}(x^0, \vec{x}, \mu\vec{e})$$

Wir haben daher schliesslich die Aussage des Corollars für den Fall n' = 2 , n = 0 vollständig aus s chon bekannten Eigenschaften der Vertexfunktion hergeleitet.

3) Aus dem Corollar für den Fall n' = 2 , n = 1 schliessen wir insbesondere, dass $\widehat{h}^{(2,1)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_1' - \vec{k}, \vec{k}_1', -\vec{k}_1)$ falls $\vec{k}_1 - \vec{k} \neq 2\vec{k}_1'$, sagen wir: $k_1^3 - k^3 \neq 2k_1'^3$ nach Integration über $k_1'^3$ mit Testfunktionen $\tilde{f}$ aus $\mathcal{S}(R^1)$ mit $\frac{k_1^3 - k^3}{2} \notin \operatorname{supp} \tilde{f}$ unendlich oft differenzierbar in $\vec{k}, \vec{k}_1$ und $k_1'^1, k_1'^2$ ist.

4) Aus dem Corollar für den Fall n' = 2 , n = 2 schliessen wir insbesondere, dass $\widehat{h}^{(2,2)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_1' - \vec{k}, \vec{k}_1', -\vec{k}_1, -\vec{k}_2)$ falls $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k} \neq 2\vec{k}_1'$ sagen wir $k_1^3 + k_2^3 - k^3 \neq 2k_1'^3$ und falls $\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2$, sagen wir $k_1^2 \neq k_2^2$ nach Integration über $k_1'^3$ mit Testfunktionen $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^1)$ mit $\frac{k_1^3 + k_2^3 - k^3}{2} \notin \operatorname{supp} \tilde{g}$ und Integration über k_1^2 und k_2^2 mit Testfunktionen $\tilde{h} \in \mathcal{S}(R^2)$ mit $\operatorname{supp} \tilde{h} \cap \{k_1^2, k_2^2 \mid k_1^2 = k_2^2\} = \emptyset$ unendlich oft differenzierbar ist in

$\vec{k}, \vec{k}_1'^{1}, \vec{k}_1'^{2}, \vec{k}_1^{1}, \vec{k}_1^{3}, \vec{k}_2^{1}, \vec{k}_2^{3}.$

. . . .

Aus dem Corollar folgt auch insbesondere, dass $\tilde{h}^{(n',n)}(k|k_{n'}',\dots,k_1',-k_1,\dots,-k_n)$ integriert über die $\vec{k}_i'$ und $\vec{k}_j$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$ und integriert über k^0 entweder mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^1)$ oder mit $\mathcal{O}_c'$ -Distributionen, die Randwerte von in der ganzen unteren Halbebene analytischen Funktionen sind, in $\vec{k}$ unendlich oft differenzierbar sind.

Weiterhin ergeben sich Glattheitseigenschaften aus der LSZ-Asymptotenbedingung (vgl. Seite 7)

(sA) Für $\hat{\varphi}_{n'}(\vec{k}_1',\dots,\vec{k}_{n'}') \in L^2_{\pi\Omega_{n'}}$, $\tilde{f} \in \mathcal{S}(G)$, $\hat{\psi}(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n) \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ und $\chi \in C^\infty$, $0 \leq (-t)^\alpha \chi(t) \leq 1$, $\operatorname{supp}\chi \subset \langle -\infty, 0]$, $\alpha > \frac{1}{2}$ gilt:

$$[\mathcal{F}\chi] * \int \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'} \cdots \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \delta\Big(x - \Big\{\sum_{i=1}^n \omega_i - \sum_{i=1}^{n'} \omega_{n'-i+1}' - \sqrt{m^2 + \big(\sum_{i=1}^n \vec{k}_i - \sum_{i=1}^{n'} \vec{k}_{n'-i+1}'\big)^2}\Big\}\Big)$$
$$\tilde{f}^*\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \omega_i - \sum_{i=1}^{n'} \omega_{n'-i+1}' \\ \sum_{i=1}^n \vec{k}_i - \sum_{i=1}^{n'} \vec{k}_{n'-i+1}' \end{pmatrix} \widehat{\varphi_{n'}}^*(\vec{k}_1',\dots,\vec{k}_{n'}') \widehat{h}^{(n',n)}(k_{n'}',\dots,k_1',-k_1,\dots,-k_n) \hat{\psi}_n(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)$$

ist a) hölderstetig für alle Hölderindices $\mu < \alpha - \frac{1}{2}$ mit Hölderkonstanten $\varrho(\|\hat{\varphi}_{n'}\|_{2,\pi\Omega_{n'}}, \tilde{f}, \hat{\psi}_n, \chi; \mu)$ (, die insbesondere nicht explizit von n' abhängen).

b) , falls $\tilde{f}$ und $\tilde{\psi}_n$ zusätzlich einander nicht überlappen, eine Funktion aus der Klasse $\mathcal{S}$, wobei die Semi-Normen durch Konstanten $K_{r,s}(\|\hat{\varphi}_{n'}\|_{2,\pi\Omega_{n'}}, \tilde{f}, \hat{\psi}_n, \chi)$ majorisiert werden können (, die insbesondere nicht explizit von n' abhängen).

Analoge Aussagen gelten für den Fall $\tilde{f} \in \mathcal{S}(-G)$.

(wA) Für $\hat{\varphi}_{n'}(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_{n'}') \in L^2_{\pi\Omega_{n'}}$, $\tilde{f} \in \mathcal{S}(R^4)$, $\hat{\psi}_n(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n) \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ und $\chi \in C^\infty$, $0 \leq (-t)^\alpha \chi(t) \leq 1$, $\operatorname{supp}\chi \subset \langle -\infty, 0]$, $\alpha > \frac{1}{2}$ gilt:

$$[\mathcal{F}\chi] * \int \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'} \cdots \frac{d^3k_1'}{2\omega_1'} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \delta\Big(x - \Big\{\sum_{i=1}^n \omega_i - \sum_{i=1}^{n'} \omega_{n'-i+1}' \mp \sqrt{m^2 + \big(\sum_{i=1}^n \vec{k}_i - \sum_{i=1}^{n'} \vec{k}_{n'-i+1}'\big)^2}\Big\}\Big)$$
$$\tilde{f}^*\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \omega_i - \sum_{i=1}^{n'} \omega_{n'-i+1}' \\ \sum_{i=1}^n \vec{k}_i - \sum_{i=1}^{n'} \vec{k}_{n'-i+1}' \end{pmatrix} \widehat{\varphi_{n'}}^*(\vec{k}_1',\dots,\vec{k}_{n'}') \widehat{h}^{(n',n)}(k_{n'}',\dots,k_1',-k_1,\dots,-k_n) \hat{\psi}_n(\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)$$

ist hölderstetig für alle Hölderindices $\mu < \alpha - \frac{1}{2}$.

Aus der Yang-Feldman Gleichung (vgl. Seite 7) folgt schliesslich im Sinne einer Identität in $\mathcal{S}'(R^4)$:

(YF) $$\tilde{h}^{(n';n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n) = \frac{[-k^2+m^2]\,\tilde{h}^{(n';n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)}{-(k^0+i\varepsilon)^2+\vec{k}^2+m^2}$$

wenn integriert über die $\vec{k}'_i$ mit L^2 -integrierbaren Funktionen und über die $\vec{k}_j$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$.

Auf D_0^{in} gilt die folgende Entwicklung des Feldes $\tilde{A}(k)$ nach einlaufenden Feldern:

$$\tilde{A}(k) = \tilde{A}_{in}(k) + \sum \frac{1}{n'!}\frac{1}{n!}\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\,\frac{[-k^2+m^2]\,\tilde{h}^{(n';n)}(k|k'_{n'},\dots,-k_n)}{-(k^0+i\varepsilon)^2+\vec{k}^2+m^2}\,a^*_{in}(\vec{k}'_{n'})\cdots a_{in}(\vec{k}_1)$$

VI Kausalität, TPC-Invarianz und Unitarität

Mit Hilfe der Jost-Lehmann-Dyson Integraldarstellung für kausale Kommutatoren und eines Verfahrens von R.Omnes[15] beweisen wir im Anhang C das folgende Theorem (Formulierung der Kausalität)

<u>Theorem7</u>: $\tilde{h}^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)$ besitzt eine (wenn auch nicht eindeutige) "off-shell" Extrapolation in einer der Variablen k'_i, k_i aus $\overset{\square}{\mathcal{S}}'(R^{4\cdot 2}\times R^{3(n'-1)}\times R^{3n})$ bzw. $\overset{\square}{\mathcal{S}}'(R^{4\cdot 2}\times R^{3n'}\times R^{3(n-1)})$:

$$\tilde{h}_{(n'-1,n)}(k|\overset{\omega'_{n'}}{\vec{k}'_{n'}},\dots,\overset{\omega'_{i+1}}{\vec{k}'_{i+1}},k'_i,\overset{\omega'_{i-1}}{\vec{k}'_{i-1}},\dots,\overset{\omega'_1}{\vec{k}'_1},\overset{-\omega_1}{-\vec{k}_1},\dots,\overset{-\omega_n}{-\vec{k}_n})$$

bzw.

$$\tilde{h}_{(n',n-1)}(k|\overset{\omega'_{n'}}{\vec{k}'_{n'}},\dots,\overset{\omega'_1}{\vec{k}'_1},\overset{-\omega_1}{-\vec{k}_1},\dots,\overset{-\omega_{i-1}}{-\vec{k}_{i-1}},-k_i,\overset{-\omega_{i+1}}{-\vec{k}_{i+1}},\dots,\overset{-\omega_n}{-\vec{k}_n})$$

Es gilt

$$\{\bar{\mathcal{F}}_{k,k'_i}\tilde{h}_{(n'-1,n)}(k|\overset{\omega'_{n'}}{\vec{k}'_{n'}},\dots,\overset{\omega'_{i+1}}{\vec{k}'_{i+1}},k'_i,\overset{\omega'_{i-1}}{\vec{k}'_{i-1}},\dots,\overset{\omega'_1}{\vec{k}'_1},\overset{-\omega_1}{-\vec{k}_1},\dots,\overset{-\omega_n}{-\vec{k}_n})\}(x,x'_i;\vec{k}'_{n'},\dots,\widehat{\vec{k}'_i},\dots,\vec{k}'_1,\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)$$

$$= 0 \qquad \text{falls} \quad x-x'_i \notin \bar{V}_+$$

bzw.

$$\{\bar{\mathcal{F}}_{k,-k_i}\tilde{h}_{(n',n-1)}(k|\overset{\omega'_{n'}}{\vec{k}'_{n'}},\dots,\overset{\omega'_1}{\vec{k}'_1},\overset{-\omega_1}{-\vec{k}_1},\dots,\overset{-\omega_{i-1}}{-\vec{k}_{i-1}},-k_i,\overset{-\omega_{i+1}}{-\vec{k}_{i+1}},\dots,\overset{-\omega_n}{-\vec{k}_n})\}(x,x_i;\vec{k}'_{n'},\dots,\vec{k}'_1,-\vec{k}_1,\dots,\widehat{-\vec{k}_i},\dots,-\vec{k}_n)$$

$$= 0 \qquad \text{falls} \quad x-x_i \notin \bar{V}_+$$

Nach Abspaltung der δ -Singularität ist $\tilde{h}_{(n'-1,n)}$ bzw. $\tilde{h}_{(n',n-1)}$ eine in denjenigen Röhren, die der Retardierung bzw. der Avancierung entsprechen, analytische Funktion, deren "edge-of-the-wedge" Bereich die Menge

$$\left\{k-k'_i \,\middle|\, \left(\frac{\sum\omega'_j+\sum\omega_j-\omega'_i}{2},\frac{\sum\vec{k}'_j+\sum\vec{k}_j-\vec{k}'_i}{2}\right)+\frac{k-k'_i}{2}\notin \bar{V}_+^{m_1},\left(\frac{\sum\omega'_j+\sum\omega_j-\omega'_i}{2},\frac{\sum\vec{k}'_j+\sum\vec{k}_j-\vec{k}'_i}{2}\right)-\frac{k-k'_i}{2}\notin\bar{V}^{m}\right\}$$

bzw. die Menge

$$\left\{k+k_i \,\middle|\, \left(\frac{\sum\omega'_j+\sum\omega_j-\omega_i}{2},\frac{\sum\vec{k}'_j+\sum\vec{k}_j-\vec{k}_i}{2}\right)+\frac{k+k_i}{2}\notin \bar{V}_+^{m_1},\left(\frac{\sum\omega'_j+\sum\omega_j-\omega_i}{2},\frac{\sum\vec{k}'_j+\sum\vec{k}_j-\vec{k}_i}{2}\right)-\frac{k+k_i}{2}\notin\bar{V}^{m}\right\}$$

enthält. Die Mehrdeutigkeiten sind von der Form:

$$\sum_{\varkappa=0}^{<\infty} P_\varkappa(k^0-k'^0_i,\vec{k}-\vec{k}'_i)\,\tilde{\sigma}_\varkappa(\vec{k}'_{n'},\dots,\widehat{\vec{k}'_i},\dots,\vec{k}'_1,-\vec{k}_1,\dots,-\vec{k}_n) \qquad \text{lorentzinvariant}$$

$$\tilde{\sigma}_\varkappa \in \overset{\square}{\mathcal{S}}'(R^{3(n'-1)}\times R^{3n}) \qquad \text{mit den Polynomen } P_\varkappa$$

bzw.

$$\sum_{\lambda=0}^{<\infty} Q_\lambda(k^0+k_i^0; \vec{k}+\vec{k}_i) \tilde{\varrho}_\lambda(\vec{k}'_{n'},\ldots,\vec{k}'_1,-\vec{k}_1,\ldots,\widehat{-\vec{k}_i},\ldots,-\vec{k}_n) \text{ lorentzinvariant}$$

$$\tilde{\varrho}_\lambda \in \overset{\square}{\mathcal{S}}'(R^{3n'} \times R^{3(n-1)}) \qquad \text{mit den Polynomen } Q_\lambda.$$

Theorem 7 stellt einen Zusammenhang zwischen $\hat{h}^{(n',n)}$ und $\hat{h}^{(n'-1,n+1)}$, ..., zwischen $\hat{h}^{(n'-i,n+i)}$ und $\hat{h}^{(n'-i-1,n+i+1)}$, ..., kurz: zwischen allen Koeffizienten"funktionen" zu gleichem $n' + n$ her.

Im Fall $n' + n = 2$ gibt es eine (wenn auch nicht eindeutige) lorentzinvariante, kausale "off-shell" Extrapolation in beiden Variablen mit allen ihr formal zukommenden Orts- und Impulsraumeigenschaften [16].

Wenn die S-Matrix nicht trivial sein soll, dürfen nicht fast alle $\hat{h}^{(n',n)} \equiv 0$ sein [17].

Eine wichtige Konsequenz der Kausalität im Wightman'schen Rahmen (d.h. im Rahmen der Axiome 0, I, II und III) ist die TPC-Invarianz. Diese Invarianz zieht nach sich, dass es mit der Entwicklung des Feldoperators (auf D) nach den Operatoren des einlaufenden Feldes auch eine Entwicklung des Feldoperators (auf D) nach den Operatoren des auslaufenden Feldes gibt:

$$\tilde{A}(k) = \sum_{\substack{n'+n>0 \\ n',n\geq 0}} \frac{1}{n'!}\frac{1}{n!} \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{h}^{(n',n)}_{out}(k|k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n)\, a^*_{out}(\vec{k}'_{n'}) \cdots a^*_{out}(\vec{k}'_1)\, a_{out}(\vec{k}_1) \cdots a_{out}(\vec{k}_n)$$

mit

$$\tilde{h}^{(n',n)}_{out}(k|k'_{n'},\ldots,k'_1,-k_1,\ldots,-k_n) = \tilde{h}^{(n',n)}(-k|k_n,\ldots,k_1,-k'_1,\ldots,-k'_{n'}).$$

Die Vollständigkeit der ein- und (nach dem TPC-Theorem) auch der auslaufenden Zustände impliziert die Unitarität der S-Matrix, die wir allerdings nur im Fall von $2\rightarrow 2$ -Streuprozessen einigermassen übersichtlich formulieren können:

$$({}^{in}\hat{f}'_2\hat{f}'_1|\hat{f}_1\hat{f}_2{}^{in}) = ({}^{out}\hat{f}'_2\hat{f}'_1|\hat{f}_1\hat{f}_2{}^{out}) = ({}^{in}\hat{f}'_2\hat{f}'_1|\hat{f}_1\hat{f}_2{}^{in}) + \frac{i}{(2\pi)^{3/2}N_{\hat{f}'_2\hat{f}'_1}} \int \frac{d^3k'_2}{2\omega'_2} \hat{f}'^*_2(\vec{k}'_2)\, ({}^{in}\hat{f}'_1|\tilde{j}(k'_2)|\hat{f}_1\hat{f}_2{}^{in})\Big|_{k'^0_2=\omega'_2}$$

$$- \frac{i}{(2\pi)^{3/2}N_{\hat{f}_1\hat{f}_2}} \int \frac{d^3k_2}{2\omega_2} \hat{f}_2(\vec{k}_2)\, ({}^{in}\hat{f}'_2,\hat{f}'_1|\tilde{j}(-k_2)|\hat{f}_1{}^{in})\Big|_{k^0_2=\omega_2} + \frac{1}{(2\pi)^3 N_{\hat{f}'_2\hat{f}'_1} N_{\hat{f}_1\hat{f}_2}} \int \frac{d^3k'_2}{2\omega'_2}\frac{d^3k_2}{2\omega_2} \hat{f}'^*_2(\vec{k}'_2)\hat{f}_2(\vec{k}_2)\, ({}^{in}\hat{f}'_1|\tilde{j}(k'_2)\tilde{j}(-k_2)|\hat{f}_1{}^{in})\Big|_{\substack{k'^0_2=\omega'_2\\ k^0_2=\omega_2}}$$

Daraus folgt: (Zur Existenz der auftretenden Koeffizienten"funktionen mit allen Variablen einschliesslich der Summenvariablen auf der Massenschale als temperierter Distribution vergleiche man den folgenden Abschnitt VII)

$$(U2)\quad -i(2\pi)^{3/2}\Big\{\int\frac{d^3k_2'}{2\omega_2'}\frac{d^3k_2}{2\omega_2}\hat{f}_2'^{*}(\vec{k}_2')\hat{f}_2(\vec{k}_2)[-k_2^2+m^2]\tilde{h}^{(1,1)}(k_2'|k_1',-k_1,k_2)\Big|_{k_2'^0=\omega_2'}-\int\frac{d^3k_2'}{2\omega_2'}\frac{d^3k_2}{2\omega_2}\hat{f}_2^{*}(\vec{k}_2)\hat{f}_2'(\vec{k}_2')[-k_2^2+m^2]\tilde{h}^{(1,1)}(k_2|k_1,-k_1',-k_2')\Big|_{k_2^0=\omega_2}\Big\}$$

$$=\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{n'!}\int\frac{d^3k_1'}{2\omega_1'}\cdots\frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'}\Big\{\int\frac{d^3k_2}{2\omega_2}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\hat{f}_2'^{*}(\vec{k}_2)\hat{f}_1'(\vec{k}_1)[-k_2^2+m^2]\tilde{h}^{(1,n')}(k_2|k_1,-k_1',\ldots,-k_{n'}')\Big|_{k_2^0=\omega_2}\int\frac{d^3k_2}{2\omega_2}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\hat{f}_2^{*}(\vec{k}_2)\hat{f}_1(\vec{k}_1)[-k_2^2+m^2]\tilde{h}^{(1,n')}(k_2|k_1,-k_1',\ldots,-k_{n'}')\Big|_{k_2^0=\omega_2}\Big\}$$

Durch Einsetzen des vollständigen Systems orthogonaler einlaufender Zustände in

$$\int\prod_{i'=1}^{n'}\frac{d^3k_{n'-i'+1}'}{2\omega_{n'-i'+1}}\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3k_i}{2\omega_i}\langle[\cdots[[\cdots[A(x)A(y)]a_{in}(\vec{k}_1')]\cdots,a_{in}(\vec{k}_{n'}')]a_{in}^{*}(\vec{k}_1)]\cdots,a_{in}^{*}(\vec{k}_n)]\rangle\hat{\psi}(\vec{k}_{n'}',\ldots,\vec{k}_1',\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n)$$

$\hat{\psi}\in\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'}\times\mathring{R}^{3n})$ ergibt sich folgende Unitaritätsbedingung: Im Sinne einer Identität auf $\mathcal{S}'(R^{4\cdot 2}\times\mathring{R}^{3n'}\times\mathring{R}^{3n})$ gilt:

$$[-p^2+m^2]\tilde{h}_{(n',n)}(p|q,\overset{\omega_{n'}'}{\vec{k}_{n'}'},\ldots,\overset{\omega_1'}{\vec{k}_1'},\overset{-\omega_1}{-\vec{k}_1},\ldots,\overset{-\omega_n}{-\vec{k}_n})-[-q^2+m^2]\tilde{h}_{(n',n)}(q|p,\overset{+\omega_{n'}'}{\vec{k}_{n'}'},\ldots,\overset{\omega_1'}{\vec{k}_1'},\overset{-\omega_1}{-\vec{k}_1},\ldots,\overset{-\omega_n}{-\vec{k}_n})$$

$$=-i\sum_{A',A}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{-3\ell}}{\ell!}\Big\{\int\prod_{i=1}^{\ell}\frac{d^3p_i}{2\omega_i}[-p^2+m^2]\tilde{h}^{(n_{A'}'+\ell,n_A)}(p|K_{A'}',p_1,\ldots,p_\ell,-K_A)[-q^2+m^2]\tilde{h}^{(n'-n_{A'}',n-n_A+\ell)}(q|K_{CA'}',-K_{CA},-p_1,\ldots,-p_\ell)\Big\}$$

$$+i\sum_{A',A}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{-3\ell}}{\ell!}\Big\{\int\prod_{i=1}^{\ell}\frac{d^3p_i}{2\omega_i}[-q^2+m^2]\tilde{h}^{(n_{A'}'+\ell,n_A)}(q|K_{A'}',p_1,\ldots,p_\ell,-K_A)[-p^2+m^2]\tilde{h}^{(n'-n_{A'}',n-n_A+\ell)}(p|K_{CA'}',-K_{CA},-p_1,\ldots,-p_\ell)\Big\}$$

wobei $K_{A'}',K_{CA'}'$ eine Partition von $K'=(k_1',\ldots,k_{n'}')$ und wobei K_A,K_{CA} eine Partition von $K=(k_1,\ldots,k_n)$ ist. ($\emptyset$ in der Partition erlaubt)

Jeder Term dieser unendlichen Summe existiert in $\mathcal{S}'(R^{4\cdot 2}\times\mathring{R}^{3n'}\times\mathring{R}^{3n})$ und die unendliche Summe konvergiert in $\mathcal{S}'(R^{4\cdot 2}\times\mathring{R}^{3n'}\times\mathring{R}^{3n})$.

Diese Unitaritätsbedingung verknüpft Koeffizienten"funktionen" mit verschiedenem n' + n miteinander.

Es stellt sich nun das Problem, welche neuen Eigenschaften für die $\tilde{h}_{(n',n)}(p|q,\vec{k}_{n'}',\ldots,\vec{k}_1',-\vec{k}_1,\ldots,-\vec{k}_n)$ aus den bereits bekannten Eigenschaften für die $\tilde{h}^{(n',n)}(k|k_1',\ldots,k_{n'}',-k_1,\ldots,-k_n)$ aus der obigen Unitaritätsbedingung folgen. Diese Frage ist hier nicht weiter untersucht worden.

VII Einteilchen-Struktur der „Koeffizienten"funktionen"

Zusammenhang mit den amputierten retardierten Funktionen

Die Schlussweise des letzten Teils von Anhang C und die LSZ-Asymptotenbedingung (vgl. Seite 7) führen auf das folgende

<u>Theorem 8:</u> Für $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$, $\tilde{f}'_{n'} \in \mathcal{S}(G)$, $\hat{\varphi}_{n'-1} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3(n'-1)})$ und $\hat{\psi}_n \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$ gilt:

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{k'^0_{n'} + \omega'_{n'}} \int \frac{d^3k'_{n'-1}}{2\omega'_{n'-1}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \omega_i - \sum_{i=1}^{n'-1} \omega'_i - k'^0_{n'} \\ \sum_{i=1}^{n} \vec{k}_i - \sum_{i=1}^{n'-1} \vec{k}'_i - \vec{k}'_{n'} \end{pmatrix} \tilde{f}'^{*}_{n'}\begin{pmatrix} k'^0_{n'} \\ \omega'_{n'} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\varphi}^{*}_{n'-1}(\vec{k}'_1, \ldots, \vec{k}'_{n'-1})\, \hat{h}_{(n'-1,n)}\left(k'_{n'}, \begin{matrix} \omega'_{n'-1} \\ \vec{k}'_{n'-1} \end{matrix}, \ldots, \begin{matrix} \omega'_1 \\ \vec{k}'_1 \end{matrix}, \begin{matrix} -\omega_1 \\ -\vec{k}_1 \end{matrix}, \ldots, \begin{matrix} -\omega_n \\ -\vec{k}_n \end{matrix}\right) \hat{\psi}_n(\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)$$

ist in der Variablen $k'^0_{n'} - \omega'_{n'}$ um den Nullpunkt herum

a) hölderstetig für alle Hölderindices $\mu < \frac{1}{2}$

b) unendlich oft differenzierbar, falls $\tilde{f}'_{n'}$ und $\tilde{\varphi}_{n'-1}$ zusätzlich einander nicht überlappen.

Für $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$, $\tilde{f}_n \in \mathcal{S}(G)$, $\hat{\varphi}_{n'} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'})$ und $\hat{\psi}_{n-1} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3(n-1)})$ gilt:

$$\int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_{n-1}}{2\omega_{n-1}} \frac{d^3k_n}{k^0_n + \omega_n} \tilde{g}\begin{pmatrix} k^0_n + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{n-i} - \sum_{i=1}^{n'} \omega'_i \\ \vec{k}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{k}_{n-i} - \sum_{i=1}^{n'} \vec{k}'_i \end{pmatrix} \tilde{f}_n\begin{pmatrix} k^0_n \\ \vec{k}_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\varphi}^{*}_{n'}(\vec{k}'_1, \ldots, \vec{k}'_{n'})\, \hat{h}_{(n',n-1)}\left(\begin{matrix} \omega'_{n'} \\ \vec{k}'_{n'} \end{matrix}, \ldots, \begin{matrix} \omega'_1 \\ \vec{k}'_1 \end{matrix}, \begin{matrix} -\omega_1 \\ -\vec{k}_1 \end{matrix}, \ldots, \begin{matrix} -\omega_{n-1} \\ -\vec{k}_{n-1} \end{matrix}, -k_n\right) \hat{\psi}_{n-1}(\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_{n-1})$$

ist in der Variablen $k^0_n - \omega_n$ um den Nullpunkt herum

a) hölderstetig für alle Hölderindices $\mu < \frac{1}{2}$

b) unendlich oft differenzierbar, falls $\tilde{f}_n$ und $\hat{\psi}_{n-1}$ zusätzlich einander nicht überlappen.

Als nächstes wollen wir nun die Einteilchen-Struktur der Koeffizienten"funktionen" in Partialsummen der Impulse untersuchen [18]:

<u>Theorem 9:</u> Nach Integration über $k'_{n'}, \ldots, k'_1, p, q, k_1, \ldots, k_n$ mit Testfunktionen, die den folgenden Bedingungen genügen:

a) $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$

b) $\tilde{f}_n \in \mathcal{S}(G)$

c) $\{\tilde{f}'_i\}_{i=1,\ldots,n'} \subset \mathcal{S}(G)$ nicht überlappend

d) $\{\tilde{f}_i\}_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{S}(G)$ nicht überlappend sei $J_e = (J_e(1), \dots, J_e(\ell)) \subset (1, \dots, n)$:

e) $\{-q + \sum_{\nu=1}^{\ell} k_{J_e(\nu)} \mid q \in \operatorname{supp} \tilde f,\ k_{J_e(\nu)} \in \operatorname{supp} f_{J_e(\nu)}\ \ \nu = 1, \dots, \ell\} \subset G$

f) $\{\lambda \frac{\vec k_i}{\omega_i} + (1-\lambda) \frac{\vec k_{J_e(\mu)}}{\omega_{J_e(\mu)}} \mid (k_i^0), \vec k_i \in \operatorname{supp} \tilde f_i,\ (k^0_{J_e(\mu)}), \vec k_{J_e(\mu)} \in \operatorname{supp} \tilde f_{J_e(\mu)},\ \lambda \text{ reell}\}$

$\cap \{\frac{-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)}}{\sqrt{m^2 + (-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)})^2}} \mid (q^0), \vec q \in \operatorname{supp} \tilde f,\ (k^0_{J_e(\nu)}), \vec k_{J_e(\nu)} \in \operatorname{supp} \tilde f_{J_e(\nu)}\ \nu = 1, \dots, \ell\}$ für alle $i \notin J_e$, $1 \le \mu \le \ell$

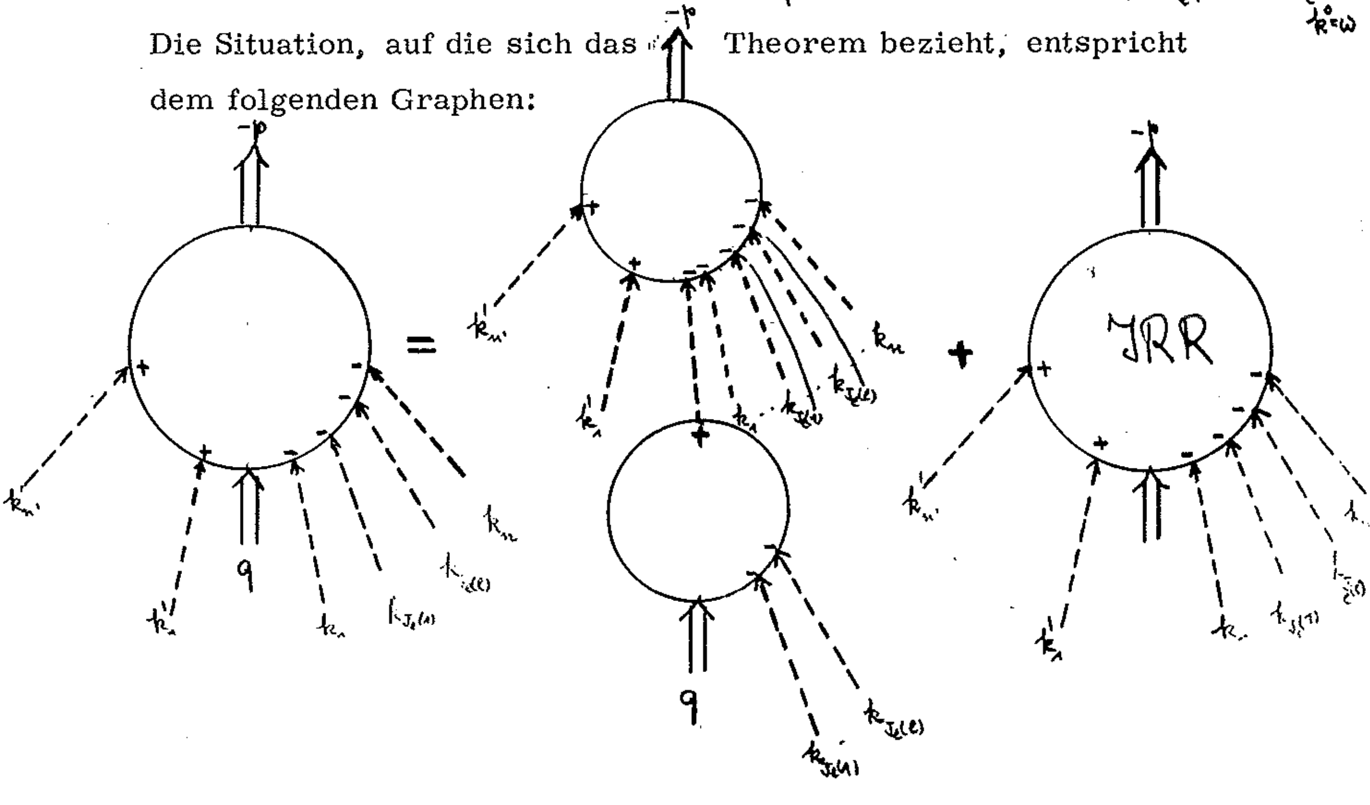
g) $\{\frac{-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)}}{\sqrt{m^2 + (-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)})^2}} \mid (q^0), \vec q \in \operatorname{supp} \tilde f,\ (k^0_{J_e(\nu)}), \vec k_{J_e(\nu)} \in \operatorname{supp} \tilde f_{J_e(\nu)}\ \ \nu = 1, \dots, \ell\}$

$\cap \{\frac{\vec k'_{i'}}{\omega'_{i'}} \mid (k'^0_{i'}), \vec k'_{i'} \in \operatorname{supp} \tilde f'_{i'}\} = \emptyset$ für alle $1 \le i' \le n'$

ist $[-(-q^0 + \sum_{\nu=1}^{\ell} \omega_{J_e(\nu)})^2 + (-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)})^2 + m^2]\, \tilde h_{(n',n)}(-p \mid q, \frac{\omega'_{n'}}{\vec k'_{n'}}, \dots, \frac{\omega'_1}{\vec k'_1}, \frac{-\omega_1}{-\vec k_1}, \dots, \frac{-\omega_n}{-\vec k_n})$
in der Variablen $(-q^0 + \sum_{\nu=1}^{\ell} \omega_{J_e(\nu)}) - \sqrt{m^2 + (-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)})^2}$ unendlich oft differenzierbar um den Nullpunkt herum. Es gilt:

$$\int dp\, dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n}\, \tilde g(p)\, \tilde f^*(q)\, \hat f'^*_{n'}(\vec k'_{n'}) \cdots \hat f'^*_1(\vec k'_1)\, \hat f_1(\vec k_1) \cdots \hat f_n(\vec k_n)$$
$$\sqrt{2\pi}\, i\, \delta_+\Big([-q^0 + \sum_{\nu=1}^{\ell} \omega_{J_e(\nu)}]^2 - [-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)}]^2 - m^2\Big) \Big[-(-q^0 + \sum_{\nu=1}^{\ell} \omega_{J_e(\nu)})^2 + (-\vec q + \sum_{\nu=1}^{\ell} \vec k_{J_e(\nu)})^2 + m^2\Big]$$
$$\tilde h_{(n',n)}(-p \mid q, \frac{\omega'_{n'}}{\vec k'_{n'}}, \dots, \frac{\omega'_1}{\vec k'_1}, \frac{-\omega_1}{-\vec k_1}, \dots, \frac{-\omega_n}{-\vec k_n}) = \int dp\, dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n}$$
$$\frac{d^3k}{2\omega}\, \tilde g(p)\, \tilde f^*(q)\, \hat f'^*_{n'}(\vec k'_{n'}) \cdots \hat f'^*_1(\vec k'_1)\, \hat f_1(\vec k_1) \cdots \hat f_n(\vec k_n)\, \tilde h^{(n', n-\ell+1)}(-p \mid k'_{n'}, \dots, k'_1,$$
$$-k_1, \dots, \widehat{-k_{J_e(1)}}, \dots, \widehat{-k_{J_e(\ell)}}, \dots, -k_n, -k)\, [-k^2 + m^2]\, \tilde h_{(q,\ell)}(k \mid q, \frac{-\omega_{J_e(1)}}{-\vec k_{J_e(1)}}, \dots, \frac{-\omega_{J_e(\ell)}}{-\vec k_{J_e(\ell)}})\Big|_{k^0 = \omega}$$

Die Situation, auf die sich das Theorem bezieht, entspricht dem folgenden Graphen:



Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen: $J_\ell = (J_\ell(1), \ldots, J_\ell(\ell)) = (n-\ell+1, \ldots, n)$.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Aussage:

$$\int dp\,dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q) \hat{f}^*_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots \hat{f}^*_1(\vec{k}'_1)$$
$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\Big[it\Big(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\Big)\Big]$$
$$\tilde{h}_{(n',n)}\Big(-p \,\Big|\, q, {}^{\omega'_{n'}}_{\vec{k}'_{n'}}, \ldots, {}^{\omega'_1}_{\vec{k}'_1}, {}^{-\omega_1}_{-\vec{k}_1}, \ldots, {}^{-\omega_n}_{-\vec{k}_n}\Big)$$
$$\propto \int dp\,dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q) \hat{f}^*_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots \hat{f}^*_1(\vec{k}'_1)$$
$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\Big[it\Big(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\Big)\Big] [-q^2 + m^2]$$
$$\Big[\mathcal{F}\Big\{\Theta(x-y) \langle [\cdots [[\cdots [A(x) A(y)] a_{in}(\vec{k}'_1)] \cdots, a_{in}(\vec{k}'_{n'})] a^*_{in}(\vec{k}_1)] \cdots, a^*_{in}(\vec{k}_n)] \rangle\Big\}\Big]$$
$$\Big(-p \,\Big|\, q, {}^{\omega'_{n'}}_{\vec{k}'_{n'}}, \ldots, {}^{\omega'_1}_{\vec{k}'_1}, {}^{-\omega_1}_{-\vec{k}_1}, \ldots, {}^{-\omega_n}_{-\vec{k}_n}\Big)$$

$$= \begin{cases} O(|t|^{-\infty}) & \text{für } t \to +\infty \\[1ex] \int dp\,dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q) \hat{f}^*_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots \hat{f}^*_1(\vec{k}'_1) \\ \hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\Big[it\Big(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\Big)\Big] [-q^2 + m^2] \\ \langle [\cdots [[\cdots [[\tilde{A}(-p) \tilde{A}(q)] a_{in}(\vec{k}'_1)] \cdots, a_{in}(\vec{k}'_{n'})] a^*_{in}(\vec{k}_1)] \cdots, a^*_{in}(\vec{k}_n)] \rangle \\ (=: J(t)) \quad + O(|t|^{-\infty}) & \text{für } t \to -\infty \end{cases}$$

$$J(t) = -\int dp\,dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \frac{d^3k}{2\omega} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q) \hat{f}^*_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots \hat{f}^*_1(\vec{k}'_1)$$
$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \langle [[\cdots [[\cdots [\tilde{A}(-p) a_{in}(\vec{k}'_1)] \cdots a_{in}(\vec{k}'_{n'})] a^*_{in}(\vec{k}_1)] \cdots a^*_{in}(\vec{k}_{n-\ell})]$$
$$a^*_{in}(\vec{k})] \rangle \langle [\cdots [[\tilde{j}(q) a_{in}(\vec{k})] a^*_{in}(\vec{k}_{n-\ell+1})] \cdots, a^*_{in}(\vec{k}_n)] \rangle \quad (=: J_0)$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{n'} \sum_{I'_\lambda} \pm \int dp\,dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q) \hat{f}^*_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots \hat{f}^*_1(\vec{k}'_1)$$
$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\Big[it\Big(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\Big)\Big] \times$$

$$\times \langle a_{in}(\vec{k}'_{i'_{n'}}) \cdots a_{in}(\vec{k}'_{i'_{\lambda+1}}) \tilde{A}(-p) [\tilde{j}(q), a_{in}(\vec{k}'_{i'_\lambda}) \cdots a_{in}(\vec{k}'_{i'_1}) a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_{n-\ell})]$$

$$a^*_{in}(\vec{k}_{n-\ell+1}) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_n) \rangle \quad \left(= \sum \sum_{I'_\lambda} J_1^{\lambda, I'_\lambda}(t) \right)$$

$$- \int dp\, dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q) \hat{f}'^*_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots \hat{f}'^*_1(\vec{k}'_1)$$

$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\left[it\left(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\right)\right]$$

$$\langle [\cdots [[\cdots [\tilde{j}(q) \tilde{A}(-p), a_{in}(\vec{k}'_1)] \cdots a_{in}(\vec{k}'_{n'})] a^*_{in}(\vec{k}_1)] \cdots, a^*_{in}(\vec{k}_n)] \rangle$$

$$\left(= J_2(t) \right)$$

Unter den Voraussetzungen des Theorems kann man zeigen:

$$J_1^{\lambda, I'_\lambda}(t) = \mathcal{O}(|t|^{-\infty}) \qquad \text{für } t \to -\infty \text{ und alle } 0 \le \lambda \le n', I'_\lambda .$$

$$J_2(t) = -\sum_{\mu=0}^{n'} \sum_{I'_\mu} \pm \int dp\, dq \int \frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q) \hat{f}'^*_{n'}(\vec{k}'_{n'}) \cdots$$

$$\cdots \hat{f}'^*_1(\vec{k}'_1) \hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\left[it\left(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\right)\right]$$

$$\langle a_{in}(\vec{k}'_{i'_{n'}}) \cdots a_{in}(\vec{k}'_{i'_{\mu+1}}) \tilde{j}(q) \tilde{A}(-p) a_{in}(\vec{k}'_{i'_\mu}) \cdots a_{in}(\vec{k}'_{i'_1}) a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_n) \rangle$$

$$\left(= \sum \sum J_2^{\mu, I'_\mu}(t) \right)$$

Wir wollen zeigen, dass für $t \to -\infty$ und für alle $0 \le \mu \le n', I'_\mu$ gilt:

$$J_2^{\mu, I'_\mu}(t) = \mathcal{O}(|t|^{-\infty})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen:

$$(i'_{n'}, \cdots, i'_{\mu+1}) = (n', \cdots, \mu+1).$$

Wir machen nur einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(|t|^{-\infty})$, wenn wir $a_{in}(\hat{f}'^*_{i'_\nu})_{\nu=n', \cdots, \mu+1}$ durch $\tilde{A}(f'_{i'_\nu}, t)$ ersetzen:

$$J_2^{\mu, I'_\mu}(t) = \int dp\, dq \int dk'_{n'} \cdots dk'_{\mu+1} \int \frac{d^3k'_\mu}{2\omega'_\mu} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q)$$

$$\tilde{f}'^*_{n'}(k'_{n'}) e^{-it(k'^0_{n'} - \omega'_{n'})} \cdots \tilde{f}'^*_{\mu+1}(k'_{\mu+1}) e^{-it(k'^0_{\mu+1} - \omega_{\mu+1})} \hat{f}'^*_\mu(\vec{k}'_\mu) \cdots \hat{f}'^*_1(\vec{k}'_1)$$

$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\left[it\left(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\right)\right]$$

$$\langle \tilde{A}(k'_{n'}) \cdots \tilde{A}(k'_{\mu+1}) \tilde{j}(q) \tilde{A}(-p) a_{in}(\vec{k}'_1) \cdots a_{in}(\vec{k}'_\mu) a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_n) \rangle$$

$$+ \, O(|t|^{-\infty})$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{n'-\mu} \sum_{L'_\varkappa} \int dp \, dq \int dk'_{n'} \cdots dk'_{\mu+1} \int \frac{d^3k'_\mu}{2\omega'_\mu} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q)$$
$$\tilde{f}'^*_{n'}(k'_{n'}) e^{-it(k'^0_{n'}-\omega'_{n'})} \cdots \tilde{f}'^*_{\mu+1}(k'_{\mu+1}) e^{-it(k'^0_{\mu+1}-\omega'_{\mu+1})} \hat{f}'^*_\mu(\vec{k}'_\mu) \cdots \hat{f}'^*_1(\vec{k}'_1)$$
$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\left[it\left(-q^0 + \sum_{\nu=n'-\varkappa+1}^{n'} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + \left(-\vec{q} + \sum_{\nu=n'-\varkappa+1}^{n'} \vec{k}_\nu\right)^2}\right)\right]$$
$$\langle \left[\tilde{A}(k'_{L'_\varkappa(n')}), \cdots \left[\tilde{A}(k'_{L'_\varkappa(n'-\varkappa+1)}), \tilde{j}(q)\right]\right] \tilde{A}(k'_{L'_\varkappa(n'-\varkappa)}) \cdots \tilde{A}(k'_{L'_\varkappa(\mu+1)}) \tilde{A}(-p)$$
$$a_{in}(\vec{k}'_1) \cdots a_{in}(\vec{k}'_\mu) a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_n) \rangle + O(|t|^{-\infty})$$
$$\left(= \sum_{\varkappa=1}^{n'-\mu} \sum_{L'_\varkappa} \mathcal{J}_2^{\mu, I'_\mu | \varkappa, L'_\varkappa}(t) + O(|t|^{-\infty})\right)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen:

$$(L'_\varkappa(n'), \ldots, L'_\varkappa(\mu+1)) = (n', \ldots, \mu+1)$$

$$|\mathcal{J}_2^{\mu, I'_\mu|\varkappa, L'_\varkappa}(t)|^2 \leq \Big| \int d^3q \, \Big\| \int dp \int dk'_{n'-\varkappa} \cdots dk'_{\mu+1} \int \frac{d^3k'_\mu}{2\omega'_\mu} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n}$$
$$\tilde{g}(p) \tilde{f}'^*_{n'-\varkappa}(k'_{n'-\varkappa}) \cdots \tilde{f}'^*_{\mu+1}(k'_{\mu+1}) e^{-it(k'^0_{n'-\varkappa}-\omega'_{n'-\varkappa})} \cdots e^{-it(k'^0_{\mu+1}-\omega'_{\mu+1})} \hat{f}'^*_\mu(\vec{k}'_\mu) \cdots$$
$$\cdots \hat{f}'^*_1(\vec{k}'_1) \hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}_n(\vec{k}_n) \exp\left[it\left(+ \sum_{\nu=n'-\varkappa+1}^{n'} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + \left(-\vec{q} + \sum_{\nu=n'-\varkappa+1}^{n'} \vec{k}_\nu\right)^2}\right)\right]$$
$$\tilde{A}(k'_{n'-\varkappa}) \cdots \tilde{A}(k'_{\mu+1}) \tilde{A}(-p) a_{in}(\vec{k}'_1) \cdots a_{in}(\vec{k}'_\mu) a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_n) \rangle \Big\|$$
$$\cdot \Big\| \int dq^0 \int dk'_{n'} \cdots dk'_{n'-\varkappa+1} \tilde{f}(q) \tilde{f}'_{n'}(k'_{n'}) e^{-it\omega'_{n'}} \cdots \tilde{f}'_{n'-\varkappa+1}(k'_{n'-\varkappa+1}) e^{-it\omega'_{n'-\varkappa+1}}$$
$$[\cdots[\tilde{j}(-q) \tilde{A}(-k'_{n'-\varkappa+1})] \cdots \tilde{A}(-k'_{n'})]\rangle \Big\| \Big|^2$$
$$\leq \int \frac{d^3q}{[1+\vec{q}^2]^N} \Big\| \int dp \int \cdots \Big\|^2 \int d^3q \, [1+\vec{q}^2]^N \Big\| \int dq^0 \int \cdots \Big\|^2$$

Aus dieser Abschätzung folgt für $t \to -\infty$ und $\varkappa \neq 1$:

$$\mathcal{J}_2^{\mu, I'_\mu|\varkappa, L'_\varkappa}(t) = O(|t|^{-\infty})$$

Im Fall $\varkappa = 1$ dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen: $L'_\varkappa(n') = n'$.

$$\mathcal{J}_2^{\mu, I'_\mu | 1, L'_1}(t) = \int dp\, dq \int dk'_{n'} \cdots dk'_{\mu+1} \int \frac{d^3k'_\mu}{2\omega'_\mu} \cdots \frac{d^3k'_1}{2\omega'_1} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \tilde{g}(p) \tilde{f}^*(q)$$
$$\tilde{f}'^*_{n'}(k'_{n'}) e^{-it(k'^0_{n'} - \omega'_{n'})} \cdots \tilde{f}'^*_{\mu+1}(k'_{\mu+1}) e^{-it(k'^0_{\mu+1} - \omega'_{\mu+1})} \hat{f}'^*_\mu(\vec{k}'_\mu) \cdots \hat{f}'^*_1(\vec{k}'_1)$$
$$\hat{f}_1(\vec{k}_1) \cdots \hat{f}(-\vec{k}_n) \exp\left[it\left(-q^0 + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu - \sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}\right)\right]$$
$$\langle [\tilde{A}(k'_{n'}), \tilde{j}(q)] \tilde{A}(k'_{n'-1}) \cdots \tilde{A}(k'_{\mu+1}) \tilde{A}(-p)\, a_{in}(\vec{k}'_\mu) \cdots a_{in}(\vec{k}'_1)$$
$$a^*_{in}(\vec{k}_1) \cdots a^*_{in}(\vec{k}_n) \rangle$$

Zu jeder natürlichen Zahl N existiert nun eine natürliche Zahl M derart, dass für $t \to -\infty$:

$$\mathcal{J}_2^{\mu, I'_\mu | 1, L'_1}(t) = \int dp \int dk'_{n'-1} \cdots dk'_{\mu+1} \int dk'_\mu \cdots dk'_1\, dk_1 \cdots dk_{n-\ell}\, \tilde{g}(p)$$
$$\tilde{f}'^*_{n'-1}(k'_{n'-1}) e^{+i(k'^0_{n'-1} - \omega'_{n'-1})|t|} \cdots \tilde{f}'^*_{\mu+1}(k'_{\mu+1}) e^{+i|t|(k'^0_{\mu+1} - \omega'_{\mu+1})}$$
$$\tilde{f}'^*_\mu(k'_\mu) e^{+i(k'^0_\mu - \omega'_\mu)|t|^M} \cdots \tilde{f}'^*_1(k'_1) e^{+i(k'^0_1 - \omega'_1)|t|^M} \tilde{f}_1(-k_1)$$
$$e^{i(k^0_1 + \omega_1)|t|^M} \cdots \tilde{f}_{n-\ell}(-k_{n-\ell}) e^{i(k^0_{n-\ell} + \omega_{n-\ell})|t|^M} \int dq\, dk'_{n'} dk_{n-\ell+1} \cdots$$
$$\cdots dk_n\, \tilde{f}^*(q) \tilde{f}'^*_{n'}(k'_{n'}) e^{i(k'^0_{n'} - \omega'_{n'})|t|}\; e^{iq^0|t|}\; e^{-i\sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \omega_\nu |t|}$$
$$\exp\left[it\sqrt{m^2 + (-\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} -\vec{k}_\nu)^2}\right] \tilde{f}_{n-\ell+1}(-k_{n-\ell+1}) e^{i(k^0_{n-\ell} + \omega_{n-\ell})|t|^M}$$
$$\cdots \tilde{f}_n(-k_n) e^{i(k^0_n + \omega_n)|t|^M} \{ \langle \tilde{A}(k'_{n'}) \tilde{j}(q) [\tilde{A}(k'_{n'-1}) \cdots \tilde{A}(k'_{\mu+1})$$
$$\tilde{A}(-p) \tilde{A}(k'_1) \cdots \tilde{A}(k'_\mu) \tilde{A}(k_1) \cdots \tilde{A}(k_{n-\ell}), \tilde{A}(k_{n-\ell+1}) \cdots \tilde{A}(k_n)] \rangle$$
$$\Big(+ \langle \tilde{A}(k'_{n'}) \tilde{j}(q) \tilde{A}(k_{n-\ell+1}) \cdots \tilde{A}(k_n) \tilde{A}(k'_{n'-1}) \cdots \tilde{A}(k'_{\mu+1}) \tilde{A}(-p)$$
$$\tilde{A}(k'_1) \cdots \tilde{A}(k'_\mu) \tilde{A}(k_1) \cdots \tilde{A}(k_{n-\ell}) \rangle = \langle \tilde{A}(k'_{n'}) \tilde{j}(q) \tilde{A}(k_{n-\ell+1}) \cdots$$
$$\tilde{A}(k_n) \rangle \langle \tilde{A}(k'_{n'-1}) \cdots \tilde{A}(k'_{\mu+1}) \tilde{A}(-p) \tilde{A}(k'_1) \cdots \tilde{A}(k'_\mu) \tilde{A}(k_1) \cdots \tilde{A}(k_{n-\ell}) \rangle$$
$$= 0 \Big) + o(|t|^{-N})$$

$$|\mathcal{J}_2^{\mu, I'_\mu | 1, L'_1}(t)| \leq \left|\int d\Big(\sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu\Big)\right| \left\| \int dq\, \tilde{f}^*(q) \int dk'_{n'} \tilde{f}'^*_{n'}(k'_{n'}) e^{it\omega'_{n'}} e^{-it\sqrt{m^2 + (\vec{q} + \sum_{\nu=n-\ell+1}^{n} \vec{k}_\nu)^2}}\right.$$
$$\left. \langle \tilde{A}(k'_{n'}) \tilde{j}(q) \right\| \cdot \left\| \int dp \int dk'_{n'-1} \cdots dk'_{\mu+1} dk'_\mu \cdots dk'_1 dk_1 \cdots dk_n\right.$$
$$\tilde{g}(p) \tilde{f}'^*_{n'-1}(k'_{n'-1}) e^{+i(k'^0_{n'-1} - \omega'_{n'-1})|t|} \cdots \tilde{f}'^*_{\mu+1}(k'_{\mu+1}) e^{i(k'^0_{\mu+1} - \omega'_{\mu+1})|t|}$$

$$\tilde f^*_{n'}(k'_{n'})e^{i(k'^0_{n'}-\omega'_{n'})|t|^M}\cdots \tilde f^*_1(k'_1)e^{i(k'^0_1-\omega'_1)|t|^M}\,\tilde f_1(-k_1)e^{i(k_1^0+\omega_1)|t|^M}\cdots$$
$$\tilde f_{n-\ell}(-k_{n-\ell})e^{-i(k^0_{n-\ell}+\omega_{n-\ell})|t|^M}\,\tilde f_{n-\ell+1}(-k_{n-\ell+1})e^{-i(k^0_{n-\ell+1}+\omega_{n-\ell+1})|t|^M}\cdots$$
$$\tilde f_n(-k_n)e^{-i(k_n^0+\omega_n)|t|^M}\,[\tilde A(k'_{n'-1})\cdots\tilde A(k'_{\mu+1})\tilde A(-p)\tilde A(k'_1)\cdots\tilde A(k'_\mu)\tilde A(k_1)\cdots$$
$$\cdots\tilde A(k_{n-\ell}),\tilde A(k_{n-\ell+1})\cdots\tilde A(k_n)]>\|\Big| + O(|t|^{-N})$$

Aus dieser Abschätzung folgt für $t\to-\infty$:

$$J_2^{\mu,I'_\mu|1,L'_1}(t) = O(|t|^{-\infty}).$$

Wir fassen die obigen Ergebnisse zusammen:

$$J(t) = \int dp\,dq\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\frac{d^3k}{2\omega}\,\tilde g(p)\hat f^*(q)\hat f'^*_{n'}(\vec k'_{n'})\cdots\hat f'^*_1(\vec k'_1)$$
$$\hat f_1(\vec k_1)\cdots\hat f_n(\vec k_n)\,\tilde h^{(n',n-\ell+1)}(-p|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_{n-\ell},-k)$$
$$[-k^2+m^2]\,\tilde h_{(0,\ell)}\Big(k\Big|q,\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_{n-\ell+1}}{-\vec k_{n-\ell+1}},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_n}{-\vec k_n}\Big) + O(|t|^{-\infty})\quad\text{für } t\to-\infty$$

Wir definieren noch

q. e. d.

$$S(t) = \frac{d}{dt}\int dp\,dq\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\,\tilde g(p)\hat f^*(q)\hat f'^*_{n'}(\vec k'_{n'})\cdots\hat f'^*_1(\vec k'_1)$$
$$\hat f_1(\vec k_1)\cdots\hat f_n(\vec k_n)\exp\Big[it\Big(-q^0+\sum_{\nu=1}^{\ell}\omega_{J_\ell(\nu)}-\sqrt{m^2+\big(-\vec q+\textstyle\sum_{\nu=1}^{\ell}\vec k_{J_\ell(\nu)}\big)^2}\Big)\Big]$$
$$\tilde h_{(n',n)}\Big(-p\Big|q,\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega'_{n'}}{\vec k'_{n'}},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega'_1}{\vec k'_1},\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_1}{-\vec k_1},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_n}{-\vec k_n}\Big)\in\mathcal S(\mathbb R^1)$$

Dann folgt aus $(\varepsilon\downarrow 0)$

$$0 = \int_0^{+\infty}dt\,e^{-\varepsilon t}S(t) + \int dp\,dq\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\,\tilde g(p)\hat f^*(q)$$
$$\hat f'^*_{n'}(\vec k'_{n'})\cdots\hat f'^*_1(\vec k'_1)\hat f_1(\vec k_1)\cdots\hat f_n(\vec k_n)\,\tilde h_{(n',n)}\Big(-p\Big|q,\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega'_{n'}}{\vec k'_{n'}},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega'_1}{\vec k'_1},\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_1}{-\vec k_1},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_n}{-\vec k_n}\Big):$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int dp\,dq\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\,\tilde g(p)\hat f^*(q)\hat f'^*_{n'}(\vec k'_{n'})\cdots\hat f'^*_1(\vec k'_1)\times$$
$$\hat f_1(\vec k_1)\cdots\hat f_n(\vec k_n)\frac{\big[-\big(-q^0+\sum_{\nu=1}^{\ell}\omega_{J_\ell(\nu)}\big)^2+\big(-\vec q+\sum_{\nu=1}^{\ell}\vec k_{J_\ell(\nu)}\big)^2+m^2\big]\,\tilde h_{(n',n)}\Big(-p\Big|q,\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega'_{n'}}{\vec k'_{n'}},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_n}{-\vec k_n}\Big)}{-\big(-q^0+\sum_{\nu=1}^{\ell}\omega_{J_\ell(\nu)}+i\varepsilon\big)^2+\big(-\vec q+\sum_{\nu=1}^{\ell}\vec k_{J_\ell(\nu)}\big)^2+m^2}$$

$$=\int dp\,dq\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\,\tilde g(p)\hat f^*(q)\hat f'^*_{n'}(\vec k'_{n'})\cdots\hat f'^*_1(\vec k'_1)\hat f_1(\vec k_1)\cdots$$
$$\cdots\hat f_n(\vec k_n)\,\tilde h_{(n',n)}\Big(-p\Big|q,\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega'_{n'}}{\vec k'_{n'}},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega'_1}{\vec k'_1},\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_1}{-\vec k_1},\dots,\genfrac{}{}{0pt}{}{-\omega_n}{-\vec k_n}\Big).$$

Um den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten"funktionen" und den amputierten retardierten Funktionen herzustellen, definieren wir folgendermassen verschmiert retardierte Funktionen:

Sei $\chi \in \mathcal{D}(R^n)$ mit:

$\chi(s - s_{P(1)}, s_{P(1)} - s_{P(2)}, \ldots, s_{P(n-1)} - s_{P(n)}) = \chi(s - s_1, s_1 - s_2, \ldots, s_{n-1} - s_n)$ für alle $P \in S^n$

$\int dt_1 \cdots dt_n \, \chi(t_1, \ldots, t_n) = 1$ ansonsten willkürlich.

$$R_\chi(x \mid x_1, \ldots, x_n) \doteq (-i)^n \int d(s-s_1)\, d(s_1-s_2) \cdots d(s_{n-1}-s_n)\, \chi(s-s_1, s_1-s_2, \ldots, s_{n-1}-s_n) \cdot$$

$$\sum_{P \in S^n} \Theta(x^0 - s - x^0_{P(1)} + s_{P(1)})\, \Theta(x^0_{P(1)} - s_{P(1)} - x^0_{P(2)} + s_{P(2)}) \cdots \Theta(x^0_{P(n-1)} - s_{P(n-1)} - x^0_{P(n)} + s_{P(n)}) [\cdots[[A(x) A(x_{P(1)})] A(x_{P(2)})] \cdots A(x_{P(n)})]$$

$$r_\chi(x \mid x_1, \ldots, x_n) \doteq \langle R_\chi(x \mid x_1, \ldots, x_n) \rangle$$

Wir brauchen nur die Hepp'schen Argumente zum Beweis des Theorems 3.1 von [5] für den Spezialfall $k = 0$, $m - 1 = 0$ leicht zu modifizieren auf den Fall von verschmiert retardierten Funktionen, um zu zeigen:

Die Distribution $\prod_{i=1}^{n} [-p_i^2 + m^2]\, \tilde{r}_\chi(p \mid \pm p_1, \ldots, \pm p_n)$ ist unendlich oft differenzierbar in den Variablen $p_1^0 - \omega_1, \ldots, p_n^0 - \omega_n$ um den Nullpunkt herum nach Integration über $p, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$ mit $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$ bzw. Testfunktionen $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}(G^n)$, die paarweise disjunkten Träger in den Variablen $\vec{p}_i\, \omega_i^{-1}$ haben.

Sei nun $\tilde{g} \in \mathcal{S}(R^4)$ und seien $\tilde{\varphi}(k'_1, \ldots, k'_{n'}) \in \mathcal{S}(G^{n'})$ und $\tilde{\psi}(k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{S}(G^n)$ Testfunktionen, die jeweils paarweise disjunkten Träger in den Geschwindigkeiten haben, dann gilt unabhängig von χ:

$$\tilde{h}^{(n',n)}(k \mid k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) = (-1)^n (\sqrt{2\pi})^{n'+n} \prod_{i=1}^{n'} [-k'^2_{n'-i+1} + m^2]$$

$$\prod_{i=1}^{n} [-k_i^2 + m^2]\, \tilde{r}_\chi(k \mid k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) \Big/_{\substack{k'^0_i = \omega'_i \\ k^0_i = \omega_i}}$$

nach Integration über k mit $\tilde{g}$, über die $\vec{k}'_i$ mit $\tilde{\varphi}$ und über die $\vec{k}_i$ mit $\tilde{\psi}$ bzw. allgemeiner nach Integration über $k, \vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^4 \times R^{3n'} \times R^{3n})$.

Man beachte, dass auf der Massenschale zumindest für Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^4 \times \mathring{R}^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$ amputierte (scharf) retardierte Funktionen definiert sind, da $\prod_{i=1}^{n'} [-k'^2_{n'-i+1} + m^2] \prod_{i=1}^{n} [-k_i^2 + m^2] \tilde{r}_\chi(k \mid k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) \Big/ {\scriptstyle k'^0_i = \omega'_i \atop k^0_i = \omega_i}$ nicht von χ abhängt.

Falls retardierte Funktionen als temperierte Distributionen existieren, besitzt $\tilde{h}^{(n'|n)}(k \mid k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n)$, wenn integriert über $k, \vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^4 \times \mathring{R}^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$ kausale "off-shell" Extrapolationen, die C^∞ in den Variablen $k'^0_i - \omega'_i, k^0_i - \omega_i$ um den Nullpunkt herum sind.

Falls die retardierten Funktionen als temperierte Distributionen existieren, ist $[-k'^2_2 + m^2] \tilde{h}_{(\cdot,\cdot)}(k'_2 \mid k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) =$

$$= \left[-\left(\sum k_{n-i+1} - k'_1\right)^2 + m^2\right] \hat{h}_{(\cdot,\cdot)}(k'_2 \mid k'_1, -k_1, \ldots, -k_n)\, \delta\left(k'_2 + k'_1 - \sum_{i=1}^{n} k_i\right)$$

in den Variablen $k'^0_i - \omega'_i, k^0_i - \omega_i$ um den Nullpunkt herum nach Integration über $\vec{k}'_2, \vec{k}'_1, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n$ mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3\cdot 2} \times \mathring{R}^{3n})$ unendlich oft differenzierbar (hierzu und insbesondere zur Existenz von $[-k'^2_2 + m^2] \tilde{h}^{(1,n)}(k'_2 \mid k'_1, -k_1, \ldots, -k_n)_{k'^0_2 = \omega'_2}$ vergleiche man Theorem 3.3 der Arbeit [5]).

Herrn Prof. Dr. H. Lehmann möchte ich für den Vorschlag zu diesen Untersuchungen sowie für seine freundliche wertvolle Hilfe bei deren Durchführung herzlich danken.
Für die liebenswürdige Aufnahme am Steklov Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Moskau und für zahlreiche anregende Diskussionen bin ich Prof. Dr. W.S. Wladimirov und Dr. M.K. Polivanov aufrichtig verbunden.

Anhang A

Beweis von Hilfssatz 1:

a) Im ersten Schritt wollen wir zeigen, dass es eine Zerlegung von $\hat\varphi(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0})$ gibt derart, dass

$$\hat\varphi(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0}) = \sum_{j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0}=1}^{3} \hat\varphi^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0})$$

$$\hat\varphi^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0}) \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n})$$

$v_1^{j_{1,2}} \neq v_2^{j_{1,2}}, \dots, v_{n_0-1}^{j_{n_0-1,n_0}} \neq v_{n_0}^{j_{n_0-1,n_0}}$ für $(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0}) \in \operatorname{supp}\hat\varphi^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0})$

$$\vec v_i = \frac{\vec k_i}{\sqrt{1+\vec k_i^2}}$$

1) Wir zerlegen den Raum der Geschwindigkeitsdifferenzen $\vec v_1 - \vec v_2 = \vec w_{1,2}$ durch folgende Würfelschachtelung: um den Nullpunkt legen wir konzentrisch Würfel der Kantenlänge $2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ $n=0,1,\dots$. Dazu definieren wir jeweils eine Zerlegung der 1 :

$$1 \equiv \sum_{i=1}^{26}\beta_i^{(n)} + \left(1-\sum_{i=1}^{26}\beta_i^{(n)}\right)$$

$$\left(\beta_1^{(n)}(\vec w_{1,2}),\dots,\beta_{26}^{(n)}(\vec w_{1,2})\right) = \Big(\alpha_i^{(n)}(w_{1,2}^1)\cdot\alpha_j^{(n)}(w_{1,2}^2)\cdot\alpha_k^{(n)}(w_{1,2}^3) \quad i=1,2,3;$$
$$j=4,5,6;\ k=7,8,9 \quad (i,j,k)\neq(3,6,9)\Big)$$

$$\alpha_3^{(n)}(w_{1,2}^1) = 1-\alpha_1^{(n)}(w_{1,2}^1)-\alpha_2^{(n)}(w_{1,2}^1), \quad \cdot \quad ,\alpha_9^{(n)}(w_{1,2}^3) = 1-\alpha_7^{(n)}(w_{1,2}^3)-\alpha_8^{(n)}(w_{1,2}^3)$$

$$0 \leq \alpha_j^{(n)} \leq 1 \qquad \alpha_j^{(n)} \in C^\infty \qquad j=1,2;4,5;7,8$$

$$\operatorname{supp}\alpha_1^{(n)} = \left\{w_{1,2}^1 < -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}\right\} \qquad \alpha_1^{(n)} \equiv 1 \qquad w_{1,2}^1 < -\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\operatorname{supp}\alpha_2^{(n)} = \left\{w_{1,2}^1 > \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}\right\} \qquad \alpha_2^{(n)} \equiv 1 \qquad w_{1,2}^1 > \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}$$

\- -

$$\operatorname{supp}\alpha_7^{(n)} = \left\{w_{1,2}^3 < -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}\right\} \qquad \alpha_7^{(n)} \equiv 1 \qquad w_{1,2}^3 < -\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\operatorname{supp}\alpha_8^{(n)} = \left\{w_{1,2}^3 > \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}\right\} \qquad \alpha_8^{(n)} \equiv 1 \qquad w_{1,2}^3 > \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n}$$

Zurücktransformiert in den Impulsraum liefert das folgende Zerlegung von $\hat\varphi$ (Die Transformation $\vec k \to \frac{\vec k}{\sqrt{1+\vec k^2}}$ ist regulär!)

$$\hat\varphi(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0}) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat\varphi(\vec k_1,\dots,\vec k_{n_0})\left(1-\sum_{i=1}^{26}\beta_i^{(0)}\right)\cdots\left(1-\sum_{i=1}^{26}\beta_i^{(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{26}\beta_i^{(n)}$$

Die Terme dieser Reihe können wir in 3 Klassen einteilen, je nach-dem $v_1^1 \neq v_2^1$ oder $v_1^2 \neq v_2^2$ oder $v_1^3 \neq v_2^3$:

$$\hat{\varphi}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n_0}) = \sum_{j_{1,2}=1}^{3} \hat{\varphi}^{(j_{1,2})}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n_0})$$

$$\hat{\varphi}^{(j_{1,2})}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n_0}) \left(1 - \sum_{i=1}^{26} \beta_i^{(0)}\right) \cdots \left(1 - \sum_{i=1}^{26} \beta_i^{(n-1)}\right) \sum' \beta_i^{(n)}$$

Jeder Punkt der R^{3n} ausserhalb der Hyper"ebene" $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ und mit ihm eine ganze Umgebung trägt in höchstens 2.26 = 52 Termen der Reihe bei. Daher ist $\hat{\varphi}^{(j_{1,2})}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n_0}) \in C^{\infty}$ in den Punkten ausserhalb der Hyper"ebene".

Nun muss gezeigt werden:

$$\sup \left| \frac{\prod_{l=1}^{n_0} [1+\vec{k}_l^2]^{K_l/2}}{\prod_{i \neq j} \left[\frac{[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}\right]^{L_{ij}/2}} D^{p} \hat{\varphi}^{(j_{1,2})}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n_0}) \right| < \text{Const.}$$

Dazu genügt es, zu zeigen: falls $\frac{1}{2^{2n+1}} < |\vec{k}_1 - \vec{k}_2| < \frac{1}{2^{2n-1}}$:

$$\sup \Bigg| \sum C_{p_1'}^{p_1} C_{p_2'}^{p_2} \frac{\prod_{l=3}^{n_0} [1+\vec{k}_l^2]^{K_l/2}}{\prod_{\substack{i \neq j \\ i,j \neq 1,2}} \left[\frac{[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}\right]^{L_{ij}/2}} D^{(\vec{p}_1 - \vec{p}_1', \vec{p}_2 - \vec{p}_2', \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_{n_0})} \hat{\varphi}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{n_0}) \times$$

$$\frac{[1+\vec{k}_1^2]^{K_1/2} [1+\vec{k}_2^2]^{K_2/2}}{\left[\frac{[\vec{k}_1 - \vec{k}_2]^2}{1+[\vec{k}_1 - \vec{k}_2]^2}\right]^{L_{12}/2}} D^{(\vec{p}_1', \vec{p}_2')} \left\{ \left(1 - \sum_{i=1}^{26} \beta_i^{(0)}\right) \cdots \left(1 - \sum_{i=1}^{26} \beta_i^{(n'-1)}\right) \sum' \beta_i^{(n')} \right\} \Bigg|$$

$< \text{Const.}$ (insbesondere unabh. von n). $C_{p_1'}^{p_1}, C_{p_2'}^{p_2}$ Binomialkoeffizienten

$$\frac{1}{2^{2n+1}} < |\vec{k}_1 - \vec{k}_2| < \frac{1}{2^{2n-1}} \curvearrowright \frac{1}{2^{2n+1}} < \left| \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1-\vec{v}_1^2}} - \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{1-\vec{v}_2^2}} \right| < \frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$\curvearrowright \frac{1}{2^{2n+1}} |\vec{k}_1 + \vec{k}_2| \frac{1}{1+\vec{k}_1^2} \frac{1}{1+\vec{k}_2^2} < |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \left| \frac{\vec{k}_1}{\sqrt{1+\vec{k}_1^2}} + \frac{\vec{k}_2}{\sqrt{1+\vec{k}_2^2}} \right| < \frac{1}{2^{2n-1}} |\vec{k}_1 + \vec{k}_2| \frac{1}{1+\vec{k}_1^2} \frac{1}{1+\vec{k}_2^2}$$

Man verifiziert nun leicht: $|\vec{k}_1 + \vec{k}_2| \geq \left| \frac{\vec{k}_1}{\sqrt{1+\vec{k}_1^2}} + \frac{\vec{k}_2}{\sqrt{1+\vec{k}_2^2}} \right| \curvearrowright \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{1}{1+\vec{k}_1^2} \frac{1}{1+\vec{k}_2^2} < |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$

und damit: $\left| D^{(\vec{p}_1', \vec{p}_2')} \left\{ \left(1 - \sum^{26} \beta_i^{(0)}\right) \cdots \left(1 - \sum^{26} \beta_i^{(n'-1)}\right) \sum' \beta_i^{(n')} \right\} \right|$

$$< (2 \cdot 2^{2n'})^{|\vec{p}_1'| + |\vec{p}_2'|} \, 52^{|\vec{p}_1'| + |\vec{p}_2'|} \, \sigma(\vec{p}_1', \vec{p}_2')$$

$$< (2^{3+2n} \cdot 52)^{|\vec{p}_1'| + |\vec{p}_2'|} \left\{ [1+\vec{k}_1^2][1+\vec{k}_2^2] \right\}^{|\vec{p}_1'| + |\vec{p}_2'|} \sigma(\vec{p}_1', \vec{p}_2')$$

$$\sup | \cdot | < \Bigg| \sum_{\vec{p}_1', \vec{p}_2'} C_{p_1'}^{p_1} C_{p_2'}^{p_2} \sigma(p_1', p_2') \frac{\prod_{l=3}^{n_0} [1+\vec{k}_l^2]^{K_l/2} [1+\vec{k}_1^2]^{\frac{K_1+2\{|\vec{p}_1'|+|\vec{p}_2'|\}}{2}} [1+\vec{k}_2^2]^{\frac{K_2+2\{|\vec{p}_1'|+|\vec{p}_2'|\}}{2}}}{\prod_{\substack{i \neq j \\ i,j \neq 1,2}} \left[\frac{[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}{1+[\vec{k}_i - \vec{k}_j]^2}\right]^{\frac{L_{ij}}{2}} \left[\frac{[\vec{k}_1 - \vec{k}_2]^2}{1+[\vec{k}_1 - \vec{k}_2]^2}\right]^{\frac{L_{12}+2\{|\vec{p}_1'|+|\vec{p}_2'|\}}{2}}}$$

$$D^{(p_1-p_1',p_2-p_2',p_3,\dots,p_{n_0})}\hat{\varphi}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0})\,[2^4\cdot 52]^{|p_1'|+|p_2'|}\Big|$$

$$< \sum_{p_1',p_2'} C^{p_1}_{p_1'}\, C^{p_2}_{p_2'}\, \sigma(p_1',p_2')\,[2^4\cdot 52]^{|p_1'|+|p_2'|}\, Const(p_1-p_1',p_2-p_2',p_3,\dots,p_{n_0};$$

$$K_1+2|p_1'|+2|p_2'|, K_2+2|p_1'|+2|p_2'|, K_3,\dots,K_{n_0}, L_{12}+2|p_1'|+2|p_2'|, L_{13},\dots,L_{n_0-1,n_0})$$

$$< Const'(p_1,\dots,p_{n_0};K_1,\dots,K_{n_0};L_{12},\dots,L_{n_0-1,n_0})$$

unabhängig insbesondere von n q.e.d.

2) Dieses Verfahren setzen wir fort, indem wir $\hat{\varphi}^{(j_{1,2})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0})$ so zerlegen, dass

$$\hat{\varphi}^{(j_{1,2})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0}) = \sum_{j_{1,3}=1}^{3} \hat{\varphi}^{(j_{1,2},j_{1,3})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0}) \qquad \hat{\varphi}^{(j_{1,2},j_{1,3})} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n_0})$$

und in $\operatorname{supp}\hat{\varphi}^{(j_{1,2},j_{1,3})}$ gilt: $v_1^{j_{1,2}} \neq v_3^{j_{1,3}}$

usw.

Schliesslich kommen wir auf diese Weise zu einer Zerlegung von

$$\hat{\varphi}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0}) = \sum_{j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0}=1}^{3} \hat{\varphi}^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0})$$

mit $\hat{\varphi}^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0}) \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n_0})$

und in $\operatorname{supp}\hat{\varphi}^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0})$ gilt: $v_k^{j_{k,\ell}} \neq v_\ell^{j_{k,\ell}}$

Damit ist Teil a) des Beweises von Hilfssatz 1 erledigt.

Bemerken wir noch:

$$\frac{\hat{\varphi}^{*(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0})\cdot\hat{\varphi}^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(-\vec{k}_{n_1},\dots,-\vec{k}_{n_0})}{\dfrac{-\vec{k}^{\,j_{r-1,r}}_{i_{r-1}}}{\sqrt{1+\vec{k}^2_{i_{r-1}}}} - \dfrac{\vec{k}^{\,j_{r}}}{\sqrt{1+\vec{k}_{i_r}}}}\Bigg/_{\vec{k}_{i_r}=-\sum_{x=1}^{r-1}\vec{k}_{i_x}-\sum_{\lambda=1}^{s}\vec{k}_\lambda}$$

$$\in \mathcal{S}(\vec{k}_{i_1},\dots,\vec{k}_{i_{r-2}},\vec{k}^{\,j\neq j_{r-1,r}}_{i_{r-2}},\Omega,\vec{k}_{i_{r+1}},\dots,\vec{k}_{n_0},\vec{k}_{1},\dots,\vec{k}_{i_s},\dots,\vec{k}_{n_0});\ \Omega=\Big[1+\Big(\sum_{x=2}^{r}\vec{k}_{i_{r-x+1}}-\sum_{\lambda=1}^{s}\vec{k}_\lambda\Big)^2\Big]^{\frac12}$$

$$+\sum_{x=2}^{r}\big[1+\vec{k}^2_{i_{r-x+1}}\big]^{\frac12}-\sum_{\lambda=1}^{s}\big[1+\vec{k}^2_{i_\lambda}\big]^{\frac12}$$

b)

$$\Big\|\frac{d}{dt}\Phi(\varphi,t)\Big\| \leq \sum^{3}\Big\|\frac{d}{dt}\Phi\Big(\prod_{i=1}^{n_0}\tilde{\varphi}_0(k_i)\,\hat{\varphi}^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0}),t\Big)\Big\|$$

Wir entwickeln nun $\Big\|\frac{d}{dt}\Phi\Big(\prod_{i=1}^{n_0}\tilde{\varphi}_0(k_i)\,\hat{\varphi}^{(j_{1,2},\dots,j_{n_0-1,n_0})}(\vec{k}_{n_1},\dots,\vec{k}_{n_0}),t\Big)\Big\|$ nach trunkierten Vakuumerwartungswerten (TVEV).

Die 1-Punkt-Funktionen und solche Terme der Entwicklung, die nur 2-Punkt-Funktionen enthalten, verschwinden identisch. (Es verschwinden auch solche Terme der Entwicklung identisch, die mindestens eine 3-Punkt-Funktion als Faktor enthalten.)

Wir werden für $r + s \geq 4$ beweisen: zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine Konstante $0 < C_N < \infty$ mit:

$$\Big| t^N \int \prod_{\lambda=1}^{n_0} dk'_{i_\lambda} \prod_{\lambda=1}^{n_0} dk_{i_\lambda} \prod_{\lambda=1}^{n_0} \overline{\varphi_0}^*(k'_{i_\lambda})\, \hat{\varphi}^{*(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(\vec{k}'_{i_1}, \dots, \vec{k}'_{i_{n_0}}) \exp\Big[-i\sum_{\nu=1}^{n_0}(k'^0_{i_\nu}-\omega'_{i_\nu})t\Big]$$

$$\prod_{i=1}^{n_0} \overline{\varphi_0}(-k_i)\, \hat{\varphi}^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(-\vec{k}_{i_1}, \dots, -\vec{k}_{i_{n_0}}) \exp\Big[-i\sum_{\nu=1}^{n_0}(k^0_{i_\nu}+\omega_{i_\nu})t\Big]$$

$$\Big\langle \prod_{\varkappa=1}^{r} \tilde{A}(k'_{i_{r-\varkappa+1}}) \prod_{\lambda=1}^{s} \tilde{A}(k_{i_\lambda}) \Big\rangle^T \Big\langle \prod_{\varkappa=r+1}^{n_0} \tilde{A}(k'_{i_\varkappa}) \prod_{\lambda=s+1}^{n_0} \tilde{A}(k_{i_\lambda}) \Big\rangle \Big| < C_N$$

Angenommen, wir hätten diesen Sachverhalt schon für $n_0 - 1$ bewiesen. Dann gilt er auch für n_0 :

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen: $r \geq 2$. Unter Ausnutzung der Translationsinvarianz erhalten wir:

$$\Big| \quad \cdot \quad \Big| = \Big| t^N \int \prod_{\lambda=1}^{n_0} dk'_{i_\lambda} \prod_{\lambda=1}^{n_0} dk_{i_\lambda} \prod_{\lambda=1}^{n_0} \overline{\varphi_0}^*(k'_{i_\lambda})\, \hat{\varphi}^{*(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(\vec{k}'_{i_1}, \dots, \vec{k}'_{i_{n_0}})$$

$$e^{it\sum_{\varkappa=r+1}^{n_0} \omega'_{i_\varkappa}} \prod_{i=1}^{n_0} \overline{\varphi_0}(-k_i)\, \hat{\varphi}^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(\vec{k}_{i_1}, \dots, \vec{k}_{i_{n_0}})\, e^{-it\sum_{\lambda=s+1}^{n_0} \omega_{i_\lambda}} W^{(2n_0-r-s)}(k'_{i_{n_0}}, \dots, k'_{i_{r+1}},$$

$$k_{i_{s+1}}, \dots, k_{i_{n_0}})\, e^{i\Omega t}\, \delta\Big(\sum_{\varkappa=1}^{r} k'_{i_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{s} k_{i_\lambda}\Big) \hat{W}^T_{(r+s)}(k'_{i_{r-1}}, \dots, k'_{i_1}, k_{i_1}, \dots, k_{i_s}) \Big|$$

$\hat{W}^T_{(r+s)} \in \mathcal{O}_M(R^{3(r+s-1)})$, wenn integriert über die Nullkomponenten mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}(R^{r+s-1})$.

$$\Omega = \Big[1 + \Big(\sum_{\varkappa=1}^{r-1} \vec{k}'_{i_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{s} \vec{k}_{i_\lambda}\Big)^2\Big]^{1/2} + \sum_{\varkappa=2}^{r-1} \Big[1 + \vec{k}'^2_{i_{r-\varkappa+1}}\Big]^{1/2} - \sum_{\lambda=1}^{s} \Big[1 + \vec{k}^2_{i_\lambda}\Big]^{1/2}$$

$$\Big| \quad \cdot \quad \Big| = \Big| t^N \int d\Omega \prod_{i \neq k'_{i_r}} dk'^{\,i}_{i_{r-1}} \prod_{\varkappa=2}^{r} d\vec{k}'_{i_{r-\varkappa+1}} \prod_{\lambda=1}^{s} d\vec{k}_{i_\lambda} \prod_{\varkappa=2}^{r} dk'^0_{i_{r-\varkappa+1}} \prod_{\lambda=1}^{s} dk^0_{i_\lambda}$$

$$\Big\{ \int \prod_{\varkappa=r+1}^{n_0} dk'_{i_{n_0-\varkappa+r+1}} \prod_{\lambda=s+1}^{n_0} dk_{i_\lambda}\, e^{i\sum_{\varkappa=r+1}^{n_0} \omega'_{i_{n_0-\varkappa+r+1}} t - i\sum_{\lambda=s+1}^{n_0} \omega_{i_\lambda} t} \prod_{\varkappa=2}^{r} \overline{\varphi_0}^*(k'_{i_{r-\varkappa+1}}) \times$$

$$\overline{\varphi_0}^*\Big(\sum_{\varkappa=1}^{r} k'_{i_{r-\varkappa+1}} - \sum_{\lambda=1}^{s} k_{i_\lambda}\Big) \prod_{\varkappa=r+1}^{n_0} \overline{\varphi_0}^*(k'_{i_{n_0-\varkappa+r+1}}) \prod \overline{\varphi_0}(-k_{i_\lambda})\, \hat{\varphi}^*(\vec{k}'_{i_1}, \dots, \vec{k}'_{i_{r-1}}, \dots, -\Big(\sum_{\varkappa=2}^{r} \vec{k}'_{i_{r-\varkappa+1}} + \sum_{\lambda=1}^{s} \vec{k}_{i_\lambda}\Big), \dots$$

$$\dots, \vec{k}'_{i_{n_0}}, \dots \vec{k}_{n_0}) \hat{\varphi}(-\vec{k}_{i_1}, \dots, -\vec{k}_{i_s}, \dots, -\vec{k}_{n_0}) W^{(2n_0-r-s)}(k'_{i_{n_0}}, \dots, k'_{i_{r+1}}, k_{i_{s+1}}, \dots, k_{i_{n_0}}) \frac{e^{i\Omega t}\, \hat{W}^T_{(r+s)}(k'_{i_{r-1}}, \dots, k'_{i_1}, k_{i_1}, \dots, k_{i_s})}{\dfrac{k'^{\,i}_{i_r}}{\sqrt{1+\vec{k}'^2_{i_r}}} - \dfrac{k'^{\,i}_{i_{r-1}}}{\sqrt{1+\vec{k}'^2_{i_{r-1}}}}} \Bigg|$$

$$= \Big| t^N \int d\Omega\, e^{i\Omega t} \Big(\prod_{j \neq k'_{i_{r-1}}} dk'^{\,j}_{i_{r-1}} \prod_{\varkappa=2}^{r} d\vec{k}'_{i_{r-\varkappa+1}} \prod_{\lambda=1}^{s} d\vec{k}_{i_\lambda}\, \tilde{\chi}^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(t, \Omega, k'^{\,j \neq k'_{i_{r-1}}}_{i_{r-1}}, \vec{k}'_{i_{r-1}}, \dots, \vec{k}_{i_1}, \vec{k}_{i_1}, \dots, \vec{k}_{i_s}) \Big|$$

$$\tilde{\chi}^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})} = \tilde{\chi}_1^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})} + \tilde{\chi}_2^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})};\ \tilde{\chi}_{1(2)}^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})} \in \mathcal{S}((t)\Omega, k'^{\,j \neq k'_{i_{r-1}}}_{i_{r-1}}, \vec{k}'_{i_{r-1}}, \dots, \vec{k}_{i_1}, \vec{k}_{i_1}, \dots, \vec{k}_{i_s})$$

nach Induktionsvoraussetzung

$$= \Big| t^N \int d\Omega\, e^{i\Omega t} \Big\{ \chi_2^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(t, \Omega) + \chi_1^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(\Omega) \Big\} \Big|$$

$$\tilde{\chi}_1^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(\Omega) \in \mathcal{S}(R^1), \quad \tilde{\chi}_2^{(j_{1 n_1} \cdots j_{n_0 r_1 n_0})}(t, \Omega) \in \mathcal{S}(R^2)$$

$$|\cdot| = |t^N \underset{\sim}{\chi}^{(j_1 n_1, \dots, j_{n_0-1} n_0)}(t)|$$

$$\underset{\sim}{\tilde{\chi}}^{(j_1 n_1, \dots, j_{n_0-1} n_0)}(t) \in \mathcal{S}(R^1)$$

$$|\cdot| < C_N \qquad 0 < C_N < \infty$$

Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Anhang B

Beweis von Hilfssatz 2:

Wir führen die folgende Funktion ein

$$0 \leq \tilde{\chi}(\vec{k}'_i - \vec{k}'_j, \vec{k}_i - \vec{k}_j) \leq 1 \quad ; \quad \tilde{\chi} \in C^\infty(R^6 - \{\vec{0}, \vec{0}\})$$

$$\tilde{\chi}(\vec{k}'_i - \vec{k}'_j, \vec{k}_i - \vec{k}_j) \equiv \begin{cases} 0 & \text{, falls } |\vec{k}'_i - \vec{k}'_j| < \frac{1}{2}|\vec{k}_i - \vec{k}_j| \\ 1 & \text{, falls } |\vec{k}_i - \vec{k}_j| < \frac{1}{2}|\vec{k}'_i - \vec{k}'_j| \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) = \varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)\, \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_1 - \vec{k}_2)$$
$$+ \varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)[1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_1 - \vec{k}_2)]$$

$$= \varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)\, \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_1 - \vec{k}_2) + \varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \times$$
$$[1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_1 - \vec{k}_2)]\, \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_1 - \vec{k}_3) + \varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \times$$
$$[1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_1 - \vec{k}_2)][1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_1 - \vec{k}_3)]$$

$$= - - - - - - - - - -$$

$$= \varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \Big\{ \sum_{\substack{i<k \\ (i,k)<(l,\varkappa)}} \prod{}' [1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_i - \vec{k}_k)]\, \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_l - \vec{k}_\varkappa) \Big\}$$
$$+ \varphi_\mu(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \prod_{i<k} [1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-1}, \vec{k}_i - \vec{k}_k)]$$

$$= \psi^{(2)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) + \psi^{(1)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)$$

$$\psi^{(1)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \in \mathcal{J}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$$

$$= \psi^{(2)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)\, \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-2}, \vec{k}_1 - \vec{k}_2) + \psi^{(2)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \times$$
$$\times [1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-2}, \vec{k}_1 - \vec{k}_2)] + \psi^{(1)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)$$

$$= - - - - - - - - - - -$$

$$= \psi^{(2)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \Big\{ \sum \prod_{\substack{i<k \\ (i,k)<(l,\varkappa)}}{}' [1 - \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-2}, \vec{k}_i - \vec{k}_k)]\, \tilde{\chi}(\vec{k}'_{n'} - \vec{k}'_{n'-2}, \vec{k}_l - \vec{k}_\varkappa)$$
$$+ \psi^{(2)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n) \prod_{i<k} [1 - \tilde{\chi}(k'_{n'} - k'_{n'-2}, \vec{k}_i - \vec{k}_k)] + \psi^{(1)}_{\mu\, n, n'-1}(\vec{k}'_{n'}, \ldots, k'_1, k, \vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n)$$

$$\doteq \psi^{(2)}_{\mu \atop n,n'-1|n,n'-2}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) + \psi^{(1)}_{\mu \atop n,n'-1|n,n'-2}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$$

$$\left(\psi^{(2)}_{\mu \atop n,n'-1|n,n'-2} \doteq \psi^{(2)}_{\mu \atop n,n'-1} \cdot \{ \qquad \} \,, \; \psi^{(1)}_{\mu \atop n,n'-1|n,n'-2} \in \mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n}) \right)$$

$$\doteq \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$= \psi^{(2)}_{\mu \atop n,n'-1|n,n'-2|\dots|2,1}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) + \psi^{(1)}_{\mu \atop n,n'-1|n,n'-2|\dots|2,1}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$$

$$\doteq \varphi^{(2)}_{\mu}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) + \varphi^{(1)}_{\mu}(\vec{k}_{n'}, \dots, \vec{k}'_1, k, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$$

wobei $\varphi^{(2)}_{\mu} \in \mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$; $\varphi^{(1)}_{\mu} \in \mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$

Nach Konstruktion sind $\{\varphi^{(1)}_{\mu}\}$ und $\{\varphi^{(2)}_{\mu}\}$ konvergente Cauchyfolgen auf $\mathcal{S}(R^{3n'} \times R^4 \times \mathring{R}^{3n})$ bzw. auf $\mathcal{S}(\mathring{R}^{3n'} \times R^4 \times R^{3n})$. q.e.d.

Anhang C

Wir betrachten zunächst $\left({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 \middle| [A(x)A(y)] \middle| \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in}\right)$

$$\doteq T([x,y]; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) \in \mathcal{S}'(R^{4\cdot 2} \times R^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$$

Wir wollen nun eine Integraldarstellung für

$$[\mathcal{F}_{x,y} T([x,y]; k'_{n'}, \dots, -k_n)](p,q; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) \doteq \tilde{T}([p,q]; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n)$$

so hinschreiben, dass die Lorentzinvarianz und das Verschwinden von $T([x,y]; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n)$ für $(x-y)^2 < 0$ und darüber hinaus auch das Impulsspektrum voll berücksichtigt werden.

Dann wollen wir daraus

$$\Theta(x-y)\left({}^{in}\vec{k}'_{n'}, \dots, \vec{k}'_1 \middle| [A(x)A(y)] \middle| \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n{}^{in}\right) \in \mathcal{S}'(R^{4\cdot 2} \times R^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$$

bzw. $\Theta(x-y)\langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[[A(x)A(y)]a_{in}(\vec{k}_1)] \cdot\cdot a_{in}(\vec{k}_n)]a^*_{in}(\vec{k}'_1)] \cdot\cdot a^*_{in}(\vec{k}'_{n'})] \rangle \in \mathcal{S}'(R^{4\cdot 2} \times R^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$

lorentzinvariant definieren.

Wir dürfen voraussetzen: $n' + n \geq 1$.

$$\tilde{T}([p,q]; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dx\, dy\, e^{i(px+qy)} T([x,y]; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n)$$

$$= \int d\xi\, e^{i\frac{p-q}{2}\xi}\, T([\tfrac{\xi}{2}, -\tfrac{\xi}{2}]; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n)\, \delta^{(4)}(p+q+\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} - \sum_{i=1}^{n} k_i)$$

$$= (2\pi)^2\, \tilde{\tau}(\tfrac{p-q}{2}; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n)\, \delta^{(4)}(p+q+\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} - \sum_{i=1}^{n} k_i)$$

$$\tilde{T}([q+2k, q]; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) = (2\pi)^2\, \tilde{\tau}(k; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n)\, \delta^{(4)}(2k+2q+\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} - \sum_{i=1}^{n} k_i)$$

Wegen $n' + n \geq 1$ gilt: $\sum^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum^{n} k_i \in \overline{V_+^{(n'+n)m}} \subset \overline{V_+^{m}}$

Die Distribution $\tilde{\tau}(k; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) \in \mathcal{S}'(R^4 \times R^{3n'} \times \mathring{R}^{3n})$ hat nun folgende Eigenschaften:

I $\quad \tau(\xi; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) = 0 \qquad$ für $\xi^2 < 0$

II $\quad \tilde{\tau}(k; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) = 0 \qquad$ für $\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i}{2} + k \notin \overline{V_+^{m_1}} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i}{2} - k \notin \overline{V_+^{m_2}} \end{cases}$

(Zu der Bedeutung der Massen m_1 und m_2 verweisen wir auf [14])

III $\quad \tilde{\tau}(k; k'_{n'}, \dots, k'_1, -k_1, \dots, -k_n) = \tilde{\tau}(\Lambda k; \Lambda k'_{n'}, \dots, \Lambda k'_1, -\Lambda k_1, \dots, -\Lambda k_n)$ für $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$

Mit $L(P)$ wollen wir diejenige Lorentztransformation bezeichnen, die den Vektor $P \in V_+$ drehungsfrei in sein Ruhesystem überführt:

$$L(P)\,P = (\sqrt{P^2}, 0, 0, 0)$$

$$L^{-1}(P)^{\nu}{}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{P^2}} \left(\begin{array}{c|c} P_0 & P_r \\ \hline P_s & \sqrt{P^2}\,\delta_{rs} + \frac{P_r P_s}{\sqrt{P^2}+P_0} \end{array} \right)$$

Der durch die Abbildung $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(R^4 \times \overline{V_+^{(n'+n)m}} \times R^{3(n'-1)} \times \mathring{R}^{3n}) \to$

$$[M\tilde{\varphi}](k; t, k'_{n'-1}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) = \int d\Big(\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i\Big)\, \delta\Big(\Big[\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i\Big]^2 - t^2\Big)$$
$$\tilde{\varphi}\Big(L^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i\Big)k;\ \sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i,\ L^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i\Big)k'_{n'-1}, \ldots, -L^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n'} k'_{n'-i+1} + \sum_{i=1}^{n} k_i\Big)k_n\Big)$$

vermittelte Homomorphismus M definiert einen topologischen Isomorphismus M' zwischen $\mathcal{S}'(R^4 \times V_+^{(n'+n)m} \times R^{3(n'-1)} \times \mathring{R}^{3n}; L_+^{\uparrow})$ und $\mathcal{S}'(R^4 \times [(n'+n)m, \infty\rangle \times R^{3(n'-1)} \times \mathring{R}^{3n}; O_+^3)$ durch die Relation:

$$\langle \tilde{\tau}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle M'\tilde{\tau}, M\tilde{\varphi} \rangle .$$

$$\tilde{\tau}(k; k'_{n'}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) \leftrightarrow [M'\tilde{\tau}](k; t; k'_{n'-1}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n)$$

$$[M'\tilde{\tau}](k; t; k'_{n'-1}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) \in \mathcal{S}'(R^4 \times [(n'+n)m, \infty\rangle \times R^{3(n'-1)} \times \mathring{R}^{3n}, O_+^3)$$

hat nun folgende Eigenschaften:

I' $\{\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}]\}(\xi; t; k'_{n'-1}, \ldots, k'_1, -k_1, \ldots, -k_n) = 0$ für $\xi^2 < 0$

II' $[M'\tilde{\tau}](k^0, \vec{k}; t; k'^0_{n'-1}, \vec{k}'_{n'-1}, \ldots, k'^0_1, \vec{k}'_1, -k^0_1, -\vec{k}_1, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) = 0$ für $\begin{cases} t \notin [(n'+n)m, \infty\rangle \\ \frac{t}{2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{k}^2} < k^0 < -\frac{t}{2} + \sqrt{m_1^2 + \vec{k}^2} \end{cases}$

(Zu der Bedeutung der Massen m_1, m_2 vergleiche [14])

III' $[M'\tilde{\tau}](k^0, \vec{k}; t; k'^0_{n'-1}, \vec{k}'_{n'-1}, \ldots, k'^0_1, \vec{k}'_1, -k^0_1, -\vec{k}_1, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) =$
$= [M'\tilde{\tau}](k^0, \overrightarrow{Rk}; t; k'^0_{n'-1}, \overrightarrow{Rk'_{n'-1}}, \ldots, k'^0_1, \overrightarrow{Rk'_1}, -k^0_1, -\overrightarrow{Rk_1}, \ldots, -k^0_n, -\overrightarrow{Rk_n})$ $R \in O_+^3$

Jede Distribution aus $\mathcal{S}'(R^4 \times [(n'+n)m, \infty\rangle \times R^{3(n'-1)} \times \mathring{R}^{3n})$ mit den Eigenschaften I' und II' besitzt nach Jost, Lehmann und Dyson folgende Integraldarstellung:

(1) $$[M'\tilde{\tau}](k^0, \vec{k}; t; k'^0_{n'-1}, \vec{k}'_{n'-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) = \int_0^\infty ds \int d^3u\, \varepsilon(k^0)\, \delta(k^{0\,2} - (\vec{k} - \vec{u})^2 - s) \times$$
$$\{\Phi_1(\vec{u}, s; t; k'^0_{n'-1}, \vec{k}'_{n'-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) + 2k^0\,\Phi_2(\vec{u}, s; t; k'^0_{n'-1}, \vec{k}'_{n'-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)\}$$

Dabei sind die Spektral"funktionen" Φ_1 und Φ_2 aus $\mathcal{S}(R^3 \times [(n'+n)m, \infty\rangle \times R^{3(n'-1)} \times \mathring{R}^{3n})$, deren Träger für festes $t \in [(n'+n)m, \infty\rangle$ in der Menge

(2) $\{\vec{u}, s\,;\, |\vec{u}| < \frac{t}{2},\, s \geq \mathrm{Max}\{0, \mathrm{Max}(m_1, m_2) - \sqrt{\frac{t^2}{4} - \vec{u}^2}\}$

enthalten sind.

Die Spektral"funktionen" Φ_1 und Φ_2 lassen sich für vorgegebenes $[M'\tilde{\tau}](k^0, \vec{k}\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)$ eindeutig in folgender Form darstellen:

$$(3)\ \Phi_1(\vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}\Big\{\Theta(s)\frac{\partial}{\partial u^0}[M'\tilde{\tau}_s](u^0, \vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)\Big\}_{u^0=0}$$

$$(4)\ \Phi_2(\vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big\{\Theta(s)[M'\tilde{\tau}_s](0, \vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)\Big\}$$

$$(5)\ [M'\tilde{\tau}_s](\vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) = \frac{1}{\pi^2}\mathbb{P}\int d^4k\, \frac{[M'\tilde{\tau}](k^0, \vec{k}\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)}{[(k^0-u^0)^2 - (\vec{k}-\vec{u})^2 - s]^2}$$

Umgekehrt hat jede Distribution aus $\mathcal{S}'(R^4 \times [(n'+n)m, \infty\rangle \times R^{3(n-1)} \times \mathring{R}^{3n})$, die eine solche Darstellung besitzt, die Eigenschaften I' und II'.

Die Eigenschaft III' garantiert, dass $[M'\tilde{\tau}_s](u^0, \vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)$ O^3_+-invariant ist, und über (5), (4) und (3), dass die Spektral"funktionen" O^3_+-invariant sind, und umgekehrt garantiert die O^3_+-Invarianz der Spektral"funktionen" die Eigenschaft III'.
Eine Distribution aus $\mathcal{S}'(R^4 \times [(n'+n)m, \infty\rangle \times R^{3(n-1)} \times \mathring{R}^{3n})$ hat genau dann also die Eigenschaften I' - III', wenn sie in der Form (1) mit O^3_+-invarianten Spektral"funktionen" darstellbar ist und (2) bis (5) gelten.

Nach dem Verfahren von R. Omnes[15)] wollen wir jetzt mit Hilfe der obigen Integraldarstellung den retardierten Kommutator

$$\Theta(\xi)\{\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}]\}(\xi\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)$$

konstruieren. $\{\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}]\}(\xi\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)$ ist im Punkt $\xi = 0$ von endlicher Ordnung. Daher existiert eine ganze Zahl $N > 0$ so, dass

$$\xi^{0N}\,\Theta(\xi^0)\{\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}]\}(\xi^0, \vec{\xi}\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) \in \mathcal{S}'(R^4 \times [(n'+n)m, \infty\rangle \times R^{3(n-1)} \times \mathring{R}^{3n}\,;O^3_+).$$

$\xi^{0N}\{\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}]\}(\xi^0, \vec{\xi}\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)$ hat die Eigenschaften I', II' und III'. Es gilt also folgende Darstellung:

$$\xi^{0N}\{\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}]\}(\xi^0, \vec{\xi}\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) = \Big(-i\frac{\partial}{\partial k^0}\Big)^N \int_0^\infty ds \int d^3u\, \varepsilon(k^0)\ \times$$
$$\delta(k^{02} - (\vec{k}-\vec{u})^2 - s)\Big[\Phi_1(\vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n) + 2k^0\,\Phi_2(\vec{u}, s\,;t\,;k'^0_{n-1}, \vec{k}_{n-1}, \ldots, -k^0_n, -\vec{k}_n)\Big]$$

Auf Grund der Tatsache, dass der Träger der Spektral"funktionen" in $|\vec{u}|$ durch $|t|$ beschränkt ist, gibt es natürliche Zahlen $\varkappa$ und λ so, dass

$$\Phi_{1,2}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n}) = [t+a^{2}]^{\varkappa}[s+b^{2}]^{\lambda}\varphi_{1,2}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})$$

wobei $\varphi_{1,2}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})$ in $\vec{u}$, s und t beschränkte Distributionen sind.

Weiterhin sei N gross genug gewählt, damit

$$\Theta(\xi^{0})\,\xi^{0N}(-\Box_{\xi}+b^{2})^{\lambda}\Delta(\xi,s) = \xi^{0N}(-\Box_{\xi}+b^{2})^{\lambda}\,\Theta(\xi^{0})\Delta(\xi,s)$$

gilt. Daher

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial k^{0}}\right)^{N}[M'\tilde{\tau}_{\frac{r}{a}}](k^{0},\vec{k};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n}) =$$

$$= \left(-i\frac{\partial}{\partial k^{0}}\right)^{N}\left\{\overline{\mathcal{F}}\left[\Theta(\pm\xi^{0})\{\mathcal{F}[M'\tau]\}(\xi^{0},\vec{\xi};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})\right]\right\}(k^{0},\vec{k};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})$$

$$= \left(-i\frac{\partial}{\partial k^{0}}\right)^{N}\int_{0}^{\infty}ds\int d^{3}u\left[\varphi_{1}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})+2k^{0}\varphi_{2}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})\right]$$

$$(t^{2}+a^{2})^{\varkappa}\left[\frac{[k^{02}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}+b^{2}]^{\lambda}}{(k^{0}\pm i\varepsilon)^{2}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}-s}\right]$$

Daraus folgt: $[M'\tilde{\tau}_{\frac{r}{a}}](k^{0},\vec{k};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n}) =$

$$= \int_{0}^{\infty}ds\int d^{3}u\,\frac{\Phi_{1}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})+2k^{0}\Phi_{2}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})}{[s+b^{2}]^{\lambda}}\times$$

$$\times\frac{[k^{02}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}+b^{2}]^{\lambda}}{(k^{0}\pm i\varepsilon)^{2}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}-s}+\sum_{\varrho=0}^{N-1}(k^{0})^{\varrho}\,\tilde{\sigma}_{\varrho}(\vec{k};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})$$

Nun ist $\int_{0}^{\infty}ds\int d^{3}u\cdots$ O^{3}_{+}-invariant und $[M'\tilde{\tau}_{\frac{r}{a}}](k^{0},\vec{k};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})$ soll O^{3}_{+}-invariant definiert werden. Also kann man $M'\tilde{\tau}_{\frac{r}{a}}$ durch Spezialisierung der $\tilde{\sigma}_{\varrho}$ in der obigen Darstellung auf O^{3}_{+}-invariante $\tilde{\sigma}_{\varrho}(\vec{k};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})$ definieren.

$$[M'\tilde{\tau}_{\frac{r}{a}}]_{0}(k^{0},\vec{k};t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n}) = \int_{0}^{\infty}ds\int d^{3}u\left[\frac{[k^{02}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}+b^{2}]^{\lambda}}{(k^{0}\pm i\varepsilon)^{2}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}-s}\right]\times$$

$$\times\frac{\Phi_{1}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})+2k^{0}\Phi_{2}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})}{[s+b^{2}]^{\lambda}}$$

lässt sich zu einer holomorphen Funktion von k in V_{+} bzw. zu einer holomorphen Funktion von k in V_{-} erweitern:

$$[M'\tilde{\tau}_{\frac{r}{a}}]_{0}(k;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n}) = \lim_{\substack{\operatorname{Im}k\in V_{+}\to 0\\ \operatorname{Im}k\in V_{-}\to 0}}\int_{0}^{\infty}ds\int d^{3}u\left[\frac{[k^{02}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}+b^{2}]^{\lambda}}{k^{02}-(\vec{k}-\vec{u})^{2}-s}\right]\times$$

$$\times\frac{\Phi_{1}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})+2k^{0}\Phi_{2}(\vec{u},s;t;k'^{0}_{n-1},\vec{k}_{n-1},\dots,-k^{0}_{n},-\vec{k}_{n})}{[s+b^{2}]^{\lambda}}$$

$$[M'\tilde{\tau}_r]_0(k^0,\vec{k};t;k^0_{n'+1},\vec{k}_{n'+1},\dots,-k^0_n,-\vec{k}_n)-[M'\tilde{\tau}_a]_0(k^0,\vec{k};t;k^0_{n'+1},\vec{k}_{n'+1},\dots,-k^0_n,-\vec{k}_n)=$$

$$[M'\tilde{\tau}](k^0,\vec{k};t;k'^0_{n'+1},\vec{k}'_{n'+1},\dots,-k^0_n,-\vec{k}_n)=0 \qquad \text{für} \begin{cases} t\notin[(n'+n)m,\infty\rangle \quad \text{oder} \\ \frac{t}{2}-\sqrt{m_2^2+\vec{k}^2}<k^0<-\frac{t}{2}+\sqrt{m_2^2+\vec{k}^2} \end{cases}$$

Daher gilt: $\mathrm{supp}\{\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}_{\mathfrak{a}}]_0\}(\xi;t;k'^0_{n'+1},\vec{k}'_{n'+1},\dots,-k^0_n,-\vec{k}_n)\subset\overline{V}_\pm$

Da auch $\mathcal{F}[M'\tilde{\tau}_{\mathfrak{a}}]$ diese Trägereigenschaft haben soll, muss $\tilde{\sigma}_\varrho$ von der Form

$$\sum_{\varrho^{(1)},\varrho^{(2)},\varrho^{(3)}}^{\leq\infty}(k^1)^{\varrho^{(1)}}(k^2)^{\varrho^{(2)}}(k^3)^{\varrho^{(3)}}\,\tilde{\sigma}_\varrho^{(\varrho^{(1)},\varrho^{(2)},\varrho^{(3)})}(t;k'^0_{n'+1},\vec{k}_{n'+1},\dots,-k^0_n,-\vec{k}_n)\quad O^3_+\text{-invariant}$$

sein.

Man kann also $\Theta(x-y)({}^{in}\vec{k}_{n'},\dots,\vec{k}'_1|[A(x)A(y)]|\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n^{\,in})$ als Distribution in $\mathcal{S}'(R^{1,4}\times R^{3n'}\times\mathring{R}^{3n})$ bzw. $\overset{\square}{\mathcal{S}}{}'(R^{4,2}\times R^{3n'}\times R^{3n})$ (vgl. die Argumentation in Abschnitt I) lorentzinvariant so definieren, dass die dieser Distribution formal zukommenden Orts- und Impulsraumeigenschaften garantiert sind.

Wir fassen die obigen Ergebnisse vorläufig zusammen in der folgenden Aussage: Man kann $K_y\,\Theta(x-y)\langle[\dots[[\dots[A(x)A(y)]a_{in}(\vec{k}'_1)]\dots,a_{in}(\vec{k}'_{n'})]a^*_{in}(\vec{k}_1)]\dots,a^*_{in}(\vec{k}_n)]\rangle$ als Distribution in $\overset{\square}{\mathcal{S}}{}'(R^{1,4}\times R^{3n'}\times R^{3n})$ lorentzinvariant (wenn auch nicht eindeutig) so definieren, dass die dieser Distribution formal zukommenden Orts- und Impulsraumeigenschaften garantiert sind. Die Mehrdeutigkeiten sind von der Form:

$$K_y\sum_{\varrho=0}^{N-1}P_\varrho\Big(\tfrac{\partial}{\partial(x^0-y^0)},\tfrac{\partial}{\partial(\vec{x}-\vec{y})}\Big)\delta(x-y)\,e^{i\frac{x+y}{2}\left(\sum_{i=1}^{n'}k'_i-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)}\tilde{\sigma}_\varrho(k'_{n'},\dots,-k_n)\quad\text{lorentzinvariant}$$

$$\tilde{\sigma}_\varrho\in\overset{\square}{\mathcal{S}}{}'(R^{3n'}\times R^{3n})\qquad \varrho=0,\dots,N-1$$

Diese Mehrdeutigkeiten brauchen uns nicht zu beunruhigen, sie verschwinden nämlich beim Übergang zur Massenschale. Man überzeugt sich leicht davon, dass für $\hat{\psi}(\vec{k}_{n'},\dots,\vec{k}'_1,\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)\in\mathcal{S}(\mathring{R}^{3(n'-1)}\times\mathring{R}^{3n})$ und für jede der möglichen Definitionen von

$$\Theta(x-y)\langle[\dots[[\dots[A(x)A(y)]a_{in}(\vec{k}'_1)]\dots,a_{in}(\vec{k}_{n'})]a^*_{in}(\vec{k}_1)]\dots,a^*_{in}(\vec{k}_n)]\rangle$$

gilt: $\tilde{g}\in\mathcal{S}(R^4)$, $\tilde{f}'_1\in\mathcal{S}(G)$

$$\int dk\,\tilde{g}^*(k)\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_1}{2\omega'_1}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\hat{f}'^*_1(\vec{k}'_1)\hat{\psi}(\vec{k}_{n'},\dots,\vec{k}'_2,\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)\tilde{h}^{(n',n)}(k|k'_{n'},\dots,k'_1,-k_1,\dots,-k_n)$$

$$\propto\lim_{t\to-\infty}\int dx\,dx'_1\,g(x)^*f'^*_1(x'_1,t)\int\frac{d^3k'_{n'}}{2\omega'_{n'}}\cdots\frac{d^3k'_2}{2\omega'_2}\frac{d^3k_1}{2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{2\omega_n}\hat{\psi}(\vec{k}_{n'},\dots,\vec{k}'_2,\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n)\times$$

$$\times \langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[[A(x)\,A(x_1')]\,a_{in}(\vec{k}_2')]\cdot\cdot, a_{in}(\vec{k}_{n'}')]\,a_{in}^*(\vec{k}_1)]\cdot\cdot, a_{in}^*(\vec{k}_n)]] \rangle$$

$$= \left(\lim_{t\to+\infty} - \lim_{t\to-\infty}\right) \int dx\, dx_1'\, g^*(x)\, f_1'^*(x_1', t) \int \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'} \cdots \frac{d^3k_2'}{2\omega_2'} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \hat{\varphi}(\vec{k}_{n'}', \cdots, \vec{k}_2', \vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_n)$$

$$\Theta(x - x_1') \langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[[A(x)\,A(x_1')]\,a_{in}(\vec{k}_2')]\cdot\cdot, a_{in}(\vec{k}_{n'}')]\,a_{in}^*(\vec{k}_1)]\cdot\cdot, a_{in}^*(\vec{k}_n)]] \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{d}{dt} \int dx\, dx_1'\, g^*(x)\, f_1'^*(x_1', t) \int \cdots$$

$$\propto \int dk\, dk_1'^0\, \tilde{g}^*(k) \int \frac{d^3k_{n'}'}{2\omega_{n'}'} \cdots \frac{d^3k_2'}{2\omega_2'} \frac{d^3k_1'}{k_1'^0 + \omega_1'} \frac{d^3k_1}{2\omega_1} \cdots \frac{d^3k_n}{2\omega_n} \hat{\varphi}(\vec{k}_{n'}', \cdots, \vec{k}_2', \vec{k}_1, \cdots, \vec{k}_n)$$

$$\tilde{f}_1'^*\left(\begin{matrix} k_1'^0 \\ \vec{k}_1' \end{matrix}\right) \delta(k_1'^0 - \omega_1') \left\{ \mathcal{F}_{x, x_1'} K_{x_1'} \Theta(x - x_1') \langle [\cdot\cdot[[\cdot\cdot[[A(x)A(x_1')]\,a_{in}(\vec{k}_2')]\cdot\cdot, a_{in}(\vec{k}_{n'}')]\,a_{in}^*(\vec{k}_1)]\cdot\cdot, a_{in}^*(\vec{k}_n)]] \rangle \right\}$$

$$(k, k_1'; \vec{k}_1', \cdots, -\vec{k}_n).$$

Literaturangabe

1) V. Glaser, H. Lehmann und W. Zimmermann: Nuovo Cimento VI 5, 1122 (1957)

2) R. Haag: Phys. Rev. 112 (1958), Suppl. Nuovo Cimento 14, 131 (1959)

3) D. Ruelle: Helv. Phys. Acta 35, 147 (1962)

4) K. Hepp: Helv. Phys. Acta 37, 639 (1964)

5) K. Hepp: Comm. Math. Phys. I 2, 96 (1965)

6) I. M. Gelfand und N. J. Wilenkin: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) IV, Berlin 1964

7) L. Schwartz: Theorie des distributions, Hermann Paris tome I (1957), tome II (1959)

8) H. Araki: Einführung in die Quantenfeldtheorie, Vorlesungen an der ETH Zürich WS 1961/62

9) R. H. Milburn: Rev. Modern Physics 27, 1 1 (1955)

10) R. Oehme: Phys. Rev. 121, 6, 1840 (1961)

11) S. Coleman: On the Gell-Man Dashen Approach, Cern preprint (1965)

12) H. Araki and R. Haag: Collision Cross Sections in Terms of Local Observables preprint University of Illinois (1966)

13) K. Hepp: Helv. Phys. Acta 37, 659 (1964)

14) S. S. Schweber: An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York 1961

15) R. Omnes: Dispersion relations and elementary particles p. 347 Hermann Paris 1960

16) R. Stora: Saclay preprint 1965

17) O. W. Greenberg: Journal Math. Phys. 3, 31 (1962)

18) K. Symanzik: Journal Math. Phys. 1, 249 (1960)

+) Die Abschätzung des Phasenraumintegrals resultiert aus Diskussionen mit Herrn G. van Keuk, der mich auch auf die Arbeit [9)] aufmerksam gemacht hat. Für beides möchte ich ihm hier vielmals danken.