

Bibliothek

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON

DESY

Bibliothek

21. AUG. 1967

DESY 67/24
Juli 1967

Monte-Carlo-Rechnung für 3 GeV-Schauer in Blei

von

H. Burfeindt

Physikalisches Staatsinstitut
II. Institut für Experimentalphysik, Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

Monte-Carlo-Rechnung für 3 GeV-Schauer in Blei

von

H. Burfeindt

Physikalisches Staatsinstitut, II. Institut für Experimental-
physik der Universität Hamburg

Zusammenfassung:

Mittels eines Monte-Carlo-Programms wurden Elektron-Photon-Kaskaden in Blei für 3 GeV-Elektronen als Primärteilchen berechnet. Das Ergebnis der Rechnung wird in Form von Energie-Longitudinal-, Radial- und Winkelverteilungen angegeben.

I. Einleitung

Das der Rechnung zugrunde liegende Programm von Nagel¹⁾, welches von Völkel²⁾ auf höhere Primärenergien erweitert wurde, berücksichtigt die folgenden Wechselwirkungen der Elektronen bzw. Photonen:

- 1) Bremsstrahlung
- 2) Möllerstreuung mit Energieverlusten $\Delta E > 2 m$
- 3) Vielfachstreuung
- 4) Energieverlust durch Ionisation mit $\Delta E < 2 m$ und durch Emission weicher Bremsstrahlung mit $E_\gamma < 1/2 m$
- 5) Paarerzeugung
- 6) Comptoneffekt am Elektron
- 7) Photoeffekt am Bleiatom.

Die erzeugten Elektronen bzw. Photonen werden bis zu Abschneideenergien von $E_a^e = 1,5 \text{ MeV}$ bzw. $E_a^\gamma = 0,25 \text{ MeV}$ verfolgt.

Die in Kap. II. - VI. wiedergegebenen Resultate sind das Ergebnis einer Mittelung über 100 Schauer.

In allen Formeln und graphischen Darstellungen werden Energien in MeV und Längen in Einheiten der Strahlungslänge von Blei angegeben ($1X_0 = 5,82 \text{ gr/cm}^2 = 0,51 \text{ cm}$, entsprechend der Formel³⁾)

$$\frac{1}{X_0} = \frac{4r_0^2 N_0 Z(Z+\xi) \ln(183 Z^{-1/3})}{137 \cdot A} \quad).$$

II. Longitudinalentwicklung der Kaskade

Zur Berechnung der Kaskade wird die Z-Achse in die Schauerachse gelegt und Rotationssymmetrie des Schauers um diese Achse angenommen. Um den Schauer zu beschreiben, werden die Funktionen¹⁾ $\pi[E_0, E, t, r, \delta]$ und $\gamma[E_0, E, t, r, \delta]$ eingeführt, welche die Verteilung der Elektronen- bzw. Photonenanzahlen angeben⁵⁾.

Die Longitudinalentwicklung des Schauers wird durch die Funktion

$$\Pi(E_0, E, t) = \int_E^{E_0} dE \int_0^\infty 2r dr \int_0^1 d(\cos\delta) \pi [E_0, E, t, r, \delta] \quad (1)$$

dargestellt, welche die Anzahl der Elektronen mit Energien größer als E angibt, die bei einer Primärenergie E_0 die Ebene $Z = tX_0$ "in Vorwärtsrichtung", d.h. mit $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ durchsetzen.

$\Gamma(E_0, E, t)$ ist die entsprechende Funktion für Photonen.

In den Abb. 1 und 2 sind diese Verteilungen für Primärelektronen von $E_0 = 3$ GeV dargestellt. Der Abfall der integralen Elektronenspektren hinter dem Maximum verläuft für Abschneideenergien E um 1,5 MeV etwa wie $e^{-\lambda_{\min} t}$ ($\lambda_{\min} = 0,24 X_0^{-1}$ = minimaler Absorptionskoeffizient für Photonen in Blei), während sich für größere Werte von E ein stärkerer Abfall ergibt. Dasselbe Verhalten zeigen die integralen Photonenspektren. Die Teilchenzahlen im Maximum dieser Kurven lassen sich durch die folgenden Interpolationsformeln¹⁾ (ca. 3 - 4 % Genauigkeit) ermitteln:

$$\text{Elektronen: } \Pi_{\max}(E_0, E) = 0,072 \frac{E_0}{E+11,9} + b(E) \quad \text{für } E_0 = 3 \text{ GeV} \\ 1,5 < E < 400 \text{ MeV} \quad (2)$$

$$\text{Photonen: } \Gamma_{\max}(E_0, E) = 0,098 \frac{E_0}{E+1,9} + b'(E) \quad \text{für } E_0 = 3 \text{ GeV} \\ 0,25 < E < 30 \text{ MeV} \quad (3)$$

$$\text{Photonen: } \Gamma_{\max}(E_0, E) = 0,109 \frac{E_0}{E+2,17} \quad \text{für } E_0 = 3 \text{ GeV} \\ 30 < E < 100 \text{ MeV} \quad (4)$$

Die Funktionen $b(E)$ und $b'(E)$ sind in den Abb. 3a und 3b wiedergegeben.⁶⁾ Die Lage des Maximums $\Pi_{\max}(E_0, E)$ für Elektronen der Abschneideenergie E läßt sich aus¹⁾

$$t_{\max}^e(E_0, E) = 1,11 \ln E_0 + C(E, E_0) \quad \text{für } 1,5 < E < 20 \text{ MeV} \quad (5)$$

ermitteln.

Für $E > 20$ MeV liegt nach Näherung A der Schauertheorie das Maximum bei³⁾

$$t_{\max}^e(E_0, E) = \ln \left[\frac{E_0}{E} \right] - 1,1 \approx \ln \frac{E_0}{3E}, \quad (6)$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen dieser Rechnung.

Die Lage des Maximums des integralen Photonenspektrums $\Gamma_{\max}(E_0, E)$ erhält man nach Näherung A der Schauertheorie aus

$$t_{\max}^Y(E_0, E) = \ln \left[\frac{E_0}{E} \right] - 1,38 \quad (7)$$

Diese Formel liefert für $E_0 = 3$ GeV Werte, die etwa um $1X_0$ zu klein sind; eine bessere Näherung (etwa 5 % Genauigkeit) stellt

$$t_{\max}^Y(E_0, E) = \ln \frac{E_0}{1,5E} \quad \begin{array}{l} E_0 = 3 \text{ GeV} \\ 1,5 < E < 100 \text{ MeV} \end{array} \quad (8)$$

dar.

III. Radialentwicklung des Schauers

Die Anzahl der Elektronen in der Tiefe $Z = tX_0$, die sich "in Vorwärtsrichtung" bewegen, mit radialem Abstand von der Schauerachse zwischen r und $r+dr$, ist gegeben durch $\pi[E_0, t, r] \cdot 2rdr$ mit

$$\pi[E_0, t, r] = \int_{E=1,5}^{E_0} dE \int_0^1 d(\cos \delta) \pi[E_0, E, t, r, \delta], \quad (9)$$

$\gamma[E_0, t, r] \cdot 2rdr$ ist der entsprechende Ausdruck für die Photonen⁷⁾.

Die Funktionen $\pi[E_0, t, r]$ und $\gamma[E_0, t, r]$ sind in den Abb. 5 - 8 für verschiedene Werte von t aufgetragen. Sie geben die Anzahl der Elektronen bzw. Photonen pro Flächeneinheit in den jeweiligen Kreisringelementen an. In den Abb. 9 - 10 ist die integrale Radialverteilung von Elektronen und Photonen, also die Gesamtteilchenzahl für einen radialen Abstand $< r$ von der Schauerachse,

dargestellt. Die Kurven sind normiert auf 1 Teilchen in Vorwärtsrichtung ($0 < \delta < 90^\circ$); um die Gesamtteilchenanzahl zu erhalten, muß mit $\Pi[E_0; E = 1,5; t]$ bzw. $\Gamma[E_0; E = 0,25; t]$ multipliziert werden. (Die Werte von Π und Γ sind auf den Abb. angegeben.)

IV. Energie- und Winkelverteilungen

Die relativen Energieverteilungen der Elektronen

$$W_e[E_0, E, t] = \pi[E_0, E, t] / \Pi[E_0; E=1,5; t] \quad (10)$$

bzw. der Photonen

$$W_\gamma[E_0, E, t] = \gamma[E_0, E, t] / \Gamma[E_0; E=0,25; t] \quad (11)$$

sollten nach Ott⁴⁾ unabhängig von der Primärenergie E_0 sein, wenn t in Einheiten der Tiefe $t_{\max}^e[E_0, E=m]$ des Maximums der Elektronen gemessen wird. Durch Extrapolation auf die Abschneideenergie $E = m$ erhält man bei $E_0 = 3$ GeV für t_{\max}^e :

$$t_{\max}^e[E_0, m] \simeq 4,8 X_0.$$

Diese Ähnlichkeitsregel ist näherungsweise erfüllt (vgl. Nagel, Völkel).

Die Fig. 11 - 12 zeigen die Energiespektren $\pi[E_0, E, t]$ und $\gamma[E_0, E, t]$, also die Anzahl der Teilchen pro Energieintervall dE , für verschiedene Tiefen t und $E_0 = 3$ GeV.

Aus den Kurven der Abb. 13 - 14 läßt sich die Anzahl der Elektronen mit Energien zwischen 1,5 MeV und E bzw. die Anzahl der Photonen mit Energien zwischen 0,25 MeV und E für verschiedene Tiefen t entnehmen.

Die Winkelverteilungen in der Tiefe t werden beschrieben durch⁸⁾

$$\pi[E_0, t, \delta] = \frac{1}{|\cos \delta|} \int_{E=1,5}^{E_0} dE \int_{r=0}^{\infty} 2r dr \pi[E_0, E, t, r, \delta] \quad (12)$$

bzw.

$$\gamma[E_0, t, \delta] = \frac{1}{|\cos \delta|} \int_{E=0,25}^{E_0} dE \int_{r=0}^{\infty} 2r dr \gamma[E_0, E, t, r, \delta] \quad (13)$$

Die obigen Funktionen (12) und (13) geben an die Anzahl der Teilchen pro Raumwinkelelement $d\Omega$ bei dem Winkel δ in der Tiefe t .

Nach Ott⁴⁾ sollten auch die relativen Winkelverteilungen

$$W_e[E_0, \tau, \delta] = \pi[E_0, \tau, \delta] / \Pi[E_0; E=1,5; \tau]$$

und

$$W_\gamma[E_0, \tau, \delta] = \gamma[E_0, \tau, \delta] / \Gamma[E_0; E=0,25; \tau]$$

bei festem $\tau = \alpha \cdot t_{\max}^e [E_0, E=m]$ unabhängig von E_0 sein. Auch diese Ähnlichkeitsregel läßt sich durch Vergleich mit den Ergebnissen von Nagel¹⁾ und Völkel²⁾ bestätigen.

Die Winkelverteilungen $\pi[E_0, t, \delta]$ und $\gamma[E_0, t, \delta]$ sind in Abb. 15-18 für $E_0 = 3$ GeV und verschiedene Tiefen t dargestellt. Bei kleinen Tiefen t werden die Photonen unter so kleinen Winkeln emittiert, daß in einem mittleren Winkelbereich weniger Photonen auftreten als aus größeren Tiefen zurückgestreut werden¹⁾. Der Abb. 19 kann die Anzahl der Elektronen entnommen werden, die unter einem Winkel $\leq \delta$ zur Schauerachse die Ebene $Z = tX_0$ durchsetzen. Die Kurven sind normiert auf 1 Elektron in der Tiefe t (die rückgestreuten Elektronen sind mit einbezogen).

Alle Winkel- und Radialverteilungen gelten für Elektronen mit Energien $E > 1,5$ MeV bzw. Photonen mit $E > 0,25$ MeV.

V. Gesamte Elektronenweglänge

Nach Nagel¹⁾ ist die mittlere Gesamtweglänge aller Elektronen im Schauer gegeben durch

$$\overline{S[E_0, E=1,5]} = 0,0905 \cdot E_0 [X_0] \pm 0,3 \% \quad (14)$$

mit einer Halbwertsbreite von

$$\Delta S = 0,125 \sqrt{E_0}.$$

Für $E_0 = 3000$ MeV ergibt sich damit

$$\overline{S[E_0=3000; E=1,5]} = 271,5 [X_0] \pm 0,8 \quad (15)$$

$$\Delta S = 6,85 [X_0].$$

Die Monte-Carlo-Rechnung liefert im Vergleich dazu

$$\overline{S[3000; 1,5]} = 272,5 [X_0] \pm 3,5$$

$$\Delta S[3000; 1,5] = 6 [X_0].$$

VI. Energieabsorption im Bleizylinder

Unterschreiten Elektronen und Positronen an einem Ort die untere Abschneideenergie $E_a^e = 1,5$ MeV, so geben die Elektronen dort ihre restliche kin. Energie und die Positronen noch zusätzlich die doppelte Ruheenergie ab. Aus der gesamten Energieabgabe aufgrund von Ionisation und Unterschreiten der Abschneideenergie läßt sich dann der Anteil der Primärenergie ermitteln, der aus einem Bleizylinder mit dem Radius r und der Länge t austritt (s. Abb. 20). Zu diesen Werten muß noch der durch die Eintrittsebene zurückgestreute Energieanteil addiert werden, für den die Rechnung 0,223 % der Primärenergie ergibt.

In Fig. 21 sind isoenergetische Kurven dargestellt, aus denen sich Länge t und Radius r für Bleizylinder ermitteln lassen, die einen vorgegebenen Prozentsatz der Primärenergie absorbieren. Nach Nagel¹⁾ sind diese Kurven in 1. Näherung unabhängig von E_0 ,

wenn man r gegen $\frac{t}{\ln E_0}$ aufträgt. Ein Vergleich mit den Ergebnissen für $E_0 = 6^0 \text{ GeV}$ von Völkel bestätigt diese Regel.

Mein besonderer Dank gilt Frau Dr. U. Völkel für die Überlassung des Monte-Carlo-Programms und für klärende Hinweise bei der Auswertung der Ergebnisse.

Erläuterungen zu den Abbildungen

Fig. 1: Integrale Elektronenspektren $\Pi(E_0, E, t)$ für die Abschneideenergien $E = 1,5; 10, 30, 50, 100, 200, 400$ MeV.

Fig. 2: Integrale Photonenspektren $\Gamma(E_0, E, t)$ für die Abschneideenergien $E = 0,25; 1,5; 2,5, 10, 20, 30, 60, 100, 200, 400$ MeV.

Fig. 3a: $b(E)$ zur Bestimmung des Maximums der integralen Elektronenspektren nach

$$\Pi_{\max}(E_0, E) = 0,082 \frac{E_0}{E+14,8} + b(E)$$

Fig. 3b: $b'(E)$ zur Ermittlung des Maximums der integralen Photonenspektren nach

$$\Gamma_{\max}(E_0, E) = 0,098 \frac{E_0}{E+1,96} + b'(E)$$

Fig. 4: $t_{\max}^e = 1,11 \ln E_0 + C(E)$ in Abhängigkeit von der Abschneideenergie E .

Fig. 5-6: Diff. Radialverteilung $\pi[E_0; E=1,5; t, r]$ der Elektronen, angegeben für die Tiefen $t = 2, 3, 5, 8 [X_0]$ bzw. $t = 10, 12, 15, 18 [X_0]$ für Elektronenenergien oberhalb $E = 1,5$ MeV.

Fig. 7-8: Diff. Radialverteilung $\gamma[E_0; E=0,25; t, r]$ für Photonen mit $E > 0,25$ MeV und Tiefen $t = 1, 3, 6, 8 [X_0]$ und $t = 12, 15, 18, 20 [X_0]$.

Fig. 9: Integrale Radialverteilung $W_e[E_0; E=1,5; t, r]$ für Elektronen mit $E > 1,5$ MeV (normiert auf 1 Elektron in Vorwärtsrichtung) für die Tiefen $t = 2; 4, 5; 6, 9, 12, 15, 20 [X_0]$.

- Fig. 10: Integrale Radialverteilung $W_{\gamma}[E_0; E=0,25; t, r]$ für Photonen ($E > 0,25$ MeV und normiert auf 1 Photon in Vorwärtsrichtung) für die Tiefen $t = 2; 4, 5; 6, 9, 12, 15, 17, 20[X_0]$.
- Fig. 11: Energiespektren der Elektronen $\pi[E_0, E, t]$ für die Tiefen $t = 2; 4, 5; 8, 12, 15, 20[X_0]$.
- Fig. 12: Energiespektren $\gamma[E_0, E, t]$ für Photonen und $t = 1, 5, 10, 18, 25, 30, 35[X_0]$.
- Fig. 13: Integrale Energieverteilung der Elektronen, d.h. die Anzahl Elektronen mit Energien zwischen $E_a^e = 1,5$ MeV und E in den Tiefen $t = 4, 5; 7, 10, 13, 15, 19[X_0]$ (normiert auf 1 Elektron in Vorwärtsrichtung).
- Fig. 14: Integrale Energieverteilung für Photonen mit Energien zwischen $E_a^{\gamma} = 0,25$ MeV und E für $t = 4, 5; 7, 10, 13, 15, 19[X_0]$ (normiert auf 1 Photon in Vorwärtsrichtung).
- Fig. 15-16: Elektronenwinkelverteilungen $\pi[E_0, t, \delta]$ für $E > 1,5$ MeV und Tiefen $t = 1, 5; 3, 6$ und $t = 12, 15, 18, 20[X_0]$.
- Fig. 17-18: Photonwinkelverteilungen $\gamma[E_0, t, \delta]$ für $E > 0,25$ MeV und $t = 1, 5; 3; 4, 5; 6, 10[X_0]$ bzw. $t = 12, 15, 18, 20[X_0]$.
- Fig. 19: Integrale Winkelverteilungen für Elektronen (d.h. Anzahl der Elektronen mit einem Winkel kleiner als δ zur Schauerachse) für $t = 4, 5; 10, 20[X_0]$, normiert auf 1 Elektron in der Tiefe t (gültig für $E > 1,5$ MeV).
- Fig. 20: Prozentualer Anteil der Energie, der aus einem Bleizylinder der Länge $t[X_0]$ und des Radius $r[X_0]$ austritt.
- Fig. 21: Isoenergetische Kurven für 95 %, 96 %, 97 %, 98 %, 99 % und 99,9 % Absorption der Primärenergie E_0 .

Referenzen

- 1) H.-H. Nagel, Dissertation Bonn 1964, Z. f. Phys. 186, 319 (1965).
- 2) U. Völkel, DESY 65/6 (1965).
- 3) B. Rossi, High-Energy Particles, Prentice Hall Inc. New York 1952.
- 4) K. Ott, Z. Naturf. 9a, 488 (1954).
- 5) $\pi[E_0, E, t, r, \delta] \cdot 2rdrdEd(\cos\delta)$ bedeutet die Anzahl der Elektronen mit einer Energie $E+dE$ in der Tiefe $Z = tX_0$, einem Abstand $r+dr$ von der Schauerachse und einem Winkel $\delta+d\delta$ zwischen Teilchenimpuls und Schauerachse. E_0 ist die Primärenergie.

$\gamma[E_0, E, t, r, \delta] \cdot 2rdrdEd(\cos\delta)$ ist die entsprechende Anzahl der Photonen.

- 6) Die Interpolationsformeln sind gewonnen worden aus der allgemeinen Darstellung (s. Nagel)

$$\Pi_{\max}(E_0, E) = a(E)E_0 + b(E)$$

mit $a(E) = C/(E+d)$, (C und d sind Konstanten).

- 7) Das Kreisringelement hat hier die Größe $2rdr$; der Faktor π ist in die Funktion $\pi[E_0, t, r]$ bzw. $\gamma[E_0, t, r]$ einbezogen.
- 8) Der Faktor $|\cos\delta|^{-1}$ berücksichtigt, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen der Impulsrichtung $\cos\delta$, die Ebene $Z = tX_0$ zu durchsetzen, proportional zu $|\cos\delta|$ ist.

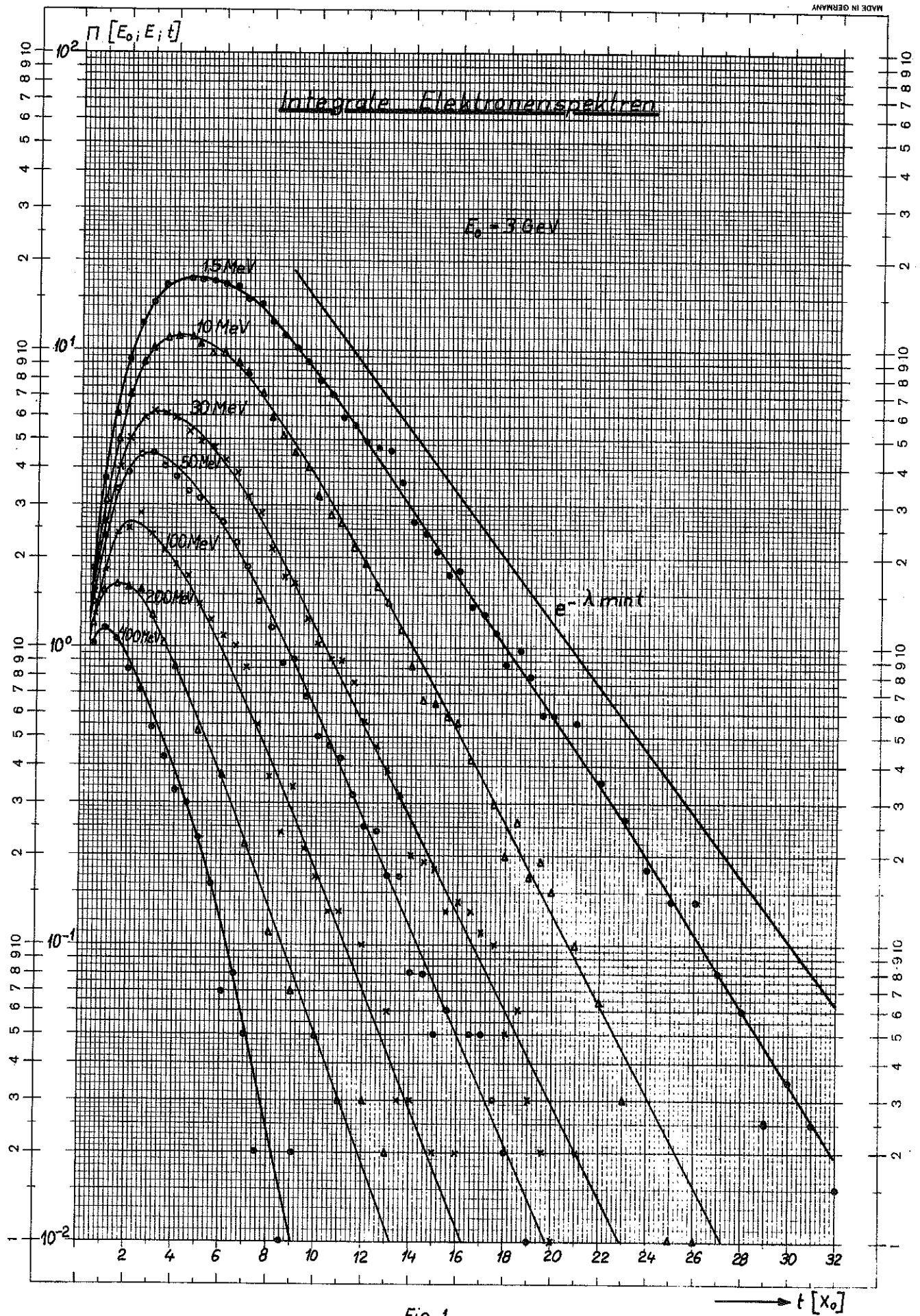


Fig. 1

→ $t [X_0]$

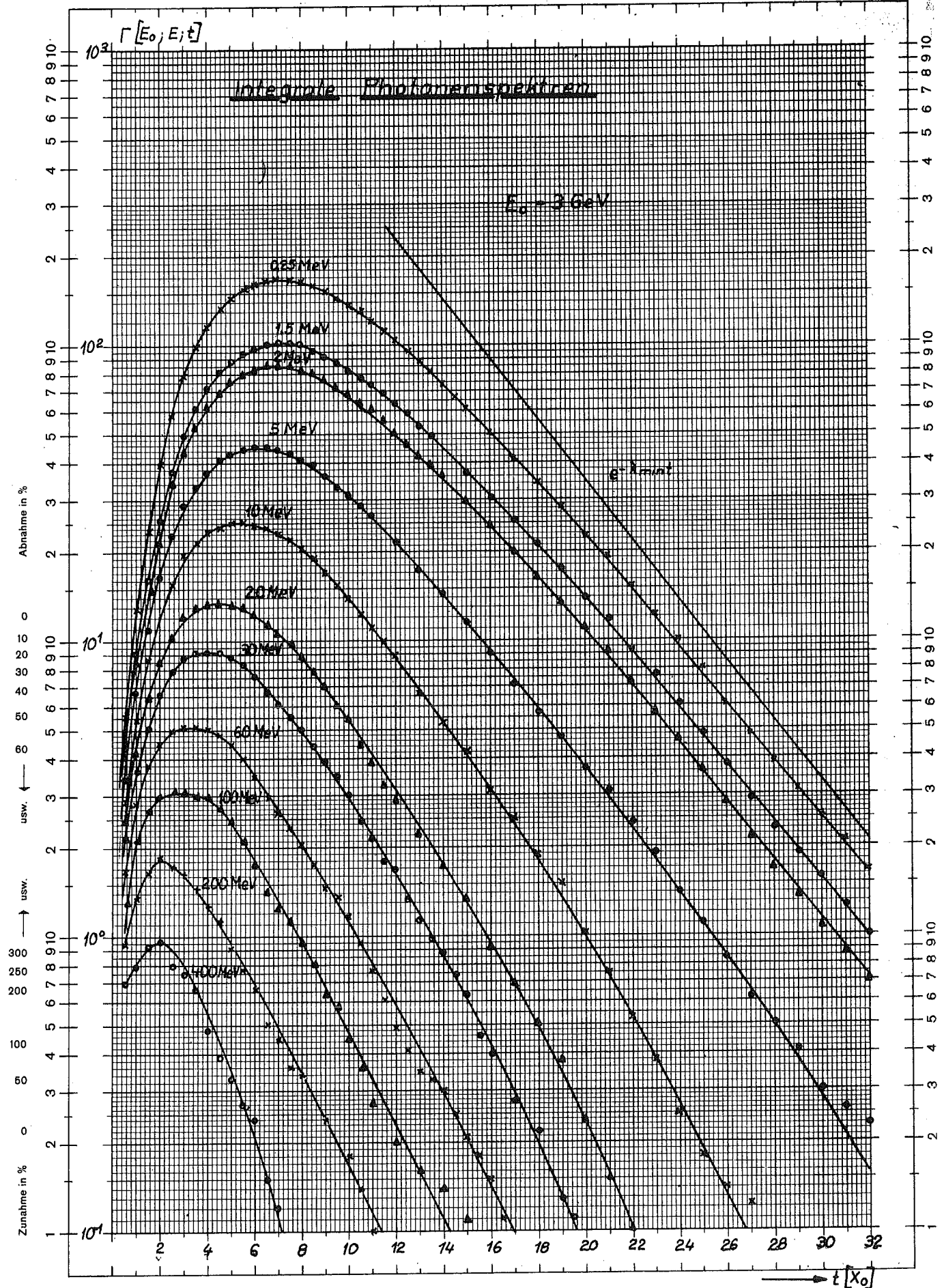
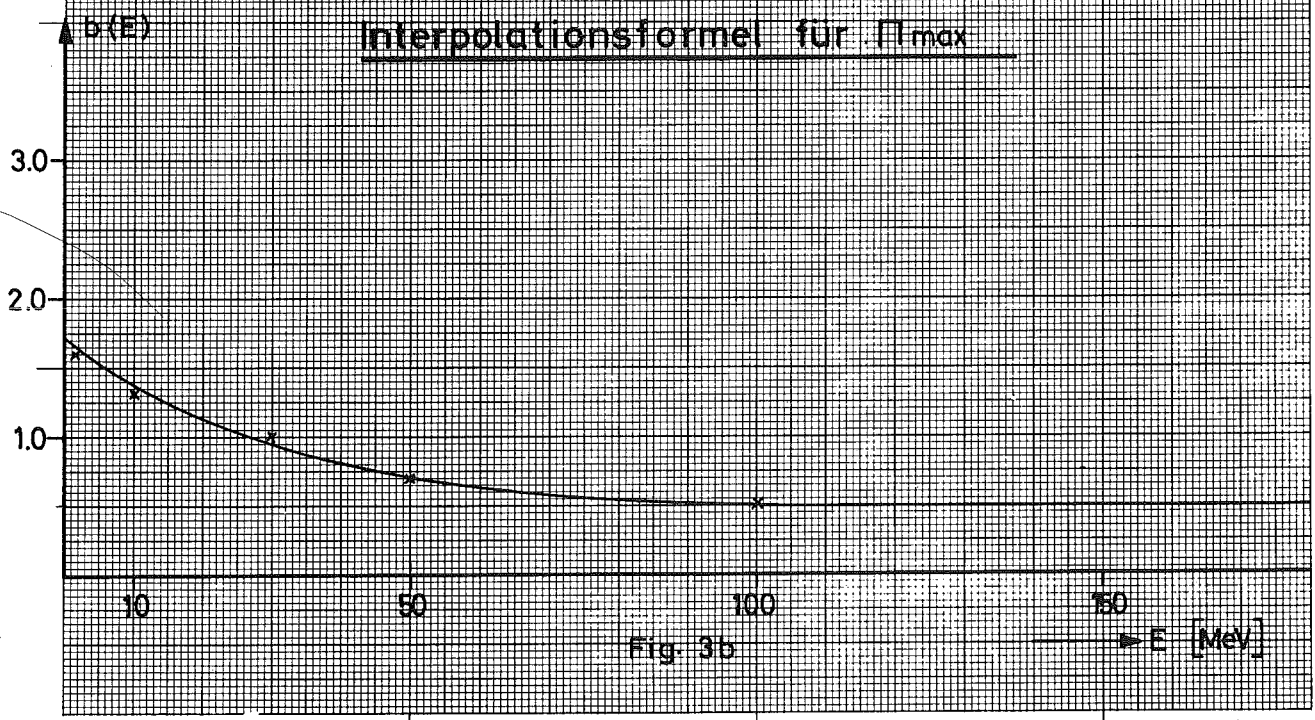
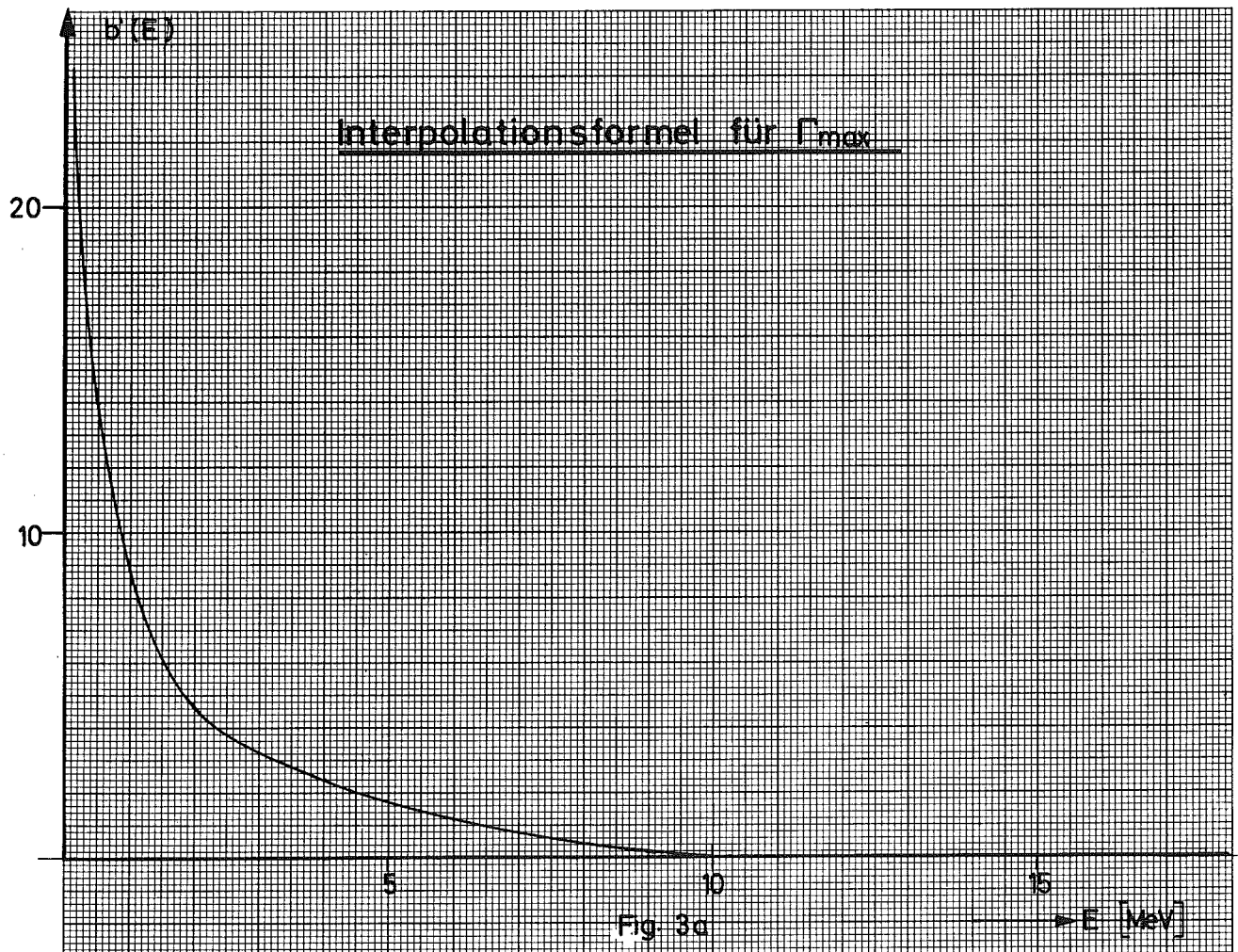
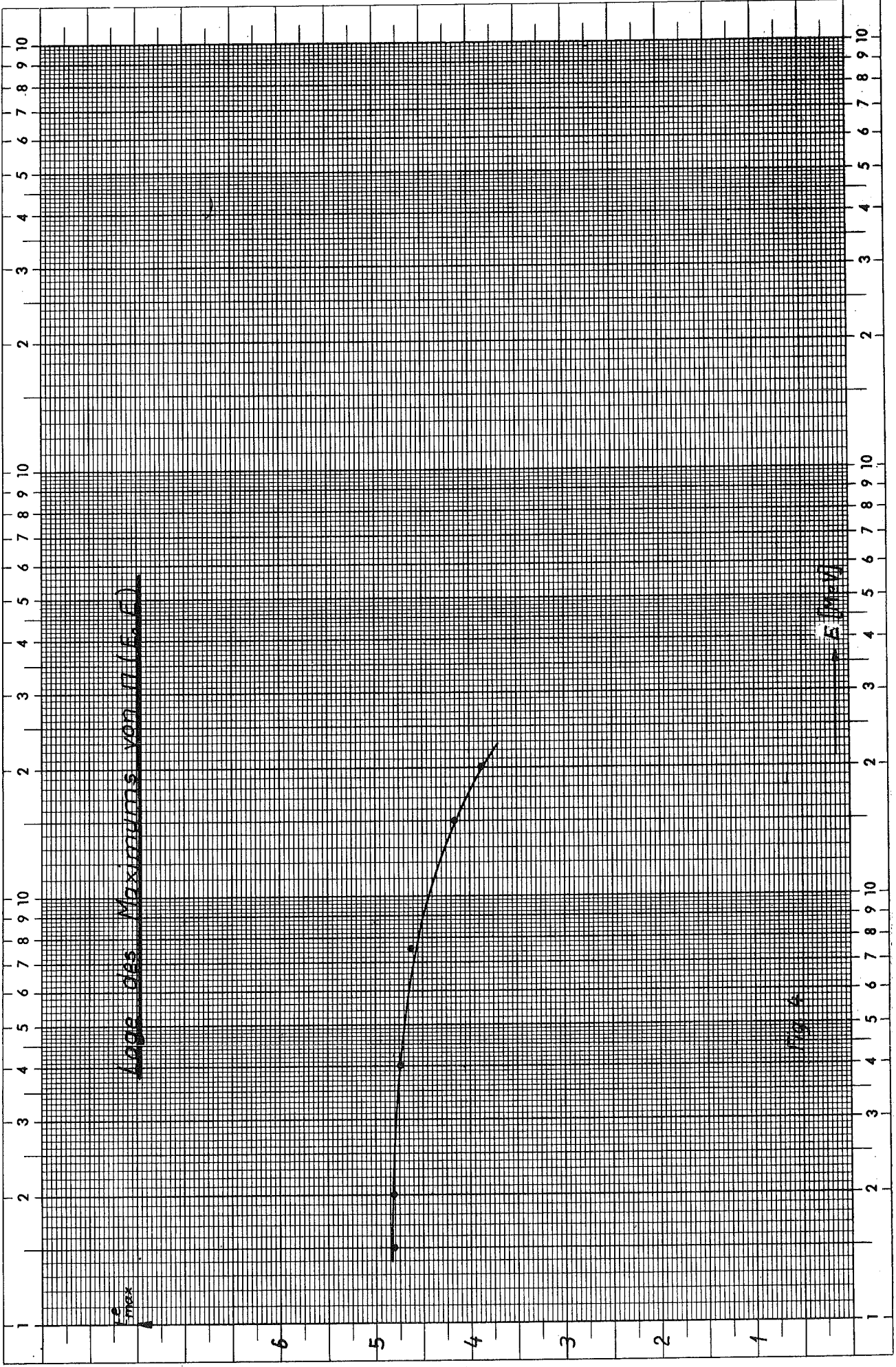


Fig. 2





Loge des Maximums von $\Pi(t, \tau)$

Fig. 4

5 (mm)

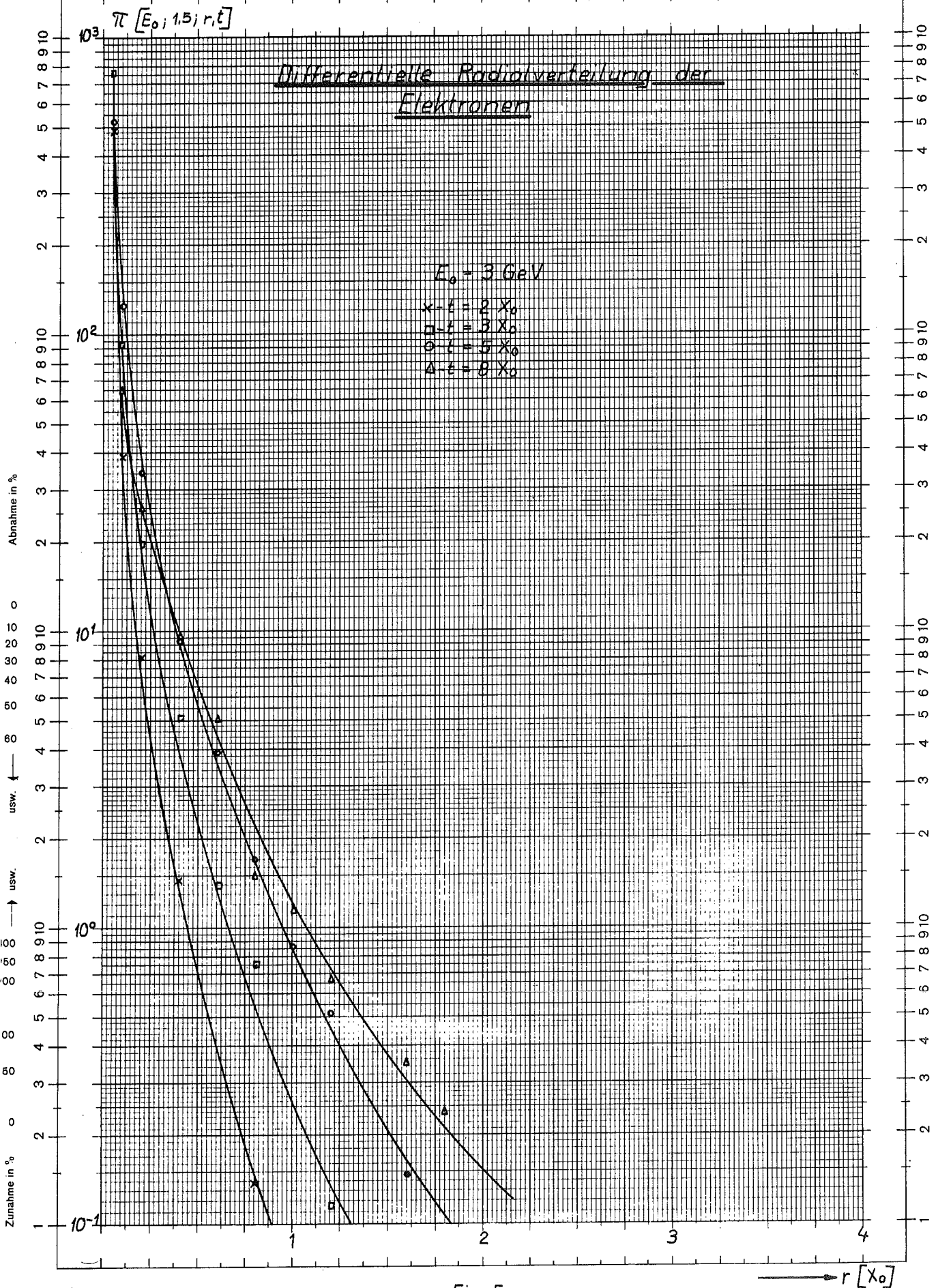


Fig. 5

→ r [X₀]

$\tau [E_0, E=15, t, r]$

Differentielle Radialverteilung der Elektronen

$E_0 = 3 \text{ GeV}$

x - $t = 10 X_0$

● - $t = 12 X_0$

△ - $t = 15 X_0$

□ - $t = 18 X_0$

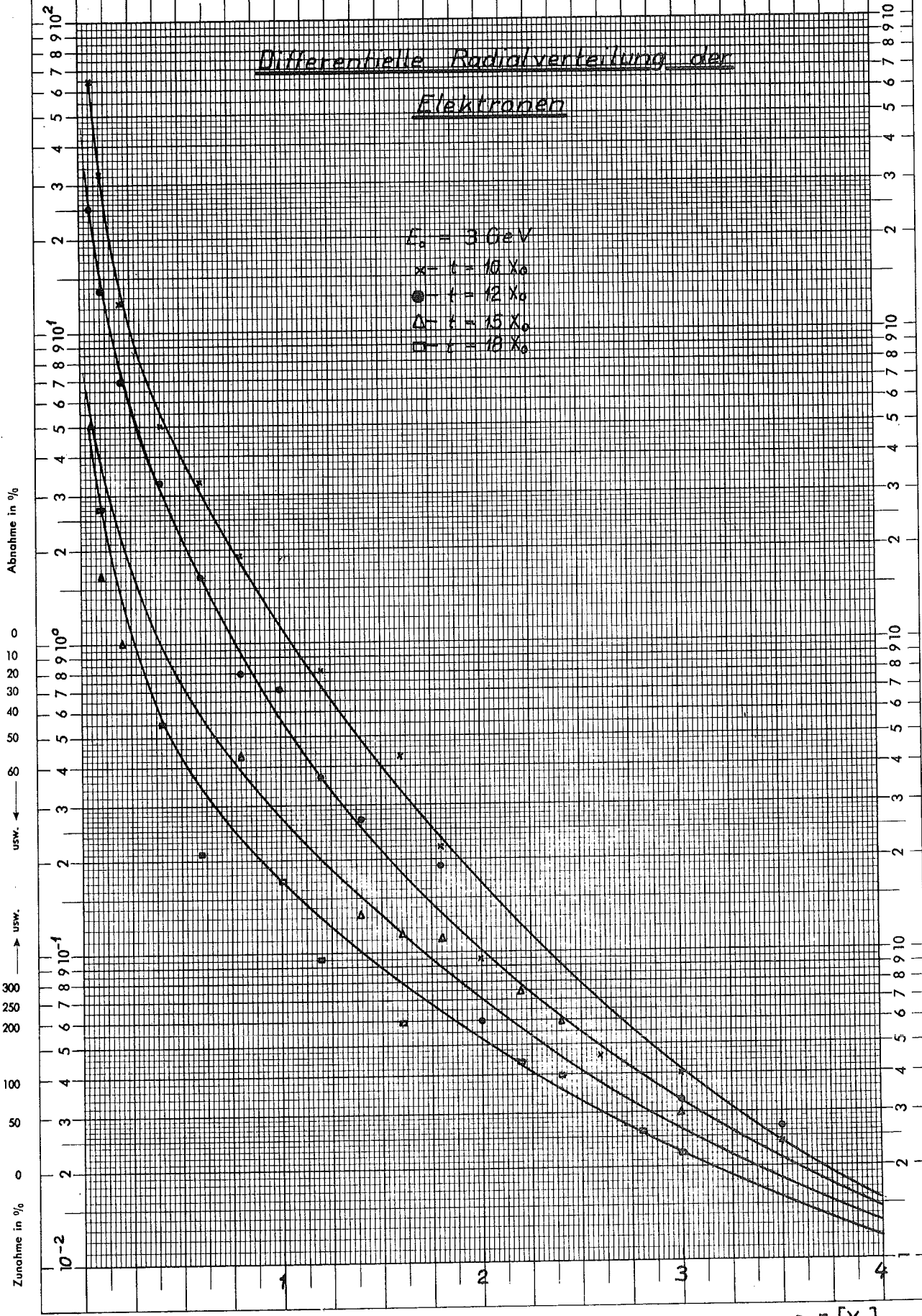


Fig. 6

→ $r [X_0]$

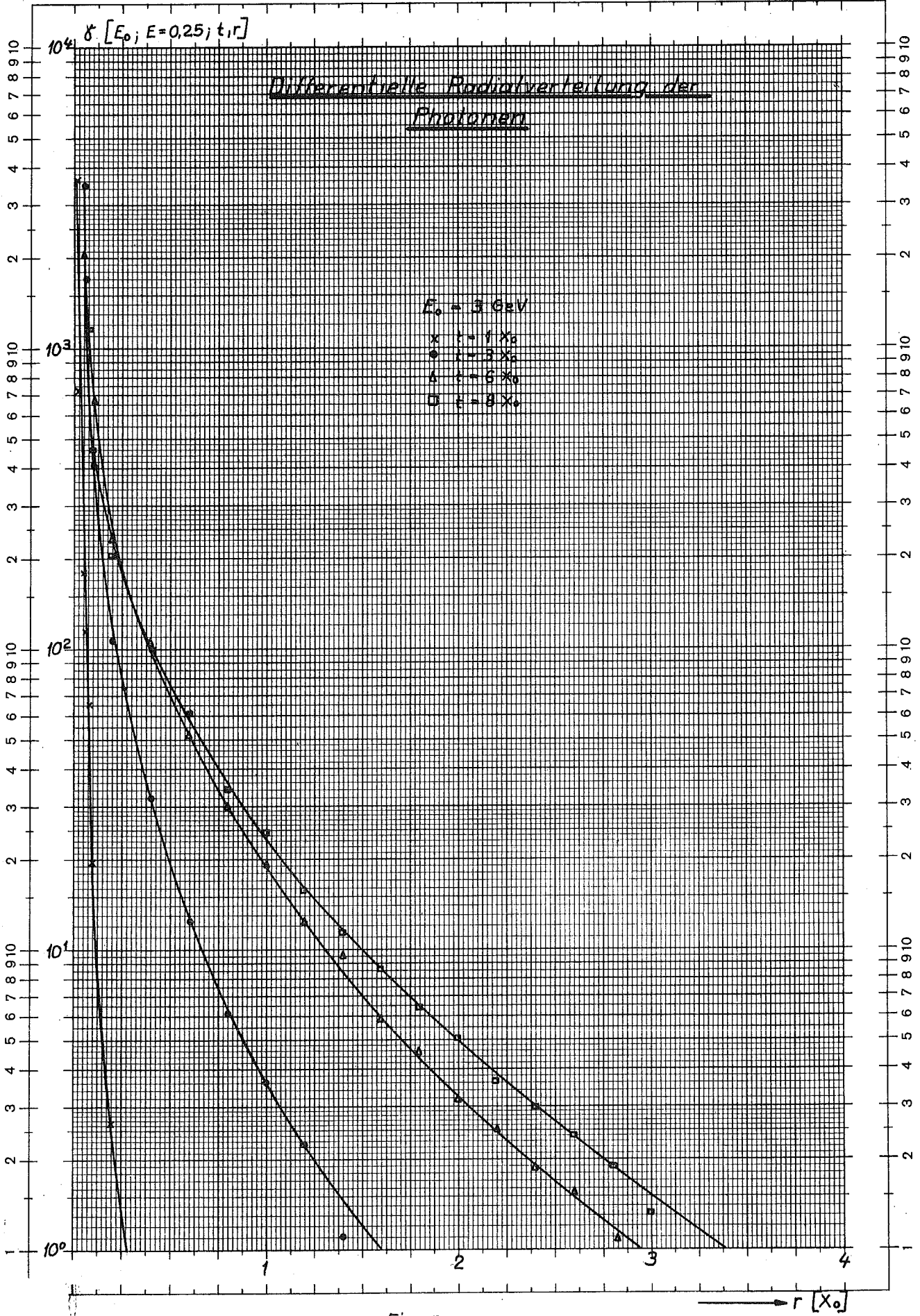


Fig. 7

$\delta [E_0, E = 0,25; t, r]$

Differentielle Radialverteilung der Photonen

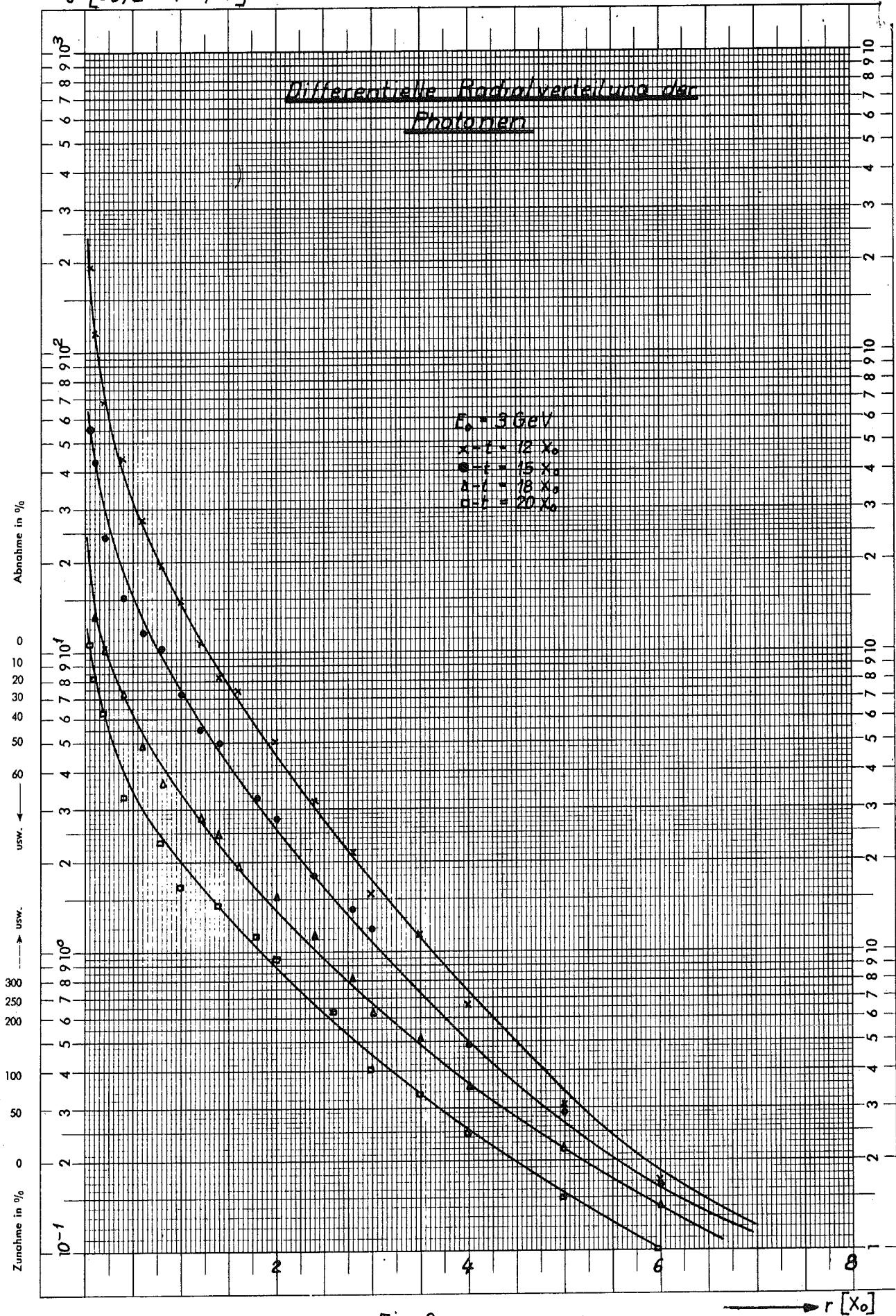


Fig. 8

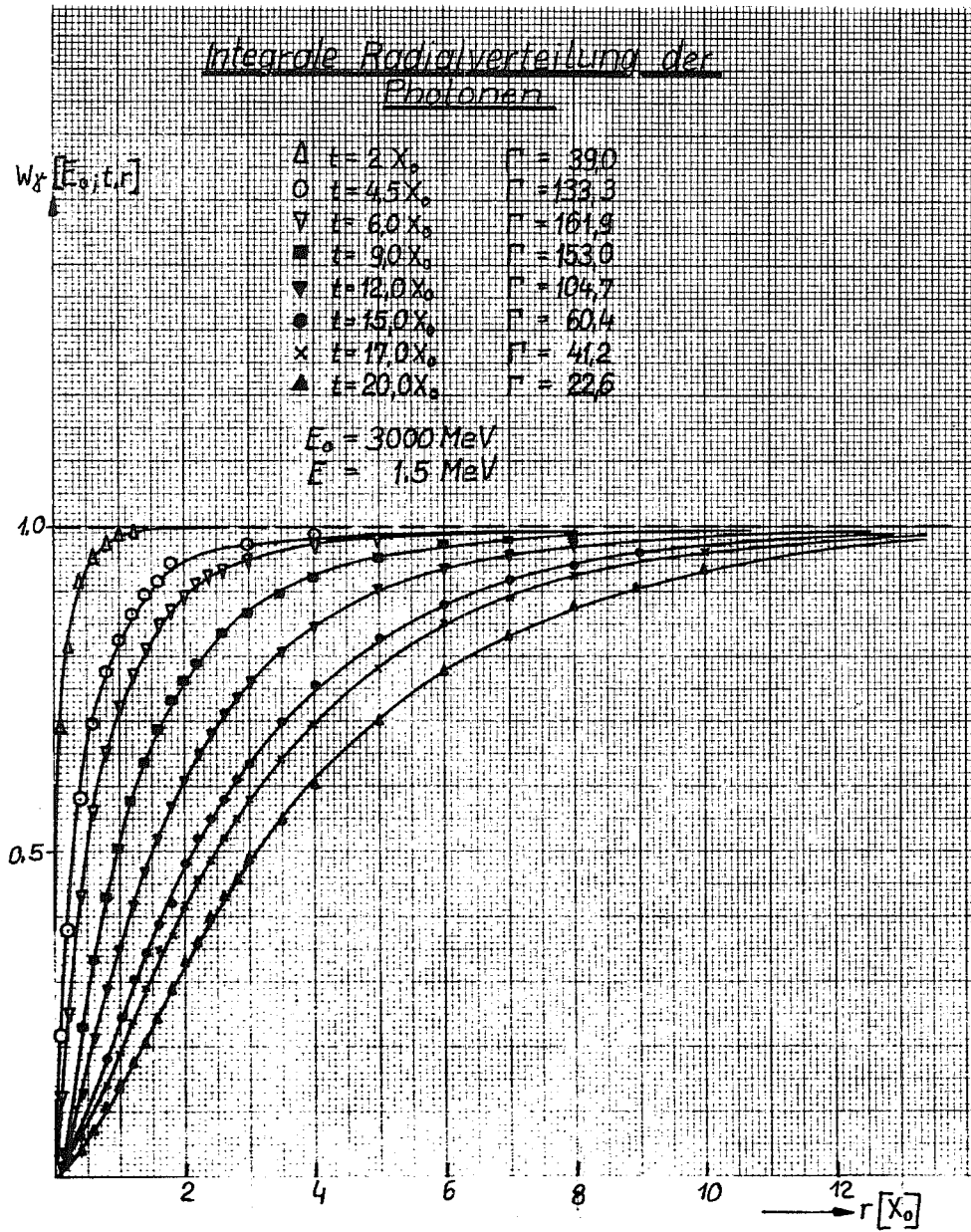


Fig.10

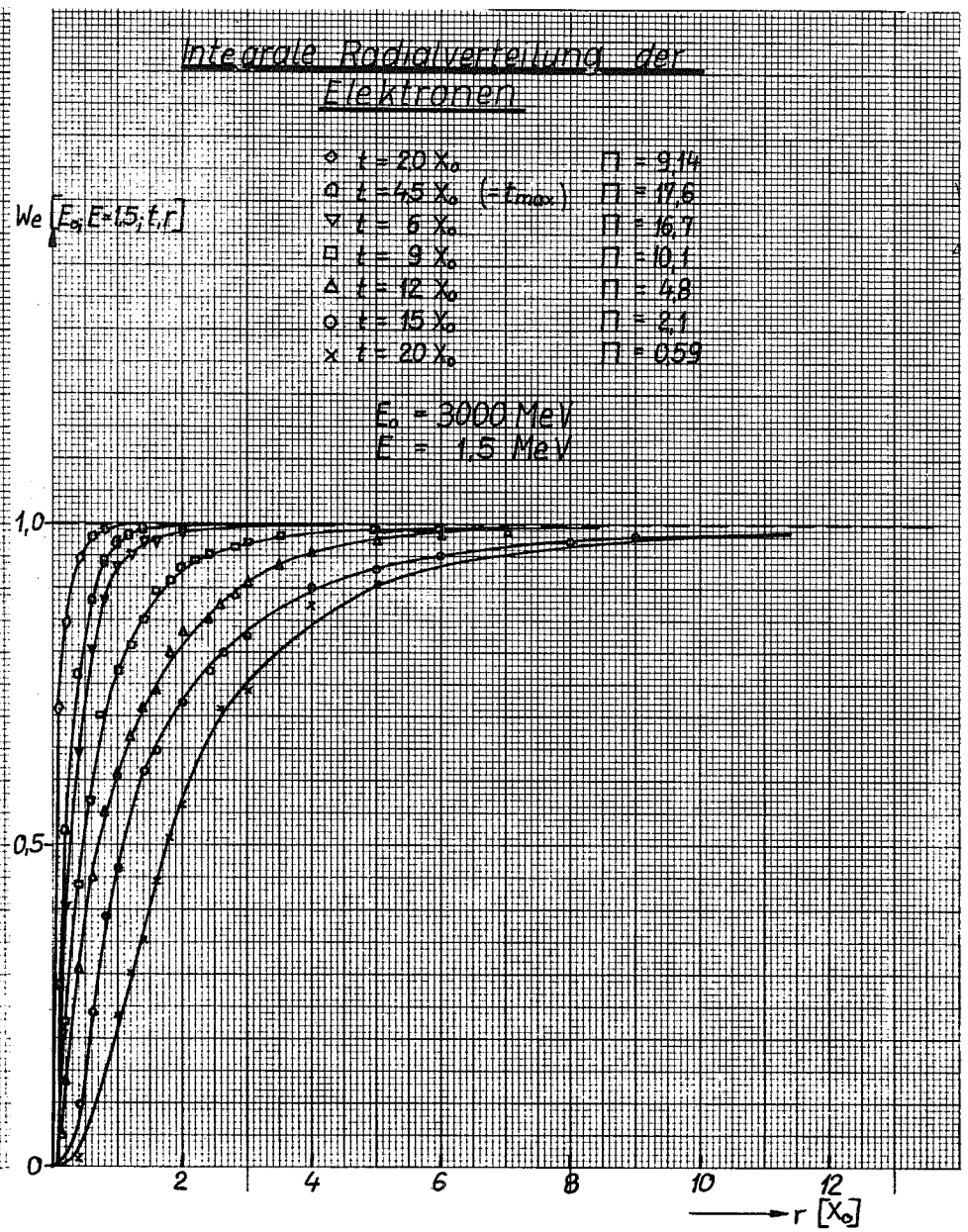


Fig. 9

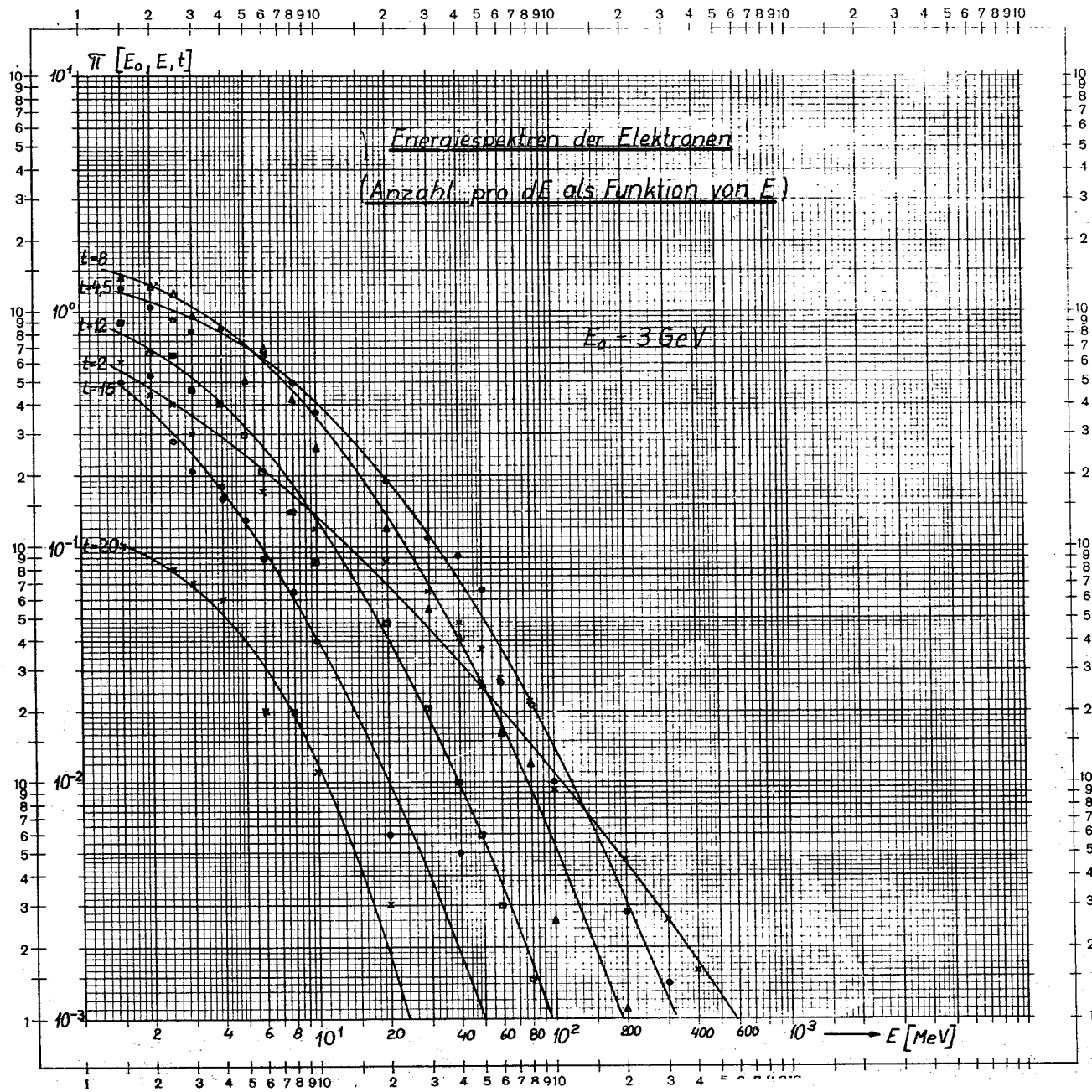


Fig. 11

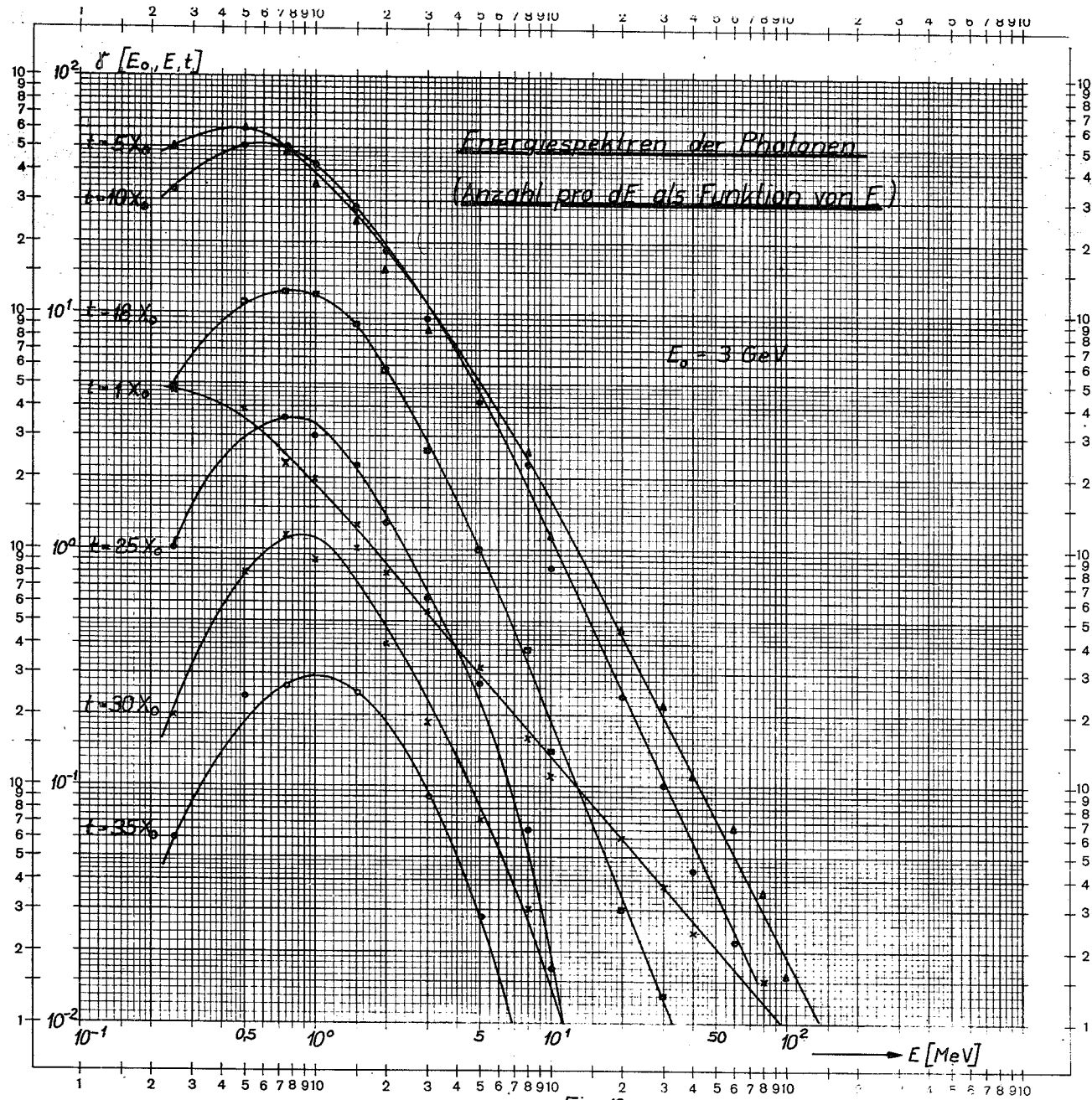
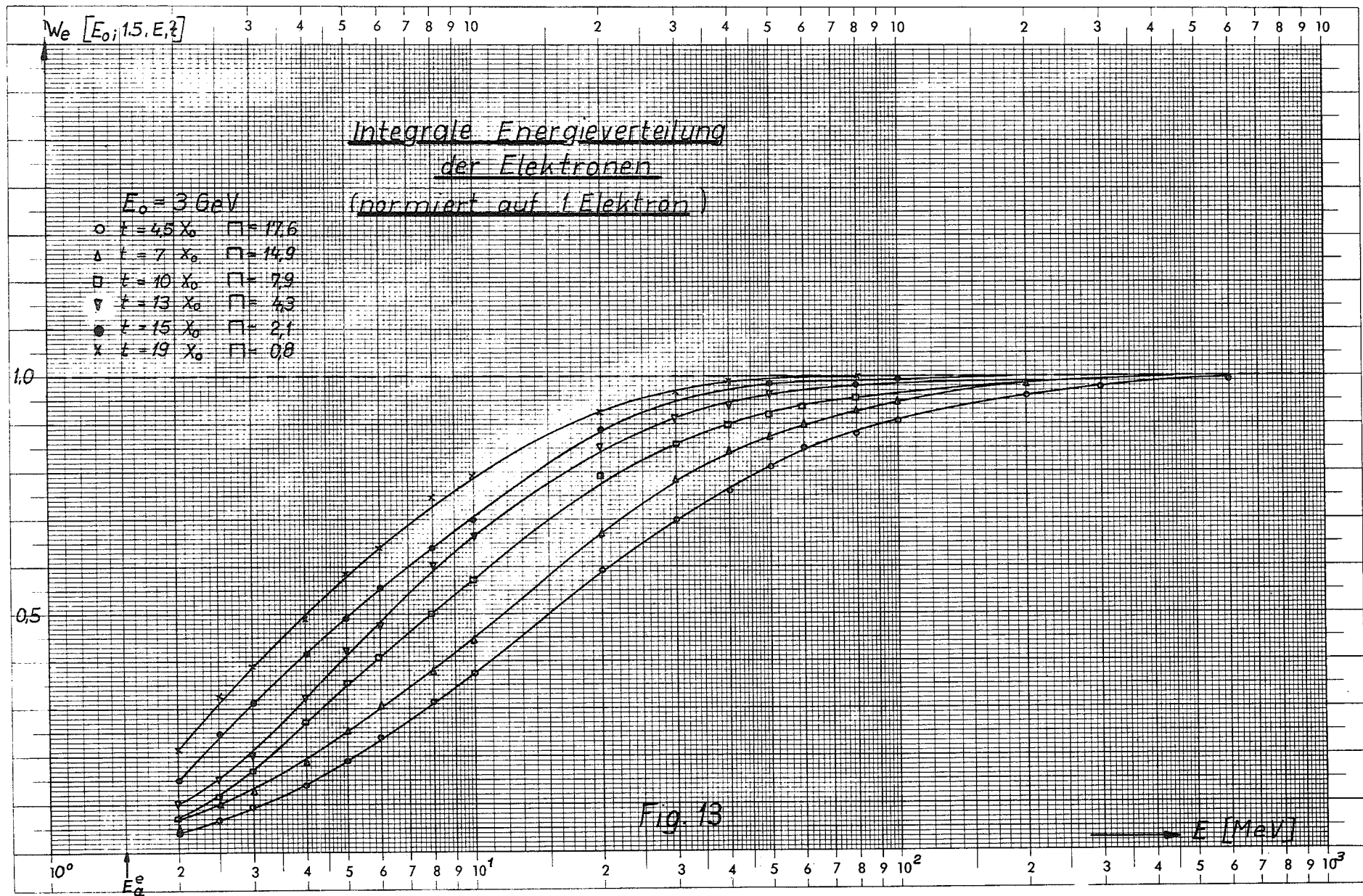


Fig. 12



Zunahme in % 0 5 10 20 30 usw. → usw. ← 5 5 5 5 10 20 30 0 Abnahme in %

$W_p [E_0, 0.25, E]$

$E_0 = 36 \text{ GeV}$

x	t = 45 s	$F = 133$
o	t = 7 s	$F = 1697$
A	t = 10 s	$F = 380$
□	t = 15 s	$F = 880$
•	t = 15 s	$F = 604$
γ	t = 19 s	$F = 283$

Integrale Energieverteilung
der Photonen
(normiert auf 1 Photon)

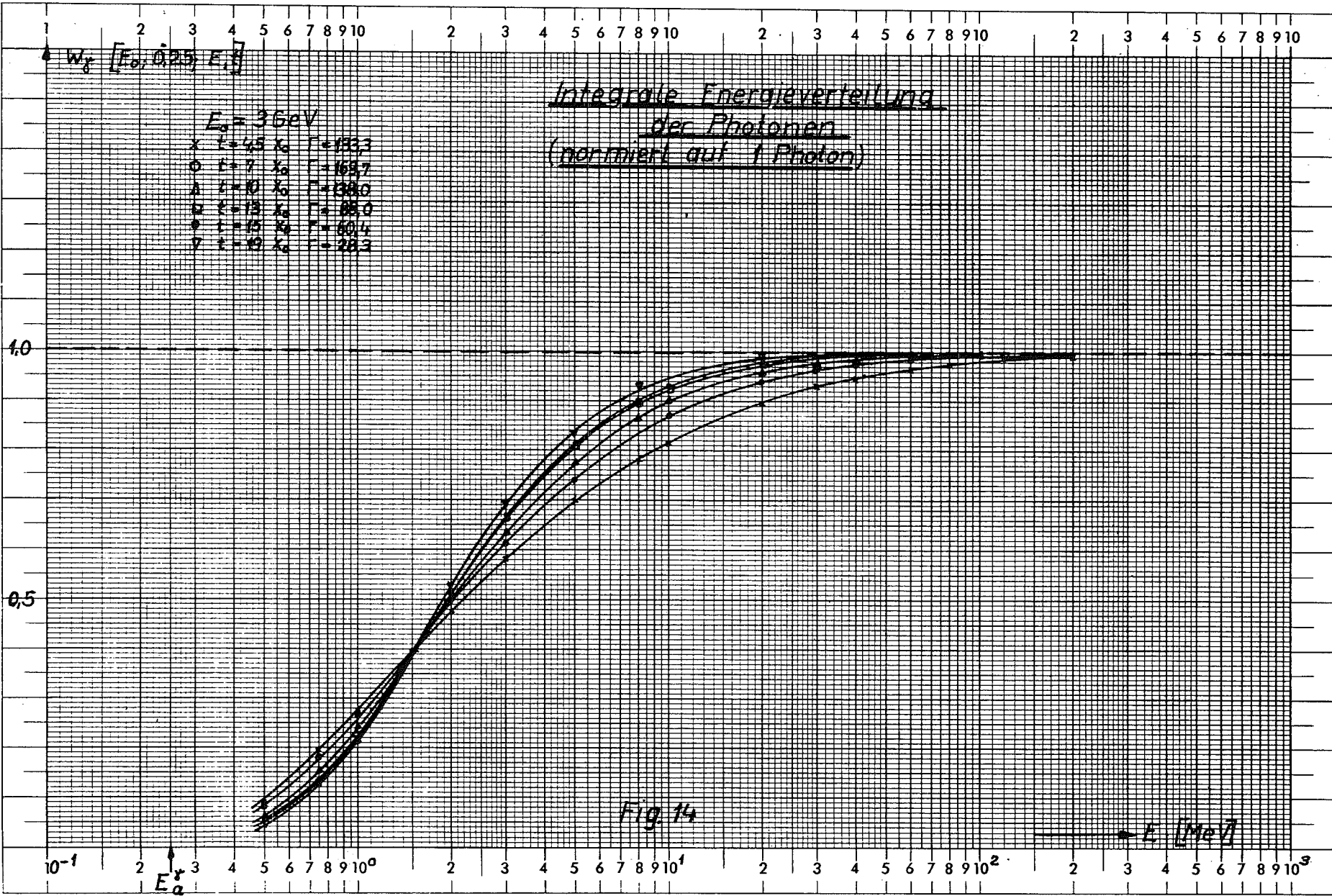


Fig 14

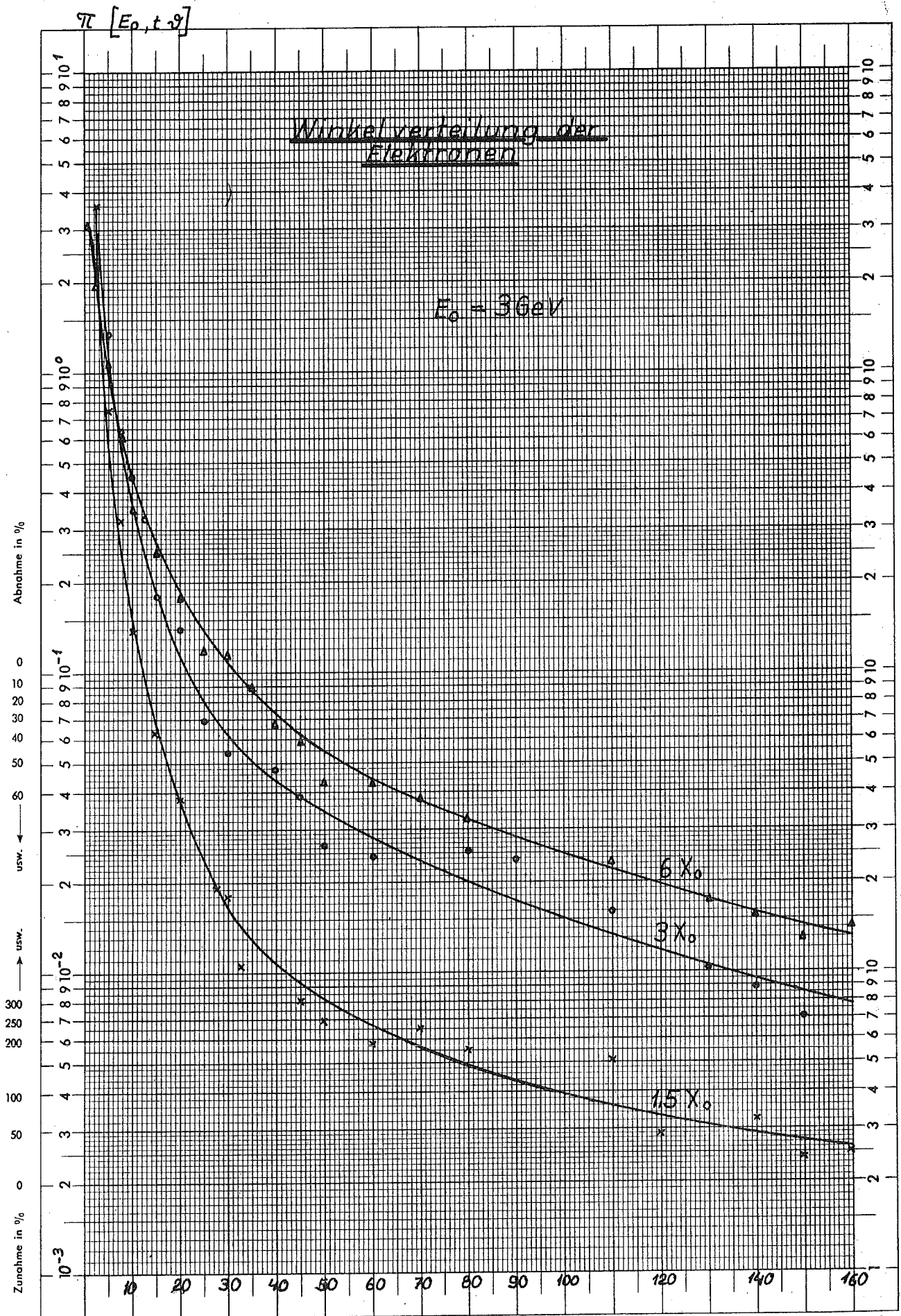


Fig. 15

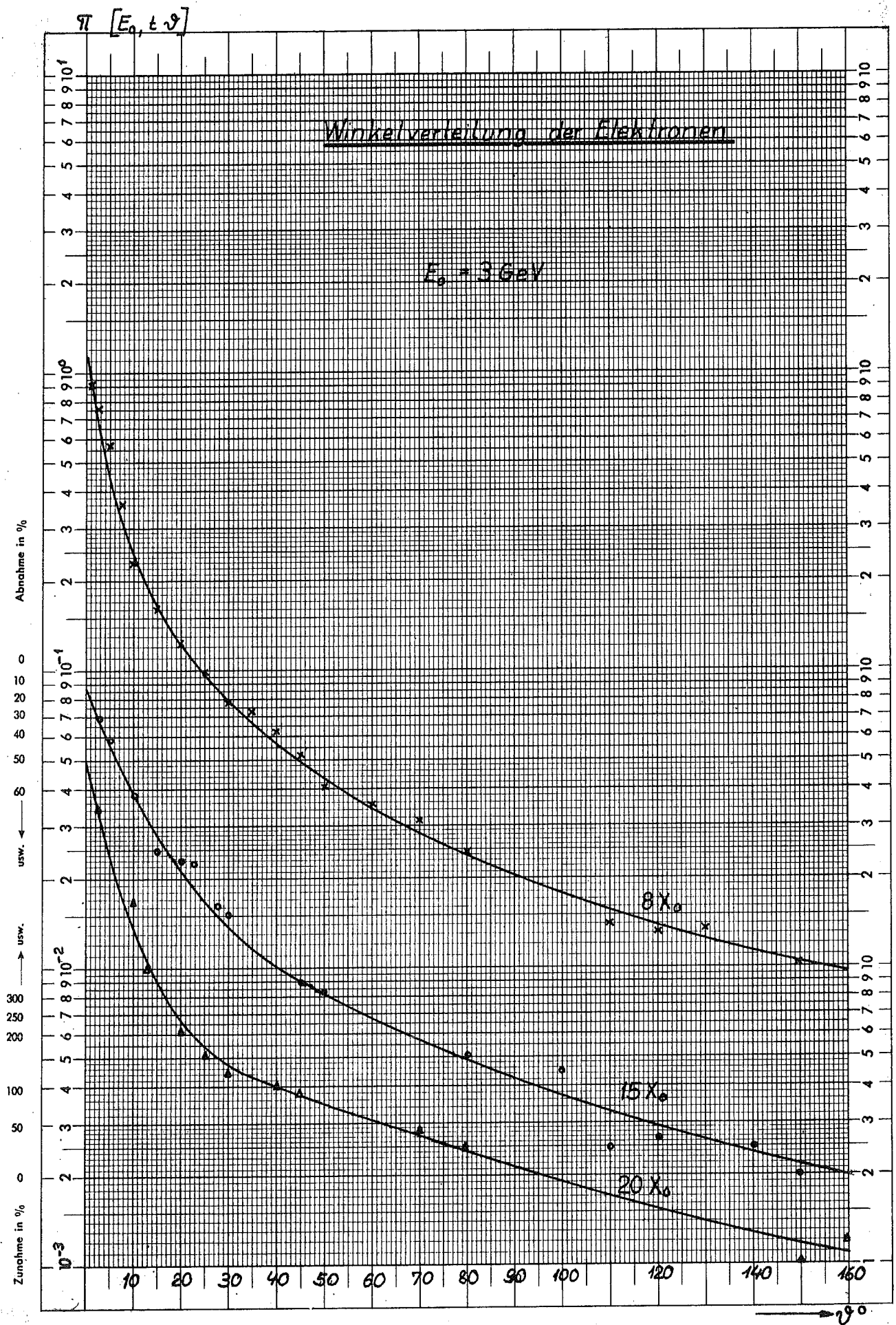


Fig. 16

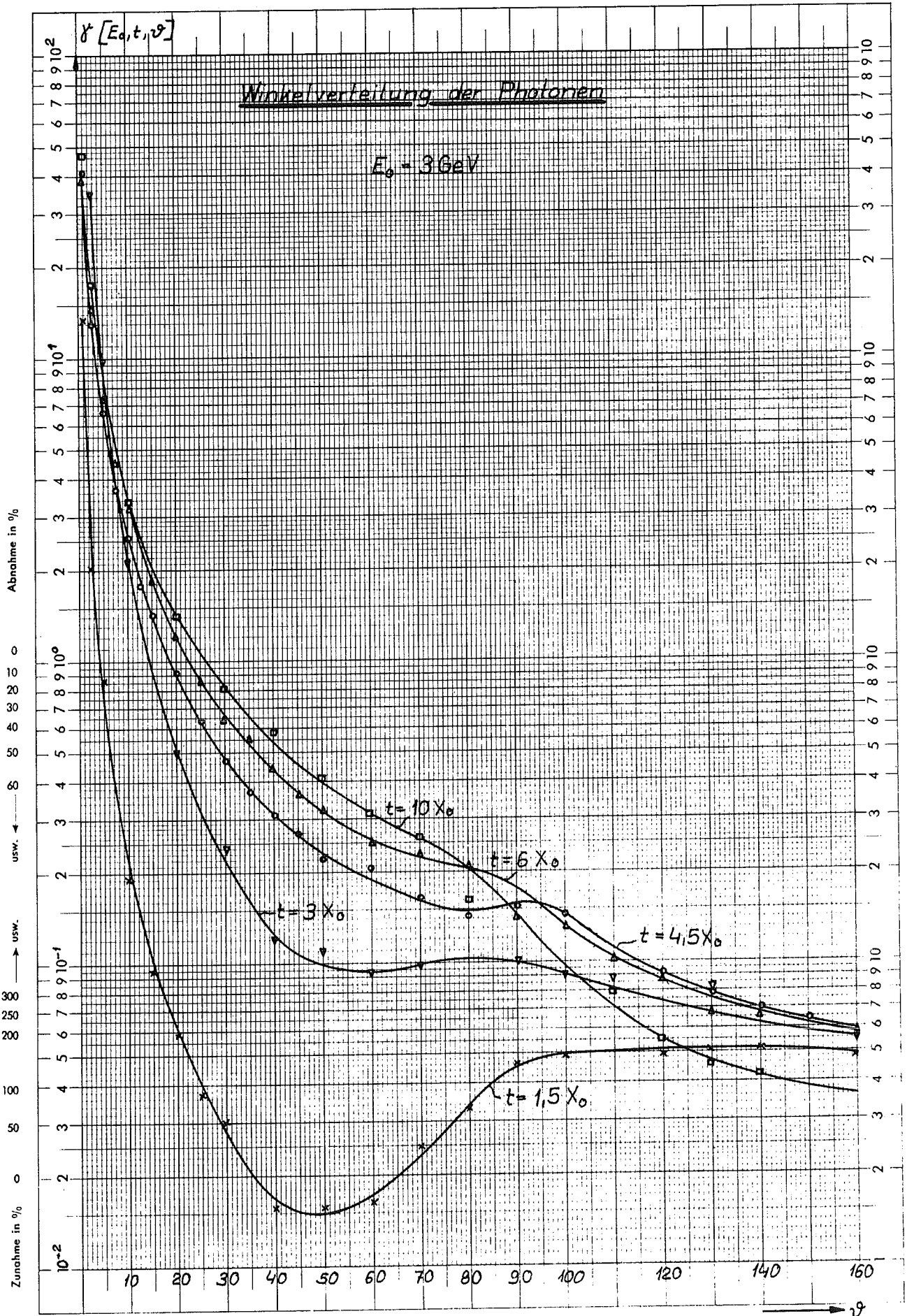


Fig. 17

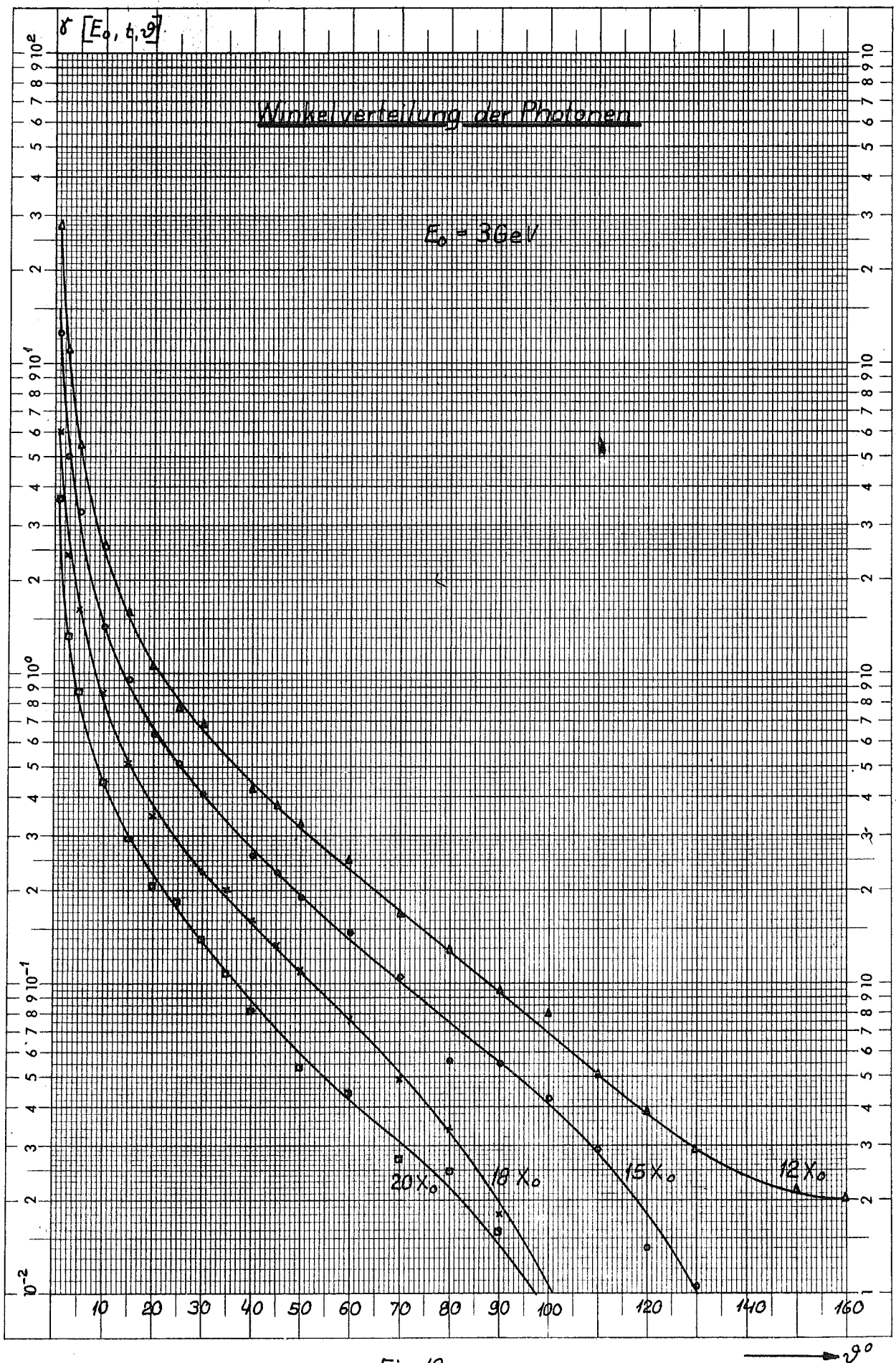
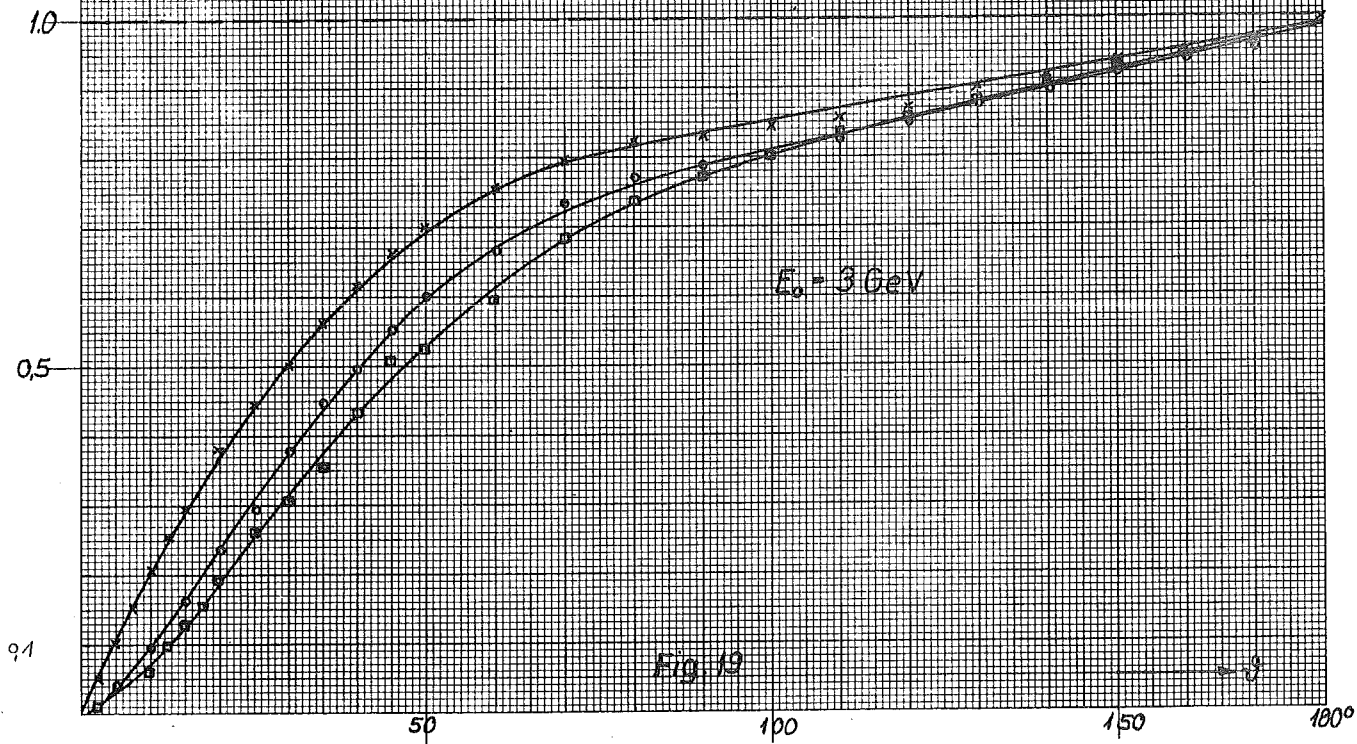


Fig. 18

Integrale Winkelverteilung der Elektronen
(normiert auf 1 Elektron)

$N_e [E_0, E=15; t, \theta]$

x	$t = 4,5 X_0$ [MAX]	$\Gamma_{gas} = 20,7$
o	$t = 10 X_0$	$= 10,0$
□	$t = 20 X_0$	$= 0,75$



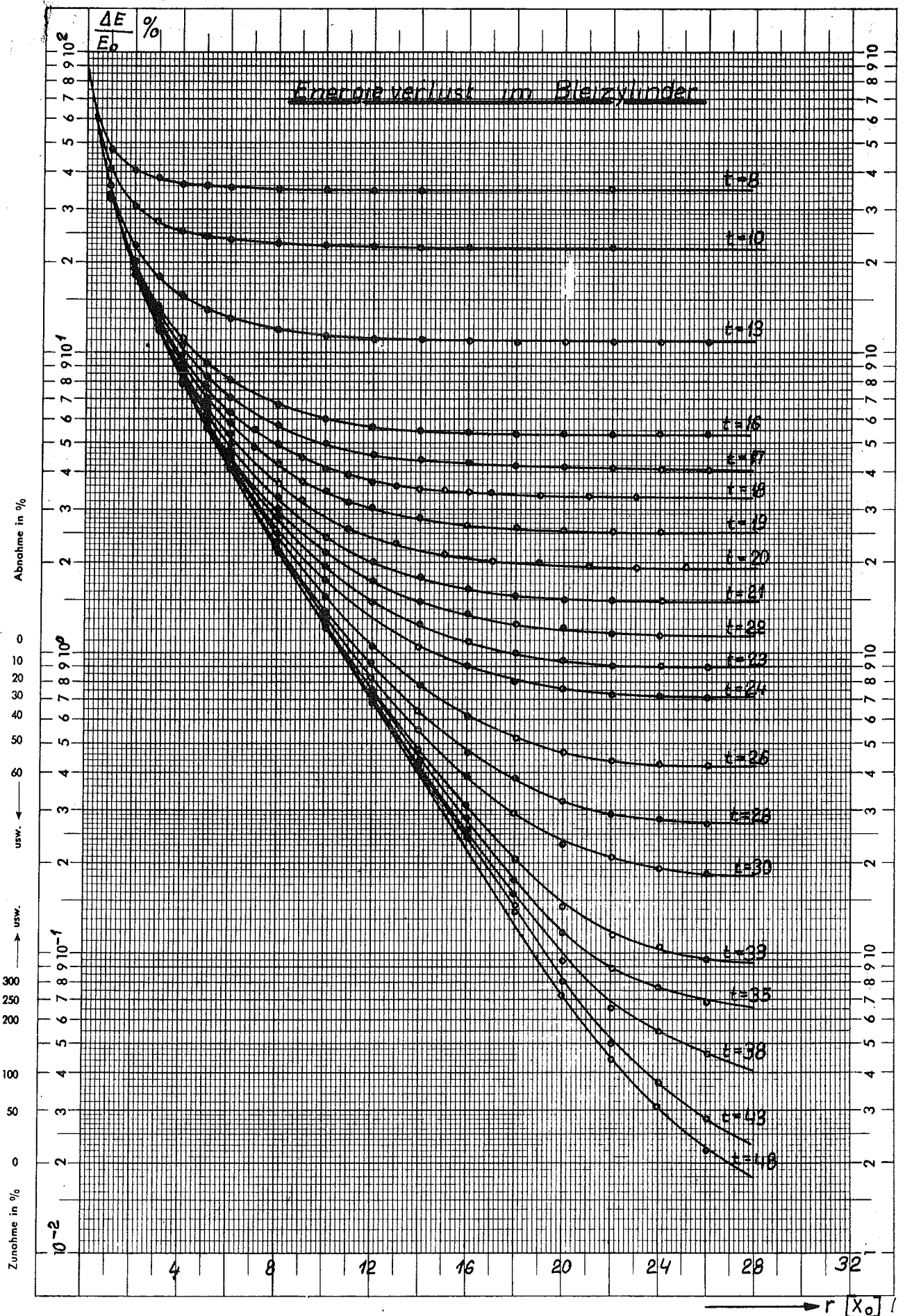


Fig. 20

Energiespeicherung im
Blitzylinder

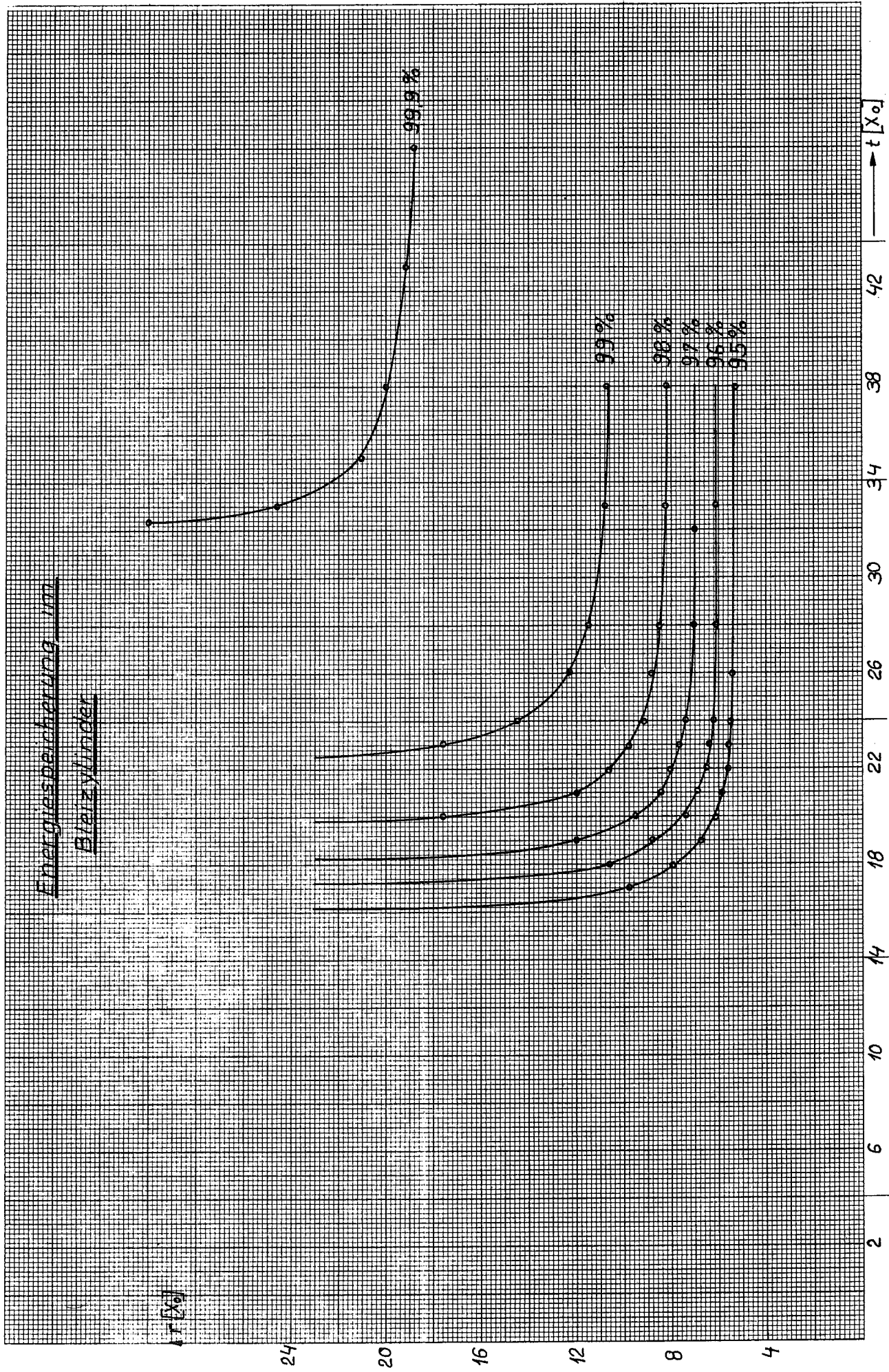


Fig 21

