

Bibliothek

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON

DESY

DESY 67/25
August 1967

DESY-Bibliothek
18. SEP. 1967

Über die statistische Beschreibung
hochenergetischer Vielteilchenerzeugungsreaktionen

von

Helmut Satz

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY
Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

Über die statistische Beschreibung
hochenergetischer Vielteilchenerzeugungsreaktionen

von

Helmut Satz
Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY
Hamburg

Hamburg
Juli 1967

Summary:

The description of many particle production processes by means of statistical models is investigated, with particular attention paid to the inclusion of angular momentum conservation in addition to that of energy and momentum. In part I we formulate the classical and quantum-mechanical phase space with full kinematics (all ten additive conservation laws) and discuss its evaluation using the central limit theorem of statistics. The corresponding extension of the (Fermi) statistical model is carried out in part II; we then apply the model thus obtained to find predictions about integral and differential quantities both for inelastic and for the coupled elastic reactions. Finally we discuss the general limits and possibilities of a statistical treatment of production reactions.

I n h a l t

	Seite
I. Einleitung	1
II. Der Phasenraum mit voller Kinematik	9
A. Der klassische relativistische Phasenraum	9
B. Der quantenmechanische relativistische Phasenraum	17
C. Zur Berechnung von Phasenraumintegralen	26
III. Das statistische Modell	
A. Zum "Feuerball"-Bild	41
B. Einige allgemeine Ergebnisse für inelastische Reaktionen	47
1. Integrierte Größen	47
2. Die Transversalimpulsverteilung der Sekundärteilchen	51
C. Elastische Streuung	55
IV. Abschließende Bemerkungen	59
Anhang	63
Literatur.....	67

I. Einleitung

Ein inelastischer Stoßprozeß zweier stark wechselwirkender Teilchen führt mit steigender Einschußenergie zur Erzeugung einer immer größeren Zahl von Sekundärteilchen: diese Tatsache legt von einer gewissen Energie an eine statistische Behandlung solcher Reaktionen nahe. In einem Energiebereich, in dem Drei- und Viertelteilchenkanäle dominieren, läßt sich die Reaktion oft noch näherungsweise mit analytischen Methoden beschreiben oder durch ein effektives Zweiteilchenproblem mit stark zerfallenden Konstituenten ersetzen; aber schon bei 10 GeV/c Laborimpuls Proton-Proton Stößen ist die energetisch mögliche Zahl N_{\max} der Sekundärteilchen ~ 20 , die gemessene mittlere Teilchenzahl $\bar{N} \sim 6$. Bei den höchsten zur Zeit verfügbaren Beschleunigerenergien (30 GeV/c) ist $N_{\max} \sim 40$, $\bar{N} \sim 8$, und für die geplanten großen Protonmaschinen (z.B. 300 GeV/c) haben wir bereits $N_{\max} \sim 160$ und erwarten (aus Daten der kosmischen Strahlung) etwa $\bar{N} \sim 15$. Man muß also ab ungefähr 10 GeV/c mit einer immer stärkeren Dominanz echter Vielteilchenreaktionen rechnen, die eine wesentlich andere theoretische Beschreibung erfordern als die bisher im "Resonanzbereich" übliche.

Nun bringt eine statistische Behandlung in der Physik im allgemeinen gewisse, über die Zweiteilchenbeschreibung hinausgehende Idealisierungen oder Modellvorstellungen mit sich, die es gestatten sollen, einem System vieler Freiheitsgrade ein "mittleres" Verhalten zuzuordnen; man denke an die Hypothese gleicher a priori Wahrscheinlichkeiten (bzw. Ergodenannahmen) oder an die Vorstellung eines idealen Gases in der statistischen Mechanik. In der Elementarteilchenphysik hingegen sind Modellvorstellungen, ganz abgesehen von statistischen Argumenten, schon deswegen notwendig, weil keine spezielle, der klassischen oder Quantenmechanik entsprechende Wechselwirkungstheorie vorliegt.

Somit könnte sich gerade hier eine statistische Behandlung als sehr nützlich erweisen, da sie (im Prinzip) nur recht allgemeine Eigenschaften der Wechselwirkung voraussetzt: so geht ja in die statistische Mechanik die Form der Wechselwirkung unter den einzelnen Teilchen nur recht pauschal ein, und für viele Probleme bildet das ideale Gas eine gute Näherung. Es scheint deshalb nicht ausgeschlossen, Aussagen über hochenergetische Vielteilchenprozesse ohne genauere Kenntnis der starken Wechselwirkung zu erhalten, nur unter Berücksichtigung gewisser allgemeiner Eigenschaften der Reaktionen (z.B. raumzeitliche Invarianzen, kurze Reichweite der Kräfte), und mit Hilfe von Annahmen statistischer Art, wie etwa a priori Gleichverteilung im kinematisch zulässigen Phasenraum oder Vernachlässigung der Korrelation unter Sekundärteilchen. An Hand von Experimenten muß sich dann zeigen, wie weit diese physikalisch sehr überschaubaren Annahmen gerechtfertigt sind.

Das Studium von Vielteilchenreaktionen in der Elementarteilchenphysik ist noch aus einem weiteren, über das Verhältnis nicht-relativistischer Theorien zu ihrem statistischen "Abschluß" hinausgehenden Grund von großem Interesse: durch die Unitarität der Streumatrix (Wahrscheinlichkeitsnormierung) sind hier Zwei- und Vielteilchenkanäle von vornherein immer verkoppelt. Da man die hochenergetische elastische Streuung weitgehend als Schattenstreuung auffaßt, ist es natürlich wünschenswert, die zum Schatten führende Absorptionsverteilung aus der Gesamtheit der inelastischen Kanäle abzuleiten. Zumindest aber wird man versuchen, elastische und inelastische Reaktionen möglichst weitgehend in einem konsistenten Rahmen zu beschreiben.

Betrachten wir nun die Erzeugung von N Teilchen durch den Stoß von zwei stark wechselwirkender Teilchen mit Viererimpulsen q_1, q_2 ; dabei wollen wir uns der Einfachheit halber

hier und im folgenden auf gleiche, ungeladene, skalare Teilchen von Masse m beschränken, sowohl im Eingangswie im Ausgangskanal. Die Übergangswahrscheinlichkeit $2 \rightarrow N$ als Funktion der Gesamtenergie W , $P_N(W)$, ist dann mit Hilfe der Streumatrix S gegeben durch das Impulsraumintegral

$$P_N(W) = \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 p_i}{2\pi i_0} \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i - P\right) |\langle p_1, \dots, p_N | S | q_1, q_2 \rangle|^2 \quad (1)$$

$$P = q_1 + q_2 \quad ; \quad W^2 = P^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 > 0$$

wobei wir wegen Energie-Impuls-Erhaltung in der Reaktion (Invarianz von S unter raumzeitlichen Translationen) die entsprechende vierdimensionale Deltafunktion abgespalten haben.

Wenn wir nun, ähnlich wie beim idealen Gas, die Annahme konstanter Impulsraumverteilung auf der Energie-Impuls-Hyperfläche machen,

$$P_N(W) \sim \frac{V^N}{N!} \int \prod_{i=1}^N d^3 p_i \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i - P\right) \quad (2)$$

so erhalten wir das statistische Modell von Fermi¹⁾ (1950), das den Ausgangspunkt statistischer Betrachtungen in der Elementarteilchenphysik bildet^{2,3,4)}. Die Konstante V hat die Dimension eines Volumens: im Fermi'schen Bild geben die beiden einlaufenden Teilchen beim Zusammenprall ihre gesamte Energie in einem kleinen "Wechselwirkungsvolumen" V ab, dessen Dimension der Reichweite der starken Wechselwirkung entspricht ($\sim 1/m_\pi$), und das wegen der Relativgeschwindigkeit der einlaufenden Teilchen in Richtung des Strahls Lorentz-kontrahiert ist. Der Zerfall des so entstandenen "Feuerballs" in N Teilchen wird dann, nach (2), nur durch den für den jeweiligen Kanal verfügbaren Phasenraum bestimmt. Es ist also ($N \geq 3$)

$$P_N(W) = \frac{V^N}{N!} \int \prod_{i=1}^N d^3 p_i \delta^{(N)}\left(\sum_{i=1}^N p_i - P\right) / \sum_{N=3}^{\infty} \frac{V^N}{N!} \int \prod_{i=1}^N d^3 p_i \delta^{(N)}\left(\sum_{i=1}^N p_i - P\right) \quad (3)$$

die über alle inelastischen Kanäle normierte Übergangswahrscheinlichkeit; der Faktor $(N!)^{-1}$ berücksichtigt die Ununterscheidbarkeit der Teilchen.

Das so definierte Modell (bzw. die daraus durch Integration mit $d^3 p_i / 2p_{i0}$ statt mit $d^3 p_i$ hervorgehende sogenannte "kovariante" Form⁴⁾) bildet bis heute die Grundlage aller Analysen von Vielteilchenerzeugungsexperimenten und dient dort, wo es keine Übereinstimmung liefert, praktisch zur Bestimmung von Resonanzen und peripheren Effekten, also Abweichungen von der Gleichverteilung im Impulsraum. Es bleibt jedoch in diesem Modell ein Teil der Kinematik (insbesondere Drehimpulserhaltung) und auch die Unitaritätsverkopplung mit dem elastischen Kanal unberücksichtigt, was einerseits die Diskussion gewisser kinematischer Fragen (Winkelverteilungen) ausschließt, zum anderen nur Aussagen über Verhältnisse inelastischer Reaktion zueinander liefert (Verzweigungsverhältnisse, Multiplizitäten, usw.), nicht aber - ohne zusätzliche Annahmen - Wirkungsquerschnitte. Ein (3) entsprechender Ansatz ist später auf die elastische Streuung bei hohen Energien und festem Winkel ($\sim 90^\circ$) angewandt worden⁵⁾, wo jedoch weitgehende Zusatzannahmen über Phasen und Diffraktionsmaximum gemacht werden müssen.

Von der gleichen kinematischen Situation ausgehend (Energie-Impuls-Erhaltung) wurde (1962) von Van Hove⁶⁾ ein allgemeinerer Ansatz vorgeschlagen (uncorrelated jet model), der nur eine unkorrelierte Impulsraumverteilung der erzeugten Teilchen annimmt, nicht aber eine Gleichverteilung.

Es wird also das Integral

$$\int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} |f(p_i; q_1, q_2)|^2 \right\} \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i - P\right) \quad (4)$$

betrachtet, wobei die Einteilchenverteilung $|f(p_1; q_1, q_2)|^2$ außer von p_1 nur von den Eingangskanalgrößen q_1, q_2 abhängt, nicht aber von den $N-1$ anderen auslaufenden Teilchen. Da dann der N -Teilchen Beitrag in der Unitaritätsbeziehung für die elastische Streuung ($q_1, q_2 \rightarrow q_1', q_2'$) von der Form ist

$$\int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} f^*(p_i; q_1, q_2) f(p_i; q_1', q_2') \right\} \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i - P\right) \quad (5)$$

haben Van Hove und andere ^{6,7)} insbesondere versucht, mit einem solchen Ansatz die elastische Diffraktionsstreuung abzuleiten; dabei wurde $f(p_i; q_1, q_2)$ möglichst allgemein gehalten (nur Transversalimpulsbeschränkung der Sekundärteilchen).

Der Einfluß weiterer Erhaltungssätze (Drehimpuls, Schwerpunkt) ist von verschiedenen Autoren untersucht worden ⁸⁻¹⁵⁾; vor kurzem wurde gezeigt ¹⁵⁾, daß man im Rahmen eines statistischen Modells mit Drehimpulserhaltung Aussagen über alle N -Teilchen-Erzeugungsdaten und über die gekoppelten rein absorptiven elastischen Reaktionen erhalten kann. Der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $2 \rightarrow N$ ($N \geq 3$) hat dabei allgemein die Form

$$\sigma_N(W) = \frac{\pi}{K^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left\{ U(l, W) \Omega_N(l, W) / \sum_{N=2}^{\infty} \Omega_N(l, W) \right\} \quad (6)$$

$$K^2 = (W^2 - 4m^2) / 4$$

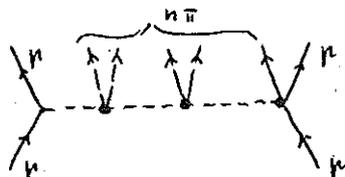
Hier ist $\Omega_N(\ell, W)$ der N-Teilchen-Phasenraum bei festen Werten von Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt; wie üblich ist die Erzeugung im N-Teilchen-Kanal bestimmt durch das Verhältnis des N-Teilchen- zum Gesamtphasenraum. Die den Eingangszustand charakterisierende, nicht von N abhängige Gewichtsfunktion $U(\ell, W) = U(\rho, W)$, mit $\rho = \ell/K$ als Stoßparameter, beschreibt die Frequenz statistischer Reaktionen als Funktion der Zentralität des Stoßes. Sie bewirkt durch

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(\rho, W) = 0 \quad (7)$$

daß ein Anfangszustand von zwei weit entfernt aneinander vorbeifliegenden Teilchen ($\rho \gg$ Reichweite der Wechselwirkung) keine Reaktion auslöst. Die Wahl $U(\rho) = \delta(\rho)$ führt effektiv auf das Fermi-Modell zurück; in 15) wurde auch $U(\rho, W)$ durch Phasenraumargumente bestimmt, was auf eine durch die Wechselwirkungsvolumenverteilung festgelegte ρ -Verteilung führt.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit einigen im Rahmen eines statistischen Modells mit voller Kinematik auftretenden grundlegenden Fragen beschäftigen. Zunächst werden wir präziser formulieren, was unter dem oben bereits benutzten Begriff "Phasenraum mit allen kinematischen Erhaltungsgrößen" (Energie, Impuls, Drehimpuls, Schwerpunkt) zu verstehen ist, sowohl für klassische relativistische als auch für quantenmechanische relativistische N-Teilchen Systeme. Sodann wollen wir die Auswertung dieser Größen mit Hilfe des Grenzwertsatz-Formalismus der Statistik durchführen. Schließlich sollen einige allgemeine Konsequenzen des Modells für Vielteilchenerzeugungsprozesse und für die elastische Streuung diskutiert und die Grenzen einer solchen Beschreibung untersucht werden.

In den bisher betrachteten Modellen wurden unter den auslaufenden Teilchen keine Unterschiede gemacht, was der Annahme entspricht, daß außer kinematischen Erhaltungssätzen keine Information vom ein- zum auslaufenden Zustand übertragen wird. Im Fermi'schen Bild bringt der Prozeß der Feuerballbildung diese Auslöschung nicht-kinematischer Information mit sich. Nun ist es aber durchaus möglich, und teilweise auch experimentell bestätigt, daß sich ein auslaufendes Teilchen durch gewisse Quantenzahlen an seinen Ursprung als einlaufendes "erinnert" und sich damit von den anderen auslaufenden unterscheidet. Ein Beispiel für eine solche Situation liefert ein sehr peripherer Stoß, bei dem das eingeschossene Teilchen nach einem relativ geringen Impulsübertrag auf das Target (der dort zur Erzeugung führt) den Wechselwirkungsbereich wieder verläßt. Das multiperiphere Modell ¹⁶⁾ beschreibt die N-Teilchen-Produktion als Iteration derartiger Mechanismen; für den Prozeß $p+p \rightarrow p+p+n\pi$ wird z.B. folgender Graph betrachtet



Praktisch ist dieses Modell hauptsächlich in der Untersuchung der elastischen und quasielastischen Streuung angewandt worden, wo es jedoch bei der Ausführung der Unitaritätssumme auf erhebliche prinzipielle Schwierigkeiten stößt ¹⁷⁾.

Das multiperiphere und das Fermi'sche Modell bilden in gewisser Weise zwei Extreme: maximal periphere und maximal zentrale Stöße. Man kann vermuten, daß eine korrekte Beschreibung der experimentellen Ergebnisse Teilaspekte von beiden enthält - etwa eine periphere

Anregung eines statistischen Systems. Es scheint uns für weitere Untersuchungen in dieser Richtung zunächst jedoch notwendig, die Konsequenzen des statistischen Modells unter Berücksichtigung der vollen kinematischen Information zu studieren. Wir wollen damit nicht implizieren, daß ein solches Modell allein schon alle experimentellen Daten korrekt wiedergeben sollte, sondern hoffen, daß die dem Vielteilchencharakter angepaßte statistische Behandlung und physikalisch übersichtliche Annahmen es später leichter gestatten, notwendige Erweiterungen durchzuführen.

II. Der Phasenraum mit voller Kinematik

A. Der klassische relativistische Phasenraum

Zunächst wollen wir einige Worte zum entsprechenden nicht-relativistischen Problem sagen, also den Galilei-invarianten Phasenraum mit allen zehn additiven Integralen der Bewegung betrachten ¹²⁾. Für ein System s freier nicht-relativistischer Teilchen von Masse m sind die kinetische Gesamtenergie T , der Gesamtimpuls \vec{P} und der Gesamtdrehimpuls \vec{M} erhalten; die Bewegung des Schwerpunkts $\vec{X} \equiv \vec{N}/sm$ ist durch $d\vec{N}/dt = \vec{P}$ bestimmt. Das System besitzt die Galilei-Invarianten

$$E = T - \vec{P}^2/sm \quad (1)$$

entsprechend der CMS kinetischen Energie,

$$\vec{\ell}^2 = [\vec{M} - \vec{N} \times \vec{P}/sm]^2 \quad (2)$$

entsprechend dem CMS Drehimpuls (Systemspin), und schließlich

$$Q = sm \quad (3)$$

für die (im nicht-relativistischen Fall erhaltene) Gesamttruhmasse des Systems. Für den invarianten Phasenraum haben wir dann nach 12)

$$\Omega_{\mathcal{D}}(E, \ell^2) = \int \prod_{i=1}^s \{ d^3 p_i d^3 x_i \} e^{-\frac{1}{2sR^2} \sum_{i,j=1}^s (\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2} \quad (4)$$

$$\cdot \delta\left(\sum_{i=1}^s \frac{p_i^2}{2m} - T\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s \vec{p}_i - \vec{P}\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s \vec{x}_i \times \vec{p}_i - \vec{M}\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s m \vec{x}_i - \vec{N}\right)$$

wobei die exponentielle Ortsraumabschneidung das Wechselwirkungsvolumen beschreibt. Da nun mit

$$\frac{1}{2sR^2} \sum_{i,j=1}^s (\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2 = \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^s (\vec{x}_i - \vec{N}/sm)^2 \quad (5)$$

sich im Integral der Relativabstand der Teilchen untereinander durch den Abstand der Teilchen vom Schwerpunkt ausdrücken läßt, liefert die Translation

$$\vec{y}_i = \vec{x}_i - \vec{N}/s_m \quad (6)$$

für das Phasenraumintegral die Form

$$\begin{aligned} -\Omega_S(E, l^2) = & \int \prod_{i=1}^s \{ d^3 p_i d^3 y_i e^{-y_i^2/R^2} \} \delta\left(\sum_{i=1}^s \frac{m_i^2}{2m} - T\right) \cdot \\ & \cdot \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s \vec{p}_i - \vec{P}\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s \vec{r}_i \vec{p}_i - \vec{l}\right) \delta^{(1)}\left(\sum_{i=1}^s m \vec{y}_i\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Für die relativistische Verallgemeinerung erweist sich diese Form als sehr zweckmäßig.

Betrachten wir nun den relativistischen Fall ¹⁸⁾. Die Orts- und Impulskoordinaten eines Teilchens transformieren sich unter der Poincarégruppe (Λ, a) wie

$$x_\mu^1 = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu \quad ; \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (8)$$

$$p_\mu^1 = \Lambda_\mu^\nu p_\nu$$

wobei Λ_μ^ν eine homogene Lorentztransformation beschreibt

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma} \quad ; \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu \neq \nu \quad (9)$$

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$$

und a_μ eine raumzeitliche Translation. Der verallgemeinerte Drehimpulstensor

$$m_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (10)$$

enthält als Raum-Raum Komponenten $(m_{ik}; i, k=1, 2, 3)$ den eigentlichen Drehimpuls, als Raum-Zeit Komponenten $(m_{k0}; k=1, 2, 3)$ mit $x_k p_0 - x_0 p_k$ eine verallgemeinerte Ortskoordinate.

Für ein System von s freien Teilchen (Masse m) haben wir anstelle der zehn additiven nicht-relativistischen Integrale der Bewegung $(T, \vec{P}, \vec{M}, \vec{N})$ hier den Vierervektor $P_\mu = \sum_{i=1}^s p_\mu^i$ des Gesamtimpulses und den 4×4 antisymmetrischen Drehimpulstensor $M_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^s m_{\mu\nu}^i$. Die Poincaré-Invarianten Gesamtenergie und Gesamtspin im CMS sind gegeben durch ¹⁹⁾

$$W^2 = P_\mu P^\mu \tag{11}$$

$$L^2 = - P_\mu P^\mu \quad ; \quad P_\mu = \frac{1}{2W} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}$$

wobei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor von Rang vier ist. Wir definieren nun den Vektor

$$K_\mu = \frac{1}{W^2} M_{\mu\nu} P^\nu \tag{12}$$

der im CMS (das wir immer mit 0 akzentuieren wollen) die Form

$$\overset{0}{K}_\mu = (0, M_{K0}/W) = (0, \frac{1}{W} \sum_{i=1}^s [p_{i0} \vec{x}_i - x_{i0} \vec{p}_i]) \tag{13}$$

annimmt und somit eine relativistische Verallgemeinerung der Schwerpunktskoordinate darstellt ²⁰⁾; im nicht-relativistischen Limes führt (13) mit $\overset{0}{K}_\mu = (0, \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (\vec{x}_i - \vec{v}_i t))$ wieder auf die übliche Schwerpunktskoordinate. Mit Hilfe von K_μ können wir nun als relativistische Erweiterung des Spinvektors \vec{l} den antisymmetrischen Spintensor $l_{\mu\nu}$ definieren

$$l_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} - [K_\mu P_\nu - K_\nu P_\mu] \tag{14}$$

$$l_{\mu\nu} l^{\mu\nu} = 2 \vec{l}^2 \quad ; \quad l_{\mu\nu} P^\nu = 0$$

der im CMS von der Form $(\vec{l}, 0)$ ist. Wie schon \vec{l} ist auch $l_{\mu\nu}$ translationsinvariant.

Die räumliche Abschneidung $F(x_1, \dots, x_s; p_1, \dots, p_s)$, die das Wechselwirkungsvolumen liefern soll, lassen wir zunächst bis auf die Forderung von Poincaré-Invarianz offen.

Das invariante Maß im Impulsraum ist durch $\prod_{i=1}^s d^4 p_i \delta(p_i^2 - m^2) \theta(p_{i0})$ gegeben; im Ortsraum ersetzen wir die nicht-relativistische Gleichzeitigkeit durch die Beschränkung auf eine raumartige Hyperfläche; als Maß wählen wir $\prod_{i=1}^s d^4 x_i \delta(E_\mu x_i^\mu - \tau)$, wobei E_μ ein zeitartiger Einheitsvektor ist und τ den "Zeitpunkt" festlegt. Um Invarianz unter homogenen Lorentztransformationen zu erhalten, wählen wir $E_\mu = P_\mu / W$, d.h. wir bestimmen die Fläche konstanter Zeit im CMS.

Als Ergebnis dieser Betrachtungen definieren wir nun für den Poincaré-invarianten Phasenraum mit voller Kinematik

$$\Omega_s(W, \ell^2) = \int \prod_{i=1}^s \left\{ d^4 p_i \delta(p_i^2 - m^2) \theta(p_{i0}) d^4 x_i \delta(E_\mu x_i^\mu - \tau) 2 E_\mu p_i^\mu \right\} \cdot \quad (15)$$

$$\cdot F(x, p) \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^s p_i - P\right) \delta^{(6)}\left(\sum_{i=1}^s m_{\mu\nu}^i - M_{\mu\nu}\right)$$

Mit der Translation $x_\mu \rightarrow x_\mu + K_\mu$ erhalten wir dann wie bei (6/7)

$$\Omega_s(W, \ell^2) = \int \prod_{i=1}^s \left\{ d^4 p_i \delta(p_i^2 - m^2) \theta(p_{i0}) d^4 x_i \delta(E_\mu x_i^\mu - \tau) 2 E_\mu p_i^\mu \right\} \cdot \quad (16)$$

$$\cdot F(x, p) \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^s p_i - P\right) \delta^{(6)}\left(\sum_{i=1}^s m_{\mu\nu}^i - \ell_{\mu\nu}\right)$$

Die Invarianz unter homogenen Lorentztransformationen ist durch die invarianten Orts- und Impulsraummaße zusammen mit der entsprechenden Forderung an $F(x, p)$ unmittelbar klar; desgleichen die Invarianz unter Raumtranslationen, da E_μ bzw. P_μ und $\ell_{\mu\nu}$ translationsinvariant sind. Zu zeigen ist noch die Unabhängigkeit von der Wahl der "Zeit" τ .

Dazu gehen wir am einfachsten ins CMS, was ja durch eine homogene Lorentztransformation erreicht wird:

$$\Omega_S(W, \ell^1) = \int \prod_{i=1}^s \{ d^3 p_i d^3 x_i dx_{i0} \delta(x_{i0} - \tau) \} F(x, p) \quad (17)$$

$$\delta\left(\sum_{i=1}^s p_{i0} - W\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s \vec{p}_i\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s x_i \vec{p}_i - \vec{\ell}\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s [x_i \vec{p}_{i0} - x_{i0} \vec{p}_i]\right)$$

Die x_{i0} -Integrationen sind ausführbar und ergeben, zusammen mit der Impuls-Deltafunktion und der Invarianz von $F(x, p)$ unter Zeittranslationen, ein τ -unabhängiges Integral

$$\Omega_S(W, \ell^2) = \int \prod_{i=1}^s \{ d^3 p_i d^3 x_i \} F(x, p) \delta\left(\sum_{i=1}^s p_{i0} - W\right) \quad (18)$$

$$\delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s \vec{p}_i\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s x_i \vec{p}_i - \vec{\ell}\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s p_{i0} \vec{x}_i\right)$$

das im nicht-relativistischen Limes auf (7) führt. Aus diesem Grunde wurde der Faktor $(2E_i p_i^0)$ in (16) eingefügt.

Die endliche Ortsraumbeschränkung, invariant unter homogenen Lorentztransformationen und Zeittranslationen, ist ansonsten noch völlig offen, und es gibt bisher keine aus allgemeinen Prinzipien hergeleiteten Aussagen über die funktionale Form dieser Abschneidung; man hat nur die recht allgemeine Vorstellung der kurzen Reichweite der Kernkräfte und die Lorentzkontraktion des Wechselwirkungsvolumens, auf die wir gleich noch zurückkommen. Daher ist man also gezwungen, spezielle Ansätze zu machen; im Sinne unserer einleitenden Bemerkungen wird man dabei untersuchen müssen, inwieweit die detaillierte Form des Ansatzes für die Ergebnisse überhaupt von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, daß für weitgehend gemittelte Größen, wie mittlere Teilchenzahlen oder Verzweigungsverhältnisse, die Form der Abschneidung tatsächlich schwach eingeht;

erst experimentelle Aussagen über Impulsverteilungen von Sekundärteilchen und weitere "differentielle" Ergebnisse dürften eine bessere Bestimmung von $F(x,p)$ ermöglichen.

Zunächst berücksichtigen wir die Zeittranslationsinvarianz. Die neue Koordinate

$$y_\mu = x_\mu - E_\mu (E_\nu x^\nu) \quad (19)$$

ist unter Translationen senkrecht zu der durch E_μ definierten Hyperebene invariant:

$$x'_\mu = x_\mu + \Sigma E_\mu \quad ; \quad y'_\mu = y_\mu \quad (20)$$

so daß eine homogen- und raumtranslationsinvariante Funktion $F(y(x),p)$ die gewünschten Transformationseigenschaften besitzt. Um die Raumtranslationsinvarianz zu gewährleisten, führen wir wie in (5/6) Relativabstände ein:

$$z_\mu = y_\mu - K_\mu \quad ; \quad \vec{z}_\mu = (0, \vec{x} - \frac{1}{w} \sum_{i=1}^s \mu_i \vec{x}_i) \quad (21)$$

Translahieren wir nun an den Ort des Schwerpunktes ((15)→(16)), so verschwindet mit

$$\vec{z}_\mu = (0, \vec{x}) \quad (22)$$

die durch (21) verursachte Korrelation wieder, und wir können in (16) eine vollständig faktorisierte Form ansetzen

$$F(x, \mu) = \prod_{i=1}^s f(\vec{z}_i(x_i), \mu_i) \quad (23)$$

Im statistischen Modell mit Drehimpulserhaltung für die Reaktion $q_1, q_2 \rightarrow p_1, \dots, p_s$ (mit q bzw. p für die Impulse der ein- bzw. auslaufenden Teilchen) wird durch den Drehimpuls \vec{l} die Achse des einlaufenden Strahls ausgezeichnet, da \vec{l} auf dem Strahl senkrecht steht. Wir definieren also

$$e_{\mu} = \frac{q_{\mu 1} - q_{\mu 2}}{2K} \quad ; \quad W^2 = (q_1 + q_2)^2 \quad (24)$$

als Einheitsvektor des Strahls. Im CMS beschreibt dann

$$x_L^2 = (\vec{e}_x)^2 = [(e_{\mu} \bar{z}^{\mu})^0]^2 \quad (25)$$

die longitudinale Ausdehnung (entlang des einfallenden Strahls) und

$$x_T^2 = (e^{\vec{x}x})^2 = -\frac{1}{2} [(e_{\mu} z_{\nu} - e_{\nu} z_{\mu})^0]^2 \quad (26)$$

die transversale (senkrecht zum Strahl). Es gilt natürlich

$$\bar{x}^2 = x_L^2 + x_T^2 = -(\bar{z}_m \bar{z}^m)^0$$

Im Fermischen Bild führt nun die Relativgeschwindigkeit der kollidierenden Teilchen (deren "Volumina" im CMS abgeplattet erscheinen) zu einer Lorentzkontraktion des Wechselwirkungsvolumens; wir wählen deshalb

$$\gamma^2 x_L^2 + x_T^2 \quad (27)$$

mit $\gamma^{-1} = 2m/W$ als Argument der Abschneidefunktion. Diese Funktion selbst ist, wie erwähnt, nicht weiter festgelegt; statt der zunächst benutzten Kastenfunktion werden wir im folgenden die Gauß-Form ¹⁰⁾

$$e^{-\frac{1}{R^2} [\gamma^2 x_L^2 + x_T^2]} \quad (28)$$

verwenden, die mathematisch einfacher zu handhaben ist und zudem auf ein experimentell recht gut bestätigtes Verhalten der elastischen Diffraktionsstreuung führt, wie wir später sehen werden.

Mit dieser Abschneidung hängt der Phasenraum ab von W^2 und von

$$l_L^2 = (\vec{e}\vec{l})^2 = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu \vec{e}^\mu)^2 \quad ; \quad l_T^2 = (\vec{e}\vec{l})^2 = \frac{1}{2}[\Gamma_\mu e_\nu - \Gamma_\nu e_\mu]^2 \quad (29)$$

Wegen Drehimpulserhaltung ist jedoch $l_L = 0$ (was später als Konsequenz der per Phasenraum bestimmten Feuerballverteilung über eingeht); wir schreiben daher weiterhin $\Omega_S(W, l^2)$ mit der impliziten Nebenbedingung $(\vec{e}\vec{l}) = 0$.

Lorentz-Kontraktion und Drehimpulserhaltung führen zusammen auf eine Auszeichnung der Strahlrichtung; da z.B. die experimentelle Transversalimpulsverteilung der erzeugten Teilchen auch auf eine solche Auszeichnung hinweist, scheint uns auch aus diesem Grunde eine Abschneidung in (25) zweckmäßig. ⁺)

Zusammenfassend erhalten wir

$$\Omega_S(W, l^2) = \int \prod_{i=1}^S \{ d^3p_i d^3x_i e^{-\frac{1}{R_2}[\gamma^2 x_{iL}^2 + x_{iT}^2]} \} \times \delta(\sum p_{i0} - W) \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) \delta^{(3)}(\sum p_{i0} \vec{x}_i) \delta^{(3)}(\sum x_{i0} \vec{p}_i - \vec{l}) \quad (30)$$

als klassischen relativistischen Phasenraum unter Berücksichtigung aller zehn Integrale der Bewegung und mit in Strahlrichtung Lorentzkontrahiertem Wechselwirkungsvolumen.

⁺) Vergleiche 15, 18), wo eine andere Abschneidung benutzt wurde, die einer Lorentzkontraktion nach Geschwindigkeiten der auslaufenden Teilchen entspricht; bei integrierten Größen sind die Unterschiede jedoch recht gering.

B. Der quantenmechanische relativistische Phasenraum

Ein quantenmechanisches System s freier Teilchen, von dem wir nur additive kinematische Erhaltungsgrößen A kennen, läßt sich statistisch mit Hilfe des Dichteoperators $\hat{\rho}$ beschreiben²¹⁾. Bei gleicher a priori Wichtung aller mit den bekannten Größen A verträglichen (reinen) Zustände ist dieser bis auf Normierung ein Projektionsoperator auf den zu A gehörenden Unterraum (mikrokanonische Verteilung) --- in unserem Fall also der Projektor auf irreduzible Darstellungen der Poincarégruppe im N -Teilchen Hilbertraum. Den Erwartungswert \bar{Q} einer Observablen Q des Systems erhält man dann durch Spurbildung:

$$\bar{Q} = \text{Sp}_N \hat{Q} \hat{\rho} \quad (1)$$

wobei \hat{Q} der quantenmechanische Operator für Q ist und die Spur im N -Teilchen Raum gebildet wird. Die Anwendung dieses Formalismus im Rahmen des statistischen Modells (mit Drehimpuls, nicht-relativistisch) wurde zuerst von Cerulus¹⁰⁾ durchgeführt; später wurde auch der Fall der vollen Galileigruppe systematisch diskutiert¹⁴⁾.

Betrachten wir auch hier zunächst kurz die nicht-relativistischen Ergebnisse. In der Ortsraumdarstellung ist der (II.A.7) entsprechende Abschneideoperator eine c -Zahl; die Wahrscheinlichkeit, s freie Teilchen, deren Gesamtenergie und -drehimpuls im CMS vorgegeben sind, in einem durch diese Abschneidung definierten Volumen zu finden, wird also durch

$$\int \prod_{i=1}^s d^3 \mu_i \langle \mu_1 \dots \mu_s | \hat{Q} \hat{\rho} | \mu_1 \dots \mu_s \rangle = C \Omega_s(E, \ell^2) \quad (2)$$

$$= C \int \prod_{i=1}^s \{ d^3 \mu_i d^3 x_i e^{-\vec{x}_i^2/R^2} \} e^{-i \sum_{i=1}^s \vec{\mu}_i \vec{x}_i} \hat{P}_{E, \vec{P}=0, \ell, m} e^{i \sum_{i=1}^s \vec{\mu}_i \vec{x}_i}$$

gegeben, mit C als Normierungskonstante. Dabei haben wir die freien Teilchen durch ebene Wellen beschrieben; $\hat{P}_{E, \vec{P}=0, \ell, m}$ ist der Projektionsoperator auf feste kinetische Energie E, auf das CMS $\vec{P}=0$, und auf feste Werte des Systemspins ℓ und dessen dritter Komponente m. Um die Eingangssituation (Drehimpuls senkrecht auf Strahlrichtung \vec{e}) zu berücksichtigen, können wir \vec{e} als Quantisierungsachse wählen und $m=0$ fordern; das (drehinvariante) Integral (2) ist jedoch unabhängig von dieser Wahl, so daß die $m=0$ Forderung erst bei der Untersuchung von z.B. Impulsverteilungen wichtig wird (und, im relativistischen Fall, bei der Lorentzkontraktion).

Auf die gruppentheoretische Konstruktion des Projektors kommen wir gleich zurück; für (2) ist das Ergebnis^{10,14)} (vgl. (II.A.7))

$$\Omega_s(E, \ell^2) = \frac{\text{const.}}{N! (2\pi)^{3N-3}} \int \prod_{i=1}^s \{ d^3 \mu_i d^3 x_i e^{-\vec{x}_i^2/R^2} \} \delta\left(\sum_{i=1}^s \frac{\mu_i^2}{2m} - E\right) \times \quad (3)$$

$$\times \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s \vec{\mu}_i\right) \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^s m \vec{x}_i\right) \int_{\mathcal{R}} d\mu(R) \bar{D}_{mm}^{\ell}(R) e^{i \sum_{i=1}^s \vec{\mu}_i \cdot (R \vec{x}_i - \vec{x}_i)}$$

Das letzte Integral in (3) geht über die ganze Drehgruppe, und $D_{mm}^{\ell}(R)$ ist ein Diagonalelement der Darstellungsmatrix

für eine Drehung R in der irreduziblen Darstellung ρ .
 Nach dem oben Gesagten wählen wir speziell $m=0$. Man
 sieht also, daß die durch die Quantenmechanik bedingte
 Änderung darin besteht, die klassische Deltafunktion
 für den Drehimpuls durch den entsprechenden quanten-
 mechanischen Projektor (das letzte Integral in (3)) zu
 ersetzen, der die Vektoraddition der Drehimpulse be-
 rücksichtigt.

Kommen wir nun zum relativistischen Problem. Zunächst
 wollen wir den Projektor auf eine irreduzible Darstel-
 lung der Poincarégruppe konstruieren. In der Theorie
 kompakter Gruppen wird der Projektionsoperator \hat{P}_ρ auf
 die im Darstellungsraum \mathcal{H} enthaltene irreduzible Dar-
 stellung ρ der betrachteten Gruppe \mathcal{G} gegeben durch

$$\hat{P}_\rho = \frac{\dim \rho}{\int_{\mathcal{G}} d\mu(g)} \int_{\mathcal{G}} d\mu(g) \bar{\chi}^\rho(g) U(g) \quad (4)$$

wobei $d\mu(g)$ das invariante Maß der Gruppe \mathcal{G} bezeichnet
 und $U(g)$ den unitären Darstellungsoperator von $g \in \mathcal{G}$;
 $\dim \rho$ gibt die (endliche) Dimension der irreduziblen
 Darstellung an und

$$\chi^\rho(g) = \sum_n D_{nn}^\rho(g) ; \quad g \in \mathcal{G} \quad (5)$$

deren Charakter, mit $D_{nn}^\rho(g)$ als Matrixelement in ρ .
 Führen wir in (4) die Summe über n nicht aus, so erhalten
 wir den Projektor auf den Vektor n der irreduziblen Dar-
 stellung ρ . Als Projektor ist \hat{P}_ρ bzw. \hat{P}_ρ^n hermitisch,
 idempotent, und gibt eine Zerlegung der "1":

$$\hat{P}_\rho^+ = \hat{P}_\rho \quad ; \quad \hat{P}_\rho \hat{P}_{\rho'} = \delta_{\rho\rho'} \hat{P}_\rho \quad (6)$$

$$\sum_\rho \hat{P}_\rho = "1"$$

Der Charakter der durch CMS Gesamtenergie W ($W^2 > 0$) und Gesamtspin l indizierten irreduziblen Darstellung der Poincarégruppe $\mathcal{P} = \{(\Lambda, a)\}$ ist gegeben durch ²²⁾

$$\chi_{W,l}(\Lambda, a) = \int d^3P \delta^{(3)}(\Lambda \vec{P} - \vec{P}) e^{ia_\mu P^\mu} \chi_l(h_{\vec{P}} \Lambda h_{\vec{P}}^{-1}) \quad (7)$$

wobei $h_{\vec{P}}$ eine drehungsfreie Lorentztransformation ist, die den Vektor \vec{P} auf null bringt (ins "CMS"); die Deltafunktion beschränkt dann $\mathcal{Q} = h_{\vec{P}} \Lambda h_{\vec{P}}^{-1}$ auf Elemente der Drehgruppe, deren Charakter

$$\chi_l(\varphi) = \sin(2l+1)\varphi/2 / \sin \varphi/2 \quad (8)$$

ist. Bilden wir nun mit $\chi_{W,l}(\Lambda, a)$ den Operator

$$\hat{P}_{W,l} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{2l+1}{V_{\mathcal{R}}} \int_{\mathcal{P}} d\mu(g) \bar{\chi}_{W,l}(g) U(g) \quad (9)$$

wobei $U(g)$ den Operator einer Poincarétransformation im Fockraum darstellt und die Integration über die gesamte Poincarégruppe läuft; $V_{\mathcal{R}}$ ist das Volumen der Drehgruppe. Der so definierte Operator erfüllt dann ²²⁾

$$\hat{P}_{w,\ell}^+ = \hat{P}_{w,\ell} \quad (10)$$

$$\hat{P}_{w,\ell} \hat{P}_{w',\ell'} = \delta(W-W') \delta_{\ell\ell'} \hat{P}_{w,\ell}$$

und ergibt wegen der Vollständigkeitsrelation für Charaktere auch eine Zerlegung der "1", formal

$$\int dW \sum_{\ell} \hat{P}_{\ell,W} = "1" \quad (11)$$

Damit haben wir für die (nur lokal-kompakte) Poincaré-Gruppe den gesuchten Projektor. Wichten wir die Gruppenintegration mit

$$\frac{2\ell+1}{V_{\mathcal{R}}} D_{00}^{\ell}(R) e^{iaW} \delta^{(1)}(\vec{\Lambda}\vec{P}) ; \quad \vec{\Lambda}\vec{P} = \Lambda(W, \vec{0}) \quad (12)$$

statt mit $[(2\ell+1)/V_{\mathcal{R}}] \chi_{\ell,W}(\Lambda, a)$, so erhalten wir entsprechend die Projektion auf den Zustand $m=0$ im CMS in der irreduziblen Darstellung (W, ℓ) . Da wir durch die Lorentzkontraktion die Strahlrichtung auszeichnen wollen, werden wir im folgenden diesen Projektor verwenden, wobei wir zusammenfassend $\hat{P}_{\chi,0}$ (und für (12) $D_{\chi,0}(g)$) schreiben wollen, mit $\chi = (W, \ell)$ und 0 für $\vec{P}=0, m=0$.

Um zum quantenmechanischen relativistischen "Phasenraum" zu gelangen, betrachten wir die Spur im N-Teilchen Sektor des Fockraums:

$$S_{p_s} \hat{Q} \hat{P}_{x,0} = \int \prod_{i=1}^s \frac{d^3 p_i}{2p_{i0}} \langle p_1, \dots, p_s | \hat{Q} \hat{P}_{x,0} | p_1, \dots, p_s \rangle ; p_i^2 = m^2 \quad (13)$$

Da wir mit Hilfe des Operators \hat{Q} Aussagen über die Ortsverteilung der Teilchen machen wollen, müssen wir eine Positionsbeschreibung einführen. Nun bildet die Menge aller Newton-Wigner (N-W) Zustände ²³⁾ zu gleicher Zeit q_0 eine vollständige Basis des Fockraums

$$|\vec{q}_1, q_0, \dots, \vec{q}_s, q_0\rangle = \frac{1}{s!} \int \prod_{i=1}^s \left\{ \frac{d^3 p_i}{2p_{i0}} \left[\frac{2p_{i0}}{(2\pi)^3} \right]^{1/2} e^{i p_i q_i} a^\dagger(p_i) \right\} |0\rangle \quad (14)$$

$$\langle \vec{q}'_1, q_0, \dots, \vec{q}'_s, q_0 | \vec{q}_1, q_0, \dots, \vec{q}_s, q_0 \rangle = \delta_{ss'} \prod_{i=1}^s \delta^{(3)}(\vec{q}'_i - \vec{q}_i)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int \prod_{i=1}^s d^3 q_i |\vec{q}_1, q_0, \dots, \vec{q}_s, q_0\rangle \langle \vec{q}_1, q_0, \dots, \vec{q}_s, q_0| = 1$$

in der $|\vec{q}_1, q_0, \vec{q}_2, q_0, \dots, \vec{q}_s, q_0\rangle$ ein System von s zur Zeit q_0 an den Orten $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_s$ lokalisierten Teilchen beschreibt. Die N-W Koordinaten erfüllen die üblichen kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[q_a, q_b] = 0 ; [q_a, p_b] = i \delta_{ab} ; a, b = 1, 2, 3 \quad (15)$$

Diese Basis wollen wir in (13) einschieben; da jedoch bei Translationsinvarianz von \hat{Q} das Matrixelement in (13) wegen der uneigentlichen Normierung eine Deltafunktionssingularität besitzt, betrachten wir zunächst das nicht-diagonale Matrixelement, um diese Deltafunktion abzuspalten.

Mit (14) und der Abkürzung $|p\rangle = |p_1, \dots, p_s\rangle, |q\rangle = |q_1, q_0, \dots, q_s, q_0\rangle$ erhalten wir

$$\langle \bar{p} | \hat{Q} \hat{P}_{x_0} | \mu \rangle = \int \prod_{i=1}^s d^3 q_i \int_{\mathcal{P}} d\mu(q) \bar{D}_{x_0}(q) e^{ia \sum p_i + i \sum (\Lambda p_i - \bar{p}_i) q_i} \times W_{q_0}(\mu, \bar{p}, q) \quad (16)$$

$$W_{q_0}(\mu, \bar{p}, q) = \int \prod_{i=1}^s \left\{ d^3 q_i \left[\frac{4 p_{i0} \bar{p}_{i0}}{(2\pi)^6} \right]^{1/2} \right\} e^{-i \sum \bar{p}_i (\bar{q}_i - q_i)} \langle \bar{q} | \hat{Q} | q \rangle$$

was sich mit Hilfe des Gesamtimpuls-Einheitsvektors E_μ dann form-invariant schreiben läßt

$$\langle \bar{p} | \hat{Q} \hat{P}_{x_0} | \mu \rangle = \int \prod_{i=1}^s \left\{ d^4 q_i \delta(E_\mu q_i^0 - z) \right\} \int_{\mathcal{P}} d\mu(q) \bar{D}_{x_0}(q) e^{ia \sum p_i} \times e^{i \sum (\Lambda p_i - \bar{p}_i) q_i} W_z(\mu, \bar{p}, q) \quad (17)$$

$$W_z(\mu, \bar{p}, q) = \int \prod_{i=1}^s \left\{ d^4 q_i \delta(E_\mu q_i^0 - z) \left[\frac{4 E_{\mu i} q_i^0 E_{\mu i} \bar{p}_i^0}{(2\pi)^6} \right]^{1/2} \right\} e^{i \sum \bar{p}_i (\bar{q}_i - q_i)} \langle \bar{q} | \hat{Q} | q \rangle_z$$

Aus der Invarianz der Abschneidung unter Zeittranslationen

$$\langle \bar{q}, z | \hat{Q} | q, z \rangle = \langle \bar{q}, z + \varepsilon | \hat{Q} | q, z + \varepsilon \rangle \quad (18)$$

ergibt sich für (16/17) auf der Diagonalen aus der in $D_{x_0}(g)$ enthaltenen Deltafunktion die Invarianz unter Zeittranslationen. Durch die Wahl gleichzeitiger N-W Koordinaten ist die aus dieser Invarianz folgende Deltafunktion also bereits abgespalten. Zur Berücksichtigung der Raumtranslationsinvarianz schieben wir eine "1" der Form

$$1 = \int d^3N \delta^{(3)}(\vec{N} - \sum \mu_{i0} \vec{q}_i) \quad (19)$$

in (16) ein. Mit der Translation $\vec{x} = \vec{q} - \vec{N}/W$ und unter Ausnutzung der Invarianz von Q folgt dann

$$\langle \bar{\mu} | \hat{Q} \hat{P}_{x_0} | \mu \rangle = W^3 \delta^{(3)}(\sum_{i=1}^s \mu_i - \sum_{i=1}^s \bar{\mu}_i) \int \prod_{i=1}^s d^3x_i \int d\mu(R) D_{x_0}(g) \cdot (20)$$

$$e^{i a \sum \mu_i + i \sum (\mu_i \bar{\mu}_i) q_i} \delta^{(3)}(\sum \mu_{i0} \vec{x}_i) W(x, \mu, \bar{\mu})$$

so daß die gesuchte Deltafunktion abfaktorisiert ist. Wir erhalten schließlich nach Ausführen der Gruppenintegration bis auf den Drehgruppenanteil

$$\Omega_S(W, e^2) = \int \prod_{i=1}^s \frac{d^3\mu_i}{2\mu_{i0}} \delta(\sum \mu_{i0} - W) \delta^{(3)}(\sum \vec{\mu}_i) \int \prod_{i=1}^s d^3x_i \cdot (21)$$

$$\times \delta^{(3)}(\sum \mu_{i0} \vec{x}_i) W(x, \mu) \frac{2\ell+1}{V_R} \int d\mu(R) \tilde{D}_{00}^{\ell}(R) e^{i \sum (R \mu_i - \bar{\mu}_i) \vec{x}_i}$$

und

$$W(x, \mu) = \frac{\prod_{i=1}^s (2\mu_{i0})}{(2\pi)^{3s}} \int \prod_{i=1}^s d^3\bar{x}_i e^{i \sum \mu_i (x_i - \bar{x}_i)} \langle \bar{x} | \hat{Q} | x \rangle \quad (22)$$

indem wir nach Abspalten der Deltafunktion in (20) das so reduzierte Matrixelement auf der Diagonale in (13) einsetzen. Wir sehen also, daß auch im relativistischen Fall beim Projektor die einzige quantenmechanische Modifikation durch die geänderte Drehimpulsberücksichtigung erfolgt.

Anstelle der klassischen Abschneidung tritt hier jetzt die Funktion $W(x,p)$, die die Beziehungen

$$\int \prod_{i=1}^s \frac{d^3x_i}{2\pi i_0} W(x,\mu) = \langle x | \hat{Q} | x \rangle \quad (23)$$

$$\int \prod_{i=1}^s d^3x_i W(x,\mu) = \langle \mu | \hat{Q} | \mu \rangle$$

erfüllt. Im allgemeinen ist $W(x,p)$ eine nicht immer reell-positive "Quasiverteilung" im Wignerschen Sinne ^{24,25}, die, über einen Satz kanonisch konjugierter Variablen integriert, auf eine echte Verteilung für die Observable Q führt. Hier gehen wir jedoch von der klassischen Abschneidung (II,A,29) aus und wählen p -unabhängig

$$\langle \bar{x} | Q | x \rangle = e^{-\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^s (\gamma^2 x_{iL}^2 + x_{iT}^2)} \prod_{i=1}^s \delta^{(3)}(\vec{x}_i - \vec{\bar{x}}_i) \quad (24)$$

mit der üblichen (per Eingangsstrahl festgelegten) Definition von longitudinal und transversal. Es folgt dann mit

$$W(x,\mu) = \prod_{i=1}^s \left\{ \frac{2\pi i_0}{(2\pi)^3} \right\} e^{-\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^s (\gamma^2 x_{iL}^2 + x_{iT}^2)} \quad (25)$$

die gleiche Verteilung wie im klassischen Fall, und wir erhalten als quantenmechanischen relativistischen Phasenraum

$$\Omega_0(W, \ell^i) = \frac{1}{(2\pi)^{3s}} \int \prod_{i=1}^s \left\{ d^3\vec{p}_i d^3\vec{x}_i e^{-\frac{1}{2\ell^i} [\vec{p}_i^2 + x_i^2]} \right\} \frac{2\ell^i + 1}{V_R} \times \quad (26)$$

$$\times \int_{\mathcal{R}} d\mu(R) D_{00}^{\ell}(R) e^{i \sum (\vec{R} \vec{p}_i - \vec{p}_i^2) \frac{\ell^i}{2}} \delta^{(3)}(\sum \mu_{i0} \vec{x}_i) \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) \delta^{(1)}(\sum \mu_{i0} - W)$$

d.h., bis auf Drehimpulsprojektor und "Zustandsdichte" $(2\ell^i)^{-3s}$ die gleiche Form wie (II.A.30).

C. Zur Berechnung von Phasenraumintegralen

Bekanntlich läßt sich bereits das relativistische N-Teilchen Impulsraumintegral bei festem Gesamtimpuls $P_{\mu} = \sum_{i=1}^N p_{\mu}^i$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, nur im nicht-relativistischen und im extrem-relativistischen ($m=0$) Grenzfall in geschlossener Form berechnen. Ein fundamentales Problem des statistischen Modells ist daher die näherungsweise Berechnung von Phasenraumintegralen (und deren Summen), und so haben eine Reihe von Autoren verschiedene Auswertungsmethoden entwickelt ²⁶⁾. Wir wollen uns im folgenden mit der zuerst von Khinchin ²⁷⁾ in der statistischen Mechanik angewandten, auf dem Grenzwertsatzformalismus der Wahrscheinlichkeitstheorie begründeten Methode (GSF abgekürzt) zur Auswertung für große Teilchenzahlen N befassen. Dieses Verfahren ermöglicht weitgehend eine analytische Behandlung, die mit $N \rightarrow \infty$ exakt wird und auch

für endliche N eine recht gute Näherung liefert. Das erwähnte Impulsraumintegral wurde damit von Lurcat und Mazur²⁸⁾ allgemein berechnet, und inzwischen sind verschiedene Formen des GSF zu einer Reihe von Phasenraumberechnungen benutzt worden^{12,13,14,15,18,29)}, sowie auch Erweiterungen für die bei quantenmechanischer Drehimpulsprojektion auftretenden nicht immer positiven Verteilungen entwickelt²⁴⁾.

Aus heuristischen Gründen, und um uns bei den späteren Berechnungen möglichst kurz fassen zu können, illustrieren wir den GSF zunächst an einem einfachen bekannten Modell^{27,28)}, nämlich der Berechnung des Impulsraumintegrals bei fester Energie

$$Q_N(w) = \int \prod_{i=1}^N d^2 p_i \delta(\sum_{i=1}^N p_{i0} - w) \quad (1)$$

Mit Hilfe von

$$\varphi(\alpha) = \int d^2 p e^{-\alpha p_0}, \quad \alpha > 0 \quad (2)$$

können wir (1) auf die Form

$$Q_N(w) = e^{\alpha w} [\varphi(\alpha)]^N U_N^\alpha(w) \quad (3)$$

bringen, mit beliebigem $\alpha > 0$, wobei

$$U_N^\alpha(w) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^2 p_i \frac{e^{-\alpha p_{i0}}}{\varphi(\alpha)} \right\} \delta(\sum p_{i0} - w) \quad (4)$$

die normierte Verteilung beschreibt für die Summe W von N unkorrelierten statistischen Größen p_i , die ihrerseits durch normierte Verteilungen $e^{-\alpha p_{i0}} / \varphi(\alpha)$ beschrieben werden. Die charakteristische Funktion der Verteilung,

d.h. die Fourier-transformierte von $U_N(W)$

$$\Phi_N^\alpha(z) = \int_0^\infty dW e^{izW} U_N^\alpha(W) \quad (5)$$

besitzt dann wegen der Unkorreliertheit der Teilchen eine Produktstruktur

$$\Phi_N^\alpha(z) = \left[\varphi(\alpha - iz) / \varphi(\alpha) \right]^N \equiv \varphi_\alpha^N(z) \quad (6)$$

Die Umkehrung von (5) liefert

$$U_N^\alpha(W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izW + N \ln \varphi_\alpha(z)} \quad (7)$$

Nun gilt

$$|\varphi_\alpha(z)| \leq 1 \quad \forall \text{ reellen } z; \quad \varphi_\alpha(0) = 1 \quad (8)$$

und ferner läßt sich zeigen, daß $|\varphi_\alpha(z)|$ außerhalb einer Umgebung von $z=0$ mindestens wie $|z|^{-3/2}$ abfällt. Der Hauptbeitrag zu (7) kommt also vom Gebiet um $z=0$, weswegen wir den Logarithmus im Exponenten entsprechend entwickeln:

$$\ln \varphi_\alpha(z) = iz a(\alpha) - \frac{z^2}{2} b(\alpha) - i \frac{z^3}{3!} c(\alpha) + \dots \quad (9)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} a(\alpha) &\equiv -i \left(\frac{\partial \ln \varphi_\alpha}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int d^3p p_0 e^{-\alpha p_0} \\ &= \frac{1}{N} \int dW W U_N^\alpha(W) \equiv \bar{A}(\alpha) / N \end{aligned} \quad (10)$$

die mittlere Energie eines Teilchens, und

$$\begin{aligned}
 b(\alpha) &= - \left(\frac{\partial^2 \ln \Psi}{\partial z^2} \right)_{z=0} = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int d^3 \mu (\mu_0 - a(\alpha))^2 e^{-\alpha \mu_0} \\
 &= \frac{1}{N} \int dW (W - A(\alpha))^2 U_N^\alpha(W) = B(\alpha)/N
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

die dazugehörige Dispersion. Die höheren logarithmischen Ableitungen ("Kumulanten") bezeichnen wir analog $c(\alpha)$, $d(\alpha)$, usw. Setzen wir (9) in (7) ein und substituieren $t = z \sqrt{N}$, so folgt

$$\begin{aligned}
 U_N^\alpha(W) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left\{ -it\sqrt{N} \left[\frac{W}{N} - a(\alpha) \right] - \frac{t^2}{2} b(\alpha) + \right. \\
 &\quad \left. + i \frac{t^3}{3!} \frac{c(\alpha)}{\sqrt{N}} + \frac{t^4}{4!} \frac{d(\alpha)}{N} + O(N^{-3/2}) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Den Parameter α legen wir nun so fest, daß die mittlere Energie gleich der vorgegebenen W ist

$$N a(\alpha) = W \quad \text{"Khinchin-Gleichung"} \tag{13}$$

was gleichzeitig den linearen t -Term in (12) eliminiert und α als Funktion von W und N bestimmt. Für festes α und großes N entwickeln wir nun den N -abhängigen Teil des Exponenten

$$U_N^\alpha(W) = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2 \frac{b(\alpha)}{2}} \left[1 + \frac{1}{N} \frac{t^4 d(\alpha)}{4!} + O(N^{-2}) \right]
 \tag{14}$$

und erhalten so die gesuchte Näherung in $1/N$ Potenzen. Für fest, $N \rightarrow \infty$ haben wir damit

$$U_N^\alpha(W) = [2\pi N b(\alpha)]^{-1/2} [1 + O(N^{-1})] \quad (15)$$

wobei sich bei noch nicht "asymptotischen" N-Werten über (12/14) ohne Schwierigkeiten höhere Näherungen in $1/N$ berechnen lassen. Nun ist $\alpha(N, W)$ durch (13) bestimmt:

$$a(\alpha) = - \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{W}{N} \quad (16)$$

Diese transzendente Gleichung läßt sich im allgemeinen Fall recht einfach numerisch lösen; für den nicht-relativistischen und den extrem-relativistischen Grenzfall erhalten wir geschlossen

$$\text{NR} : \mu_0 \approx \sqrt{\vec{p}}^2 / 2m \sqrt{1 + \frac{m}{E}} \quad E \approx W - Nm \quad ; \quad \alpha = 3N/2E \quad (17)$$

$$\text{ER} : \mu_0 \approx |\vec{p}| \quad ; \quad \alpha = 3N/W$$

und damit über (3/15/17) asymptotisch

$$\bar{Q}_N^{\text{NR}}(E) = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{3N}{4\pi}} e^{3N/2} [4\pi m E / 3N]^{3N/2} \quad (18)$$

$$Q_N^{\text{ER}}(W) = \frac{1}{W} \sqrt{\frac{6N}{4\pi}} e^{3N} [8\pi (W/3N)^3]^N$$

Da sich bei diesen beiden Grenzfällen auch das Ausgangsintegral exakt berechnen läßt, haben wir mit (18) einen Test für die Güte der GSF Näherung, die erst für $N \rightarrow \infty$,

W/N fest, konvergiert. Die exakten Phasenräume sind gegeben durch

$$Q_N^{NR}(E) = \frac{1}{E} (2\mu\pi E)^{3N/2} / \Gamma(\frac{3N}{2}) \quad (19)$$

$$Q_N^{ER}(W) = \frac{1}{W} (8\pi W^3)^N / \Gamma(3N)$$

Durch die Stirling-Näherung der Gammafunktion, die schon für sehr kleine N gut ist, geht (19) in (18) über.

In der statistischen Mechanik entspricht dieser Sachverhalt der Äquivalenz von kanonischer und mikrokanonischer Verteilung bei "großen" N ; die Khinchin-Gleichung liefert dort die Verknüpfung von Temperatur $\alpha = 1/kT$ und Energie E eines idealen Gases.

Die Berechnung des Phasenraumes mit weiteren Integralen der Bewegung, insbesondere mit Drehimpulserhaltung, läßt sich mit dem GSF ganz ähnlich durchführen¹²⁾. Man kann dabei, wie in 12) zunächst für alle Erhaltungsgrößen A_i "inverse Temperaturen" α_i einführen; es zeigt sich jedoch, daß eine kovariante Temperaturbestimmung möglich ist, die alle α_i außer dem der Energie entsprechenden null wählt. Dieses beruht auf der Tatsache, daß das Integral über die Einteilchenvariablen x und p (analog (2)) im Ortsraum durch die Wechselwirkungsvolumen-Beschränkung und im Impulsraum durch die endliche Energie konvergent wird. Andererseits bedingt eine solche Wahl, daß der GSF ein asymptotisch exaktes Ergebnis liefert für $N \rightarrow \infty$, W/N fest, ℓ^2 fest (unabhängig von N)¹³⁾. Im nicht-relativistischen Fall kann man eine von null verschiedene Wahl der Drehimpulsparameter einführen¹³⁾, die eine Vergrößerung des Gültigkeitsbereichs in ℓ^2

ermöglicht. Im relativistischen Fall ist ein solches Vorgehen jedoch nur dann möglich, wenn eine kompakte Ortsraumabschneidung benutzt wird, da sonst Divergenzen im Impulsraumintegral auftreten. Wir werden daher im folgenden keine Drehimpulstemperaturen einführen, da wir einerseits das Ergebnis später nur in einem beschränkten l^2 -Bereich benutzen wollen, andererseits die Gültigkeit der oben erwähnten Einschränkungen des GSF bei speziellen Modellen als eine bisher noch offene Frage betrachten. Wir haben aus diesem Grunde ein zweidimensionales, nicht-relativistisches Modell mit Drehimpulserhaltung betrachtet, das exakt lösbar ist:

$$\begin{aligned} \Omega_N(E, l^2) &= \int \prod_{i=1}^N \{ d^2 p_i d^2 x_i e^{-x_i^2/R^2} \} \delta(\sum \frac{p_i^2}{2m} - E) \delta^{(2)}(\sum \vec{p}_i) \\ &\quad \times \delta^{(2)}(\sum m \vec{x}_i) \delta(\sum [x_{i1} p_{i2} - x_{i2} p_{i1}]) \\ &= (2\pi^2 m R^2 E)^{N-1} e^{-l^2/2mER^2} / m^2 E N^2 \Gamma(N-1) [2\pi m E R^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (20)$$

Die aus dem GSF (nur mit Energie-Temperatur) folgende asymptotische Form in $1/N$

$$\bar{\Omega}_N(E, l^2) = (2\pi^2 m R^2 E)^{N-1} (e/N)^{N-1} \sqrt{N-1} \frac{e^{-l^2/2mER^2}}{\Gamma(N-1) \sqrt{2\pi m E R^2}} \quad (21)$$

unterscheidet sich von der exakten wiederum nur durch die Stirling-Näherung für die Gammafunktion; insbesondere ist das Drehimpulsverhalten für alle l^2 richtig beschrieben. Da die Struktur des Integral (20) jedoch sehr ähnlich der ist, die die von uns zu berechnenden Integrale besitzen, sind die aus dem allgemeinen GSF folgenden Gültigkeitsbereiche möglicherweise auch für

unsere Zwecke zu eng gefaßt. Diese Vermutung wird unterstützt durch die Tatsache, daß auch die (meist exakt lösbaren) Zweiteilchenphasenräume mit Gauß-Abschneidung im Ortsraum ein Drehimpulsverhalten zeigen, das mit dem aus dem GSF folgenden im Einklang ist.

Die Berechnung des klassischen relativistischen N-Teilchen Phasenraumintegrals (II.A.30) durch Anwendung des GSF geht ganz analog zu dem oben ausgeführten Beispiel; wir verweisen deshalb auf den Anhang und geben hier nur das Ergebnis an. Als asymptotische Form in $1/N$ und mit extrem-relativistischer Näherung für die Khinchin Gleichung erhalten wir

$$\bar{\Omega}_N^{ER}(W, l^2) = \bar{\Omega}_N^{ER}(W) F_N^{ER}(W, l^2) \quad (22)$$

mit

$$\bar{\Omega}_N^{ER}(W) = \frac{6^5 N^{7/2}}{\pi} \left(\frac{e}{3N}\right)^{3N} \frac{[16\pi^{5/2} m W^2 R^3]^{N-1}}{W^4} \quad (23)$$

und

$$F_N^{ER}(W, l^2) = \left(\frac{27}{4}\right) \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{e^{-9N(l_L^2 + l_T^2)/8W^2 R^2}}{W^3 R^3} \quad (24)$$

Hier ist $\bar{\Omega}_N^{ER}(W)$ der asymptotische Phasenraum bei festen Werten von Energie, Impuls und Schwerpunkt; $F_N^{ER}(W, l^2)$ mit

$$\int d^3l F_N^{ER}(W, l^2) = 1 \quad (25)$$

gibt die normierte Drehimpulsverteilung an. Die Erhaltung des Drehimpulses bei der Reaktion verlangt $l_L=0$;

wie wir schon erwähnten, wird sich diese Forderung als eine Konsequenz der Phasenraumbestimmung der Feuerballverteilungsfunktion $U(\ell, W)$ zeigen (siehe 31).

Die Dispersion der Drehimpulsverteilung

$$\sigma_{ER} = 4 W^2 R^2 / qN \quad (26)$$

zeigt, daß höhere Drehimpulse mit wachsender Teilchenzahl immer stärker unterdrückt werden: mit steigendem N und fester Energie wird also der Phasenraum immer "isotroper" in dem Sinne, daß die Hauptbeiträge von niedrigen Drehimpulsen kommen. Das Maximum der Funktion $F_N^{ER}(W, \ell^2)$ für festes ℓ^2 ist bei

$$W^2 = \frac{3}{2} \frac{N \ell^2}{R^2} \quad (27)$$

Andererseits ist

$$\langle [\vec{\mu} \times \vec{x}]^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{R^2 W^2}{N^2} \quad (28)$$

so daß die Wahrscheinlichkeit, irgendeinen festen Wert ℓ_0^2 zu erhalten, dann am größten ist, wenn

$$\ell_0^2 = N \langle [\vec{\mu} \times \vec{x}]^2 \rangle \quad (29)$$

gilt, also ℓ_0^2 gleich der Summe der mittleren quadratischen Einteilchendreimpulse ist.

Den entsprechenden Phasenraum für $N=2$ können wir exakt berechnen; aus (II.A.30) folgt

$$\Omega_2(W, \ell^i) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{R}{W^2 \gamma} \int d^3 \mu \delta(\mu^L - K^L) \frac{\delta(\vec{\ell} \cdot \vec{\mu}) e^{-\frac{1}{2R^2} \left[\frac{\ell_T^2 + \gamma^2 \ell_L^2}{\mu_L^2 + \gamma^2 \mu_T^2} \right]}}{[\mu_L^2 + \gamma^2 \mu_T^2]^{1/2}} \quad (30)$$

Beim einlaufenden Zweiteilchensystem geben wir $\vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$ als Achse vor und definieren damit longitudinal bzw. transversal; es ist also

$$\Omega_2(W, \ell^i, \vec{e}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{R}{W^2 \gamma K^L} \delta(\vec{\ell} \cdot \vec{e}) e^{-\ell^L / 2K^L R^2} \quad (31)$$

wobei aus $\delta(\vec{\ell} \cdot \vec{e})$ die Orthogonalität von Drehimpuls und Strahl folgt. Da wir später (31) als (noch nicht normierte) Feuerballverteilung benutzen wollen, können wir für die Phasenräume der erzeugten Teilchen $\ell_L = 0$ setzen, wie beim GSF Ergebnis bereits bemerkt.

Für $\Omega_2(W, \ell^i)$, entsprechend zwei erzeugten Teilchen, erhalten wir dann im extrem-relativistischen Limes

$$\Omega_2^{ER}(W, \ell^i) = \Omega_2^{ER}(W) F_2^{ER}(W, \ell^i) \quad (32)$$

mit dem Zweiteilchen Energie-Impuls-Schwerpunkt Phasenraum

$$\Omega_2^{ER}(W) = \frac{1}{W^4} \left[(\sqrt{2\pi} R)^3 2mWK\pi \right] \quad (33)$$

und mit

$$F_2^{ER}(W, \ell^2) = \frac{e^{-\ell^2/4K^2R^2} K_0(\ell^2/4K^2R^2)}{8\pi^2 \ell K^2 R^2} \quad (34)$$

als Drehimpulsverteilung (mit $\ell_L=0$, daher nicht mehr normiert); $K_0(x)$ ist die Hankelfunktion nullter Ordnung mit imaginärem Argument. Für große ℓ^2/K^2R^2 ergibt auch (34) - ähnlich wie das GSF Ergebnis - einen exponentiellen Abfall.

Wir kommen nun zur Berechnung des quantenmechanischen Phasenraums, der mit expliziter Projektordarstellung in (II.B.26) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \Omega_N(W, \ell^2) &= \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \left\{ d^3 x_i e^{-\frac{1}{2\ell^2} [\gamma^2 x_{iL}^2 + x_{i\pi}^2]} \right\} \delta(\sum p_{i0} - W) \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) \times \\ &\times \delta^{(3)}(\sum p_{i0} \vec{x}_i) \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\gamma P_\ell(\cos\beta) e^{-i \sum [R(\alpha, \beta, \gamma) \vec{p}_i - \vec{p}_i] \cdot \vec{x}_i} \end{aligned} \quad (35)$$

Dabei haben wir die Drehgruppe durch Eulerwinkel parametrisiert¹⁰⁾, so daß gilt $D_{00}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) = P_\ell(\cos\beta)$, $V_R = 8\pi^2$. Weil wir bereits gesehen haben, wie per GSF der Übergang von der mikrokanonischen zur kanonischen Verteilung im Falle von Deltafunktion-Projektoren ausgeführt wird, wollen wir hier nur noch die Berechnung der durch die Quantenmechanik abgeänderten Drehimpulsprojektion vorführen (für eine vollständige GSF Behandlung des nicht-relativistischen Phasenraumes siehe 14)). Wir betrachten also

$$G \equiv \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^3x_i e^{-\frac{1}{R^2} [\gamma^2 x_{iL}^2 + x_{iT}^2]} \right\} \delta^{(1)}(\sum \mu_{i0} \vec{x}_i) \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \quad (36)$$

$$\times \int d\alpha d\beta \sin\beta d\gamma P_\ell(\cos\beta) e^{-i \sum_i (R\vec{p}_i - \vec{p}_i) \vec{x}_i}$$

und benutzen im weiteren (siehe Anhang) die extrem-relativistischen Ergebnisse

$$\langle \mu_0^a \rangle = \frac{4}{3} \left(\frac{W}{N} \right)^2; \quad \langle \mu_a^2 \rangle = \frac{4}{9} \left(\frac{W}{N} \right)^2; \quad a = 1, 2, 3; \quad \langle \mu_0 \rangle = \frac{W}{N} \quad (37)$$

Damit folgt über die Integraldarstellung der Schwerpunktsdeltafunktion

$$G = \left\{ \frac{(R^3 \pi^{-3/2} / \gamma^2)^{N-1}}{\left(\frac{4}{3} W^2 / N \right)^{3/2}} \right\} \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \int d\alpha d\beta \sin\beta d\gamma P_\ell(\cos\beta) \quad (38)$$

$$\times e^{-\frac{R^2}{2} \left[\gamma^{-2} \sum_i Q_{iL}^2 + \sum_i Q_{iT}^2 \right]}$$

mit

$$Q_{iL}^2 = \frac{1}{2} (R\vec{p}_i - \vec{p}_i)_L^2 \quad (39)$$

$$Q_{iT}^2 = \frac{1}{2} (R\vec{p}_i - \vec{p}_i)_T^2$$

Der erste Faktor in (38) entspricht dem durch Schwerpunkterhaltung um eine Potenz reduzierten N-Teilchen Volumen; nach dessen Abspaltung erhalten wir die Drehimpulsverteilung

$$\bar{F}_N(W, l) = \frac{2l+1}{8\pi^2} \int d\alpha d\beta \sin\beta d\gamma P_l(\cos\beta) e^{-\frac{R^2}{2} [\gamma^2 Q_L^2 + Q_T^2]} \quad (40)$$

die sich per GSF-Methode berechnen läßt. Es zeigt sich¹⁴⁾, daß der Integrand von γ unabhängig ist und für $\alpha=\beta=0$ maximal wird; wir erhalten durch entsprechende Taylor-Entwicklung und die Substitution $\bar{B} = \sqrt{N} B$, $\bar{\gamma} = \sqrt{N} \gamma$ als asymptotisch (in $1/N$) führenden Term im extrem-relativistischen Fall

$$\bar{F}_N(W, l) = \frac{2\pi}{N^{3/2}} \int_0^\infty d\gamma e^{-\frac{2R^2}{9} \left(\frac{W}{N}\right)^2 \gamma^2} \int_0^\infty d\beta \beta e^{-\frac{R^2}{9} \left(\frac{W}{N}\right)^2 \beta^2} \quad (41)$$

Durch Besselfunktionsdarstellung des Legendre-Polynoms

$$P_l\left(1 - \frac{\beta^2}{2N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} J_0\left([l + 1/2] \frac{\beta}{\sqrt{N}}\right) \quad (42)$$

folgt schließlich

$$\bar{F}_N(W, l) = 2\pi \left(\frac{27}{4}\right) \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{3/2} (l + 1/2) \frac{e^{-9N(l+1/2)^2 / 4W^2 R^2}}{W^3 R^3} \quad (43)$$

Bis auf die Ersetzung $l \rightarrow l + 1/2$ (und den aus der abgeänderten quantenmechanischen Normierung herrührenden Faktor 2π) haben wir also die gleiche Drehimpulsverteilung

wie im klassischen Fall. Im Rahmen der GSF Näherung können wir daher im weiteren immer das klassische Phasenraumintegral benutzen: bei hohen Energien und vielen spinlosen Teilchen sind die quantenmechanischen Drehimpulseffekte vernachlässigbar^{10,14)}.

Zum Abschluß dieses Kapitels bringen wir einige Bemerkungen über die Ausführung der für die Normierung des Feuerballzerfalls notwendigen Summation über Phasenräume aller Teilchen. Während bei Berechnung von Aussagen im Falle nicht sehr hoher Teilchenzahlen und mittlerer Energien diese Summe numerisch ausgeführt werden muß, ist es für die Untersuchung allgemeiner Fragen nützlich, das asymptotische Verhalten (N und W groß) der Summe zu kennen³⁰⁾. Wir betrachten also

$$\bar{\Omega}(W, l^2) = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \Omega_N(W, l^2) \quad (44)$$

wobei der Faktor $1/N!$ die Identität der Teilchen berücksichtigt. Mit dem extrem-relativistischen Ergebnis (23/24) haben wir dann

$$\bar{\Omega}(W, l^2) = g(l^2, W) \sum_{N=2}^{\infty} \frac{N^5}{N!} \left(\frac{e}{3N}\right)^{3N} X^N \quad (45)$$

$$X = 16 \pi^{5/2} m W^2 R^3 e^{-9l^2/4W^2 R^2}; \quad g(l^2, W) = 2^{3/2} 3^8 / \pi^{5/2} W^2 R^3$$

Näherungsweise folgt daraus

$$\bar{\Omega}(W, l^2) \approx g(l^2, W) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{N^5}{N!} \left(\frac{e}{4N}\right)^{4N} \left(\frac{4X^{1/4}}{3^{3/4}}\right)^N \quad (46)$$

$$\bar{\Omega}(w, l^2) \approx \frac{1}{4} g(l^2, w) \sqrt{\frac{2}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{M^5}{M!} \left(\frac{e}{M}\right)^M \left(\frac{4X^{1/4}}{3^{3/4}}\right)^M$$

$$\approx g(l^2, w) \frac{X^{5/4}}{2 \times 3^{15/4}} e^{4X^{1/4} / 3^{3/4}}$$

als asymptotische Summenformel. Die schon bei der Berechnung von $\mathcal{Q}_N(w, l^2)$ festgestellte Verkopplung von Isotropie und Teilchenzahl zeigt sich auch hier: während für große l^2/w^2 die Summe gegen $\mathcal{Q}_2(w, l^2)$ geht, divergiert sie mit $w \rightarrow \infty$, $l^2/w^2 \rightarrow 0$, da mit wachsender Energie bei festem l^2 sich immer mehr Vielteilchenkanäle öffnen.

III. Das statistische Modell

A. Zum "Feuerball"-Bild

Nach Fermi wird die Erzeugung von N Teilchen beim Stoß von zwei einlaufenden bestimmt durch das Verhältnis des verfügbaren N -Teilchen Phasenraums $\Omega_N(W)$ zum Gesamtphasenraum $\Omega(W) = \sum_N \Omega_N(W)$; die Integration über Ω wird eingeschränkt durch Energie-Impuls-Erhaltung einerseits und durch die auf der Kurzreichweitigkeit der Kernkräfte beruhende Vorstellung eines Wechselwirkungsvolumens andererseits. Dabei wurde ursprünglich angenommen, daß die beiden einlaufenden Teilchen ihre gesamte Energie im Wechselwirkungsvolumen abgeben; in dieser Energiewolke stellt sich dann sehr schnell ein statistisches Gleichgewicht ein; das, entsprechend den Phasenraumverhältnissen, zur Entstehung eines N -Teilchen Zustandes führt. Diese Vorstellung bringt jedoch mit steigenden Energien Schwierigkeiten mit sich, da nicht klar ist, ob und wie sich bei einer sehr kurzen Wechselwirkungszeit noch ein Gleichgewicht einstellen kann ³¹⁾. Eine von Hagedorn entwickelte Ableitung ²⁾ des statistischen Modells umgeht diese Schwierigkeiten zunächst, indem als Ausgangspunkt des Modells die Konstanz des kinematisch ausreduzierten quadrierten S -Matrixelements angenommen wird; auch wir haben in I. bei der Einführung einer Gleichverteilung im Phasenraum praktisch diesen Weg eingeschlagen. Will man jedoch in einem solchen Rahmen den Begriff eines zentralen Stoßes in Abhängigkeit der Energie diskutieren, so tritt das gleiche Problem wieder auf.

Nun deuten neuere Beschleunigerdaten ³²⁾ auch an, daß eine Gleichbehandlung aller auslaufenden Teilchen nicht zulässig ist, mit Ausnahme wohl von reinen Vernichtungs-

reaktionen (wenn wir für den Augenblick von Resonanzeffekten absehen). In der kosmischen Strahlung drückt sich diese Tatsache in einer asymptotischen Inelastizität von weniger als 100 % aus. Es scheinen sich, auch bei Beschleunigerexperimenten mit besserer Statistik, meist einige wenige Teilchen mit sehr viel höherer Energie als der statistisch zu erwartenden zu zeigen, die sich über gewisse Quantenzahlen mit den einlaufenden Teilchen verknüpfen lassen. Obwohl bisher, besonders bei der Behandlung der kosmischen Strahlung, hierzu bereits einige "multiple fireball" Ansätze³³⁾ für die Verkopplung statistischer Mechanismen mit peripheren gemacht wurden, scheint uns die theoretische Klärung einer solchen Nicht-Gleichverteilung durch Auszeichnung gewisser Teilchen bisher noch völlig offen.

Ein weiteres Problem im Zusammenhang mit der konstanten Phasenraumwichtung wird durch das Auftreten von Resonanzen bei bestimmten Energien gegeben: hier ist die Annahme unkorrelierter auslaufender Teilchen sicherlich unzulässig. Man hat daher vorgeschlagen, die auftretenden Resonanzen als Teilchen zu behandeln, die dann nach Verlassen des Wechselwirkungsvolumens wieder (stark) zerfallen - was das Bild unkorrelierter Erzeugung auslaufender Teilchen durch Erweiterung des "Teilchen"-Begriffs in diesem Rahmen wieder herstellt und für bestimmte Experimente recht gute Ergebnisse liefert³⁾. Für eine systematische Untersuchung der Resonanzeffekte in Abhängigkeit der Energie ist es vielleicht zweckmäßiger, den Phasenraum mit der entsprechenden Zwei- oder Dreiteilchen-Resonanzverteilung zu wichten.

Nach diesen einschränkenden Bemerkungen zur Gültigkeit des von uns angesetzten Feuerballzerfalls per Phasenraum mit Gleichverteilung wollen wir die möglichen Aussagen über inelastische Wirkungsquerschnitte untersuchen. Das statistische Modell mit Energie-Impuls-Erhaltung liefert zunächst nur Verhältnisse, da die Proportionalitätsfunktion zwischen Übergangswahrscheinlichkeit und Phasenraum offen ist. Nehmen wir zusätzlich den gesamten inelastischen Querschnitt $\sigma_{in}(W)$ als vorgegeben an, so können wir mit Fermi¹⁾ den Ansatz

$$\sigma_N(W) = \sigma_{in}(W) \frac{\Omega_N(W)}{\Omega(W)} \quad (1)$$

für die Verteilung von $\sigma_{in}(W)$ über die verschiedenen N-Teilchen Kanäle machen. Diese Form gestattet jedoch keine Berücksichtigung der Unitaritätsverkopplung zwischen elastischen und inelastischen Reaktionen; auch erlaubt sie nicht, die zentrale Natur der statistischen Reaktion in das Modell einzubauen. Eine aus dieser Sicht zweckmäßigere Form wäre¹⁾

$$\sigma_N(W) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sigma^F(\ell, W) \frac{\rho_N(\ell, W)}{\Omega(\ell, W)} \quad (2)$$

wobei dann durch den partiellen Feuerballquerschnitt $\sigma^F(\ell, W)$ Aussagen über die Drehimpulsverteilung (bzw. Stoßparameterabhängigkeit) der Feuerballentstehung, also Aussagen über die Zentralität des Prozesses gemacht werden³⁴⁾. Dabei folgt aus der "Kausalität" (keine Wechselwirkung bei großen Abständen) lediglich, daß $\sigma^F(\ell, W)$ mit dem Stoßparameter ℓ/K abfallen muß.

Wir haben nun vorgeschlagen¹⁵⁾, diese Verteilung im statistischen Modell mit Drehimpulserhaltung gleichfalls per Phasenraum zu bestimmen (siehe auch 10)); d.h. wir setzen für die Übergangswahrscheinlichkeit $2 \rightarrow N$

(3)

$$P_{2 \rightarrow N}(\ell, W) = U(\ell, W) \frac{\Omega_N(\ell, W)}{\Omega(\ell, W)}$$

wobei die Feuerballentstehung aus den beiden einlaufenden Teilchen in Abhängigkeit des dimensionslosen Stoßparameters $\rho = \ell / K\bar{R}$ (mit $R = \langle R^2/K^2 \rangle^{1/2}$) durch die Zweiteilchen-Drehimpulsverteilung $\Omega_2(\ell, W, \vec{e})$ festgelegt werden soll:

$$U(\ell, W) \sim \Omega_2(\ell, W, \vec{e}) \quad (4)$$

Dabei bringt die in $\Omega_2(\ell, W, \vec{e})$ enthaltene Deltafunktion (siehe II.C.31) automatisch die Orthogonalität von Strahl und Drehimpuls mit sich, so daß sich auch die (klassisch) dreidimensionale Drehimpulsintegration auf die (2) entsprechende zweidimensionale reduziert. Es wird also über die "Ringe" einer zum Strahl orthogonalen "Scheibe" summiert¹⁾.

Wir betrachten (3) als Ansatz nur für inelastische Reaktionen; die Wahrscheinlichkeitserhaltung

$$\sum_{N=2}^{\infty} P_{2 \rightarrow N} = 1 \quad (5)$$

bestimmt dann jedoch auch den elastischen Übergang $P_{2 \rightarrow 2}(\ell, W)$.

Nun ist das N-Teilchen ($N \geq 3$) Wirkungsquerschnitt gegeben durch ¹¹⁾

$$\sigma_N(W) = \frac{\pi}{K^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sum_{\{\gamma_N\}} |\langle \gamma_N \| S(\ell, W) \| \rangle|^2 \quad (6)$$

Dabei indiziert die Parametermenge $\{\gamma_N\}$ im reduzierten Matrixelement die Menge aller mit ℓ und W verträglichen inneren Konfigurationen des N-Teilchen Systems. Die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{2 \rightarrow N}(\ell, W)$ ist dann

$$P_{2 \rightarrow N}(\ell, W) = \sum_{\{\gamma_N\}} |\langle \gamma_N \| S(\ell, W) \| \rangle|^2 \quad (7)$$

Durch Summieren von (3) über $N \geq 2$ und mit (7) erhalten wir für den gesamten Feuerballquerschnitt

$$\sigma^F(W) = \frac{\pi}{K^2} C(W) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) U(\ell, W) \quad (8)$$

wobei wir mit $C(W)$ die bisher noch offene Normierungsfunktion für (4) bezeichnet haben. Man beachte, daß $\sigma^F(W)$ natürlich nur einen Teil der elastischen Reaktion enthält, nämlich den per Feuerball entstehenden, nicht aber die Schattenstreuung, die bei (3/5)

$$P_{2 \rightarrow 2}(\ell, W) = [1 - U(\ell, W)] + [U(\ell, W) \Omega_2(\ell, W) / \Omega(\ell, W)] \quad (9)$$

dem ersten Term entspricht.

Bestimmen wir nun die Funktion $C(W)$ durch Normierung über alle Stoßparameter

$$U(\rho, W) = \Omega_2(\rho, W, \vec{e}) / \int d^3\rho \Omega_2(\rho, W, \vec{e}) \quad (10)$$

so folgt für den gesamten Feuerballquerschnitt

$$\sigma^F(W) = \pi \bar{R}^2 \quad (11)$$

Gl. (8) entspricht also der Normierung des Feuerballquerschnitts auf den geometrischen, d.h. die Energieunabhängigkeit der Gesamtheit aller Feuerballreaktionen, was wir (trotz der eingangs erwähnten Bedenken) hier annehmen wollen. Es ist also $\sigma^F(\ell, W)$ mit

$$\sigma^F(\ell, W) = \frac{\pi}{K^2} \Omega_2(\rho, W, \vec{e}') / \int d^3\rho \Omega_2(\rho, W, \vec{e}') ; \quad \rho = \ell / K\bar{R} \quad (12)$$

bestimmt.

Fassen wir unsere Annahmen noch einmal kurz zusammen:

- a) Feuerballzerfall durch Phasenraum bestimmt: $\Omega_N(\ell, W) / \Omega(\ell, W)$;
- b) Stoßparameterverteilung der Feuerballentstehung durch Phasenraum bestimmt: $U(\rho, W) \sim \Omega_2(\rho, W, \vec{e}')$;
- c) Normierung der Stoßparameterverteilung auf 1, bzw. $\sigma^F(W) = \pi \bar{R}^2$.

Diese Annahmen zusammen liefern ein Modell, das sowohl für alle inelastischen Meßdaten als auch für die gekoppelten elastischen Absorptionsreaktionen experimentell nachprüfbar Aussagen liefert. Es enthält als einzigen anzupassenden Parameter den Wechselwirkungsvolumenradius R (der aber durch $R \sim 1/m_p$ schon grob festgelegt ist); ferner haben wir, wie schon erwähnt, etliche Freiheit in der Wahl der Ortsraumbeschränkung⁺). Sowohl die funktionale

⁺) : Durch eine Abschneidung wie $a \cdot e^{-\frac{1}{R^2} [\gamma^2 x_L^2 + x_T^2]}$ läßt sich noch ein weiterer, die Stärke der Wechselwirkung beschreibender Parameter a einführen.

Form der Abschneidung als auch R lassen sich jedoch unabhängig voneinander bei elastischen und inelastischen Reaktionen untersuchen, was eine zusätzliche Prüfung ermöglicht.

Setzen wir nun (II.C.31) explizit ein, so folgt

$$U(\rho) = e^{-\rho^2} ; \quad \rho = l/K\bar{R} ; \quad \bar{R}^2 = 2R^2 \quad (13)$$

als Feuerballverteilung. Wir betrachten dieses Gauß-Verhalten als eine sinnvolle Interpolation zwischen dem linear exponentiellen ρ -Abfall eines peripheren Graphen und dem rein zentralen $\delta(\rho)$ Ansatz, der effektiv auf das übliche statistische Modell zurückführt.

B. Einige allgemeine Ergebnisse für inelastische Reaktionen

Die Anwendung des hier behandelten statistischen Modells mit voller Kinematik auf spezielle Prozesse wird, wie wir gesehen haben, in den meisten Fällen numerische Rechnungen erfordern: die Lösung der Khinchin-Gleichung sowie die Summationen über Teilchenzahlen und Drehimpulse sind bei den bisher vorliegenden Energien und Teilchenzahlen nur so genügend genau ausführbar. Auch müssen dabei dann von uns vernachlässigte Aspekte wie verschiedene Massen, Spins, Isospins, usw. berücksichtigt werden. In der vorliegenden Arbeit streben wir keine solche Behandlung an; wir wollen im folgenden vielmehr einige allgemeine Ergebnisse des Modells diskutieren, die für alle Reaktionen zumindest asymptotisch gültig sind; diese wollen wir dann mit den entsprechenden Resultaten des üblichen statistischen Modells ohne Drehimpulserhaltung (SM) und des multiperipheren Modells (MPM) vergleichen.

1. Integrierte Größen

Betrachten wir zunächst den gesamten Querschnitt für inelastische Reaktionen

$$\sigma_{in}(W) = \sum_{N=3}^{\infty} \sigma_N(W) = \frac{\pi}{K^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) U(l,W) \left[1 - \frac{\Omega_2(l,W)}{\Omega(l,W)} \right] \quad (1)$$

$$\approx 2\pi R^2 \int_0^{\infty} d\rho^2 e^{-\rho^2} \left[1 - \frac{\Omega_2(\rho,W)}{\Omega(\rho,W)} \right]$$

Da die Abschneidung in $\rho = l/K\bar{R}$ energieunabhängig ist, $\Omega_2(\rho,W)/\Omega(\rho,W)$ nach den Ergebnissen von II.C aber bei festem ρ mit wachsender Energie wegen der ständig wachsenden Zahl der Kanäle gegen Null geht, erhalten wir

$$\lim_{W \rightarrow \infty} \sigma_{in}(W) = \pi \bar{R}^2; \quad \bar{R}^2 = 2R^2 \quad (2)$$

Asymptotisch gilt also $\sigma_{in}(W) \rightarrow \sigma^F(W) = \pi \bar{R}^2$, und zwar nähert sich $\sigma_{in}(W)$ diesem Wert monoton von unten. Wie man erwartet, ist $\sigma_{in}(\infty)$ nur durch die Stoßparameterverteilung der Feuerballentstehung bestimmt und somit bei der Normierung (III.A.10) von der Form der Ortsraumabschneidung unabhängig.

Die mittlere erzeugte Teilchenzahl

$$\bar{N} = \frac{1}{\sigma_{in}(W)} \sum_{N=3}^{\infty} N \sigma_N(W) = \frac{\pi}{K^2 \sigma_{in}(W)} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) U(l,W) \left[\frac{\sum_3^{\infty} N \Omega_N(l,W)}{\sum_2^{\infty} \Omega_N(l,W)} \right] \quad (3)$$

können wir mit

$$Z = \left[16 \pi^{5/2} m W^2 R^3 e^{-9/4} e^{l^2/4W^2 R^2} \right] \quad (4)$$

nach (II.C.23/24) asymptotisch näherungsweise schreiben als

$$N \approx \int_0^\infty dp^2 U(p) z \frac{\partial}{\partial z} \ln \sum_2^\infty \Omega_N(z, W) \quad (5)$$

Da nun der logarithmisch führende Term der Summe in (5) durch

$$\ln \sum_2^\infty \Omega_N(z, W) = \text{const. } z^{1/4} \left[1 + O\left(\frac{\ln z}{z^{1/4}}\right) \right] \quad (6)$$

gegeben ist (II.C. 46), erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{N} &\approx \text{const.} \int_0^\infty dp^2 e^{-p^2} z^{1/4} \\ &= \text{const.} (m W^2 R^3)^{1/4} \end{aligned} \quad (7)$$

Die mittlere Teilchenzahl steigt also asymptotisch wie $W^{1/2}$ an, was auch aus dem Fermi'schem SM mit Lorentzkontraktion folgt; das MPM hingegen liefert einen logarithmischen Anstieg mit der Energie. Bisherige experimentelle Daten weisen auf ein Anwachsen wie etwa $W^{1/a}$ mit $a = 1.5 - 2$ hin. Da bei einer Phasenraumbeschreibung a ganz allgemein durch die Potenz der Impulsraumwichtung ($d^3p/2p_0$, d^3p , $d^3p.p_0$ usw.) bestimmt wird, sind die Experimente hier durchaus mit einer statistischen Beschreibung verträglich.

Untersuchen wir nun den asymptotischen Abfall der N-Teilchen Wirkungsquerschnitte $\bar{\sigma}_N(W)$. Mit

$$\sigma_N(W) = \frac{\pi}{K^2} \sum_l (2l+1) U(l, W) \Omega_N(l, W) / \Omega(l, W) \quad (8)$$

$$\approx \frac{\text{const.}}{(mW^2 R^3)^{8/9}} \int_0^{mW^2 R^3} dz z^{N-1/9} / \Omega(z)$$

erhalten wir wegen des exponentiellen Abfalls (II.C.46) von $\Omega(z)$ für große z

$$\sigma_N(W) \approx \text{const. } R^2 / (mW^2 R^3)^{8/9} \quad (9)$$

so daß $\sigma_N(W)$ für alle N asymptotisch wie $W^{-16/9}$ abfällt. Die W -Potenz selbst ist auch wieder bestimmt durch die Potenz der Impulsraumwichtung; so führt ein zusätzliches $1/p_0$ auf einen W^{-2} Abfall, und die in 15) benutzte Form ergab W^{-4} . Allen Formen gemeinsam jedoch ist die Aussage, daß alle inelastischen Kanäle mit der gleichen W -Potenz asymptotisch verschwinden. Das übliche statistische Modell würde nach (III.B.1) mit konstantem $\sigma_{in}(W)$ einen exponentiellen Abfall in $W^{1/2}$ ergeben, während daß MPM mit $\sigma_N(W) \sim (\log W)^N / W^4$ einen schwach N -abhängigen Abfall liefert.

Das Verzweigungsverhältnis

$$Q(N/\bar{N}) = \sigma_N(W) / \sigma_{\bar{N}}(W) \quad (10)$$

wird im statistischen Modell mit Drehimpulserhaltung konstant für $W \rightarrow \infty$, nach (9) und den darauf folgenden Bemerkungen. Das übliche SM liefert mit $\bar{N} > N$ einen Abfall wie $W^{2(N-\bar{N})}$, das MPM $(\log W)^{N-\bar{N}}$. Bisherige Untersuchungen ¹⁵⁾ über $p-\bar{p}$ Vernichtung in Pionen ³⁵⁾ bei Energien von null bis 7 GeV/c (Labor) deuten

auf einen konstanten oder nur langsam abfallenden Wert von $Q(N/\bar{N})$ hin.

Fassen wir kurz zusammen: die bisherigen integrierten Ergebnisse des statistischen Modells mit voller Kinematik liefern, unabhängig von der speziellen Form des Wechselwirkungsvolumen-Ansatzes, einen asymptotisch konstanten, dem geometrischen gleichen inelastischen Wirkungsquerschnitt, einen Anstieg der mittleren Teilchenzahl wie $W^{1/a}$, $a > 1$, und einen N-unabhängigen asymptotischen Abfall von $\sigma_N(W)$ ($\sim W^{-b}$, $b > 1$), was asymptotisch konstante Verzweigungsverhältnisse zur Folge hat. Genauere Berechnungen der oben erwähnten p- \bar{p} Experimente sind z.Zt. in Ausführung.

2. Die Transversalimpulsverteilung der Sekundärteilchen

Eines der bemerkenswertesten experimentellen Ergebnisse in der Vielteilchenerzeugung ist die sogenannte "Konstanz" des Transversalimpulses der Sekundärteilchen: mit steigender Primärenergie steigt die Zahl der erzeugten Teilchen, aber - im Einklang mit statistischen Überlegungen - schwächer als linear in der Energie; die erzeugten Teilchen erhalten also selbst auch eine immer größere Energie. Es zeigt sich nun aber experimentell, daß der mittlere Transversalimpuls der erzeugten Teilchen, d.h. die Impulskomponente senkrecht zur Richtung des einlaufenden Strahls, dabei nicht oder nur sehr schwach weiter ansteigt; bei hohen Primärenergien kommt der überwiegende Teil der Sekundärteilchenenergien aus deren Longitudinalimpuls: die erzeugten Teilchen sind also um die Strahlachse scharf kegelförmig gebündelt. Eine spezielle Auszeichnung der Strahlachse ist aber im statistischen Modell mit Drehimpulserhaltung durch die Lorentzkontraktion gegeben - wir wollen deshalb untersuchen, wie sich diese auf die Impulsverteilung der Teilchen auswirkt.

Betrachten wir zunächst das Phasenraumintegral ohne Kontraktion

$$\Omega_N(W, l^2) = \int \prod_{i=1}^N \{ d^3 p_i d^3 x_i e^{-x_i^2/R^2} \} \delta(\sum p_{i0} - W) \delta^3(\sum \vec{p}_i) \delta^3(\sum p_{i0} \vec{x}_i) \delta^3(\sum x_{i0} \vec{p}_i - \vec{l}) \quad (1)$$

Durch Integraldarstellung der Drehimpuls- und Schwerpunktdeltafunktion erhalten wir

$$\Omega_N(W, l^2) = \int \prod_{i=1}^N d^3 p_i \delta(\sum p_{i0} - W) \delta^3(\sum \vec{p}_i) F_N(l; p_1, \dots, p_N) \quad (2)$$

mit

$$F_N(l; p_1, \dots, p_N) = \frac{(\pi^{3/2} R^3)^{N-1}}{(2\pi)^3 (\sum p_{i0})^{3/2}} \int d^3 p e^{i p \cdot \vec{l} - \frac{R^2}{2} \left[\sum (p_i x_i)^2 - \frac{(\sum p_{i0} \vec{p}_i x_i)^2}{\sum p_{i0}^2} \right]} \quad (3)$$

als Impulsraumwichtung aus Drehimpulsfestlegung. Wir nehmen nun an (siehe II.C), daß wir die Energie p_{i0} eines Teilchens näherungsweise durch ein Mittel $\langle p_0 \rangle$ ersetzen dürfen. Dann verschwindet der zweite Term im R^2 -Exponenten von (3) - d.h., die Schwerpunktfestlegung bewirkt praktisch nur eine Reduktion der Volumenpotenz um eins: $R^{3N} \rightarrow R^{3(N-1)}$. Ferner nehmen wir an, daß (für große N) in einem durch die Strahlrichtung bestimmten Koordinatensystem (Longitudinalrichtung ~ 1 -Komponente) die Impulskomponenten der Teilchen dem Vorzeichen nach willkürlich verteilt sind, so daß gilt

$$\sum_{i=1}^N p_{ia} p_{ib} \approx 0 \quad ; \quad a \neq b \quad ; \quad a, b = 1, 2, 3 \quad ; \quad N \gg 2 \quad (4)$$

Es folgt dann für (3) bei Berücksichtigung der Orthogonalität von \vec{l} und Strahlrichtung \vec{e}

$$F_N(\ell; \mu_1, \dots, \mu_N) = \frac{(\pi^{3/2} R^3)^{N-2} e^{-\ell^2/R^2(Q^2 + \frac{1}{2}T^2)}}{(\sum \mu_{i0}^2)^{3/2} [T^2(Q^2 + \frac{1}{2}T^2)]^{1/2}} \quad (5)$$

mit

$$T^2 = \sum_{i=1}^N \vec{p}_{iT}^2 \quad (6)$$

$$Q^2 = \sum_{i=1}^N p_{iL}^2$$

als Summen der quadrierten Transversal- und Longitudinalimpulse.
Gehen wir (wie in II,C) überall zur mittleren Größen über

$$p_{iL}^2 \sim \langle p_{iL}^2 \rangle \quad ; \quad \vec{p}_{iT}^2 \sim \langle \vec{p}_{iT}^2 \rangle \quad ; \quad \vec{p}_i^2 \sim \langle \vec{p}_i^2 \rangle = \langle \vec{p}_{iT}^2 \rangle + \langle p_{iL}^2 \rangle \quad (7)$$

$$p_{i0}^2 \sim \langle p_{i0}^2 \rangle$$

so folgt

$$F_N(\ell; \mu_1, \dots, \mu_N) = (\pi^{3/2} R^3)^{N-2} N^{-3} [\langle p_{i0}^2 \rangle^3 \langle \mu_T^2 \rangle (\langle p_{iL}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu_T^2 \rangle)^2]^{-1/2} \quad (8)$$

$$\times e^{-\left\{ \frac{\ell^2}{NR^2 \langle \vec{p}^2 \rangle} \left[\frac{\langle p_{iL}^2 \rangle}{\langle p_{iL}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu_T^2 \rangle} + \frac{\langle \mu_T^2 \rangle}{\langle p_{iL}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu_T^2 \rangle} \right] \right\}}$$

Bis auf einen Faktor zwei ist der exponentielle Abfall in $\langle p_{iT}^2 \rangle$ und $\langle p_{iL}^2 \rangle$ der gleiche - die Drehimpulswichtung $F_N(\ell; p)$ führt also wie zu erwarten auf keine besondere Transversalimpulsbeschränkung.

Führen wir nun in der Ortsraumabschneidung die Lorentzkontraktion ein

$$e^{-\frac{1}{R^2} [\gamma^2 x_L^2 + x_T^2]} \quad (9)$$

so ergibt diese Auszeichnung der Strahlachse als Drehimpulswichtung

$$F_N(\ell, p) = (\pi^{3/2} R^3)^{N-2} N^{-3} \left[\langle \mu_0^2 \rangle^3 \langle \mu_T^2 \rangle \left(\langle \mu_L^2 \rangle + \frac{\gamma^{-2}}{2} \langle \mu_T^2 \rangle \right)^2 \right]^{-1/2} \times \quad (10)$$

$$e^{-\left\{ \frac{\ell^2}{NR^2 \langle \mu^2 \rangle} \left[\frac{\langle \mu_L^2 \rangle}{\langle \mu_L^2 \rangle + \frac{\gamma^{-2}}{2} \langle \mu_T^2 \rangle} + \frac{\langle \mu_T^2 \rangle}{\langle \mu_L^2 \rangle + \frac{\gamma^{-2}}{2} \langle \mu_T^2 \rangle} \right] \right\}}$$

Im extremrelativistischen Limes ($\gamma^{-2} \rightarrow 0$) folgt daraus

$$F_N(\ell, p) = (\pi^{3/2} R^3)^{N-2} N^{-3} \left[\langle \mu_0^2 \rangle^3 \langle \mu_T^2 \rangle \langle \mu_L^2 \rangle^2 \right]^{-1/2} \times \quad (11)$$

$$e^{-\left\{ \frac{\ell^2}{NR^2 \langle \mu^2 \rangle} \left[1 + \frac{\langle \mu_T^2 \rangle}{\langle \mu_L^2 \rangle} \right] \right\}}$$

Gleichung (11) ergibt (bei festem $\langle p_T^2 \rangle$) für wachsendes $\langle p_L^2 \rangle$ eine Verteilung, die sehr kleine $\langle p_L^2 \rangle$ unterdrückt, ansonsten schwach veränderlich in $\langle p_L^2 \rangle$ ist; insbesondere wird der Exponent für große $\langle p_L^2 \rangle$ ganz $\langle p_L^2 \rangle$ -unabhängig. Hingegen bringt wachsendes $\langle p_T^2 \rangle$ eine Gauß'sche Abschneidung im mittleren Transversalimpuls. - Die Einführung der Lorentzkontraktion ergibt also eine Impulsverteilung $F_N(\ell, p)$, die große Longitudinalimpulse und kleine Transversalimpulse stark bevorzugt. Diese Aussage hängt natürlich kritisch von der Drehimpulsfestlegung im Phasenraum ab, da die Strahlrichtung im Impulsraum erst dadurch festgelegt wird; Abschneidung (9) ohne Drehimpulserhaltung führt auf das übliche p_T - p_L symmetrische Impulsraumintegral zurück.

Abschließend eine Bemerkung zu "Transversaltemperatur": da das Einteilchenimpulsraumintegral im Falle einer durch (11) nahegelegten zusätzlichen $\exp(-Ap_T^2/p_L^2)$ Wichtung bereits mit der Beschränkung $\exp-\alpha_L |p_L|$, $\alpha_L > 0$ konvergiert, statt eine wie in II.C benutzte $\exp-\alpha p_0$ ($\alpha \sim 1/kT$) Verteilung zu verlangen,

$$\bar{\varphi}(\alpha_L, A) = \int d^3p e^{-\alpha_L |p_L| - A p_T^2/p_L^2} = 4\pi / \alpha_L^3 A$$

kann man vermuten, daß die Berücksichtigung von Lorentzkontraktion und Drehimpulserhaltung auf eine modifizierte "Temperatur" in der Transversalimpulsverteilung führt, wofür auch experimentelle Hinweise bestehen³⁶⁾.

C. Elastische Streuung

In III.A haben wir über die Wahrscheinlichkeitserhaltung aus dem Ansatz für inelastische Prozesse die Form

$$P_{2 \rightarrow 2}(\ell, W) = 1 - U(\ell, W) \left[1 - \frac{\Omega_2(\ell, W)}{\Omega(\ell, W)} \right] \quad (1)$$

für die elastische Übergangswahrscheinlichkeit erhalten. Wir wissen ferner, daß $P_{2 \rightarrow 2}(\ell, W)$ das quadrierte S-Matrixelement $|s_\ell(W)|^2$ ist. Mit

$$s_\ell(W) = 1 + 2i t_\ell(W) \quad (2)$$

ist dann der elastische Wirkungsquerschnitt durch

$$\frac{\partial \sigma_{el}}{\partial \Omega} = \frac{\pi}{4W^2} |T(W, \cos \theta)|^2 \quad (3)$$

$$T(W, \cos \theta) = \frac{2W}{\pi K} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos \theta) t_\ell(W)$$

gegeben, und der totale Wirkungsquerschnitt per optischem Theorem durch

$$\sigma_{\text{tot}}(W) = \frac{2\pi^2}{kW} \sum_m T(W, \cos\theta=1) \quad (4)$$

Nun folgt zunächst aus (1)

$$|s_\ell(W)|^2 = \left[U(\ell, W) \frac{\Omega_2(\ell, W)}{\Omega(\ell, W)} \right] + [1 - U(\ell, W)] \quad (5)$$

Der erste Term in (5) entspricht elastischen Feuerballübergängen, d.h. der Reaktion $2 \rightarrow F \rightarrow 2$; der zweite beschreibt die durch inelastische Kanäle hervorgerufene Schattenstreuung. Bei hohen Energien und nicht zu kleinen Stoßparametern unterdrückt die große Zahl inelastischer Kanäle den Feuerballzerfall in zwei Teilchen fast gänzlich ($\Omega_2/\Omega \sim 0$), und es tritt nur Schattenstreuung auf.

Aus (5) erhalten wir

$$t_\ell(W) = \frac{1}{2i} \left[1 - \sqrt{1 - U(\ell, W) \left[1 - \Omega_2(\ell, W)/\Omega(\ell, W) \right]} e^{2i\delta_\ell(W)} \right] \quad (6)$$

wobei $\delta_\ell(W)$ die (reelle) Streuphase ist, und $U(\ell, W)$ nach III.A.13 durch $\exp(-\ell^2/2K^2R^2)$ gegeben ist. Nun verschwindet $|s_\ell(W)|$, d.h. die Wurzel in (9), für einen großen ℓ -Bereich ($\ell \lesssim KR/2$), wegen der Dominanz inelastischer Kanäle. In diesem Bereich haben wir also unabhängig von der Phase eine rein imaginäre Streuamplitude $t_\ell(W) \sim 1/2i$. Für sehr große Stoßparameter muß $t_\ell(W)$ nach Betrag und Phase verschwinden, da dann keine Wechselwirkung mehr stattfinden darf ($s_\ell(W)=1$); für den Betrag folgt dies aus (8), da für große ℓ $\Omega(\ell, W) \rightarrow \Omega_2(\ell, W)$ geht (siehe II.C). Wir nehmen nun im folgenden an, daß bei hohen Energien auch im intermediären Bereich ($\ell \gtrsim KR/2$) $\delta_\ell(W)$ bereits vernachlässigt werden kann, und erhalten damit eine

rein imaginäre Hochenergie-Streuamplitude. Für den totalen Wirkungsquerschnitt folgt daraus

$$\sigma_{\text{tot}}(W) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[1 - \sqrt{1 - e^{-\ell^2/2k^2 R^2} \left[1 - \mathcal{R}_2(\ell, W)/\mathcal{L}(\ell, W) \right]} \right] \quad (7)$$

was für $W \rightarrow \infty$ gegen

$$\bar{\sigma}_{\text{tot}} = 4\pi R^2 \times 2(1 - \log 2) = 2.46 \pi R^2 \quad (8)$$

konvergiert. Somit erhalten wir

$$\bar{\sigma}_{\text{el}} = .46 \pi R^2 \quad (9)$$

und folglich

$$\bar{\sigma}_{\text{el}}/\bar{\sigma}_{\text{tot}} = .187 \quad (10)$$

Die letzten drei Werte (und auch $\sigma_{\text{in}}(\infty)$) sind wegen $\mathcal{R}_2/\mathcal{L} \rightarrow 0$ eine reine Konsequenz der Feuerballverteilung $U(\ell, W)$, die wiederum aus dem Zweiteilchenphasenraum mit Gaußabschneidung (und aus der Normierungsbedingung III.A.10/11) bestimmt wurde. Wir können somit (10) als Test für die Gaußabschneidung und (9) als einen für den Wert von R auffassen, beides im Rahmen elastischer Reaktionen. Aus den Ergebnissen inelastischer Prozesse folgt dann noch eine weitere Prüfung, deren Resultat mit dem elastischen in Einklang stehen sollte.

Die Ergebnisse (8-10) hat Van Hove⁶⁾ aus dem bereits eingangs erwähnten "uncorrelated jet model" (UJM) abgeleitet, das auf eine Gaußsche Partialwellenfunktion führt (siehe jedoch 37), wo auf Schwierigkeiten im Energieverhalten der Dispersion dieser Gaußfunktion hingewiesen wird). Unsere Form (6) ist für hohe Energien gaußisch mit Dispersion $2K^2 R^2$, jedoch primär als Folge der durch den Zweiteilchenphasenraum bestimmten Feuerballverteilung. Wir möchten daher die recht gute experimentelle Übereinstimmung mit (8-10) hier in erster Linie als Stütze unserer Annahme einer

Gaußschen Abschneidefunktion auffassen.

Aus dem MPM folgt zwar auch ein konstanter totaler Wirkungsquerschnitt, jedoch ein logarithmischer Abfall für $\sigma_{el}(W)$ und damit auch für σ_{el}/σ_{tot} ; bisher gibt es für ein solches Verhalten keine experimentelle Evidenz.

Wiederum in Einklang mit den erwähnten Van Hove Ergebnissen erhalten wir für die elastische Streuung bei festem $t = -2K^2(1 - \cos\theta)$ ($|t| \leq 1 \text{ (GeV/c)}^2$), also für die Diffraktionsstreuung

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} \approx \frac{\pi}{4K^4} \left| \int_0^\infty dl^2 J_0\left(\frac{2l}{w} \sqrt{-t}\right) [1 - |S_l(w)|] \right|^2 \approx \left(\frac{d\sigma_{el}}{dt}\right)_{t_0} e^{-.92 R^2 |t| + .0095 R^4 t^2} \quad (11)$$

(Nach 37) führt das UJM nur mit Zusatzannahmen auf ein Energieunabhängiges R^2). Das MPM führt mit $\exp -a|t|(\log s)$ auf die Regge "shrinkage" des Diffraktionsmaximums, die jedoch nach dem derzeitigen experimentellen Stand bei genügend hohen Energien nicht auftritt.

Die hier abgeleiteten Ergebnisse führen mit $R \sim 1/m_\pi$ auf recht gute experimentelle Übereinstimmung. Die kritische Frage ist jedoch, ob und wie weit dieser R-Wert auch für die inelastischen Reaktionen sinnvolle Ergebnisse liefert. Dazu bedarf es noch genauerer numerischer Vergleiche.

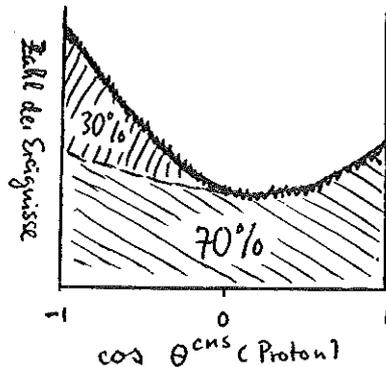
IV. Abschließende Bemerkungen

Im Vorangegangenen haben wir eine statistische Beschreibung für hochenergetische Vielteilchenerzeugungsreaktionen entwickelt, die eine Erweiterung des Fermischen Modells bildet: Ausgehend vom Phasenraum mit allen durch die Poincarégruppe gegebenen Integralen der Bewegung und mit einem in Richtung des einfallenden Strahls Lorentzkontrahierten Wechselwirkungsvolumen, beschreiben wir den $2 \rightarrow N$ Teilchen Übergang bei festen Werten von CMS Gesamtenergie W und -spin \mathcal{L} als Produkt einer den Eingangszustand charakterisierenden Stoßparameterverteilung und einer Teilchenzahlverteilung für den Endzustand, indem wir beide Verteilungen aus Phasenraumüberlegungen konstruieren. Das Ergebnis ist ein Modell, das über alle inelastischen und über die gekoppelten, rein absorptiven elastischen Reaktionsdaten Aussagen liefern kann.

Abschließend wollen wir nun noch einige kritische Bemerkungen zu speziellen Problemen bei einer solchen Beschreibung machen.

Bei der Diskussion der Transversalimpulsverteilung, und überhaupt bei allen differentiellen Aussagen eines statistischen Modells mit Drehimpulserhaltung, ist über die Phasen nichts bekannt. Wir haben (bei inelastischen Prozessen) implizit willkürliche ("random") Phasen⁹⁾ angenommen, d.h. eine inkohärente Summe über die Partialwellen benutzt, die Interferenzeffekte ausschließt. Damit sind alle Winkelverteilungen, die aus solchen Überlegungen folgen, immer vorwärts-rückwärts symmetrisch (nicht aber, wie beim üblichen SM, isotrop). Dies gibt die Möglichkeit, an Hand experimenteller Winkelverteilungen festzustellen, inwieweit eine bestimmte Reaktion statistisch erklärbar ist^{32,38)}. Es zeigt sich dabei in π -N Prozessen³²⁾, daß zwar die auslaufenden Pionen, zumindest bei Vielteilchenkanälen, meist die gesuchte Symmetrie aufweisen, das Proton jedoch bevorzugt durchfliegt (im CMS), also eine sehr anisotrope Winkelverteilung hat. Dieses als Maßstab gestattet über das Verhältnis

symmetrischer zu antisymmetrischen Ereignissen eine Bestimmung des Bruchteils statistischer (oder "zentraler") Prozesse in der betrachteten Reaktion; also folgt etwa aus der Proton-Winkelverteilung im CMS



daß die Reaktion zu 70 % statistischer Natur ist. Das Ergebnis dieser Analyse für π^- -N Reaktionen von 4 - 10 GeV/c (Labor) Pionen ist folgendes³²⁾: Der Prozentsatz zentraler Reaktionen steigt bei fester Energie mit wachsender Teilchenzahl, fällt bei fester Teilchenzahl mit steigender Energie und fällt mit der Energie für $\sigma_{in}(W)$. In anderen Worten, nimmt man die Proton-winkelverteilung zur Bestimmung des Anteils statistischer Prozesse, so wird dieser mit zunehmender Energie immer geringer. Für reine Vernichtungskanäle ($p\bar{p} \rightarrow s\pi, s \geq 2$) hingegen scheint die Symmetriebedingung bei allen bisherigen Energien genügend erfüllt zu sein, um für diese Prozesse eine rein statistische Beschreibung zu gestatten.

Die erwähnten Ergebnisse für π^- -N Prozesse sind im Einklang mit der schon erwähnten asymptotisch unter 100 % liegenden Inelastizität. Man wird also fragen, ob der nicht-statistische, besser nicht-zentrale Anteil solcher Reaktionen auf einen gänzlich "anderen" Mechanismus (etwa MPM) zurückzuführen ist, oder aber als eine Reaktion mit einigen wenigen durchlaufenden Teilchen (N, N^*, π^*) und einem zurückbleibenden angeregten und statistisch in viele Pionen zerfallendes System verstanden werden kann. Wir halten die letztere dieser beiden Möglichkeiten für sehr wahrscheinlich, und zwar aus folgenden Gründen: (a) der Anstieg der

mittleren Teilchenzahl ist funktional im Einklang mit den statistischen Aussagen, also auch mit

$$\pi + N \rightarrow \pi^* + N^* + s\pi \quad ; \quad N + N \rightarrow N^* + N^* + s\pi \quad ; \quad \text{usw.}$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \bar{S}(w) = \infty$$

(b) die Transversalimpulsverteilung ist praktisch die gleiche bei Sekundärteilchen, die aus reinen Vernichtungskanälen, also nach dem Symmetriekriterium aus maximal zentralen, stammen, und solchen, die nach der Protonverteilung aus praktisch 100 % nicht-zentralen stammen; (c) neuere experimentelle Untersuchungen³⁹⁾ scheinen anzudeuten, daß sich bei π -induzierten Erzeugungsprozessen nach Abspalten einer Protonverteilung das verbleibende Vielpionensystem per Phasenraum beschreiben läßt.

In der bisherigen Behandlung haben wir uns auf die Erzeugung von Teilchen beim Stoß zweier stark wechselwirkender Teilchen beschränkt; abschließend wollen wir deshalb noch eine kurze Bemerkung zur elektromagnetischen Erzeugung von Vielpionensystemen bringen: $\gamma + p \rightarrow p + N\pi$. Mit Hilfe der bei verschiedenen Aspekten der elektromagnetischen Wechselwirkung recht erfolgreichen Hypothese der Vektormesondominanz⁴⁰⁾ läßt sich die γ -induzierte Teilchenerzeugung effektiv auf einen Prozess der starken Wechselwirkung zurückführen: die Reaktion $\gamma + p \rightarrow p + N\pi$ wird dadurch mit der Reaktion $V + p \rightarrow p + N\pi$ (V: Vektormeson, hauptsächlich ρ) verknüpft,

$$\sigma(\gamma + p \rightarrow p + N\pi) = g^2 \sigma(V + p \rightarrow p + N\pi)$$

mit g als γ -Vektormeson Kopplungskonstante. Der Querschnitt $\sigma(V + p \rightarrow p + N\pi)$ beschreibt eine Reaktion stark wechselwirkender Teilchen und fällt als solcher in den Rahmen unserer statistischen Betrachtungen.

Den Herren Professoren H. Ezawa (Tokyo) und H. Joos (Hamburg) sowie Herrn G. van Keuk (Hamburg) möchte ich für stimulierende Diskussionen über verschiedene Aspekte des statistischen Modells herzlich danken. Herrn Professor L. Van Hove (CERN) danke ich für die Gelegenheit zur Teilnahme an mehreren CERN-Besprechungen über "High Multiplicity Bubble Chamber Events".

Anhang: Die Berechnung des klassischen relativistischen Phasenraumintegrals

Den Phasenraum (II.A.) schreiben wir

$$\Omega_N(W, l^2) = [\varphi(\alpha)]^N e^{\alpha W} U_N^\alpha(W, l^2) \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\varphi(\alpha) = \int d^3p d^3x e^{-\alpha p_0 - \frac{1}{R^2} [\gamma^2 x_L^2 + x_T^2]} ; \alpha > 0 \quad (\text{A.2})$$

und

$$U_N^\alpha(W) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^3p_i d^3x_i \frac{e^{-\alpha p_{i0} - \frac{1}{R^2} [\gamma^2 x_{iL}^2 + x_{iT}^2]}}{\varphi(\alpha)} \right\} \delta(\sum p_{i0} - W) \times \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) \delta(\sum p_{i0} \vec{x}_i) \delta^{(3)}(\sum x_{iT} \vec{p}_i - \vec{l}) \quad (\text{A.3})$$

Nun ist

$$U_N^\alpha(W, l^2) = (2\pi)^{-10} \int d^4p d^4x d^4v e^{i\beta_0 W + i\vec{\mu} \cdot \vec{l}} [\varphi_\alpha(p, \mu, v)]^N \quad (\text{A.4})$$

mit

$$\varphi_\alpha(p, \mu, v) = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int d^3p d^3x e^{-(\alpha - i\beta_0)p_0 - i\beta \vec{p} - i\vec{\mu} \cdot \vec{x} + i\vec{v} \cdot \vec{p} - i\mu_0 v^0} \times e^{-\frac{1}{R^2} [\gamma^2 x_L^2 + x_T^2]} \quad (\text{A.5})$$

$$\varphi_\alpha(0,0,0) = 1$$

(Dabei transformieren sich α und β kontragredient zu p , μ und v zu $m_{\mu\nu}$; mit $\alpha^2 > 0$ erhält man die spezielle Form (A.3/5), indem man mit einer (drehungsfreien) Lorentztransformation ins Ruhssystem geht; siehe auch 18)). Aus (A.5) folgt

$$\varphi_\alpha(\beta, \mu, \nu) = \frac{(R^3 \pi^{3/2} / \gamma)}{\varphi(\alpha)} \int d^3 p e^{-(\alpha - i p) \mu_0 - i \beta \vec{p} \cdot \mu} \times$$

$$e^{-\frac{R^2}{4} [\gamma^{-2} (\mu_0 \nu_2 + [\mu \times \mu]_L)^2 + (\mu_0 \vec{\nu}_T + [\vec{\mu} \times \mu]_T)^2]} \quad (\text{A.6})$$

Mit der Definition

$$\xi_a = (\beta_0, \vec{\beta}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) ; \quad Q_a = (W, \vec{\sigma}, \vec{L}, \vec{O}) \quad (\text{A.7})$$

haben wir aus (A.4)

$$U_N^\alpha(W, l) = (2\pi)^{-10} \int d^{10} \xi e^{i \xi_a Q^a + N \ln \varphi_\alpha(\xi)} \quad (\text{A.8})$$

Entwickeln wir nun $\varphi_\alpha(\xi)$ um $\xi = 0$, so erhalten wir

$$N \ln \varphi_\alpha(\xi) = - \left[\xi_a A^a + \frac{1}{2!} \xi_a \xi_b B^{ab} + \frac{1}{3!} \xi_a \xi_b \xi_c C^{abc} + \dots \right] \quad (\text{A.9})$$

mit $-A, -B, -C, \dots$ als Abkürzungen für die entsprechenden logarithmischen Ableitungen. Durch $\bar{\xi}_a = \sqrt{N} \xi_a$ folgt

$$U_N^\alpha(W, l) = (2\pi)^{-10} N^{-5} \int d^{10} \xi e^{i \bar{\xi}_a Q^a / \sqrt{N}} \times$$

$$\times e^{- \left[\bar{\xi}_a A^a \sqrt{N} + \frac{1}{2!} \bar{\xi}_a \bar{\xi}_b B^{ab} + \frac{1}{3! \sqrt{N}} \bar{\xi}_a \bar{\xi}_b \bar{\xi}_c C^{abc} + O(1/N) \right]} \quad (\text{A.10})$$

Nun verschwinden aus Symmetriegründen alle ersten logarithmischen Ableitungen außer der nach β_0 . Fordern wir jetzt die Khinchin-Gleichung

$$A_{\beta_0} \equiv \left(\frac{\partial \ln \varphi_\alpha}{\partial \beta_0} \right)_{\xi=0} = i W / N \quad (\text{A.11})$$

so verschwindet der lineare Term in der Entwicklung und wir haben dort eine Potenzreihe nach $1/N$, beginnend mit dem N -unabhängigen quadratischen Glied. (A. 11) führt auf

$$\frac{W}{N} = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \frac{d\varphi}{d\alpha} \quad (\text{A.12})$$

und bestimmt somit α als Funktion von W/N . Im extrem-relativistischen Fall ist (A.12) geschlossen lösbar; mit

$$\varphi^{ER}(\alpha) = (R^3 \pi^{3/2} / \gamma) 8\pi / \alpha^3 \quad (\text{A.13})$$

erhält man

$$\bar{\alpha}^{ER} = 3N/W \quad (\text{A.14})$$

und daraus

$$\varphi^{ER}(\bar{\alpha}) = (R^3 \pi^{3/2} / \gamma) 8\pi W^3 / (3N)^3 \quad (\text{A.15})$$

Wir müssen nun die zweiten logarithmischen Ableitungen von $\varphi_\alpha(\beta, \mu, \nu)$ berechnen; dabei verschwinden wiederum aus Symmetriegründen alle gemischten Ableitungen, so daß B_{ab} diagonal wird (dieses die Rechnungen sehr vereinfachende Resultat erhalten wir, weil wir die gesamte Berechnung im CMS durchführen). Da ferner alle A_a außer A_{β_0} verschwinden, folgt

$$\left(\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial \beta_a^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_a^2} \right)_0 \quad a \sim \vec{\beta}, \vec{\mu}, \vec{\nu} \quad (\text{A.16})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial \beta_0^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_0^2} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_0} \right)^2$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_0}\right)_0 = -i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)_0 = -i \langle \mu_0 \rangle = -i \frac{W}{N} \quad (\text{A.17})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_0^2}\right)_0 = - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}\right)_0 = - \langle \mu_0^2 \rangle = - \frac{4}{3} \left(\frac{W}{N}\right)^2$$

und somit

$$B_{\beta_0 \beta_0} = \frac{1}{3} \left(\frac{W}{N}\right)^2 \quad (\text{A.18})$$

Ähnlich folgt

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_i^2}\right)_0 = - \langle \mu_i^2 \rangle = - \frac{4}{9} \left(\frac{W}{N}\right)^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.19})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_i^2}\right)_0 = - \frac{2R^2}{3} \gamma^{-2} \left(\frac{W}{N}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_{ir}^2}\right)_0 = - \frac{2R^2}{3} \left(\frac{W}{N}\right)^2 \quad i = 1, 2$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_i^2}\right)_0 = - \frac{4}{9} R^2 \left(\frac{W}{N}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_{ir}^2}\right)_0 = - \frac{2}{9} R^2 \left(\frac{W}{N}\right)^2 \quad i = 1, 2$$

Wir erhalten schließlich als asymptotische Form in $1/N$

$$U_N^\alpha(W) = (2\pi)^{-10} N^{-5} \int d\beta_0 d^3\beta d^3\mu d^3v e^{i \frac{\vec{M}}{N} \cdot \vec{\beta}} - \frac{1}{2} B_{\alpha\alpha} \xi^a \xi^a \quad (\text{A.20})$$

$$= (2\pi N)^{-5} [B_{\beta_0 \beta_0} \dots B_{\mu_{r_2} \mu_{r_2}}]^{-1/2} e^{-\frac{1}{2N} \left(\frac{l_L^2}{B_{\mu_L \mu_L}} + \frac{l_T^2}{B_{\mu_T \mu_T}} \right)}$$

was nach Einsetzen aller B-Werte und Berechnung von (A.1) mit (A.13/14/20) auf das Ergebnis (II.C.23/24) führt.

Literatur

- 1) E. Fermi, Progr. Theor. Phys. (Japan) 1, 510 (1950)
E. Fermi, Phys. Rev. 81, 115 (1951)
- 2) R. Hagedorn, Nuovo Cimento 11, 434 (1960)
R. Hagedorn, Fortschr. d. Phys. 9, 1 (1961)
- 3) Weitere Literatur siehe z.B. in
M. Kretzschmar, Ann. Rev. Nucl. Sci. 110, 765 (1958)
- 4) P.P. Srivastava und G. Sudarshan, phys. Rev. 110, 765 (1958)
M. Neumann, Ann. Acad. Brasil. Cienc. 31, 361, 487 (1959)
- 5) G. Fast und R. Hagedorn, Nuovo Cimento 27, 203 (1963)
Weitere Literatur siehe z.B. in
L. Bertocchi und E. Ferrari, High Energy Strong Interactions
of Elementary Particles, CERN 1966
- 6) L. Van Hove, Rev. Mod. Phys. 36, 655 (1964)
- 7) W.N. Cottingham und R.F. Peierls, Phys. Rev. 137, B147 (1965)
- 8) Z. Koba, Nuovo Cimento 18, 608 (1961)
- 9) T. Ericson, Nuovo Cimento 21, 605 (1961)
- 10) F. Cerulus, Nuovo Cimento 22, 958 (1961)
- 11) H. Satz, Fortschr. d. Phys. 11, 445 (1963)
- 12) H. Joos und H. Satz, Nuovo Cimento 34, 619 (1964)
- 13) A. Kotanski und K. Zalewski, Nuovo Cimento 40 B, 134 (1965)

- 14) G. van Keuk, Diplomarbeit Hamburg 1965
- 15) H. Satz und G. van Keuk, Nuovo Cimento (im Druck)
- 16) D. Amati, S. Fubini, A. Stanghellini, Nuovo Cimento 26, 896 (1962)
siehe auch zweites Zitat unter 5)
- 17) G. Sommer, Fortschr. d. Phys. 12, 669 (1964)
- 18) H. Satz, DESY-Bericht 65/2
- 19) H. Joos, Fortschr. d. Phys. 10, 65 (1962)
- 20) M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. (London) 195 A, 62 (1948)
- 21) R. C. Tolman, The Principles of Statistical Mechanics, Oxford 1959
- 22) R. Schrader, Diplomarbeit Hamburg 1964
H. Joos, IAEA Trieste Proceedings 3.5.-30.6.1965
- 23) T. D. Newton und E.P. Wigner, Rev. Mod. Phys. 21, 400 (1949)
- 24) E.P. Wigner, Phys. Rev. 40, 749 (1932)
- 25) J. Van der Linden und P. Mazur, Physica 27, 609 (1961)
- 26) Siehe 2) und 28) für Literaturhinweise
- 27) A. I. Khinchin, Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, Dover 1949
- 28) F. Lurcat und P. Mazur, Nuovo Cimento 31, 140 (1964)
- 29) A. Krzywicki, Journ. of Math. Phys. 6, 485 (1965)
- 30) H. Satz, Nuovo Cimento 37, 1407 (1964)

- 31) H. Fukuda, Phys. Rev. 89, 842 (1953)
- 32) Siehe z.B. O. Czyzewski, XIII International Conference on High Energy Physics, Berkeley 1966, Proceedings
- 33) Siehe z.B. S. Hayakawa in Theoretical Physics IAEC, Vienna 1963
- 34) H. Ezawa, Nuovo Cimento 11, 745 (1959)
- 35) Siehe 15) für Literaturangaben
- 36) F. Kajzar, Preprint Cracow 1966, Thermodynamic Approximation for Transverse Momentum Distribution of Secondary Pions
- 37) L. Van Hove und K. Zalewski, Nuovo Cimento 46 A, 806 (1966)
- 38) G. Wolf, Dissertation Hamburg 1964
- 39) R. Sosnowski, Warsaw, vorläufige Mitteilung
- 40) S.M. Berman und S.D. Drell, Phys. Rev. 133 B, 791 (1964)
M. Ross und L. Stodolsky, Phys. Rev. 149, 1172 (1966)
Weitere Literatur siehe z.B. in
H. Joos, Phys. Letters 24 B, 103 (1967)

