

DESY 69/33
September 1969

DESY-Bibliothek
23. SEP. 1969

Elektroproduktion des N^* (1236)
in der Leiternäherung (II)

von
Fritz Gutbrod

Elektroproduktion des N^* (1236) in der Leiternäherung (II)

von

Fritz Gutbrod

Abstract

Ladder diagrams containing nucleon exchange for πN -scattering and for pion electroproduction in the N^* (1236) channel have been calculated in the resonance region. Using the technique of Padè approximants, scattering and electroproduction amplitudes are constructed from the perturbation series, which converge well with increasing order of the Padè approximants. Two different cut-off procedures for the exchanged nucleon are investigated, as well as inelastic corrections in the direct channel, and the cut-off parameters are adjusted to give the correct scattering phase shift at the resonance position. Agreement with earlier work of Tjon and Nieland is very good.

With the N^* -Bethe-Salpeter wave function determined by the nucleon exchange potential and its cut-off parameters, photo- and electroexcitation amplitudes of the resonance are calculated, assuming single nucleon and pion exchange γNN^* -transition potentials. The dependence of the normalization of the photoproduction amplitudes on the cut-off parameters in the transition potential is only weak, and the momentum transfer dependence of the multipoles is almost independent of the details of the transition potential. The agreement with previous work, where the left hand cut in the multipole amplitudes has been approximated by the ladder series, and where the Omnès method has been used to construct the complete amplitude, is good up to the resonance energy with some discrepancies beyond that region. Especially the shift in the resonance form as a function of momentum transfer in electroproduction has been reproduced. Differences to a simple Born approximation model, which are quite large, are emphasized.

I. Einleitung

Es ist immer noch eine offene Frage, ob man angeregte Zustände des Nukleons dadurch sinnvoll beschreiben kann, daß man annimmt, sie seien aus wenigen anderen Elementarteilchen zusammengesetzt, z.B. aus Nukleon und pseudoskalaren Mesonen. Klar ist nur, daß es gegenwärtig nicht möglich ist, die Massen der Resonanzen in einem solchen Bild zu berechnen. Nun kann man versuchen, für die Wechselwirkung zwischen Meson und Nukleon einen Ansatz zu machen, der für große Abstände mit bekannten Einteilchen-austausch-Diagrammen übereinstimmt, und dessen kurzreichweitiger Teil einige Parameter enthält, die an Streudaten wie Masse und Breite der Resonanz angepaßt werden. Bedient man sich hierbei einer Wellengleichung, etwa der Bethe-Salpetergleichung, so wird dabei die Wellenfunktion der Resonanz mitbestimmt. Die Überprüfung dieser Wellenfunktion kann wie in der Kernphysik durch Berechnung von schwachen oder elektromagnetischen Übergangsmatrixelementen erfolgen. Hierzu sind allerdings noch plausible Ansätze für den Stromoperator nötig, jedoch ist eine Approximierung des Stroms durch Einteilchenbeiträge mit Formfaktoren im Rahmen dieses Modells sehr naheliegend (Abb. 1a und 1b).

In dieser Arbeit werden wir uns auf die erste πN -Resonanz $N^*(1236)$ beschränken aus folgenden Gründen: Erstens ist dort wegen der niederen Energie ein Zweiteilchen-Ansatz (Pion + Nukleon) am ehesten gerechtfertigt. Zweitens ist die Bethe-Salpeter-Gleichung (BSG), deren wir uns bedienen wollen, noch zu wenig erprobt, als daß man sie gleich weit im inelastischen Gebiet anwenden sollte. Drittens ist wohlbekannt, daß das elementare Einnukleon-Austauschdiagramm für diese Resonanz einen stark anziehenden Beitrag zum Potential liefert, so daß wenigstens die Wechselwirkung bei großen Abständen nicht völlig unbestimmt ist. Unser Ziel ist also festzustellen, ob die Wellenfunktion des N^* die Elektroproduktion des N^* am Nukleon richtig beschreibt, wenn das Potential so angepaßt wird, daß die Resonanz an der beobachteten Stelle wiedergegeben wird. Die Streuamplitude und die Wellenfunktion sollen dabei aus der BSG in Leiternäherung berechnet werden.

Wir werden hier die BSG nicht direkt lösen, wie es von vielen Autoren numerisch entweder durch Entwicklung der Bethe-Salpeter-Amplituden nach einem geeigneten Funktionensystem¹⁻⁵ (z.B. vierdimensionalen sphärischen Harmonischen), oder direkte Inversion⁶ für Streuung skalarer Teilchen^{1-3,6} oder gebundener Zustände zwischen Nukleon und Pion⁴ durchgeführt worden ist. Der Grund liegt darin, daß alle diese Verfahren in Fällen mit Spin ziemlich unübersichtlich werden, und daß die benötigte Rechenzeit mit der dritten Potenz der benutzten Matrixengrösse, d.h. auch der Zahl der beteiligten Kanäle, ansteigt im Gegensatz zu einer Iteration der Gleichung, die nur mit der zweiten Potenz der Matrixengrösse aufwendiger wird.

In einer früheren Arbeit⁷ wurde vorgeschlagen, die iterative Lösung der BSG zur Berechnung des linken Schnitts in den Streu- und Multipolamplituden (in der $W = \text{CMS-Energie-Ebene}$) zu verwenden. Obwohl gezeigt wurde, daß die Störungsreihe gut konvergiert, leidet diese Methode an einer prinzipiellen Inkonsistenz: Wenn man aus dem linken Schnitt die volle Amplitude konstruieren will, muß man die Phase auf dem rechten Schnitt kennen.⁸ Diese läßt sich zwar dem Experiment entnehmen, es ist aber nicht sicher, ob sie zum linken Schnitt "paßt" in dem Sinn, daß die BSG, die für den linken Schnitt verwendet wurde, die experimentelle Streuphase wiedergibt. Außerdem ist schwer abzuschätzen, wie genau man den linken Schnitt (durch eine Variation des Potentials) an das Experiment anpassen soll, um eine gute Beschreibung der Streudaten zu erreichen. Unmittelbar beobachtbare Grössen wie Massen und Breiten von Resonanzen bieten eine bessere Möglichkeit zum Anpassen.

Eine weitere Möglichkeit, aus der Störungsreihe eine gute Approximation an die exakte Lösung der BSG zu gewinnen* bietet die Padè-sche Näherung,⁹ bei der im wesentlichen aus der Störungsreihe ein rationaler Ausdruck in der Kopplungskonstanten gewonnen wird. Damit sind gebundene Zustände oder Resonanzen, die Polen in der Kopplungskonstante entsprechen, gut anzunähern. Es gibt zwar keine Beweise über die Konvergenz dieser Näherungsmethode für die uns interessierenden Fälle, jedoch ist die beobachtete tatsächliche Konvergenz für πN -Streuung im N^* -Kanal mit Nukleonaustausch so gut, daß keine vernünftigen Zweifel an der Brauchbarkeit dieses Verfahrens bestehen.¹⁰

*Die Fredholmsche Entwicklung der Resolventen der BSG erfordert ebenfalls einen Aufwand, der mit der dritten Potenz der Matrixgrösse ansteigt.

Es soll in dieser Arbeit gezeigt werden, daß die Verwendung der Padè-schen Näherung für die BSG für Elektroproduktion im N^* -Kanal im wesentlichen zu den gleichen Resultaten führt wie das oben erwähnte dispersionstheoretische Verfahren, das in Ref.(11) für die Elektroproduktion ausgeführt wurde.* Dabei ist die Wiedergabe der elastischen πN -Streuung nicht voll befriedigend, da die Streuamplitude oberhalb der Resonanz nicht rasch genug abfällt, d.h. daß die Resonanz zu breit wiedergegeben wird. Daß der Einschluß von inelastischen Effekten ähnlich wie in Dispersionsmodellen¹² die Situation verbessert, wird in einer groben Näherung angedeutet werden. Das Modell ist für die Elektroproduktion des N^* im Einklang mit den bis jetzt vorliegenden Daten, wenn für den Pionformfaktor ρ -Dominanz angenommen wird.

Im Teil 2 werden die Probleme kurz behandelt, die bei einer Berechnung von Leiterdiagrammen für Elektroproduktion auftreten. Außerdem diskutieren wir die Wahl der geeigneten Padè-Approximanten und damit verknüpfte Konvergenzprobleme. Teil 3 behandelt das πN -Wechselwirkungspotential, das zu einer Resonanz bei der richtigen Masse führt, während im Teil 4 die Wahl des Übergangspotentials $\gamma N \rightarrow \pi N$ diskutiert wird und die Resultate für Photoproduktion mit denen von I verglichen werden. Im Teil 5 wird derselbe Vergleich für Elektroproduktion durchgeführt. Der magnetische Übergangsformfaktor wird für Impulsüberträge von $k^2 = -0.6(\text{GeV}/c)^2$ und $k^2 = -2(\text{GeV}/c)^2$ berechnet und mit den Daten von Ref.(13) verglichen.

Für den Fall der elastischen πN -Streuung im $N^*(1236)$ -Kanal wurden nach Abschluß des numerischen Teils dieser Arbeit von anderen Autoren¹⁴ Rechnungen veröffentlicht, die für eines der in Teil 3 diskutierten Potentiale identische Ergebnisse liefern. Insbesondere der Wert der (3,3)-Streulänge, der zur Wiedergabe der Resonanz bei der richtigen Energie erforderliche cut-off und der "asymptotische" Wert der Streuphase stimmen ausgezeichnet überein.

II. Iteration der BSG und Padè-sche Näherung

Es sollen zunächst die Probleme diskutiert werden, die bei einer Iteration der BSG für Elektroproduktion auftreten. Die BSG für diesen inelastischen Prozess erläutern wir graphisch in Abb.2, wobei die inhomogene Terme, die "Übergangs-

*Die Arbeit¹¹ wird im folgenden mit I bezeichnet.

potentiale" für $\gamma N \rightarrow \pi N$, künftig mit M^{Born} abgekürzt werden. Wenn die Born-terme durch ein Nukleonaustauschdiagramm für elastische Streuung ersetzt werden, erhalten wir die BSG für πN -Streuung. Bei drei verschiedenen Massen (Nukleon-, Pion- und Photonmasse) treten bei der numerischen Iteration der BSG im Impulsraum einige Schwierigkeiten infolge der Singularitäten der Integranden auf, die schon bei der BSG für skalare Teilchen sichtbar werden. Sei

$$M(q_0, |\vec{q}|) = M^{\text{Born}}(q_0, |\vec{q}|) - i\lambda \int dq'_0 d|\vec{q}'| K(q_0, |\vec{q}|, q'_0, |\vec{q}'|) M(q'_0, |\vec{q}'|) \quad (1)$$

die BSG für eine inelastische Amplitude mit der Bornschen Näherung* $M^{\text{Born}}(q_0, |\vec{q}|)$ mit folgenden Bezeichnungen:

$$K(q_0, |\vec{q}|, q'_0, |\vec{q}'|) = \frac{|\vec{q}'|}{|\vec{q}|} Q_\ell(Z) \frac{1}{((q'_0 + \frac{W}{2})^2 - \vec{q}'^2 - \mu^2) ((q'_0 - \frac{W}{2})^2 - \vec{q}'^2 - M^2)}, \quad (2)$$

$q = (q_0, \vec{q}) = \frac{1}{2}(q_\pi - q_N)$ = Relativimpuls zwischen off-shell Pion (q_π) und Nucleon (q_N) im CMS,

$p = (p_0, \vec{p})$ = Relativimpuls zwischen on-shell Pion und Nucleon,

$Q_\ell(Z)$ = Legendre-Funktion 2. Art zum Bahndrehimpuls ℓ ,

$$Z = \{(q_0 + q'_0)^2 - \vec{q}^2 - \vec{q}'^2 - M^2\} / 2|\vec{q}||\vec{q}'|, \quad (3)$$

M = Nukleonmasse, μ = Pionmasse.

Die Bornsche Näherung $M^{\text{Born}}(q_0, |\vec{q}|)$ hängt in folgender Weise von k^2 , dem Viererimpulsquadrat des einlaufenden Photons ab, wenn sie durch Einpionenaustausch approximiert wird:**

* Die vollen Formeln für die BSG mit Spin samt den Borntermen für Elektroproduktion sind in I enthalten und werden hier nicht wieder aufgeführt.

**Auch hier werden sämtliche Spinterme ignoriert.

$$M^{\text{Born}}(q_0, |\vec{q}|) = \frac{F_\pi(k^2)}{2|\vec{k}||\vec{q}|} Q_\ell(z') \quad (4)$$

mit

$$z' = - \{ (k_0 - q_0 - \frac{W}{2})^2 - \vec{k}^2 - \vec{q}^2 - \mu^2 \} / 2|\vec{k}||\vec{q}|, \quad (5)$$

$k = (k_0, \vec{k}) = \text{Photon Impuls im CMS},$

$F_\pi(k^2) = \text{elektromagnetischer Formfaktor des Pions.}$

Die Singularitäten von $M^{\text{Born}}(q_0, |\vec{q}|)$ in der q_0 -Variablen, die durch logarithmische Verzweigungspunkte an den Stellen

$$q_0 = \frac{k^2 - M^2}{2W} \pm \sqrt{(|\vec{k}| \pm |\vec{q}|)^2 + \mu^2} \quad (6)$$

gegeben sind, wandern offenbar für große negative k^2 in der q_0 -Ebene nach links, so daß die q_0' -Integration in (1) nicht einfach entlang der imaginären Achse (nach einer Wickrotation) geführt werden kann. Bei der ersten Iteration von (1) wird deshalb entlang einer Parallelen zur imaginären Achse integriert, die zwischen den Verzweigungspunkten (6) hindurchführt:*

$$q_0' = \frac{k^2 - M^2}{2W} + \sqrt{(|\vec{k}| - |\vec{q}'|)^2 + \mu^2} - \frac{\mu}{2} + i\tau \quad (7)$$

$$-\infty < \tau < \infty$$

Diese Verschiebung des Integrationsweges mit $|\vec{q}'|$ ist notwendig, damit die Singularitäten in (2), die für $q = p$ bei

$$q_0' = \frac{M^2 - \mu^2}{2W} \pm \sqrt{(|\vec{p}| \pm |\vec{q}'|)^2 + M^2} \quad (8)$$

*Falls hiernach $\text{Re } q_0' > 0$ folgen würde, wird allerdings der Weg (9) (s.u.) benützt.

liegen, gleichfalls vermieden werden. Für die höheren Iterationen ist es geschickter, die Integration entlang

$$q_0 = i\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty \quad (9)$$

zu führen, da dann das Argument Z (Gl.(3)) der Legendrefunktion reell wird, wodurch Rechenaufwand gespart wird. Da wegen der Singularitäten in (2)

$$|\operatorname{Re}(q_0 + q'_0)| < M$$

sein muß, ergibt sich daraus eine Beschränkung in k^2 :

$$-k^2 < W(2M + \mu) - M^2 \quad (10)$$

Dies beschränkt unsere Rechnungen auf $-k^2 \lesssim 2(\text{GeV}/c)^2$.

Für den Bornterm, der vom Nukleonaustausch herrührt, gelten ähnliche Überlegungen, es ergibt sich jedoch eine weniger einschneidende Bedingung für k^2 .

Die vom Verschwinden der Nenner in (2) herrührenden Singularitäten werden durch numerische Subtraktion und analytische Addition der Polterme unschädlich gemacht. Jedoch kann für $W \geq M + 2\mu$ (d.h. gerade unterhalb der Resonanzenergie) das ausgetauschte Nukleon zusammen mit zwei Mesonen auf der Massenschale liegen. Das führt dazu, daß die Beiträge von den Polen bei

$$q_0 = -\frac{W}{2} + \sqrt{\vec{q}^2 + \mu^2} \quad (11)$$

$$\text{und } q'_0 = -\frac{W}{2} + \sqrt{\vec{q}'^2 + \mu^2}$$

bei der Integration über $|\vec{q}|$ bei festem $|\vec{q}'|$ logarithmische Schnitte ergeben. Diese können entweder durch Integration über den singulären Anteil allein in einem kurzen Intervall von $|\vec{q}|$ entschärft werden^{6,14} oder durch Wahl einer CMS-Energie mit einem kleinen Imaginärteil.

Mit einer ausführlicheren Abschätzung kann man zeigen, daß für $\operatorname{Re} W \leq 10\mu$ ein Imaginärteil von

$$\operatorname{Im} W \approx 0.1\mu \quad (12)$$

ausreicht, um eine langsame Variation der Legendrefunktion zu erreichen. Eine Extrapolation nach $\text{Im } W = 0$ bietet keine Schwierigkeiten und wird später benutzt werden.

Wenn die Iterationsreihe von Gl. (1) bis zur Ordnung λ^n berechnet sind, wobei $M^{(\nu)}$ die ν -te Iteration bedeutet, können verschiedene Padé-Approximanten der Ordnung $[N, M]$ mit $N + M = n$ gebildet werden. Dabei sind die Padé-Approximanten wie folgt definiert:⁹

$$[N, M] \equiv \frac{P_M(\lambda)}{Q_N(\lambda)} = \sum_{\nu=0}^n M^{(\nu)} \lambda^\nu + \lambda^{n+1} R(\lambda) \quad , \quad (13)$$

wobei $P_M(\lambda)$ und $Q_N(\lambda)$ Polynome in λ der Ordnung M bzw. N sind, d.h. die Potenzreihenentwicklung des Quotienten (13) soll bis zur Ordnung λ^n mit der Iterationsreihe von (1) übereinstimmen. Um exakte Aussagen über die Konvergenz der Padé-Approximanten benutzen zu können, wäre es zweckmässig, N festzuhalten und den Limes $M \rightarrow \infty$ zu nehmen. Es gilt nämlich folgender Satz:¹⁵

Wenn die durch die Potenzreihe $\sum M^{(\nu)} \lambda^\nu$ festgelegte Funktion $f(\lambda)$ in $|\lambda| \leq \lambda_0$ m Pole hat, konvergiert $[m, M]$ für $M \rightarrow \infty$ gleichmässig gegen $f(\lambda)$ in $|\lambda| \leq \lambda_0$ unter Ausschluß kleiner Kreise um die Pole. Da die Lösung der BSG bei genügendem Abfall des Kernes für große $|\vec{q}|$ und q_0 eine meromorphe Funktion in λ ist, wäre damit für genügend großes m die Konvergenz gesichert. Aus zwei Gründen ist dies unpraktisch: Für kleines N und $M \rightarrow \infty$ werden für $Q_N(\lambda)$ nur die höchsten Terme $M^{(\lambda)}$ benutzt, die infolge der numerischen Integration einen grösseren Fehler wie die Terme mit kleinem ν haben. Zweitens sind für die elastischen Streuung nur die Approximanten mit $N \geq M + 1$ schon für endliche M unitär, solange die Störungsreihe formal unitär ist.¹⁶ Damit entfielen bei der erwähnten Wahl eine Möglichkeit zur Kontrolle der Rechnung. Für die elastische Streuung werden wir deshalb mit den $[M + 1, M]$ - Approximanten in λ rechnen, die den $[M + 1, M + 1]$ - Approximanten entsprechen, wenn man in der T-Matrix das Glied proportional zu $g^2/4\pi$ mit $M^{(1)}$ identifiziert, d.h. $M^{(0)} = 0$ setzt.

Für inelastische Prozesse scheint keine Unitaritätsbedingung in der Form erfüllt zu sein*, daß unterhalb der inelastischen Schwelle

*Siehe jedoch Ref. (17) für eine Abwandlung der Iteration, so daß die inelastische Unitarität erfüllt ist.

$$\text{Im}[N,M] = [N,M]e^{-i\delta} \sin\delta \quad (14)$$

gilt, wobei δ die elastische Streuphase irgendeiner Approximanten der elastischen Streuamplitude ist, und $[N,M]$ eine Approximante endlicher Ordnung zu (1). Dies ist ersichtlich aus der $[1,0]$ -Näherung zu (1), die explizit

$$[1,0] = \frac{M^{(0)}}{1 - \frac{\lambda M^{(1)}}{M^{(0)}}} \quad (15)$$

lautet. Falls nicht $M^{(0)} \equiv M_{\text{inel.}}^{\text{Born}}(q_0, |\vec{q}|) = \text{const.} M_{\text{el}}^{\text{Born}}(q_0, |\vec{q}|)$ (wie es für den magnetischen Dipol einigermaßen erfüllt ist), haben die $[1,0]$ -Approximanten für elastische und für inelastische Prozesse verschiedene Phasen. Die Abweichung ist besonders empfindlich, wenn $M^{(0)}$ besonders groß gegen alle folgenden Glieder ist, was im Falle einer schwachen Ankopplung eines Bornterms an die Resonanz auftritt. Dann ist es zweckmäßig, zu den $[M+2, M]$ -Approximanten überzugehen, da dann $M^{(0)}$ nicht mehr in $Q_N(\lambda)$ enthalten ist.

Bei den meisten im folgenden zitierten Rechnungen wurden die Integrationen in (1) mit 10 Stützstellen für die $|\vec{q}|$ Integration und 12 Stützstellen für die q_0 Integration durchgeführt.

III. Elastische πN -Streuung

Zunächst soll untersucht werden, welches Potential eine Resonanz bei $W = 1236$ MeV liefert. Das Potential bestimmt in der BSG (1) den inhomogenen Term und den Kern $K(q_0, |\vec{q}|, q'_0, |\vec{q}'|)$ und soll wenig vom Nukleon-Austausch abweichen. Die gebräuchlichste Modifizierung des Einnukleonpotentials ist ein einfacher cut-off im Propagator des ausgetauschten Nukleons:

$$\frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2} \Rightarrow \frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2} - \frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2 - \Lambda^2} \quad (16)$$

Dieses Potential (im folgenden mit A bezeichnet) wurde auch von Tjon und Nieland¹⁴ untersucht. Die Konstante Λ^2 wird bestimmt durch die Forderung

$\delta_{33}(W = 8,86\mu) = 90^\circ$. Unter Verwendung der [3,2]-Approximante erhält man $\Lambda^2 = 4,05 \text{ GeV}^2$ oder $\sqrt{M^2 + \Lambda^2} = 15,9\mu$, was sehr gut übereinstimmt mit dem Wert $\sqrt{M^2 + \Lambda^2} = 15,7\mu$, den Tjon und Nieland für $\delta_{33}(W = 8,85\mu) = 90^\circ$ erhalten.*

Die Streuphasen, die aus diesem Potential folgen, sind in Tabelle I zusammen mit den Streuphasen von Donnachie et al.¹⁸ aufgeführt. Die Diskrepanz oberhalb der Resonanz ist ein gemeinsames Phänomen aller Modelle für das N^* , die im wesentlichen nur elastische Zwischenzustände benutzen.¹⁹ Sie ist auch unabhängig von der genauen Form des Potentials bei kleinen Abständen. Um dies zu zeigen, prüfen wir, ob eine Verbesserung dadurch erreicht werden kann, daß das Verhalten des Potentials für $|q_e^2| \rightarrow \infty$ nicht wie in (16) um einen Potenz in q_e^2 unterdrückt wird. Dazu wählen wir als Potential B die Modifikation

$$\frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2} \Rightarrow \frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2} - a \frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2 - \Lambda'^2} \quad (17)$$

Für $a = 0,5$ benötigt man einen Wert von $\Lambda'^2 = 1,21 \text{ GeV}^2$ damit die Resonanzstelle richtig wiedergegeben wird. Die Streuphasen sind in Tabelle I, Spalte III zusammengefaßt.** Man erreicht zwar, daß der effective-range plot für

$$\frac{|\vec{P}|^3}{W-E} \text{ ctg } \delta_{33} \quad (E = \text{Nukleon-CMS-Energie}) \quad (18)$$

steiler wird, eine Krümmung nach unten jedoch liefert auch dieses Potential nicht. Die Streulänge ist etwas zu klein.

Eine solche Krümmung kann mit inelastischen Beiträgen erreicht werden. Wir simulieren solche, indem wir den Propagator für das Nukleon im direkten Kanal in Gl.(2) folgendermaßen abändern:

*Tjon und Nieland benutzen $g^2/4\pi = 14,6$, während wir mit $g^2/4\pi = 14,5$ rechnen.

**Für Potential B sind in Tabelle II auch Vergleiche zwischen der [3,2]- und der [4,3]-Approximante sowie eine Prüfung der Unitarität enthalten.

$$\frac{1}{(q_0 - \frac{W}{2})^2 - \vec{q}^2 - M^2} = \frac{1}{(q_0 - \frac{W}{2})^2 - \vec{q}^2 - M^2} + \frac{\alpha}{(q_0 - \frac{W}{2})^2 - \vec{q}^2 - M'^2} \quad (19)$$

Für das ausgetauschte Nukleon behalten wir das Potential B mit abgeänderten Parametern α und Λ'^2 bei. Ein mögliches Modell für solche inelastischen Beiträge ist der Kanal $N^*(1480) + \pi$, da wegen der gleichen Quantenzahlen von $N^*(1480)$ und N der Nukleonaustausch als Kopplung zwischen dem πN^* -Kanal sehr ähnlich dem in der elastischen Streuung sein wird (s. Fig.3).

Es wurden Streuphasen mit folgenden Parametern berechnet (Potential C)

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.33 \\ M' &= 10\mu \\ a &= 0.6 \\ \Lambda'^2 &= 0.8 \text{ GeV}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Die Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle I enthalten. Offensichtlich kann man, ohne die Parameter a und Λ'^2 in (17) allzu stark zu ändern, wesentlich größere Phasen bei $W = 10\mu$ durch Einschluß eines zweiten Kanals erhalten. Um bessere Übereinstimmung mit dem Experiment zu erreichen, müßte allerdings die Kopplung an den zweiten Kanal für kleinere Energien kleiner sein, was bei einer sorgfältigen Behandlung des Spins wohl folgen würde. Jedoch muß dazu ein echtes Zweikanalproblem gelöst werden.

Der Wert $\Lambda^2 = 4,05 \text{ GeV}^2$ für das Potential A ist wesentlich größer als der Wert von $\Lambda^2 = 2,53 \text{ GeV}^2$, der in früheren Arbeiten^{8,11} benutzt wurde. Dort war die Bedingung

$$\lim_{W \rightarrow \infty} \frac{W}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \frac{\text{Im } \tilde{f}_{1+}(W') \exp}{W' - W} \approx - \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{W}{\pi} \int_L dW' \frac{[\tilde{f}_{1+}(W') \text{ BSG}] \text{disc.}}{W' - W} \quad (21)$$

$$\text{mit } \tilde{f}_{1+} = \frac{e^{i\delta_{33}} \sin \delta_{33}}{iP^3 W(E + M)} \quad (22)$$

gestellt worden, wobei die linke Seite in (21) mit experimentellen Streuphasen, die rechte Seite als Integral über den linken Schnitt L mit Hilfe der Leiternäherung ausgewertet worden war. Nun würde mit dem hier benutzten Wert des cut-off die rechte Seite von (21) zu groß, da die Resonanz zu breit ist. Wird aber die Resonanz durch Verkleinerung Λ^2 zu höheren W verschoben, so verringert sich das Integral infolge des kinematischen Faktors in (22).

IV. Photoproduktion des N^* in der Leiternäherung

Die Beschreibung der elastischen πN -Streuung durch die BSG bietet wenig Neues, da zur richtigen Wiedergabe der Resonanzenergie ein Parameter anzupassen ist, und das gute Ergebnis für die Streulänge ist allen Modellen mit Nukleonaustausch gemeinsam.¹⁹ Wichtig ist, daß nun der Kern der BSG für inelastische Prozesse festgelegt ist und daß Aussagen über inelastische Amplituden nur noch von Annahmen über den inhomogenen Term in (1) abhängen. Wir werden die Amplituden für Elektroproduktion des N^* durch die Diagramme in Abb. 1a und 1b annähern, wobei ähnlich wie beim πN -Potential ein cut-off für das ausgetauschte Teilchen eingeführt wird.*

Es zeigt sich nun, daß die absoluten Vorhersagen für die Multipole in der Photoproduktion nur noch wenig von diesen cut-off Parametern abhängen, und dies gilt noch in stärkerem Masse für die Formfaktoren (d.h. für die k^2 -Abhängigkeit der Multipole). Zunächst vergleichen wir die Ergebnisse für Photoproduktion für das Potential A, so wie sie aus der Iteration von Gl.(1) und Anwendung der Padèschen Näherung gewonnen werden, mit den in I erhaltenen Resultaten. Wir modifizieren den Nukleonpropagator im Übergangspotential entsprechend der Gl.(16) wie

$$\frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2} \Rightarrow \frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2} - \frac{q_e + M}{q_e^2 - M^2 - \Lambda_N^2} \quad (23)$$

und den Pionpropagator wie

$$\frac{1}{t - \mu^2} \Rightarrow \frac{1}{t - \mu^2} - \frac{1}{t - \mu^2 - \Lambda_\pi^2} \quad (24)$$

*Die Multipolprojektion für Einteilchenaustausch mit cut-off sind in I aufgeführt.

und untersuchen die Beiträge der Diagramme 1a und 1b zu den Multipol-
amplituden M_{1+} und E_{1+} getrennt. (Sie werden mit $M_{1+,N}$, $M_{1+,\pi}$, $E_{1+,N}$
und $E_{1+,\pi}$ bezeichnet). In Abb.4 werden $M_{1+,N}$ und $M_{1+,\pi}$ für je zwei
Werte von Λ_N^2 und Λ_π^2 dargestellt, wobei wir, um glatte Kurven zu erhalten,
stets das Verhältnis

$$R_{N(\pi)}(W) = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \frac{M_{1+,N(\pi)}(W)}{f_{1+}(W)} \quad (25)$$

mit

$$f_{1+}(W) = \frac{e^{i\delta_{33}} \sin\delta_{33}}{|\vec{p}|} \quad (26)$$

wiedergeben. Außerdem enthält Abb.4 die Ergebnisse von I mit $\Lambda_N^2 = 2,53 \text{ GeV}^2$
und $\Lambda_\pi^2 = 0,5 \text{ GeV}^2$. Da die Annahme $\Lambda_N^2 = \Lambda_\pi^2 = 4,1 \text{ GeV}^2$ die natürlichste ist,
würde* $\Lambda_\pi^2 = 0,3 \text{ GeV}^2$ innerhalb von 5% die richtige Normierung²⁰

$$R_N(W_r) + R_\pi(W_r) = 0.051 \pm 0.0015 \quad (27)$$

liefern. Eine eindeutige Bestimmung beider Parameter wäre möglich bei besserer
experimenteller Kenntnis der E_{1+} -Amplitude, die als Funktion von W eine
Nullstelle im Resonanzgebiet hat,²⁰ deren Lage hier stark von Λ_π^2 abhängt
(dies war in I näher ausgeführt worden). Wir begnügen uns hier mit der Tatsache,
daß für Potential A in einem großen Bereich von plausiblen Werten Λ_N^2 und
 Λ_π^2 ,

$$2.5 \leq \Lambda_N^2 \leq 4.1 \text{ GeV}^2 \quad (28)$$

$$\text{und } 0.3 \leq \Lambda_\pi^2 \leq 0.5 \text{ GeV}^2$$

der Wert von $R_N + R_\pi$ bis auf 10% mit dem Experiment übereinstimmt.

Für das Potential B liegt der Wert von $R_N + R_\pi$ um 20% zu hoch, wenn wir für
das Diagramm 1a den gleichen cut-off wie in Gl.(17) mit denselben Konstanten
und $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$ wählen. Wird der cut-off von der Form (23) gewählt mit
 $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$, so erhält man für $R_N + R_\pi$ die Kurve B in Fig.5, die mit
den Werten aus I für den gleichen cut-off bis zur Resonanz gut übereinstimmen.

*Dieser Wert entspricht beinahe dem elektromagnetischen Radius des Nukleons.

Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist natürlicher für das Potential C zu erreichen, wo wir wegen der kleinen $\gamma NN^*(1480)$ -Kopplung²¹ das Übergangspotential von γN an den inelastischen Zwischenzustand vernachlässigen können. Die Abbildung 5 enthält die Resultate für $R_N + R_\pi$ (Kurve C), die mit einem cut-off für Diagramm 1a wie in Gl.(17) mit folgenden Parametern erhalten wurden:

$$\begin{aligned} a_N &= 0.6 \\ \Lambda_N^2 &= 0.8 \text{ GeV}^2 \\ \Lambda_\pi^2 &= 0.5 \text{ GeV}^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Bei dem elektrischen Quadrupol begnügen wir uns damit, in Abb.6 die Resultate für $E_{1+,\pi}$ und $E_{1+,N}$ für das Potential B mit denen von I zu vergleichen, wobei in beiden Fällen $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$ und $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$ benutzt worden war. Offenbar herrscht gute Übereinstimmung bis zur Resonanz für $E_{1+,\pi}$, während die relativ großen Fehler in $E_{1+,N}$ wegen der starker Auslöschung in dieser Amplitude (an der Schwelle ist die [3,2]-Approximante kleiner als der Born-term!) durchaus verständlich sind.

Zum Abschluß noch einige Bemerkungen zur Qualität der Padè-Approximanten: In Tabelle III haben wir für das Potential B die Phasen für f_{1+} , $M_{1+,N}$ und $E_{1+,\pi}$ zusammengestellt. Für f_{1+} und $M_{1+,N}$ wurden die [3,2]-Approximanten bei komplexen W benutzt, für $E_{1+,\pi}$ die [4,2]-Näherung, da dort die $[N+1, N]$ Approximanten nicht gut zu konvergieren scheinen (siehe Abschnitt 2). Das final-state Wechselwirkungstheorem (14) ist danach für alle Energien ziemlich gut erfüllt.

V. Elektroproduktion des N^* in der Leiternäherung

Unter der Annahme, daß die cut-off-Parameter Λ_N^2 und Λ_π^2 unabhängig von k^2 , dem Viererimpulsquadrat des Photons sind, lassen sich nun die Multipole für $k^2 < 0$ leicht berechnen, indem wir in Gl.(1) die Bornterme für Elektroproduktion einsetzen (siehe Anhang A von I). Dabei müssen wir allerdings noch Annahmen über den elektromagnetischen Formfaktor des Pions für $k^2 < 0$ machen, der aber wegen der Güte, mit der das Vektordominanzmodell²² im Bereich $k^2 \approx m_\rho^2$ erfüllt ist,²³ nicht sehr von der Form

$$F_{\pi}(k^2) = \frac{1}{1 - k^2/m_{\rho}^2} \quad (30)$$

abweichen sollte. Wir werden hier noch einmal die mit Hilfe der Padè-Näherung gewonnenen Resultate denen des dispersionstechnischen Modells I gegenüberstellen und insbesondere die Unabhängigkeit der k^2 -Abhängigkeit von der genauen Form des πN -Potentials demonstrieren. Außerdem werden die Rechnungen für $M_{1+}(W, k^2)$ zu grösseren k^2 als in I fortgesetzt und mit dem Experiment¹³ verglichen. Zunächst zeigen wir in Tabelle IV das Verhältnis

$$R_N(W, k^2) \equiv \frac{|\vec{k}_0|}{|\vec{k}|} \frac{M_{1+,N}(W, k^2)}{M_{1+,N}(W, 0)} \frac{1}{G_E^P(k^2)} \quad (31)$$

mit $|\vec{k}_0| = |\vec{k}(W, k^2 = 0)|$ für die Potentiale A und B. Wir nehmen den cut-off von Gl.(23) mit verschiedenen Λ_N^2 und rechnen an den Stellen $k^2 = -0.6 \text{ (GeV/c)}^2$ und $k^2 = -2.0 \text{ (GeV/c)}^2$. Dabei wurden stets die [3,2]-Approximanten benutzt. Besonders für $W = W_x$ sind die Abweichungen zwischen R_N für alle Potentiale und auch zwischen dem Wert aus I (letzte Spalte in Tabelle IV) kleiner als 1%. Für $W = 10\mu$ zeigen sich gewisse Diskrepanzen zwischen I und dem Bethe-Salpeter-Modell, die darauf zurückzuführen sind, daß im Dispersionsmodell die Inkonsistenz zwischen dem linken Schnitt und der benutzten Phase bei großen W stärker eingehen: Die aus dem linken Schnitt durch das Omnès-Verfahren gewonnene Amplitude $M_{1+,N}(W, 0)$ fällt jenseits der Resonanz schneller ab als im Bethe-Salpeter Modell, (wenn auch nicht so stark wie die experimentelle Amplitude), während für große k^2 sich in beiden Modellen die obere Flanke der Resonanz abflacht. Dies wirkt sich für $R_N(W, k^2)$ im Modell I stärker aus, da dort die Resonanz für $k^2 = 0$ nicht allzu breit war.

Es soll hier anhand der Werte für $R_N(W, k^2)$ bei $k^2 = -2 \text{ (GeV/c)}^2$ nochmals auf den Unterschied zu anderen Modellvorstellungen eingegangen werden. Es war von Adler²⁴ vorgeschlagen worden, die einfache, aber unbegründbare¹¹ Relation²⁵

$$R_N(W, k^2) \approx R_N^{\text{Born}}(W, k^2) \equiv \frac{|\vec{k}_0|}{|\vec{k}|} \frac{M_{1+,N}^{\text{Born}}(W, k^2)}{M_{1+,N}^{\text{Born}}(W, 0)} \frac{1}{G_e^P(k^2)} \quad (32)$$

durch eine Berücksichtigung der nächstgelegenen Singularitäten von $M^{\text{Born}}(W, k^2)$ in der W -Ebene zu verbessern:

$$R_N(W, k^2) = R_N^{\text{Born}}(W, k^2) \cdot \left(1 + \frac{a^2(k^2)}{(W - M)(W_r - M)}\right) \quad (33)$$

mit

$$a^2(k^2) = \frac{-0.0084 k^2}{1 - 0.0045 \frac{k^2}{\mu^2}} .$$

Wir vergleichen hier unser Modell mit den Werten aus Gl.(32) und (33), wobei wir dort die Bornsterme mit $\Lambda_N^2 = \infty$ einsetzen:

Bethe-Salpeter-Modell:	$R_N(W, k^2) = 0.640$	
Gl. (21)	:	$R_N^{\text{Born}}(W, k^2) = 0.469$ (34)
Adler (Gl. (22))	:	$R_N(W, k^2) = 0.528$

Offenbar ist die Korrektur an Gl.(21) durch die Wellenfunktion des auslaufenden Zustands im Bethe-Salpeter-Modell wesentlich grösser als in dem einfachen dispersionstheoretischen Modell.²⁴

In Abb.7 zeigen wir die Vorhersage für die volle Amplitude $M_{1+}(W, k^2)$ unter der Annahme (30) für den Pionformfaktor (zusammen mit denen von I), außerdem das Verhältnis

$$\frac{|\vec{k}_0|}{|\vec{k}|} \frac{E_{1+, \pi}(W, k^2)}{M_{1+}(W, 0)} \frac{1}{F_\pi(k^2)} \quad (35)$$

für $k^2 = -0.6 \text{ (GeV/c)}^2$, beides für das Potential B mit $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$ und $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$. Wieder ist die Übereinstimmung bis zur Resonanz gut.

Zum Abschluß vergleichen wir den magnetischen Formfaktor, definiert durch²⁶

$$G_M^*(k^2) = G_M^*(0) \frac{|\vec{k}_0|}{|\vec{k}|} \frac{M_{1+}(W_r, k^2)}{M_{1+}(W_r, 0)} \quad (36)$$

mit dem Experiment.¹³ Dazu benutzen wir entweder Gl.(30) oder setzen

$$F_{\pi}(k^2) = G_E^P(k^2) \quad . \quad (37)$$

Im Fall (30) ist die Übereinstimmung nicht schlecht (siehe Abb.8).

Als Faustformel geben wir noch folgende Beziehungen an, die im Rahmen dieses Modells für $k^2 \leq 2 \text{ GeV}$ bis auf wenige Prozente genau sein sollten:

$$M_{1+,N}(W_r, k^2) = \frac{G_M^P(k^2)}{G_M^P(0)} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|} \frac{M_{1+,N}(W_r, 0)}{1 + \frac{|k^2|}{3.5(\text{GeV}/c)^2}} \quad (38)$$

$$M_{1+,\pi}(W_r, k^2) = F_{\pi}(k^2) \frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|} \frac{M_{1+,\pi}(W_r, 0)}{1 + \frac{|k^2|}{0.47(\text{GeV}/c)^2}} \quad (39)$$

und

$$\frac{M_{1+,\pi}(W_r, 0)}{M_{1+,N}(W_r, 0)} \approx 0.15 \quad . \quad (40)$$

Die letzte Aussage hängt allerdings stark von Annahmen über Λ_N^2 und Λ_{π}^2 ab.

Für die Amplitude E_{1+} ist eine einfache Faustformel nicht angebar.¹¹

VI. Zusammenfassung

Es sollte hier aufgrund numerischer Rechnungen folgendes gezeigt werden:

1. Die Bethe-Salpeter-Gleichung kann in der Leiternäherung durch Iteration und Padè-Näherung sowohl für elastische Streuung wie für inelastische Prozesse, auch für Prozesse mit Spin, bewältigt werden.
2. Die Padè-Näherung auf der reellen W-Achse liefert im wesentlichen die gleichen Ergebnisse wie die Omnès-Methode, wenn der linke Schnitt in der Leiternäherung durch Iteration der BSG gewonnen wird. Insbesondere wurden die in I diskutierten Effekte wie eine Veränderung der Resonanz-

form des N^* (1236) sowie deutliche Abweichungen von der Vermutung (24) bestätigt.

3. Plausible Ansätze für das $\gamma N \rightarrow \pi N$ - Übergangspotential liefern innerhalb von 10% die richtige Normierung für die Photoproduktionsamplitude M_{1+} .
4. Die Formfaktoren sind unabhängig von der genauen Form des Potentials und des Übergangspotentials.
5. Unter der Annahme (30) ist die Übereinstimmung dieses Modells mit Elektroerzeugungsexperimenten bis jetzt gut.

Das Modell für die N^* -Wellenfunktion ist aber sicher nicht genügend realistisch, da die πN -Streuamplitude oberhalb der Resonanz schlecht wiedergegeben wird. Um zu entscheiden, ob dies im Rahmen von inelastischen Beiträgen verstanden werden kann, ohne das elastische Potential radikal abzuändern, bedarf einer weiteren Untersuchung mittels einer Zweikanal-BSG, wobei die Kopplung zwischen den Kanälen nicht proportional zum elastischen Potential sein darf, wie es in Gl.(19) angenommen worden war. Auch die höheren Resonanzen werden sich wohl nur durch Bethe-Salpeter-Modelle mit mehreren Kanälen verstehen lassen. Die Methode der Iteration plus Padèscher Näherung ist jedoch flexibel genug, um dieses Problem angreifen zu können.

Diese Arbeit wäre ohne die Hilfe aller Mitglieder des DESY-Rechenzentrums nicht durchführbar gewesen. Ihnen gilt mein besonderer Dank. Herrn Prof. Dr. K. Symanzik danke ich für interessante Diskussionen.

Literaturverzeichnis

1. C. Schwartz und C. Zemach, Phys. Rev. 141, 1454 (1966).
2. W. B. Kaufmann, Lawrence Radiation Laboratory Report UCRL 18220 (1968) (unveröffentlicht)
3. E. zur Linden, Preprint (München 1969) (wird veröffentlicht in Nuovo Cim.)
4. K. D. Rothe, Phys. Rev. 170, 1548 (1968).
5. P. Narayanaswamy und A. Pagnamenta, Phys. Rev. 172, 1750 (1968).
6. M. J. Levine, J. Wright und J. A. Tjon, Phys. Rev. 154, 1433 (1967).
7. F. Gutbrod, Nuovo Cim. 59A, 293 (1969).
8. N. I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, Noordhoff, Groningen, 1953,
R. Omnès, Nuovo Cim. 8, 316 (1954).
9. G. A. Baker, Advances in Theoretical Physics 1, 1 (1965)
(Academic Press, New York).
10. H. M. Nieland und J. A. Tjon, Physics Letters 27B, 309 (1968).
11. F. Gutbrod, DESY 69/22.
12. F. Gutbrod, Nuovo Cim. 45, 830 (1966).
13. W. Bartel, B. Dudelzak, H. Krehbiel, J. McElroy, V. Meyer-Berghout,
W. Schmidt, V. Walther und G. Weber, Physics Letters 28B, 148 (1968).
14. J. A. Tjon und H. M. Nieland, Preprint (Utrecht 1969).
15. R. de Balloire, Bull. Soc. Math. France 30, 28 (1902)
(zitiert in Ref.(9)).
16. D. Masson, Journ. Math. Phys. 8, 512 (1967).
17. C. G. Georgalas, Lettere al Nuovo Cim. 1, 871 (1969).
18. Numerische Werte für die Streuphasen sind veröffentlicht von
A. Donnachie in Particle Interactions at High Energies
(edited by T. W. Preist and L.L.J. Vick), Oliver and Boyd
Edinburgh and London (1967)

19. G. F. Chew und F. E. Low, Phys. Rev. 107, 1570 (1956)
A. W. Hendry und B. Stech, Phys. Rev. 133B, 191 (1964)
J. S. Ball und D. Y. Wong, Phys. Rev. 133B, 197 (1964).
20. D. Schwela und R. Weizel, Z. Physik 221, 71 (1969)
D. Schwela, Thesis (Bonn 1968, unveröffentlicht).
21. A. Donnachie in Proceedings of 14th International Conference on High Energy Physics, Vienna 1968.
22. H. Joos in "Special Problems in High Energy Physics",
ed. by Paul Urban Springer-Verlag (Wien, New York, 1967).
23. J. E. Augustin et al., Phys. Lett. 28B, 508 (1969).
24. S. L. Adler, Ann. Phys. (N.Y.) 50, 189 (1968).
25. F. Selleri, V. Grecchi und G. Turchetti, Nuovo Cim. 52A, 314 (1967).
J. D. Walecka und P. A. Zucker, Phys. Rev. 167, 1479 (1968)
P. L. Pritchett, J. D. Walecka und P. A. Zucker, Preprint ITP-328
(Stanford 1969).
26. W. W. Ash, K. Berkelman, C. A. Lichtenstein, A. Ramanauskas und
R. H. Siemann, Physics Letters 24B, 165 (1967).

Abbildungen:

- Abb.1a und 1b: Einteilchenaustauschbeiträge zur γNN^* -Kopplung. Die Kreise an den Photonvertices deuten Formfaktoren an, der große Kreis die final-state-Wechselwirkung.
- Abb.2: Graphische Darstellung der Bethe-Salpetergleichung für N^* -Elektroproduktion.
- Abb.3: Möglicher inelastischer Zwischenzustand für πN -Streuung im 33 - Kanal.
- Abb.4: Verhältnisse $R_N(W)$ und $R_\pi(W)$ (Definiert in Gl.(25)) für das Potential A für verschiedene Werte der cut-off Parameter Λ_N^2 und Λ_π^2 . Die Kurven I stammen aus Ref.(11) mit $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$ und $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$.
- Abb.5: Verhältnis $R_N(W) + R_\pi(W)$ für die Potentiale B und C für $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$ (bzw. einen cut-off nach Gl.(17)) und $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$. Die Kurve I stammt aus Ref.(11) mit $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$.
- Abb.6: Vergleich der Amplitude E_{1+} aus Potential B ($\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$, $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$) mit den Ergebnissen von I.
- Abb.7: Vorhersage für die Multipole $M_{1+}(W, k^2)$ und $E_{1+, \pi}(W, k^2)$ aus Potential B ($\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$, $\Lambda_\pi^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$) für $k^2 = -2 (\text{GeV}/c)^2$. Die Kurven I stammen aus Ref.(11).
- Abb.8: Vergleich des magnetischen Übergangsformfaktors $G_M^*(k^2)$ aus dem Potential B mit dem Experiment¹³ und mit den Resultaten aus I. Kurve Ia und die Punkte a entsprechen der Annahme $F_\pi(k^2) = G_E^P(k^2)$, Kurve Ib und die Punkte b der Vektordominanzannahme Gl.(30).

$W[\mu]$	$\delta_{33}(\text{A})$	$\delta_{33}(\text{B})$	$\delta_{33}(\text{C})$	$\delta_{33}(\text{PHS})$	$\delta_{33}(\text{TN})$
7.8	$0.208 \times \frac{ \vec{p} ^3}{\mu^3}$	$0.194 \times \frac{ \vec{p} ^3}{\mu^3}$	$0.188 \times \frac{ \vec{p} ^3}{\mu^3}$	$0.21 \times \frac{ \vec{p} ^3}{\mu^3}$	$0.206 \times \frac{ \vec{p} ^3}{\mu^3}$
8.2	14.9°	13.4°	-	13.5°	-
8.86	93°	87.2°	92°	87.9°	-
9.5	122°	122°	127.5°	137°	-
10.0	126°	126°	135°	150°	122°

Tabelle I: Streuphasen δ_{33} für die Potentiale A, B und C, die in Abschnitt III erläutert werden.

$\delta_{33}(\text{PHS})$ sind die Streuphasen aus der Phasenanalyse aus Ref.18,

$\delta_{33}(\text{TN})$ stammen aus den Bethe-Salpeterrechnungen von Tjon und Nieland.¹⁴

W[μ]	ctg δ ₃₃ (B)		$\left \frac{\vec{p}}{p} f_{1+}(W) - \frac{i}{2} \right $ Potential A, [3,2]
	[3,2]-Appr.	[4,3]-Appr.	
7.8	33.32	33.27	-
8.86	0.0635	0.0485	0.503
10.0	- 0.7670	- 0.7674	0.513

Tabelle II: Prüfung der Konvergenz der Padé-Approximanten für δ₃₃ (Potential B) sowie der Unitaritätsbedingung für die Streuamplitude: $\left| \frac{\vec{p}}{p} f_{1+}(W) - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$, $W \leq M + 2\mu$.

W[μ]	δ ₃₃ (B)	δ _{M_{1+,N}} (B)	δ _{E_{1+,π}} (B)
7.8	1.719°	1.722°	1.639°
8.86	86.3°	87.5°	84.4°
10.0	128.1°	127.9°	130.9°

Tabelle III: Phasen der Amplituden f_{1+} , $M_{1+,N}(W, 0)$ und $E_{1+,π}(W, 0)$ für Potential B in der [3,2]-Näherung (bzw. [4,3]-Näherung für E_{1+})

$$R_N(W, k^2)$$

W[μ]	$k^2 = -0.6 \text{ (GeV/c)}^2$			$k^2 = -2 \text{ (GeV/c)}^2$		$k^2 = -0.6 \text{ (GeV/c)}^2$
	Potential:	A $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$	A $\Lambda_N^2 = 4.1 \text{ GeV}^2$	B $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$	B $\Lambda_N^2 = 2.53 \text{ GeV}^2$	
7,8	0.750	0.761	0.747	0.467	0.479	0.738
8,86	0.862	0.865	0.866	0.640	0.644	0.866
10,0	0.919	0.915	0.921	0.750	0.765	0.975

Tabelle IV: Verhältnis $R_N(W, k^2) = \frac{|\vec{k}_0|}{|\vec{k}|} \frac{M_{1+,N}(W, k^2)}{M_{1+,N}(W, 0)} \frac{1}{G_E^P(k^2)}$

für verschiedene Potentiale und Übergangspotentiale und verschiedene k^2 .

Die letzte Spalte enthält die Ergebnisse von I.

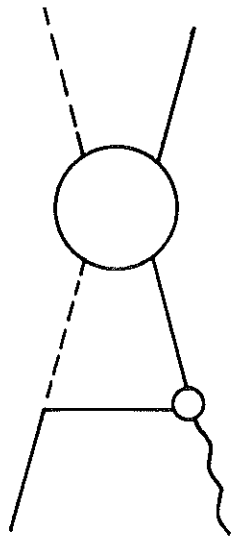


Fig. 1a

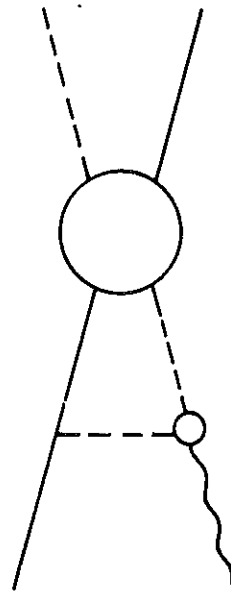


Fig. 1b

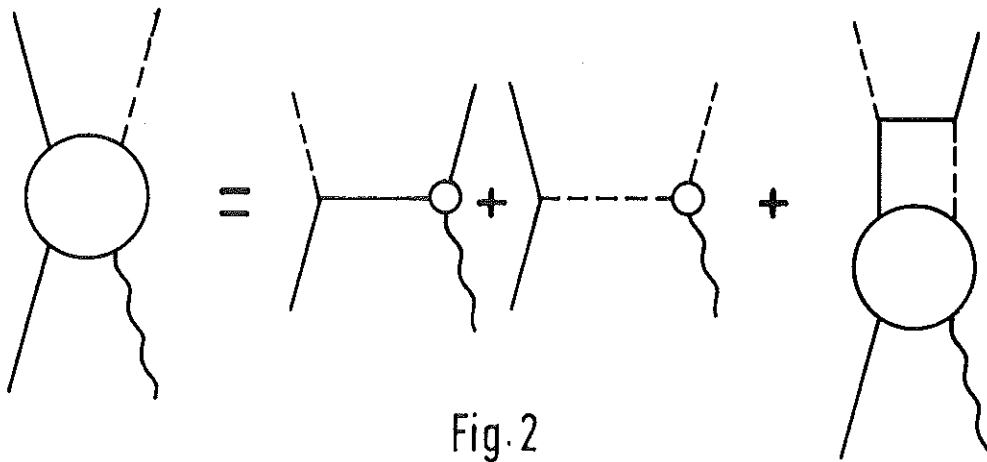


Fig. 2

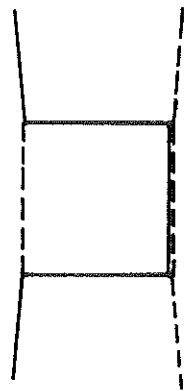


Fig. 3

$N^*(1480)$

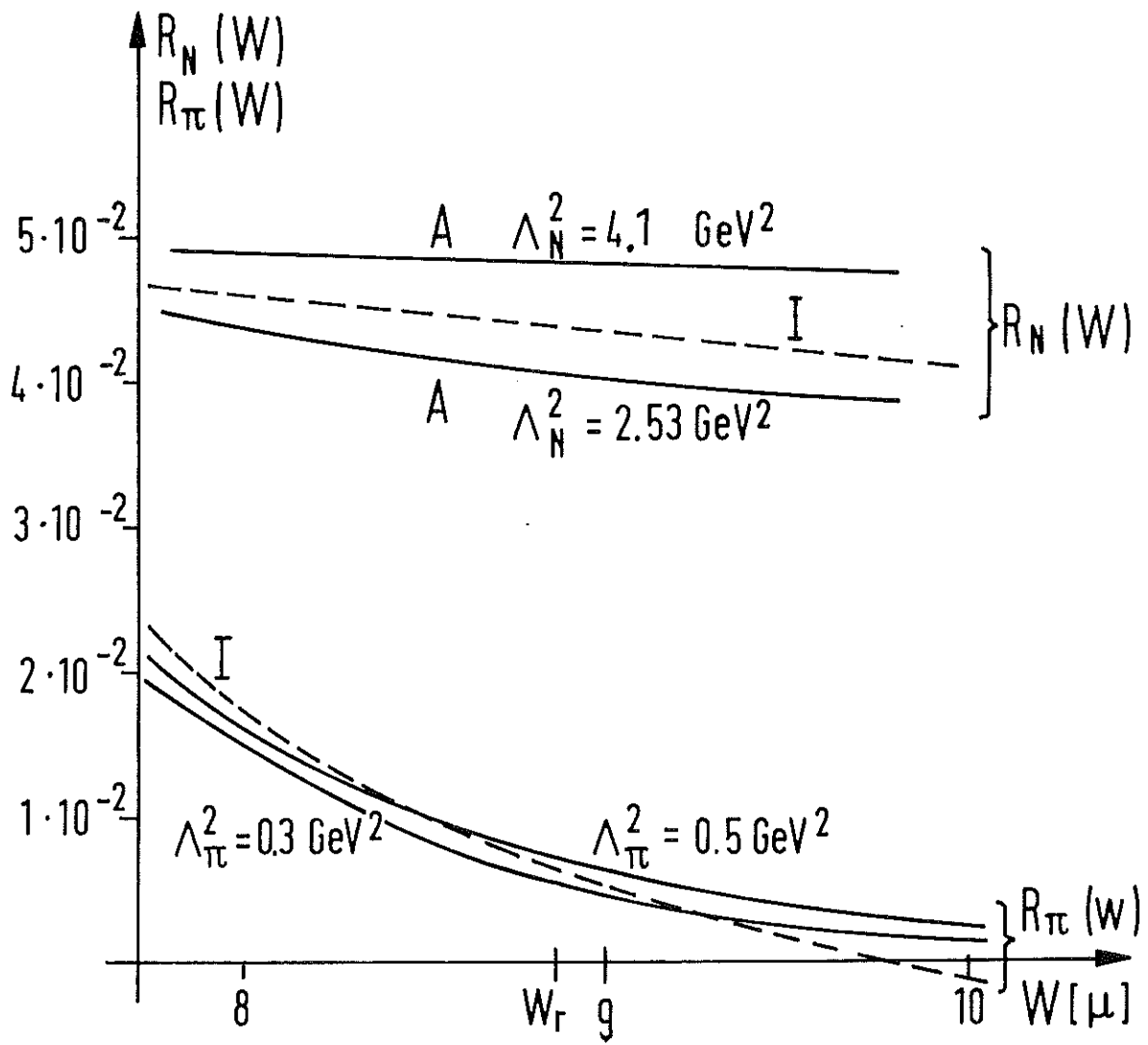


Fig.4

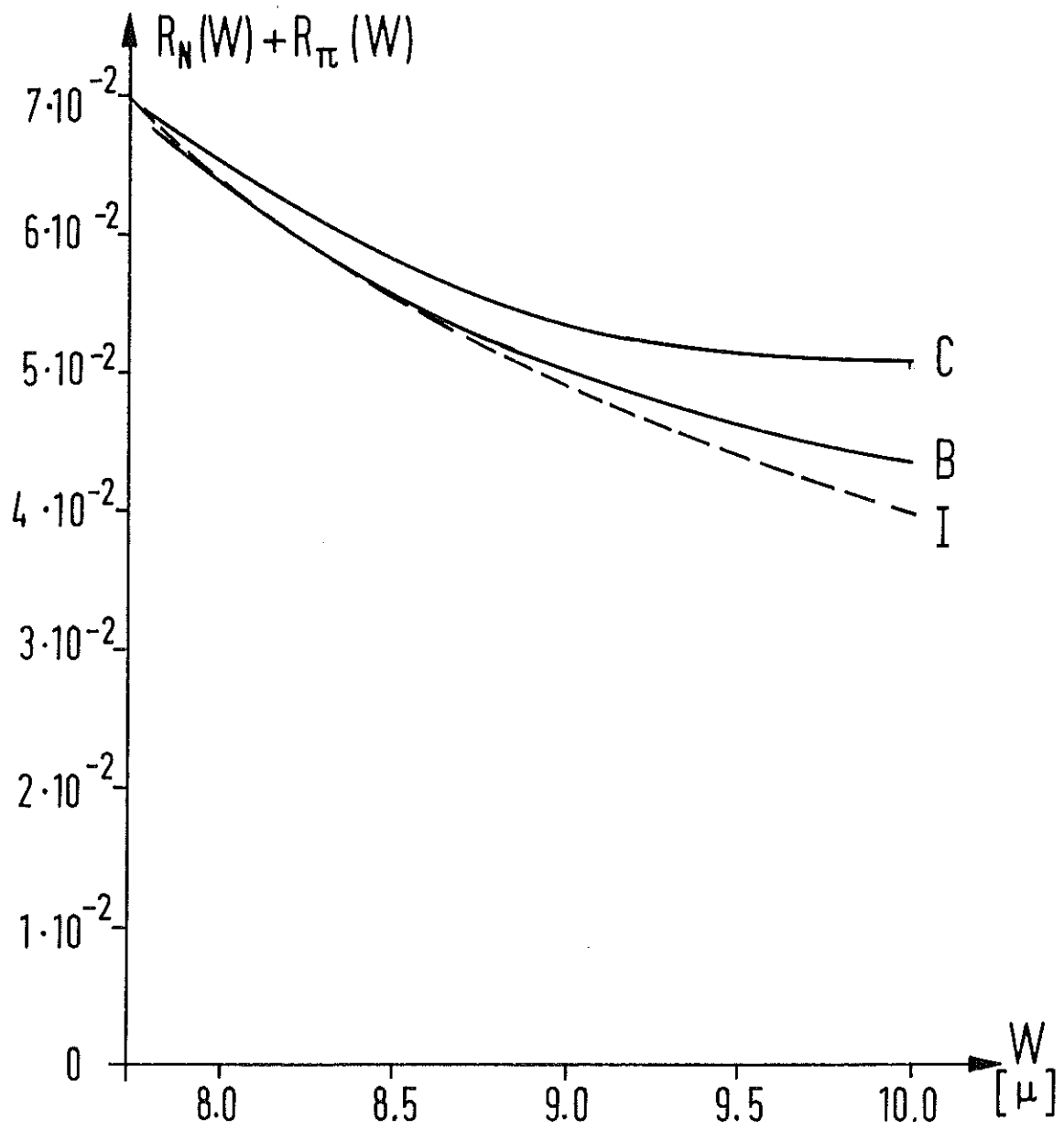


Fig.5

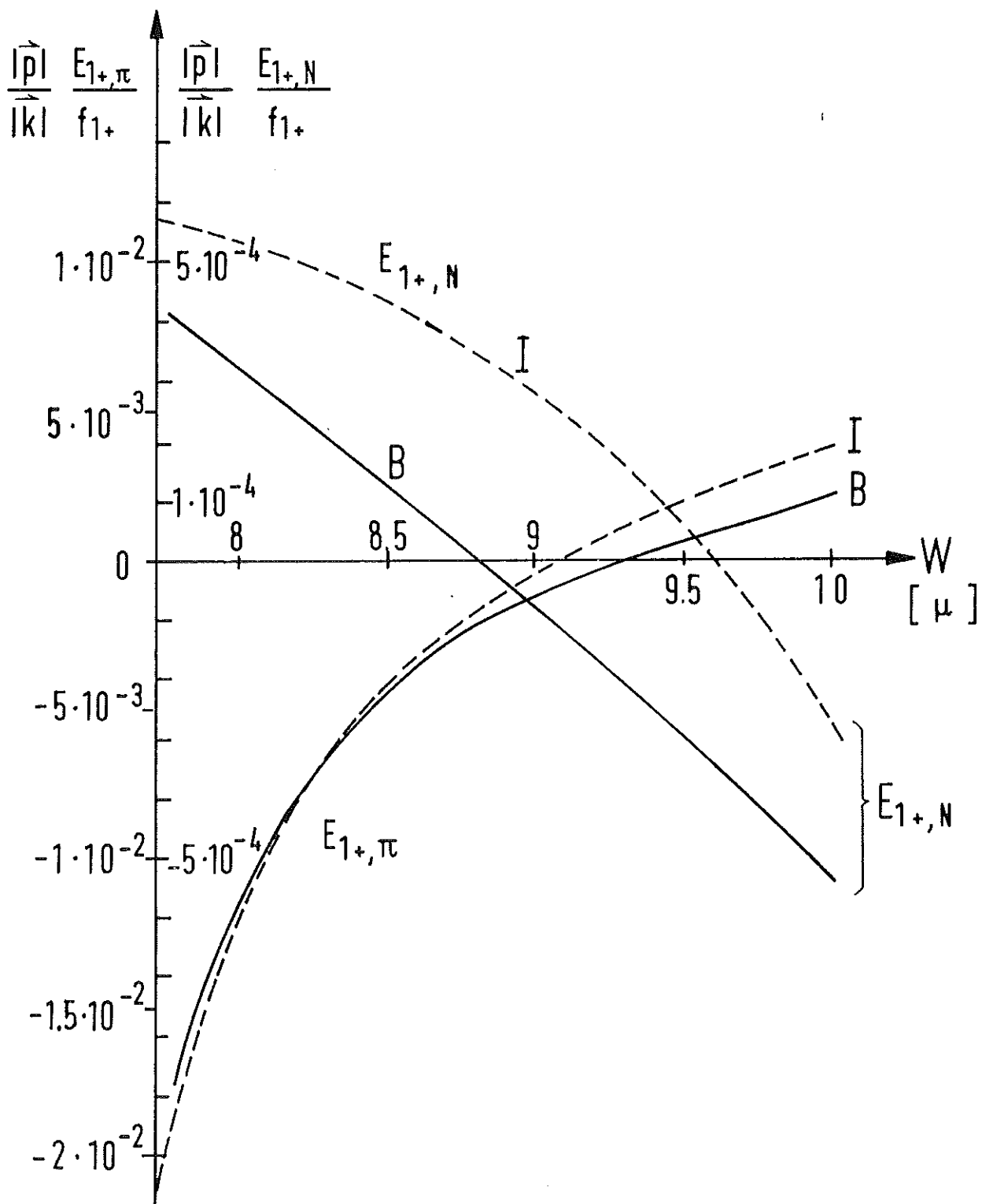


Fig. 6

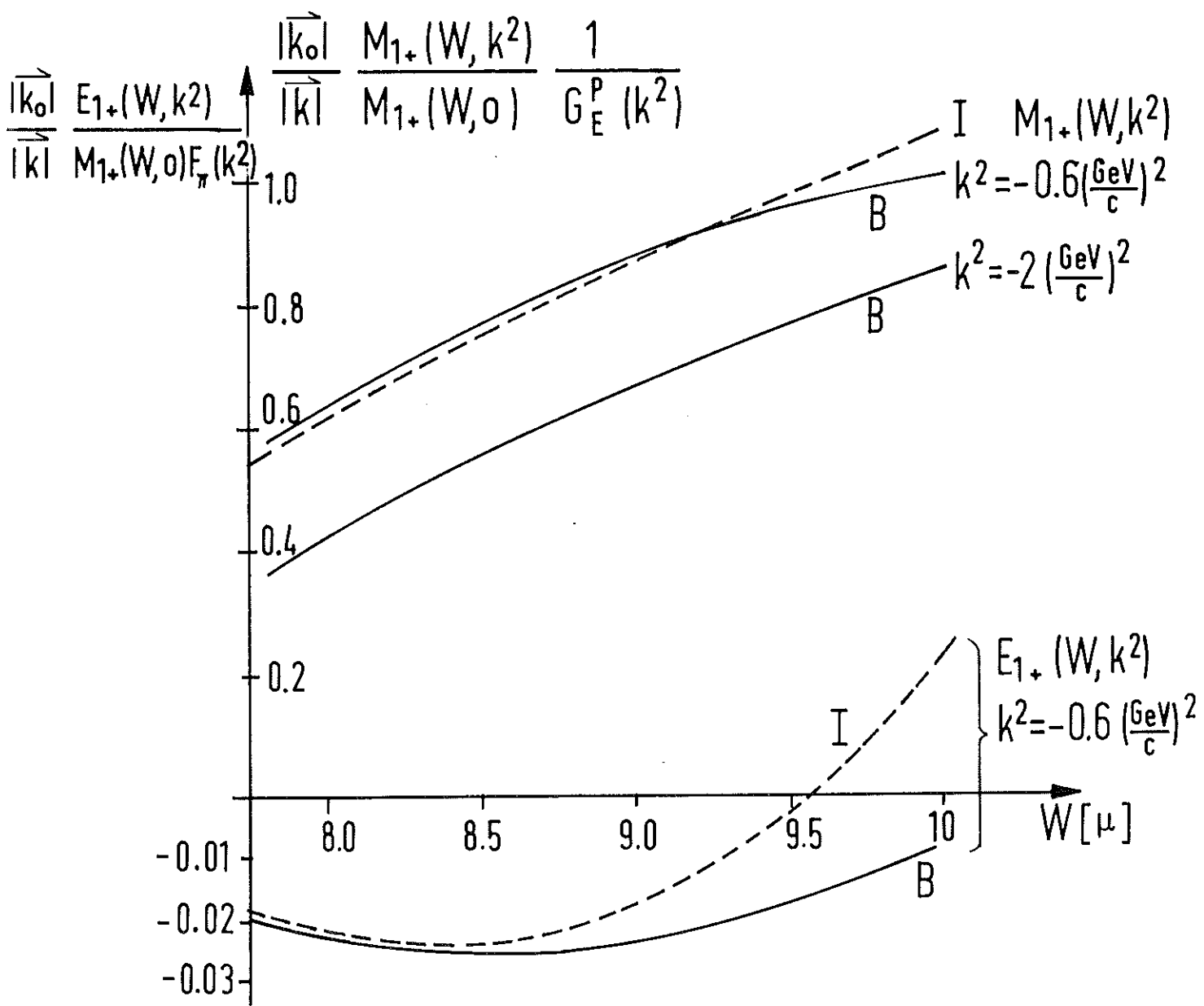


Fig. 7

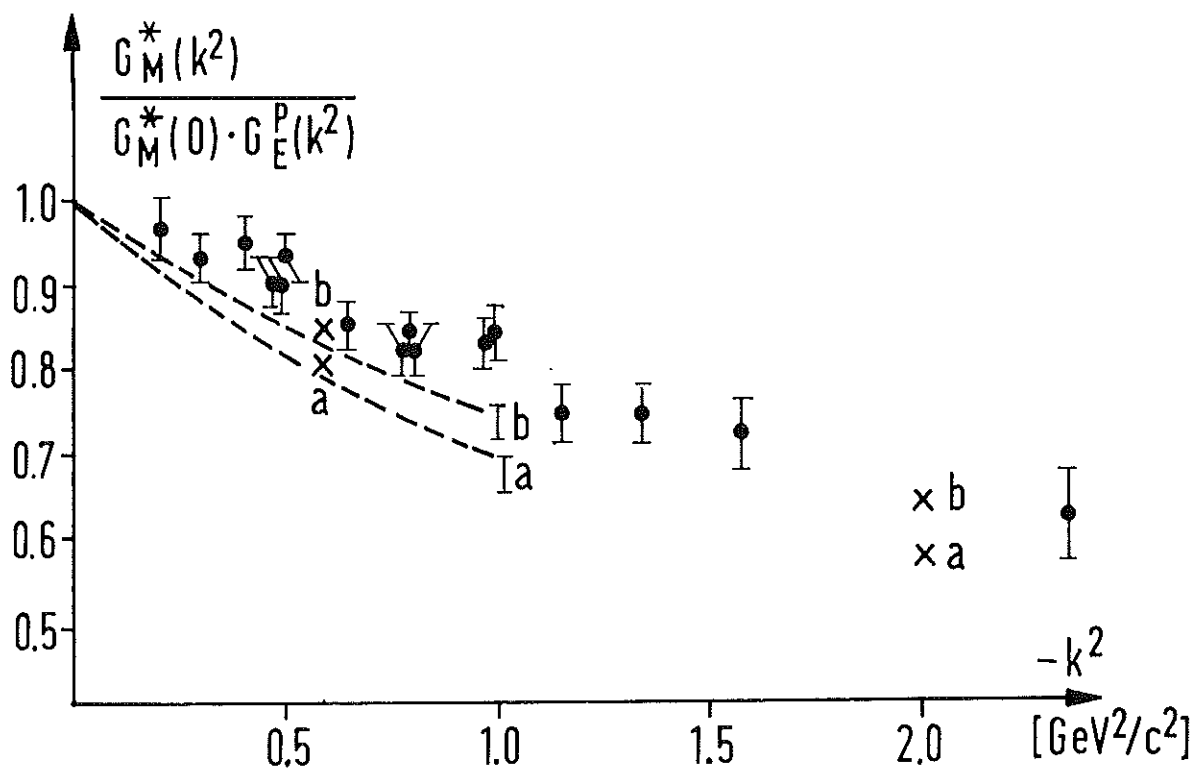


Fig. 8