DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON DESY

DESY 69/52
Dezember 1969

Teilchenverluste durch Streuung der Synchrotronstrahlung

A. Piwinski

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

Teilchenverluste durch Streuung der Synchrotronstrahlung

A. Piwinski

Abstract

It is shown that in electron and positron storage rings at high energies the scattering of the synchrotron radiation on particles in the same bunch can lead to particle losses. With increasing energy and particle density this effect is a sharp limit for the stored beam current.

1. Einleitung

Solange ein Photon, das an einem Elektron gestreut wird, vor dem Stoß in dieselbe Richtung flog wie das Elektron, kann es keine Energie von dem Elektron aufnehmen, sondern nur Energie abgeben. Da die Energie der Photonen der Synchrotronstrahlung sehr klein ist im Vergleich zur Energie der emittierenden Elektronen, kann die Streuung eines Photons an einem Elektron in demselben Bunch nur zu einer unwesentlichen Energieerhöhung des streuenden Elektrons führen.

Die Situation ändert sich jedoch, wenn die Geschwindigkeiten des Elektrons und des Photons vor dem Stoß einen Winkel bildeten, der größer als $1/\gamma$ war, wobei γ die Elektronenenergie in Einheiten der Ruheenergie bedeutet. In diesem Fall kann das Photon dem Elektron Energie entziehen. Für große γ und kleine Winkel α verhalten sich die Photonenenergien nach und vor dem Stoß wie $\alpha^2\gamma^2$. Für genügend große γ kann dem Elektron dann soviel Energie entzogen werden, daß es aus dem phasenstabilen Bereich der Synchrotronschwingung herausfällt.

Der Winkel α setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil rührt von der Bahnkrümmung her und ist bei kleinen Energien der bei weitem stärkste Anteil. Der zweite Anteil wird durch die Änderung der Richtung der Elektronengeschwindigkeit infolge der Betatronschwingung bestimmt. Dieser Anteil wächst mit der Energie und gibt erst bei hohen Energien einen merklichen Beitrag zum Gesamtwinkel.

Da die Zahl der emittierten Photonen proportional zur Energie und zum Strahlstrom wächst, liefert dieser Effekt trotz des kleinen Wirkungsquerschnittes eine Grenze für die Elektronendichte im Bunch und damit für den gespeicherten Strahlstrom bei hohen Energien. Diese Grenze scheint besonders einschneidend bei Verwendung von supraleitenden Magneten oder bei einer hohen Bunchbesetzungszahl, d.h. wenn nicht alle Bunche gefüllt sind.

In dieser Arbeit wird der beschriebene Effekt an einem Modell untersucht, das starke Vereinfachungen enthält. So wird die Polarisation der Synchrotronstrahlung nicht berücksicht, und statt der Gaussverteilung der Teilchen im Bunch wird eine konstante und rechteckförmig begrenzte Verteilung angenommen. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Energie der primären Photonen nicht zu groß ist, wobei die Vergleichsenergie im einzelnen untersucht wird. Es werden jedoch zur Zeit genauere Rechnungen durchgeführt, so daß der Gültigkeitsbereich dieser Ergebnisse beliebig ausgedehnt werden kann.

2. Dynamik

Die Viererimpulse des Elektrons und Photons werden im folgenden in der Schreibweise dargestellt:

$$P_{e\ell} = \{pn_x \;,\; pn_y \;,\; pn_z \;,\; \frac{i}{c}E\}$$

$$P_{Ph} = \frac{h\nu}{c}\{\cos\zeta_x \;,\; \cos\zeta_y \;,\; \cos\zeta_z \;,\; i\} \quad .$$

Aus dieser Definition folgt

$$P^2_{e\ell} = -\,m^2c^2 \;, \qquad P^2_{Ph} = 0 \quad ,$$

wobei m die Elektronenruhemasse bedeutet. Bezeichnet man mit dem Index 1 die Impulse vor dem Zusammenstoß umd mit dem Index 2 die Impulse nach dem Zusammenstoß, so lautet der Impulserhaltungssatz:

$$P_{e\ell\,1} + P_{Ph\,1} = P_{e\ell\,2} + P_{Ph\,2} \quad .$$

Nach Quadrieren dieser Gleichung und einer kleinen Umformung erhält man

$$P_{e\ell\,1}\,P_{Ph\,1} = (P_{e\ell\,1} + P_{Ph\,1})P_{Ph\,2} \quad .$$

Die Ausrechnung der Skalarprodukte liefert

$$E_1h\nu_1(1 - \beta\cos\alpha) = \big(E_1(1 - \beta\cos\phi) + h\nu_1(1 - \cos\psi)\big)h\nu_2 \quad .$$

Hierbei bedeuten

α = Winkel zwischen einfallendem Elektron und einfallendem Photon
ϕ = Winkel zwischen einfallendem Elektron und auslaufendem Photon
ψ = Winkel zwischen einfallendem Photon und auslaufendem Photon
E_1 = Elektronenenergie vor dem Stoß

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \qquad \gamma = \frac{E_1}{mc^2}$$

Für das Verhältnis der Frequenzen oder Photonenenergien ergibt sich

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1 - \beta \cos \alpha}{1 - \beta \cos \phi + p(1 - \cos \psi)}$$

mit

$$p = \frac{h\nu_1}{E_1} \quad .$$

Die obere Grenze dieses Verhältnisses kann folgendermaßen abgeschätzt werden. Die im Bunch auftretenden Winkel α sind sehr klein, sodaß $\cos \alpha$ entwickelt werden kann. Da nur kleine ϕ und ψ zu einer großen Energieänderung führen, können auch $\cos \phi$ und $\cos \psi$ entwickelt werden. Mit

$$\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

erhält man dann zunächst

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \simeq \frac{1 + \gamma^2\alpha^2}{1 + \gamma^2\phi^2 + p\gamma^2\psi^2} \quad .$$

Es muß nun berücksichtigt werden, daß die Winkel ϕ und ψ nicht beliebig klein gewählt werden können, sondern daß die Beziehung

$$\phi + \psi \geq \alpha$$

erfüllt sein muß. Ein Maxium des Frequenzverhältnisses ergibt sich für

$$\phi = \frac{p\alpha}{1 + p} \quad , \quad \psi = \frac{\alpha}{1 + p} \quad .$$

Das Maximum hat dann den Wert

$$\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)_{max} \simeq \frac{1 + \gamma^2\alpha^2}{1 + p\gamma^2\alpha^2} \quad .$$

wobei p gegen 1 vernachlässigt worden ist. α kann durch die Beziehung

$$\alpha^2 \simeq 4 \frac{a}{R}$$

ausgedrückt werden, wobei a die halbe Bunchbreite und R der Krümmungsradius der Bahn im Magneten ist. Mit den für den DESY-Speicherring vorgesehenen Parametern (R = 12,2 m , a = 2 mm) bekommt man bei 3 GeV:

$$\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)_{max} \approx \gamma^2\alpha^2 \approx 3 \cdot 10^4 \quad .$$

Das Maximum der Energieverteilung der Synchrotronstrahlung liegt bei etwa 2 keV, sodaß die Energie der gestreuten Photonen einen Wert von

$$h\nu_{2\ max} \approx 60 \text{ MeV}$$

annimmt. Damit wird der relative Energieverlust des streuenden Elektrons

$$\frac{\Delta E}{E} = -\ 2\% \quad .$$

Da die zulässige Energieabweichung innerhalb des phasenstabilen Bereiches der Synchrotronschwingung nur 0.5% beträgt, führt eine solche Streuung zum Verlust des streuenden Teilchens.

3. Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung unpolarisierter Photonen hat die Gestalt (1):

$$d\sigma = \frac{2r_e^2h^2\nu_2^2}{m^2c^4k_1^2}\left(4\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right) - \left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right)\right) d\Omega$$

mit

$$k_1 = 2\ \frac{P_{e\ell\,1}\,P_{Ph\,1}}{m^2c^2} = -\ 2\gamma\ \frac{h\nu_1}{mc^2}\ (1 - \beta\cos\alpha)$$

$$k_2 = -\ 2\ \frac{P_{e\ell\,1}\,P_{Ph\,2}}{m^2c^2} = 2\gamma\ \frac{h\nu_2}{mc^2}\ (1 - \beta\cos\phi)$$

r_e = klassischer Elektronenradius

$d\Omega$ = Raumwinkelelement des gestreuten Photons.

Die Winkel ϕ und ψ können in einem Koordinatensystem (r,ξ) angegeben werden, in dem die Energie der gestreuten Photonen nur noch von einer Koordinate abhängt. Die Transformation ist gegeben durch

$$\cos\phi = \cos r \cos a - \sin r \sin a \cos\xi$$
$$\cos\psi = \cos r \cos b + \sin r \sin b \cos\xi$$
$$d\Omega = \sin r \, dr \, d\xi$$

mit

$$\sin a = \frac{p}{U}\sin\alpha \quad , \quad \sin b = \frac{\beta}{U}\sin\alpha$$

$$U^2 = p^2 + 2p\beta\cos\alpha + \beta^2 \quad .$$

Bei der Integration über ξ bleibt ν_2/ν_1 konstant, und man erhält (2)

$$\int_0^{2\pi} d\sigma = \frac{4\pi\, r_e^2\, h^2\nu_2^2}{m^2c^4k_1^2}\left[\frac{4}{k_1^2} + \frac{4mc^2}{k_1\gamma h\nu_2 f(r)} + \frac{m^2c^4(1-\beta\cos a\cos r)}{\gamma^2h^2\nu_2^2f^3(r)}\right.$$
$$\left. - \frac{4}{k_1} - \frac{2mc^2}{\gamma h\nu_2 f(r)} - \frac{k_1mc^2}{2\gamma h\nu_2 f(r)} - \frac{2\gamma h\nu_2(1-\beta\cos a\cos r)}{k_1mc^2}\right] \sin r \, dr$$

mit

$$f^2(r) = 1 + \beta^2\cos^2 r - 2\beta\cos r\cos a - \beta^2\sin^2 a$$

und

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1-\beta\cos\alpha}{1+p-\cos r\, U} \quad .$$

Es soll nun über alle Energien $h\nu_2$ integriert werden, die zu einem Teilchenverlust führen können. Die maximale zulässige Energieabweichung eines Teilchens sei gegeben durch

$$q = \frac{|\Delta E_{max}|}{E} \quad .$$

Es ist dann über alle ν_2 zu integrieren, für die die Beziehung

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \geq \frac{q}{p}$$

erfüllt ist. Die Integrationsvariable r läuft dabei von 0 bis r_m, wenn r_m durch

$$\cos r_m = \frac{1}{U}\left(1 + p - \frac{p}{q}(1 - \beta\cos\alpha)\right)$$

gegeben ist. Das Ergebnis dieser Integration soll hier der Einfachheit halber für folgende Näherung angeschrieben werden

$$1 - \beta\cos\alpha \approx \frac{1}{2\gamma^2}(1 + \alpha^2\gamma^2)$$

$$p \ll 1 \qquad .$$

Die Größe

$$f = p(1 + \alpha^2\gamma^2)$$

kann beliebige Werte annehmen. Mit diesen Vereinfachungen erhält man für den Wirkungsquerschnitt den Ausdruck

$$\sigma = \pi r_e^2 \left\{ \frac{16}{F^2} + \frac{1}{(1+F)^2} + \frac{1}{1+F} - 2q\frac{(2+F)^2}{F^3} - \frac{8q}{F^3(1-q)} \right.$$

$$\left. + \frac{q^2}{F} + 2\frac{F^2 - 4F - 8}{F^3}\,\ell n\left[(1+f)(1-q)\right] \right\} \qquad .$$

Da die maximale relative Energieabweichung immer klein gegen 1 ist, kann man nach q entwickeln und bekommt

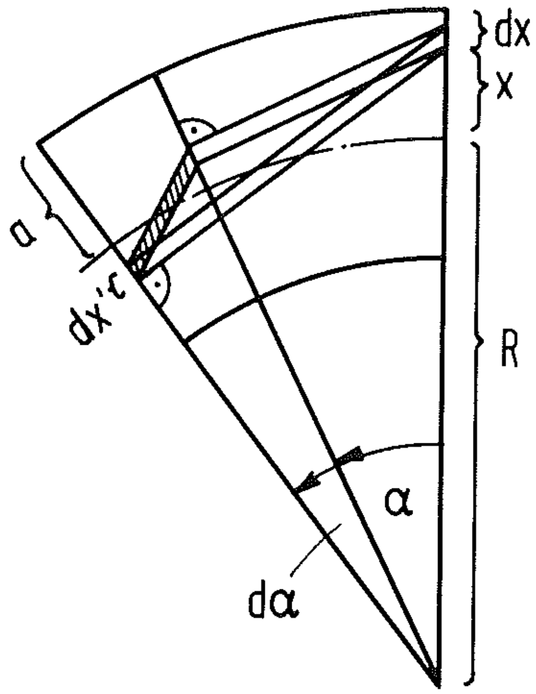
$$\sigma = \pi r_e^2 \left(\frac{16}{F^2} + \frac{1}{(1+F)^2} + \frac{1}{1+F} + 2\frac{F^2 - 4F - 8}{F^3}\,\ell n(1+F) \right.$$

$$\left. - 4\frac{q}{F} + 4\frac{q^2}{F^2} - \frac{2}{3}\frac{q^3}{F^3}(2 - F)^2 \right)$$

4. Bestimmung der Häufigkeit der Streuungen.

Es soll die Anzahl der Streuungen pro Zeiteinheit berechnet werden, die zu einem Teilchenverlust führen. Die Zahl der Elektronen, deren Synchrotronstrahlung im Winkelintervall α bis $\alpha + d\alpha$ durch die Fläche $dxdh$ geht, ist bei Vernachlässigung des natürlichen Öffnungswinkels der Synchrotronstrahlung und der Divergenz infolge der Betatronschwingung durch folgenden Ausdruck gegeben

$$dN_{e\ell} = n_{e\ell}\, dx'\, dh\, R d\alpha$$



$n_{e\ell}$ ist die Dichte der Elektronen, die für dieses Modell konstant angenommen wird. Für die Strahlbreite $2a$ ist die Näherung

$$2a << R$$

benutzt worden. Die Flächendichte des Photonenstromes im angegebenen Winkelintervall und im Energieintervall ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ ist dann

$$dS_{Ph} = n_{e\ell}\, f(\varepsilon)\, d\varepsilon\, R\, d\alpha$$

$f(\varepsilon)$ ist die Zahl der pro Elektron und pro Zeiteinheit im Energieintervall ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ emittierten Photonen. $f(\varepsilon)$ ist in (3) (4) berechnet worden und kann in folgender Form geschrieben werden

$$f(\varepsilon) = G \int_{\varepsilon/\varepsilon_c}^{\infty} K_{5/3}(u)\, du$$

mit

$$G = \frac{r_e}{\pi \sqrt{3}\, \Lambda\, \hbar\, \gamma^2}$$

$$\varepsilon_c = \frac{3\, \hbar\, c\, \gamma^3}{2R}$$

$\Lambda = \hbar/mc$ = Compton-Wellenlänge

$K_{5/3}(u)$ = modifizierte Besselfunktion 2. Art

Von diesem Photonenstrom wird ein Teilchen natürlich nur dann getroffen, wenn es nicht zu nah an der inneren Kante des Bunches sitzt, d.h. wenn für seine radiale Koordinate x die Bedingung

$$x \geq \frac{1}{2} R\, \alpha^2 - a$$

erfüllt ist. Da eine konstante Dichteverteilung dazu führt, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an jeder Stelle im Bunch gleich groß ist, ergibt die Mittelung über alle x den zusätzlichen Faktor

$$\frac{1}{2a} \int\limits_{R\alpha^2/2 - a}^{a} dx = 1 - \frac{1}{4} \frac{R}{a}\, \alpha^2 \quad .$$

Weiterist zu berücksichtigen, daß in den geraden Stücken zwischen den Ablenkmagneten keine Streuungen stattfinden, so daß bei der Mittelung über einen Umlauf der Faktor $R/\bar{R}$ hinzukommt, wobei $\bar{R}$ der mittlere Radius des Ringes ist.

Es ist nun noch zu beachten, daß die auf ein Teilchen bezogene Photonenstromdichte gleich der Photonenstromdichte in einem festen Raumpunkt multipliziert mit $2 \sin (\alpha/2) \simeq \alpha$ ist, wobei vorausgesetzt wird, daß das streuende Teilchen ungefähr die gleiche Geschwindigkeit besitzt wie das Photon. Damit wird die mittlere Anzahl der Streuungen mit dem Einfallswinkel α und mit der primären Photonenenergie ε gleich

$$dZ_{Str} = n_{e\ell}\, G\, \frac{R^2}{\bar{R}} \left(1 - \frac{R}{4a}\, \alpha^2\right) \sigma(\alpha,\varepsilon,q) \int\limits_{\varepsilon/\varepsilon_c}^{\infty} K_{5/3}(u)\, du\ \alpha\, d\alpha\, d\varepsilon \quad .$$

Der Wirkungsquerschnitt soll nun folgendermaßen vereinfacht werden. Die Größe F soll in dem Energiebereich, in dem die meisten Photonen emittiert werden, klein gegen 1 sein, d.h. es soll die Beziehung gelten

$$F = \frac{\varepsilon}{E}(1 + \alpha^2\gamma^2) \approx \frac{\varepsilon}{E}\alpha^2\ \gamma^2 \leq \frac{4a\ \varepsilon\ \gamma^2}{ER} \ll 1 \quad .$$

Für die im Abschnitt 2) angegebenen Parameter besitzt $ER/4a\ \gamma^2$ die Größenordnung 100 keV, während das Maximum der Energieverteilung bei 2 keV liegt. Weiterhin gilt natürlich

$$q \leq \frac{h\nu_2}{E} \approx \frac{\varepsilon}{E}\alpha^2\ \gamma^2$$

also

$$F \geq q \ ,$$

da der Energieverlust des streuenden Elektrons so groß sein muß, daß das Elektron verloren geht. Mit diesen Vereinfachungen erhält der Wirkungsquerschnitt die Form

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\ r_e^2\ (1 - F - \frac{3}{2}\frac{q}{F} + \frac{3}{2}\frac{q^2}{F^2} - \frac{q^3}{F^3}) \quad .$$

Die Gesamtzahl der Streuungen ergibt sich dann durch Integration über α und ε. Bei der Integration über α ist die untere Grenze α_o durch den Energieverlust $h\nu_2 = qE$ bestimmt, bei dem das Elektron noch verloren geht. Aus

$$\frac{qE}{\varepsilon} = \frac{1 + \gamma^2\ \alpha_o^2}{1 + p\ \gamma^2\ \alpha_o^2}$$

folgt

$$\alpha_o = \sqrt{\frac{EQ}{\varepsilon\gamma^2}}$$

mit

$$Q = \frac{q}{1 - q} \quad .$$

Die obere Grenze α_1 ist durch die Bunchbreite und die Krümmung gegeben. Sie hat den Wert

$$\alpha_1 = 2\sqrt{\frac{a}{R}} \quad .$$

Die Integration über ε erstreckt sich von ε_o bis ∞, wobei ε_o dadurch gegeben ist, daß bei dieser primären Photonenenergie α_o gleich α_1 wird.

$$\varepsilon_o = \frac{EQR}{4\gamma^2 a} \quad .$$

Die Gesamtzahl der Streuungen pro Zeiteinheit für ein Elektron ist gegeben durch

$$Z_{Str} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 n_{e\ell} G \frac{R^2}{\bar{R}} \int_{\varepsilon_o}^{\infty} \int_{\alpha_o}^{\alpha_1} \left(1 - \frac{R}{4a}\alpha^2\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\alpha^2\gamma^2 - \frac{3}{2}\frac{qE}{\varepsilon\alpha^2\gamma^2}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\frac{q^2 E^2}{\varepsilon^2\alpha^4\gamma^4} - \frac{q^3 E^3}{\varepsilon^3\alpha^6\gamma^6}\right) \int_{\varepsilon/\varepsilon_c}^{\infty} K_{5/3}(u)\, du\, \alpha\, d\alpha\, d\varepsilon \quad .$$

Die Integration über α führt auf den Ausdruck

$$Z_{Str} = \frac{4\pi}{3} r_e^2 n_{e\ell} G \varepsilon_c \frac{aR}{\bar{R}} V^2 \int_1^{\infty} \left(-15 + 2\eta + 12\eta^{-1} + \eta^{-2} + \right.$$

$$\left. + 6(1 + \eta^{-1}) \ln \eta - 3 \ln^2 \eta\right) K_{5/3}(\eta V)\, d\eta$$

mit

$$V = \frac{EQR}{4\varepsilon_c \gamma^2 a} \simeq \frac{EqR}{4\varepsilon_c \gamma^2 a} \quad .$$

Zu q proportionale Glieder sind in diesem Integral vernachlässigt worden. Mit

$2b$ = Bunchhöhe

2ℓ = Bunchlänge

N_B = Zahl der Teilchen in einem Bunch

erhält man schließlich

$$Z_{Str} = \frac{5\pi\ r_e^3\ c\gamma\ N_B}{6\sqrt{3}\ \Lambda\ b\ \ell\ \bar{R}}\ h\ (V) \quad .$$

Die Funktion

$$h(V) = \frac{3V^2}{10\pi} \int_1^\infty \left(-15 + 2\eta + 12\eta^{-1} + \eta^{-2} + 6\ (1 + \eta^{-1})\ell n\ \eta - 3\ell n^2\ \eta\right) \times$$

$$\times\ K_{5/3}\ (\eta V)\ d\eta$$

geht für kleine V gegen 1 und für große V gegen 0 . Sie ist mit Hilfe eine Reihenentwicklung bestimmt und im Diagramm 1 aufgetragen worden .

5. Lebensdauer

Als die mittlere Lebensdauer T_T eines Teilchens im Bunch kann man den mittleren zeitlichen Abstand zwischen zwei Streuungen definieren. Mit dieser Definition erhält man

$$T_T = \frac{1}{Z_{Str}} \quad .$$

Bei dieser differentiell definierten Lebensdauer wird natürlich nicht berücksichtigt, daß innerhalb der Lebensdauer die Zahl der Teilchen im Bunch abnimmt und damit auch die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung kleiner wird. Es ist deshalb zweckmäßig, eine integrierte Lebensdauer für die Gesamtzahl der Teilchen im Bunch zu definieren. Dazu ist es notwendig, das zeitliche Abklingen der Teilchenzahl zu bestimmen, das in diesem Fall nicht nach einem Exponentialgesetz verläuft. Die Differentialgleichung für die Änderung der Teilchenzahl lautet

$$\begin{aligned} dN_B &= -\ Z_{Str}\ N_B\ dt \\ &= -\ A\ N_B^2\ dt \quad , \end{aligned}$$

wobei A der Proportionalitätsfaktor zwischen Z_{Str} und N_B ist. Die Lösung besitzt die Form:

$$\begin{aligned} N_B &= \frac{N_{Bo}}{1 + N_{Bo}\ At} \\ &= \frac{N_{Bo}}{1 + Z_{Str\ o}\ t} \end{aligned}$$

Die Größen N_{Bo} und Z_{Stro} sind die Teilchenzahl bzw. die Zahl der Streuungen zur Zeit $t = 0$. Nach der Zeit $t = T_T$ ist also die Teilchenzahl auf die Hälfte abgesunken. Die üblicherweise als Lebensdauer für den Strahl definierte Zeit, nach der die Teilchenzahl auf $1/e$ abgesunken ist, hat dann die Form

$$T = \frac{e - 1}{Z_{Str}}$$

oder ausführlicher

$$T = \frac{(e - 1)\, 6\, \sqrt{3}\, \Lambda\, b\, \ell\, \bar{R}}{5\pi\, r_e^3\, c\gamma\, N_B} \, \frac{1}{h(V)}$$

mit

$$V = \frac{q\, R^2}{6\Lambda\gamma^4 a} \quad .$$

Setzt man für die physikalischen Konstanten Zahlenwerte ein, so bekommt man die Größengleichungen

$$\frac{T}{h} = 9.3\, \frac{10^{12}}{N_B}\, \frac{b\ell}{cm^2}\, \frac{\bar{R}}{10m}\, \frac{GeV}{E}\, \frac{1}{h(V)}$$

$$V = 294 \left(\frac{GeV}{E}\right)^4 \left(\frac{R}{10m}\right)^2 \frac{cm}{a}\, \frac{\Delta E_{max}}{E} \quad .$$

Den Herren Drs. R. D. Kohaupt und H. Nesemann möchte ich an dieser Stelle für nützliche Diskussionen danken.

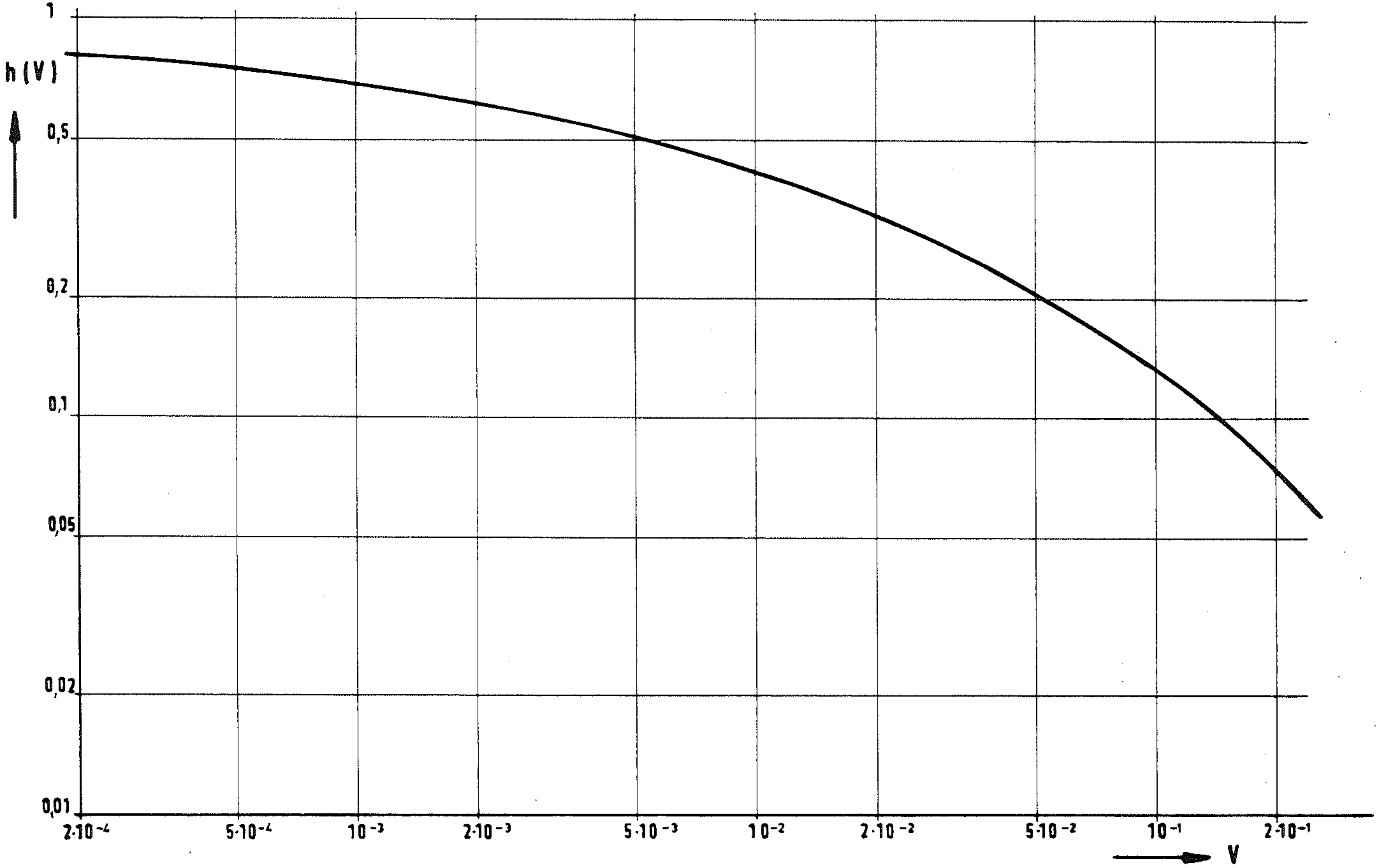
Literatur

1. A. I. Achieser, W. B. Berestezki; Quantenelektrodynamik, 1962

2. W. Gröbner, N. Hofreiter; Integraltafel, 1961

3. D. Ivanenko, A. Sokolov; Doklady 59, 1551 (1948)

4. J. Schwinger; Phys. Rev. 75, 1912 (1949).



1
h (V)
0,5
0,2
0,1
0,05
0,02
0,01
2·10⁻⁴
5·10⁻⁴
10⁻³
2·10⁻³
5·10⁻³
10⁻²
2·10⁻²
5·10⁻²
10⁻¹
2·10⁻¹
V

Fig. 1