

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON **DESY**

DESY 70/29  
Juli 1970

DESY-Bibliothek  
28. JULI 1970

Das relativistische Dreikörperproblem  
mit gebundenen Zuständen

Manfred Kudlek

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

Das relativistische Dreikörperproblem  
mit gebundenen Zuständen

von

M. Kudlek

II. Institut für Theoretische Physik  
der  
Universität Hamburg

**Abstract.**

A system of three interacting particles including bound states is considered. Annihilation or creation of particles are neglected. A representation space is constructed to give a consistent description of this system. Integral representations for the scattering operators of this many-body problem are deduced. Relations between different Lorentz frames are given for the transition operators, as well as between the 2-particle and 3-particle space.

Finally it is shown how Faddeev equations have to be used.

## Inhalt

	Seite
0. Einleitung	1
1. Darstellung von elementaren Teilchen	3
2. Impulsoperatoren	5
3. Darstellung von freien und wechselwirkenden Teilchen	7
4. Möller-Operatoren	10
5. Streuoperatoren	13
6. Potentiale	14
7. Integraldarstellungen der Möller-Operatoren	15
8. Integraldarstellungen der Streuoperatoren	19
9. T-Operatoren	22
10. Faddeev-Gleichungen	26
11. Zusammenfassung	28
A1. Operatoren in Tensorprodukten	29
A2. Ein Satz über Spektralintegrale	30
A3. Formeln zu den Faddeev-Gleichungen	31
Literaturangaben	35

## 0. Einleitung

Das Interesse an Mehrteilchen-Prozessen ist in letzter Zeit wieder stärker erwacht, etwa im Rahmen einer Quarktheorie. Schwierigkeiten bereitet vor allem eine genaue relativistische Beschreibung dieses Problems. Außerdem hat das Auftreten von gebundenen Zuständen erhebliche Komplikationen zur Folge. Nun ist aber die Existenz von gebundenen Zuständen in solchen Prozessen ganz natürlich, da Prozesse mit mehr als zwei Teilchen im Eingangskanal nur von theoretischem Interesse sind, während in der Praxis dort gebundene Zustände erscheinen, z.B. in rearrangement Prozessen.

Zum 3-Teilchen-Problem gab es schon verschiedene Ansätze. Als erster brachte Faddeev 12) eine exakte Darstellung für ein System von drei nichtrelativistischen Teilchen, aber ohne das Auftreten von gebundenen Zuständen. Es zeigt sich jedoch, daß seine Gleichungen ohne weiteres für ein relativistisches Problem übernommen werden können. Ferner kann man sie verallgemeinern, falls mehr als drei Potentiale auftreten.

Verschiedene Autoren ( z.B. Lovelace 13), Newton 1) ) beschäftigten sich dann später mit der Untersuchung von Operatoren, welche alle Lösungen von Faddeev-Gleichungen sind. Diese Operatoren sollen für verschiedene Streuprozesse verantwortlich sein. Jedoch wurde nicht untersucht, welche Operatoren man für diese Streuprozesse überhaupt benötigt. Es handelt sich dabei um T- Operatoren, die in einer Integraldarstellung für die Streuoperatoren auftreten. Dieses Problem wird in dieser Arbeit untersucht ( Kapitel 8, 9 ). Außerdem wird auch der für solch ein Streusystem benötigte Darstellungsraum untersucht, was bisher wenig beachtet wurde. Diese Arbeit bringt eine Beschreibung von Prozessen zwischen drei Teilchen, in denen diese Teilchen nicht ihre Identität ändern, sondern höchstens gebundene Zustände untereinander erzeugen können.

Zunächst wird ein geeigneter Darstellungsraum konstruiert, welcher es gestattet, die im Streuprozess auftretenden freien und wechselwirkenden Teilchen konsistent zu beschreiben. Diese Beschreibung erfolgt im Rahmen von unitären Darstellungen der Poincaré-Gruppe.

Mit Hilfe der Möller-Operatoren werden dann für dieses Mehrkanal-Problem die in Frage kommenden Streuoperatoren konstruiert, sowie Integraldarstellungen für sie gegeben. Diese gestatten eine zeitunabhängige Beschreibung des Problems.

Schließlich werden Umrechnungsformeln für die T-Operatoren in verschiedenen Lorentzsystemen gegeben und Beziehungen zwischen T-Operatoren im 2-Teilchen-System zu solchen im 3-Teilchen-System aufgestellt. Dies ist wichtig, um die in den Faddeev-Gleichungen auftretenden T-Operatoren durch bekannte zu berechnen.

Nicht näher untersucht wurden die auftretenden Potentiale. Eine Untersuchung mit Hilfe separabler Potentiale ( allerdings für den nichtrelativistischen Fall ) findet man bei Alt, Grassberger und Sandhas 15). Eine Anwendung der Bethe-Salpeter-Gleichung auf das 3-Teilchen-Problem bringen Stichel 16), sowie Freedman, Lovelace und Namyslowski 17).

Für das nichtrelativistische N-Körperproblem gibt Hepp 18) eine Untersuchung der S-Matrix-Unitarität und der analytischen Eigenschaften von Resolventen und Streuamplituden.

## 1. Darstellung von elementaren Teilchen

In diesem Kapitel sollen einleitende Betrachtungen zum Darstellungsraum eines Systems von streuenden Teilchen gebracht werden. Unter ihnen können auch gebundene Zustände vorkommen. Diese werden auch manchmal komplexe Teilchen genannt werden, im Gegensatz zu elementaren Teilchen. Ausgeführt wird die Betrachtung für ein System von zwei und drei Teilchen. Bei den interessierenden Streuproblemen sollen aber die elementaren Teilchen ihre Identitäten behalten, so daß keine neuen elementaren Teilchen beim Streuprozeß erzeugt werden.

Das Problem ist es nun, einen geeigneten Darstellungsraum für solch ein System zu finden. Darin sollen sowohl freie elementare und komplexe, als auch wechselwirkende Teilchen beschrieben werden. Außerdem muß berücksichtigt werden, daß in den gebundenen Zuständen schon eine Wechselwirkung vorhanden ist. Die innere Struktur der komplexen Teilchen soll also mit beschrieben werden. Ferner sollen die komplexen Teilchen auch als freie Teilchen aufzufassen sein, wenn sie bei einem Streuprozeß ein- oder auslaufen.

Es ist auch das Ziel, die Gesamtwechselwirkung aus einfacheren Wechselwirkungen aufzubauen, insbesondere aus solchen zwischen jeweils zwei elementaren Teilchen.

Bisher wurde meist der umgekehrte Weg benutzt. So fordert z.B. Newton 1), 2) die Kenntnis der Gesamtwechselwirkung und konstruiert einfachere Wechselwirkungen durch Clusterbedingungen. Bei einem 3-Teilchen-System etwa soll der Hamilton-Operator für ein System eines freien gebundenen Zustandes und eines dritten freien Teilchens als Grenzwert des Hamilton-Operators für die Gesamtwechselwirkung entstehen, wenn man das dritte Teilchen räumlich entfernt und den Abstand der beiden übrigen konstant läßt. Der Nachteil ist, daß man die Gesamtwechselwirkung kennen muß. Außerdem sagt solch ein Verfahren nichts über die verschiedenen Zustandsräume aus.

Jauch 3) fordert für die Hamilton-Operatoren von verschiedenen freien Systemen im wesentlichen deren Vertauschbarkeit. Es wird sich zeigen, daß diese Forderung bei der hier gebrachten Konstruktion z.T. schon erfüllt ist bzw. durch eine schwächere ersetzt werden kann.

Die hier durchgeführte Konstruktion geht davon aus, daß man es mit Darstellungen der Poincaré-Gruppe zu tun hat. Die Darstellungsräume sollen Hilberträume sein, und es sollen nur unitäre Darstellungen betrachtet werden. Da die Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe bei Wigner 4) und Joos 5) ausführlich behandelt wird, genügt es, hier nur die wichtigsten Tatsachen zu erwähnen. Für einzelne elementare Teilchen soll die Darstellung irreduzibel sein und zu positiver Masse und Energie gehören. Hat man  $n$  freie elementare Teilchen, mit den Hilberträumen  $\mathcal{H}_i$ , so wird das ganze System durch das Tensorprodukt der einzelnen Darstellungen beschrieben mit

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i \quad (1)$$

Das Tensorprodukt ist wieder unitär, aber nicht irreduzibel. Weiteres zum Tensorprodukt siehe man im Anhang 1.

Man könnte nun versuchen, wenn man die gebundenen Zustände ebenfalls als elementare Teilchen betrachtet, für jede Konfiguration von freien (elementaren und komplexen) Teilchen einen eigenen Hilbertraum zu verwenden und zur Beschreibung des gesamten Systems dann die orthogonale Summe zu bilden. Das geschieht aber auf Kosten der Kenntnis der inneren Struktur der gebundenen Zustände. Außerdem benötigt man zur Beschreibung der Wechselwirkung des gesamten Systems eine Vielzahl von Operatoren, z.B. Potentials, um diese verschiedenen Teilräume aufeinander abzubilden. Insbesondere braucht man die Kenntnis der Wechselwirkung von gebundenen Zuständen mit elementaren Teilchen.

Ferner treten die gebundenen Zustände nicht als Eigenwerte im Spektrum eines wechselwirkenden Hamilton-Operators auf, sondern werden als Eigenwerte des freien Hamilton-Operators hineingesteckt. Für ein System von drei elementaren Teilchen und einem gebundenen Zustand zwischen den Teilchen 1 und 2 etwa hätte man folgenden Hilbertraum zu nehmen

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_{12} \otimes \mathcal{H}_3$$

Zur Beschreibung von Streuprozessen, bei denen die elementaren Teilchen ihre Identität behalten, benötigt man hier vier Potentiale, von denen zwei nur elastische Streuungen beschreiben.

Wegen dieser Nachteile soll daher ein anderes Konstruktionsverfahren benutzt werden, welches die gebundenen Zustände auf natürliche Weise einführt.

Es sei an dieser Stelle gesagt, daß man bei der Beschreibung von Streuprozessen mit Erzeugung neuer Teilchen nicht umhin



kommt, zueinander orthogonale freie Kanäle der eben erwähnten Art einzuführen und sie derart aneinanderzukoppeln.

Wie sich noch zeigen wird, führt auch die hier durchgeführte Konstruktion zu einer orthogonalen Aufspaltung des Hilbertraums, allerdings nicht für freie, sondern für wechselwirkende Teilchen. Man befindet sich dann im Heisenbergbild.

Zunächst sollen aber noch einige Eigenschaften der infinitesimalen Erzeugenden der Poincaré-Gruppe untersucht werden.

## 2. Impulsoperatoren

Von den 10 infinitesimalen Erzeugenden der Poincaré-Gruppe sind für das folgende nur diejenigen der Translationen von Bedeutung. Da nur unitäre Darstellungen betrachtet werden, sind diese vier Erzeugenden durch vertauschende selbstadjungierte Operatoren  $P_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) dargestellt.

Die  $P_\mu$  sind die Impulsoperatoren. Sie erzeugen 1-parametrische

unitäre Gruppen, welche vertauschen:  $U_\mu(t_\mu) = e^{it_\mu P_\mu} \quad (-\infty < t_\mu < \infty)$

$$\text{mit} \quad U_\mu(t_\mu) U_\mu(t'_\mu) = U_\mu(t_\mu + t'_\mu) \quad (2)$$

$$\lim_{t_\mu \rightarrow 0} U_\mu(t_\mu) = 1$$

Der Operator  $P_0$  ist der Hamilton-Operator. Er wird auch oft mit  $H$  bezeichnet werden.

Es soll kurz die Eigenschaft eines Tensorprodukts von unitären Darstellungen betrachtet werden. Sind  $U_i(t)$  unitäre Gruppen auf den Räumen  $\mathcal{H}_i$  ( $i=1, 2$ ), so ist  $U(t) = U_1(t) \otimes U_2(t)$  ebenfalls wieder eine unitäre Gruppe auf  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . (Anhang 1)

Sind  $H_i$  die infinitesimalen Erzeugenden dieser Gruppen mit den Definitionsbereichen  $\mathcal{D}(H_i)$ , so gilt für die infinitesimale

Erzeugende von  $U(t)$ :  $(H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2)^{**} \in H$

$$\text{mit} \quad \mathcal{D}(H_1) \otimes \mathcal{D}(H_2) \subset \mathcal{D}(H) \quad (\text{Anhang 1}) \quad (3)$$

Die Eigenschaft (3) gilt natürlich für alle Impulsoperatoren, und es ist klar, wie dies auf ein Tensorprodukt aus mehr als zwei Bestandteilen zu verallgemeinern ist.

Für ein System von zwei bzw. drei freien elementaren Teilchen mit den Darstellungsräumen  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  bzw.  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

hat man dann  $P_\mu^{(2)} \supset (P_{\mu 1} \otimes 1_2 + 1_1 \otimes P_{\mu 2})^{**}$

$$P_\mu^{(3)} \supset (P_{\mu 1} \otimes 1_2 \otimes 1_3 + 1_1 \otimes P_{\mu 2} \otimes 1_3 + 1_1 \otimes 1_2 \otimes P_{\mu 3})^{**} \quad (4)$$

Es soll angenommen werden, daß in (4) das Gleichheitszeichen gilt, d.h. die Operatoren in den Klammern sind wesentlich selbstadjungiert.

Da die  $P_\mu$  selbstadjungierte Operatoren sind, können sie durch Spektralintegrale ausgedrückt werden. Und zwar gilt dies im Sinne der starken Topologie, d.h. der Ausdruck  $T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$  (5) für einen selbstadjungierten Operator T

ist zu verstehen als  $Tf = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)f \quad \forall f \in \mathcal{D}(T)$  (6) und  $\mathcal{D}(T)$  ist gegeben durch  $\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathcal{H}, \exists \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\|E(\lambda)f\|^2 = \|Tf\|^2\}$

Da nun die  $P_\mu$  miteinander vertauschbar sind, d.h. ihre Spektral-miteinander kommutieren, so kann man aus diesen 1-parametrischen Spektralscharen  $E_\mu(p_\mu)$  eine 4-parametrische Spektralschar

$$E(p) = \prod_{\mu=0}^3 E_\mu(p_\mu) \quad (7)$$

konstruieren.

Daß dies eine Spektralschar ist, sieht man leicht. ( Siehe auch Jauch und Misra 6) ). Dies entspricht völlig der Einführung einer uneigentlichen Basis.

Damit kann man die  $P_\mu$  auch schreiben als  $P_\mu = \int_{R^4} p_\mu d^4E(p)$  (8)

Es wird nun gezeigt, daß für ein System freier elementarer Teilchen der Operator  $P^2 = \int_{R^4} p^2 d^4E(p)$  (9)

mit  $p^2 = p_0^2 - \mathcal{Y}^2$  ein positiver Operator ist.

Für ein Teilchen folgt dies daraus, daß man es mit einer irreduziblen Darstellung zu positiver Masse und Energie zu tun hat, daß also gilt :

$$P^2 = m^2 1 \quad (P_0 f, f) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(P_0) \quad (10)$$

Für ein Tensorprodukt sieht man dies ebenfalls leicht ein.

Dann gilt nämlich  $P_\mu = \iint_{R^4 R^4} (p_{1\mu} + p_{2\mu}) d^8(E_1(p_1) \otimes E_2(p_2))$  (11)

und  $P^2 = \iint_{R^4 R^4} (p_1 + p_2)^2 d^8(E_1(p_1) \otimes E_2(p_2))$  (12)

woraus  $(P^2 f, f) = m_1^2 \|f\|^2 + m_2^2 \|f\|^2 + 2 \iint_{R^4 R^4} (\sqrt{(m_1^2 + \mathcal{Y}_1^2)(m_2^2 + \mathcal{Y}_2^2)} - \mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2) d^8(E_1(p_1) \otimes E_2(p_2))$

und somit  $(P^2 f, f) \geq (m_1 + m_2)^2 \|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{D}(P^2)$  (13)

folgt, da  $(m_1^2 + \mathcal{Y}_1^2)(m_2^2 + \mathcal{Y}_2^2) \geq (m_1 m_2 + |\mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_2|)^2$  gilt.

( Siehe dazu auch Anhang 1 )

Die Verallgemeinerung auf ein Tensorprodukt aus mehr als zwei Bestandteilen ist dann wieder klar.

Außerdem gilt dann mit  $h_0 = \sqrt{P^2}$  (14)

der Spektralschar  $E_0^{(0)}(p_0)$  zu  $h_0$

und der Spektralschar  $E^{(0)}(p) = E_0^{(0)}(p_0) \prod_{i=1}^3 E_i(p_i)$

( Das letztere ist eine Spektralschar, da  $h_0$  als Invariante der Darstellung mit allen Gruppenelementen vertauscht, also auch mit

den  $E_i(p_i)$  ) : (15)

Ferner ist  $h_0$  natürlich positiv und sein Spektrum beginnt mit  $M = \sum_{k=1}^n m_k$

Den Operator  $h_0$  nennt man den Massenoperator oder Energie-Operator im Schwerpunktsystem.

### 3. Darstellung von freien und wechselwirkenden Teilchen

Hier soll nun die schon oben erwähnte Konstruktion des Darstellungsraums für ein System von freien und wechselwirkenden Teilchen ausgeführt werden. Dies soll für das 2- und 3-Teilchen-System geschehen. Dabei werden die in Kapitel 1 erwähnten Tatsachen berücksichtigt.

#### 3.1 Darstellung des 2-Teilchen-Systems

Der Darstellungsraum hat hier die Gestalt  $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

Für zwei freie Teilchen ist er der Darstellungsraum einer unitären Tensorprodukt-Darstellung der Poincaré-Gruppe mit den Impulsoperatoren  $P_i$  und dem freien Hamilton-Operator  $H_0$ . Diese sind durch (4) gegeben, mit dem Gleichheitszeichen.

Zugleich aber soll  $\mathcal{H}^{(2)}$  der Darstellungsraum einer anderen unitären Darstellung sein, welche die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen beschreibt. Diese Darstellung soll dieselben Impulsoperatoren  $P_i$  besitzen wie die Darstellung der freien Teilchen, aber einen anderen Hamilton-Operator  $H$ , der für die Wechselwirkung verantwortlich ist. Außerdem soll dies eine Darstellung mit positivem  $P^2$  und positiver Energie sein.

Dann lassen sich wie in Kapitel 2 die invarianten Massenoperatoren

$$h_0 = \sqrt{H_0^2 - \mathcal{P}^2} \quad \text{und} \quad h = \sqrt{H^2 - \mathcal{P}^2}$$

Es soll weiter verlangt werden, daß  $h$  dasselbe kontinuierliche Spektrum wie  $h_0$  besitzt, und daß seine Eigenwerte unterhalb des kontinuierlichen Teils liegen. Natürlich sind  $h_0$  und  $h$  positive Operatoren. Damit kann man schreiben

$$h_0 = \int_{m_1+m_2}^{\infty} p_0 dE_0(p_0) \quad (16)$$

$$h = \sum_{k=1}^n \mu_k E_k + \int_{m_1+m_2}^{\infty} p_0 dE(p_0) \quad (17)$$

mit  $0 < \mu_k < m_1+m_2 \quad \forall k$

Der Projektor auf den diskreten Teil des Spektrums von  $h$  sei

$$E_d = \sum_{k=1}^n E_k$$

Es muß noch gezeigt werden, daß  $E_k$  nicht von der speziellen Wahl eines Lorentzsystems abhängt, sondern invariant definiert ist. Da  $P^1$ , also auch  $h$ , invariant bezüglich der Gruppe ist, so gilt

$$U(\Lambda)E(p_0) = E(p_0)U(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{P} \quad (18)$$

und insbesondere  $U(\Lambda)E_k = E_k U(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in \mathcal{P}$

( $\mathcal{P}$  Poincaré-Gruppe), d.h. die Darstellung wird durch die  $E_k$  reduziert. Also gilt  $u(\Lambda) = \bigoplus_{k=1}^N u_k(\Lambda) \otimes u_c(\Lambda)$  und jedes  $u_k(\Lambda)$  definiert auf

$\mathcal{H}_k$  jeweils eine irreduzible unitäre Darstellung zur Masse  $\mu_k$ .

Geht man nun in ein anderes System mit  $\tilde{u}(\Lambda) = u^{-1}(\Lambda_0)u(\Lambda)u(\Lambda_0)$

über, so ist  $\tilde{P}^1 = P^1$  dieselbe Invariante, da  $\tilde{P}^1 = u^{-1}(\Lambda_0)P^1 u(\Lambda_0) = P^1$

wegen der Invarianz von  $P^1$  gilt. Somit ergibt sich dasselbe  $h_0$  und man erhält dieselben irreduziblen Darstellungen und dieselben Massen  $\mu_k$ .

Der durch  $E_b$  bestimmte Teilraum  $\mathcal{H}_b$  beschreibt die gebundenen Zustände zwischen den beiden Teilchen, während der kontinuierliche Teil  $E_c = \int_{m_1+m_2}^{\infty} dE(p_0)$  zu den kontinuierlichen Streuzuständen gehört.

Man hat also  $\mathcal{H}^{(2)} = \bigoplus_{k=1}^N \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_c = \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_c \quad (19)$

und die  $\mathcal{H}_k$  können als Darstellungsräume für elementare Teilchen interpretiert werden, da sie zu irreduziblen Darstellungen gehören.

Somit hat man eine Beschreibung der gewünschten Art für ein 2-Teilchen-System gefunden. Dasselbe soll jetzt für das 3-Teilchen-System geschehen.

### 3.2 Darstellung des 3-Teilchen-Systems

Die Beschreibung des Systems erfolgt hier im Raum  $\mathcal{H}^{(3)} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Die Darstellung von drei freien elementaren Teilchen erfolgt durch ein Tensorprodukt, und der Hamilton-Operator  $H_0$  hat die Form (4).

Erzeugt die zwischen den Teilchen  $i, j$  herrschende Wechselwirkung gebundene Zustände, so gilt nach (19)  $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j = \mathcal{H}_{ij}^b \otimes \mathcal{H}_{ij}^c$

Damit ergibt sich eine Aufspaltung des Raumes  $\mathcal{H}^{(3)}$  gemäß

$$\mathcal{H}^{(3)} = \mathcal{H}_{ij}^b \otimes \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_{ij}^c \otimes \mathcal{H}_k$$

wobei die  $i, j, k$  zyklisch laufen sollen.

Der Teilraum  $\mathcal{H}_{ij}^b \otimes \mathcal{H}_k$  beschreibt dann ein System eines freien komplexen Teilchens und eines freien dritten Teilchens.

Ist  $H_{ij}^{(2)}$  der Hamilton-Operator, welcher die Wechselwirkung in  $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j$

beschreibt, so hat der für das obige System verantwortliche freie Hamilton-Operator die Gestalt  $H_{ij} = (H_{ij}^{(2)} \otimes 1_k + 1_{ij} \otimes H_{0k})^{**} \quad (20)$

Von Bedeutung ist nur seine Wirkung auf  $\mathcal{H}_{ij}^b \otimes \mathcal{H}_k$ .

Ferner sei  $\hat{H}_{ij} = H_{ij}^{(2)} \otimes 1_k \quad (21)$

und  $E_{ij}$  der Projektor auf  $\mathcal{H}_{ij}^b$ .

Die Impulsoperatoren  $P_i$  sind dieselben wie diejenigen für die Darstellung dreier freier Teilchen. Das folgt daraus, daß dies für das 2-Teilchen-System gilt und wegen (4).

Man erhält also auf diese Weise verschiedene, i.a. nicht zueinander orthogonale Teilräume von  $\mathcal{H}^{(n)}$ , welche die verschiedenen Systeme freier komplexer Teilchen und dritter Teilchen beschreiben.

Schließlich soll  $\mathcal{H}^{(n)}$  aber auch noch der Darstellungsraum zu einer unitären Darstellung für die gesamte Wechselwirkung zwischen allen drei Teilchen sein. Der Hamilton-Operator dazu sei  $H$  und die Impulsoperatoren  $P_i$  seien wieder dieselben wie für die Darstellung dreier freier Teilchen. Wie beim 2-Teilchen-System soll dies wieder eine Darstellung mit positivem  $P^2$  und zu positiver Energie sein.

Analog kann man die Massenoperatoren  $h_0 = \sqrt{H_0^2 - P^2}$ ,  $h_{ij} = \sqrt{H_{ij}^2 - P^2}$  und  $h = \sqrt{H^2 - P^2}$  konstruieren. Sind  $m_{ij}$  die Minima der Massen der gebundenen Zustände aus den Teilchen  $i, j$  und  $m_k$  die Massen der einzelnen Teilchen, so sei gefordert, daß für die Eigenwerte von  $h$  gilt

$$0 < \mu_\ell < m = M_k(m_{ij} + m_k) \quad \forall \ell \quad (22)$$

mit  $ijk$  zyklisch, und  $m$  sei die untere Grenze des kontinuierlichen Spektrums von  $h$ . Sind  $E_0(p_0), E_{ij}(p_0), E(p_0)$  die Spektralscharen zu

$$\begin{aligned} h_0, h_{ij}, h \quad , \text{ so gilt :} \\ h_0 &= \int_{m_1+m_2+m_3}^{\infty} p_0 dE_0(p_0) \\ h_{ij} &= \int_{m_{ij}+m_k}^{\infty} p_0 dE_{ij}(p_0) \\ h &= \sum_{\ell=1}^N \mu_\ell E_\ell + \int_m^{\infty} p_0 dE(p_0) \end{aligned} \quad (23)$$

Damit ergibt sich wieder eine Aufspaltung des Raumes in

$$\mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H}_{123}^b \oplus \mathcal{H}_{123}^c \quad (24)$$

mit 
$$E_{123}^b = \sum_{\ell=1}^N E_\ell$$

Der Raum  $\mathcal{H}_{123}^b$  beschreibt dann gebundene Zustände aus drei Teilchen.

Es sei bemerkt, daß die Forderung  $\mu_\ell < m \quad \forall \ell$  nicht wesentlich ist. Nur hat dann das kontinuierliche Spektrum von  $h$  Lücken.

Die Räume  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ ,  $\mathcal{H}_{ij}^b \oplus \mathcal{H}_k$  und  $\mathcal{H}_{123}^b$  kann man als die verschiedenen "freien" Kanäle des ganzen Systems auffassen, bzw. als ein- oder auslaufende Kanäle. Es wird sich später zeigen, daß man sie auf zueinander orthogonale "wechselwirkende" Kanäle abbilden. Es sei noch bemerkt, daß  $E_{ij}$  den Operator  $h_{ij}$  reduziert.

#### 4. Möller-Operatoren

Es sollen hier die schon erwähnten Abbildungen von Zuständen freier Teilchen auf Zustände wechselwirkender Teilchen eingeführt werden. Es handelt sich dabei um die Möller-Operatoren. Dies sind i.a. partiell isometrische Operatoren, die jeweils auf den freien Kanälen definiert sind. Sie sind der Ausgangspunkt einer potentialtheoretischen Beschreibung der Streuung. Da die Operatoren in der Literatur, etwa Jauch 7), Coester 8), Jauch, Zinnes 9), ausführlich behandelt werden, sollen hier nur die wichtigsten Eigenschaften gebracht werden.

Sind  $H_0$  und  $H$  die freien bzw. wechselwirkenden Hamilton-Operatoren ( von verschiedenen Kanälen sei vorläufig abgesehen ), und sind  $f$  und  $g$  freie bzw. wechselwirkende Zustände, so gilt für deren zeitliche Entwicklungen :

$$f(t) = e^{-iH_0 t} f \quad (25)$$

$$\text{und} \quad g(t) = e^{-iH t} g \quad (26)$$

Man fordert nun, daß jeder freie Zustand  $f$  asymptotisch für  $t \rightarrow +\infty$  in einen wechselwirkenden Zustand  $g$  übergeht, d.h. daß gilt

$$\exists g_{\pm} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} [g_{\pm}(t) - f(t)] = 0 \quad \text{für alle freien Zustände.}$$

$$\text{Dies läßt sich schreiben als} \quad \exists \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH t} e^{-iH_0 t} f = g_{\pm} \quad \forall f \text{ (frei)} \quad (27)$$

Das weitere sei nun im 2- bzw. 3-Teilchen-System ausgeführt.

##### 4.1 Möller-Operatoren für das 2-Teilchen-System

Hier bilden die freien Zustände den gesamten Raum  $\mathcal{H}^{(1)}$ . Dann definiert (27) isometrische Operatoren, die Möller-Operatoren

$$\Omega_{\pm} = s\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH t} e^{-iH_0 t} \quad (28)$$

Daß  $\Omega_{\pm}$  isometrisch sind, folgt sofort aus

$$\|\Omega_{\pm} f\| = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{iH t} e^{-iH_0 t} f\| = \|f\| \quad \forall f \in \mathcal{H}^{(1)}$$

da  $e^{iH_0 t}, e^{iH t}$  unitär sind.

$$\text{Daher existieren } \Omega_{\pm}^* \text{ und es gilt } \Omega_{\pm}^* \Omega_{\pm} = 1 \quad \Omega_{\pm} \Omega_{\pm}^* = F_{\pm} \quad (29)$$

$$\text{sowie} \quad \Omega_{\pm}^* = s\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0 t} e^{-iH t} F_{\pm} \quad (30)$$

wobei  $F_{\pm}$  die Projektoren auf die Wertebereiche  $\mathcal{R}(\Omega_{\pm})$  von  $\Omega_{\pm}$  sind.

Wegen der Isometrie sind das Teilräume und es soll verlangt werden, daß sie identisch sind ( Jauch 7 ) :  $\mathcal{R}(\Omega_{\pm}) = \mathcal{L}$

Dies bedeutet einfach, daß jeder Streuzustand asymptotisch für  $t \rightarrow +\infty$  in freie Zustände übergeht.

Nun gilt (19) und man kann zeigen ( Jauch 7 ), daß  $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}_c$  gilt.

$$\text{Als weitere Bedingung stellt man dann} \quad \mathcal{R} = \mathcal{H}_c \quad (31)$$

was bedeutet, daß es keine kontinuierlichen Streuzustände gibt, die sich nicht asymptotisch in freie Zustände entwickeln.

$$\text{Es gilt dann also} \quad \Omega_{\pm} \Omega_{\pm}^* = F \quad \text{mit} \quad F_{\pm} = F = 1 - E_b \quad (32)$$

#### 4.2 Möller-Operatoren für das 3-Teilchen-System

In diesem Fall hat man es nicht mit einem, sondern mit vier verschiedenen Möller-Operatoren zu tun, welche die freien Kanäle in wechselwirkende Kanäle abbilden. Von ihnen ist nur noch einer isometrisch, während die drei anderen partiell isometrisch sind. Sind  $H_0, H_{ij}$  die Hamilton-Operatoren für die freien Kanäle,  $H$  der wechselwirkende Hamilton-Operator, so fordert man hier die Existenz der folgenden Möller-Operatoren :

$$\Omega_0^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \quad (33)$$

$$\Omega_{ij}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_{ij} t} E_{ij} \quad (34)$$

$$\hat{\Omega}_{ij}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_{ij} t} e^{-iH_0 t} \quad (35)$$

während der Operator

nur der von  $\mathcal{H}^{(a)}$  auf  $\mathcal{H}^{(b)}$  fortgesetzte Möller-Operator  $\Omega_{ij}^\pm$  ist,

$$\text{d.h.} \quad \hat{\Omega}_{ij}^\pm = \Omega_{ij}^\pm \otimes 1_k \quad (36)$$

Sind  $\mathcal{R}_0^\pm, \mathcal{R}_{ij}^\pm, \hat{\mathcal{R}}_{ij}^\pm$  die Wertebereiche von  $\Omega_0^\pm, \Omega_{ij}^\pm, \hat{\Omega}_{ij}^\pm$  und  $F_0^\pm, F_{ij}^\pm, F$  die Projektoren darauf, so gilt

$$\Omega_0^{*\pm} \Omega_0^\pm = 1 \quad \Omega_0^\pm \Omega_0^{*\pm} = F_0^\pm \quad (37)$$

$$\Omega_{ij}^{*\pm} \Omega_{ij}^\pm = E_{ij} \quad \Omega_{ij}^\pm \Omega_{ij}^{*\pm} = F_{ij}^\pm \quad (38)$$

$$\hat{\Omega}_{ij}^{*\pm} \hat{\Omega}_{ij}^\pm = 1 \quad \hat{\Omega}_{ij}^\pm \hat{\Omega}_{ij}^{*\pm} = 1 - E_{ij} \quad (39)$$

sowie für  $\hat{\Omega}_{ij}^\pm$

und wegen der Eigenschaften von partiell isometrischen Operatoren ergeben sich

$$F_0^\pm \Omega_0^\pm = \Omega_0^\pm \quad (40)$$

$$F_{ij}^\pm \Omega_{ij}^\pm = \Omega_{ij}^\pm \quad \Omega_{ij}^\pm E_{ij} = \Omega_{ij}^\pm \quad (41)$$

$$F \hat{\Omega}_{ij}^\pm = \hat{\Omega}_{ij}^\pm \quad (F = 1 - E_{ij}) \quad (42)$$

Ähnlich wie beim 2-Teilchen-System ergibt sich hier

$$\mathcal{R}_0^\pm \subset \mathcal{H}_{123}^c \quad (43)$$

$$\mathcal{R}_{ij}^\pm \subset \mathcal{H}_{123}^c \quad (44)$$

was im wesentlichen daraus folgt, daß  $H_0$  und  $H_{ij}$  kontinuierliche Spektren besitzen ( da man es mit Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen zu tun hat ) ( Jauch 7 ) ).

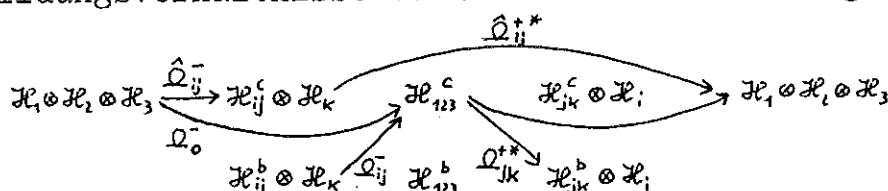
Mit demselben Argument wie im 2-Teilchen-System fordert man hier

$$\overline{\mathcal{L}^\pm} = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{R}_0^\pm, \mathcal{R}_{ij}^\pm)} = \mathcal{H}_{123}^c \quad (45)$$

worin  $\mathcal{L}^\pm$  die von  $\mathcal{R}_0^\pm, \mathcal{R}_{ij}^\pm$  (  $ij=12,23,31$  ) aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit bedeutet und  $\overline{\mathcal{L}^\pm}$  ihren Abschluß.

Es soll also auch hier keine kontinuierlichen Streuzustände geben, die sich nicht asymptotisch in freie Zustände entwickeln.

Die Abbildungsverhältnisse veranschaulicht die folgende Figur :



Nun aber sollen verschiedene freie Kanäle asymptotisch orthogonal zueinander sein, d.h. es soll gelten  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-itH_\alpha} E_\alpha f, e^{-itH_\beta} E_\beta g) = 0$  (46) wobei  $\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta$  freie Kanäle mit den Hamilton-Operatoren  $H_\alpha, H_\beta$  sind.

Da man nun für ein 2-Teilchen-System

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-itH_0} f, e^{-itH} E_\beta g) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{itH} e^{-itH_0} f, E_\beta g) = (\Omega_\pm f, E_\beta g) = (E_\beta (1 - E_\beta) \Omega_\pm f, g) = 0$$

hat, so folgt für das 3-Teilchen-System einerseits

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-itH_0} f, e^{-itH_{ij}} E_{ij} g) = 0 \quad (47)$$

$$\text{und andererseits } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-itH_0} f, e^{-itH_{ij}} E_{ij} g) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{itH} e^{-itH_0} f, e^{itH} e^{-itH_{ij}} E_{ij} g) \quad (48)$$

$$\text{und somit } (\Omega_0^\pm f, \Omega_{ij}^\pm g) = 0 \quad F_0^\pm F_{ij}^\pm = F_{ij}^\pm F_0^\pm = 0 \quad (49)$$

Also stehen die wechselwirkenden Kanäle zu gebundenen Zuständen aus zwei Teilchen senkrecht auf dem wechselwirkenden Kanal zu drei Teilchen, oder anders ausgedrückt, die entsprechenden freien Kanäle sind asymptotisch orthogonal zueinander. (Im Sinne von (46)). Für Konfigurationen gebundener Zustände aus verschiedenen elementaren Teilchen allerdings muß man fordern

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-itH_{ij}} E_{ij} f, e^{-itH_{jk}} E_{jk} g) = 0 \quad (50)$$

$$\text{woraus sich dann ergibt : } F_{ij}^\pm F_{jk}^\pm = F_{jk}^\pm F_{ij}^\pm = 0 \quad (51)$$

Somit zerfällt also  $\mathcal{H}^{(3)}$  jeweils für + und - in eine orthogonale Summe von Teilräumen mit den Projektoren  $F_0^\pm, F_{ij}^\pm, E_{ij}^b$

Diese Teilräume sind die schon erwähnten "wechselwirkenden" Kanäle im Heisenberg-Bild.

Man benötigt hier geringere Annahmen als Jauch 3), welcher auch die Vertauschbarkeit der  $H_0, H_{ij}$  untereinander verlangt und obige Relationen mittels des Ergodensatzes beweist.

Es folgen noch einige wichtige Eigenschaften der Möller-Operatoren.

Sind  $E_\alpha$  die Projektoren auf die freien Kanäle  $\mathcal{H}_\alpha$ ,  $F_\alpha^\pm$  die Projektoren auf die wechselwirkenden Kanäle, welche die Bilder unter den  $\Omega_\alpha^\pm$  sind, so gilt

$$\Omega_\alpha^{\pm*} \Omega_\beta^\pm = \delta_{\alpha\beta} E_\alpha \quad (52)$$

was sofort wegen  $\Omega_\alpha^{\pm*} \Omega_\beta^\pm = \Omega_\alpha^{\pm*} F_\alpha^\pm F_\beta^\pm \Omega_\beta^\pm = \delta_{\alpha\beta} \Omega_\alpha^{\pm*} \Omega_\alpha^\pm$  folgt.

Daraus ergibt sich

$$\Omega_\alpha^- \Omega_\alpha^{\pm*} \Omega_\beta^+ \Omega_\beta^{\mp*} = \delta_{\alpha\beta} F_\alpha^\mp \quad (53)$$

$$\Omega_\alpha^+ \Omega_\alpha^{\mp*} \Omega_\beta^- \Omega_\beta^{\mp*} = \delta_{\alpha\beta} F_\alpha^+$$

Ferner folgt aus der Definition der Möller-Operatoren

$$e^{itH} \Omega_\alpha^\pm = \Omega_\alpha^\pm e^{itH_\alpha} \quad (54)$$

worin  $H_\alpha$  der Hamilton-Operator zum freien Kanal  $\mathcal{H}_\alpha$  ist.

Damit ist die Beschreibung des Darstellungsraums für freie und wechselwirkende Teilchen und der Abbildungsverhältnisse zueinander abgeschlossen.



## 5. Streuoperatoren

Im folgenden werde dieselbe Bezeichnung wie in 4.2 für die Kanäle verwendet. Will man Streumatrixelemente zwischen freien Zuständen bestimmen, so sind

$$S_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha}^{+*} \Omega_{\beta}^{-} \quad (55)$$

die dafür verantwortlichen Streuoperatoren.

$S_{\alpha\beta}$  beschreibt eine Streuung vom Kanal  $\beta$  in den Kanal  $\alpha$ .

Sind nämlich  $f_{\alpha} \in \mathcal{H}_{\alpha}$ ,  $f_{\beta} \in \mathcal{H}_{\beta}$ , so gilt

$$(f_{\alpha}, S_{\alpha\beta} f_{\beta}) = (\Omega_{\alpha}^{+} f_{\alpha}, \Omega_{\beta}^{-} f_{\beta}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-itH_{\alpha}} f_{\alpha}, e^{+itH_{\beta}} f_{\beta}) \quad (56)$$

d.h.  $S_{\alpha\beta}$  ist der korrekte Streuoperator, welcher zwischen den beiden freien Kanälen vermittelt.

Wegen (54) gilt dann

$$e^{itH_{\alpha}} S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} e^{itH_{\beta}} \quad \forall t \quad (57)$$

Der Nachteil ist, daß man für Übergänge zwischen Kanälen jeweils verschiedene Streuoperatoren benötigt. Außerdem ist keiner von ihnen unitär.

Nach Jauch 3) kann man einen anderen Streuoperator  $\tilde{S}$  definieren, welcher Übergänge zwischen den wechselwirkenden Kanälen beschreibt.

Er hat die Gestalt

$$\tilde{S} = \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{-} \Omega_{\alpha}^{+*} \quad (58)$$

Ist dann  $F$  der Projektor auf die kontinuierlichen Streuzustände

$$F = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{\pm}$$

so folgt wegen (53)

$$\tilde{S} \tilde{S}^{*} = \tilde{S}^{*} \tilde{S} = F \quad (59)$$

d.h.  $\tilde{S}$  ist unitär auf  $F\mathcal{H}$ .

Ferner erhält man wegen (54)

$$e^{itH} \tilde{S} = \tilde{S} e^{itH} \quad \forall t \quad (60)$$

Die oben definierten Streuoperatoren hängen auf einfache Weise

mit  $\tilde{S}$  zusammen. Es gilt nämlich wegen (52)

$$S_{\alpha\beta} = \Omega_{\beta}^{+*} \tilde{S} \Omega_{\alpha}^{\pm} \quad (61)$$

Der Streuoperator  $\tilde{S}$  hat den Nachteil, daß man ihn zur Berechnung von Streumatrixelementen auf wechselwirkende Zustände anwenden muß, von denen man i.a. nicht viel Kenntnis hat.

Es ist nämlich

$$(g_{\alpha}^{+}, g_{\beta}^{-}) = (\Omega_{\alpha}^{+} f_{\alpha}, \Omega_{\beta}^{-} f_{\beta}) = (f_{\alpha}, S_{\alpha\beta} f_{\beta}) = (\Omega_{\alpha}^{\pm} f_{\alpha}, \tilde{S} \Omega_{\beta}^{\pm} f_{\beta}) = (g_{\alpha}^{\pm}, \tilde{S} g_{\beta}^{\pm}) \quad (62)$$

Für das 3-Teilchen-System kann man dann die folgenden Operatoren für die einzelnen Streuprozesse hinschreiben

$$\begin{aligned} S_{oo} &= \Omega_o^{+*} \Omega_o^{-} \\ S_{oij} &= \Omega_o^{+*} \Omega_{ij}^{-} \\ S_{ij0} &= \Omega_{ij}^{+*} \Omega_o^{-} \\ S_{ijjk} &= \Omega_{ij}^{+*} \Omega_{jk}^{-} \end{aligned} \quad (63)$$

Es ist klar, wie der entsprechende Operator  $\tilde{S}$  zu konstruieren ist.

## 6. Potentiale

Bisher war von freien und wechselwirkenden Hamilton-Operatoren  $H_\alpha, H$  die Rede ( $\alpha$  Kanalindex). Die an sie gestellten Bedingungen waren außer ihrer Selbstadjungiertheit (als Folge davon, infinitesimale Erzeugende zu sein) die Existenz der Möller-Operatoren. Außerdem sollten sie positiv sein.

Es sollen nun noch einige weitere Bedingungen mehr technischer Art an sie gestellt werden. Sie werden benötigt, um Integralgleichungen schreiben zu können, die wenigstens auf einer dichten Teilmenge des Hilbertraums gültig sind.

Erstens soll  $\mathcal{D}(H-H_\alpha) = \mathcal{D}(H_\alpha) \cap \mathcal{D}(H)$  dicht in  $\mathcal{H}$  liegen. (64)

Dann ist  $H-H_\alpha$  symmetrisch:  $H-H_\alpha \subset (H-H_\alpha)^{**} \subset (H-H_\alpha)^*$

Zweitens soll verlangt werden, daß  $H-H_\alpha$  eine selbstadjungierte Erweiterung  $V_\alpha$  besitzt:  $(H-H_\alpha)^{**} \subset V_\alpha = V_\alpha^*$  (65)

Der Operator  $V_\alpha$  heißt das Potential zum Kanal  $\alpha$ .

Ähnlich Jauch, Zinnes 9) oder Galindo 10) soll ferner verlangt werden, daß es eine lineare Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha$

mit  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha \subset \mathcal{D}(H_\alpha) \cap \mathcal{D}(H)$  dicht (66)

und  $e^{iH_\alpha} \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \subset \tilde{\mathcal{D}}_\alpha \quad \forall t$  gibt.

Damit kann man wenigstens Aussagen auf einem Gebiet machen, auf dem  $H_\alpha, H, V_\alpha$  gemeinsam definiert sind.

Die Forderungen (66) kann man z.B. mit  $\mathcal{D}(H_\alpha) \subset \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(V_\alpha)$  (67)

erfüllen, und man kann  $\tilde{\mathcal{D}}_\alpha = \mathcal{D}(H_\alpha)$

wählen, da nämlich gilt  $e^{iH_\alpha} H_\alpha \subset H_\alpha e^{iH_\alpha} \quad \forall t$  (68)

Damit ist dann auch die zweite Resolventengleichung

$$R(H, z) = R(H_\alpha, z)[1 - V_\alpha R(H, z)] = [1 - R(H, z)V_\alpha]R(H_\alpha, z) \quad (z \neq \bar{z}) \quad (69)$$

erfüllt, welche noch weiter unten wichtig sein wird.

Außerdem gilt dann  $H_\alpha + V_\alpha \subset H$

Für ein 2-Teilchen-System fordert man somit

$$\mathcal{D}(H_{0ij}^{(i)}) \subset \mathcal{D}(H_{ij}^{(i)}) \subset \mathcal{D}(V_{ij}^{(i)}) \quad (70)$$

$$\text{mit} \quad H_{ij}^{(i)} - H_{0ij}^{(i)} \subset V_{ij}^{(i)} \quad (71)$$

so daß man  $\tilde{\mathcal{D}}_{ij}^{(i)} = \mathcal{D}(H_{0ij}^{(i)})$  wählen kann.

Für das 3-Teilchen-System ist dann  $V_{ij} = V_{ij}^{(i)} \otimes 1_k$  (72)

selbstadjungiert, und auf dem in  $\mathcal{H}^{(i)}$  dichten  $\tilde{\mathcal{D}}_0 = \mathcal{D}(H_{0ij}^{(i)}) \otimes \mathcal{D}(H_{0k})$  (73)

gilt dann  $H_{ij}f = H_0f + V_{ij}f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_0$  (74)

sowie  $e^{iH_0} \tilde{\mathcal{D}}_0 \subset \tilde{\mathcal{D}}_0$  (75)

Ferner soll verlangt werden, daß gilt  $\mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(V)$  (76)

$$\mathcal{D}(H_{ij}) \subset \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(V) \quad (77)$$

Dann sind

$$\tilde{\mathcal{D}}_0 \subset \mathcal{D}(H_0)$$

und

$$\tilde{\mathcal{D}}_{ij} = \mathcal{D}(H_{ij}^{(0)}) \otimes \mathcal{D}(H_{0k}) \quad (78)$$

dicht in  $\mathcal{H}^{(0)}$  und es ist

$$e^{iH_{ij}} \tilde{\mathcal{D}}_{ij} \subset \tilde{\mathcal{D}}_{ij} \quad (79)$$

Es ist klar, daß dann wegen  $\mathcal{D}(H_{0ij}^{(0)}) \subset \mathcal{D}(H_{ij}^{(0)})$  auch

$$\tilde{\mathcal{D}}_0 \subset \tilde{\mathcal{D}}_{ij} \quad (80)$$

gilt. Ferner hat man

$$H_0 + V \subset H$$

$$H_{ij} + V_{ij}' \subset H$$

und

$$(H_0 + V_{ij} + V_{ij}') f = H f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_0 \quad (81)$$

Damit sind die technischen Voraussetzungen für das 3-Teilchen-System erfüllt.

Nun wurde bisher noch keine Aussage darüber gemacht, wie das Gesamtpotential  $V$  und die Einzelpotentiale  $V_{ij}$  zusammenhängen.

Deshalb soll als weitere Bedingung gelten  $\sum_{i,j} V_{ij} + V_{123} \subset V$  (82)

worin  $V_{123}$  als selbstadjungierte Erweiterung von  $\tilde{V}_{123}$

mit  $\tilde{V}_{123} f = V f - \sum_{i,j} V_{ij} f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_0$  (83)

definiert ist.

Der Operator  $V_{123}$  beschreibt eine 3-Teilchen-Wechselwirkung.

Ist diese nicht vorhanden, so setzt sich  $V$  additiv aus den einzelnen Potentialen für 2-Teilchen-Wechselwirkungen

zusammen :

$$\sum_{i,j} V_{ij} \subset V$$

Dann hat man auch

$$V_{ij}' f = V_{jk} f + V_{ki} f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_0 \quad (84)$$

## 7. Integraldarstellungen der Möller-Operatoren

Im folgenden werden Integraldarstellungen für die Möller-Operatoren hingeschrieben. Sie gelten für dieselben Definitionsbereiche wie die Darstellungen durch Grenzwerte. Die eine Darstellung ist ein Riemann-Integral, die andere ein Spektral-Integral ( Galindo 10) ).

Vorerst werde nur ein Möller-Operator  $\Omega_{\pm}$  mit den Projektoren  $E$  und  $F_{\pm}$  auf Definitionsbereich bzw. Wertebereiche von  $\Omega_{\pm}$  betrachtet. Man definiert zuerst die folgenden Operatoren

$$\Omega_{\pm}(\epsilon) = \pm \epsilon \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} dt \quad (85)$$

Wie man leicht sieht, existieren diese Operatoren im Sinne der starken Konvergenz, da  $e^{iH} e^{-iH_0}$  stark stetig ist.

Also  $\exists \Omega_{\pm}(\epsilon) f = \pm \epsilon \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} f dt \quad \forall f \in \mathcal{D}$  (86)

Ebenso existiert und ist identisch  $\Omega_{\pm}^*(\epsilon) = \pm \epsilon \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH_0} e^{-iH} dt$  (87)

Ferner gilt  $\|\Omega_{\pm}(\epsilon)\| \leq 1$  sowie  $\|\Omega_{\pm}^*(\epsilon)\| \leq 1$ , da  $\int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} dt = 1$  ist.

Dann kann man zeigen ( Jauch 7 ) , daß die Grenzen für  $\epsilon \rightarrow 0$  existieren, und zwar

$$\exists \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH} e^{-iH_0} f = Q_{\pm} f \Rightarrow \exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{\pm}(\epsilon) f = Q_{\pm} f \quad (88)$$

und 
$$\exists \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_0} e^{-iH} g = Q_{\pm}^* g \Rightarrow \exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{\pm}^*(\epsilon) g = Q_{\pm}^* g \quad (89)$$

Somit kann man dann schreiben 
$$Q_{\pm} = \pm s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} E dt \quad (90)$$

und 
$$Q_{\pm}^* = \pm s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH_0} e^{-iH} F_{\pm} dt \quad (91)$$

Für das 3-Teilchen-System ergeben sich damit

$$Q_0^{\pm} = \pm s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} dt \quad (92)$$

$$Q_0^{\pm*} = \pm s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH_0} e^{-iH} F_0^{\pm} dt$$

$$Q_{ij}^{\pm} = \pm s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_{ij}} E_{ij} dt \quad (93)$$

$$Q_{ij}^{\pm*} = \pm s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH_{ij}} e^{-iH} F_{ij}^{\pm} dt$$

Die Operatoren  $Q_{\pm}(\epsilon)$  kann man dann mit Hilfe von

$$R(H, \lambda \pm i\epsilon) = -i \int_0^{\mp\infty} e^{i[H - (\lambda \pm i\epsilon)t]} dt \quad (94)$$

in ein Spektralintegral umwandeln.

Sind nämlich  $E(p_0), F(p_0)$  die Spektralscharen zu  $H_0, H$  , so gilt

$$Q_{\pm}(\epsilon) = \pm i \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) dE(p_0) \quad (95)$$

$$Q_{\pm}^*(\epsilon) = \pm i \int_{-\infty}^{\infty} R(H_0, p_0 \mp i\epsilon) dF(p_0) \quad (96)$$

und mit (90), (91) ergibt sich dann

$$Q_{\pm} = \pm i s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) dE(p_0) E \quad (97)$$

$$Q_{\pm}^* = \pm i s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H_0, p_0 \mp i\epsilon) dF(p_0) F_{\pm} \quad (98)$$

Für das 3-Teilchen-System ergeben sich daraus

$$Q_0^{\pm} = \pm i s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) dE_0(p_0) \quad (99)$$

$$Q_0^{\pm*} = \pm i s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H_0, p_0 \mp i\epsilon) dF(p_0) F_0^{\pm}$$

$$Q_{ij}^{\pm} = \pm i s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) dE_{ij}(p_0) E_{ij}$$

$$Q_{ij}^{\pm*} = \pm i s \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H_{ij}, p_0 \mp i\epsilon) dF(p_0) F_{ij}^{\pm} \quad (100)$$

worin  $E_j(p_0), E_{ij}(p_0), F(p_0)$  die Spektralscharen zu  $H_0, H_{ij}, H$  sind.

Die nun folgenden Darstellungen enthalten das Potential. Dazu sei angenommen, daß (67) gilt, also  $\tilde{D} = \mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(V)$

Da  $e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0}$  stark differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{dt} (e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} f) = \mp \epsilon e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} f + i e^{\mp\epsilon t} e^{iH} V e^{-iH_0} f \quad \forall f \in \tilde{D} \quad (101)$$

und ferner

$$s \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} = 0 \quad (102)$$

gilt, so folgt  $\forall f \in \tilde{D}$

$$Q_{\pm}(\epsilon) f = f + i \int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} V e^{-iH_0} f dt \quad (103)$$

denn  $\int_0^{\pm\infty} e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} f dt$  und  $-\int_0^{\pm\infty} \frac{d}{dt} (e^{\mp\epsilon t} e^{iH} e^{-iH_0} f) dt = f$  existieren.

Es werden hier nicht die weitergehenden Annahmen von Galindo 10) benötigt, welche außer den Forderungen für  $\tilde{\mathcal{D}}$  lauten :

$$\begin{aligned} & \forall e^{-iH_0} f \quad \text{stark stetig in } t \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}} \\ \text{und} \quad & \left| \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} \| \forall e^{-iH_0} f \| dt \right| < \infty \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung ist durch  $\left| \int_0^{+\infty} \| \forall e^{-iH_0} f \| dt \right| < \infty \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}$  erfüllt. In diesem Fall stellen die obigen Annahmen eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Möller-Operatoren dar, wenn das Spektrum von  $H_0$  absolut stetig ist, was man für Streusysteme annehmen kann ( Kato 11), S. 533 ).

Aus obigem erhält man dann

$$\Omega_{\pm} f = E f + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} e^{iH} \forall e^{-iH_0} E f dt \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}} \quad (104)$$

Analog geht man für den Operator  $\Omega_{\pm}^*(\epsilon)$  vor. Hier ergibt sich

$$\Omega_{\pm}^*(\epsilon) f = f - i \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} e^{+iH_0} \forall e^{-iH} f dt \quad \forall f, e^{-iH} f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \quad \forall t \quad (105)$$

$$\text{und} \quad \Omega_{\pm}^* f = F_{\pm} f - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} e^{iH_0} \forall e^{-iH} F_{\pm} f dt \quad (e^{-iH} F_{\pm} f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \quad \forall t) \quad (106)$$

Auf ähnliche Weise zeigt man, daß obige Formeln (104) und (106)

auch ohne  $\epsilon$  gelten, d.h. daß man den Grenzwert unter das Integral

$$\text{ziehen kann :} \quad \Omega_{\pm} f = E f + i \int_0^{+\infty} e^{iH} \forall e^{-iH_0} E f dt \quad E f \in \tilde{\mathcal{D}} \quad (107)$$

$$\Omega_{\pm}^* f = F_{\pm} f - i \int_0^{+\infty} e^{iH_0} \forall e^{-iH} F_{\pm} f \quad (e^{-iH} F_{\pm} f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \quad \forall t) \quad (108)$$

Die Anwendung auf das 3-Teilchen-System liefert dann

$$\Omega_0^{\pm} f = f + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} e^{iH} \forall e^{-iH_0} f dt \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_0 \quad (109)$$

$$\Omega_0^{\pm*} f = F_0^{\pm} f - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} e^{iH_0} \forall e^{-iH} F_0^{\pm} f dt \quad (e^{-iH} F_0^{\pm} f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \quad \forall t) \quad (110)$$

$$\Omega_{ij}^{\pm} f = E_{ij} f + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} e^{iH} \forall_{ij} e^{-iH_{ij}} E_{ij} f dt \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_{ij} \quad (111)$$

$$\Omega_{ij}^{\pm*} f = F_{ij}^{\pm} f - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{\tau \epsilon t} e^{iH_{ij}} \forall_{ij} e^{-iH} F_{ij}^{\pm} f dt \quad (e^{-iH} F_{ij}^{\pm} f \in \mathcal{D}(H_{ij}) \cap \mathcal{D}(H) \quad \forall t) \quad (112)$$

Wie erwähnt, gelten diese Formeln auch für  $\epsilon = 0$ .

Aus (104) und (106) lassen sich Integralgleichungen für die

Möller-Operatoren ableiten. Wegen  $\Omega_{\pm} E = \Omega_{\pm}$ ,  $\Omega_{\pm}^* \Omega_{\pm} = E$  und

$$\Omega_{\pm} e^{iH_0} = e^{iH} \Omega_{\pm} \quad \text{erhält man nämlich}$$

$$E f = \Omega_{\pm}^* \Omega_{\pm} f = \Omega_{\pm} f - i \int_0^{+\infty} e^{iH_0} \forall \Omega_{\pm} e^{-iH_0} f dt \quad (e^{-iH} \Omega_{\pm} f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \quad \forall t)$$

$$\text{und somit} \quad \Omega_{\pm} f = E f + i \int_0^{+\infty} e^{iH_0} \forall \Omega_{\pm} e^{-iH_0} f dt \quad ( \quad ) \quad (113)$$

Ähnlich folgt wegen  $\Omega_{\pm}^* F_{\pm} = \Omega_{\pm}^*$  und  $\Omega_{\pm} \Omega_{\pm}^* = F_{\pm}$

$$\Omega_{\pm}^* f = F_{\pm} f - i \int_0^{+\infty} e^{iH} \forall \Omega_{\pm}^* e^{-iH} f dt \quad (e^{-iH_0} \Omega_{\pm}^* f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \quad \forall t) \quad (114)$$

Das sind die Lippmann-Schwinger-Gleichungen.

Auf dieselbe Weise ergeben sich noch zwei weitere Gleichungen :

$$\Omega_{\pm} F_{\pm} f = F_{\pm} f + i \int_0^{+\infty} e^{iH} \Omega_{\pm} \forall e^{-iH} F_{\pm} f dt \quad (114')$$

$$\Omega_{\pm}^* E f = E f - i \int_0^{+\infty} e^{iH_0} \Omega_{\pm}^* \forall e^{-iH_0} E f dt$$

Diese sind aber wegen der darin auftretenden Projektoren wenig nützlich, da man i.a. wenig über  $E F_t$  und  $F_t E$  weiß.

Bei der Anwendung dieser Integralgleichungen (113) und (114) auf das 3-Teilchen-System hat man zu beachten, daß man es mit einem Mehrkanal-System zu tun hat. Mit den entsprechenden

Projektoren erhält man so

$$\Omega_0^\pm f = f + i \int_0^{\pm\infty} e^{iH_0 t} V \Omega_0^\pm e^{-iH_0 t} f dt \quad (e^{-iH_0 t} \Omega_0^\pm f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \forall t) \quad (115)$$

$$\Omega_0^{\pm*} f = F_0^\pm f - i \int_0^{\pm\infty} e^{iH t} V \Omega_0^{\pm*} e^{-iH t} f dt \quad (e^{-iH_0 t} \Omega_0^{\pm*} f \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H) \forall t) \quad (116)$$

$$\Omega_{ij}^\pm f = E_{ij} f + i \int_0^{\pm\infty} e^{iH_{ij} t} V_{ij}' \Omega_{ij}^\pm e^{-iH_{ij} t} f dt \quad (e^{-iH_{ij} t} \Omega_{ij}^\pm f \in \mathcal{D}(H_{ij}) \cap \mathcal{D}(H) \forall t) \quad (117)$$

$$\Omega_{ij}^{\pm*} f = F_{ij}^\pm f - i \int_0^{\pm\infty} e^{iH t} V_{ij}' \Omega_{ij}^{\pm*} e^{-iH t} f dt \quad (e^{-iH_{ij} t} \Omega_{ij}^{\pm*} f \in \mathcal{D}(H_{ij}) \cap \mathcal{D}(H) \forall t) \quad (118)$$

Weiterhin lassen sich auch noch wichtige Spektraldarstellungen für die Möller-Operatoren angeben, welche ebenfalls das Potential  $V$  enthalten. Ihre Existenz gilt wieder unter gewissen technischen Bedingungen (Galindo 10). Sie seien hier kurz angegeben.

Es soll ein  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  dicht existieren, so daß zu jeder Zerlegung  $J$  eines endlichen Intervalls  $J$ ,  $J = \sum_k J_k$  mit  $E(J) = \sum_k E(J_k)$  gilt:

$$\left| \int_0^{\pm\infty} e^{\mp \epsilon t} \left\| \sum_k V e^{-it\lambda_k} E(J_k) f \right\| dt \right| < \infty \quad \forall f \in \mathcal{D}' \quad (\lambda_k \in J_k)$$

und  $\left\| \sum_k V e^{-it\lambda_k} E(J_k) f - V e^{-itH_0} E(J) f \right\| < \delta \quad \forall J$  mit  $\eta(J) < \epsilon$ ,  $f$

unabhängig von  $t$ ,  $0 \leq |t| \leq T$

Dann erhält man 
$$\Omega_\pm(\epsilon) f = f - \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) V dE(p_0) f \quad \forall f \in \mathcal{D}' \quad (119)$$

und folgert daraus 
$$\Omega_\pm f = E f - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) V dE(p_0) E f \quad " \quad (120)$$

Mit entsprechenden Bedingungen ergibt sich genauso

$$\Omega_\pm^*(\epsilon) f = f + \int_{-\infty}^{\infty} R(H_0, p_0 \mp i\epsilon) V dF(p_0) f \quad \forall f \in \mathcal{D}' \quad (121)$$

und damit 
$$\Omega_\pm^* f = F_\pm f + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H_0, p_0 \mp i\epsilon) V dF(p_0) F_\pm f \quad " \quad (122)$$

Anwendung auf das 3-Teilchen-System liefert dann

$$\Omega_0^\pm f = f - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) V dE_0(p_0) f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_0' \quad (123)$$

$$\Omega_0^{\pm*} f = F_0^\pm f + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H_0, p_0 \mp i\epsilon) V dF(p_0) F_0^\pm f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_0' \quad (124)$$

$$\Omega_{ij}^\pm f = E_{ij} f - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 \mp i\epsilon) V_{ij}' dE_{ij}(p_0) E_{ij} f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_{ij}' \quad (125)$$

$$\Omega_{ij}^{\pm*} f = F_{ij}^\pm f + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H_{ij}, p_0 \mp i\epsilon) V_{ij}' dF(p_0) F_{ij}^\pm f \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{D}}_{ij}' \quad (126)$$

mit entsprechenden Definitionsbereichen  $\tilde{\mathcal{D}}_0'$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}_{ij}'$ .

Die Darstellungen der Möller-Operatoren sind wichtig, um auch für die Streuoperatoren Integraldarstellungen hinschreiben zu können.

### 8. Integraldarstellungen der Streuoperatoren

Im folgenden seien  $\alpha, \beta$  wieder Kanalindizes. Das Ziel ist es, geeignete Darstellungen zu finden, um Streumatrixelemente zu berechnen. Abgeleitet werden Integralgleichungen für die Streuoperatoren, in welchen T-Operatoren für die einzelnen Übergänge auftreten.

Aus (108) erhält man für die Streuoperatoren

$$S_{\alpha\beta} f = F_{\alpha}^+ Q_{\beta}^- f - i \int_0^{\infty} e^{iH_{\alpha} t} V_{\alpha} e^{-iH t} F_{\alpha}^+ Q_{\beta}^- f dt \quad (127)$$

$(e^{-iH} F_{\alpha}^+ Q_{\beta}^- f \in \mathcal{D}(H_{\alpha}) \cap \mathcal{D}(H) \forall t)$

Für  $F_{\alpha}^+ Q_{\beta}^- f = Q_{\beta}^- f$  folgt daraus mit Hilfe von (113)

$$S_{\alpha\beta} f = E_{\beta} f - i \int_0^{\infty} e^{iH_{\beta} t} V_{\beta} Q_{\beta}^- e^{-iH_{\beta} t} f dt - i \int_0^{\infty} e^{iH_{\alpha} t} V_{\alpha} Q_{\beta}^- e^{-iH_{\beta} t} f dt \quad (128)$$

$(F_{\alpha}^+ Q_{\beta}^- f = Q_{\beta}^- f, e^{-iH} F_{\alpha}^+ Q_{\beta}^- f \in \mathcal{D}(H_{\alpha}) \cap \mathcal{D}(H), \mathcal{D}(H_{\beta}) \cap \mathcal{D}(H) \forall t)$

woraus man für  $\alpha = \beta$  die etwas einfachere Darstellung

$$S_{\alpha\alpha} f = E_{\alpha} f - i \int_0^{\infty} e^{iH_{\alpha} t} V_{\alpha} Q_{\alpha}^- e^{-iH_{\alpha} t} f dt \quad (129)$$

erhält.

$$(F_{\alpha}^+ Q_{\alpha}^- f = Q_{\alpha}^- f, e^{-iH} F_{\alpha}^+ Q_{\alpha}^- f \in \mathcal{D}(H_{\alpha}) \cap \mathcal{D}(H) \forall t)$$

Zur weiteren Behandlung benötigt man nun die Operatoren  $V_{\alpha} Q_{\beta}^-$ . Diese lassen sich aus (120) bestimmen. Es folgt nämlich

$$V_{\alpha} Q_{\beta}^- f = V_{\alpha} E_{\beta} f - V_{\alpha} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H, p_0 + i\epsilon) V_{\beta} dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} f \quad (f \in \tilde{\mathcal{D}}_{\alpha}')$$

Falls man  $V_{\alpha}$  unter das Integral und den Limes ziehen darf, so

$$\text{ergibt sich} \quad V_{\alpha} Q_{\beta}^- f = V_{\alpha} E_{\beta} f - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} V_{\alpha} R(H, p_0 + i\epsilon) V_{\beta} dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} f \quad (130)$$

$$\text{Mit der Definition der T-Operatoren} \quad T_{\alpha\beta}(z) = V_{\alpha} - V_{\alpha} R(H, z) V_{\beta} \quad (131)$$

$$\text{kann man dies schreiben als} \quad V_{\alpha} Q_{\beta}^- f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\alpha\beta}(p_0 + i\epsilon) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} f \quad (132)$$

Genau genommen gelten (130) und (132) nur in einem eingeschränkten schwachen Konvergenzsinn, nämlich

$$(V_{\alpha} Q_{\beta}^- f, g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (T_{\alpha\beta}(p_0 + i\epsilon) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} f, g) \quad (f \in \tilde{\mathcal{D}}_{\alpha}', g \in \mathcal{D}(V_{\alpha})) \quad (133)$$

Für die Streuoperatoren erhält man dann auf geeigneten Definitionsbereichen

$$(f, S_{\alpha\beta} g) = (f, E_{\beta} g) - i \int_0^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f, e^{iH_{\beta} t} T_{\alpha\beta}(p_0 + i\epsilon) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} e^{-iH_{\beta} t} g) dt \quad (134)$$

$$- i \int_0^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f, e^{iH_{\alpha} t} T_{\alpha\beta}(p_0 + i\epsilon) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} e^{-iH_{\beta} t} g) dt \quad (135)$$

$$\text{und} \quad (f, S_{\alpha\alpha} g) = (f, E_{\alpha} g) - i \int_0^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f, e^{iH_{\alpha} t} T_{\alpha\alpha}(p_0 + i\epsilon) dE_{\alpha}(p_0) E_{\alpha} e^{-iH_{\alpha} t} g) dt$$

Es zeigt sich, daß man zur Berechnung der Streuoperatoren  $S_{\alpha\beta}$  i.a. mehrere T-Operatoren benötigt, nämlich  $T_{\beta\beta}$  und  $T_{\alpha\beta}$ .

Das Auftreten verschiedener T-Operatoren und auch verschiedener freier Hamilton-Operatoren ist bisher nicht beachtet worden.

( Lovelace 13), Newton 1) ).

Unter Verwendung von (104) statt (108), von (113) mit  $e^{\mp \epsilon t}$  und (94) ergibt sich, falls man die  $t$ -Integration mit dem Grenzwert vertauschen darf, auf ähnliche Art :

$$(f, S_{\alpha\beta} g) = (f, E_{\beta} g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{\beta}, p_0 - i\eta) f, T_{\beta\beta}(p_0 + i\epsilon) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{\alpha}, p_0 + i\eta) f, T_{\alpha\beta}(p_0 + i\epsilon) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta} g) \quad (136)$$

und  $(f, S_{\alpha\alpha} g) = (f, E_{\alpha} g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} [(R(H_{\alpha}, p_0 + i\eta) - R(H_{\alpha}, p_0 - i\eta))] f, T_{\alpha\alpha}(p_0 + i\epsilon) dE_{\alpha}(p_0) E_{\alpha} g) \quad (137)$

Es lässt sich noch eine weitere Darstellung für  $S_{\alpha\beta}$  finden.

Mit (107) erhält man  $S_{\alpha\beta} f = \Omega_{\alpha}^{+*} E_{\beta} f - i \Omega_{\alpha}^{+*} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iHt} V_{\beta} e^{-iH_{\beta} t} E_{\beta} f dt \quad (E_{\beta} f \in \tilde{\mathcal{D}}_{\beta}) \quad (138)$

Da man die  $\Omega_{\alpha}^{\pm*}$  wegen ihrer Beschränktheit unter das Integral schreiben darf, so folgt mit (114')

$$S_{\alpha\beta} f = E_{\alpha} E_{\beta} f - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iH_{\alpha} t} \Omega_{\alpha}^{+*} V_{\beta} e^{-iH_{\beta} t} E_{\beta} f dt - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iH_{\alpha} t} \Omega_{\alpha}^{+*} V_{\alpha} e^{-iH_{\alpha} t} E_{\alpha} f dt \quad (139)$$

Hier werden jetzt die Ausdrücke  $\Omega_{\alpha}^{+*} V_{\beta}$  benötigt. Diese ergeben sich am leichtesten aus  $V_{\beta} \Omega_{\alpha}^{+}$ . Es gilt nämlich eine ähnliche Formel wie

(133) :  $(V_{\beta} \Omega_{\alpha}^{+} g, f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (T_{\beta\alpha}(p_0 - i\epsilon) dE_{\alpha}(p_0) E_{\alpha} g, f) \quad (140)$

woraus sich  $(\Omega_{\alpha}^{+*} V_{\beta} f, g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\alpha} dE_{\alpha}(p_0) T_{\beta\alpha}(p_0 - i\epsilon) f, g) \quad (141)$

ergibt. Ähnlich wie oben zeigt man dann

$$(f, S_{\alpha\beta} g) = (E_{\alpha} f, E_{\beta} g) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f, e^{iH_{\alpha} t} E_{\alpha} dE_{\alpha}(p_0) T_{\beta\alpha}(p_0 - i\epsilon) e^{-iH_{\beta} t} E_{\beta} g) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f, e^{iH_{\alpha} t} E_{\alpha} dE_{\alpha}(p_0) T_{\alpha\alpha}(p_0 - i\epsilon) e^{-iH_{\alpha} t} E_{\alpha} g) \quad (142)$$

und  $(f, S_{\alpha\alpha} g) = (E_{\alpha} f, g) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f, e^{iH_{\alpha} t} E_{\alpha} dE_{\alpha}(p_0) T_{\alpha\alpha}(p_0 - i\epsilon) e^{-iH_{\alpha} t} E_{\alpha} g) \quad (143)$

Nach Ausführung der  $t$ -Integration, unter Annahme obiger Vertauschbarkeit, ergibt sich

$$(f, S_{\alpha\beta} g) = (E_{\alpha} f, E_{\beta} g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\alpha} f, dE_{\alpha}(p_0) T_{\beta\alpha}(p_0 - i\epsilon) R(H_{\beta}, p_0 + i\eta) E_{\beta} g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\alpha} f, dE_{\alpha}(p_0) T_{\alpha\alpha}(p_0 - i\epsilon) R(H_{\alpha}, p_0 - i\eta) E_{\alpha} g) \quad (144)$$

und  $(f, S_{\alpha\alpha} g) = (E_{\alpha} f, g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\alpha} f, dE_{\alpha}(p_0) T_{\alpha\alpha}(p_0 - i\epsilon) [R(H_{\alpha}, p_0 + i\eta) - R(H_{\alpha}, p_0 - i\eta)] E_{\alpha} g) \quad (145)$

Der Vollständigkeit halber werden jetzt auch noch Integraldarstellungen für den Operator  $\tilde{S}$  abgeleitet, obwohl dieser nicht so sehr geeignet ist, da er auf wechselwirkende Zustände anzuwenden ist. Mit (58) und (107) erhält man

$$\tilde{S}f = \sum_{\alpha} \langle E_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+*} f - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iHt} V_{\alpha} e^{-iH_{\alpha} t} E_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+*} f dt \rangle \quad (\Omega_{\alpha}^{+*} f \in \tilde{\mathcal{D}}_{\alpha}) \quad (146)$$

und daraus mit (116)

$$\tilde{S}f = F - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iHt} \sum_{\alpha} V_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+*} e^{-iH_{\alpha} t} f dt \quad (e^{-iH_{\alpha} t} \Omega_{\alpha}^{+*} f \in \mathcal{D}(H_{\alpha}) \cap \mathcal{D}(H) \forall t) \quad (147)$$

Hier werden nun die Operatoren  $V_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{+*}$  benötigt.



Für sie ergeben sich auf ähnliche Weise wie für  $V_\alpha Q_\beta^-$ , aus (122)

$$V_\alpha Q_\alpha^{+*} f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} T_\alpha(p_0 - i\epsilon) dF(p_0) F_\alpha^+ f \quad (148)$$

mit

$$T_\alpha(z) = V_\alpha - V_\alpha R(H_\alpha, z) V_\alpha \quad (149)$$

(148) ist wieder in einem eingeschränkten schwachen Konvergenzsinn zu verstehen:  $(V_\alpha Q_\alpha^{+*} f, g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (T_\alpha(p_0 - i\epsilon) dF(p_0) F_\alpha^+ f, g) \quad (f \in \mathcal{D}'_\alpha, g \in \mathcal{D}(V_\alpha)) \quad (150)$

Damit erhält man schließlich für  $\tilde{S}$ :

$$(\tilde{S}f, g) = (Ff, g) - i \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iHt} \sum_\alpha T_\alpha(p_0 - i\epsilon) dF(p_0) F_\alpha^+ e^{-iHt} f, g) dt \quad (151)$$

Außerdem kann man wieder die t-Integration ausführen. Diese liefert dann:

$$(\tilde{S}f, g) = (Ff, g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} ([R(H, p_0 + i\eta) - R(H, p_0 - i\eta)] \sum_\alpha T_\alpha(p_0 - i\epsilon) dF(p_0) F_\alpha^+ f, g) \quad (152)$$

Es ist zu beachten, daß in obigen Formeln die Spektralschar des wechselwirkenden Hamilton-Operators H auftritt. Ferner erscheinen andere T-Operatoren, für welche man keine Faddeev-Gleichungen aufstellen kann. Die durch (149) definierten Operatoren sind nicht die aus einem 2-Teilchen-System auf das 3-Teilchen-System fortgesetzten üblichen T-Operatoren für einen Kanal, denn es ist  $H - H_\alpha \subset V_\alpha$ .

Es folgen nun noch die Formeln (136) und (137) für das 3-Teilchen-System. Man erhält

$$(f, S_{00}g) = (f, g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} ([R(H_0, p_0 + i\eta) - R(H_0, p_0 - i\eta)] f, T_{00}(p_0 + i\epsilon) dE_0(p_0) g) \quad (153)$$

$$(f, S_{0ij}g) = (f, E_{ij}g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{ij}, p_0 - i\eta) f, T_{ij}(p_0 + i\epsilon) dE_{ij}(p_0) E_{ij}g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_0, p_0 + i\eta) f, T_{0ij}(p_0 + i\epsilon) dE_{ij}(p_0) E_{ij}g) \quad (154)$$

$$(f, S_{ij0}g) = (f, g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_0, p_0 - i\eta) f, T_{00}(p_0 + i\epsilon) dE_0(p_0) g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{ij}, p_0 + i\eta) f, T_{ij0}(p_0 + i\epsilon) dE_0(p_0) g) \quad (155)$$

$$(f, S_{ijjk}g) = (f, E_{jk}g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{jk}, p_0 - i\eta) f, T_{jk}(p_0 + i\epsilon) dE_{jk}(p_0) E_{jk}g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{ij}, p_0 + i\eta) f, T_{ijjk}(p_0 + i\epsilon) dE_{jk}(p_0) E_{jk}g) \quad (156)$$

Analog erhält man Formeln aus den Darstellungen (144) und (145), und ebenso aus (152). Sie sollen jedoch hier nicht extra hingeschrieben werden, da ihre Form klar ist.

(136), (137) sowie (144), (145) lassen sich weiter vereinfachen, wenn die Grenzwerte von  $T_{\alpha\beta}(p_0 \pm i\epsilon)$  bei  $\epsilon \rightarrow 0$  existieren und man sie unter das Integral schreiben darf.

Sei daher 
$$T_{\alpha\beta}^\pm(p_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{\alpha\beta}(p_0 \pm i\epsilon) \quad (157)$$

Dann erhält man

$$(f, S_{\alpha\beta}g) = (f, E_{\beta}g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{\beta}, p_0 - i\eta) f, T_{\beta\beta}^+(p_0) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta}g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (R(H_{\alpha}, p_0 + i\eta) f, T_{\alpha\beta}^+(p_0) dE_{\beta}(p_0) E_{\beta}g) \quad (158)$$

$$(f, S_{\alpha\alpha}g) = (f, E_{\alpha}g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} ([R(H_{\alpha}, p_0 + i\eta) - R(H_{\alpha}, p_0 - i\eta)] f, T_{\alpha\alpha}^+(p_0) dE_{\alpha}(p_0) E_{\alpha}g) \quad (159)$$

sowie

$$(f, S_{\alpha\beta}g) = (E_{\alpha}f, E_{\beta}g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\alpha}f, dE_{\alpha}(p_0) T_{\beta\alpha}^{*+}(p_0) R(H_{\beta}, p_0 + i\eta) E_{\beta}g) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\alpha}f, dE_{\alpha}(p_0) T_{\alpha\alpha}^{-}(p_0) R(H_{\alpha}, p_0 - i\eta) E_{\alpha}g) \quad (160)$$

$$(f, S_{\alpha\alpha}g) = (E_{\alpha}f, g) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (E_{\alpha}f, dE_{\alpha}(p_0) T_{\alpha\alpha}^{-}(p_0) [R(H_{\alpha}, p_0 + i\eta) - R(H_{\alpha}, p_0 - i\eta)] E_{\alpha}g) \quad (161)$$

Als hinreichende Bedingung muß man wohl mindestens gleichmäßige Konvergenz in  $p_0$  fordern. Jedoch ist diese noch nicht ausreichend, da unter dem Integral noch eine weitere von  $p_0$  abhängige Größe auftritt.

## 9. T-Operatoren

In diesem Kapitel erscheinen einige Bemerkungen zur Existenz der Møller-Operatoren und Beziehungen von T-Operatoren in verschiedenen Lorentz-Systemen. Die Betrachtungen sind allerdings mehr von heuristischer Art, da die exakten mathematischen Beweise fehlen. Zur Existenz der Møller-Operatoren gibt es nur sehr wenige hinreichende Bedingungen. Man findet diese in Kato 11). Keine große Einschränkung bildet die Forderung, daß  $H_0$  ein absolut stetiges Spektrum besitzen soll. Sehr stark sind jedoch die an das Potential gestellten Bedingungen.

Entweder fordert man, daß  $\forall \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$  ( trace class ), oder aber  $\exists \zeta \neq \bar{\zeta} \quad R(H, \zeta) - R(H_0, \zeta) \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \quad (162)$

Dann gilt auch  $R(H, z) - R(H_0, z) \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \quad \forall z \neq \bar{z} \quad (163)$

Wegen der zweiten Resolventengleichung ist dies gleichbedeutend mit  $R(H, z) \forall R(H_0, z) = R(H_0, z) \forall R(H, z) \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \quad \forall z \neq \bar{z} \quad (164)$

Dies ist z.B. erfüllt, wenn  $\forall R(H, z) \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$  oder  $\overline{R(H, z)} \forall \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$  gilt.

Ist (162) erfüllt, so existieren die Møller-Operatoren. Sie sind dann auch unabhängig von einer gewissen Klasse von reellwertigen Funktionen auf  $(-\infty, \infty)$  ( Kato, 11), S. 548 ),

d.h. es ist

$$\Omega_{\pm} = s\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i t \phi(H)} e^{-i t \phi(H_0)} E$$

Besonders wichtig ist, daß dann auch  $\Omega_{\pm} = s\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i t H^2} e^{-i t H_0^2} E \quad (165)$

gilt, was mit (162) und dem angegebenen Satz sofort aus

$$R(H^2, \zeta^2) - R(H_0^2, \zeta^2) = \frac{1}{2\zeta} [R(H, \zeta) - R(H_0, \zeta) - R(H, -\zeta) + R(H_0, -\zeta)] \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \quad (166)$$

folgt.

Aus (165) folgt dann sofort

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i t(H^t - P^t)} e^{-i t(H_0^t - P^t)} \quad (167)$$

Es ist jedoch nicht klar, ob man daraus auch  $\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i t h} e^{-i t h_0}$  erhält. Dazu müsste z.B.

$$R(H^t - P^t, \zeta^t) - R(H_0^t - P^t, \zeta^t) = \int_{R^3} [R(H^t, \zeta^t + y^t) - R(H_0^t, \zeta^t + y^t)] d^3 E(y) \in \mathcal{L}, (\mathcal{H}) \quad (169)$$

sein ( zu dieser Darstellung siehe Anhang 2 ).  
Es ist klar, daß man obige Prozedur auch in der Reihenfolge  $h, h^t, H^t = h^t + P^t, H$  durchlaufen kann. Die auftretenden Probleme sind genau dieselben.

Es folgt nun noch eine wichtige Darstellung der Möller-Operatoren durch die T-Operatoren.

Aus (113) ( was auch mit  $e^{\mp \eta^t}$  gilt ) folgt nämlich mit (120)

$$\Omega_{\pm} f = E f - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} R(H_0, p_0 \mp i \eta) T(H, p_0 \mp i \epsilon) dE(p_0) E f \quad (170)$$

Sind die Möller-Operatoren invariant gegen  $(H, H_0)$ , so erhält man mit (113)

$$\Omega_{\pm} f = E f + i \int_0^{\pm\infty} e^{i H_0^t} V_2 \Omega_{\pm} e^{-i H_0^t} f dt \quad (171)$$

worin

$$H^t - H_0^t \subset V_2$$

und mit (120) 
$$\Omega_{\pm} f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} T(H^t, p_0^t \mp i \epsilon) dE(p_0) E f \quad (172)$$

Ist dann  $E_0(p_0)$  die Spektralschar zu  $h_0$ , so ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm} f &= E f - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} R(h_0, p_0 \mp i \eta) T(h, p_0 \mp i \epsilon) dE_0(p_0) E f \\ &= E f - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} R(h_0^t, p_0^t \mp i \eta) T(h^t, p_0^t \mp i \epsilon) dE_0(p_0) E f \\ &= E f - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R^3} R(H_0^t, p_0^t + y^t \mp i \eta) T(H^t, p_0^t + y^t \mp i \epsilon) dE_0(p_0) d^3 E(y) E f \\ &= E f - \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R^3} R(H_0, \sqrt{p_0^2 + y^t} \mp i \eta) T(H, \sqrt{p_0^2 + y^t} \mp i \epsilon) dE_0(p_0) d^3 E(y) E f \end{aligned} \quad (173)$$

Dabei ist  $E(y)$  die Spektralschar zu  $\mathcal{P}$  ( Anhang 2 ).

Zu beachten ist, daß überall dieselbe Spektralschar  $E_0(p_0)$  auftritt.

Es sollen nun die Beziehungen zwischen den verschiedenen T-Operatoren untersucht werden. Dies ist wichtig für die Umrechnung zwischen verschiedenen Lorentzsystemen.

Ausgangspunkt ist die Beziehung 
$$R(h^t, z^t) = \frac{1}{2z} [R(h, z) - R(h, -z)] \quad (174)$$

Dann gilt 
$$T(h^t, z^t) = \frac{1}{2z} [(h_0 + z1)T(h, z)(h_0 + z1) - (h_0 - z1)T(h, z)(h_0 - z1)] \quad (175)$$

Dies erhält man folgendermaßen : mit  $h^t - h_0^t \subset V_2$ ,  $h - h_0 \subset V$

und 
$$T(h^t, z^t) = v_2 - v_2 R(h^t, z^t) v_2 \quad (176)$$

folgt auf geeignetem Definitionsbereich

$$v_2 = h^t - h_0^t = h_0 v + v h_0 + v^2 = h v + v h_0 = h_0 v + v h \quad (177)$$

Setzt man dies in (175) ein, so erhält man mit (174)

$$T(h^t, z^t) = h_0 v + v h_0 + v^2 - \frac{1}{2z} \langle (h_0 v + v h) [R(h, z) - R(h, -z)] (h v + v h_0) \rangle$$

und daraus durch Beseitigung von  $h$  mittels  $h = (h \pm z1) \mp z1$  schließlich (175).

Aus (175) ergibt sich umgekehrt

$$T(h, z) = 2z R(h_0, -z) T(h^1, z^1) R(h_0, -z) + (h_0 - z1) R(h_0, -z) T(h, -z) R(h_0, -z) (h_0 - z1) \quad (178)$$

worin noch ein Term mit  $T(h, -z)$  auftritt.

Die gleichen Beziehungen gelten natürlich zwischen  $T(H, z)$  und  $T(H^1, z^1)$ .

Weiterhin gilt 
$$T(h^1, z^1) = \int_{R^3} T(H^1, z^1 + y^1) d^3E(y) \quad (179)$$

und umgekehrt auch 
$$T(H^1, z^1) = \int_{R^3} T(h^1, z^1 - y^1) d^3E(y) \quad (180)$$

Aus (179) ergibt sich mit (178)

$$\begin{aligned} \int_{R^3} T(H, \sqrt{z^1 + y^1}) d^3E(y) &= \int_{R^3} 2\sqrt{z^1 + y^1} R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) T(H^1, z^1 + y^1) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) d^3E(y) \\ &\quad + \int_{R^3} (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) T(H, -\sqrt{z^1 + y^1}) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1) d^3E(y) \\ &= \int_{R^3} 2\sqrt{z^1 + y^1} R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) T(h^1, z^1) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) d^3E(y) \\ &\quad + \int_{R^3} (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) T(H, -\sqrt{z^1 + y^1}) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1) d^3E(y) \end{aligned}$$

und daraus mit (175)

$$\begin{aligned} \int_{R^3} T(H, \sqrt{z^1 + y^1}) d^3E(y) &= \int_{R^3} \frac{z^1 + y^1}{z} R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) [(h_0 + z1) T(h, z) (h_0 + z1) - (h_0 - z1) T(h, -z) (h_0 - z1)] R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) d^3E(y) \\ &\quad + \int_{R^3} (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) T(H, -\sqrt{z^1 + y^1}) R(H_0, -\sqrt{z^1 + y^1}) (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1) d^3E(y) \quad (181) \end{aligned}$$

Ähnlich erhält man (178), (179) und (175)

$$\begin{aligned} T(h, z) &= \int_{R^3} 2z R(h_0, -z) T(H^1, z^1 + y^1) R(h_0, -z) d^3E(y) + (h_0 - z1) R(h_0, -z) T(h, -z) R(h_0, -z) (h_0 - z1) \\ &= \int_{R^3} \frac{z}{\sqrt{z^1 + y^1}} R(h_0, -z) [(H_0 + \sqrt{z^1 + y^1} 1) T(H, \sqrt{z^1 + y^1}) (H_0 + \sqrt{z^1 + y^1} 1) - (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1) T(H, -\sqrt{z^1 + y^1}) (H_0 - \sqrt{z^1 + y^1} 1)] R(h_0, -z) d^3E(y) \\ &\quad + (h_0 - z1) R(h_0, -z) T(h, -z) R(h_0, -z) (h_0 - z1) \quad (182) \end{aligned}$$

Es soll jetzt angenommen werden, daß  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(h, p_0 \pm i\epsilon) = T_{\pm}(h, p_0) \quad (183)$

existiert, und daß man den Grenzwert unter das Spektralintegral schreiben darf. Dasselbe soll für die anderen  $T$  angenommen werden.

Dann ergibt sich durch Integration

aus (175) 
$$\int_0^{\infty} T_{\pm}(h^1, p_0^1) dE_0(p_0) = \int_0^{\infty} (h_0 + p_0 1) T_{\pm}(h, p_0) dE_0(p_0) \quad (184)$$

aus (178) 
$$\int_0^{\infty} T_{\pm}(h, p_0) dE_0(p_0) = \int_0^{\infty} R(h_0, -p_0) T_{\pm}(h^1, p_0^1) dE_0(p_0) \quad (185)$$

aus (179) 
$$\int_0^{\infty} T_{\pm}(h^1, p_0^1) dE_0(p_0) = \int_{R^3} \int_0^{\infty} T_{\pm}(H^1, p_0^1 + y^1) dE_0(p_0) d^3E(y) \quad (186)$$

aus (181) 
$$\int_{R^3} \int_0^{\infty} T_{\pm}(H, \sqrt{p_0^1 + y^1}) dE_0(p_0) d^3E(y) = \int_{R^3} \int_0^{\infty} (h_0 + p_0 1) R(H_0, -\sqrt{p_0^1 + y^1}) T_{\pm}(h, p_0) dE_0(p_0) d^3E(y) \quad (187)$$

und schließlich aus (182)

$$\int_0^{\infty} T_{\pm}(h, p_0) dE_0(p_0) = \int_{R^3} \int_0^{\infty} R(h_0, -p_0) (H_0 + \sqrt{p_0^1 + y^1} 1) T_{\pm}(H, \sqrt{p_0^1 + y^1}) dE_0(p_0) d^3E(y) \quad (188)$$

Damit hat man Umrechnungsformeln für die verschiedenen  $T$ -Operatoren und ihre Grenzwerte erhalten.

Es sei bemerkt, daß man ähnliche Formeln auch mit der Spektralschar  $\tilde{E}(p_0)$  zu  $H_0$  erhalten kann.

Ferner gelten obige Formeln nur auf bestimmten Definitionsbereichen.

Mit der Spektralschar  $E(p_0)$  erhält man analog

$$\int_0^\infty T_{\pm}(H^1, p_0^1) dE(p_0) = \int_0^\infty (H_0 + p_0 \mathbb{1}) T_{\pm}(H, p_0) dE(p_0) \quad (189)$$

$$\int_0^\infty T_{\pm}(H, p_0) dE(p_0) = \int_0^\infty R(H_0, -p_0) T_{\pm}(H^1, p_0^1) dE(p_0) \quad (190)$$

$$\int_{R_+^3} \int_0^\infty T_{\pm}(h, \sqrt{p_0^1 - y^1}) dE(p_0) d^3E(y) = \int_{R_+^3} \int_0^\infty (H_0 + p_0 \mathbb{1}) R(h_0, -\sqrt{p_0^1 - y^1}) T_{\pm}(H, p_0) dE(p_0) d^3E(y) \quad (191)$$

$$\int_0^\infty T_{\pm}(H, p_0) dE(p_0) = \int_{R_+^3} \int_0^\infty R(H_0, -p_0) (h_0 + \sqrt{p_0^1 - y^1} \mathbb{1}) T_{\pm}(h, \sqrt{p_0^1 - y^1}) dE(p_0) d^3E(y) \quad (192)$$

Unter Anwendung des Satzes aus Anhang 2 lassen sich auch die T-Operatoren für eine Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen im 3-Teilchen-System durch diejenigen im 2-Teilchen-System ausdrücken. Mit (20), (21),  $H_{0k} = \mathbb{1}_{ij} \otimes \hat{H}_{0k}$  und (72),

sowie der Spektralschar  $E_k(p_{0k}) = \mathbb{1}_{ij} \otimes \hat{E}_k(p_{0k})$

worin  $\hat{E}_k(p_{0k})$  die Spektralschar zu  $\hat{H}_{0k}$  ist,

erhält man 
$$R(H_{ij}, z) = \int_0^\infty R(\hat{H}_{ij}, z - p_{0k}) dE_k(p_{0k}) \quad (193)$$

und daraus 
$$T(H_{ij}, z) = \int_0^\infty T(\hat{H}_{ij}, z - p_{0k}) dE_k(p_{0k}) \quad (194)$$

oder 
$$T(\hat{H}_{ij}, z) = \int_0^\infty T(H_{ij}, z + p_{0k}) dE_k(p_{0k}) \quad (195)$$

denn  $H_{0k}$  ist mit  $\hat{H}_{ij}, V_{ij}$  vertauschbar.

Ist  $E_{ij}(p_{0ij})$  die Spektralschar zu  $H_{0ij}$ , so gilt wegen  $H_{0ij} = H_{0i} + H_{0j}$

$$H_{0ij} = \int_0^\infty p_{0ij} dE_{ij}(p_{0ij}) = \int_{R_+^1} (p_{0i} + p_{0j}) dE_i(p_{0i}) dE_j(p_{0j}) \quad (196)$$

und man kann diese Ersetzung der Spektralscharen in allen Integralen ausführen. Analoges gilt für  $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_j$

Mit (191) gilt dann

$$\int_{R_+^3} \int_{R_+^3} T_{\pm}(\hat{h}_{ij}, \sqrt{p_{0ij}^1 - y_{ij}^1}) d^4E(p_{0ij}) d^6E(y_{ij}) = \int_{R_+^3} \int_{R_+^3} (H_{0ij} + p_{0ij} \mathbb{1}) R(h_{0ij}, -\sqrt{p_{0ij}^1 - y_{ij}^1}) T_{\pm}(\hat{H}_{ij}, p_{0ij}) d^4E(p_{0ij}) d^6E(y_{ij}) \quad (197)$$

und daraus mit (195)

$$\int_{R_+^3} \int_{R_+^3} T_{\pm}(\hat{h}_{ij}, \sqrt{p_{0ij}^1 - y_{ij}^1}) d^3E(p_0) d^9E(y) = \int_{R_+^3} \int_{R_+^3} (H_{0ij} + p_{0ij} \mathbb{1}) R(h_{0ij}, -\sqrt{p_{0ij}^1 - y_{ij}^1}) T_{\pm}(H_{ij}, p_0) d^3E(p_0) d^9E(y) \quad (198)$$

In diesen Integralen deuten  $E(p_0)$  und  $E(y)$  3- bzw. 9-parametrische Spektralscharen an, und  $R_+^3$  gibt an, daß nur über positive Werte der Parameter zu integrieren ist.

Ähnlich folgt aus (192)

$$\int_{R_+^3} T_{\pm}(\hat{H}_{ij}, p_{0ij}) d^4E(p_{0ij}) = \int_{R_+^3} \int_{R_+^3} R(H_{0ij}, -p_{0ij}) (h_{0ij} + \sqrt{p_{0ij}^1 + y_{ij}^1} \mathbb{1}) T_{\pm}(\hat{h}_{ij}, \sqrt{p_{0ij}^1 - y_{ij}^1}) d^4E(p_{0ij}) d^6E(y_{ij}) \quad (199)$$

woraus mit (195) folgt

$$\int_{R_+^3} \int_{R_+^3} T_{\pm}(H_{ij}, p_0) d^3E(p_0) d^9E(y) = \int_{R_+^3} \int_{R_+^3} R(H_{0ij}, -p_{0ij}) (h_{0ij} + \sqrt{p_{0ij}^1 + y_{ij}^1} \mathbb{1}) T_{\pm}(\hat{h}_{ij}, \sqrt{p_{0ij}^1 - y_{ij}^1}) d^3E(p_0) d^9E(y) \quad (200)$$

Die Formeln (198) und (200) gestatten es somit, T-Operatoren für die 2-Teilchen-Wechselwirkung im 2-Teilchen-System ( fortgesetzt auf das 3-Teilchen-System mittels  $\otimes \mathbb{1}_k$ ) in T-Operatoren für die 2-Teilchen-Wechselwirkung im 3-Teilchen-System umzurechnen und umgekehrt.

Zu beachten ist dabei, daß hier die Spektralschar zu  $H_0$  und nicht zu  $h_{0ij}$  bzw.  $\hat{h}_{0ij}$  auftritt, welche das 3- bzw. 2-Teilchen-Schwerpunktsystem beschreiben würden.

Die Spektralscharen  $E(\rho_0), E(\psi)$  entsprechen einer nicht ausreduzierten Basis im Tensorprodukt.

## 10. Faddeev-Gleichungen

Faddeev 12) stellte als erster ein Gleichungssystem für Operatoren auf, welche es gestatten, den T-Operator für die Gesamtwechselwirkung im 3-Teilchen-System durch die T-Operatoren für die einzelnen 2-Teilchen-Wechselwirkungen auszudrücken.

Voraussetzung ist, daß das Gesamtpotential sich additiv aus den drei einzelnen 2-Teilchen-Potentialen zusammensetzt. Dies kann man jedoch leicht verallgemeinern (Anhang 3). Ferner handelte es sich bei Faddeev um ein nichtrelativistisches Problem mit starken Forderungen an die Potentiale (z.B. Hölder-Stetigkeit).

Außerdem traten bei ihm keine gebundenen Zustände auf, welche das Problem sehr komplizieren.

Im weiteren wurden dann nach den Richtlinien von Faddeev ähnliche Gleichungen für andere Operatoren aufgestellt, welche es gestatten sollen, die T-Operatoren für die einzelnen Streuprozesse zu berechnen (Lovelace 13), Newton 1). Dabei wurde jedoch nicht festgestellt, welche T-Operatoren man zur Beschreibung eines Mehrkanal-Streuproblems überhaupt benötigt.

Dies ist in Kapitel 8 geschehen, und die in Frage kommenden Gleichungen findet man z.B. in (153) bis (156). Es sei bemerkt, daß dort verschiedene Spektralscharen auftreten.

Die zu berechnenden T-Operatoren sind also

$$\begin{aligned} T_{00}(z) &= V - VR(H, z)V \\ T_{0ij}(z) &= V - VR(H, z)V_j' \\ T_{ij0}(z) &= V_j' - V_j'R(H, z)V \\ T_{ijjk}(z) &= V_j' - V_j'R(H, z)V_{jk}' \end{aligned} \tag{201}$$

und sie sollen aus den Operatoren  $T_{ij}(z) = V_{ij} - V_{ij}R(H_{ij}, z)V_{ij}$  (202) bestimmt werden. Im Kapitel 9 wurde gezeigt, wie diese sich wiederum aus T-Operatoren im 2-Teilchen-System bestimmen lassen.

Diese Operatoren lassen sich durch Faddeev-Gleichungen ( Anhang 3 ) bestimmen.

Über die Vorteile dieser Gleichungen ist an anderer Stelle genug gesagt worden ( Lovelace 13), Newton 1 ) ).

Es sei hier nur erwähnt, daß es sich um ein gekoppeltes Gleichungssystem handelt, und daß der in allen diesen Gleichungen auftretende Kern keine unzusammenhängenden Diagramme repräsentiert.

Zur Berechnung von  $T_{00}(z)$  verwendet man am besten die Operatoren  $P_{\alpha}(z)$  bzw.  $Q_{\beta}(z)$  aus (A25) bzw. (A26) und benutzt die Faddeev-Gleichungen (A27) bzw. (A28). Aus ihnen erhält man dann  $T_{00}(z)$  .

Für den Operator  $T_{j_0}(z)$  nehme man die Operatoren  $Y_{\alpha\beta}(z)$  aus (A30), bestimme sie durch die Faddeev-Gleichungen (A34) und erhält  $T_{j_0}(z)$  direkt durch (A40).

Problematischer wird dies bei den übrigen T-Operatoren.

Zur Berechnung der  $T_{ijk}(z)$  zieht man am besten die  $U_{\alpha\beta}^{\dagger}(z)$  (A43) heran. Allerdings erscheinen in den sie bestimmenden Faddeev-Gleichungen (A46) auch die Potentiale, was man eigentlich vermeiden wollte. Das ist jedoch für diesen Fall auf triviale Weise unmöglich.

Zur Bestimmung der  $T_{0ij}(z)$  schließlich empfiehlt es sich, die Operatoren  $A_{\alpha\beta}(z)$  (A59) zu verwenden, sie durch (A70) zu bestimmen und dann durch (A62) direkt  $T_{0ij}(z)$  zu erhalten. Jedoch treten auch hier wieder die Potentiale auf.

Eine andere Methode wäre es, die Potentiale mittels (A16) zu berechnen und daraus die einzelnen T-Operatoren zu bestimmen.

(A16) gilt ja auch bei Annäherung an die reelle Achse, falls

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [1 - R_{\nu}(\rho_0 + i\epsilon) T_{\pm}(\rho_0)]^{-1} \text{ existiert.}$$

Auf eine nähere Untersuchung von hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Lösungen der Faddeev-Gleichungen wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

## 11. Zusammenfassung

Es ist somit gezeigt worden, wie man einen geeigneten Darstellungsraum für das 3-Teilchen-Problem konstruiert, um darin die freien und wechselwirkenden, elementaren und komplexen, Teilchen beschreiben zu können. Es wurden Integraldarstellungen für die in Betracht kommenden Streuoperatoren abgeleitet und gezeigt, wie man die darin auftretenden T-Operatoren in verschiedene Lorentzsysteme umrechnen kann. Außerdem wurde gezeigt, wie die T-Operatoren des 2-Teilchen-Systems mit entsprechenden im 3-Teilchen-System zusammenhängen, und welche T-Operatoren man für den Streuprozess benötigt. Schließlich wurden diejenigen Faddeev-Gleichungen angegeben, um diese Operatoren zu berechnen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Kramer für das Interesse an diesem Thema.



### A1. Operatoren in Tensorprodukten

In diesem Anhang sollen kurz einige Begriffe und Sätze aus der Theorie der Tensorprodukte von Hilberträumen und Operatoren darauf erläutert werden. Für beschränkte Operatoren findet man dies in v. Neumann ).

Sind  $\mathcal{H}_i$ ,  $i=1, \dots, n$  Hilberträume, so betrachte man die Menge  $\mathcal{L}$  der in allen  $f_i \in \mathcal{H}_i$  antilinearen Funktionale der Gestalt

$$\phi(f_1, \dots, f_n) = \prod_{i=1}^n (g_i, f_i) \quad (g_i \in \mathcal{H}_i)$$

und schreibe  $\phi = \prod_{i=1}^n g_i$  (A1)

Die  $\phi$  sind beschränkt mit der Norm  $\|\phi\| = \prod_{i=1}^n \|g_i\|$ , und die Menge  $\mathcal{M}$  aller Linearkombinationen aus ihnen bildet einen Vektorraum.

Diesen kann man durch  $(\phi, \psi) = \prod_{i=1}^n (g_i, h_i)$  ( $\psi = \prod_{i=1}^n h_i$ ) (A2)

und lineare Ausdehnung  $(\sum_{k=1}^M \alpha_k \phi_k, \sum_{l=1}^N \beta_l \phi_l) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \alpha_k \bar{\beta}_l (\phi_k, \phi_l)$  (A3)

zu einem Raum mit positiv definitiver unitärer Metrik machen.

Durch das allgemeine Verfahren von Hausdorff kann  $\mathcal{M}$  zu einem vollständigen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  erweitert werden, in welchen  $\mathcal{M}$  dicht eingebettet ist.

Es seien zwei Sätze aufgeführt :

1) Gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(k)} = f_i \in \mathcal{H}_i$ , so folgt  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n f_i^{(k)} = \prod_{i=1}^n f_i$

2) Sind  $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{H}_i$  dicht, so ist  $\mathcal{K} = \prod_{i=1}^n \mathcal{K}_i$  in  $\mathcal{H}$  dicht, wobei  $\prod_{i=1}^n \mathcal{K}_i$  die lineare Hülle aller  $\prod_{i=1}^n f_i$  mit  $f_i \in \mathcal{K}_i$  angibt.

Man beweist, daß  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{M}$  dicht liegt, und damit auch in  $\mathcal{H}$ .

Sind  $A_i$  beschränkte Operatoren auf  $\mathcal{H}_i$ , so ist  $\tilde{A} = \prod_{i=1}^n A_i$  durch

$$\tilde{A}(\prod_{i=1}^n f_i) = \prod_{i=1}^n A_i f_i \quad (A4)$$

zunächst auf  $\mathcal{M}$  definiert und beschränkt. Durch Abschließung kann

$\tilde{A}$  dann eindeutig als beschränkter Operator auf  $\mathcal{H}$  definiert werden und man schreibt :  $A = \prod_{i=1}^n A_i$

Es gilt dann  $A^* = \prod_{i=1}^n A_i^*$

$$A^{-1} = \prod_{i=1}^n A_i^{-1} \quad (\text{falls die } A_i^{-1} \text{ beschränkt}) \quad (A5)$$

$$1 = \prod_{i=1}^n 1_i$$

Vorsichtiger muß man bei der Betrachtung von unbeschränkten Operatoren vorgehen. Sind  $A_i$  Operatoren mit den Definitionsbereichen  $\mathcal{D}(A_i) \in \mathcal{H}_i$ , so sei der Operator  $A = \prod_{i=1}^n A_i$  wie in (A4) definiert, aber mit  $f_i \in \mathcal{D}(A_i)$ . Sein Definitionsbereich sei  $\mathcal{D}(A) = \prod_{i=1}^n \mathcal{D}(A_i)$ . Er kann i.a. nicht erweitert werden. Diese Definition gelte auch, wenn einige der  $A_i$  ( aber nicht alle ) beschränkt sind.

Sind  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  Hilberträume und  $A_i$  selbstadjungierte Operatoren mit den Definitionsbereichen  $\mathcal{D}(A_i) \subset \mathcal{H}_i$ , und sind  $U_i(t) = e^{i t A_i}$  die zu  $H_i$  gehörenden unitären Gruppen, so ist nach (A5)  $U(t) = U_1(t) \otimes U_2(t)$  wieder eine unitäre Gruppe auf  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , und es gilt mit  $U(t) = e^{i t H}$

$$H \supset (H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2) \quad (\text{A6})$$

Denn es gilt ( Yosida 14), S. 253 )

$$Hf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U(t) - 1]f \quad \forall f \in \mathcal{D}(H)$$

$$\begin{aligned} \text{also auch } H(f_1 \otimes f_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U_1(t) \otimes U_2(t) - 1_1 \otimes 1_2](f_1 \otimes f_2) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U_1(t) - 1_1]f_1 \otimes f_2 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} U_1(t)f_1 \otimes [U_2(t) - 1_2]f_2 = H_1 f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes H_2 f_2 \end{aligned}$$

woraus folgt  $\mathcal{D}(H_1) \otimes \mathcal{D}(H_2) \subset \mathcal{D}(H)$   $H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2 \subset H$

Ob  $(H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2)^{**} = H$  gilt, d.h. ob  $H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2$  im wesentlichen selbstadjungiert ist, ist nicht klar.

Sind  $E_1(\lambda), E_2(\mu)$  die Spektralscharen zu  $H_1, H_2$ , so ist

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + \mu) d^1(E_1(\lambda) \otimes E_2(\mu)) \quad (\text{A7})$$

ein selbstadjungierter Operator mit  $H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2 \subset \hat{H}$

Andererseits gilt für obiges  $H$  :  $H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2 \subset H$  (A8)

I.a. handelt es sich bei  $H$  und  $\hat{H}$  um verschiedene selbstadjungierte Erweiterungen von  $H_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes H_2$ .

Ist aber letzterer Operator im wesentlichen selbstadjungiert, so folgt ihre Identität :  $\hat{H} = H$  (A9)

Sind  $H_1, H_2$  positiv, so gilt  $E_1(\lambda) = E_2(\mu) = 0 \quad \forall \lambda < 0, \mu < 0$

und somit  $H_i = \int_0^{\infty} \lambda dE_i(\lambda)$

und daher auch  $\hat{H} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) d^1(E_1(\lambda) \otimes E_2(\mu))$

woraus folgt, daß auch  $H = \hat{H}$  positiv ist.

Gilt allgemeiner  $(H_i f, f) \geq m_i \|f\|^2 \quad \forall f_i \in \mathcal{D}(H_i)$

so erhält man  $(Hf, f) \geq (m_1 + m_2) \|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{D}(H)$

## A2. Ein Satz über Spektralintegrale

Sind  $H$  und  $A$  selbstadjungierte vertauschbare Operatoren und ist  $F(\lambda)$  die Spektralschar zu  $A$ , so gilt, falls  $H-A$  selbstadjungiert ist

$$R(H-A, z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(H, z+\lambda) dF(\lambda) \quad (\text{A10})$$

Der Beweis verläuft sehr einfach. Dann braucht man nur zu zeigen

daß  $\| \sum_k R(H, z+\lambda_k) F(J_k) (H-A-z)f - f \| < \epsilon$

gilt, wenn  $\sum_k F(J_k) = 1$  eine Zerlegung ist.

Nun gilt  $\| \sum_k R(H, z+\lambda_k) F(J_k) g \|^2 = \sum_k \| R(H, z+\lambda_k) F(J_k) g \|^2 \leq \frac{1}{|z-\lambda_k|} \sum_k \| F(J_k) g \|^2 = \frac{1}{|z-\lambda_k|} \|g\|^2$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \|\sum_k R(H, z+\lambda_k) F(J_k)(H-A-z1)g - g\| &= \|\sum_k R(H, z+\lambda_k) F(J_k)(H-A-z1)g - \sum_k R(H, z+\lambda_k) [H-(z+\lambda_k)1] F(J_k)g\| \\ &= \|\sum_k R(H, z+\lambda_k) F(J_k) [(H-A-z1)g - \sum_k \langle H-(z+\lambda_k)1 \rangle F(J_k)g]\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_k - z|} \|(H-A-z1)g - \sum_k [H-(z+\lambda_k)1] F(J_k)g\| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

da  $(H-A-z1)f = \int_{-\infty}^{\infty} [H-(z+\lambda)1] dF(\lambda)$  gilt

$$\text{Also folgt} \quad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(H, z+\lambda) dF(\lambda) (H-A-z1) \quad (A11)$$

$$\text{Genauso ergibt sich} \quad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} (H-A-z1) R(H, z+\lambda) dF(\lambda) \quad (A12)$$

woraus man die Behauptung erhält.

Ähnlich beweist man diese Tatsache für eine mehrparametrische Spektralschar  $F(y)$ .

Weiterhin kann man die Formel auch auf andere Operatoren als die Resolventen verallgemeinern. Wichtig ist vor allem die Vertauschbarkeit der Operatoren.

$$\text{Z.B. gilt} \quad R((H-A)^2, z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} R((H-\lambda)1)^2, z^2) dF(\lambda) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} [R(H, z-\lambda) - R(H, -z-\lambda)] dF(\lambda) \quad (A13)$$

### A3. Formeln zu den Faddeev-Gleichungen

In diesem Anhang sollen die wichtigsten Beziehungen für diejenigen Operatoren gebracht werden, die für die Faddeev-Gleichungen von Interesse sind. Zugleich soll dies gleich auf mehr als drei Potentiale verallgemeinert werden.

Zunächst einige Formeln für den Fall eines Potentials mit

$$H-H_0 \in \mathcal{V} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(V).$$

$$\text{Ist} \quad R(z) = R(H, z), \quad \mathcal{D}[T(z)] = \mathcal{D}(V), \quad T(z) = V - VR(z)V \quad (A14)$$

$$\text{mit } R_0(z) = R(H_0, z), \text{ so gilt} \quad T(z) = V - VR_0(z)T(z) = V - T(z)R_0(z)V \quad (A15)$$

Diese Beziehung ergibt sich leicht aus (A14) und der zweiten Resolventengleichung.

Durch (A15) wird  $T(z)$  eindeutig bestimmt.

Eine nützliche Formel, um  $V$  aus  $T(z)$  zu bestimmen, ist

$$V = T(z)[1 - R_0(z)T(z)]^{-1} = [1 - T(z)R_0(z)]^{-1} T(z) \quad (A16)$$

Es seien nun  $V_i, i=1, \dots, n$ , selbstadjungierte Operatoren mit

$$\mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(V_i). \text{ Ist } V_i' = \sum_{j \neq i} V_j, \text{ so seien die Operatoren } V_i', V = \sum_{i=1}^n V_i$$

und  $H_i = H_0 + V_i, H = H_0 + V$  sämtlich selbstadjungiert.

$$\text{Ferner sei der Kürze halber} \quad R_i(z) = R(H_i, z), \quad T_i(z) = V_i - V_i R_i(z) V_i$$

Dann gilt die folgende Formel, welche sich aus der zweiten Resolventengleichung ergibt:  $R(z) = R_i(z) - R_i(z) V_i' R(z) = R_i(z) - R(z) V_i' R_i(z) \quad (A17)$

Sei nun 
$$M_{ij}(z) = \delta_{ij} V_i - V_i R(z) V_j = \delta_{ij} V_j - V_i R(z) V_j \quad (A18)$$

Wie man leicht sieht, gilt dann 
$$M_{ij}^*(z) = M_{ji}(\bar{z}) \quad (A19)$$

und 
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(z) = T(z) \quad (A20)$$

Dann erhält man aus (A18) und der zweiten Resolventengleichung 
$$M_{ij}(z) = \delta_{ij} V_i - V_i R_0(z) \sum_{k=1}^n M_{kj}(z) \quad (A21)$$

und 
$$M_{ij}(z) = \delta_{ij} V_j - \sum_{\ell=1}^n M_{i\ell}(z) R_0(z) V_j \quad (A22)$$

Durch Umformung erhält man dann daraus 
$$M_{ij}(z) = \delta_{ij} T_i(z) - T_i(z) R_0(z) \sum_{k \neq i} M_{kj}(z) \quad (A23)$$

und 
$$M_{ij}(z) = \delta_{ij} T_j(z) - \sum_{\ell \neq j} M_{i\ell}(z) R_0(z) T_j(z) \quad (A24)$$

Die  $M_{ij}(z)$  sind die zuerst von Faddeev eingeführten Operatoren. Die Gleichungen (A23) und (A24) heißen die Faddeev-Gleichungen. Statt der  $M_{ij}(z)$  kann man auch die einfacheren Operatoren

$$P_i(z) = \sum_{j=1}^n M_{ij}(z) = V_i - V_i R(z) V \quad (A25)$$

und 
$$Q_j(z) = \sum_{i=1}^n M_{ij}(z) = V_j - V R(z) V_j \quad (A26)$$

verwenden. Für diese gilt 
$$\sum_{i=1}^n P_i(z) = \sum_{j=1}^n Q_j(z) = T(z)$$

Aus (A23) bzw. (A24) erhält man dann 
$$P_i(z) = T_i(z) - T_i(z) R_0(z) \sum_{k \neq i} P_k(z) \quad (A27)$$

$$Q_j(z) = T_j(z) - \sum_{\ell \neq j} Q_\ell(z) R_0(z) T_j(z) \quad (A28)$$

Dadurch sind  $P_i(z)$  und  $Q_j(z)$  eindeutig bestimmt.

Es folgen nun andere Operatoren, welche ebenfalls Faddeev-Gleichungen erfüllen.

Sei 
$$W_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) V_i - V_i R(z) V_j' \quad (A29)$$

und 
$$Y_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) V_j - V_i' R(z) V_j \quad (A30)$$

Dann gilt, wie man sofort sieht, 
$$W_{ij}^*(z) = Y_{ji}(\bar{z}) \quad (A31)$$

sowie 
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij}(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_{ij}(z) = (n-1) T(z) \quad (A32)$$

Auf die gleiche Art wie bei den  $M_{ij}(z)$  erhält man 
$$W_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) V_i - V_i R_0(z) \sum_{k=1}^n W_{kj}(z) \quad (A33)$$

$$Y_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) V_j - \sum_{\ell=1}^n Y_{i\ell}(z) R_0(z) V_j \quad (A34)$$

und daraus 
$$W_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) T_i(z) - T_i(z) R_0(z) \sum_{k \neq i} W_{kj}(z) \quad (A35)$$

$$Y_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) T_j(z) - \sum_{\ell \neq j} Y_{i\ell}(z) R_0(z) T_j(z) \quad (A36)$$

Außerdem hat man 
$$A_j(z) = \sum_{i=1}^n W_{ij}(z) = V_j' - V R(z) V_j' \quad (A37)$$

$$\sum_{j=1}^n W_{ij}(z) = (n-1) P_i(z) \quad (A38)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{ij}(z) = (n-1) Q_j(z) \quad (A39)$$

$$B_i(z) = \sum_{j=1}^n Y_{ij}(z) = V_i' - V_i' R(z) V \quad (A40)$$

Wie (A23) und (A24) die  $M_{ij}(z)$ , so bestimmen (A35) und (A36) die  $W_{ij}(z)$  bzw.  $Y_{ij}(z)$  eindeutig.

Außerdem hat man

$$A_i(z) = V_i' - V R_0(z) A_i(z) \quad (A41)$$

und

$$B_i(z) = V_i' - B_i(z) R_0(z) V \quad (A42)$$

wodurch  $A_i(z)$  bzw.  $B_i(z)$  eindeutig bestimmt werden.

Von Lovelace 13) stammen die folgenden Operatoren

$$U_{ij}^+(z) = V_i' - V_i' R(z) V_j' \quad (A43)$$

$$U_{ij}^-(z) = V_j' - V_i' R(z) V_j' \quad (A44)$$

Für sie gilt

$$[U_{ij}^+(z)]^* = U_{ji}^-(\bar{z}) \quad (A45)$$

und

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij}^+(z) = (n-1)V + (n-1)^2 T(z) \quad (A46)$$

Für diese Operatoren erhält man wieder wie oben

$$U_{ij}^+(z) = V_i' - \sum_{k \neq i} T_k(z) R_0(z) U_{kj}^-(z) \quad (A47)$$

$$U_{ij}^+(z) = V_i' - \sum_{\ell \neq j} U_{i\ell}^+(z) R_0(z) T_\ell(z) \quad (A48)$$

$$U_{ij}^-(z) = V_j' - \sum_{k \neq i} T_k(z) R_0(z) U_{kj}^-(z) \quad (A49)$$

$$U_{ij}^-(z) = V_j' - \sum_{\ell \neq j} U_{i\ell}^+(z) R_0(z) T_\ell(z) \quad (A50)$$

Diese Gleichungen haben allerdings den Nachteil, daß in ihnen außer den T-Operatoren auch noch die Potentiale auftreten.

Außerdem gelten die Beziehungen  $U_{ij}^+(z) = V_i' - U_{im}^+(z) R_m(z) V_j' \quad \forall m \quad (A51)$

$$U_{ij}^-(z) = V_j' - V_i' R_m(z) U_{mj}^-(z) \quad \forall m \quad (A52)$$

Hieraus folgt, daß man alle  $U_{ij}^{\pm}(z)$  durch die  $U_i(z) = U_{ii}^{\pm}(z) \quad (A53)$

allein bestimmen kann :  $U_{ij}^+(z) = V_i' - V_i' R_j(z) U_j(z) \quad (A54)$

$$U_{ij}^-(z) = V_j' - U_i(z) R_i(z) V_j' \quad (A55)$$

Schließlich gilt  $R(z) = R_i(z) - R_i(z) U_{ij}^+(z) R_j(z) = R_j(z) - R_i(z) U_{ij}^-(z) R_j(z) \quad (A56)$

Zwischen den  $U_{ij}^{\pm}(z)$  und den  $W_{ij}(z)$  bzw.  $Y_{ij}(z)$  bestehen die folgenden

Beziehungen  $W_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) V_i - V_i R_j(z) U_j(z) \quad (A57)$

$$Y_{ij}(z) = (1 - \delta_{ij}) V_j - U_i(z) R_i(z) V_j \quad (A58)$$

Zum Schluß seien noch die Operatoren  $A_{ij}(z) = V_i - V_i R(z) V_j' \quad (A59)$

$$B_{ij}(z) = V_j - V_i' R(z) V_j \quad (A60)$$

betrachtet. Für sie gilt

$$A_{ij}^*(z) = B_{ji}(\bar{z}) \quad (A61)$$

und

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}(z) = V - V R(z) V_j' \quad (A62)$$

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}(z) = V_i + (n-1) P_i(z) \quad (A63)$$

$$\sum_{i=1}^n B_{ij}(z) = V_j + (n-1) Q_j(z) \quad (A64)$$

$$\sum_{j=1}^n B_{ij}(z) = V - V_i' R(z) V \quad (A65)$$

Außerdem hat man

$$\sum_{k \neq i} A_{kj}(z) = U_{ij}^+(z) \quad (A66)$$

$$\sum_{l \neq j} B_{il}(z) = U_{ij}^-(z) \quad (A67)$$

sowie

$$A_{ij}(z) = V_i - V_i R_m(z) U_{mj}^-(z) \quad \forall m \quad (A68)$$

$$B_{ij}(z) = V_j - U_{mj}^+(z) R_m(z) V_j \quad \forall m \quad (A69)$$

woraus man

$$A_{ij}(z) = V_i - T_i(z) R_o(z) U_{ij}^-(z) \quad (A70)$$

$$B_{ij}(z) = V_j - U_{ij}^+(z) R_o(z) T_j(z) \quad (A71)$$

erhält.

Die Faddeev-Gleichungen haben Lösungen, falls der in ihnen auftretende Kern vollstetig ist. Dies ist z.B. erfüllt, wenn alle  $T_i(z)R_o(z)$  oder gleichbedeutend damit, alle  $V_i R_i(z)$  vollstetig sind.

Literaturangaben

- 1) R.G. Newton, Brandeis 1965 I, p. 361
- 2) R.G. Newton, Scattering Theory of Waves and Particles, McGraw Hill, New York, 1966
- 3) J.M. Jauch, Helv. Phys. Acta 31, 661, (1958)
- 4) E. Wigner, Annals of Mathematics 40, 149, (1939)
- 5) H. Joos, Fortschr. Phys. 10, 65, (1962)
- 6) J.M. Jauch, B. Misra, Helv. Phys. Acta 38, 30, (1965)
- 7) J.M. Jauch, Helv. Phys. Acta 31, 127, (1958)
- 8) F. Coester, Helv. Phys. Acta 38, 7, (1965)
- 9) J.M. Jauch, I.I. Zinnes, Nuovo Cimento 11, 553, (1959)
- 10) A. Galindo Tixaire, Helv. Phys. Acta 32, 412, (1959)
- 11) Tosio Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966
- 12) L.D. Faddeev, Z. Eksp. i Teoret. Fiz. 39, 1459, (1960)
- 13) C. Lovelace, Strong Interactions and High Energy Physics, Moorhouse, ed. Oliver and Boyd, London, 1964
- 14) Kôsaku Yosida, Functional Analysis Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966
- 15) E.O. Alt, P. Grassberger, W. Sandhas, Univ. Bonn, preprint 2-48 ( 1968 )
- 16) F. Stichel, Nucl. Phys. 52, 189, (1964)
- 17) D.Z. Freedman, C. Lovelace, J.M. Namyslowski, Nuovo Cimento, 43, 258, (1966)
- 18) K. Hepp, On the Quantum Mechanical N-Body Problem, Karpacz (1968)