



DESY 95-146  
July 1995



Strahlungskorrekturen der Ordnung  $\alpha_s$   
zur Produktion harter Photonen bei HERA

D. Michelsen

*II. Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg*

ISSN 0418-9833

**NOTKESTRASSE 85 - 22607 HAMBURG**

**DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.**

**DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.**

**To be sure that your preprints are promptly included in the  
HIGH ENERGY PHYSICS INDEX,  
send them to (if possible by air mail):**

**DESY  
Bibliothek  
Notkestraße 85  
22607 Hamburg  
Germany**

**DESY-Zeuthen  
Bibliothek  
Platanenallee 6  
15738 Zeuthen  
Germany**

# Strahlungskorrekturen

der Ordnung  $\alpha_s$

zur Produktion harter Photonen  
bei HERA

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die QCD-Korrekturen der Ordnung  $\alpha_s$  zur Produktion harter Photonen bei HERA, d.h. zu der Reaktion  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$ , berechnet. Die Berechnung der virtuellen Korrekturen erfolgt mit Standardverfahren. Die reellen Korrekturen werden mit Hilfe eines neuen lorentzinvarianten Verfahrens berechnet. Das Verfahren wird im Detail dargestellt und kann auch computergestützt genutzt werden. Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1) \text{ Jets}$  wird bis zur Ordnung  $\alpha_s$  numerisch untersucht. Durch die Betrachtung des Winkels des auslaufenden Photons zum einlaufenden Proton kann die Linearkombination  $\sum q_i^2 f_i(\xi)$  der Partondichten  $f_i(\xi)$  vermessen werden.

## Abstract

In this thesis the QCD corrections to order  $\alpha_s$  to the production of hard photons at HERA, i.e. to the reaction  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$ , are calculated. The calculation of the virtual corrections is done by the application of standard methods. The real corrections are calculated by means of a new Lorentz-invariant method. The new method, which is implemented by computer algebraic means, is explained in detail. The differential cross section of the reaction  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1) \text{ Jets}$  up to order  $\alpha_s$  is studied numerically. Using the angle of the outgoing photon as a tagging criterion the linear combination  $\sum q_i^2 f_i(\xi)$  of the parton distributions  $f_i(\xi)$  can be measured.

Dirk Michelsen

II. Institut für Theoretische Physik

der Universität Hamburg

Luruper Chaussee 149, D-22761 Hamburg

Hamburg

1995

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>9</b>   |
| <b>2</b> | <b>Theorie der Elektron-Proton-Streuung</b>                                      | <b>14</b>  |
| 2.1      | Das Quark-Parton-Modell  | 14         |
| 2.2      | Parton-Wirkungsquerschnitte des Standardmodells                                  | 16         |
| 2.3      | Partondichten  | 19         |
| 2.4      | Kinematische Variable  | 20         |
| 2.5      | Experimentelle Schnitte  | 23         |
| 2.5.1    | Schnitte an das Elektron   | 23         |
| 2.5.2    | Schnitte an das Photon   | 24         |
| 2.5.3    | Jet-Schnitte   | 25         |
| <b>3</b> | <b><math>e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)</math> Jets in niedrigster Ordnung</b> | <b>27</b>  |
| 3.1      | Matrixelemente und Crossing-Relationen   | 28         |
| 3.2      | Phasenraum   | 29         |
| <b>4</b> | <b><math>e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)</math> Jets in niedrigster Ordnung</b> | <b>31</b>  |
| 4.1      | Matrixelemente und Crossing-Relationen   | 31         |
| 4.2      | Phasenraum   | 33         |
| <b>5</b> | <b><math>e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)</math> Jets mit QCD-Korrekturen</b>    | <b>36</b>  |
| 5.1      | Singularitäten bei der Berechnung von Strahlungskorrekturen                      | 37         |
| 5.2      | Übersicht über den Aufbau der Rechnung   | 40         |
| 5.3      | Counter-Terme  | 46         |
| 5.4      | Virtuelle Korrekturen  | 49         |
| 5.4.1    | Matrixelemente und Crossing-Relationen   | 49         |
| 5.4.2    | Phasenraum und Integration über den Impuls des virtuellen Teilchens              | 50         |
| 5.4.3    | Normalform der Tensorintegrale   | 50         |
| 5.4.4    | Reduktion der Tensorintegrale  | 52         |
| 5.4.5    | Skalare Integrale  | 55         |
| 5.5      | Analytisch berechnete Endzustandssingularitäten                                  | 57         |
| 5.5.1    | Matrixelemente und Umformungen im Limes $y_{cut}^{jet} \rightarrow 0$            | 57         |
| 5.5.2    | Faktorisierung des Phasenraumes  | 60         |
| 5.5.3    | Normalform der Tensorintegrale   | 62         |
| 5.5.4    | Reduktion der Tensorintegrale  | 63         |
| 5.5.5    | Skalare Integrale  | 65         |
| 5.5.6    | Begründung der Näherung  | 66         |
| 5.6      | Analytisch berechnete Anfangszustandssingularitäten                              | 68         |
| 5.6.1    | Matrixelemente und Umformungen im Limes $y_{cut}^{jet} \rightarrow 0$            | 68         |
| 5.6.2    | Faktorisierung des Phasenraumes  | 70         |
| 5.6.3    | Normalform der Tensorintegrale   | 73         |
| 5.6.4    | Reduktion der Tensorintegrale  | 74         |
| 5.6.5    | Skalare Integrale  | 76         |
| 5.6.6    | Begründung der Näherung  | 78         |
| 5.7      | Faktorisierungsterme   | 79         |
| 5.7.1    | Renormierung der Partondichten   | 79         |
| 5.7.2    | Matrixelemente und Phasenraum  | 79         |
| 5.8      | Numerisch integrierte reelle Korrekturen   | 81         |
| 5.8.1    | Zu berücksichtigende Anteile am Matrixelement                                    | 81         |
| 5.8.2    | Phasenraumintegration und Erzeugung der Jetimpulse                               | 83         |
| <b>6</b> | <b>Durchführung der Rechnung</b>   | <b>85</b>  |
| <b>7</b> | <b>Numerische Resultate</b>  | <b>88</b>  |
| 7.1      | Schnitt-Unabhängigkeit der Summe der Wirkungsquerschnitte                        | 88         |
| 7.2      | Wirkungsquerschnitte bei Standardschnitten                                       | 90         |
| 7.3      | Art der Photonabstrahlung  | 99         |
| 7.4      | Wirkungsquerschnitte bei Hadronschnitten   | 100        |
| <b>8</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>  | <b>113</b> |
|          | <b>Literatur</b>   | <b>114</b> |
|          | <b>A Gram-Determinanten</b>  | <b>123</b> |
|          | <b>B Näherung im Grenzwert <math>p^2 \rightarrow 0</math></b>                    | <b>124</b> |

|  |     |    |  |
|--|-----|----|--|
| <b>C Manifest invariante Integration</b>   | 125 | 5  | Tabelle der Anteile für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$ mit |
| <b>D Die hypergeometrische Funktion</b>  | 126 | 6  | Antiquark-Gluon-Jet (Integration über den 4-Teilchen-Phasenraum)   |
| <b>E Distributionen</b>  | 128 | 7  | Verarbeitungsschritte für Baumgraphen  |
| <b>F Bezeichnungen</b>   | 130 | 8  | Verarbeitungsschritte für virtuelle Korrekturen  |
| <b>G Matrixelement für <math>e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)</math> Jets der Ordnung <math>\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^0)</math></b>  | 132 | 9  | Verarbeitungsschritte für reelle Korrekturen (Gebiet A)  |
| <b>H Matrixelemente für <math>e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)</math> Jets der Ordnung <math>\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)</math></b> | 133 | 10 | Verarbeitungsschritte für reelle Korrekturen (Gebiet B)  |
| <b>I Matrixelemente für <math>e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)</math> Jets der Ordnung <math>\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)</math></b> | 138 | 11 | Tabelle der Wirkungsquerschnitte bei Standardschnitten   |
| I.1 Einlaufendes Quark oder Antiquark  | 138 | 12 | Prozentuale Anteile am Wirkungsquerschnitt für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets bis zur                     |
| I.1.1 Virtuelle Korrekturen  | 138 | 13 | Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^0)$ bei Standardschnitten   |
| I.1.2 Reelle Korrekturen (singuläre Anteile)   | 149 | 14 | Anteile am Wirkungsquerschnitt für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets bis zur Ordnung                         |
| I.1.3 Reelle Korrekturen (endliche Anteile)  | 154 | 15 | $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$ bei Standardschnitten   |
| I.1.4 Faktorisierungsterme   | 158 | 16 | Anteile am Wirkungsquerschnitt für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$ Jets bis zur Ordnung                         |
| I.2 Einlaufendes Gluon   | 161 | 17 | Tabelle der Wirkungsquerschnitte bei Hadronschnitten   |
| I.2.1 Virtuelle Korrekturen  | 161 | 18 | Prozentuale Anteile am Wirkungsquerschnitt für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets bis zur                     |
| I.2.2 Reelle Korrekturen (singuläre Anteile)   | 161 | 19 | Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^0)$ bei Hadronschnitten   |
| I.2.3 Reelle Korrekturen (endliche Anteile)  | 165 | 20 | Anteile am Wirkungsquerschnitt für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets bis zur Ordnung                         |
| I.2.4 Faktorisierungsterme   | 169 | 21 | $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$ bei Hadronschnitten   |
| <b>J Details der numerischen Resultate</b>   | 172 | 22 | Anteile am Wirkungsquerschnitt für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$ Jets bis zur Ordnung                         |
|  |     | 20 | $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$ bei Hadronschnitten   |
|  |     | 21 | Anteile der Partondichten bei Hadronschnitten  |
|  |     | 22 | Tabelle der Anteile am Wirkungsquerschnitt bei Standardschnitten   |
|  |     | 22 | Tabelle der Anteile am Wirkungsquerschnitt bei Hadronschnitten   |

## Abbildungsverzeichnis

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Elektron-Proton-Streuung mit hartem Photon bei H1 | 9  |
| 2 | $e^-q \rightarrow e^-q$                           | 14 |
| 3 | $e^-q \rightarrow e^-q$                           | 15 |
| 4 | $e^-g \rightarrow e^-q\bar{q}$                    | 16 |

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 5  | MRS(A)- und MRS(H)-Partondichten . . . . .  | 18  |
| 6  | Kinematische Grenzen bei $S = 10\text{GeV}^2$ . . . . .   | 19  |
| 7  | Der Cluster-Algorithmus der JADE-Kollaboration . . . . .  | 25  |
| 8  | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Elektron . . . . .                        | 27  |
| 9  | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Quark . . . . .                           | 28  |
| 10 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Elektron . . . . .                  | 31  |
| 11 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Quark . . . . .                     | 32  |
| 12 | $e^+g \rightarrow e^+q\bar{q}\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Elektron . . . . .                 | 33  |
| 13 | $e^+g \rightarrow e^+q\bar{q}\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Quark . . . . .                    | 34  |
| 14 | Phasenraum und Singularitäten ohne Partialbruchzerlegung . . . . .                                  | 40  |
| 15 | Phasenraum und Anfangszustandssingularität nach Partialbruchzerlegung . . . . .                     | 41  |
| 16 | Phasenraum und Endzustandssingularität nach Partialbruchzerlegung . . . . .                         | 42  |
| 17 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Elektron und Counter-Propagator . . . . . | 47  |
| 18 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit Photonbremsstrahlung am Quark und Counter-Vertex . . . . .        | 47  |
| 19 | QCD-Korrekturen zum Photonpropagator . . . . .  | 48  |
| 20 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Elektron . . . . .       | 50  |
| 21 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit 2-Punkt-QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Quark . . . . .  | 51  |
| 22 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit 3-Punkt-QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Quark . . . . .  | 52  |
| 23 | $e^+q \rightarrow e^+q\gamma$ mit 4-Punkt-QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Quark . . . . .  | 53  |
| 24 | Phasenraumfaktorisierung für Endzustandssingularitäten . . . . .                                    | 59  |
| 25 | Phasenraumfaktorisierung für Anfangszustandssingularitäten . . . . .                                | 68  |
| 26 | $y$ -Schnitt-Abhängigkeit der $(1+1)$ - und $(2+1)$ -Jet-Raten . . . . .                            | 89  |
| 27 | Verteilungen in $x$ bei Standardwerten . . . . .  | 94  |
| 28 | Verteilungen in $y$ bei Standardwerten . . . . .  | 95  |
| 29 | Verteilungen in $Q^2$ bei Standardwerten . . . . .  | 96  |
| 30 | Verteilungen in $W^2$ bei Standardwerten . . . . .  | 97  |
| 31 | Verteilungen in $\theta_1$ bei Standardwerten . . . . .   | 98  |
| 32 | Verteilungen in $x$ ohne Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .           | 103 |
| 33 | Verteilungen in $x$ mit Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .            | 104 |
| 34 | Verteilungen in $y$ ohne Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .           | 105 |
| 35 | Verteilungen in $y$ mit Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .            | 106 |
| 36 | Verteilungen in $Q^2$ ohne Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .         | 107 |

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 37 | Verteilungen in $Q^2$ mit Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .         | 108 |
| 38 | Verteilungen in $W^2$ ohne Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .        | 109 |
| 39 | Verteilungen in $W^2$ mit Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .         | 110 |
| 40 | Verteilungen in $\theta_1$ , ohne Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . . | 111 |
| 41 | Verteilungen in $\theta_1$ , mit Korrekturen für $e^+p \rightarrow e^+\gamma(1+1)$ Jets . . . . .  | 112 |

DIS - NC Event with hard Photon

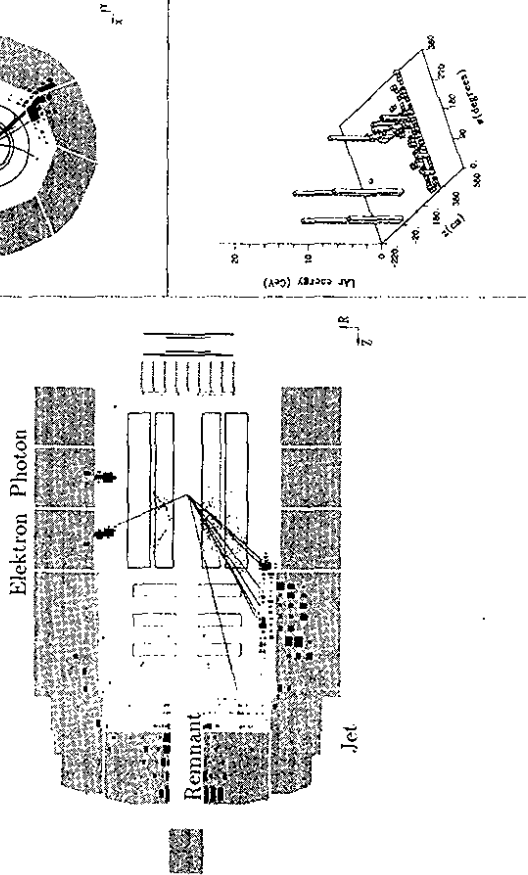


Abbildung 1: Elektron-Proton-Streuung mit hartem Photon bei H1

## 1 Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD, siehe z.B. [MP78]) gilt als mikroskopische Theorie der starken Wechselwirkung. Durch Anwendung der Störungsrechnung auf die Quantenchromodynamik können Wirkungsquerschnitte berechnet werden. Die störungstheoretische Quantenchromodynamik stützt sich auf eine Reihe von experimentellen, theoretischen und methodischen Ergebnissen, die im folgenden exemplarisch dargestellt werden. Nicht-störungstheoretische Methoden der Quantenchromodynamik, z.B. die Gitter-Methoden, werden in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet.

Klassische experimentelle Ergebnisse, die für die vorliegende Arbeit relevant sind, sind u.a. die

Entdeckung des Bjorken-Scaling [BP69] als Bestätigung des Parton-Modells und somit auch des "QCD improved" Parton-Modells, die Entdeckung der Gluon-Jets bei PETRA [JAD92] und die experimentelle Vermessung der laufenden Kopplungskonstante (siehe z.B. für die neuesten Werte [Par94]).

Experimentelle Ergebnisse in jüngerer Zeit sind u.a. bei LEP (siehe z.B. [AKV89] für einen Überblick über die theoretischen Vorarbeiten) durch eine Messung des Drei-Gluon-Vertex bzw. der Gruppenstrukturkonstanten [ALF92, DEL93, L3 90, OPA91, OPA95], bei HERA (siehe z.B. [Pee87, BH91] für einen Überblick) durch eine Vermessung von  $F_2$  [ZEU93, H1 93] und am TEVATRON durch den Nachweis des Top-Quarks [CDF95, DZE95] erzielt worden. Die genannten Beschleuniger haben -- neben diesen speziellen Resultaten -- alle zu einer genaueren Vermessung der Naturkonstanten  $s_w^2, \alpha_s, M_W, M_Z$  (siehe z.B. [Par94]) beigetragen.

Klassische theoretische Ergebnisse sind ausgehend von der Arbeit von Gell-Mann [GM64] die Entdeckung der asymptotischen Freiheit [GW73, Pol73] und die Faktorierbarkeit der Anfangszustandsingularitäten mit nachfolgender Renormierung der Partondichten. Dabei wurde mit der Arbeit von Politzer [Pol77] begonnen, die Faktorierbarkeit systematisch zu untersuchen [EGM<sup>+</sup>78, EGM<sup>+</sup>79]. Diese Erkenntnisse wurden in der Folge auf den Drell-Yan-Prozess [AEM78, AFM79] und die Elektron-Proton-Streuung angewendet [FP82].

Die theoretischen Ergebnisse in jüngerer Zeit bestehen u.a. in der Berechnung von QCD-Korrekturen in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  für HERA (siehe z.B. [Gra90, BK92]). LEP (siehe z.B. [ERT81, Kra82, KL89]) und TEVATRON (siehe z.B. [HvNM91]).

Die methodischen Ergebnisse bei der störungstheoretischen Berechnung von Wirkungsquerschnitten bestehen in jüngerer Zeit in der zunehmenden Verwendung von Methoden der Computer-Algebra. Ein derartiger Ansatz ist z.B. die computergestützte Berechnung von Gamma-Matrix-Spuren. Als Programm soll dazu exemplarisch REDUCE [Hea85] erwähnt werden. Ein weitergehender Ansatz ist die Reduktion der bei virtuellen Korrekturen auftretenden Tensorintegrale auf skalare Integrale z.B. durch Stuart [Stu88, SGT90]. Ein diese beiden Komponenten umfassender Ansatz ist die Erzeugung und Berechnung von Feynman-Diagrammen für virtuelle Korrekturen mit den Programmen FeynArts und FeynCalc per Computer [KBD90, MBD91]. Weitere Ansätze sind z.B. die Programme GRACE/CHANEL und

CompHEP (siehe [BDI<sup>+</sup>94] für einen Überblick). Ziel dieser Programme war es nicht, Korrekturen zu berechnen, sondern alle Baugraphen-Prozesse computergestützt zu berechnen. Ein bei den genannten Arbeiten bisher fehlender Baustein für eine umfassende computergestützte Berechnung der QCD-Korrekturen ist die Behandlung der realen Korrekturen.

Inhalt der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung von QCD-Korrekturen zur Produktion harter Photonen bei Austausch eines virtuellen Photons<sup>1</sup> für HERA, d.h. zum Prozeß  $e^-p \rightarrow e^- \gamma (1+1) \text{ Jets}$ . Als Beispiel sei der experimentelle Nachweis eines derartigen Ereignisses bei H1 auf Abbildung<sup>2</sup> 1 gezeigt. Auf dieser Abbildung sieht man, wie ein von rechts einlaufendes Proton und ein von links einlaufendes Elektron wechselwirken. Aus dem Wechselwirkungspunkt laufen ein Remnant-Jet<sup>3</sup>, ein normaler Jet<sup>4</sup>, ein Elektron<sup>5</sup> und ein Photon<sup>6</sup> aus. Die Beobachtung derartiger Ereignisse wurde in [H1 93] und [ZEU94] erwähnt. Eine erste Analyse der Ereignisse mit einem zum einlaufenden Elektron kollinearen Photon wurde in [H1 95] vorgenommen. Die Betrachtung dieser Ereignisse ohne eine Einschränkung an die Photonrichtung und die QCD-Korrekturen dazu sind der Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Verwandte theoretische Arbeiten sind die Berechnungen der QCD-Korrekturen zum Prozeß  $e^-p \rightarrow e^- (2+1) \text{ Jets}$  durch Graudenz [Gra90] und später Brodtkorb [BK92]; die Arbeiten zur Photoproduktion für ein direktes Photon durch Bödeker [Böd92] und für ein aufgelöstes Photon durch Salech [Sal93], die Arbeiten zur Photoproduktion harter Photonen durch Aurenche et al. [ACF<sup>+</sup>92] und die Anpassung der eben genannten Rechnung auf HERA durch Gordon und Vogelsang [GV94]. QCD-Strahlungskorrekturen zur Produktion eines Photon im Endzustand bei LEP wurden u.a. von Kramer und Lampe [KL91] und Kramer und Spiesberger [KS91] behandelt. Elektroschwache Korrekturen für HERA wurden von Böhm und Spiesberger [BS87b, BS87a] und Bardin et al. [BBGR89a, BBGR89b] unabhängig voneinander berechnet. Des weiteren wurden für HERA die QCD-Korrekturen zur Strukturfunktion  $F_2$  von Zijlstra und van Neerven [ZvN92] bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  berechnet.

<sup>1</sup>Der Austausch eines  $Z^0$ -Bosons wird in der vorliegenden Arbeit vernachlässigt.

<sup>2</sup>Diese Abbildung ist im Internet unter <http://dice2.desy.de/pictures/dienc.photon2.ps> verfügbar.

<sup>3</sup>Der Remnant-Jet verläuft entlang der Strahlachse nach links und hinterläßt im äußeren Hadronkalorimeter Spuren.

<sup>4</sup>Der Jet verläuft nach links unten und hinterläßt im äußeren Hadronkalorimeter Spuren.

<sup>5</sup>Das Elektron wird nach links oben abgelenkt und hinterläßt, als geladenes Teilchen in der zentralen Spurkammer eine Spur.

<sup>6</sup>Das Photon wird nach rechts oben abgestrahlt. Es hinterläßt als ungeladenes Teilchen in der zentralen Spurkammer keine Spur.

Allgemeines Ziel bei der Berechnung von QCD-Korrekturen ist eine verbesserte Vorhersage durch Einbeziehung weiterer, bisher vernachlässigter, Terme.

Die vorliegende Arbeit verfolgt außerdem zwei spezielle Ziele. Zum einen soll eine neue Methode vorgestellt werden, die eine generalisierbare und computergestützt vornehmbare lorentz-invariante Berechnung der realen Korrekturen erlaubt. Zum anderen soll gezeigt werden, daß bei Berücksichtigung des Photons die Partondichten<sup>7</sup>  $f_i(\xi)$  nicht nur in der üblichen Linearkombination  $F_2 \propto \sum q_i^2 f_i(\xi)$  sondern auch in der Linearkombination  $\sum q_i^2 f_i(\xi)$  gemessen werden können. Die Idee der Trennung zwischen up- und down-artigen Quarks mit Hilfe der Photonabstrahlung wurde von Mättig und Zeuner [MZ91] für LEP vorgeschlagen. In [Kra94] wurde auf Baumgraphenebene für die Elektron-Proton-Streuung bei HERA gezeigt, daß durch die Betrachtung des Photonwinkels unterschieden werden kann zwischen leptonischer (d.h. vom Elektron) und hadronischer (d.h. vom Quark, Antiquark oder Gluon) Photonabstrahlung. In der vorliegenden Arbeit wird dargestellt, daß die Messung der Linearkombination  $\sum q_i^2 f_i(\xi)$  durch Betrachtung der hadronischen Photonabstrahlung auch unter Berücksichtigung der QCD-Korrekturen möglich ist.

Die vorliegende Arbeit ist ein Teil der vollständigen Berechnung der Korrekturen in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zur tiefinelastischen Elektron-Proton-Streuung bei HERA. Eine weitere Arbeit auf diesem Gebiet ist der Monte-Carlo-Generator DJANG06 [CSS94], der u.a. die führenden Logarithmen der QCD- und QED-Korrekturen berücksichtigt.

Im Verlaufe der Arbeit zeigte sich, daß die neue Methode zur Berechnung der realen Korrekturen effizient und vollständig lorentzinvariant durchführbar ist. Weiterhin zeigte sich, daß bei den im weiteren beschriebenen Schritten durch eine genaue Untersuchung des Winkels der Photonabstrahlung eine Trennung zwischen leptonischer (d.h. vom Elektron) und hadronischer (d.h. vom Quark, Antiquark oder mittelbar vom Gluon) Photonabstrahlung möglich ist. Die QCD-Korrekturen machen bei den im Abschnitt 7 genannten Schritten etwa 30 Prozent aus. Die Berechnung der Terme, die durch Interferenz der hadronischen Photonabstrahlung mit der leptonischen Photonabstrahlung entstehen, wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführt und erwies sich sowohl algebraisch als auch numerisch als aufwendig, wobei sich zeigte, daß diese Terme nur einige Prozent zu den Korrekturen beitragen.

<sup>7</sup> $\xi$  ist der Impulsanteil des Partons  $i$  am Nukleon.



Der Aufbau dieser Arbeit gestaltet sich folgendermaßen. Zuerst wird auf die allgemeine Theorie der Elektron-Proton-Streuung eingegangen. Als nächstes wird auf den Baumgraphenprozess  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  eingegangen. Anschließend wird der Prozess  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1) \text{ Jets}$  auf Baumgraphenniveau behandelt. Der nächste Abschnitt ist der eigentliche Kernteil dieser Arbeit, die analytische Berechnung der Korrekturterme in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  zum Prozess  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$ . In diesem Abschnitt wird auch die lorentzinvariante Berechnung der reellen Korrekturen dargestellt. Die Berechnung der Baumgraphenprozesse und der Korrekturterme wird dabei stets für ein einlaufendes Quark dargestellt. Nur wo die Berechnung für ein einlaufendes Antiquark oder Gluon nicht analog durchgeführt werden kann, wird auf die Besonderheiten bei einlaufendem Antiquark oder Gluon eingegangen. Im nächstfolgenden Abschnitt wird kurz die computerunterstützte Durchführung der Rechnung beschrieben. Der dann folgende Abschnitt ist den numerischen Ergebnissen für HERA gewidmet. Es folgt noch ein Abschnitt, der die Zusammenfassung und einen Ausblick enthält. In den Anhängen werden einige technische Details, wie z.B. die Verwendung von Gramdeterminanten, invarianten Integrationsformeln in  $d$  Dimensionen und hypergeometrischen Funktionen, erläutert. Ebenfalls werden dort die relevanten Matrixelemente angegeben.

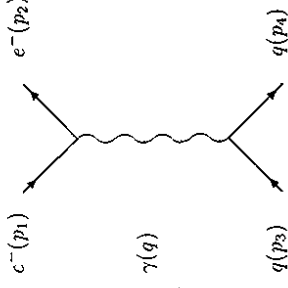


Abbildung 2:  $e^- q \rightarrow e^- q$

## 2 Theorie der Elektron-Proton-Streuung

In diesem Kapitel wird zuerst das Quark-Parton-Modell erläutert. Dann werden die kinematischen Variablen zur Beschreibung der Elektron-Proton-Streuung mit einem harten Photon im Endzustand und die bei HERA messbaren Bereiche dieser Variablen beschrieben.

### 2.1 Das Quark-Parton-Modell

Das Parton-Modell [Fey69, BP69] beruht auf der Idee, daß das Nukleon aus mehreren Teilchen, Partonen genannt, zusammengesetzt ist. Bei tief-inelastischen Streuprozessen am Nukleon wird dabei der Anteil eines Teilchens der Sorte  $i$  an einem als masselos angenommenen Nukleon<sup>8</sup> durch eine Partondichte  $f_i(\xi, \mu^2)$  beschrieben. Diese Partondichte gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Parton  $i$  mit dem Impuls  $p = \xi P$  bei einem Streuprozeß mit der Energieskala  $\mu$  innerhalb des Nukleons mit dem Impuls  $P$  zu finden. Durch Identifikation der Partonen mit Quarks [GM64] ergibt sich das Quark-Parton-Modell. Die Erweiterung dieses Modells um die starke Wechselwirkung im Rahmen der QCD (siehe z.B. [MP78]) und somit die Einführung des Gluons als weiterem Parton führt zum "QCD improved" Quark-Parton-Modell. Im Rahmen dieses

<sup>8</sup>In [Fey72] wird das Parton-Modell ohne diese Näherung zusammenhängend dargestellt. Da, wie Abschnitt 2.4 zeigt, die Masselosigkeit kinematisch eine gute Näherung ist, wird in der vorliegenden Arbeit von einem masselosen Nukleon ausgegangen.

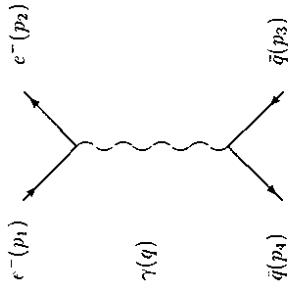


Abbildung 3:  $e^- p \rightarrow e^- \bar{q}$

Modells wird die Streuung eines Elektrons am Proton bei HERA, d.h. der Prozeß

$$e^- p \rightarrow e^- + X, \quad (1)$$

interpretiert als inkohärente Summe von Prozessen der Form

$$e^- + \text{Parton } i \rightarrow e^- + X. \quad (2)$$

$X$  ist hierbei ein beliebiger aus Partonen bestehender Endzustand. Dies bedeutet, daß sich der differentielle Wirkungsquerschnitt der Elektron-Proton-Streuung  $d\sigma$  aus den differentialen Wirkungsquerschnitten  $d\sigma_i(\xi P, \mu^2)$  der Elektron-Parton-Streuung bei einer Energieskala  $\mu$  berechnen läßt nach der Formel

$$d\sigma = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi, \mu^2) d\sigma_i(\xi P, \mu^2). \quad (3)$$

Die  $d\sigma_i(\xi P, \mu^2)$  können dank der asymptotischen Freiheit [GW73, Pol73] bei großen Impulsüberträgen auf das Parton durch Anwendung der Störungsrechnung im Rahmen des Standardmodells der Elementarteilchen berechnet werden. Die hier in Partondichte und Partonwirkungsquerschnitt vorhandene Energieskala ist ein Artefakt der Störungstheorie endlicher Ordnung. In niedrigster Ordnung tritt die Energieskala überhaupt nicht auf. In höheren Ordnungen fällt die Energieskala beim Falten der Partonwirkungsquerschnitte mit den Partondichten bis

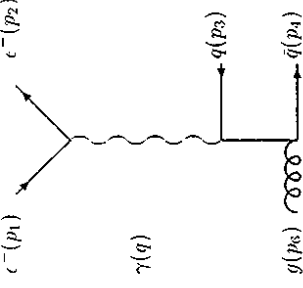


Abbildung 4:  $e^- g \rightarrow e^- q\bar{q}$

zur entsprechenden Ordnung heraus, d.h., der Wirkungsquerschnitt ist davon unabhängig<sup>9</sup>. Die Wirkungsquerschnitte der Elektron-Parton-Streuung werden als Elektron-Quark-, Elektron-Antiquark- und Elektron-Gluon-Streuung mit nachfolgender Umwandlung der Quarks, Antiquarks und Gluonen in Hadronen aufgefaßt. Die Hadronen treten als Teilchenbündel, d.h. als sogenannte Jets, auf. Die Umwandlung in Hadronen, Hadronisierung genannt, kann bisher nicht direkt aus dem Standard-Modell abgeleitet werden, da bei der Hadronisierung die störungstheoretischen Methoden nicht anwendbar sind. Die Hadronisierung wird deshalb mit Hilfe von phänomenologisch begründeten Modellen (siehe z.B. [FF78, HOS<sup>+</sup>79, AGS80, APKW80]) sowie mit Fragmentationsprogrammen (siehe z.B. JETSET [Sj894] oder HERWIG [MWA<sup>+</sup>92]) beschrieben. Der Einfluß der Hadronisierung auf den Wirkungsquerschnitt wird in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet.

## 2.2 Parton-Wirkungsquerschnitte des Standardmodells

Das Standardmodell der Elementarteilchen beruht zum einen auf der Vereinigung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung im Rahmen des Glashow-Salam-Weinberg Modells [Gla61, Sal68, Wei67]. Zum anderen beruht es auf der Quantenchromodynamik (siehe z.B. [MP78]) als Theorie der starken Wechselwirkung. Die Berechnung von Wirkungsquerschnitten des Standardmodells läßt sich dabei im Rahmen der Störungstheorie als die Berech-

<sup>9</sup>Diese Aussage setzt voraus, daß sowohl die Partonwirkungsquerschnitte, die Partondichten, als auch die skalenabhängige Kopplungskonstante bis zur betrachteten Ordnung entwickelt werden.

nung von Feynman-Diagrammen [Fey49, tV73] mit Hilfe von Feynman-Regeln durchführen. Die für diese Rechnung relevanten Feynman-Regeln sind z.B. bei [Nar82] angegeben. Das einfachste Feynman-Diagramm bei Rechnungen für HERA ist die Elektron-Quark-Streuung vermittelt durch den Austausch eines Photons (siehe Abbildung 2). Die anderen beiden grundlegenden Diagramme sind die Elektron-Antiquark-Streuung (siehe Abbildung 3) und die Elektron-Gluon-Streuung (siehe Abbildung 4). Die Matrixelemente dieser Prozesse werden üblicherweise in einen leptonischen und einen hadronischen Anteil aufgespalten. D.h. man erhält z.B. für die Elektron-Quark-Streuung mit dem Quark-Flavor-Index  $f$  mit den Feynman-Regeln aus [Nar82] das Matrixelement

$$\begin{aligned} M_{e^-q \rightarrow e^-q} &= \bar{u}_e(p_2) e \gamma_\mu u_e(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_2)^2} \bar{v}_f(p_4) e q \gamma_\nu v_f(p_3) \\ &= J_\mu^{lep} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_2)^2} J_\nu^{had} \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei sind  $u_e$  bzw.  $v_f$  die zum Elektron bzw. Quark gehörenden Spinorfunktionen bei Untdrückung aller Indizes.  $q_e$  und  $q_f$  sind die Ladungen des Elektrons bzw. Quarks ausgedrückt in Einheiten der Elementarladung  $e$ . Für das Betragsquadrat des Matrixelementes ergibt sich bei Summation über die Spins und Farben der beteiligten Teilchen

$$\sum_{\text{Spins, Farben}} |M_{e^-q \rightarrow e^-q}|^2 = L^{\mu\nu} \left( \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \right)^2 H_{\mu\nu}, \quad (5)$$

wobei der Leptonentensor  $L^{\mu\nu}$  und der Hadrontensor  $H^{\mu\nu}$  durch

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= e^2 q_e^2 \sum_{\text{Spins}} \bar{u}_e(p_2) \gamma_\mu u_e(p_1) \bar{u}_e(p_1) \gamma_\nu u_e(p_2) \\ H^{\mu\nu} &= e^2 q_f^2 \sum_{\text{Spins, Farben}} \bar{v}_f(p_4) \gamma_\mu v_f(p_3) \bar{v}_f(p_3) \gamma_\nu v_f(p_4) \end{aligned} \quad (6)$$

gegeben sind. Diese Zerlegung in Lepton- und Hadrontensor wird üblicherweise vorgenommen, um erstens die manuelle Durchführung der Rechnung einfacher zu gestalten und zweitens bei Kenntnis des Leptonentensors einen allgemeinen Ansatz des Hadrontensors mit Strukturfunktionen zu vermessen. In der vorliegenden Arbeit wird eine derartige Trennung nicht vorgenommen. Dies geschieht aus mehreren Gründen. Zuerst einmal wird die Rechnung mit Methoden

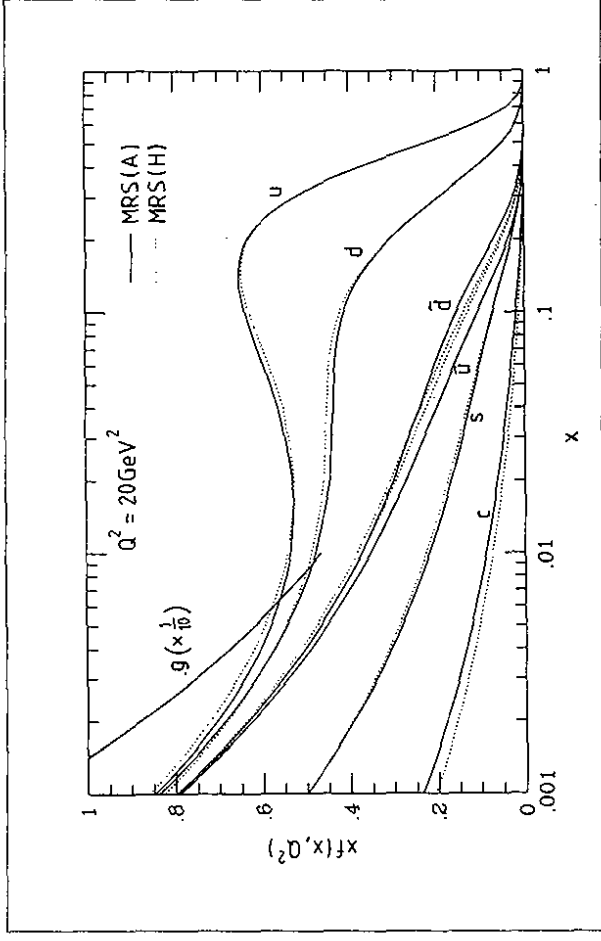


Abbildung 5: MRS(A)- und MRS(H)-Partondichten

der Computer-Algebra durchgeführt. Die Komplexität der Zwischenergebnisse ist somit kein Hindernis mehr. Da in dieser Arbeit das "QCD improved" Quark-Parton-Modell vorausgesetzt wird, gelten sowohl Lepton- als auch Hadrontensor als bekannt und bedürfen insofern keiner Trennung. Der wesentliche Grund jedoch, auf eine Trennung zu verzichten, ist die Berücksichtigung von Interferenztermen bei der Photonabstrahlung. Diese Terme entstehen durch die Interferenz der Photonabstrahlung beim Elektron mit der Photonabstrahlung beim Quark. Eine Darstellung des Betragsquadrates des Matrixelementes als Produkt von zwei Tensoren läßt sich für derartige Terme nur mit Tensoren dritter Stufe durchführen und führt zu keiner Vereinfachung der Rechnung. Das Betragsquadrat des Matrixelementes wird somit in der vorliegenden Arbeit ohne eine Aufspaltung in verschiedene Tensoren berechnet. Das Betragsquadrat des Matrixelementes muß noch — wie in den Abschnitten 3, 4 und 5 angegeben — mit Flußfaktor, Mittelungsfaktor für die einlaufenden Teilchen und Phasenraumintegration versehen werden, um die Partonwirkungsquerschnitte zu erhalten.

## 2.4 Kinematische Variable

Unter Benutzung der Bezeichnungen der Vierimpulse aus Abbildung 2 und des Protonviereimpulses  $P$  lassen sich bei der Elektron-Proton-Streuung folgende Standardvariable definieren:

$$\begin{aligned}
 S &= (P + p_1)^2, \\
 q &= p_1 - p_2, \\
 Q^2 &= -q^2, \\
 x &= \frac{Q^2}{2Pq}, \\
 y &= \frac{Pq}{Pp_1}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Im Falle eines Prozesses mit Photonabstrahlung<sup>11</sup> mit Impuls  $p_3$  läßt sich ein zweiter Satz von Variablen definieren:

$$\begin{aligned}
 q' &= p_1 - p_2 - p_3, \\
 Q'^2 &= -q'^2, \\
 x' &= \frac{Q'^2}{2Pq'}, \\
 y' &= \frac{Pq'}{Pp_1}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Dabei beschreibt dieser zweite Satz von Variablen bei einem Prozeß mit Photonabstrahlung vom Elektron dieselbe hadronische Kinematik wie der erste Satz von Variablen bei einem Prozeß

<sup>11</sup>Mit  $p_3$  wird der Photoniimpuls im gesamten Text bezeichnet.

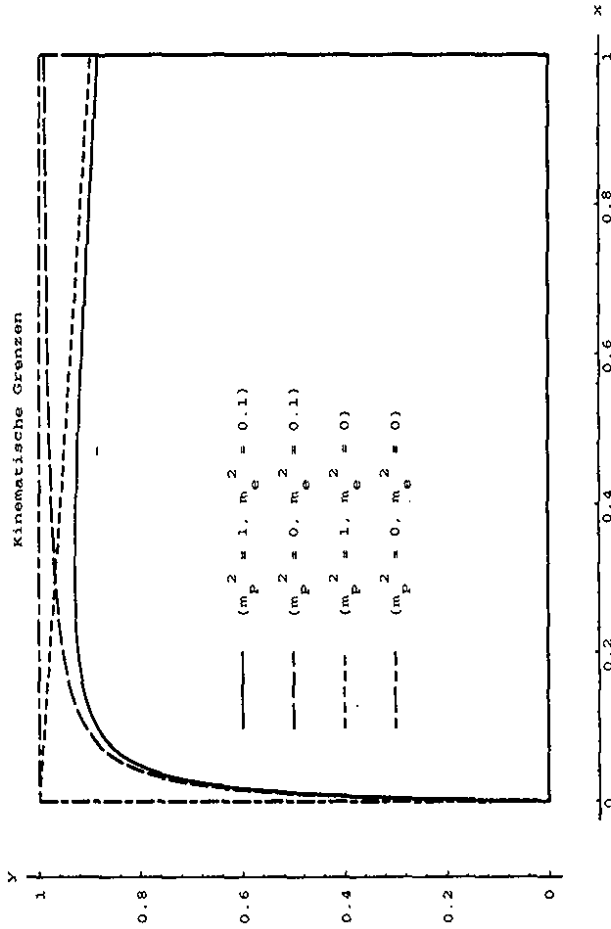


Abbildung 6: Kinematische Grenzen bei  $S = 10\text{GeV}^2$

## 2.3 Partondichten

In der vorliegenden Arbeit wird der MRS(A)-Satz der Partondichten, entnommen aus [MSR94], verwendet. Der MRS(A)-Satz der Partondichten verwendet u. a. Informationen der HERA-Messungen durch H1 [H1 93] und ZEUS [ZEU93]. Eine Besonderheit des MRS(A)-Satzes ist das Verhalten der Ghon- und Seequarkdichten bei kleinem Impulsanteil<sup>10</sup>  $\xi$ :

$$\xi g(\xi), \xi q_{\text{sea}}(\xi) \propto \xi^{-0.3}
 \tag{7}$$

Abbildung 5 zeigt den Verlauf dieser Partondichten.

<sup>10</sup>In der vorliegenden Arbeit bezeichnet  $\xi$  den Impulsanteil des Partons am Proton,  $x$ , die auf das Elektron bezogene Bjorken-Variablen, wird im nächsten Abschnitt erläutert. In niedrigster Ordnung und bei Vernachlässigung aller Massen gilt  $\xi = x$ .

ohne Photonabstrahlung. Bei Vernachlässigung aller Massen gilt für diese Variablen

$$0 \leq Q^2, \quad Q^2 \leq S, \quad (10)$$

$$0 \leq x \leq x' \leq 1, \quad (11)$$

$$0 \leq y' \leq y \leq 1, \quad (12)$$

sowie

$$Q^2 = xyS \quad (13)$$

und

$$Q'^2 = x'y'S. \quad (14)$$

Schließlich wird noch die hadronische Masse  $W$  benötigt. Bei einem Prozeß ohne Photonabstrahlung gilt in masseloser Näherung

$$W^2 = (P + q)^2 = (1 - x)yS. \quad (15)$$

Bei Abstrahlung eines Photons mit Impuls  $p_s$  erhält man in masseloser Näherung

$$W^2 = (P + q - p_s)^2 = (P + q)^2 = (1 - x'y'S. \quad (16)$$

Die HERA-Nominalwerte für die Energien des einlaufenden Elektrons ( $E_{e^-}$ ) bzw. Protons ( $E_{p^+}$ ) sind gegeben durch:

$$E_{e^-} = 26.7 \text{ GeV},$$

$$E_{p^+} = 820.0 \text{ GeV}.$$

Das ergibt bei Vernachlässigung der Massen eine quadrierte Schwerpunktsenergie  $S$  von

$$S = 87576 \text{ GeV}^2. \quad (17)$$

Bei Berücksichtigung der Massen müssen die Grenzen von  $x$  und  $y$  aus Gleichung (10) modifiziert werden. Der kinematisch erlaubte Bereich wird dann beschrieben durch die Bedingungen

$$P^2 \leq (P + q)^2 \quad (18)$$

und

$$0 \leq \Delta(P, p_1, p_2), \quad (19)$$

wobei  $\Delta(P, p_1, p_2)$  die Gramdeterminante (siehe Anhang A) der drei Impulse ist. Dabei fordert Gleichung (17), daß die Ruhemasse von Proton und virtuellem Photon, d.h. die hadronische Masse unter Einbeziehung des abgestrahlten Photons, größer ist als die Ruhemasse des Protons. Gleichung (18) gibt nach Byckling und Kajantie [BK73] an, welche Kombinationen von Invarianten als physikalisches Ereignis realisiert werden können. Die relativen Abweichungen bei Berücksichtigung der Massenterme gegenüber den kinematischen Grenzen aus Gleichung (10), die sich bei den Werten von  $(S, m_p^2, m_e^2) \approx (10^5, 1, 2.6 \times 10^{-7}) \text{ GeV}^2$  ergeben, sind von der Ordnung  $O(\frac{m_e^2}{S})$  bzw.  $O(\frac{m_p^2}{S})$  und somit bei einer linearen Skala für  $x$  und  $y$  nicht mehr darstellbar. Zur besseren Veranschaulichung sei angenommen, daß  $(S, m_p^2, m_e^2) = (10, 1, 0.1) \text{ GeV}^2$  gelte. Dann ergeben sich die kinematischen Grenzen der Abbildung 6. Es zeigt sich, daß die Näherung  $m_p = 0$  für kleine  $x$  die ungenäherten kinematischen Grenzen qualitativ reproduziert. Da wie im Abschnitt 7 gezeigt wird, die größten Beiträge zum Wirkungsquerschnitt für kleine  $x$  (d.h.  $x < 10^{-2}$ ) anfallen und außerdem der differentielle Wirkungsquerschnitt keinen Pol in  $m_p = 0$  hat, ist die Näherung  $m_p = 0$  für HERA statthaft. Für  $m_p = 0$  folgen aus

$$Q^2 = xy(S - m_e^2), \quad (20)$$

$$(P + q)^2 = (1 - x)y(S - m_e^2) \quad (21)$$

und

$$\Delta(P, p_1, p_2) = \left( \frac{S - m_e^2}{2} \right)^2 (x(S - m_e^2) + m_e^2)y \left( \frac{x(S - m_e^2)}{x(S - m_e^2) + m_e^2} - y \right).$$

die Grenzen

$$0 \leq x \leq 1, \quad (22)$$

$$0 \leq y \leq \frac{x(S - m_e^2)}{x(S - m_e^2) + m_e^2}.$$

Für  $x \gg \frac{m_c^2}{S} \approx 10^{-11}$  kann in diesen Termen auch  $m_c^2$  vernachlässigt werden. Bei HERA gilt aus experimentellen Gründen stets  $x \geq 10^{-4}$ . In der ganzen folgenden Rechnung werden deshalb  $m_c^2$ - und  $m_p^2$ -Terme vernachlässigt. Die experimentellen Schritte an  $x$  und  $y$  werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

## 2.5 Experimentelle Schritte

Experimentell zugänglich sind nur die Ereignisse, bei denen die für uns interessantesten Teilchen beobachtet werden können. In der vorliegenden Arbeit werden Elektronen, Photonen und hadronische Jets betrachtet. Für jede Teilchenart müssen spezifische experimentelle Kriterien angegeben werden, wann ein Ereignis und seine Kinematik gemessen werden kann. Die ist Gegenstand der folgenden Absätze.

### 2.5.1 Schritte an das Elektron

Die durch den Detektor auferlegten Beschränkungen an die Energie und den Winkel des Elektrons lassen sich als Schranken an  $x$ ,  $y$  und  $Q^2$  formulieren:

$$\begin{aligned} x_{\min} &\leq x \leq x_{\max}, \\ y_{\min} &\leq y \leq y_{\max}, \\ Q_{\min}^2 &\leq Q^2 \leq Q_{\max}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Nach Bernardi und Hildesheim [BH91] wird in dem nachfolgend angegebenen Bereich bei der tief-inelastischen Streuung ein experimenteller Fehler kleiner als 10 Prozent erwartet:

$$\begin{aligned} x_{\min} &= 10^{-4}, & x_{\max} &= 0.5, \\ y_{\min} &= 0.1, & y_{\max} &= 1, \\ Q_{\min}^2 &= 10, \text{ GeV}^2 & Q_{\max}^2 &= x_{\max} y_{\max} S. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Grenzen an  $x$  bzw.  $Q^2$  sind dabei im wesentlichen gegeben durch einen minimalen messbaren Streuwinkel des Elektrons von 6 Grad.  $y$  darf nicht zu klein werden, da andernfalls der syste-

matische Fehler in  $x$  zu groß wird. Verzichtet man allerdings auf die Bestimmung von  $x$ , indem man über alle Werte von  $x$  integriert, so sind  $y$ -Werte bis hinunter zu 0.003 erreichbar. Die bei großen Werten von  $y$  auftretenden QED-Strahlungskorrekturen [BSS7b] können durch  $y_{\max} = 0.9$  unterdrückt werden.

### 2.5.2 Schritte an das Photon

Damit ein Photon als solches erkannt werden kann, muß es eine Mindestenergie und einen Mindestwinkel zur Strahlachse haben. Mit der Bezeichnung  $\theta_\gamma$  für den Winkel des Photons zur Richtung des einlaufenden Elektrons im Laborsystem gibt es einen kleinsten und einen größten erlaubten Winkel des Photons:

$$\theta_{\gamma,\min} \leq \theta_\gamma \leq \theta_{\gamma,\max}. \quad (25)$$

Außerdem gibt es eine Mindestenergie des Photons im Laborsystem:

$$E_{\gamma,\min} \leq E_\gamma. \quad (26)$$

Zusätzlich muß ein kleinster möglicher Winkel des Photons zum auslaufenden Elektron und zu jedem Jet gefordert werden:

$$\begin{aligned} \theta_{\gamma e^-,\min} &\leq \theta_{\gamma e^-}, \\ \theta_{\gamma \text{jet},\min} &\leq \theta_{\gamma \text{jet}}. \end{aligned} \quad (27)$$

$\theta_{\gamma \text{jet}}$ , der Winkel zwischen Jet und Photon, wird auf den Gesamtimpuls des Jets bezogen. Der Gesamtimpuls des Jets wird dabei als Impuls des zugrunde liegenden Partons vor der Hadronisierung angenommen.  $\theta_{\gamma \text{jet}}$  verlangt somit einen höchstens doppelt so großen Öffnungswinkel des Jets. Als experimentell erreichbare Werte für diese Schritte werden die entsprechenden Werte für LEP [Mät93] verwendet. Die bei HERA messbaren Winkel des Photons zur Strahlachse sind bei [Wol92] angegeben. Insgesamt werden die folgenden Werte als experimentell

- 1 Berechne für alle (Pseudo-)Teilchen  $i \neq j$ :  $y_{ij} = \frac{2E_i E_j (1 - \cos \theta_{ij})}{(\sum_{k=1}^N E_k)^2}$
- 2 Beende die Rechnung, falls für alle (Pseudo-)Teilchen  $i \neq j$ :  $y_{ij} > y_{cut}^{jet}$
- 3 Ersetze das Paar  $i, j$  mit dem kleinsten Wert von  $y_{ij}$  durch ein Pseudoteilchen ("Cluster") mit dem Impuls  $p = p_i + p_j$ .
- 4 Gehe zu 1.

Abbildung 7: Der Cluster-Algorithmus der JADE-Kollaboration

erreichbar angenommen:

$$\begin{aligned} \theta_{\gamma, \min} &\simeq 4^\circ, \\ \theta_{\gamma, \max} &\simeq 176^\circ, \\ \theta_{\gamma e, \min} &\simeq 15^\circ, \\ \theta_{\gamma \text{Jet}, \min} &\simeq 15^\circ, \\ E_{\gamma, \min} &\simeq 5 \text{ GeV}. \end{aligned} \tag{28}$$

### 2.5.3 Jet-Schnitte

Experimentell zeigen sich Jets bei der Elektron-Proton-Streuung als Teilchenbündel wie auf Abbildung 1. Die Teilchen eines solchen Ereignisses werden mit Hilfe eines Cluster-Algorithmus zu Teilchenclustern, den Jets, zusammengefaßt. Da es mehrere Methoden der Zusammenfassung, d.h. verschiedene Cluster-Algorithmen, gibt (siehe [dB90]) für eine Übersicht und Bewertung der Algorithmen bei LEP, muß bei der experimentellen Bestimmung der Jet-Raten ein festgelegter Cluster-Algorithmus verwendet werden. In der vorliegenden Arbeit wird von der Verwendung des Algorithmus der JADE-Kollaboration [JAD86] (siehe Abbildung 7) mit einer charakteristischen, noch festzulegenden, Energie  $M_{cut}$  ausgegangen. Das Ergebnis der Clusterung ist die Beschreibung eines Ereignisses mit Hilfe von Elektron-, Proton-, Photon-, und Jet-Impulsen.

Theoretische Vorhersagen von Jet-Raten gehen von Partonen im Endzustand aus, die durch Hadronisierung Jets bilden. Hier wird eine Vorschrift benötigt, die angibt, wann Partonen im Endzustand unterscheidbare Jets erzeugen. Die erste in der Literatur beschriebene Vorschrift dieser Art war der Schnitt à la Sterman und Weinberg [SW77]. Nach dieser Vorschrift müssen Partonen im Endzustand eine Mindestenergie besitzen und durch einen Mindestwin-

kel voneinander getrennt sein, um getrennte Jets zu erzeugen. Diese Art von Schnitt hat den Nachteil, nicht relativistisch invariant zu sein. Ohne diesen Mangel ist der  $y$ -Schnitt nach Kraemer [Kra82]. Nach der  $y$ -Schnitt-Vorschrift soll für Partonen, die experimentell trennbare Jets erzeugen, stets gelten

$$(p_i + p_j)^2 \geq y_{cut}^{jet} M_{cut}^2 \tag{29}$$

Dabei ist  $M_{cut}$  eine charakteristische Energie für den betrachteten Prozeß. Ein weiterer Vorteil des  $y$ -Schnittes besteht darin, daß unter der Annahme, daß die Jet-Impulse mit den Parton-Impulsen übereinstimmen, der Cluster-Algorithmus der JADE-Kollaboration dem  $y$ -Schnitt entspricht.

Die Wahl der charakteristischen Energie wird von dem betrachteten Prozeß bestimmt. Bei der Elektron-Positron-Anihilation gibt es ... bis auf numerische Faktoren — nur  $M_{cut}^2 = S$  als charakteristische Energie. Bei der Elektron-Proton-Streuung gibt es u.a. die Möglichkeiten  $M_{cut}^2 = Q^2$ ,  $M_{cut}^2 = S$  oder  $M_{cut}^2 = W^2$ . In der vorliegenden Arbeit wird die hadronische Masse  $W$  als charakteristische Energie verwendet. Die hadronische Masse  $W$  muß einen Mindestwert überschreiten

$$W_{min} \leq W. \tag{30}$$

Trotz der Ähnlichkeit zwischen  $y$ -Schnitt und Cluster-Algorithmus der JADE-Kollaboration werden u.U. Ereignisse, die auf Parton-Ebene unter Berücksichtigung des  $y$ -Schnittes als  $n$ -Jet-Ereignisse klassifiziert werden, nach Hadronisierung und Clusterung auf Detektor-Ebene als  $m$ -Jet-Ereignisse ( $n \neq m$ ) klassifiziert. Diese Migration von Ereignissen geht auf die Hadronisierungskorrekturen zurück. In [H1 94] wurde die Migration von Ereignissen bei HERA untersucht. Es ergibt sich, daß die  $(1+1)$ Jet-,  $(2+1)$ Jet- und  $(3+1)$ Jet-Raten auf Parton-Ebene und auf Detektor-Ebene bei Verwendung des JADE-Algorithmus mit der charakteristischen Energie  $W$  bei  $y_{cut}^{jet} > 0.02$  für die genannten Prozesse bis auf Korrekturen der Größenordnung 15 Prozent übereinstimmen.

Erreichbar Zahlenwerte für  $y_{cut}^{jet}$  und  $W$  sind laut [BIR87, FIK+91]:

$$\begin{aligned} y_{cut}^{jet} &\simeq 0.01, \\ W_{min} &\simeq 30 \text{ GeV}. \end{aligned} \tag{31}$$

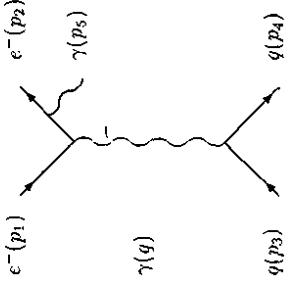


Abbildung 8:  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets mit Photonbremsstrahlung am Elektron

### 3 $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets in niedrigster Ordnung

In diesem Abschnitt werden die zu dem Prozeß  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets gehörigen Matrixelemente und der Phasenraum für die Elektron-Quark- bzw. Elektron-Antiquark-Streuung unter der Annahme, daß die Partonen im Endzustand und der Proton-Remnant getrennte Jets bilden, berechnet. Diese Prozesse wurden schon in der Dissertation von Kwiatkowski [Kwi91] diskutiert. Kwiatkowski, Möhring und Spiesberger haben mit HERACLES [KSM91] einen Monte-Carlo-Generator für diese Prozesse zu Verfügung gestellt. In den genannten Arbeiten ging es darum, die elektroschwachen Strahlungskorrekturen — hervorgerufen durch harte, separierbare Photonen, durch weiche, kollineare Photonen und durch virtuelle Korrekturen — zum Prozeß  $e^- p \rightarrow e^- X$  auszurechnen und deren Einfluß auf die Messungen zu diskutieren. Der dort als Korrektur betrachtete Prozeß mit einem harten, separierbaren Photon ist in der vorliegenden Arbeit der Prozeß niedrigster Ordnung, zu dem Korrekturen ausgerechnet werden.

Zuerst wird in diesem Kapitel auf die Berechnung der Matrixelemente und auf die Crossing-Relationen zwischen ihnen eingegangen. Die Matrixelemente selbst werden im Anhang G angegeben. Dann wird die Parametrisierung des Phasenraumes vorgestellt. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration der differentiellen Wirkungsquerschnitte über den Phasenraum werden im Abschnitt 7 dargestellt.

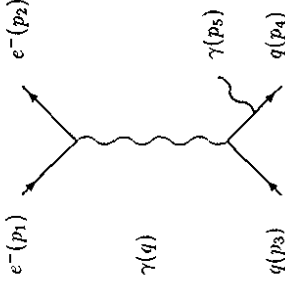


Abbildung 9:  $e^- q \rightarrow e^- \gamma q$  mit Photonbremsstrahlung am Quark

### 3.1 Matrixelemente und Crossing-Relationen

Zu der Reaktion  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets tragen die Elektron-Quark- und die Elektron-Antiquark-Streuung bei. Das Betragsquadrat des Baumgraphenmatrixelementes der Elektron-Quark-Streuung,  $\sum |M_{e^- q}^{\text{baum}}|^2$  mit Summation<sup>12</sup> über die Spin- und Farbfreiheitsgrade aller ein- und auslaufenden Teilchen wird durch die Feynman-Diagramme der Abbildungen 8 und 9 dargestellt. Dabei steht Abbildung 8 stellvertretend für die zwei Diagramme, die sich durch die Bremsstrahlung des Photons am ein- bzw. auslaufenden Elektron ergeben. Entsprechend steht Abbildung 9 für die zwei Diagramme, die sich bei der Photonbremsstrahlung am ein- bzw. auslaufenden Quark ergeben. Beim Ausführen der Feynmanregeln mit den üblichen Spurregeln [BD64] kann man für jedes der zwei möglichen einlaufenden Partonen (Quark, Antiquark) drei eichinvariante Anteile angeben. Die Bezeichnungen dieser Anteile ist in der Tabelle 1 zusammengefaßt. Dem Anteil L1H00q entsprechen die Diagramme mit Photonbremsstrahlung am Elektron. Der Anteil L0H10q steht für Photonbremsstrahlung am Quark. Der verbleibende Anteil, LXHX0q, steht für die Interferenz der Photonbremsstrahlung am Elektron mit der Photonbremsstrahlung am Quark. Das Matrixelement für ein einlaufendes Antiquark  $\sum |M_{e^- \bar{q}}^{\text{baum}}|^2$  mit den Anteilen L1H00a, L0H10a und LXHX0a ergibt sich mit Hilfe der

<sup>12</sup>Das Betragsquadrat des Matrixelementes wird in der vorliegenden Arbeit über die Spin- und Farbfreiheitsgrade summiert. Die Mittelung über die einlaufenden Teilchen wird mit Hilfe eines Mittelungsfaktors getrennt ausgewiesen. Damit erhält man einfachere Crossing-Relationen, muß aber stets einen Mittelungsfaktor berücksichtigen.



| Bezeichnung | Einlaufendes Parton | Leptonische Korrektur       | Hadronische Korrektur       |
|-------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| LOH10Q      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     |
| L1H00Q      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     |
| LXHX0Q      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ |
| LOH10A      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     |
| L1H00A      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     |
| LXHX0A      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ |

Tabelle 1: Tabelle der Anteile für  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3)$

folgenden Crossing-Relation:

$$\sum |M_{e^- q}^{\text{baum}}|^2 \xrightarrow{(p_3, p_4) \leftrightarrow (p_3, -p_4)} \sum |M_{e^- \bar{q}}^{\text{baum}}|^2 \xrightarrow{\epsilon^- \bar{q} \gamma \rightarrow \epsilon^- \bar{q} \gamma} \quad (32)$$

Die Matrixelemente sind im Anhang G angegeben. Als nächstes wird die Berechnung des Phasenraumes diskutiert.

### 3.2 Phasenraum

Für den masselosen 3-Teilchen-Phasenraum der Reaktion

$$\epsilon^-(p_1) q(\xi P) \rightarrow \epsilon^-(p_2) q(p_4) \gamma(p_5) \quad (33)$$

gilt in  $d$  Dimensionen<sup>13</sup> und lorentzinvarianter Notation mit der Regularisierungsskala<sup>14</sup>  $\mu$

$$\begin{aligned} d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(3)} &= d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(3)}(p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0) \\ &= \frac{(2\pi)^d}{p^{(4-d)}} \delta^d(p_1 + \xi P - p_2 - p_4 - p_5) \prod_{i \in \{2,4,5\}} \frac{d^d p_i \mu^{(4-d)} \delta(p_i^2 - m_i^2)}{(2\pi)^{(d-1)}} \end{aligned} \quad (34)$$

und somit in 4 Dimensionen und expliziter Notation

$$\begin{aligned} d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(3)} &= d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(3)}((p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0) \\ &= (2\pi)^{-5} \delta^4(p_1 + \xi P - p_2 - p_4 - p_5) \frac{d^3 p_2 d^3 p_4 d^3 p_5}{2E_2 2E_4 2E_5} \end{aligned} \quad (35)$$

<sup>13</sup>Die Angabe des  $d$ -dimensionalen Phasenraumes schon an dieser Stelle erleichtert die spätere Argumentation.

<sup>14</sup>Die Regularisierungsskala  $\mu$  tritt beim Übergang zu 4 Dimensionen nicht mehr auf.

Mit den Variablen aus Gleichung (8),  $p_3 = \xi P$  und der neuen Variable

$$z = 1 - \frac{p_3 p_4}{p_3 q} \quad (36)$$

sowie dem Azimuth  $\phi$  zur Beschreibung von  $p_4$  im Ruhesystem von  $p_3 + q$  gilt für die Kombination aus Phasenraumintegration und Integration über den Partonanteil  $\xi$  gemäß Gleichung (3):

$$\int_0^1 d\xi \int d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(3)} = \frac{1}{2^5 \pi^4} \int_0^1 dy \int_0^{y^S} dQ^2 \int_{\frac{Q^2}{2S}}^1 d\xi \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (37)$$

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Prozesse  $i$  ( $i \in \{\epsilon^- q \rightarrow \epsilon^- q \gamma, e^- \bar{q} \rightarrow \epsilon^- \bar{q} \gamma\}$ ) ergeben sich unter Berücksichtigung des Flußfaktors  $\frac{1}{2S}$  unter Vernachlässigung der Protonmasse, des Spinmittlungsfaktors  $\frac{1}{4}$  und des Farbmittlungsfaktors  $\frac{1}{N_c}$  ( $\frac{1}{3}$  für Quarks oder Antiquarks) zu:

$$d\sigma_i = \int_0^1 d\xi d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(3)}((p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0) \frac{1}{8N_c \xi S} f_i(\xi, \mu^2) \sum |M_i^{\text{baum}}|^2. \quad (38)$$

Durch Monte-Carlo-Integration über den Phasenraum unter Berücksichtigung der experimentellen Schritte erhält man daraus die Wirkungsquerschnitte. Die Diskussion der numerischen Resultate erfolgt in Abschnitt 7.

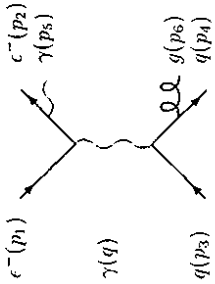


Abbildung 10:  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$  Jets mit Photonbremsstrahlung am Elektron

#### 4 $e^- p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$ Jets in niedrigster Ordnung

In diesem Abschnitt werden die zu dem Prozeß  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$  Jets gehörigen Matrixelemente und der Phasenraum für die Elektron-Quark-, Elektron-Antiquark bzw. Elektron-Gluon-Streuung unter der Annahme, daß die Partonen im Endzustand und der Proton-Remnant getrennte Jets bilden, berechnet. Die entsprechenden Rechnungen unter der Annahme, daß jeweils zwei dieser Jets experimentell nicht voneinander trennbar sind, wird im Abschnitt 5 behandelt. Zuerst wird in diesem Kapitel auf die Berechnung der Matrixelemente und die Crossing-Relationen zwischen ihnen eingegangen. Die Matrixelemente selbst werden im Anhang G angegeben. Dann wird die Parametrisierung des Phasenraumes vorgestellt. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration der differentiellen Wirkungsquerschnitte über den Phasenraum werden im Abschnitt 7 angegeben.

##### 4.1 Matrixelemente und Crossing-Relationen

Zu der Reaktion  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$  Jets tragen Prozesse mit einem einlaufenden Quark, Antiquark oder Gluon bei. Das Betragquadrat des Matrixelementes der Elektron-Quark-Streuung mit Summation über die Spin- und Farbfreiheitsgrade aller ein- und auslaufenden Teilchen,  $\sum |M_{e^- q \rightarrow e^- \gamma(2+1)}^{\text{baum}}|^2$ , wird durch die Feynman-Diagramme der Abbildungen 10 und 11 dargestellt. Dabei steht Abbildung 10 stellvertretend für 4 Diagramme, die sich durch Permutation der Vertizes bei Bremsstrahlung des Photons am ein- bzw. auslaufenden Elektron und des Gluons

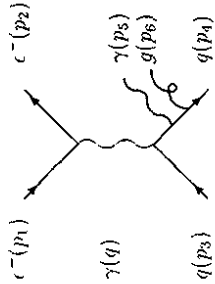


Abbildung 11:  $e^- q \rightarrow e^- qq \gamma \gamma$  mit Photonbremsstrahlung am Quark

am ein- bzw. auslaufenden Quark ergeben. Entsprechend steht Abbildung 11 für 6 Diagramme, die sich durch Permutation der Vertizes bei Gluon- und Photonbremsstrahlung am ein- bzw. auslaufenden Quark ergeben. Die Diagramme für ein einlaufendes Antiquark erhält man durch Crossing aus den Diagrammen mit einlaufendem Quark. Die Diagramme für ein einlaufendes Gluon entnimmt man den Abbildungen 12 und 13. Dabei steht das Diagramm der Abbildung 12 für die 4 Diagramme der Photonbremsstrahlung vom Elektron bei einlaufendem Gluon. Das Diagramm der Abbildung 13 steht für die 6 Diagramme der Photonbremsstrahlung vom erzeugten Quark-Antiquark-Paar. Beim Ausführen der Feynmanregeln mit den üblichen Spurregeln [BD64] kann man für jedes der drei möglichen einlaufenden Partonen (Quark, Antiquark, Gluon) drei eichinvariante Anteile angeben. Die Bezeichnungen folgen dabei dem Schema der Tabelle 2. Dem Anteil L1H01Q entsprechen die Diagramme mit Photonbremsstrahlung am Elektron und Gluonbremsstrahlung am Quark. Der Anteil L0H11Q steht für Photon- und Gluonbremsstrahlung am Quark. Der verbleibende Anteil, LXX1Q, steht für die Interferenz der Photonbremsstrahlung am Elektron mit der Photonbremsstrahlung am Quark. Diese Matrixelemente wurden zuerst mit Hilfe eines in REDUCE [Hea85] geschriebenen Programmes [Mic89] in Feynman-Eichung berechnet und bei einer Neuberechnung in 't Hooft-Eichung mittels FORM [Ver91] überprüft. Die verbleibenden Matrixelemente für ein einlaufendes Antiquark  $\sum |M_{e^- \bar{q} \rightarrow e^- \gamma(2+1)}^{\text{baum}}|^2$  mit den Anteilen L1H01A, L0H11A und LXX1A und für ein einlaufendes Gluon  $\sum |M_{e^- g \rightarrow e^- \gamma(2+1)}^{\text{baum}}|^2$  mit den Anteilen L1H01G, L0H11G und LXX1G ergeben sich mit Hilfe

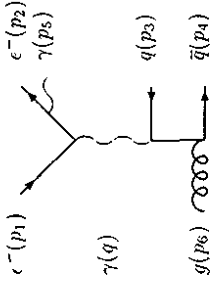


Abbildung 12:  $e^-g \rightarrow e^-q\bar{q}\gamma$  mit Photonbremsstrahlung am Elektron

der folgenden Crossing-Relationen (siehe Gleichung (32)):

$$\sum |M_{e^-q \rightarrow e^-q\gamma g}^{\text{baum}}|^2 \stackrel{(p_3, p_4) \rightarrow (-p_3, -p_4)}{=} \sum |M_{e^-q \rightarrow e^-q\bar{q}\gamma}^{\text{baum}}|^2, \quad (39)$$

$$\sum |M_{e^-q \rightarrow e^-q\gamma g}^{\text{baum}}|^2 \stackrel{(p_3, p_6) \rightarrow (-p_3, -p_6)}{=} \sum |M_{e^-g \rightarrow e^-q\bar{q}\gamma}^{\text{baum}}|^2. \quad (40)$$

Die Matrixelemente werden im Anhang H angegeben. Als nächstes wird die Parametrisierung des Phasenraumes diskutiert.

## 4.2 Phasenraum

Für den masselosen 4-Teilchen-Phasenraum der Reaktion

$$e^-(p_1)q(\xi P) \rightarrow e^-(p_2)q(p_4)\gamma(p_5)g(p_6) \quad (41)$$

gilt in  $d$  Dimensionen und lorentzinvarianter Notation mit der Regularisierungsskala  $\mu$

$$\begin{aligned} d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(4)} &= d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(4)}(p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0) \\ &= \frac{(2\pi)^d}{\mu^{(4-d)}} \delta^d(p_1 + \xi P - p_2 - p_4 - p_5 - p_6) \prod_{i \in \{2,4,5,6\}} \frac{d^d p_i, \mu^{(4-d)} \delta(p_i^2 - m_i^2)}{(2\pi)^{d-1}} \end{aligned} \quad (42)$$

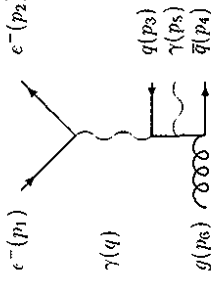


Abbildung 13:  $e^-g \rightarrow e^-q\bar{q}\gamma$  mit Photonbremsstrahlung am Quark

und somit in 4 Dimensionen und expliziter Notation nach [BK73]

$$\begin{aligned} d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(4)} &= d\text{PS}_{4,\text{dim}}^{(4)}(p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0) \\ &= (2\pi)^{-8} \delta^4(p_1 + \xi P - p_2 - p_4 - p_5 - p_6) \frac{d^3 p_2 d^3 p_4 d^3 p_5 d^3 p_6}{2E_2 2E_4 2E_5 2E_6}. \end{aligned} \quad (43)$$

Mit den Variablen aus Gleichung (8),  $p_3 = \xi P$ , der Variablen  $z$  aus Gleichung (36) und den neuen Variablen aus [BKMS89]

$$\begin{aligned} s_{56} &= (p_5 + p_6)^2, \\ \hat{s} &= (p_3 + q)^2 = \xi y S - Q^2 \end{aligned} \quad (44)$$

sowie dem Polarwinkel  $\theta_5$  und dem Azimuth  $\phi_5$  zur Beschreibung der Orientierung von  $p_5$  im Ruhesystem von  $p_5 + p_6$  und dem Azimuth  $\phi$  zur Beschreibung von  $p_4$  im Ruhesystem von  $p_3 + q$  gilt für Kombination aus Phasenraumintegration und Integration über den Partonanteil

| Bezeichnung | Einlaufendes Parton | Leptonische Korrektur       | Hadronische Korrektur                  |
|-------------|---------------------|-----------------------------|--|
| LOH11Q      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s^1)$     |
| L1H01Q      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s^1)$     |
| LXHX1Q      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s^1)$ |
| LOH11A      | Anti-quark          | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s^1)$     |
| L1H01A      | Anti-quark          | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s^1)$     |
| LXHX1A      | Anti-quark          | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s^1)$ |
| LOH11G      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s^1)$     |
| L1H01G      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s^1)$     |
| LXHX1G      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s^1)$ |

Tabelle 2: Tabelle der Anteile für  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$  Jets der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$

$\xi$  gemäß Gleichung (3) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 d\xi \int dPS_{4,\text{dim}}^{(4)} &= \int_0^1 d\xi \int dPS_{4,\text{dim}}^{(4)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) \\
 &= \frac{1}{2^{1+\pi^2}} \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dQ^2 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} ds_{56} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta_s \int_0^{2\pi} d\phi_s, \quad (45)
 \end{aligned}$$

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Prozesse  $i$  ( $i \in \{e^- q \rightarrow e^- q \gamma \gamma, e^- \bar{q} \rightarrow e^- \bar{q} \gamma \gamma, e^- g \rightarrow e^- q \bar{q} \gamma\}$ ) ergeben sich unter Berücksichtigung des Flussfaktors  $\frac{1}{2S}$  unter Vernachlässigung der Protonmasse, des Spinnmittlungsfaktors  $\frac{1}{4}$  und des Farbmittlungsfaktors  $\frac{1}{N_c}$  ( $\frac{1}{3}$  für Quarks oder Anti-quarks,  $\frac{1}{8}$  für Gluonen) zu:

$$d\sigma_i = \int_0^1 d\xi dPS_{4,\text{dim}}^{(4)} \frac{1}{8N_c \xi S} f_i(\xi, \mu^2) \sum |M_i^{\text{Born}}|^2. \quad (46)$$

Durch Monte-Carlo-Integration über den Phasenraum unter Berücksichtigung der experimentellen Schritte erhält man daraus die Wirkungsquerschnitte. Die Diskussion der numerischen Resultate erfolgt in Abschnitt 7.

## 5 $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets mit QCD-Korrekturen

In diesem Abschnitt werden die zu dem Prozeß  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets gehörigen Wirkungsquerschnitte mit QCD-Korrekturen berechnet. Die Matrixelemente dieser Prozesse wurden zum Teil schon in [Gra90] für den analogen Prozeß mit einem Gluon statt einem Photon, d.h. in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^2)$ , berechnet. In der Arbeit von Graudenz [Gra90] wurde dabei der Prozeß  $e^- p \rightarrow e^- (2+1)$  Jets für unpolarisierte virtuelle Photonen<sup>15</sup> betrachtet. In der Arbeit von Brodskorb [BK92] wurde der Prozeß  $e^- p \rightarrow e^- (2+1)$  Jets ohne Einschränkung an die Polarisation des virtuellen Photons berechnet. In beiden Fällen muß die bei der Berechnung von virtuellen Korrekturen auftretende tensorielle Vierpunktfunktion nur in Spezialfällen<sup>16</sup> auf die skalare Vierpunktfunktion reduziert werden. In der vorliegenden Arbeit werden, um die Interferenz der Photonabstrahlung vom Quark mit der Photonabstrahlung vom Elektron zu berechnen, alle tensoriellen  $n$ -Punktfunktionen bis hin zur tensoriellen Vierpunktfunktion dritter Stufe mit allgemeinen Reduktionsformeln reduziert. Die beiden genannten Arbeiten unterscheiden sich auch in der Wahl der verwendeten Methode bei der Berechnung der reellen Korrekturen von der vorliegenden Arbeit. Dort werden, wie auch in z.B. [ERT81, KL89], die reellen Korrekturen berechnet, indem in einem speziellen Koordinatensystem Energien und Winkel als Integrationsvariable verwendet werden. In der vorliegenden Arbeit wird ein allgemeiner lorentzinvarianter Ansatz zur Berechnung der reellen Korrekturen verwendet. Die Rechnung wird unter Vernachlässigung von Termen, die mit dem  $y$ -Schnitt gegen 0 gehen, durchgeführt. Die Ergebnisse der Rechnung sind somit nur für kleine Werte von  $y_{\text{cut}}^2$  gültig.

Die hier verwendeten neuen Methoden werden in den folgenden Abschnitten dargestellt. Zuerst gibt es einen allgemeinen Überblick über die bei der Rechnung auftretenden Singularitäten und ihre Bedeutung. Anschließend wird der Aufbau der Rechnung dargestellt. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß bei den Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zu  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets Counter-Terme nicht beitragen und die Rechnung somit unabhängig vom Renormierungsschema ist. In den weiteren Abschnitten wird die Berechnung der virtuellen Korrekturen und der

<sup>15</sup>In [Gra94b] wird ein auf [Gra90] basierender MC-Generator dargestellt, der auch die Komponenten des Hadrontensors umfaßt, die bei Berücksichtigung der Polarisation des virtuellen Photons benötigt werden.

<sup>16</sup>Die Reduktion der Vierpunktfunktionen geschieht sowohl in [Gra90] als auch in [BK92] durch Überschieben des Hadrontensors mit hadronischen Projektionsoperatoren (z.B.  $y^{\mu\nu}, p_2^\mu p_3^\nu, \dots$ ), Verschiebung der Integrationsvariablen  $z$  und Reduktion von Zähler und Nenner mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung à la [PV79]. In der vorliegenden Arbeit soll ein allgemeinerer Ansatz für die Reduktion einer Vierpunktfunktion verwendet werden (siehe Abschnitt 5.4.4).

analytisch berechneten Anteile der reellen Korrekturen, getrennt nach Anfangs- und Endzustandsingularitäten, beschrieben. Danach wird das Eliminieren der verbleibenden Anfangs- und Endzustandsingularitäten durch Renormierung der Partondichten dargestellt. Im letzten Abschnitt wird die Berechnung der nicht singulären und deshalb numerisch berechenbaren Anteile der reellen Korrekturen beschrieben. Die Angabe der expliziten Formeln geschieht im Anhang I. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration der differentiellen Wirkungsquerschnitte über den Phasenraum werden im Abschnitt 7 diskutiert.

## 5.1 Singularitäten bei der Berechnung von Strahlungskorrekturen

Bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten von Streuprozessen, die über das Baumgraphenniveau hinausgehen, müssen virtuelle und reelle Korrekturen berechnet werden. Die virtuellen Korrekturen werden durch Diagramme, wie sie auf den Abbildungen 20, 21, 22 und 23 dargestellt sind, beschrieben. Alle anderen für den betrachteten Prozeß relevanten Diagramme ergeben sich dabei durch Permutation der äußeren Teilchen der angegebenen Diagramme. Bei diesen Diagrammen wird über den Impuls  $p_k$  des inneren Gluons integriert. Dabei treten Ultraviolettsingularitäten für  $|\vec{p}_k| \rightarrow \infty$ , Infrarotsingularitäten für  $|\vec{p}_k| \rightarrow 0$  und kollineare Singularitäten für  $p_k \parallel p_{i,r}$  ( $p_{i,r} \in \{p_3, p_4\}$ ) auf. Reelle Korrekturen werden benötigt, wenn man z.B. den Prozeß<sup>17</sup>  $e^- q \rightarrow e^- q \gamma$  (siehe Abbildung 10 und 11) unter der Annahme betrachtet, daß das Gluon nicht zu einem isolierten Jet führt. Dies geschieht, wenn der Gluonimpuls kollinear zu dem Impuls eines anderen Partons im Endzustand ist, so daß diese beiden Partonen zu einem gemeinsamen Jet führen, oder falls die Gluonenergie zu klein ist, um zu einem beobachtbaren Jet zu führen. Im ersten Fall treten für  $p_k \parallel p_{i,r}$  ( $p_{i,r} \in \{p_3, p_4\}$ ) kollineare und im zweiten Fall für  $|\vec{p}_k| \rightarrow 0$  infrarote Singularitäten auf. Da bei der hier verwendeten lorentz-invarianten Berechnung aller Integrale die Invarianten  $p_3 p_4$  bzw.  $p_1 p_2$  als Integrationsvariable genutzt werden, wird in der vorliegenden Arbeit nicht zwischen kollinearen und infraroten Singularitäten unterschieden. Überall, wo Infrarotsingularitäten erwähnt werden, sind deshalb sowohl kollineare als auch infrarote Singularitäten gemeint.

Um überhaupt mit den Singularitäten umgehen zu können, wird — nach dem Rezept der dimensionalen Regularisierung [Ash72, BG72, tV72] — die ganze Rechnung in  $4 - 2\epsilon$  Dimensionen durchgeführt. Für  $\epsilon > 0$  werden die in 4 Dimensionen ultraviolettdivergenten Terme endlich.

<sup>17</sup>Für einlaufende Antiquarks und Gluonen gilt eine analoge Argumentation.

Entsprechend werden für  $\epsilon < 0$  die sonst infrarotdivergenten Terme endlich. Als analytische Fortsetzung erhält man Terme, die für alle  $\epsilon \neq 0$  existieren und Pole in  $\epsilon$  haben. Diese — nunmehr regulierten Singularitäten — werden folgendermaßen klassifiziert und behandelt:

- Ultraviolettsingularitäten

Ultraviolettsingularitäten treten bei den virtuellen Korrekturen auf. Sie werden entfernt, indem die nackten (unrenormierten) Kopplungskonstanten, die für  $\epsilon \rightarrow 0$  singulär werden, durch effektive (renormierte) Kopplungskonstanten, die für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen eine Konstante gehen, ausgedrückt werden. Dies läßt sich auf der Ebene der Feynman-Diagramme ausdrücken als die Einführung von Feynman-Regeln für Counter-Terme. Die Ultraviolettsingularitäten werden eliminiert, indem zu den Termen der virtuellen Korrekturen entsprechende Counter-Terme addiert werden. Die endlichen Anteile der Counter-Terme werden dabei durch die Wahl des Renormierungsschemas festgelegt. Das bei QCD-Rechnungen übliche Schema ist das  $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungsschema (siehe z.B. [MP78, Mut87]).

- Infrarotsingularitäten

Infrarotsingularitäten entstehen, wenn der Nenner eines Propagators der Form  $\frac{1}{(p \pm p_1)^2}$  gegen 0 geht. In der Notation der Diagramme 10 und 11 sind im masselosen Fall folgende Singularitäten möglich:  $p_1 p_5 = 0$ ,  $p_2 p_5 = 0$ ,  $p_3 p_5 = 0$ ,  $p_4 p_5 = 0$ ,  $p_3 p_6 = 0$  und bzw. oder  $p_4 p_6 = 0$ . Diese Singularitäten können einzeln oder mehrfach auftreten. Ein Term der Form  $\frac{1}{ab}$  mit  $a \neq b$  und  $a, b \in \{p_1 p_5, p_2 p_5, p_3 p_5, p_4 p_5, p_3 p_6, p_4 p_6\}$  kann deshalb nicht einer einzelnen Singularität zugeordnet werden. Mit Hilfe der schon in [ERT81] angewendeten Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} \quad (47)$$

kann man, falls stets  $a, b \geq 0$  gilt, einen Term  $\frac{1}{ab}$ , der für  $a = 0$  oder  $b = 0$  singulär wird, aufspalten in einen Term  $\frac{1}{a(a+b)}$ , der nur für  $a = 0$  singulär wird, und einen Term  $\frac{1}{b(a+b)}$ , der nur für  $b = 0$  singulär wird. Die beiden Terme können somit eindeutig einer einzelnen Singularität zugeordnet werden. Dies sei näher erläutert am Beispiel des Termes  $\frac{1}{2p_3 p_6} \cdot \frac{1}{2p_4 p_6}$ , der sich durch die Interferenz einer Gluonabstrahlung vom einlaufenden Quark mit einer Gluonabstrahlung vom auslaufenden Quark ergibt. Abbildung 14 zeigt, daß dieser Term für  $p_3 p_6 = 0$  oder  $p_4 p_6 = 0$  singulär wird. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man einen Term  $\frac{1}{2p_3 p_6} \cdot \frac{1}{2p_3 p_6 + p_4 p_6}$ , der gemäß Abbildung 15 nur für  $p_3 p_6 = 0$  singulär wird,

und einem  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2p_4 p_6} \cdot \frac{1}{2p_3 p_5 + p_4 p_6}$ , der gemäß Abbildung 16 nur für  $p_4 p_6 = 0$  singular wird. Durch mehrfache Anwendung der Partialbruchzerlegung (47) können alle mehrfach singulären Terme genau einer Singularität zugeordnet werden. Nichtsinguläre Terme werden mit dieser Vorschrift nicht eindeutig zugeordnet. Sie müssen deshalb gemäß Abschnitt 5.8 berücksichtigt werden, da in der Summe aller Anteile die nicht vorhandene Eindeutigkeit der Zuordnung keine Rolle spielt. Nachdem nun alle singulären Terme genau einer Singularität zugeordnet worden sind, können sie weiter klassifiziert werden.

- QED-Infrarotsingularitäten im Anfangszustand

Die Singularität  $p_1 p_3 = 0$  ist eine QED-Anfangszustandssingularität. Das Photon ist dabei vom einlaufenden Elektron nicht trennbar. Entsprechend ist bei der Singularität  $p_2 p_5 = 0$  das Photon vom einlaufenden Quark, d.h. vom Remnant-Jet, nicht trennbar. Die Singularitäten gehören somit zu Prozessen ohne beobachtbares Photon und werden hier nicht weiter betrachtet.

- QED-Infrarotsingularitäten im Endzustand

Die Singularität  $p_2 p_5 = 0$  ist eine QED-Endzustandssingularität. Das Photon ist dabei vom auslaufenden Elektron nicht trennbar. Entsprechend ist bei der Singularität  $p_4 p_6 = 0$  das Photon vom auslaufenden Quark, d.h. von einem der Jets, nicht trennbar. Die Singularitäten gehören wie die QED-Infrarotsingularitäten im Anfangszustand somit zu Prozessen ohne beobachtbares Photon. Sie werden hier nicht betrachtet.

- QCD-Infrarotsingularitäten im Endzustand

Die Singularität  $p_4 p_6 = 0$  ist eine QCD-Singularität im Endzustand. Physikalisch bedeutet dies, daß Quark und Gluon einen gemeinsamen Jet bilden. Nach dem Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem [Kin62, LN64] heben sich die Infrarotsingularitäten der realen Korrekturen im Endzustand gegen entsprechende Infrarotsingularitäten der virtuellen Korrekturen weg.

- QCD-Infrarotsingularitäten im Anfangszustand

Die Singularität  $p_3 p_5 = 0$  ist eine QCD-Singularität im Anfangszustand. Ein Teil der Singularität hebt sich gegen die entsprechende Infrarotsingularität der virtuellen Korrekturen weg. Den verbleibenden Anteil der Singularität kann man als Artefakt einer künstlichen Trennung zwischen Partondichte und Matrixelement auffassen. Da nur das

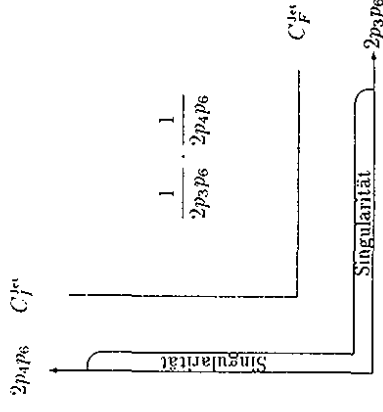


Abbildung 1-1: Phasenraum und Singularitäten ohne Partialbruchzerlegung

mit der Partondichte gefaltete Matrixelement meßbar ist, können durch eine Redefinition der Partondichten singuläre Faktoren vom Matrixelement abgespalten und in die Partondichten übertragen werden. Diesen Vorgang nennt man Faktorisierung der Singularitäten mit anschließender Renormierung der Partondichten. Da bei der Faktorisierung beliebige endliche Terme ebenfalls umgruppiert werden können, müssen diese Terme durch die Wahl eines Faktorisierungsschemas fixiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird das  $\overline{\text{MS}}$ -Faktorisierungsschema (siehe z.B. [AEM78, AEM79, FP82]) verwendet.

Nach dieser allgemeinen Darstellung der Singularitäten, soll der folgende Abschnitt die Methoden zur Berechnung der Korrekturen im Überblick beschreiben.

## 5.2 Übersicht über den Aufbau der Rechnung

Ausgehend von der Einteilung der Singularitäten des vorigen Abschnitts wird die Berechnung der Korrekturen in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zur Produktion harter Photonen ohne Trennung von Lepton- und Hadrontensor (wie in Abschnitt 2.2 erläutert) folgendermaßen vorgenommen:

- Zuerst werden im Abschnitt 5.3 die Counter-Terme für das Matrixelement berechnet. Es zeigt sich, daß die Counter-Terme bei Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zum Prozeß  $e^- p \rightarrow e^- \gamma (1+1) \text{ Jets}$  nicht beitragen.
- Dann werden im Abschnitt 5.4 die virtuellen Korrekturen für die Prozesse  $i$  ( $i \in \{e^- q \rightarrow e^- \bar{q} \gamma, e^- \bar{q} \rightarrow e^- \bar{q} \gamma, e^- g \rightarrow e^- \bar{q} \bar{q} \gamma\}$ ) berechnet. Die Ergebnisse, d.h. die Anteile



Abbildung 15: Phasenraum und Anfangszustandssingularität nach Partialbruchzerlegung

$\sum M_i^{\text{virt}} M_i^{\text{baum}} + \sum M_i^{\text{virt}} M_i^{\text{baum}}$  am Betragsquadrat des Matrixelementes besitzen Pole in  $\epsilon$ . Sie müssen über den  $d$ -dimensionalen 3-Teilchenphasenraum aus Gleichung (34) integriert werden. Durch Multiplikation mit  $f \text{d}\omega(1-u)$  werden die Terme auf eine die Anfangszustandssingularitäten berücksichtigende Normalform gebracht.

- Bei den reellen Korrekturen werden die Anteile am Betragsquadrat des Matrixelementes derart nach Gleichung (47) partialbruchzerlegt, daß jeder der Summanden nur in einer Invarianten eine QCD-Infrastrangularität besitzt, über die integriert werden muß.
- Für jeden dieser Terme wird der Phasenraum nach Abbildung 15 bzw. 16 in zwei Anteile aufgespalten. Die Integration über das Gebiet A des Phasenraumes enthält dabei die Singularität des Integranden und muß analytisch in  $d$  Dimensionen berechnet werden. Die Integration über das Gebiet B des Phasenraumes enthält keine Singularität und kann deshalb numerisch durchgeführt werden.
- Die Integration über das Gebiet A des Phasenraumes wird für Endzustandskorrekturen im Abschnitt 5.5 analytisch durchgeführt. Die Ergebnisse, d.h. die Anteile  $|M_i^{\text{baum}}|^2$  mit  $i \in \{e^- q \rightarrow e^- q \gamma, e^- \bar{q} \rightarrow e^- \bar{q} \gamma, e^- g \rightarrow e^- q \bar{q} \gamma\}$  am Betragsquadrat des Matrixelementes, besitzen Pole in  $\epsilon$ . Sie müssen über den  $d$ -dimensionalen 3-Teilchenphasenraum aus Gleichung (34) integriert werden. Sie werden auf eine die Anfangszustandssingularitäten berücksichtigende Normalform gebracht.

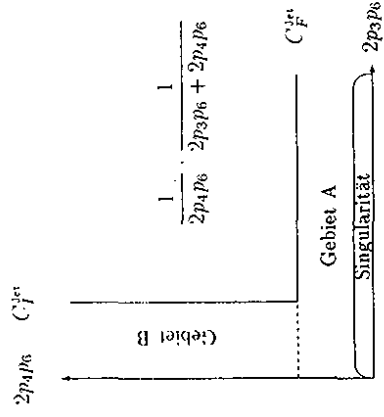


Abbildung 16: Phasenraum und Endzustandssingularität nach Partialbruchzerlegung

- Die Integration über das singuläre Gebiet A des Phasenraumes wird für Anfangszustandskorrekturen im Abschnitt 5.6 analytisch durchgeführt. Die Ergebnisse, d.h. die Anteile  $|M_i^{\text{baum}}|^2$  mit  $i \in \{e^- q \rightarrow e^- q \gamma, e^- \bar{q} \rightarrow e^- \bar{q} \gamma, e^- g \rightarrow e^- q \bar{q} \gamma\}$  am Betragsquadrat des Matrixelementes, besitzen Pole in  $\epsilon$ . Die Anteile müssen über den  $d$ -dimensionalen 3-Teilchenphasenraum aus Gleichung (34) und über  $\frac{d\omega}{u}$  gemäß Abschnitt 5.6 integriert werden. Sie werden auf eine Normalform gebracht.
- Die Faktorisierung der  $\epsilon^{-1}$ -Pole mit Renormierung der Partondichten wird im Abschnitt 5.7 durchgeführt, indem Faktorisierungsterme zu den reellen und virtuellen Korrekturen addiert werden. Die Faktorisierungsterme nach dem  $\overline{\text{MS}}$ -Faktorisierungsschema ergeben sich aus dem Produkt aus Betragsquadrat der Baumgraphenmatrixelemente und entsprechenden Altarelli-Parisi-Kernen (nebst Faktor  $\epsilon^{-1}$ ). Die Ergebnisse, d.h. die Anteile  $|M_i^{\text{baum}}|^2$  mit  $i \in \{e^- q \rightarrow e^- q \gamma, e^- \bar{q} \rightarrow e^- \bar{q} \gamma, e^- g \rightarrow e^- q \bar{q} \gamma\}$  am Betragsquadrat des Matrixelementes, besitzen Pole in  $\epsilon$  und müssen über  $\frac{d\omega}{u}$  integriert werden. Auch sie werden auf eine Normalform gebracht.
- In der Summe der 3-Teilchen-Terme, d.h. für  $|M_i^{\text{Analytisch}}|^2 = |M_i^{\text{baum}}|^2 + |M_i^{\text{virt}}|^2 + |M_i^{\text{virt}}|^2 + |M_i^{\text{baum}}|^2$ , kompensieren sich — wie durch Summation der im Anhang I explizit angegebenen Terme gezeigt werden kann — die Divergenzen. Die Summe kann deshalb in 4 Dimensionen über den 3-Teilchenphasenraum und  $\frac{d\omega}{u}$  integriert werden. Diese Summe wird gemäß Tabelle 3 nach Art des einlaufenden Partons und Art der Photonabstrahlung weiter unterteilt in die Anteile LOH1CQ bis LHXGCG.

| Bezeichnung | Einlaufendes Parton | Leptonische Korrektur       | Hadronische Korrektur                |
|-------------|---------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| L0H1CQ      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s)$     |
| L1H0CQ      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s)$     |
| LXHXCQ      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s)$ |
| L0H1CA      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s)$     |
| L1H0CA      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s)$     |
| LXHXCA      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s)$ |
| L0H1CG      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s)$     |
| L1H0CG      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s)$     |
| LXHXCG      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s)$ |

Tabelle 3: Tabelle der Anteile für  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)\text{Jets}$  der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s)$  (Integration über den 3-Teilchen-Phasenraum)

- Die Integration über den Anteil  $B$  des Phasenraumes für die Anteile  $|M_i^{\text{numerisch}}|^2$  kann, da diese Anteile keine Pole besitzen, in 4 Dimensionen über den 4-Teilchen-Phasenraum nach Gleichung (45) durchgeführt werden. Mit  $dPS_{4,\text{dim},3}^{(4)}$  Teilchen wird die Beschränkung des 4-Teilchen-Phasenraumes auf den Bereich, in dem nur ein 3-Teilchen-Ereignis, d.h. der Prozess  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)\text{Jets}$ , beobachtet werden kann, bezeichnet. Es wird dabei zu jedem Ereignis nach dem Cluster-Algorithmus ein 3-Teilchen-Ereignis konstruiert. Auf dieses Ereignis werden die experimentellen Schritte des Abschnittes 2.5 bezogen. Der Anteil der numerischen Integration kann gemäß Tabelle 4 und 5 weiter unterteilt werden nach Art des einlaufenden Partons. Art der Photonabstrahlung und Art der Phasenraumgrenzen. Die Anteile mit dem Affix  $X$  stammen dabei für einlaufendes Quark und Antiquark von numerischen Korrekturen zu den Anfangszustandssingularitäten. Die Anteile mit dem Affix  $Y$  gehören für einlaufendes Quark und Antiquark zu den numerischen Korrekturen zu den Endzustandssingularitäten. Im Falle eines einlaufenden Gluons<sup>18</sup> gehören die Anteile mit dem Affix  $X$  zu den numerischen Korrekturen der Quark-Gluon-Anfangszustandssingularität, d.h., Antiquark und Gluon bilden einen Jet<sup>19</sup> und die Anteile mit dem Affix  $Y$  zu den numerischen Korrekturen der Antiquark-Gluon-Anfangszustandssingularität, d.h., Quark und Gluon bilden einen Jet.

- Die Gesamtkorrekturen zu  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)\text{Jets}$  ergeben sich als Summe dieser Anteile.

<sup>18</sup>Aus Gründen der Crossing-Symmetrie ergaben sich diese Bezeichnungen.

<sup>19</sup>Die Integration über den Phasenraumbereich der Quark-Gluon-Anfangszustandssingularität, in dem Quark und Gluon einen Jet bilden, wird analytisch durchgeführt. Nur die Integration über den Bereich, in dem Antiquark und Gluon einen Jet bilden, kann numerisch durchgeführt werden.

| Bezeichnung | Einlaufendes Parton | Leptonische Korrektur       | Hadronische Korrektur                |
|-------------|---------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| L0H1QX      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s)$     |
| L1H0QX      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s)$     |
| LXHXQX      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s)$ |
| L0H1AX      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s)$     |
| L1H0AX      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s)$     |
| LXHXAX      | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s)$ |
| L0H1GX      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1 \alpha_s)$     |
| L1H0GX      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0 \alpha_s)$     |
| LXHXGX      | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2} \alpha_s)$ |

Tabelle 4: Tabelle der Anteile für  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(2+1)\text{Jets}$  der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s)$  mit Quark-Gluon-Jet (Integration über den 4-Teilchen-Phasenraum)

Insgesamt läßt sich die Berechnung der Korrekturen also ausdrücken als:

$$\begin{aligned}
 |M_i^{\text{analytisch}}|^2 &= |M_i^{\text{counter}}|^2 + |M_i^{\text{virt}}|^2 + |M_i^{\text{initial}}|^2 + |M_i^{\text{final}}|^2 + |M_i^{\text{factor}}|^2, \\
 d\sigma_i^{\text{Korr}} &= |M_i^{\text{analytisch}}|^2 \times \frac{du}{u} dPS_{4,\text{dim}}^{(3)} + |M_i^{\text{numerisch}}|^2 \times dPS_{4,\text{dim},3}^{(4)}, \\
 d\sigma_i &= d\sigma_i^{\text{Baum}} + d\sigma_i^{\text{Korr}}.
 \end{aligned} \tag{48}$$



### 5.3 Counter-Terme

Die Berechnung der Counter-Terme zum Matrixelement für leptoniche und hadronische Photonabstrahlung  $M_{Lep}^{Counter}$  und  $M_{Had}^{Counter}$  für  $e^-q \rightarrow e^-q\gamma$  geschieht anhand von Graphen der Abb. 17 und 18 nebst Permutationen. Verwendet man dabei die Counter-Terme mit der Quarkfeldrenormierungskonstanten  $Z_2$  und der Quark-Photon-Vertexrenormierungskonstanten  $Z_{1F}$  analog zu [Mut87] so lassen sich diese Graphen auf die Baumgraphenterme  $M_{Lep}^{Baum}$  und  $M_{Had}^{Baum}$  der Diagramme 8 und 9 zurückführen und man erhält unter Berücksichtigung der Wellenfunktionsrenormierung für den Prozeß  $e^-q \rightarrow e^-q\gamma$  die Gleichungen

$$M_{Lep}^{Counter} = (-2(Z_2 - 1) + (Z_{1F} - 1) + (Z_2 - 1))M_{Lep}^{Baum} \quad (49)$$

und

$$M_{Had}^{Counter} = (-3(Z_2 - 1) + 2(Z_{1F} - 1) + (Z_2 - 1))M_{Had}^{Baum}. \quad (50)$$

In diesen Gleichungen entspricht der erste Term den Propagator-Counter-Termen, der zweite den Vertex-Counter-Termen und der dritte der Wellenfunktionsrenormierung. Die Quark-Photon-Vertexrenormierungskonstante kann mit der Ward-Identität [War50]

$$Z_{1F} = Z_c Z_2 Z_\gamma^{1/2} \quad (51)$$

Tabelle 5: Tabelle der Anteile für  $e^-p \rightarrow e^-q(1+1)$  Jets der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s)$  mit Antiquark-Gluon-Jet (Integration über den 4-Teilchen-Phasenraum)

| Bezeichnung | Einlaufendes Parton | Leptonische Korrektur       | Hadronische Korrektur                 |
|-------------|---------------------|-----------------------------|---------------------------------------|
| LOH10Y      | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1\alpha_s^1)$     |
| L1H01QY     | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0\alpha_s^1)$     |
| LXHX1QY     | Quark               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2}\alpha_s^1)$ |
| LOH11AY     | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1\alpha_s^1)$     |
| L1H01AY     | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0\alpha_s^1)$     |
| LXHX1AY     | Antiquark           | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2}\alpha_s^1)$ |
| LOH11GY     | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^0)$     | $\mathcal{O}(\alpha^1\alpha_s^1)$     |
| L1H01GY     | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^1)$     | $\mathcal{O}(\alpha^0\alpha_s^1)$     |
| LXHX1GY     | Gluon               | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$ | $\mathcal{O}(\alpha^{1/2}\alpha_s^1)$ |

auf die Renormierungskonstante  $Z_c$  der Feinstrukturkonstante und die Renormierungskonstante  $Z_\gamma$  des Photonfeldes zurückgeführt werden. Wie man der Abbildung 19 entnehmen kann, tragen die QCD-Korrekturen zum Photonpropagator mit Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  bei. QCD-Korrekturen des Photonpropagators tragen zu dem Prozeß  $e^-p \rightarrow e^-q(1+1)$  Jets somit erst in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \times \alpha_s = \alpha^4\alpha_s)$  bei. Von noch höherer Ordnung sind die QCD-Korrekturen zum Elektronpropagator. Deshalb sind unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  die Renormierungskonstanten  $Z_c$  und  $Z_\gamma$  gleich eins. Somit folgt sofort  $Z_{1F} = Z_2$  und damit

$$M_{Had}^{Counter} = M_{Lep}^{Counter} = 0 \quad (52)$$

und damit gleichzeitig die Unabhängigkeit dieser Rechnung in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^1)$  vom Renormierungsschema. Die Abhängigkeit vom QCD-Renormierungsschema tritt für die betrachteten Prozesse erst bei Korrekturen in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  auf.

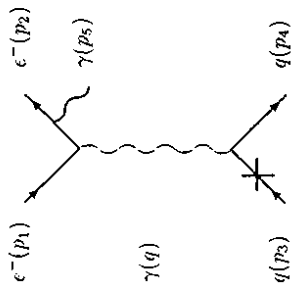


Abbildung 17:  $e^- q \rightarrow e^- q \gamma$  mit Photonbremsstrahlung am Elektron und Counter-Propagator

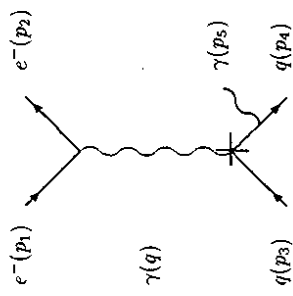


Abbildung 18:  $e^- q \rightarrow e^- q \gamma$  mit Photonbremsstrahlung am Quark und Counter-Vertex

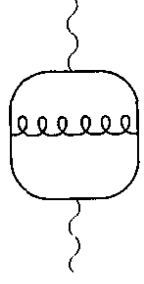


Abbildung 19: QCD-Korrekturen zum Photonpropagator

## 5.4 Virtuelle Korrekturen

Virtuelle Korrekturen treten in Form von Schleifendiagrammen (siehe Abbildung 20 bis 23) auf. Die Berechnung dieser Schleifendiagramme erfolgt in mehreren Schritten. Im ersten Schritt werden die Matrixelemente der Schleifendiagramme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_S)$  erzeugt und ihre Crossing-Relationen angegeben. Dabei müssen Terme bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2 = (\frac{d-4}{2})^2)$  berücksichtigt werden, da bei den Schleifenintegralen  $\epsilon^{-2}$ -Pole auftreten und das Ergebnis im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$ , d.h. bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ , berechnet werden soll. Im nächsten Schritt wird der Phasenraum und die Integration über den Impuls des virtuellen Teilchens für diese Matrixelemente angegeben. Im folgenden Schritt werden die bei der Schleifenintegration auftretenden Integrale auf eine Normalform gebracht. In einem weiteren Schritt werden die Tensorintegrale der Normalform auf skalare Integrale reduziert. Zuletzt werden die skalaren Integrale berechnet. Die expliziten Ergebnisse werden im Anhang I angegeben.

### 5.4.1 Matrixelemente und Crossing-Relationen

Zu der Reaktion  $e^-p \rightarrow e^- \gamma (1+1) \text{ Jets}$  tragen die virtuellen Korrekturen nur durch Anteile mit einem einlaufenden Quark bzw. Antiquark bei, da es bei dieser Reaktion keinen Baumgraphen mit einlaufendem Gluon gibt. Wegen

$$\sum |M_i^{\text{Baum}} + M_i^{\text{virt}}|^2 = \sum |M_i^{\text{Baum}}|^2 + \sum (M_i^{\text{Baum}*} M_i^{\text{virt}} + M_i^{\text{Baum}} M_i^{\text{virt}*}) + \sum |M_i^{\text{virt}}|^2 \quad (53)$$

und

$$\begin{aligned} \sum |M_i^{\text{Baum}}|^2 &\propto \alpha_S^0, \\ \sum |M_i^{\text{virt}}|^2 &\propto \alpha_S^2, \\ \sum (M_i^{\text{Baum}*} M_i^{\text{virt}} + M_i^{\text{Baum}} M_i^{\text{virt}*}) &\propto \alpha_S^1 \end{aligned} \quad (54)$$

beruhen die Anteile der virtuellen Korrekturen in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_S)$  zum Betragsquadrat des Matrixelementes, d.h. die Terme  $\sum (M_i^{\text{Baum}*} M_i^{\text{virt}} + M_i^{\text{Baum}} M_i^{\text{virt}*})$  auf dem Produkt von Baumgraphendiagrammen (nach Abbildung 8 und 9) mit Schleifendiagrammen (nach Abbildung 20 bis 23) bei Konjugation eines der beiden Faktoren mit nachfolgender Summation über die Spin- und Farbfreiheitsgrade aller ein- und auslaufenden Teilchen. Die Aufteilung in eichinvariante Anteile nach Art des einlaufenden Partons und Art der Photonabstrahlung folgt dabei dem Schema der Tabelle 3. Die Anteile für einlaufendes Antiquark ergeben sich mit Hilfe der Crossing-Relation nach (32) aus den Anteilen für einlaufendes Quark.

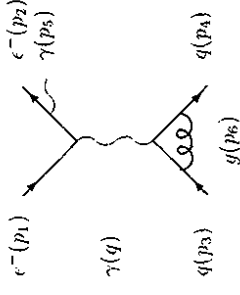


Abbildung 20:  $e^-q \rightarrow e^-q\gamma$  mit QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Elektron

### 5.4.2 Phasenraum und Integration über den Impuls des virtuellen Teilchens

Für das Produkt<sup>20</sup> aus masselosem 3-Teilchen-Phasenraum und Integration über den Impuls des virtuellen Teilchens, (d.h. des Gluons) der Reaktion<sup>21</sup>

$$e^-(p_1)q(\xi P) \rightarrow e^-(p_2)q(p_4)\gamma(p_5) \quad (55)$$

in  $d$  Dimensionen gilt in lorentzinvarianter Notation

$$\begin{aligned} d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(3+1)} &= d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(3+1)}((p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0) \\ &= \frac{(2\pi)^d}{\mu^{(d-4)}} \delta^d(p_1 + \xi P - p_2 - p_4 - p_5) \left( \prod_{i \in \{2,4,5\}} \frac{d^d p_i \mu^{(4-d)} \delta(p_i^2 - m_i^2)}{(2\pi)^{(d-1)}} \right) \frac{d^d p_6 \mu^{(4-d)}}{(2\pi)^d} \quad (56) \\ &= d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(3)}((p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0) \frac{d^d p_6 \mu^{(4-d)}}{(2\pi)^d}. \end{aligned}$$

### 5.4.3 Normalform der Tensorintegrale

Durch Verschiebung um einen beliebigen Vektor  $p$  ( $p_6 \rightarrow p_6 + p$ ) oder Spiegelung der Integrationsvariable ( $p_6 \rightarrow -p_6$ ) lassen sich alle auftretenden Tensorintegrale auf eine der folgenden Normalformen bringen. Diese Normalformen hängen von der Renormierungsskala  $\mu$ , einem

<sup>20</sup>Die angegebene Darstellung erleichtert die spätere Diskussion des Phasenraumes der reellen Korrekturen.  
<sup>21</sup>Die entsprechenden Formeln für einlaufendes Antiquark ergeben sich analog.

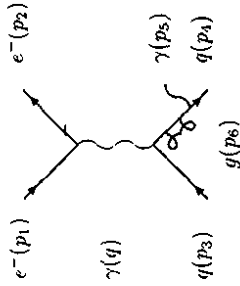


Abbildung 21:  $e^- q \rightarrow e^- q \gamma$  mit 2-Punkt-QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Quark

infinitesimalen Imaginärteil  $i\eta$ , masselosen Impulsen  $k_1, k_2, k_3 \in \{p_3, p_4, p_5\}$  und einem Impuls  $k \in \{p_3, p_4, p_5, p_4 + p_5, -p_3 + p_4, -p_3 + p_5\}$  ohne Massenschalenbedingung<sup>22</sup> ab. Bei der Berechnung der Schleifendiagramme treten die 2-Punkt-Integrale als skalare Integrale oder Tensoren 1. Stufe auf:

$$I_{20}(k) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{1}{(p_6 - k)^2 + i\eta}, \quad (57)$$

$$I_{21}^\mu(k) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{p_6^\mu}{(p_6 - k)^2 + i\eta}.$$

Die 3-Punkt-Integrale treten zusätzlich als Tensoren 2. Stufe auf:

$$I_{30}(k, k_1) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{1}{(p_6 - k)^2 + i\eta} \frac{1}{(p_6 - k - k_1)^2 + i\eta}, \quad (58)$$

$$I_{31}^\mu(k, k_1) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{p_6^\mu}{(p_6 - k)^2 + i\eta} \frac{1}{(p_6 - k - k_1)^2 + i\eta},$$

$$I_{32}^{\mu\nu}(k, k_1) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{p_6^\mu p_6^\nu}{(p_6 - k)^2 + i\eta} \frac{1}{(p_6 - k - k_1)^2 + i\eta}.$$

<sup>22</sup>Für  $k^2 = 0$  gilt stets  $I_{20}(k) = I_{21}(k) = 0$ .

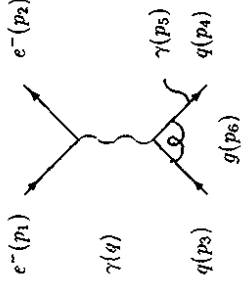


Abbildung 22:  $e^- q \rightarrow e^- q \gamma$  mit 3-Punkt-QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Quark

Die 4-Punkt-Integrale gibt es als Tensoren bis zur 3. Stufe:

$$I_{40}(k_1, k_2, k_3) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{1}{(p_6^2 + i\eta)((p_6 + k_1)^2 + i\eta)((p_6 - k_2)^2 + i\eta)((p_6 - k_2 - k_3)^2 + i\eta)},$$

$$I_{41}^\mu(k_1, k_2, k_3) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{p_6^\mu}{(p_6^2 + i\eta)((p_6 + k_1)^2 + i\eta)((p_6 - k_2)^2 + i\eta)((p_6 - k_2 - k_3)^2 + i\eta)},$$

$$I_{42}^{\mu\nu}(k_1, k_2, k_3) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{p_6^\mu p_6^\nu}{(p_6^2 + i\eta)((p_6 + k_1)^2 + i\eta)((p_6 - k_2)^2 + i\eta)((p_6 - k_2 - k_3)^2 + i\eta)},$$

$$I_{43}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d p_6 \frac{p_6^\mu p_6^\nu p_6^\rho}{(p_6^2 + i\eta)((p_6 + k_1)^2 + i\eta)((p_6 - k_2)^2 + i\eta)((p_6 - k_2 - k_3)^2 + i\eta)}. \quad (59)$$

#### 5.4.4 Reduktion der Tensorintegrale

Aus Gründen der Lorentzinvarianz und der Symmetrie unter Vertauschung der Indizes lassen sich die tensoriellen Integrale  $I_{mn}(\dots)$ , wie schon in [PV79] gezeigt, mit Hilfe von skalaren Integralen  $I_{mn,i}(\dots)$  und Tensoren  $v_i^\mu, v_i^\nu$  und  $v_i^{\mu\nu}$  darstellen:

$$I_{21}^\mu(k) = \sum_{i \in V_1(k)} I_{21,i}(k) v_i^\mu, \quad (60)$$

Dabei ist  $V_n(k_1, \dots, k_m)$  die Menge aller symmetrischen Tensoren der Stufe  $n$ , die sich mit den Vektoren  $k_1$  bis  $k_m$  aufbauen lassen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 V_1(k_1) &= \{k_1^\mu\}, \\
 V_1(k_1, k_2) &= \{k_1^\mu, k_2^\mu\}, \\
 V_1(k_1, k_2, k_3) &= \{k_1^\mu, k_2^\mu, k_3^\mu\}, \\
 V_2(k_1, k_2) &= \{g^{\mu\nu}, \\
 &\quad k_1^\mu k_1^\nu, k_2^\mu k_2^\nu, \\
 &\quad k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu\}, \\
 V_2(k_1, k_2, k_3) &= \{g^{\mu\nu}, \\
 &\quad k_1^\mu k_1^\nu, k_2^\mu k_2^\nu, k_3^\mu k_3^\nu, \\
 &\quad k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu, k_1^\mu k_3^\nu + k_3^\mu k_1^\nu, k_2^\mu k_3^\nu + k_3^\mu k_2^\nu\}, \\
 V_3(k_1, k_2, k_3) &= \{g^{\mu\nu} k_1^\rho + g^{\mu\rho} k_1^\nu + g^{\nu\rho} k_1^\mu, \\
 &\quad g^{\mu\nu} k_2^\rho + g^{\mu\rho} k_2^\nu + g^{\nu\rho} k_2^\mu, \\
 &\quad g^{\mu\nu} k_3^\rho + g^{\mu\rho} k_3^\nu + g^{\nu\rho} k_3^\mu, \\
 &\quad k_1^\mu k_1^\nu k_1^\rho, k_2^\mu k_2^\nu k_2^\rho, k_3^\mu k_3^\nu k_3^\rho, \\
 &\quad k_1^\mu k_1^\nu k_2^\rho + k_1^\mu k_2^\nu k_1^\rho + k_2^\mu k_1^\nu k_1^\rho + k_1^\mu k_2^\nu k_2^\rho + k_2^\mu k_1^\nu k_2^\rho + k_3^\mu k_1^\nu k_1^\rho, \\
 &\quad k_2^\mu k_2^\nu k_1^\rho + k_2^\mu k_1^\nu k_2^\rho + k_1^\mu k_2^\nu k_2^\rho + k_2^\mu k_3^\nu k_3^\rho + k_3^\mu k_2^\nu k_3^\rho + k_3^\mu k_3^\nu k_2^\rho, \\
 &\quad k_1^\mu k_2^\nu k_3^\rho + k_2^\mu k_1^\nu k_3^\rho + k_3^\mu k_2^\nu k_1^\rho + k_2^\mu k_3^\nu k_1^\rho + k_3^\mu k_1^\nu k_2^\rho + k_3^\mu k_2^\nu k_1^\rho\}.
 \end{aligned} \tag{63}$$

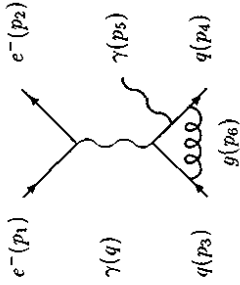


Abbildung 23:  $e^-q \rightarrow e^-q\gamma$  mit 4-Punkt-QCD-Schleife und Photonbremsstrahlung am Quark

$$\begin{aligned}
 I_{31}^\mu(k, k_1) &= \sum_{v_i \in V_1(k, k_1)} I_{31,i}(k, k_1) v_i^\mu, \\
 I_{32}^{\mu\nu}(k, k_1) &= \sum_{v_i \in V_2(k, k_1)} I_{32,i}(k, k_1) v_i^{\mu\nu}, \\
 I_{41}^\mu(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{v_i \in V_1(k_1, k_2, k_3)} I_{41,i}(k_1, k_2, k_3) v_i^\mu, \\
 I_{42}^{\mu\nu}(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{v_i \in V_2(k_1, k_2, k_3)} I_{42,i}(k_1, k_2, k_3) v_i^{\mu\nu}, \\
 I_{43}^{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{v_i \in V_3(k_1, k_2, k_3)} I_{43,i}(k_1, k_2, k_3) v_i^{\mu\nu\rho}.
 \end{aligned} \tag{61}$$

Zwischen den Tensorintegralen und den skalaren Integralen besteht dabei die Beziehung<sup>23</sup>

$$I_{mn}(\dots) \cdot v_i = \sum_{v_j \in V_n(\dots)} (v_i \cdot v_j) I_{mn,j}(\dots). \tag{64}$$

Terme der Form  $I_{mn}(\dots) \cdot v_i$  lassen sich, da sie mindestens einmal dasselbe Skalarprodukt in Zähler und Nenner enthalten, im Tensorgrad oder in der Anzahl der Faktoren im Nenner reduzieren. Durch rekursive Anwendung der Reduktion lassen sich alle Terme der Form  $I_{mn}(\dots) \cdot v_i$  auf skalare Integrale reduzieren. Die gesuchten skalaren Integrale  $I_{mn,j}(\dots)$  erhält man durch Lösung des Gleichungssystems (64). Die dabei benötigte Inversion der Matrix  $M_{ij} = (v_i \cdot v_j)$  gestaltet sich in 4 – 2ε Dimension auch mit Methoden der Computer-Algebra schwierig. Diesem

<sup>23</sup>“·” drückt die Kontraktion aller Lorentzindizes aus.

Problem entgeht man mit einer Reihenentwicklung in  $\epsilon$ , die die Inversion der Matrix in  $4 - 2\epsilon$  Dimensionen auf eine Inversion in 4 Dimensionen zurückführt. Bei Tensorintegralen dritter Stufe können die  $v_i$  höchstens einmal den Tensor  $g_{\mu\nu}$  enthalten. Somit enthält  $M$  nur Terme der Ordnungen  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$  und  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ :

$$M = M_0 + \epsilon M_1 \quad (65)$$

Da die verbleibenden skalaren Integrale höchstens  $\epsilon^{-2}$ -Pole haben, wird die invertierte Matrix bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  benötigt:

$$M^{-1} = M_0^{-1} - \epsilon M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} + \epsilon^2 M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (66)$$

Die Resultate dieser Rechnung sind zu lang, um sie hier anzugeben. Als Ergebnis der Reduktion können alle Tensorintegrale durch die drei skalaren Integrale  $I_{20}$ ,  $I_{30}$  und  $I_{40}$  ausgedrückt werden.

#### 5.4.5 Skalare Integrale

Die skalaren Integrale<sup>24</sup> ergeben sich nach [KL83, Gra90]<sup>25</sup>:

$$\begin{aligned} I_{20}(k) &= C(\epsilon + 2\epsilon^2) \left( \frac{k^2 + i\eta}{q^2 + i\eta} \right)^{-\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon), \\ I_{30}(k, k_1) &= C \frac{1}{2kk_1} \left[ \left( \frac{k^2 + 2kk_1 + i\eta}{q^2 + i\eta} \right)^{-\epsilon} - \left( \frac{k^2 + i\eta}{q^2 + i\eta} \right)^{-\epsilon} \right] + \mathcal{O}(\epsilon), \\ I_{40}(k_1, k_2, k_3) &= C \frac{2}{q^4 y_{12} y_{23}} \left[ 1 - \epsilon (\ell(y_{12}) + \ell(y_{23})) + \epsilon^2 \left( \frac{1}{2} \ell^2(y_{12}) + \frac{1}{2} \ell^2(y_{23}) + R(y_{12}, y_{23}) \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (67)$$

<sup>24</sup>Die Integrale sind von  $q^2$  unabhängig, da sich die  $q^2$ -Terme herauskürzen.  $q^2$  wurde in die Formeln eingeführt, um beim Übergang auf die Variablen  $y_{ij}$  die infinitesimalen Imaginärteile leicht berücksichtigen zu können.

<sup>25</sup>Die in [Gra90] angegebene 4-Punkt-Funktion leidet unter zwei Druckfehlern. Erstens muß in allen Termen  $y_{12}$  durch  $y_{23}$  ersetzt werden. Zweitens muß der erste Term der R-Funktion  $\ell(x)\ell(y)$  lauten. Diese Druckfehler wurden in [Gra04a] korrigiert.

Dabei ist

$$\begin{aligned} C &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{i\pi^2 \Gamma(1+\epsilon) \Gamma^2(1-\epsilon)}{\epsilon^2 \Gamma(1-2\epsilon)} (-q^2 - i\eta)^{-\epsilon}, \\ q^2 &= (k_1 + k_2 + k_3)^2, \\ y_{ij} &= \frac{2k_i k_j}{q^2}. \end{aligned} \quad (68)$$

$$R(x, y) = \ell(x)\ell(y) - \ell(x)\ell(1-x) - \ell(y)\ell(1-y) - S(x) - S(y) - \zeta(2).$$

Da  $I_{40}(k_1, k_2, k_3)$  nur für  $k_1 = -p_3$ ,  $k_2 = p_4$ ,  $k_3 = p_5$  benötigt wird, entspricht diese Definition von  $q^2$  der Definition von  $q^2$  aus Abschnitt 2.  $\ell$  und  $S$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \lim_{\eta \searrow 0} \ln(x + \text{sign}(q^2) \text{sign}(1-x) i\eta), \\ S(x) &= \lim_{\eta \searrow 0} \mathcal{L}_2(x + \text{sign}(q^2) \text{sign}(1-x) i\eta). \end{aligned} \quad (69)$$

Der Dilogarithmus  $\mathcal{L}_2$  ist definiert durch

$$\mathcal{L}_2(x) = - \int_0^x dz \frac{\ln(1-z)}{z}. \quad (70)$$

## 5.5 Analytisch berechnete Endzustandssingularitäten

Die analytisch berechneten Anteile der Endzustandssingularitäten treten bei der Integration von Baumgraphendiagrammen nach Art der Abbildungen 10 bis 13 über einen Bereich des Phasenraumes auf, in dem zwei Teilchen im Endzustand nicht mehr trennbar sind und der Integrand singularär wird. Als Kriterium, wann zwei Teilchen im Endzustand nicht mehr trennbar sind, wird der  $y$ -Schnitt gemäß Abschnitt 2.5.3 verwendet. Die Berechnung der reellen Korrekturen erfolgt — in Anlehnung an [Gva90, BK92] — unter Vernachlässigung von Termen, die für verschwindenden  $y$ -Schnitt gegen 0 gehen. Die Berechnung der reellen Korrekturen erfolgt in der vorliegenden Arbeit mit einer neuen Methode angelehnt an die Vorgehensweise bei den virtuellen Korrekturen. Im ersten Schritt werden die Matrixelemente der Baumgraphendiagramme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s)$  für die Berechnung der Endzustandssingularitäten vorbereitet. Dabei müssen Terme bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2 = (\frac{d-4}{2})^2)$  berücksichtigt werden, da bei den Bremsstrahlungintegralen  $\epsilon^{-2}$ -Pole auftreten und das Ergebnis im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$ , d.h. bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ , berechnet werden soll. Im nächsten Schritt wird der Phasenraum für diese Matrixelemente angegeben und — analog zu dem Produkt aus Phasenraumes und Integration über den Impuls des virtuellen Teilchens nach Gleichung (56) — in einen  $\bar{v}p \rightarrow e^{-\gamma(1+1)}$  Jets-Phasenraum (in  $d$  Dimensionen) und einen 2-Teilchen-Phasenraum für die analytisch durchzuführende Bremsstrahlungsintegration faktorisiert. Im nächsten Schritt werden die bei der Bremsstrahlungsintegration auftretenden Integrale auf eine Normalform gebracht. In einem weiteren Schritt werden die Tensorintegrale der Normalform auf skalare Integrale reduziert. Zuletzt werden die skalaren Integrale berechnet. Die expliziten Ergebnisse werden im Anhang I angegeben.

### 5.5.1 Matrixelemente und Umformungen im Limes $y_{\text{cut}}^{\text{jet}} \rightarrow 0$

Durch — notfalls mehrfache — Durchführung einer Partialbruchzerlegung nach Gleichung (47) kann man die bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  berechneten Betragsquadrate der Matrixelemente so umformen, daß sie bezüglich der Endzustandssingularität  $p_4 p_6$  bei einlaufendem Quark<sup>26</sup> nur noch einen Pol besitzen. Für einlaufendes Gluon gibt es keine Endzustandssingularitäten im Rahmen dieser Rechnung, da bei einlaufendem Gluon — wie die Abbildungen 12 und 13 zeigen — nur QCD-Anfangszustandssingularitäten auftreten. In den Summanden des Betragsquadrates

<sup>26</sup>Die entsprechenden Formeln für einlaufendes Antiquark ergeben sich analog.

des Matrixelementes mit dem Pol in  $p_4 p_6$  wird zuerst entweder  $p_4$  oder  $p_6$  unter Einführung des neuen Impulses  $p = p_4 + p_6$  eliminiert. Dieser neue Impuls hat die anschauliche Bedeutung des Jet-Impulses des aus den zwei Partonen zusammengesetzten Jets. Der verbleibende Impuls (d.h.  $p_4$  bzw.  $p_6$ ) wird in  $k$  umbenannt. Die Terme des Betragsquadrates des Matrixelementes haben dann hinsichtlich des auszuintegrierenden Impulses  $k$  folgende allgemeine Struktur ( $p_1, \dots, p_l$  sind beliebige Vektoren, z.B.  $p_3 = -p_3 + p_6$ ,  $c_1, c_2$  sind beliebige Skalare, z.B.  $c_1 = 2p_3 p_6$  oder  $c_1 = 0$ ).  $C$  enthält alle sonstigen Faktoren,  $\frac{1}{p^2}$  ist der Pol.):

$$C \frac{1}{p^2} \frac{(p_1 k)(p_2 k) \dots}{(2p_k k + c_k)(2p_l k + c_l) \dots} \quad (71)$$

Dabei deuten die Punkte weitere Faktoren im Zähler oder Nenner mit der Integrationsvariable  $k$  an. Diese Terme sollen in eine Normalform überführt werden, die im Nenner jeweils nur einen Faktor mit der Integrationsvariablen  $k$  enthält. Die dafür notwendig Näherung für zwei Impulse  $p_i, p_j$  im Grenzwert  $y_{\text{cut}}^{\text{jet}} \rightarrow 0$ , d.h. wie Abschnitt 5.5.6 zeigt im Grenzwert  $p^2 \rightarrow 0$ , wird unter Berücksichtigung von  $(pk) = \frac{p^2}{2}$  im Anhang B hergeleitet und lautet:

$$pp, kp_j = pp_j kp_i + \mathcal{O}(\sqrt{p^2}). \quad (72)$$

Mit dieser Näherung läßt sich jedes Paar von Nennern mit höchstens einem singulären Faktor folgendermaßen umformen:

$$\frac{1}{2p_i k + c_i} \frac{1}{2p_j k + c_j} = \frac{1}{2p_i p_j - c_i} \frac{1}{2p_j p - c_j} + \frac{2p_j p}{2p_i k + c_j} + \frac{1}{2p_j p - 2c_j p_i} + \mathcal{O}(\sqrt{p^2}). \quad (73)$$

Als Resultat einer derartigen (notfalls mehrfachen) Umformung erhält man Terme, deren Nenner nur in einem Faktor die Integrationsvariable  $k$  enthält. Diese Schritte seien beispielhaft am Term

$$T = \frac{1}{(p_3 - p_6)^2 - (p_4 + p_6)^2} \cdot \frac{1}{(p_3 - p_5 - p_6)^2} \quad (74)$$

erläutert. Dieser Term ergibt sich als ein Summand aus der Partialbruchzerlegung der Interferenz von Photon- und Gluonabstrahlung vom einlaufenden Quark (Propagatorfaktor proportional zu  $\frac{1}{(p_1 - p_3)^2 (p_3 - p_5 - p_6)^2}$ ) und einer Gluonabstrahlung vom auslaufenden Quark bei Photonabstrahlung vom Elektron (Propagatorfaktor proportional zu  $\frac{1}{(p_4 + p_6)^2}$ ). Nach Einführung der



Abbildung 24: Phasenraumfaktorisierung für Endzustandsingularitäten

Impulse  $p$  und  $k$  erhält man

$$T = \frac{1}{(p_3 - k)^2 - p^2} \cdot \frac{1}{(p_3 - p_5 - k)^2} \quad (75)$$

$$= \frac{1}{2p_3 k + p^2} \cdot \frac{1}{2(p_3 - p_5)k + 2p_3 p_5}$$

Durch Anwendung von Gleichung (73) folgt weiter

$$T = \frac{1}{2p_3 k + p^2} \cdot \frac{2pp_3}{2p_3 p_5 \times 2pp_3 - p^2 \times 2p(p_3 - p_5)} + \frac{1}{2(p_3 - p_5)k + 2p_3 p_5} \cdot \frac{2p(p_3 - p_5)}{p^2 \times 2p(p_3 - p_5) - 2p_3 p_5 \times 2pp_3} + \mathcal{O}(\sqrt{p^2}) \quad (76)$$

Da der jeweils zweite Faktor nicht singulär wird, können dort Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(p^2)$  vernachlässigt werden und man erhält

$$T = \frac{1}{2p_3 k + p^2} \cdot \frac{1}{2p_3 p_5} + \frac{1}{2(p_3 - p_5)k + 2p_3 p_5} \cdot \frac{-2p(p_3 - p_5)}{2p_3 p_5 \times 2pp_3} + \mathcal{O}(\sqrt{p^2}). \quad (77)$$

Der Term  $T$  ist somit in mehrere Summanden überführt worden, deren Nenner nur in jeweils einem Faktor die Integrationsvariable  $k$  enthält. Damit ist die Normalform des Integranden erreicht.

### 5.5.2 Faktorisierung des Phasenraumes

Um die Endzustandsingularitäten zu berechnen, ist es nötig, den Phasenraum der Reaktion<sup>27</sup>

$$e^-(p_1)q(\xi P) \rightarrow e^-(p_2)q(p_4)\gamma(p_5)g(p_6) \quad (78)$$

— wie in Gleichung (42) angegeben — in der Näherung  $y_{\text{cut}}^{\text{jet}} \rightarrow 0$  auf den Phasenraum der Reaktion

$$e^-(p_1)q(\xi P) \rightarrow e^-(p_2)q(p_4)\gamma(p_5) \quad (79)$$

zurückzuführen. Für den Phasenraum nebst  $\xi$ -Integration gilt dabei gemäß Abbildung 24 die Formel:

$$\begin{aligned} \int d\xi d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(4)} &= \int d\xi d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(4)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) \\ &= \int d\xi \frac{(2\pi)^d}{\mu^{(d-4)}} \delta^d(p_1 + \xi P - p_2 - p_4 - p_5 - p_6) \left( \prod_{i \in \{2,4,5,6\}} \frac{d^d p_i \mu^{(4-i)} \delta(p_i^2 - m_i^2)}{(2\pi)^{(d-1)}} \right) \\ &= \int d\xi \int_{p_{\text{min}}^2}^{p_{\text{max}}^2} \frac{d^d p}{2\pi} d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(3)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_5^2 = 0, p^2 \right) \\ &\quad \cdot d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(2)} \left( p^2, m_4^2 = 0, m_6^2 = 0 \right). \end{aligned} \quad (80)$$

Dabei ist  $d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(3)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_5^2 = 0, p^2 \right)$  der Phasenraum für  $e^- p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets mit einem massiven Jet der Masse  $\sqrt{p^2}$ . Für die Grenzen der  $p^2$ -Integration gilt im masselosen Fall

$$\begin{aligned} p_{\text{min}}^2 &= 0, \\ p_{\text{max}}^2 &= (p_1 + \xi P)^2. \end{aligned} \quad (81)$$

Für den 2-Teilchen-Phasenraum gilt im masselosen Fall mit  $k = p_4$  oder  $k = p_6$

$$d\text{PS}_{d,\text{dim}}^{(2)} \left( p^2, m_4^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) = \frac{\mu^{4-d} d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2)}{(2\pi)^{d-2}}. \quad (82)$$

<sup>27</sup>Die entsprechenden Formeln für einlaufendes Antiquark ergeben sich analog.



$p$  hat die anschauliche Bedeutung des Jet-Impulses des aus den zwei Partonen 4 und 6 zusammengesetzten Jets. Da analytisch nur über das Gebiet  $A$  aus Abbildung 16, in dem die Impulse der Partonen  $p_4$  und  $p_6$  gemäß dem Kriterium des  $y$ -Schnittes nicht trennbar sind, integriert werden soll, ist die Obergrenze der  $p^2$ -Integration einerseits durch den  $y$ -Schnitt und seine Massenskala  $M_{Cu}^2$  gegeben:

$$(p_4 + p_6)^2 = p^2 \leq y_{Cu}^{4s} M_{Cu}^2. \quad (83)$$

Andererseits muß für alle weiteren beteiligten Impulse  $p_i, p_j \in \{p_1, p_2, p_3, p_5\}$  die Gram-Determinanten-Bedingung (siehe Anhang A)

$$\Delta(p, p_i, p_j) \geq 0 \quad (84)$$

erfüllt werden. Dabei ist es nicht notwendig den Proton-Impuls  $P$  und den Impuls des Remnant-Jets  $R$  zu berücksichtigen, da der Impuls des einlaufenden Quarks  $p_3$  direkt proportional zu  $P$  und  $R$  ist.  $C_F^{4s}$ , die Obergrenze der  $p^2$ -Integration bei Endzustandsingularitäten, ist somit durch

$$C_F^{4s} = \min(y_{Cu}^{4s} M_{Cu}^2, 2 \frac{pp_1 pp_2}{p_i p_j}) \quad (85)$$

gegeben. Durch Entwicklung des Phasenraumfaktors in Potenzen von  $\sqrt{p^2}$  und Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung (diese Näherung wird im Abschnitt 5.5.6 begründet) erhält man die Näherung

$$\begin{aligned} \int d\xi d\text{PS}_{d,d,m}^{(4)} &= \int d\xi d\text{PS}_{d,d,m}^{(4)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) \\ &= \int d\xi d\text{PS}_{d,d,m}^{(3)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_5^2 = 0, p^2 \right)_{p^2=0} \\ &\quad \int_0^{C_F^{4s}} \frac{dq^2}{2\pi} d\text{PS}_{d,d,m}^{(2)} \left( p^2, m_4^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) + \mathcal{O}(y_{Cu}^{4s} M_{Cu}^2) \end{aligned} \quad (86)$$

und somit die benötigte Faktorisierung des Phasenraumes.

### 5.5.3 Normalform der Tensorintegrale

Nach Vorbereitung des Matrixelementes und Faktorisierung des Phasenraumes kann man die verbleibenden Integrale auf folgende Normalformen bringen:

$$\begin{aligned} J_{60}(p) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2), \\ J_{61}^\mu(p) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) k^\mu, \\ J_{62}^{\mu\nu}(p) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) k^\mu k^\nu, \end{aligned} \quad (87)$$

$$J_{63}^{\mu\nu\rho}(p) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) k^\mu k^\nu k^\rho,$$

$$J_{64}^{\mu\nu\rho\sigma}(p) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma$$

oder

$$\begin{aligned} J_{10}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) \frac{1}{(r-k)^2 - m^2}, \\ J_{11}^\mu(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) \frac{k^\mu}{(r-k)^2 - m^2}, \\ J_{12}^{\mu\nu}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) \frac{k^\mu k^\nu}{(r-k)^2 - m^2}, \\ J_{13}^{\mu\nu\rho}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(r-k)^2 - m^2}, \\ J_{14}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p-k)^2) \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{(r-k)^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (88)$$

$r$  ist in diesen Formeln ein beliebiger Vektor, z.B.  $p_s$ .  $m$  ist ein beliebiger Skalar<sup>28</sup>, z.B.  $\sqrt{p^2}$ .

<sup>28</sup>Das Argument  $m$  der Funktion tritt in den Funktionen  $J$  stets quadriert auf.

### 5.5.4 Reduktion der Tensorintegrale

Aus Gründen der Lorentzinvarianz und der Symmetrie unter Vertauschung der Indizes lassen sich — in Anlehnung an Abschnitt 5.4.4 — die Tensorintegrale  $J_{0n}(p)$  und  $J_{1n}(p, r, m)$  mit Hilfe von skalaren Integralen  $J_{0n,i}(p)$ ,  $J_{1n,i}(p, r, m)$  und Tensoren  $v_i^\mu$ ,  $v_i^{\mu\nu}$  und  $v_i^{\mu\nu\rho}$  darstellen:

$$\begin{aligned} J_{01}^{\mu\nu}(p) &= \sum_{v_i \in V_1(p)} J_{01,i}(p) v_i^\mu v_i^\nu, \\ J_{02}^{\mu\nu}(p) &= \sum_{v_i \in V_2(p)} J_{02,i}(p) v_i^{\mu\nu}, \\ J_{03}^{\mu\nu\rho}(p) &= \sum_{v_i \in V_3(p)} J_{03,i}(p) v_i^{\mu\nu\rho}, \end{aligned} \quad (89)$$

$$J_{04}^{\mu\nu\rho\sigma}(p) = \sum_{v_i \in V_4(p)} J_{04,i}(p) v_i^{\mu\nu\rho\sigma}$$

bzw.

$$\begin{aligned} J_{11}^{\mu\nu}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_1(p,r)} J_{11,i}(p, r, m) v_i^\mu v_i^\nu, \\ J_{12}^{\mu\nu}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_2(p,r)} J_{12,i}(p, r, m) v_i^{\mu\nu}, \\ J_{13}^{\mu\nu\rho}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_3(p,r)} J_{13,i}(p, r, m) v_i^{\mu\nu\rho}, \\ J_{14}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_4(p,r)} J_{14,i}(p, r, m) v_i^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (90)$$

Die Definition der  $V_n$  entspricht dabei der aus Abschnitt 5.4.4. Zwischen den Tensorintegralen und den skalaren Integralen besteht — analog zu den Tensorintegralen der virtuellen Korrekturen — die Beziehung

$$J_{mn}(p, \dots) \cdot v_i = (v_i \cdot v_j) J_{mn,j}(p, \dots). \quad (91)$$

Da die verbleibenden skalaren Integrale höchstens  $\epsilon^{-2}$ -Pole besitzen, müssen bei der Lösung des Gleichungssystems (91) — wie schon bei den virtuellen Korrekturen — nur Terme bis

zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  berücksichtigt werden. Außerdem werden alle Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(p^2)$  vernachlässigt. Als Ergebnis der Reduktion erhält man:

$$\begin{aligned} J_{01}^{\mu\nu}(p) &= p^\mu J_{00}(p) \frac{1}{2}, \\ J_{02}^{\mu\nu}(p) &= p^\mu p^\nu J_{00}(p) \frac{18+3\epsilon+2\epsilon^2}{54}, \\ J_{03}^{\mu\nu\rho}(p) &= p^\mu p^\nu p^\rho J_{00}(p) \frac{9+3\epsilon+2\epsilon^2}{36}, \\ J_{04}^{\mu\nu\rho\sigma}(p) &= p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma J_{00}(p) \frac{900+435\epsilon+299\epsilon^2}{4500} \end{aligned} \quad (92)$$

bzw.

$$\begin{aligned} J_{11}^{\mu\nu}(p, r, m) &= +\frac{p^\mu}{2pr} J_{00}(p)(-1) \\ &\quad +\frac{p^\mu}{2pr} J_{10}(p, r, m)(r^2 - m^2), \\ J_{12}^{\mu\nu}(p, r, m) &= +\frac{p^\mu p^\nu}{(2pr)^2} J_{00}(p)(m^2 - pr - r^2) \\ &\quad +\frac{p^\mu p^\nu}{(2pr)^2} J_{10}(p, r, m)(r^2 - m^2)^2, \\ J_{13}^{\mu\nu\rho}(p, r, m) &= +\frac{p^\mu p^\nu p^\rho}{(2pr)^3} J_{00}(p)(m^2 - pr - r^2)(r^2 - m^2) \\ &\quad +\frac{p^\mu p^\nu p^\rho}{(2pr)^3} J_{00}(p)(2pr)^2 \frac{18+3\epsilon+2\epsilon^2}{54} \\ &\quad +\frac{p^\mu p^\nu p^\rho}{(2pr)^3} J_{10}(p, r, m)(r^2 - m^2)^3, \\ J_{14}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r, m) &= +\frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(2pr)^4} J_{00}(p)(m^2 - pr - r^2)(r^2 - m^2)^2 \\ &\quad +\frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(2pr)^4} J_{00}(p)(2pr)^2 (r^2 - m^2) \frac{18+3\epsilon+2\epsilon^2}{54} \\ &\quad +\frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(2pr)^4} J_{00}(p)(2pr)^3 \frac{9+3\epsilon+2\epsilon^2}{36} \\ &\quad +\frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(2pr)^4} J_{10}(p, r, m)(r^2 - m^2)^4. \end{aligned} \quad (93)$$

Nach Durchführung dieser Reduktion verbleiben die skalaren Integrale  $J_{00}(p)$  und  $J_{10}(p, r, \sqrt{p^2})$  mit  $r^2 = 0$ . Das Argument  $m = \sqrt{p^2}$  wird dabei in der Funktion  $J_{10}$  nur als  $m^2 = p^2$  benötigt.

### 5.5.5 Skalare Integrale

Eine relativistisch invariante  $d$ -dimensionale Integration des Impulses  $k$  kann bei  $m (m + 1 \leq d)$  extern vorgegebenen Impulsen  $p_1, \dots, p_m$  mit der im Anhang C angegebenen Formel

$$\int d^d k = \int d(k^2) d(k p_1) \cdots d(k p_m) \frac{\pi^{\frac{d-m}{2}}}{\Gamma(\frac{d-m}{2})} \frac{[(-1)^m \Delta(k, p_1, \dots, p_m)]^{\frac{d-m}{2}}}{[(-1)^{m-1} \Delta(p_1, \dots, p_m)]^{\frac{d-m-1}{2}}} \quad (94)$$

auf eine Integration mit den Integrationsvariablen  $k^2$  und  $k p_i$  zurückgeführt werden. Der kinematisch erlaubte Integrationsbereich der Variablen  $k p_i$  bis  $k p_m$  ist dabei durch die Bedingung

$$(-1)^m \Delta(k, p_1, \dots, p_m) \geq 0 \quad (95)$$

gegeben. Mit Hilfe dieser Formeln ergibt sich für  $r^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} J_{00}(p) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}-\epsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\epsilon)} \left[ \frac{1}{4} \right]^{1-\epsilon} [p^2]^{-\epsilon}, \\ J_{10}(p, r, \sqrt{p^2}) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}-\epsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\epsilon)} \left[ \frac{1}{4} \right]^{1-\epsilon} [p^2]^{-\epsilon} \frac{-2^{\epsilon} \Gamma(1, 1-\epsilon, 2-2\epsilon, \frac{2pr}{p^2})}{p^2}. \end{aligned} \quad (96)$$

Durch  $p^2$ -Integration dieser Terme mit Entwicklung in  $\epsilon$  erhält man:

$$\begin{aligned} J_0(\epsilon^{1/4}) &= \int_0^{C_F^{\epsilon^4}} \frac{dp^2}{2\pi} \frac{1}{p^2} J_{00}(p) \\ &= -\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon^2 \Gamma(6\pi^2 \Gamma(1-2\epsilon))} \left( \frac{-q^2}{4\pi \mu^2} \right)^{-\epsilon} (1 + \epsilon^2 \zeta(2)) \\ &\quad \cdot (\epsilon + 2\epsilon^2) \left( \frac{C_F^{\epsilon^4}}{-q^2} \right)^{-\epsilon} \\ &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ J_1(\epsilon^{1/4}, 2pr) &= \int_0^{C_F^{\epsilon^4}} \frac{dp^2}{2\pi} \frac{1}{p^2} J_{10}(p, r, \sqrt{p^2}) \\ &= -\frac{1}{2pr \epsilon^2 \Gamma(6\pi^2 \Gamma(1-2\epsilon))} \left( \frac{-q^2}{4\pi \mu^2} \right)^{-\epsilon} (1 + \epsilon^2 \zeta(2)) \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2} \ln \left( \frac{2pr}{-q^2} \right) + \frac{\epsilon^2}{4} \ln \left( \frac{2pr}{-q^2} \right) - \frac{\epsilon^2}{4} \pi^2 \right. \\ &\quad \left. - \epsilon^2 \mathcal{L}_2 \left( -\frac{C_F^{\epsilon^4}}{2pr} \right) - \frac{\epsilon^2}{2} \ln \left( \frac{C_F^{\epsilon^4}}{2pr} \right)^2 \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (97)$$

Damit ist gezeigt worden, wie Endzustandsingularitäten manifest invariant berechnet werden können. Es verbleibt, die Begründung für die Entwicklung in  $\sqrt{p^2}$  nachzutragen.

### 5.5.6 Begründung der Näherung

Bei den Umformungen des Matrixelementes und des Phasenraumes wurde in  $\sqrt{p^2}$  entwickelt und nur jeweils führende Term berücksichtigt. D.h., es wurden Terme der Form  $\int_0^{C_F^{\epsilon^4}} \frac{dp^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2}} J_{00}(p)$  bzw.  $\int_0^{C_F^{\epsilon^4}} \frac{dp^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2}} J_{10}(p, r, \sqrt{p^2})$  vernachlässigt. Um die Wirkung<sup>29</sup> der Näherung zu bestimmen

<sup>29</sup>Diese Kontrollrechnung wurde nur zur Bestätigung des allgemeinen Formalismus durchgeführt. Die Entwicklung in  $\sqrt{p^2}$  unter Vernachlässigung der nicht-führenden Terme ist integraler Bestandteil des vorgestellten Formalismus. Eine Berechnung der nicht-führenden Terme wurde nicht vorgenommen.

men, sollen diese beiden Terme in 4 Dimensionen ausgewertet werden. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{C_F^{1n}} \frac{dp^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2}} J_{00}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \left[ \frac{1}{4} \right] 2\sqrt{C_F^{1n}}, \\
 \int_0^{C_F^{1n}} \frac{dp^2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2}} J_{10}(p, r, \sqrt{p^2}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \left[ \frac{1}{4} \right] 2\sqrt{C_F^{1n}} \\
 &\cdot \left[ \ln \left( \frac{C_F^{1n}}{C_F^{1n} + 2pr} \right) - 2\sqrt{\frac{2pr}{C_F^{1n}}} \arctan \left( \sqrt{\frac{C_F^{1n}}{2pr}} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{98}$$

Diese Terme gehen für  $C_F^{1n} \rightarrow 0$  gegen 0. Dieselbe Argumentation gilt für alle weiteren Terme mit positiven Potenzen von  $\sqrt{p^2}$ . Die Entwicklung des Integranden in Potenzen von  $\sqrt{p^2}$  und Vernachlässigung aller nicht-führenden Terme führt also zur Vernachlässigung von Termen, die für  $C_F^{1n} \rightarrow 0$  verschwinden.

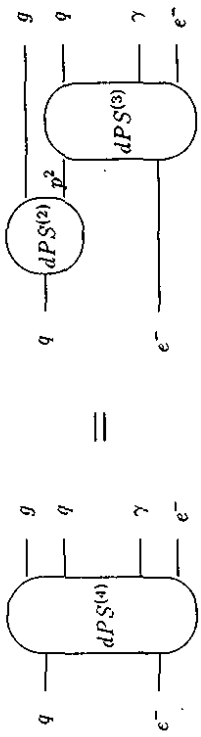


Abbildung 25: Phasenraumfaktorisierung für Anfangszustandsingularitäten

## 5.6 Analytisch berechnete Anfangszustandsingularitäten

Die analytisch berechneten Anteile der Anfangszustandsingularitäten treten bei der Integration von Baumgraphendiagrammen z.B. der Abbildungen 10 bis 13 über den Bereich des Phasenraumes auf, in dem ein Teilchen von den Überresten des einlaufenden Protons, d.h. vom Remnant-Jet, nicht mehr trennbar ist und der Integrand singular wird. Die Berechnung dieser reellen Korrekturen erfolgt angelehnt an die Vorgehensweise bei den Endzustandskorrekturen. Im ersten Schritt werden die Matrixelemente der Baumgraphendiagramme der Ordnung  $\mathcal{O}(c^3\alpha_s)$  für die Berechnung der Anfangszustandsingularitäten vorbereitet und bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(c^2)$  berechnet. Im nächsten Schritt wird der Phasenraum für diese Matrixelemente angegeben und in einen  $c^-p \rightarrow c^-\gamma(1+1)$  Jets-Phasenraum (in  $d$  Dimensionen) und einen 2-Teilchen-Phasenraum für die analytisch durchzuführende Bremsstrahlungsintegration faktorisiert. Im nächsten Schritt werden die bei der Bremsstrahlungsintegration auftretenden Integrale auf eine Normalform gebracht. In einem weiteren Schritt werden die skalaren Integrale der Normalform auf skalare Integrale reduziert. Zuletzt werden die skalaren Integrale berechnet. Diese Rechnungen werden so durchgeführt, daß im Ergebnis alle Terme bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(c^0)$  berücksichtigt werden. Die expliziten Ergebnisse werden im Anhang I angegeben.

### 5.6.1 Matrixelemente und Umformungen im Limes $y_{cut}^{1n} \rightarrow 0$

Durch — notfalls mehrfache — Durchführung einer Partialbruchzerlegung nach Gleichung (47) kann man die bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(c^2)$  berechneten Betragsquadrate der Matrixelemente so umformen, daß sie bei einlaufendem Quark<sup>30</sup> bezüglich der Anfangszustandsingularität  $p_3p_6$  nur noch einen Pol besitzen. In den Summanden des Betragsquadrates des Matrixelementes mit einem Pol in  $p_3p_6$  wird  $p_3$  unter Einführung eines neuen Impulses  $p = p_3 - p_6$  eliminiert. Dieser

<sup>30</sup>Die entsprechenden Formeln für einlaufendes Antiquark bzw. Gluon ergeben sich analog.

neue Impuls hat die anschauliche Bedeutung des effektiven Impulses des einlaufenden Partons. Der verbleibende Impuls (d.h.  $p_k$ ) wird in  $k$  umbenannt. Die Terme des Betragsquadrates des Matrixelementes haben nun hinsichtlich des auszuintegrierenden Impulses  $k$  folgende allgemeine Struktur  $(p_1, \dots, p_l, p_i$  sind beliebige Vektoren, z.B.  $p_i = -p_4 + p_5$ .  $c_i, c_j$  sind beliebige Skalare, z.B.  $c_i = 2p_4 p_5$  oder  $c_i = 0$ .  $C$  enthält alle sonstigen Faktoren.  $\frac{1}{p^2}$  ist der Pol.):

$$C \frac{1}{p^2} \frac{(p_i k)(p_j k) \dots}{(2p_k k + c_k)(2p_l k + c_l) \dots} \quad (99)$$

Dabei deuten die Punkte weitere Faktoren im Zähler oder Nenner mit der Integrationsvariable  $k$  an. Die Umformung dieser Terme auf eine Normalform geschieht wie im vorangegangenen Abschnitt im Grenzwert  $y_{cut}^{lc} \rightarrow 0$ , d.h. wie Abschnitt 5.5.6 zeigt im Grenzwert  $p^2 \rightarrow 0$  unter Berücksichtigung von  $(pk) = -\frac{p^2}{2}$ . Ein Term  $T$  beispielsweise mit

$$T = \frac{1}{(p_4 + p_6)^2 - (p_3 - p_6)^2} \frac{1}{(p_4 + p_5 + p_6)^2} \quad (100)$$

ergibt sich als ein Summand aus der Partialbruchzerlegung der Interferenz einer Photon- und Gluonabstrahlung vom auslaufenden Quark (Propagatorfaktor proportional zu  $\frac{1}{(p_4 + p_6)^2}$  und einer Gluonabstrahlung vom einlaufenden Quark bei Photonabstrahlung vom Elektron (Propagatorfaktor proportional zu  $\frac{1}{(p_3 - p_6)^2}$ ). Dieser Term wird analog zur Behandlung der Endzustandssingularitäten unter Einführung der neuen Impulse  $p$  und  $k$  mit der Näherung aus Anhang B unter Vernachlässigung von Termen, die im Grenzwert  $y_{cut}^{lc} \rightarrow 0$  gegen 0 gehen, umgeformt in

$$T = \frac{1}{2p_4 k - p^2} \cdot \frac{1}{2p_4 p_5} + \frac{1}{2(p_1 + p_5)k + 2p_4 p_5} \cdot \frac{2p(p_4 + p_5)}{-2p_4 p_5 \cdot 2pp_4} + \mathcal{O}(\sqrt{p^2}) \quad (101)$$

Der Term  $T$  ist somit — wie schon bei den Endzustandssingularitäten — in mehrere Summanden überführt worden, deren Nenner nur in jeweils einem Faktor die Integrationsvariable  $k$  enthält. Damit ist die Normalform des Integranden erreicht.

## 5.6.2 Faktorisierung des Phasenraumes

Um die Anfangszustandssingularitäten zu berechnen, ist es nötig, den Phasenraum der Reaktion<sup>31</sup>

$$e^-(p_1)q(\xi P) \rightarrow e^-(p_2)q(p_4)\gamma(p_3)g(p_6) \quad (102)$$

— wie in Gleichung (42) angegeben — in der Näherung  $y_{cut}^{lc} \rightarrow 0$  auf den Phasenraum der Reaktion

$$e^-(p_1)q(\xi P) \rightarrow e^-(p_2)q(p_4)\gamma(p_5) \quad (103)$$

zurückzuführen. Bei den Endzustandssingularitäten wurde im Abschnitt 5.5 ein auslaufendes Pseudo-Teilchen mit zeitartigem Impuls  $p$ , d.h.  $p^2 > 0$ , eingeführt. Bei den Anfangszustandssingularitäten wird ein einlaufendes Pseudo-Teilchen mit raumartigem Impuls  $p$ , d.h.  $p^2 < 0$ , eingeführt. Es ergibt sich gemäß Abbildung 25 folgende faktorisierte Form des Phasenraumes:

$$\begin{aligned} \int d\xi dP S_{d, \text{dim}}^{(n)} &= \int d\xi dP S_{d, \text{dim}}^{(n)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) \\ &= \int d\xi \frac{(2\pi)^d}{\mu^{4-d}} \delta(p_1 + \xi P - p_2 - p_4 - p_5 - p_6) \left( \prod_{i \in \{2,4,5,6\}} \frac{\mu^{4-d} d^d p_i \delta(p_i^2 - m_i^2)}{(2\pi)^{d-1}} \right) \\ &= \int d\xi \int_{p_{\text{min}}^2}^{p_{\text{max}}^2} \frac{d^d p}{2\pi} \cdot dP S_{d, \text{dim}}^{(3)} \left( (p_1 + p)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0 \right) \\ &\quad \cdot dP S_{d, \text{dim}}^{(2)} \left( (\xi P)^2, p^2, m_6^2 = 0 \right) \end{aligned} \quad (104)$$

Für die Grenzen der  $p^2$ -Integration gilt im masselosen Fall:

$$\begin{aligned} p_{\text{min}}^2 &= -(p_1 + \xi P)^2, \\ p_{\text{max}}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (105)$$

Der 2-Teilchen-Phasenraum für den Zerfall eines masselosen Teilchens (Impuls  $\xi P$ ) in ein masseloses Teilchen (Impuls  $k = p_6$ ) und ein virtuelles Teilchen mit Virtualität  $p^2 < 0$  ist gegeben

<sup>31</sup>Die entsprechenden Formeln für einlaufendes Antiquark bzw. Gluon ergeben sich analog.

durch:

$$dP_{S_{\text{eff}}}^{(2)}((\xi P)^2, p^2, m_0^2=0) = \frac{t^{1-u} d^4k \delta(k^2) \delta((\xi P - k)^2 - p^2)}{(2\pi)^{d-2}}. \quad (106)$$

$p$  hat die anschauliche Bedeutung eines effektiven einlaufenden Parton-Impulses.  $R = P - p$  hat die anschauliche Bedeutung eines effektiven Remnant-Jets, der die nicht an der Streuung beteiligten Teile des Protons und ein kollinear zum einlaufenden Parton abgestrahltes Gluon beschreibt.  $p^2$  läßt sich auf die invariante Masse des effektiven Remnant-Jets zurückführen:

$$2p_3p_0 = -p^2 = \frac{\xi}{1-\xi} R^2. \quad (107)$$

Für die invariante Masse des effektiven Remnant-Jets wird — in Analogie zu den Schnitten aus Abschnitt 2.5 — die  $y$ -Schmitt-Bedingung<sup>32</sup>

$$R^2 \leq y_{\text{cut}}^2 M_{\text{cut}}^2 \quad (108)$$

gefordert. Somit ist die Grenze der  $p^2$ -Integration einerseits durch

$$2p_3p_0 = -p^2 \leq \frac{\xi}{1-\xi} y_{\text{cut}}^2 M_{\text{cut}}^2 \quad (109)$$

gegeben. Andererseits ist  $R$  ein physikalischer Vektor mit  $R^2 > 0$  und muß für die an dem Prozeß beteiligten masselosen Impulse  $p_i, p_j \in \{p_1, p_2, p_4, p_5\}$  die Gramdeterminantenbedingung

$$\Delta(p, p_i, p_j) \geq 0 \quad (110)$$

erfüllen.  $P$  wird wegen seiner Kollinearität zu  $R$  dabei nicht berücksichtigt. Dies führt zur Bedingung

$$-p^2 \leq \frac{\xi}{1-\xi} 2 \frac{p_i \cdot R \cdot p_j \cdot R}{p_i p_j}. \quad (111)$$

Somit ist  $-C_I^{J^i}$ , die Untergrenze der  $p^2$ -Integration gegeben durch:

$$C_I^{J^i} = \frac{\xi}{1-\xi} \min \left( y_{\text{cut}}^2 M_{\text{cut}}^2, 2 \frac{p_i \cdot R \cdot p_j \cdot R}{p_i p_j} \right). \quad (112)$$

<sup>32</sup> Auch andere Bedingungen sind möglich. Die angegebene Bedingung hat den Vorteil, sich nur auf eine meßbare physikalische Größe, den Remnant-Jet, zu beziehen.

Durch Entwicklung des Integranden der  $p^2$ -Integration in Potenzen von  $\sqrt{p^2}$  und Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung erhält man die Näherung:

$$\begin{aligned} \int d\xi dP_{S_{\text{eff}}}^{(4)} &= \int d\xi dP_{S_{\text{eff}}}^{(4)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) \\ &= \int_{-C_I^{J^i}} d\xi dP_{S_{\text{eff}}}^{(3)} \left( (p_1 + p)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0 \right)_{p^2=0} \end{aligned} \quad (113)$$

$$\cdot \int_{-C_I^{J^i}} \frac{dp^2}{2\pi} dP_{S_{\text{eff}}}^{(2)} \left( (\xi P)^2, p^2, m_6^2 = 0 \right) + \mathcal{O}(y_{\text{cut}}^2 M_{\text{cut}}^2).$$

Für die Faktorisierung der Anfangszustandsingularitäten mit nachfolgender Renormierung der Partondichten wird die Variable  $u$  benötigt. Sie läßt sich Hilfe eines beliebigen, nicht zu  $P$  oder  $k$  parallelen, Referenzvektors  $r$  mit der Delta-Funktion einführen:

$$1 = \int du \delta\left(1 - u - \frac{kr}{pr + kr}\right). \quad (114)$$

$u$  kann interpretiert werden als der nach Abstrahlung des Gluons mit dem Impuls  $k$  verbleibende Anteil des einlaufenden Impulses  $p_3 = p + k$ . Wegen  $p + k = \xi P$  gilt

$$pr = \xi u P r. \quad (115)$$

Durch eine Variablentransformation auf  $\xi'$  mit

$$\xi' = \xi u \quad (116)$$

und eine Umbenennung wieder auf  $\xi$  läßt sich die Form des Produktes von Phasenraum, Partondichte und Flußfaktor bei den Anfangszustandsingularitäten zurückführen auf die entspre-

ebenen Terme für die Baumgraphen:

$$\begin{aligned}
d\xi dPS_{d,\text{dim}}^{(4)} \frac{1}{4\xi p_1 P} f(\xi) &= d\xi dPS_{d,\text{dim}}^{(4)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0, m_6^2 = 0 \right) \frac{1}{4\xi p_1 P} f(\xi) \\
&= dPS_{d,\text{dim}}^{(3)} \left( (p_1 + \xi P)^2, m_2^2 = 0, m_4^2 = 0, m_5^2 = 0 \right) \frac{1}{4\xi p_1 P} \\
&\cdot d\xi \int_{\xi}^1 du f \left( \frac{\xi}{u} \right) \int_{-C}^0 \frac{dp^2}{2\pi} \\
&\cdot dPS_{d,\text{dim}}^{(2)} \left( \left( \frac{\xi}{u} P \right)^2, p^2, m_6^2 = 0 \right) \delta \left( 1 - u - \frac{k\tau}{pr + k\tau} \right) \\
&+ \mathcal{O}(y_{C,u}^{\text{cl}}, M_{C,u}^2).
\end{aligned} \tag{117}$$

Nach dieser Umbenennung lautet die Untergrenze der  $p^2$ -Integration:

$$C_1^{\text{cl}} = \frac{\xi}{u - \xi} \min \left( y_{C,u}^{\text{cl}}, M^2, 2 \frac{p_1 R \cdot p_2 R}{p_3 p_2} \right). \tag{118}$$

### 5.6.3 Normalform der Tensorintegrale

Die verbleibenden Integrale der Anfangsausdrucksingularitäten haben somit die Form:

$$\begin{aligned}
K_{00}(p, \tau) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}), \\
K_{01}^{\mu}(p, \tau) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) k^{\mu}, \\
K_{02}^{\mu\nu}(p, \tau) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) k^{\mu} k^{\nu}, \\
K_{03}^{\mu\nu\rho}(p, \tau) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) k^{\mu} k^{\nu} k^{\rho}, \\
K_{04}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, \tau) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) k^{\mu} k^{\nu} k^{\rho} k^{\sigma}
\end{aligned} \tag{119}$$

oder

$$\begin{aligned}
K_{10}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) \frac{1}{(r-k)^2 - m^2}, \\
K_{11}^{\mu}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) \frac{k^{\mu}}{(r-k)^2 - m^2}, \\
K_{12}^{\mu\nu}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{(r-k)^2 - m^2}, \\
K_{13}^{\mu\nu\rho}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) \frac{k^{\mu} k^{\nu} k^{\rho}}{(r-k)^2 - m^2}, \\
K_{14}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \int d^d k \delta(k^2) \delta((p+k)^2) \delta(1-u-\frac{k\tau}{pr+k\tau}) \frac{k^{\mu} k^{\nu} k^{\rho} k^{\sigma}}{(r-k)^2 - m^2}.
\end{aligned} \tag{120}$$

### 5.6.4 Reduktion der Tensorintegrale

Die Reduktion erfolgt mit den bekannten Ansätzen:

$$\begin{aligned}
K_{01}^{\mu}(p, r) &= \sum_{v_i \in V_1(p, r)} K_{01,i}(p, r) v_i^{\mu}, \\
K_{02}^{\mu\nu}(p, r) &= \sum_{v_i \in V_2(p, r)} K_{02,i}(p, r) v_i^{\mu\nu}, \\
K_{03}^{\mu\nu\rho}(p, r) &= \sum_{v_i \in V_3(p, r)} K_{03,i}(p, r) v_i^{\mu\nu\rho}, \\
K_{04}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r) &= \sum_{v_i \in V_4(p, r)} K_{04,i}(p, r) v_i^{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{121}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
K_{11}^{\mu\nu}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_1(p, r)} K_{11,i}(p, r, m) v_i^\mu, \\
K_{12}^{\mu\nu}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_2(p, r)} K_{12,i}(p, r, m) v_i^\mu, \\
K_{13}^{\mu\nu\rho}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_3(p, r)} K_{13,i}(p, r, m) v_i^{\mu\nu\rho}, \\
K_{14}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r, m) &= \sum_{v_i \in V_4(p, r)} K_{14,i}(p, r, m) v_i^{\mu\nu\rho\sigma}.
\end{aligned}$$

Die Definition der  $V_n$  entspricht dabei der aus Abschnitt 5.4.4. Bei der Auflösung des Gleichungssystems

$$K_{mn}(p, \dots) \cdot v_i = (v_i \cdot v_j) K_{m,n,j}(p, \dots),$$

nach den skalaren Integralen wird die Gleichung

$$kr = \frac{1-u}{u} pr$$

und die Abkürzung  $z = \frac{1-u}{u}$  benutzt und man erhält unter Vernachlässigung aller Terme, die mit der Schnittvariablen gegen 0 gehen:

$$\begin{aligned}
K_{01}^{\mu\nu}(p, r) &= K_{00}(p, r) p^\mu z^2, \\
K_{02}^{\mu\nu}(p, r) &= K_{00}(p, r) p^\mu p^\nu z^2, \\
K_{03}^{\mu\nu\rho}(p, r) &= K_{00}(p, r) p^\mu p^\nu p^\rho z^3, \\
K_{04}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r) &= K_{00}(p, r) p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma z^4
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
K_{11}^{\mu\nu}(p, r, m) &= +K_{00}(p) \frac{p^\mu}{(2pr)} \\
&+ K_{10}(p, r, m) \frac{p^\mu}{(2pr)^2} (m^2 - r^2), \\
K_{12}^{\mu\nu}(p, r, m) &= +K_{00}(p) \frac{p^\mu p^\nu}{(2pr)^2} [(m^2 - r^2)^2 + 2prz] \\
&+ K_{10}(p, r, m) \frac{p^\mu p^\nu}{(2pr)^2} (m^2 - r^2)^2, \\
K_{13}^{\mu\nu\rho}(p, r, m) &= +K_{00}(p) \frac{p^\mu p^\nu p^\rho}{(2pr)^3} [(m^2 - r^2)^2 + 2prz(m^2 - r^2)^2 + 2prz] \\
&+ K_{10}(p, r, m) \frac{p^\mu p^\nu p^\rho}{(2pr)^3} (m^2 - r^2)^3, \\
K_{14}^{\mu\nu\rho\sigma}(p, r, m) &= +K_{00}(p) \frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(2pr)^4} [(m^2 - r^2)^3 + 2prz(m^2 - r^2)^2 + 2prz(m^2 - r^2) + 2prz] \\
&+ K_{10}(p, r, m) \frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(2pr)^4} (m^2 - r^2)^4
\end{aligned}$$

Die nach Durchführung dieser Reduktion verbleibenden skalaren Integrale  $K_{00}(p)$  und  $K_{10}(p, -r, \sqrt{p^2})$  bei einlaufendem Quark bzw. Antiquark und  $K_{00}(p)$  und  $K_{10}(p, r - p, \sqrt{-p^2})$  bei einlaufendem Gluon werden im folgenden Abschnitt behandelt. Das Argument  $m = \sqrt{-p^2}$  tritt in den Funktionen  $K_{1i}$  nur als  $m^2 = -p^2$  auf.

### 5.6.5 Skalare Integrale

Die Integration in  $d$  Dimensionen wird wieder mit der Formel (160) auf eine Integration mit den Skalarprodukten als Integrationsvariablen zurückgeführt. Unter Ausnutzung der Delta-Funktionen erhält man für einlaufende Quarks mit  $1 - u = \frac{kr}{p+k}$  die Integrale:

$$\begin{aligned}
K_{00}(p, r) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{\pi^{1-\epsilon}}{2\Gamma(1-\epsilon)} (1-u)^{-\epsilon} (-p^2)^{-\epsilon}, \\
K_{10}(p, r, m) &= \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{\pi^{1-\epsilon}}{2\Gamma(1-\epsilon)} (1-u)^{-\epsilon} (-p^2)^{-\epsilon} \frac{u}{(r^2 - m^2)u - 2pr(1-u)}.
\end{aligned}$$



Für einlaufende Gluonen erhält man zusätzlich das Integral

$$K_{10}(p, r - p, \sqrt{-p^2}) = \frac{\mu^{4-d}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{\pi^{1-\epsilon}}{2\Gamma(1-\epsilon)} (1-u)^{-\epsilon} (-p^2)^{-\epsilon} \frac{u}{(r^2 - m^2)u - 2pr}. \quad (128)$$

Durch Integration über  $p^2$  und Entwicklung in  $\epsilon$  erhält man:

$$\begin{aligned} K_{10}(C_{F^{\text{cs}}}) &= \int_{-C_{F^{\text{cs}}}}^0 \frac{dp^2}{2\pi} K_{00}(p, r) \\ &= \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon^2 16\pi^2 \Gamma(1-2\epsilon)} \left( \frac{-q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \epsilon \left( \frac{C_{F^{\text{cs}}}}{-q^2} \right)^{-\epsilon} \\ &\quad \cdot (1-u)^{-\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

$$K_{11}(C_{F^{\text{cs}}}, 2pr) = \int_{-C_{F^{\text{cs}}}}^0 \frac{dp^2}{2\pi} K_{10}(p, -r, \sqrt{p^2})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon^2 16\pi^2 \Gamma(1-2\epsilon)} \left( \frac{-q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \epsilon \left( 1 + \epsilon^2 \zeta(2) \right) \frac{u}{2pr} \\ &\quad \cdot \left( + (1 + \epsilon^2 \zeta(2)) u^{\epsilon} (1-u)^{-1-2\epsilon} \left( \frac{2pr}{-q^2} \right)^{-\epsilon} + \epsilon (1-u)^{-1-\epsilon} \left( \frac{C_{F^{\text{cs}}}}{-q^2} \right)^{-\epsilon} \ln \left( 1 + \frac{(1-u)2pr}{u C_{F^{\text{cs}}}} \right) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (129)$$

Bei einlaufendem Gluon benötigt man zusätzlich das folgende Integral:

$$\begin{aligned} K_{11}^{\prime}(C_{F^{\text{cs}}}, 2pr) &= \int_{-C_{F^{\text{cs}}}}^0 \frac{dp^2}{2\pi} K_{10}(p, r - p, \sqrt{-p^2}) \\ &= \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon^2 16\pi^2 \Gamma(1-2\epsilon)} \left( \frac{-q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \epsilon \left( 1 + \epsilon^2 \zeta(2) \right) (1-u)^{-\epsilon} \left( \frac{C_{F^{\text{cs}}}}{-q^2} \right)^{-\epsilon} \frac{-u}{2pr} \\ &\quad \left( \left( 1 + \epsilon^2 \zeta(2) \right) \left( \frac{2pr}{u C_{F^{\text{cs}}}} \right)^{-\epsilon} + \epsilon \ln \left( 1 + \frac{2pr}{u C_{F^{\text{cs}}}} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (130)$$

Der in  $K_{11}$ ,  $K_{11}^{\prime}$  vorkommende Pol bei  $u = 1$  führt bei Verwendung der im Anhang angegebenen  ${}^{+}$ -Distributionsen zu einem Faktor  $\frac{\delta(1-u)}{u}$  und erfordert die angegebene Berechnung bis

einschließlich  $\mathcal{O}(\epsilon)$ .

### 5.6.6 Begründung der Näherung

Im Abschnitt 5.5.6 wurde bei den Endzustandsingularitäten gezeigt, daß eine Entwicklung in  $\sqrt{p^2}$  einer Vernachlässigung von Termen, die mit  $y_{\text{cs}}^{\text{cs}} \rightarrow 0$  gegen 0 gehen, entspricht. Bei den Anfangszustandsingularitäten führt die Näherung durch Entwicklung in  $\sqrt{-p^2}$  zu Vernachlässigung von Termen der Form  $\frac{1}{\sqrt{-p^2}} K_{00}(p, r)$ ,  $\frac{1}{\sqrt{-p^2}} K_{10}(p, r, m)$  bzw.  $\frac{1}{\sqrt{-p^2}} K_{10}(p, r - p, \sqrt{-p^2})$ . Die genannten Terme haben in 4 Dimensionen nur eine  $\frac{1}{\sqrt{-p^2}}$ -Singularität. Die Integration über die Singularität führt zu  $\sqrt{y_{\text{cs}}^{\text{cs}}}$ -Termen. Diese Terme werden, da sie mit  $y_{\text{cs}}^{\text{cs}} \rightarrow 0$  gegen 0 gehen, vernachlässigt.

## 5.7 Faktorisierungsterme

In diesem Abschnitt wird auf die Renormierung der Partondichten und die Formulierung der Renormierung durch Addition von Termen zum Betragsquadrat des Matrixelementes eingegangen.

### 5.7.1 Renormierung der Partondichten

Nach dem Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem [Kin62, LN64] heben sich in der Summe aus virtuellen und reellen Korrekturen die Infrarotsingularitäten der Endzustände weg. Die verbleibenden Infrarotsingularitäten<sup>33</sup> der Anfangszustände müssen durch Renormierung der Partondichten eliminiert werden.

Im  $\overline{MS}$ -Faktorisierungsschema [AEM78, AEM79, FP82]<sup>34</sup> gilt

$$f_i^{ren}(\xi, M^2) = \int_{\xi}^1 \frac{du}{u} \left[ \delta_{ij} \delta(1-u) + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} R_{i-j}(u, M^2) \right] f_j\left(\frac{\xi}{u}\right) \quad (131)$$

wobei

$$R_{i-j}(u, M^2) = -\frac{1}{\epsilon} P_{i-j}(u) \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \left( \frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\epsilon \quad (132)$$

Die  $P_{i-j}$  sind die Altarelli-Parisi-Kerne [AG77],  $\mu$  ist die Renormierungsskala und  $M$  ist die Faktorisierungsskala. Die für diese Rechnung relevanten Altarelli-Parisi-Kerne sind mit  $C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} = \frac{4}{3}$ :

$$P_{q-q} = C_F \left[ \frac{1+u^2}{(1-u)^4} + \frac{3}{2} \delta(1-u) \right], \quad (133)$$

$$P_{g-g} = \frac{1}{2} [u^2 + (1-u)^2].$$

### 5.7.2 Matrixelemente und Phasenraum

Die Renormierung der Partondichten wird in der vorliegenden Arbeit formuliert, indem das Produkt aus Baumgraphenmatrixelement und singulärem Kern von den virtuellen und reellen Korrekturen subtrahiert wird. Die Faktorisierungsterme sind von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^1)$  und enthalten  $\epsilon^{-1}$ -Terme derart, daß sich in der Summe aus virtuellen, reellen und Faktorisierungstermen die Singularitäten in  $\epsilon$  kompensieren. Die Faktorisierungsterme werden im Anhang I

angegeben. Die Kompensation der Singularitäten zeigt sich bei Addition der im Anhang I explizit angegebenen virtuellen Korrekturen, reellen Korrekturen und Faktorisierungsterme.

Der Phasenraum für die Faktorisierungsterme ist der 3-Teilchen-Phasenraum nach Gleichung (37) nebst überschobener  $f \frac{d^3}{u}$ -Integration nach Gleichung (131).

<sup>33</sup>Es handelt sich dabei im engeren Sinne um kollineare Singularitäten.

<sup>34</sup>In dieser Arbeit wird die Notation von [AR89] bzw. [Gra90] verwendet.

## 5.8 Numerisch integrierte reelle Korrekturen

In diesem Abschnitt wird die Methode zur Berechnung der reellen Korrekturen bei Integration über das Gebiet  $B$  des Phasenraumes nach Abbildung 15 bzw. 16 geschildert. Dazu werden zuerst die zu berücksichtigenden Anteile des Betragsquadrates des Matrixelementes betrachtet. Für diese Anteile wird der eingeschränkte 4-Teilchen-Phasenraum und die Vorschrift zur Konstruktion von 3-Teilchen-Ereignissen angegeben.

### 5.8.1 Zu berücksichtigende Anteile am Matrixelement

Durch eine Partialbruchzerlegung gemäß Gleichung (47) wurde das Matrixelement in Terme zerlegt, die nur in höchstens einer Invarianten (z.B.  $p_i p_j$ ) singular werden können. Diese Terme haben bezüglich  $p_i p_j$  keinen Pol oder die Pole  $\frac{1}{2p_i p_j}$  bzw.  $\frac{1}{2p_i p_j + p_k}$ . In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, wie diese Terme über das Gebiet  $A$  gemäß Abbildung 15 bzw. 16 analytisch integriert werden. Die über das Gebiet  $B$  zu integrierenden Terme haben somit die

Form

$$\begin{aligned} T_0 &= F_0(p_i, p_j, p_k, \dots), \\ T_1 &= F_1(p_i, p_j, p_k, \dots) \frac{1}{2p_i p_j}, \\ T_2 &= F_2(p_i, p_j, p_k, \dots) \frac{1}{2p_i p_j + 2p_i p_k}, \end{aligned} \quad (134)$$

wobei die  $F_i$  rationale Funktionen ohne Pole in  $p_i p_j$  oder  $p_i p_k$  sind. Der zu integrierende Bereich des Phasenraumes wird durch die Bedingungen  $C_{ij} < 2p_i p_j < C_{ij}^{\max}$  und  $0 < 2p_i p_k < C_{ik}$  eingeschränkt. Dabei sind  $C_{ij}, C_{ik} \in \{C_i^*, C_j^*\}$  die durch Schnittvariable  $y_{cut}^{st}$  bestimmten Integrationsgrenzen von  $p_i p_j$  bzw.  $p_i p_k$ .  $C_{ij}^{\max}$  ist die durch die Kinematik bestimmte Integrationsgrenze von  $p_i p_j$ . Da der Integrand im Integrationsgebiet keinen Pol besitzt und das Integrationsgebiet im Limes  $y_{cut}^{st} \rightarrow 0$  verschwindet, liegt die Vermutung nahe, daß diese Anteile im Limes  $y_{cut}^{st} \rightarrow 0$  nicht beitragen<sup>35</sup>. Um die Abhängigkeit der Terme vom Limes  $y_{cut}^{st} \rightarrow 0$

<sup>35</sup>Die entsprechenden Terme wurden in [Gra90, BK92] nur für die Anfangszustandsingularitäten berücksichtigt.

zu untersuchen, werden die folgenden Integrale berechnet:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{C_{ij} < 2p_i p_j < C_{ij}^{\max}, 0 < 2p_i p_k < C_{ik}} d^4 p_i \delta(p_i^2) 1, \\ I_1 &= \int_{C_{ij} < 2p_i p_j < C_{ij}^{\max}, 0 < 2p_i p_k < C_{ik}} d^4 p_i \delta(p_i^2) \frac{1}{2p_i p_j}, \\ I_2 &= \int_{C_{ij} < 2p_i p_j < C_{ij}^{\max}, 0 < 2p_i p_k < C_{ik}} d^4 p_i \delta(p_i^2) \frac{1}{2p_i p_j} \frac{1}{2p_i p_k}. \end{aligned} \quad (135)$$

Mit den Methoden der manifest invarianten Integration nach Gleichung (160) erhält man

$$\begin{aligned} I_0 &= \int d p_i^2 \delta(p_i^2) \int_{C_{ij}/2}^{C_{ij}^{\max}/2} d(p_i p_j) \int_0^{C_{ik}/2} d(p_i p_k) \frac{\pi}{p_j p_k}, \\ I_1 &= \int d p_i^2 \delta(p_i^2) \int_{C_{ij}/2}^{C_{ij}^{\max}/2} d(p_i p_j) \int_0^{C_{ik}/2} d(p_i p_k) \frac{\pi}{p_j p_k} \frac{1}{2p_i p_j}, \\ I_2 &= \int d p_i^2 \delta(p_i^2) \int_{C_{ij}/2}^{C_{ij}^{\max}/2} d(p_i p_j) \int_0^{C_{ik}/2} d(p_i p_k) \frac{\pi}{p_j p_k} \frac{1}{2p_i p_j} \frac{1}{2p_i p_k}. \end{aligned} \quad (136)$$

Nach Ausführung der Integrationen erhält man

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\pi}{4p_j p_k} C_{ik}(C_{ij}^{\max} - C_{ij}), \\ I_1 &= \frac{\pi}{4p_j p_k} C_{ik} \ln(C_{ij}^{\max}/C_{ij}), \\ I_2 &= \frac{\pi}{4p_j p_k} \left( \mathcal{L}_2\left(1 - \frac{C_{ik}}{C_{ij}^{\max}}\right) - \mathcal{L}_2\left(1 - \frac{C_{ik}}{C_{ij}}\right) \right). \end{aligned} \quad (137)$$

Im Limes  $y_{cut}^{st} \rightarrow 0$  erhält man wegen  $y_{cut}^{st} \propto C_{ij}$  bzw.  $y_{cut}^{st} \propto C_{ik}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{y_{cut}^{st} \rightarrow 0} I_0 &= 0, \\ \lim_{y_{cut}^{st} \rightarrow 0} I_1 &= 0, \\ \lim_{y_{cut}^{st} \rightarrow 0} I_2 &= (-1) \frac{\pi}{4p_j p_k} \mathcal{L}_2\left(1 - \lim_{y_{cut}^{st} \rightarrow 0} \frac{C_{ik}}{C_{ij}}\right). \end{aligned} \quad (138)$$

Im Limes  $y_{cut}^{jet} \rightarrow 0$  tragen somit nur die  $\frac{1}{2p_4 p_6} \cdot \frac{1}{2p_4 p_7 + 2p_4 p_8}$ -Terme bei und müssen berücksichtigt werden. Im Anhang I werden diese Anteile angegeben. In der Notation von Abschnitt 5.2 sind diese Beiträge durch Bezeichnungen, die den Affix X bzw. Y enthalten, gekennzeichnet. Die Anteile mit dem Affix X besitzen bei einlaufendem Quark bzw. Antiquark eine Anfangszustands-singularität. Entsprechend enthalten die Anteile mit dem Affix Y bei einlaufendem Quark bzw. Antiquark eine Endzustandsingularität. Bei einlaufendem Gluon entsprechen die Anteile mit dem Affix X einer Anfangszustandsingularität zwischen einlaufendem Gluon und auslaufendem Antiquark, die mit dem Affix Y einer Anfangszustandsingularität zwischen einlaufendem Gluon und auslaufendem Quark. Nur die im Anhang I mit einem Affix X oder Y gekennzeichneten Anteile müssen über den im folgenden Abschnitt beschriebenen eingeschränkten Phasenraum integriert werden.

### 5.8.2 Phasenraumintegration und Erzeugung der Jetimpulse

Die Phasenraumintegration wird mit Hilfe der Gleichung (45) vorgenommen.

Bei Termen mit Affix X und bei einlaufendem Quark wird der Phasenraum zusätzlich durch die zu den Ungleichungen (83) und (109) korrespondierenden Bedingungen

$$2p_3 p_6 > \frac{\xi}{1-\xi} y_{cut}^{jet} M_{cut}^2, \quad (139)$$

$$2p_4 p_6 < y_{cut}^{jet} M_{cut}^2$$

eingeschränkt. Die Partonen mit den Impulsen  $p_4$  und  $p_6$  werden als nicht unterscheidbar angenommen und zu einem Jet mit Impuls  $p = p_4 + p_6$  zusammengesetzt. Auf  $p$  werden alle weiteren Schritte bezogen.

Bei Termen mit Affix Y und einlaufendem Quark wird der Phasenraum zusätzlich durch die Bedingungen

$$2p_3 p_6 < \frac{\xi}{1-\xi} y_{cut}^{jet} M_{cut}^2, \quad (140)$$

$$2p_4 p_6 > y_{cut}^{jet} M_{cut}^2$$

eingeschränkt. Das Parton mit dem Impuls  $p_6$  und der Remnant mit dem Impuls  $\tilde{R} = \frac{1-\xi}{\xi} p_3$  werden als nicht unterscheidbar angenommen und zu einem effektiven Remnant-Jet mit Impuls

$\tilde{R}' = R + p_6$  zusammengesetzt. Auf den effektiven Remnant-Jet werden alle weiteren Schritte bezogen.

Einlaufende Antiquarks bzw. Gluonen werden analog behandelt.

## 6 Durchführung der Rechnung

Bei der Entwicklung der in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Methoden hat sich gezeigt, daß die dabei entstehenden Formeln teilweise sehr umfangreich sind. Die Verwendung von computerorientierten Methoden war deshalb notwendig. Da im Rahmen dieser Arbeit auf eine explizite Darstellung aller Programme verzichtet werden soll, jedoch ein Überblick über die verwendeten Programme notwendig ist, wird in diesem Abschnitt kurz der Aufbau und der Zusammenhang der verwendeten Programme in tabellarischer Form angegeben.

Bei der Durchführung der Rechnung kann zwischen Baumgraphentermen, virtuellen Korrekturen, reellen Korrekturen (Gebiet A und B nach Abbildung 15 bzw. 16) und Faktorisierungstermen unterschieden werden. Die computerorientierte Bearbeitung wird dabei von den in den Tabellen 6 bis 10 angegebenen Programmen durchgeführt. Die Programme zur Reduktion der Tensorintegrale für die reellen und virtuellen Korrekturen (`reduct2p-gRAD`, `reduct1p-gRAD`, `reduct4p-gLOOP`, `reduct3p-gLOOP`) sind wiederum von in Mathematica geschriebenen Programmen erzeugt worden.

| Verarbeitungsschritt           | Programm    | Programmiersprache |
|--------------------------------|-------------|--------------------|
| Eingabe der Feynman-Diagramme  | diagram     | FORM               |
| Konjugation                    | conjugate   | FORM               |
| Einsetzen der Feynman-Regeln   | theory      | FORM               |
| Auswertung der Farbfaktoren    | colorfactor | FORM               |
| Auswertung der Gammamatrizen   | gamma       | FORM               |
| Vorbereitung für Maple         | form2txt    | FORM               |
| Umsetzung in Fortran-Format    | program2for | Maple              |
| Umsetzung in $\LaTeX$ -Formeln | formula2tex | Maple              |

Tabelle 6: Verarbeitungsschritte für Baumgraphen

| Verarbeitungsschritt             | Programm       | Programmiersprache |
|----------------------------------|----------------|--------------------|
| Eingabe der Feynman-Diagramme    | diagram        | FORM               |
| Konjugation                      | conjugate      | FORM               |
| Einsetzen der Feynman-Regeln     | theory         | FORM               |
| Auswertung der Farbfaktoren      | colorfactor    | FORM               |
| Auswertung der Gammamatrizen     | gamma          | FORM               |
| Sammlung der Integrale           | collect-gLOOP  | FORM               |
| Reduktion der 4-Punkt-Funktion   | reduct4p-gLOOP | FORM               |
| Reduktion der 3-Punkt-Funktion   | reduct3p-gLOOP | FORM               |
| Reduktion der 2-Punkt-Funktion   | reduct2p-gLOOP | FORM               |
| Einsetzen der skalaren Integrale | insert-gLOOP   | FORM               |
| Vorbereitung für Maple           | form2txt       | FORM               |
| Umsetzung in Fortran-Format      | program2for    | Maple              |
| Umsetzung in $\LaTeX$ -Formeln   | formula2tex    | Maple              |

Tabelle 7: Verarbeitungsschritte für virtuelle Korrekturen

| Verarbeitungsschritt           | Programm     | Programmiersprache |
|--------------------------------|--------------|--------------------|
| Eingabe der Feynman-Diagramme  | diagram      | FORM               |
| Konjugation                    | conjugate    | FORM               |
| Einsetzen der Feynman-Regeln   | theory       | FORM               |
| Auswertung der Farbfaktoren    | colorfactor  | FORM               |
| Auswertung der Gammamatrizen   | gamma        | FORM               |
| Einsetzen der AP-Terme         | insert-gFACT | FORM               |
| Vorbereitung für Maple         | form2txt     | FORM               |
| Umsetzung in Fortran-Format    | program2for  | Maple              |
| Umsetzung in $\LaTeX$ -Formeln | formula2tex  | Maple              |

Tabelle 8: Verarbeitungsschritte für Faktorisierungsterme

| Verarbeitungsschritt             | Programm      | Programmiersprache |
|----------------------------------|---------------|--------------------|
| Eingabe der Feynman-Diagramme    | diagram       | FORM               |
| Konjugation                      | conjugate     | FORM               |
| Einsetzen der Feynman-Regeln     | theory        | FORM               |
| Auswertung der Farbfaktoren      | colorfactor   | FORM               |
| Auswertung der Gammamatrizen     | gamma         | FORM               |
| Sammlung der Integrale           | collect-gRAD  | FORM               |
| Reduktion der 1-Punkt-Funktion   | reduct2p-gRAD | FORM               |
| Reduktion der 0-Punkt-Funktion   | reduct1p-gRAD | FORM               |
| Einsetzen der skalaren Integrale | insert-gRAD   | FORM               |
| Vorbereitung für Maple           | form2txt      | FORM               |
| Umsetzung in Fortran-Format      | program2for   | Maple              |
| Umsetzung in $\LaTeX$ -Formeln   | formula2tex   | Maple              |

Tabelle 9: Verarbeitungsschritte für reelle Korrekturen (Gebiet A)

## 7 Numerische Resultate

Dieser Abschnitt dient der Darstellung der numerischen Ergebnisse. Der Abschnitt ist in vier Unterabschnitte geteilt. Im ersten Unterabschnitt wird die Schnitt-Unabhängigkeit der Summe der Wirkungsquerschnitte der Prozesse  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)\text{Jets}$  und  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)\text{Jets}$  in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_S)$  und somit ein Test der Konsistenz der Rechnung vorgeführt. Im zweiten Unterabschnitt werden die differentiellen Wirkungsquerschnitte in  $x, y, Q^2$  und  $\theta$ , bei Standard-schnitten dargestellt. Im dritten Unterabschnitt wird durch Betrachtung der in  $x, y, Q^2$  und  $\theta$ , differentiellen Wirkungsquerschnitte untersucht, welche Bereiche in  $x, y, Q^2$  und  $\theta$ , durch leptonische bzw. hadronische Photonabstrahlung dominiert werden. Der vierte Abschnitt dient der Diskussion der Wirkungsquerschnitte bei hadronischen Schnitten, d.h. Schnitten die eine hadronische Photonabstrahlung begünstigen. Die Berechnungen in diesen drei Abschnitten werden mit 5 Flavours und dem MRS(A)-Satz der Partondichten [MSR94] durchgeführt. Zu dem MRS(A)-Satz der Partondichten gehört  $\Lambda_{\overline{N_f}=4}^{\overline{MS}} = 0.23\text{GeV}$ . Dieses Lambda wird mit [Mar84] auf  $\Lambda_{\overline{N_f}=5}^{\overline{MS}} = 0.153\text{GeV}$  umgerechnet und für die Berechnung der laufenden Kopplungskonstante nach [Par92] verwendet:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(Q^2/\Lambda_{\overline{N_f}=5}^{\overline{MS}^2})} \left[ 1 - \frac{6(153 - 19n_f) \ln(\ln(Q^2/\Lambda_{\overline{N_f}=5}^{\overline{MS}^2}))}{(33 - 2n_f)^2 \ln(Q^2/\Lambda_{\overline{N_f}=5}^{\overline{MS}^2})} \right]. \quad (141)$$

Die Renormierungsskala  $\mu$ , die Faktorisierungsskala  $M$  und die für den  $y$ -Schnitt benötigte Energieskala  $M_{\text{cut}}$  werden wie folgt festgelegt:

$$\mu^2 = Q^2, \quad M^2 = Q^2, \quad M_{\text{cut}}^2 = W^2. \quad (142)$$

Weitere Details der numerischen Ergebnisse werden im Anhang J dargestellt.

### 7.1 Schnitt-Unabhängigkeit der Summe der Wirkungsquerschnitte

Zur Darstellung der Schnitt-Unabhängigkeit der Summe der Wirkungsquerschnitte für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)\text{Jets}$  und  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)\text{Jets}$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_S)$ , d.h. unter Ein-

| Verarbeitungsschritt                                 | Programm       | Programmiersprache |
|--|----------------|--------------------|
| Eingabe der Feynman-Diagramme                        | diagram        | FORM               |
| Konjugation  | conjugate      | FORM               |
| Einsetzen der Feynman-Regeln                         | theory         | FORM               |
| Auswertung der Farbfaktoren                          | colorfactor    | FORM               |
| Auswertung der Gammamatrizen                         | gamma          | FORM               |
| Sammlung der beitragenden Terme                      | collect.FINITE | FORM               |
| Vorbereitung für Maple                               | form2txt       | FORM               |
| Umsetzung in Fortran-Format                          | program2for    | Maple              |
| Umsetzung in L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X-Formeln | formula2tex    | Maple              |

Tabelle 10: Verarbeitungsschritte für reelle Korrekturen (Gebiet B)

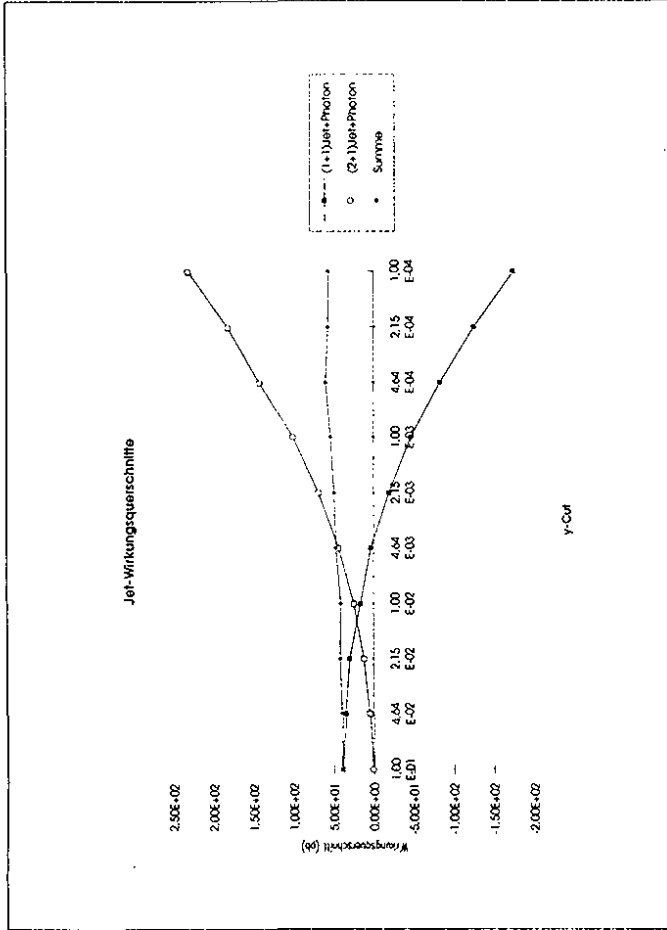


Abbildung 26:  $y$ -Schnitt-Abhängigkeit der (1+1)- und (2+1)Jet-Raten

beziehung der Baumgraphen, werden die folgenden Schnitte verwendet:

$$\begin{aligned}
 x_{\min} &= 0.01, & x_{\max} &= 0.5, \\
 y_{\min} &= 0.01, & y_{\max} &= 0.9, \\
 Q_{\min}^2 &= 10\text{GeV}^2, & W_{\min}^2 &= 900\text{GeV}^2, \\
 \theta_{\gamma,\min} &= 4^\circ, & \theta_{\gamma,\max} &= 176^\circ, \\
 \theta_{\gamma e^-\min} &= 15^\circ, & \theta_{\gamma e^+\min} &= 1^\circ, \\
 E_{\gamma,\min} &= 5\text{GeV}.
 \end{aligned}
 \tag{143}$$

$y_{\text{cut}}^{\text{jet}}$  wird von 0.1 bis 0.0001 variiert.  $\theta_{\gamma e^{\pm},\min}$  wird mit  $1^\circ$  bewußt auf einen kleinen, experimentell nicht erreichbaren, Wert gesetzt. Dieser kleine Winkel ist nötig, da durch die Trennung des Photons von den Jets 3 Kegel aus dem  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)\text{Jets}$ -Phasenraum aber nur 2 Kegel aus dem  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$ -Phasenraum ausgeschnitten werden. Nur für  $\theta_{\gamma e^{\pm},\min} \rightarrow 0$  gilt deshalb

die Schnittunabhängigkeit der Summe aus  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$ - und  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)\text{Jets}$ -Wirkungsquerschnitt bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_S)$ .  $\theta_{\gamma e^{\pm},\min} = 0$  entspricht einem Prozeß mit einem nicht mehr meßbaren Photon und wird in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt<sup>36</sup>. Abbildung 26 zeigt die Abhängigkeit der  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$ - und  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)\text{Jets}$ -Wirkungsquerschnitte von  $y_{\text{cut}}^{\text{jet}}$ . Dabei bleibt die Summe der beiden Anteile näherungsweise konstant<sup>37</sup>. Der  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)\text{Jets}$ -Wirkungsquerschnitt zeigt in der bezüglich  $y_{\text{cut}}^{\text{jet}}$  logarithmischen Darstellung ein parabelförmiges Ansteigen und somit eine  $(\ln y_{\text{cut}}^{\text{jet}})^2$ -Abhängigkeit. Der  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$ -Wirkungsquerschnitt zeigt dieselbe Abhängigkeit mit negativem Vorzeichen und wird bei etwa  $4.6 \times 10^{-3}$  negativ. Dieser negative Wirkungsquerschnitt ist ein Artefakt der Faktorisierung von Singularitäten in die Partondichten. Die Konstanz der Summe beider Anteile gilt nur näherungsweise, da bei mittlerem  $y_{\text{cut}}^{\text{jet}}$  die Terme, die mit  $y_{\text{cut}}^{\text{jet}}$  gegen 0 gehen und deshalb vernachlässigt wurden, fehlen. Bei kleinen Werten von  $y_{\text{cut}}^{\text{jet}}$  leidet die Monte-Carlo-Integration der  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)\text{Jets}$ -Terme unter der starken Variation des Integranden und der daraus resultierenden großen statistischen Unsicherheit.

## 7.2 Wirkungsquerschnitte bei Standardsnitten

Die folgenden Werte der Schnitte werden als experimentell wahrscheinlich realisierbare Standardsnitte betrachtet:

$$\begin{aligned}
 x_{\min} &= 0.01, & x_{\max} &= 0.5, \\
 y_{\min} &= 0.01, & y_{\max} &= 0.9, \\
 Q_{\min}^2 &= 10\text{GeV}^2, & W_{\min}^2 &= 900\text{GeV}^2, \\
 \theta_{\gamma,\min} &= 4^\circ, & \theta_{\gamma,\max} &= 176^\circ, \\
 \theta_{\gamma e^-\min} &= 15^\circ, & \theta_{\gamma e^+\min} &= 15^\circ, \\
 E_{\gamma,\min} &= 5\text{GeV}, & y_{\text{cut}}^{\text{jet}} &= 0.01.
 \end{aligned}
 \tag{144}$$

Bei diesen Werten erhält man die Wirkungsquerschnitte gemäß Tabelle 11. Anhand der Tabellen 12 bis 15 wird ersichtlich, welche Anteile zu diesen Wirkungsquerschnitten beitragen. Die in  $x$ ,  $y$ ,  $Q^2$ ,  $W^2$  und  $\theta$ , differentiellen Wirkungsquerschnitte werden anhand der Abbildungen

<sup>36</sup>Da bei  $\theta_{\gamma e^{\pm},\min} = 0$  das Matrixelement singular wird, bedingt eine vollständige — hier nicht durchgeführte — Behandlung der QED-Singularitäten die Verwendung von Fragmentationsfunktionen.

<sup>37</sup>Der Test der  $y$ -Schnitt-Unabhängigkeit wurde mit positivem Ergebnis für alle in Tabelle 3 aufgeführten Anteile durchgeführt.

27, 28, 29, 30 und 31 diskutiert. Auf den genannten Abbildungen werden die differentiellen Wirkungsquerschnitte für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^0)$ ,  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$  und  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1) \text{ Jets}$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$  dargestellt.

Tabelle 11 zeigt, daß die Korrekturen den Wirkungsquerschnitt für den Prozeß  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  um 37 Prozent reduzieren. Der Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1) \text{ Jets}$  beträgt 11 Prozent des Bornschen Wirkungsquerschnittes. Dies führt dazu, daß der  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1) \text{ Jets}$ -Wirkungsquerschnitt in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s)$  nur 74 Prozent des  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1) \text{ Jets}$ -Wirkungsquerschnittes in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  beträgt.

Der Tabelle 12 entnimmt man, daß der Wirkungsquerschnitt des Born-Terms der Reaktion  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  durch die von einem einlaufenden Quark ausgelöste leptoniche Photonabstrahlung mit einem Anteil von 48% dominiert wird. Dabei trägt die leptoniche Photonabstrahlung insgesamt etwa doppelt so stark bei wie die hadronische Photonabstrahlung. Der durch ein einlaufendes Quark bewirkte Wirkungsquerschnitt ist insgesamt etwa dreimal so groß, wie der durch ein einlaufendes Antiquark bewirkte Wirkungsquerschnitt. Die Interferenzterme tragen insgesamt nur zu etwa 2% bei.

Bei Berücksichtigung der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zur Reaktion  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  reduziert sich der Wirkungsquerschnitt gemäß Tabelle 11 auf etwa 20pb. Die einzelnen Anteile verteilen sich dann gemäß Tabelle 13. Die leptoniche Photonabstrahlung vom Quark ist hier wiederum mit 71% dominierend. Neu ist der Effekt der Korrekturen bei einlaufendem Gluon. Da es in niedrigster Ordnung bei dem Prozeß  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$  keinen Beitrag für ein einlaufendes Gluon gibt, ergibt sich für das einlaufende Gluon ein negativer Beitrag von -31% zum Wirkungsquerschnitt mit Korrekturen. Die Interferenzterme tragen nur zu 3% zum Wirkungsquerschnitt bei.

Tabelle 14 zeigt, daß der Bornsche Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1) \text{ Jets}$  zu etwa gleichen Teilen durch leptoniche oder hadronische Photonabstrahlung verursacht wird.

Der Tabelle 15 kann man die Beiträge der Up-Quarks, der Down-Quarks und der Gluonen zu den einzelnen Wirkungsquerschnitten entnehmen. Da die Quarkladungen bei leptonicher Photonabstrahlung quadratisch und bei hadronischer Photonabstrahlung in vierter Potenz eingehen, ist der relative Anteil der Down-Quarks bei hadronischer Photonabstrahlung stets kleiner als bei leptonicher Photonabstrahlung.

| Prozeß bis zur Ordnung   | Wirkungsquerschnitt          | Prozent |
|--|------------------------------|---------|
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^0)$ | $32.58 \pm 0.02 \text{ pb}$  | 100%    |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$ | $20.47 \pm 0.03 \text{ pb}$  | 63%     |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1) \text{ Jets}$<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$ | $3.694 \pm 0.006 \text{ pb}$ | 11%     |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1) \text{ Jets}$<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^1)$ | $24.16 \pm 0.03 \text{ pb}$  | 74%     |

Tabelle 11: Tabelle der Wirkungsquerschnitte bei Standardschnitten

Abbildung 27 zeigt, daß die Korrektur für den differentiellen Wirkungsquerschnitt in  $x$  mit kleiner werdendem  $x$  ansteigt und für  $x \rightarrow 1$  verschwindet. Entsprechendes zeigt sich auch für den differentiellen Wirkungsquerschnitt in  $W^2$  auf Abbildung 30: die Korrekturen nehmen zu großem  $W$  hin ab. Abbildung 28 zeigt, daß durch die Korrekturen beim differentiellen Wirkungsquerschnitt in  $y$  das lokale Maximum bei  $\log_{10}(y) \approx -1.2$  reduziert wird. Entsprechendes gilt für die Schulter bei  $Q^2 \approx 100 \text{ GeV}^2$  auf Abbildung 29. Auf Abbildung 31 erkennt man, daß die Photonabstrahlung in Protonrichtung ( $\theta_\gamma = \pi$ ) stärker unterdrückt wird als in Elektronrichtung ( $\theta_\gamma = 0$ ). Diese Effekte lassen sich am besten durch eine Betrachtung der nach der Art der Photonabstrahlung getrennten Anteile des Matrixelementes verstehen.



|          | Quark | Antiquark | $\Sigma$ |
|----------|-------|-----------|----------|
| Had.     | 23%   | 11%       | 34%      |
| Lep.     | 48%   | 15%       | 64%      |
| Int.     | 3%    | -1%       | 2%       |
| $\Sigma$ | 74%   | 26%       | 100%     |

Tabelle 12: Prozentuale Anteile am Wirkungsquerschnitt für  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_s^0)$  bei Standardschnitten

|          | Quark | Antiquark | Gluon | $\Sigma$ |
|----------|-------|-----------|-------|----------|
| Had.     | 21%   | 12%       | -17%  | 17%      |
| Lep.     | 71%   | 24%       | -14%  | 81%      |
| Int.     | -4%   | -2%       | 0%    | 3%       |
| $\Sigma$ | 97%   | 35%       | -31%  | 100%     |

Tabelle 13: Anteile am Wirkungsquerschnitt für  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_s^1)$  bei Standardschnitten

|          | Quark | Antiquark | Gluon | $\Sigma$ |
|----------|-------|-----------|-------|----------|
| Had.     | 24%   | 6%        | 23%   | 53%      |
| Lep.     | 26%   | 5%        | 14%   | 45%      |
| Int.     | 3%    | -1%       | 0%    | 3%       |
| $\Sigma$ | 53%   | 10%       | 37%   | 100%     |

Tabelle 14: Anteile am Wirkungsquerschnitt für  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)\text{Jets}$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_s^1)$  bei Standardschnitten

| Prozeß bis zur Ordnung  | Had. |      | Lep.  |     | $\Sigma$ |      |
|---|------|------|-------|-----|----------|------|
|   | Down | Up   | Down  | Up  | Down     | Up   |
| $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$<br>bis zur $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_s^0)$ | 7%   | 93%  | 0%    | 81% | 14%      | 86%  |
| $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)\text{Jets}$<br>bis zur $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_s^1)$ | 14%  | 187% | -101% | 95% | 21%      | 111% |
| $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)\text{Jets}$<br>bis zur $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s^1)$ | 3%   | 53%  | 44%   | 59% | 6%       | 57%  |
| $e^-p \rightarrow e^-\gamma(n+1)\text{Jets}$<br>bis zur $\mathcal{O}(\alpha^3\alpha_s^1)$ | 10%  | 138% | -48%  | 95% | 18%      | 102% |

Die Einträge sind jeweils auf die Summe von Down-, Up- und Gluon-Anteil als 100% normiert.

Tabelle 15: Anteile der Partondichten bei Standardschnitten

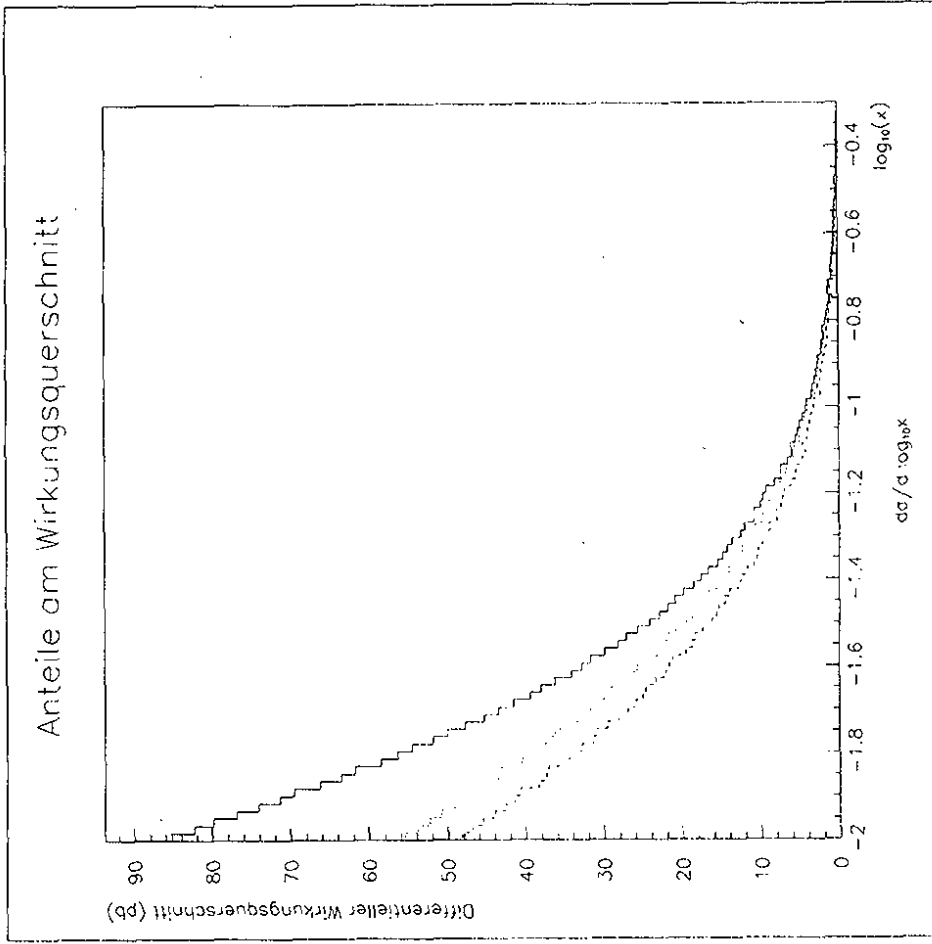


Abbildung 27: Verteilungen in  $x$  bei Standardwerten

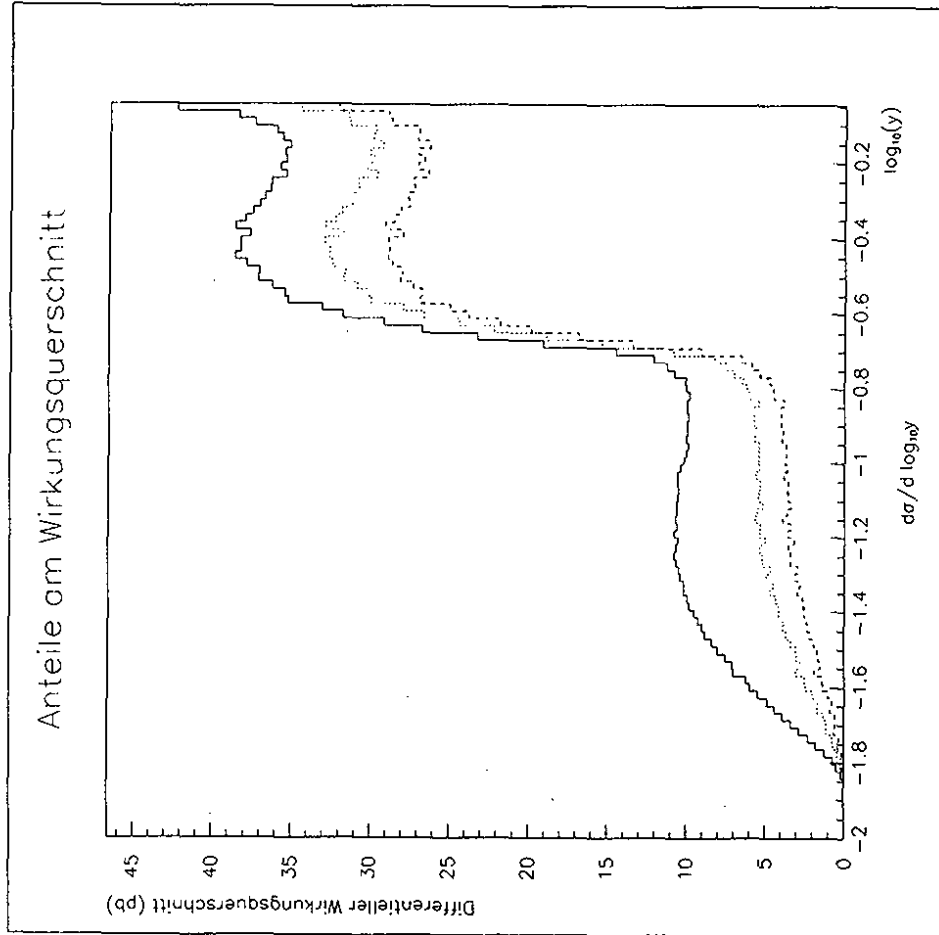


Abbildung 28: Verteilungen in  $y$  bei Standardwerten

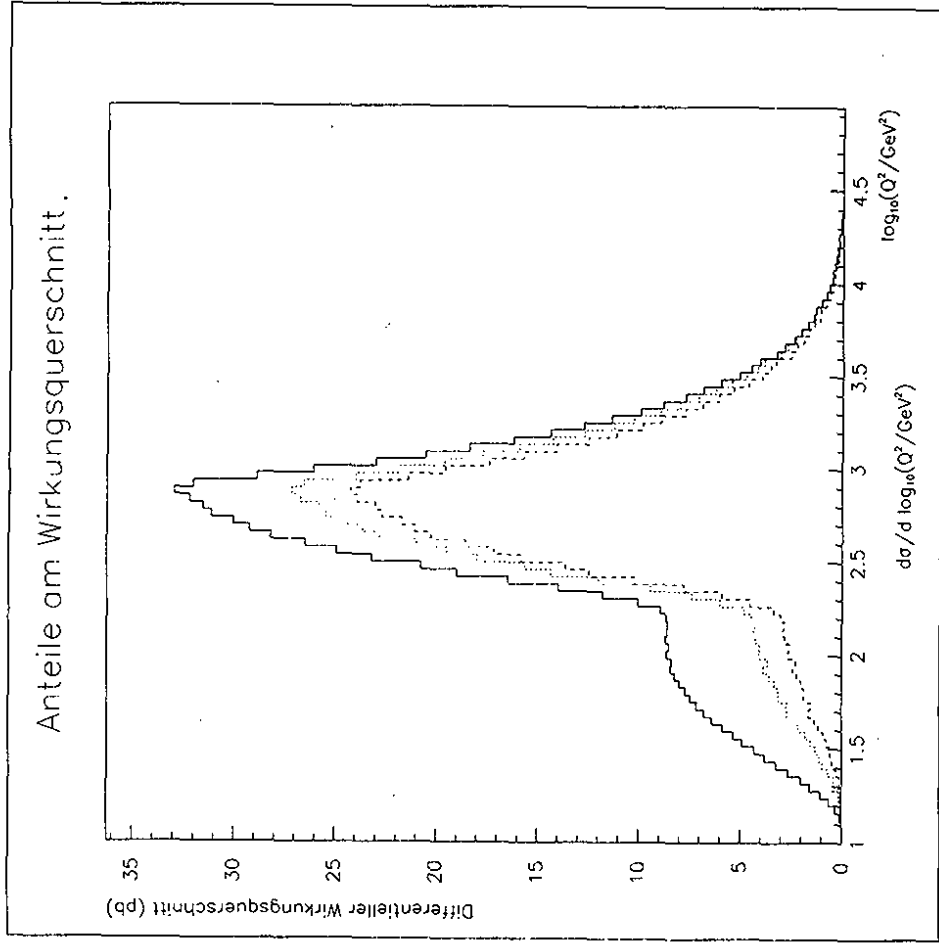


Abbildung 29: Verteilungen in  $Q^2$  bei Standardwerten

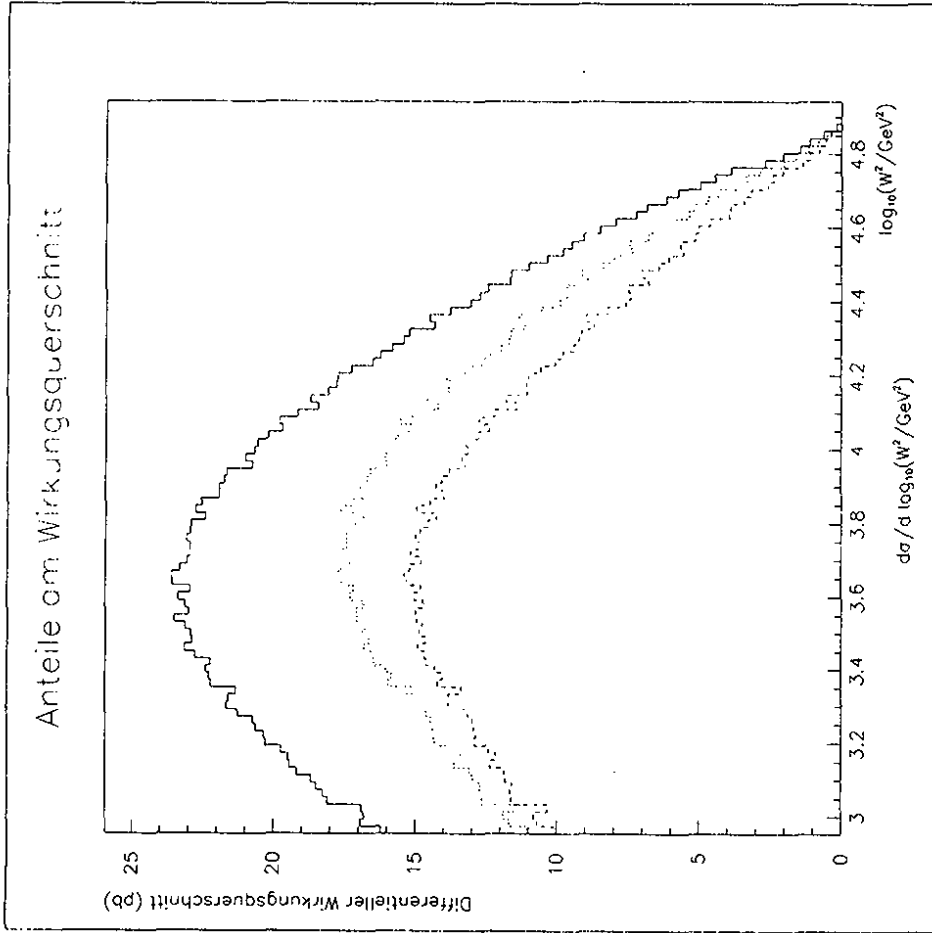


Abbildung 30: Verteilungen in  $W^2$  bei Standardwerten

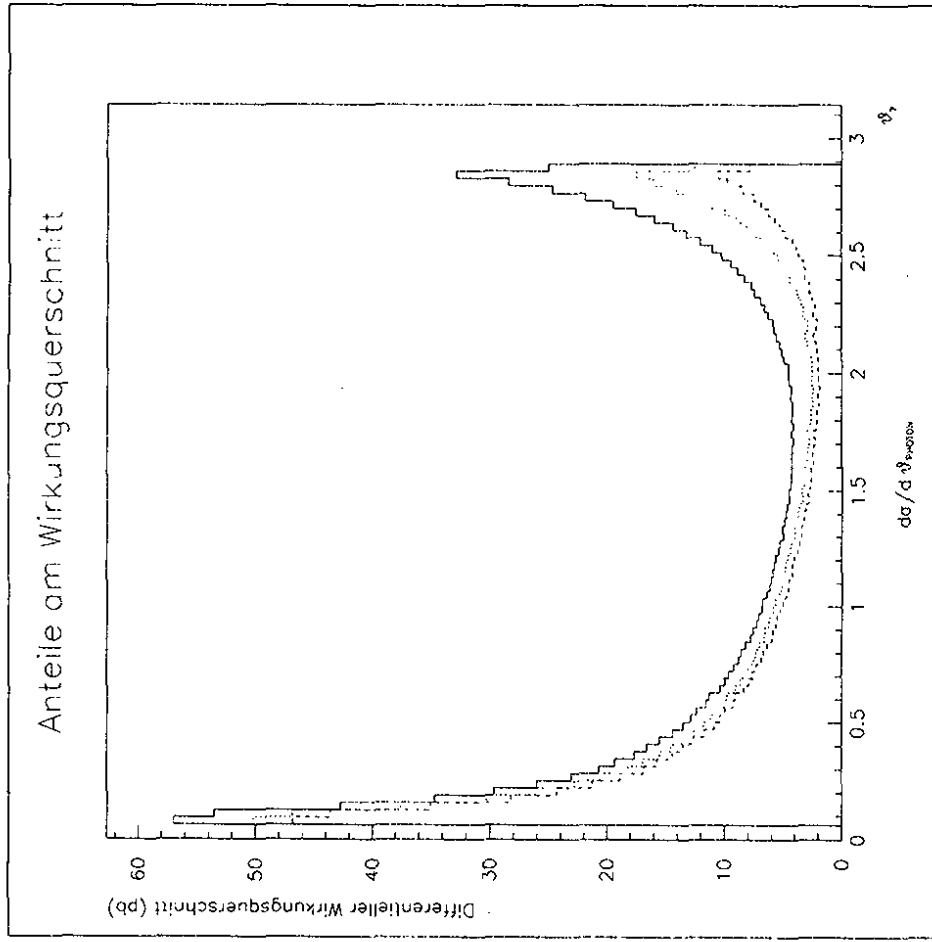


Abbildung 31: Verteilungen in  $\theta$ , bei Standardwerten

### 7.3 Art der Photonabstrahlung

Bei Betrachtung der in  $x$  differentiellen Wirkungsquerschnitte auf Abbildung 32 und 33 zeigt sich, daß für kleiner werdendes  $x$  der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß  $e^-p \rightarrow e^- \gamma (1+1) \text{ Jets}$  mit und ohne Korrekturen stets ansteigt. Dies ist in dem Propagatorfaktor des virtuellen Photons  $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{xys}$  bei hadronischer Photonabstrahlung bzw.  $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{xy5}$  bei leptonischer Photonabstrahlung begründet. Der Einfluß der Korrekturen macht sich qualitativ in einer stärkeren Unterdrückung der hadronischen Photonabstrahlung bemerkbar.

Die Besonderheiten der  $y$ - und  $Q^2$ -Verteilungen lassen sich durch die folgenden Überlegungen erklären. Nach [Kwi91] ist die Photonenergie bei Photonabstrahlung in Elektronrichtung

$$E_\gamma(\theta_\gamma = 0) \leq y \frac{1-x}{1-xy} E_e. \quad (145)$$

Da die leptonische Photonabstrahlung bevorzugt in Elektronrichtung geschieht, wird die Photonabstrahlung wegen der Bedingung  $E_\gamma \geq E_{\gamma,\text{min}}$  mit  $x \approx 0$  für

$$\log_{10} y < \log_{10} \frac{E_{\gamma,\text{min}}}{E_e} = -0.72 \quad (146)$$

unterdrückt. Die leptonische Photonabstrahlung trägt in der  $y$ -Verteilung also nur oberhalb von  $\log_{10} y \simeq -0.72$  bei. Ereignisse mit kleinerem  $y$  gehören zur Photonabstrahlung mit großem Winkel  $\theta_\gamma$  und sind somit durch hadronische Photonabstrahlung dominiert. Da die  $x$ -Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnittes keine auffälligen Maxima oder Schultern besitzt und  $Q^2 = xyS$  gilt, findet man die Komponenten der leptonischen und hadronischen Photonabstrahlung auch den  $Q^2$ -Verteilungen von Abbildung 29, 36 und 37 getrennt. Das Maximum bei  $Q^2 \simeq 1000 \text{ GeV}^2$  gehört zur leptonischen Photonabstrahlung. Die Schulter bei  $Q^2 \simeq 100 \text{ GeV}^2$  stammt von der hadronischen Photonabstrahlung. Ohne Korrekturen machen sich diese beiden Maxima klar in der Summe aller Anteile bemerkbar. Mit Korrekturen wird der Anteil der hadronischen Photonabstrahlung so klein, daß in der Summe aller Anteile das durch die hadronische Photonabstrahlung hervorgerufene Maximum in der Flanke des durch die leptonische Photonabstrahlung hervorgerufenen Maximums untergeht.

Bei den in  $W^2$  differentiellen Wirkungsquerschnitten auf Abbildung 38 und 39 wird sichtbar, daß der Effekt der Korrekturen in einer starken Unterdrückung der hadronischen Photonabstrahlung

bei kleinerem  $W^2$  besteht.

Auch bei den hinsichtlich des Winkels  $\theta_\gamma$  differentiellen Wirkungsquerschnitten auf den Abbildungen 40 und 41 macht sich der Einfluß der Korrekturen bemerkbar. Die hadronische Photonabstrahlung wird durch die Korrekturen stärker unterdrückt. Dies führt zu einem geänderten Verhältnis der Maxima. Ohne Korrekturen erreicht die maximale hadronische Photonabstrahlung — differentiell in  $\theta_\gamma$  betrachtet — mehr als die Hälfte der maximalen leptonischen Photonabstrahlung. Durch den Einfluß der Korrekturen sinkt dieses Verhältnis auf unter ein Viertel. Wie man der Abbildung 40 entnehmen kann, ist es auf dem Baumgraphenniveau durch einen Schnitt an das Photon von  $\theta_\gamma \geq 1.8 \simeq 103^\circ$  möglich, die Ereignisse mit hadronischer Photonabstrahlung zu isolieren. Bei Berücksichtigung der Korrekturen sollte dieser Schnitt, wie man Abbildung 41 entnehmen kann, auf  $\theta_\gamma \geq 2.2 \simeq 126^\circ$  gesetzt werden. Der nächste Abschnitt ist der Diskussion der Wirkungsquerschnitte bei Hadronenschnitten, d.h. bei Schnitten, die die hadronische Photonabstrahlung anreichern, gewidmet.

### 7.4 Wirkungsquerschnitte bei Hadronenschnitten

Bei Verwendung der Schnitte<sup>38</sup>:

$$\begin{aligned} x_{\text{min}} &= 0.01, & x_{\text{max}} &= 0.5, \\ y_{\text{min}} &= 0.01, & y_{\text{max}} &= 0.9, \\ Q_{\text{min}}^2 &= 10 \text{ GeV}^2, & W_{\text{min}}^2 &= 900 \text{ GeV}^2, \\ \theta_{\gamma,\text{min}} &= 126^\circ, & \theta_{\gamma,\text{max}} &= 176^\circ, \\ \theta_{\gamma e^-, \text{min}} &= 15^\circ, & \theta_{\gamma e^-, \text{min}} &= 15^\circ, \\ E_{\gamma,\text{min}} &= 5 \text{ GeV}, & y_{\text{cut}}^{\text{jet}} &= 0.01 \end{aligned} \quad (147)$$

ergeben sich Wirkungsquerschnitte gemäß Tabelle 16. Der Effekt dieser Hadronenschnitte im Vergleich zu den Standardschnitten besteht in einer Reduktion des Bornschen Wirkungsquerschnittes auf ein Drittel. Gleichzeitig steigt die Bedeutung der Korrekturen, die nun zu einer Reduktion des Wirkungsquerschnittes des Prozesses  $e^-p \rightarrow e^- \gamma (1+1) \text{ Jets}$  um 65 Prozent führen.

<sup>38</sup>Diese Schnitte unterscheiden sich nur durch die Beschränkung des Winkels der Photonabstrahlung von den Schnitten aus (144).

| Prozeß bis zur Ordnung   | Wirkungsquerschnitt  | Prozent |
|--|----------------------|---------|
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^0)$ | $9.890 \pm 0.006$ pb | 100%    |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$ | $3.44 \pm 0.01$ pb   | 35%     |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$ | $1.923 \pm 0.003$ pb | 19%     |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$ | $5.36 \pm 0.01$ pb   | 54%     |

Tabelle 16: Tabelle der Wirkungsquerschnitte bei Hadronenstößen

Durch die Hadronenstöße wird die hadronische Photonabstrahlung — wie man den Tabellen 17, 18 und 19 entnehmen kann — stets dominant. Dies hat laut Tabelle 20 zur Folge, daß eine andere Linearkombination der Down-Quark-, Up-Quark und Gluon-Dichten in den Wirkungsquerschnitt eingeht. Tabelle 15 zeigt, daß die relativen Anteile der Down-Quark-, Up-Quark- und Gluondichten zum Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s)$  bei Standardstößen (21%, 111%, -31%) sind. Bei Hadronenstößen ergeben sich relative Anteile von (13%, 170%, -83%). Die Verwendung von Standard- und Hadronenstößen erlaubt somit eine Vermessung einer anderen Linearkombination der Partondichten bei denselben experimentellen Rahmenbedingungen. Insofern stellt die Betrachtung des Photonwinkels eine Ergänzung des Standardverfahrens zur Bestimmung der Up-Quark- und Down-Quark-Dichten dar, welches verschiedene Experimente mit unterschiedlichen systematischen Fehlern benötigt. Das Standardverfahren[Par94] zur Bestimmung der Dichten besteht in der Vermessung der Elektron-Proton- und der Elektron-Deuteron-Streuung und Berechnung der Partondichten unter der Annahme der Isospinsymmetrie aus diesen Ergebnissen. Dabei handelt es sich um Experimente mit verschiedenen einlaufenden Teilchenstrahlen und deshalb unterschiedlichen systematischen Fehlern. Das in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Verfahren zeichnet sich dadurch aus, daß unter denselben experimentellen Rahmenbedingungen zwei unterschiedliche Linearkombinationen der Partondichten vermessen werden können. Der Nachteil des Verfahrens besteht in größeren statistischen Fehlern.

|          | Quark | Antiquark | $\Sigma$ |
|----------|-------|-----------|----------|
| Had.     | 62%   | 30%       | 91%      |
| Lep.     | 4%    | 1%        | 5%       |
| Int.     | 6%    | -2%       | 4%       |
| $\Sigma$ | 72%   | 28%       | 100%     |

Tabelle 17: Prozentuale Anteile am Wirkungsquerschnitt für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^0)$  bei Hadronenstößen

|          | Quark | Antiquark | Gluon | $\Sigma$ |
|----------|-------|-----------|-------|----------|
| Had.     | 106%  | 59%       | -81%  | 84%      |
| Lep.     | 8%    | 2%        | -2%   | 9%       |
| Int.     | 12%   | -5%       | 0%    | 7%       |
| $\Sigma$ | 127%  | 56%       | -83%  | 100%     |

Tabelle 18: Anteile am Wirkungsquerschnitt für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$  Jets bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$  bei Hadronenstößen

|          | Quark | Antiquark | Gluon | $\Sigma$ |
|----------|-------|-----------|-------|----------|
| Had.     | 41%   | 10%       | 40%   | 91%      |
| Lep.     | 4%    | 1%        | 1%    | 6%       |
| Int.     | 4%    | -1%       | 0%    | 3%       |
| $\Sigma$ | 49%   | 10%       | 41%   | 100%     |

Tabelle 19: Anteile am Wirkungsquerschnitt für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$  Jets bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$  bei Hadronenstößen

| Prozeß bis zur Ordnung   | Had. |      | Lep. |     | $\Sigma$ |
|--|------|------|------|-----|----------|
|  | Down | Up   | Down | Up  |          |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^0)$ | 7%   | 93%  | 0%   | 95% | 93%      |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$ | 13%  | 183% | -96% | 97% | 170%     |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$ | 3%   | 53%  | 44%  | 69% | 56%      |
| $e^-p \rightarrow e^- \gamma(n+1)$ Jets<br>bis zu $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^1)$ | 9%   | 134% | -43% | 90% | 129%     |

Die Einträge sind jeweils auf die Summe von Down-, Up- und Gluon-Anteil als 100% normiert.

Tabelle 20: Anteile der Partondichten bei Hadronenstößen

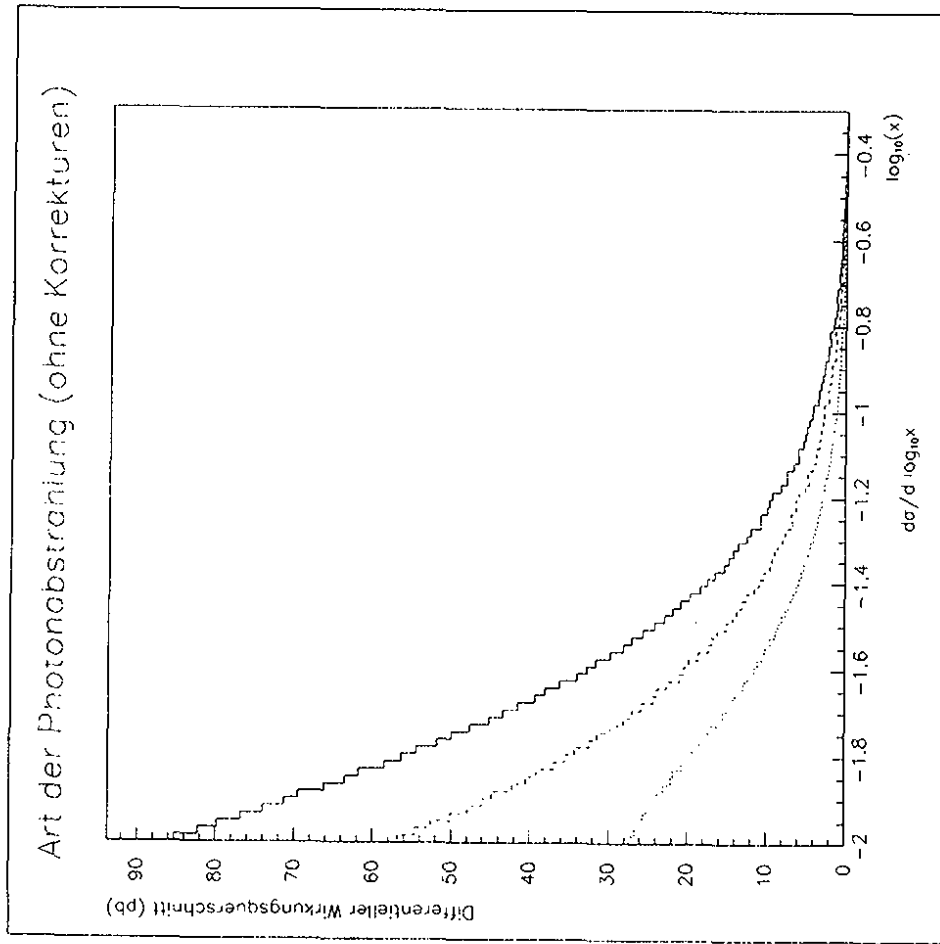


Abbildung 32: Verteilungen in  $x$  ohne Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$

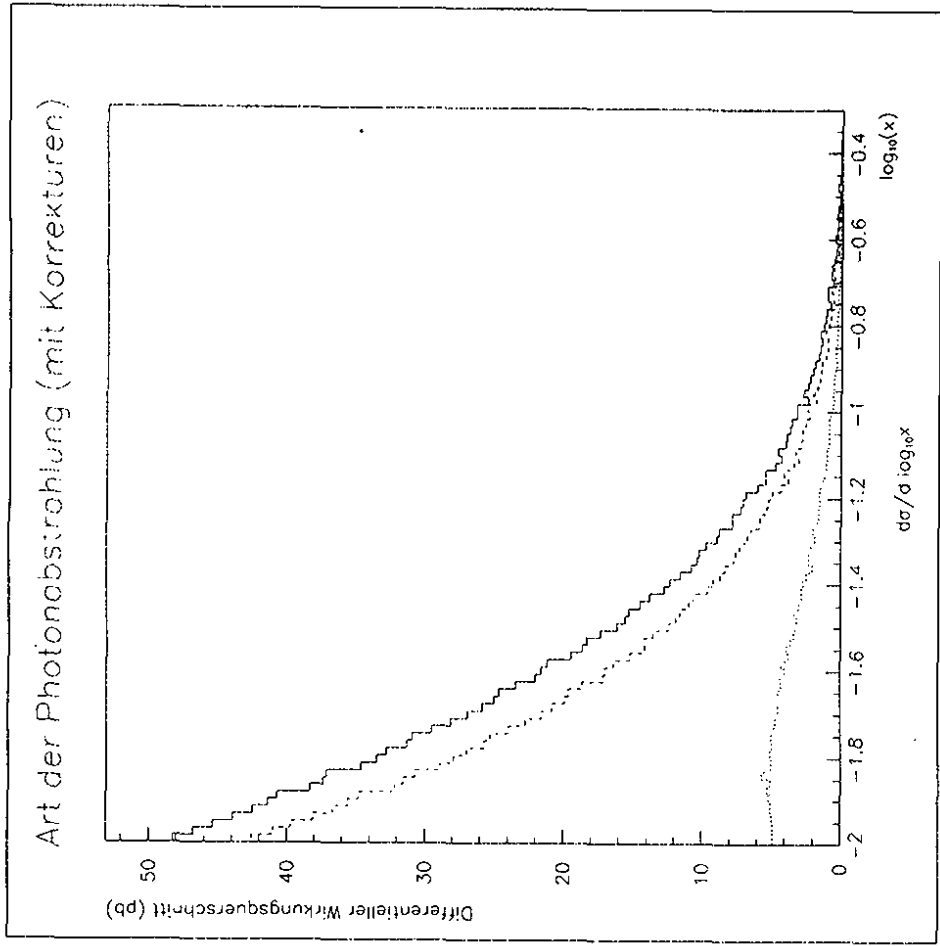


Abbildung 33: Verteilungen in  $x$  mit Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$

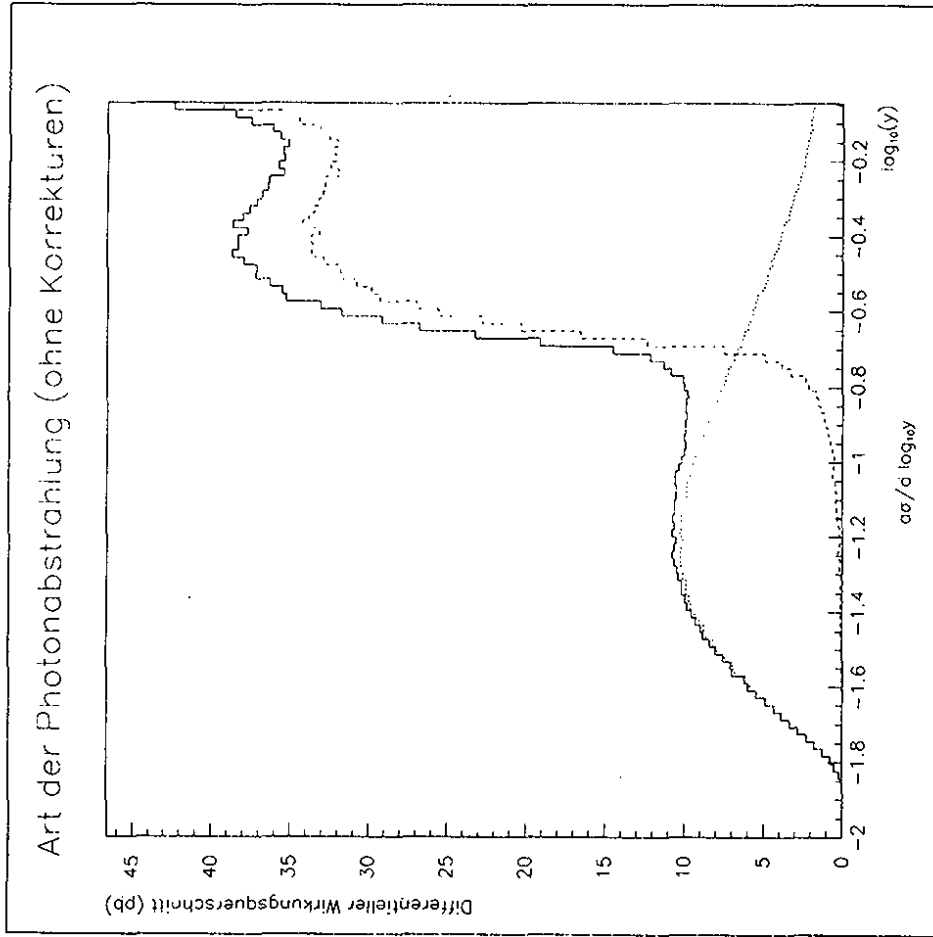


Abbildung 34: Verteilungen in  $y$  ohne Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)$  Jets

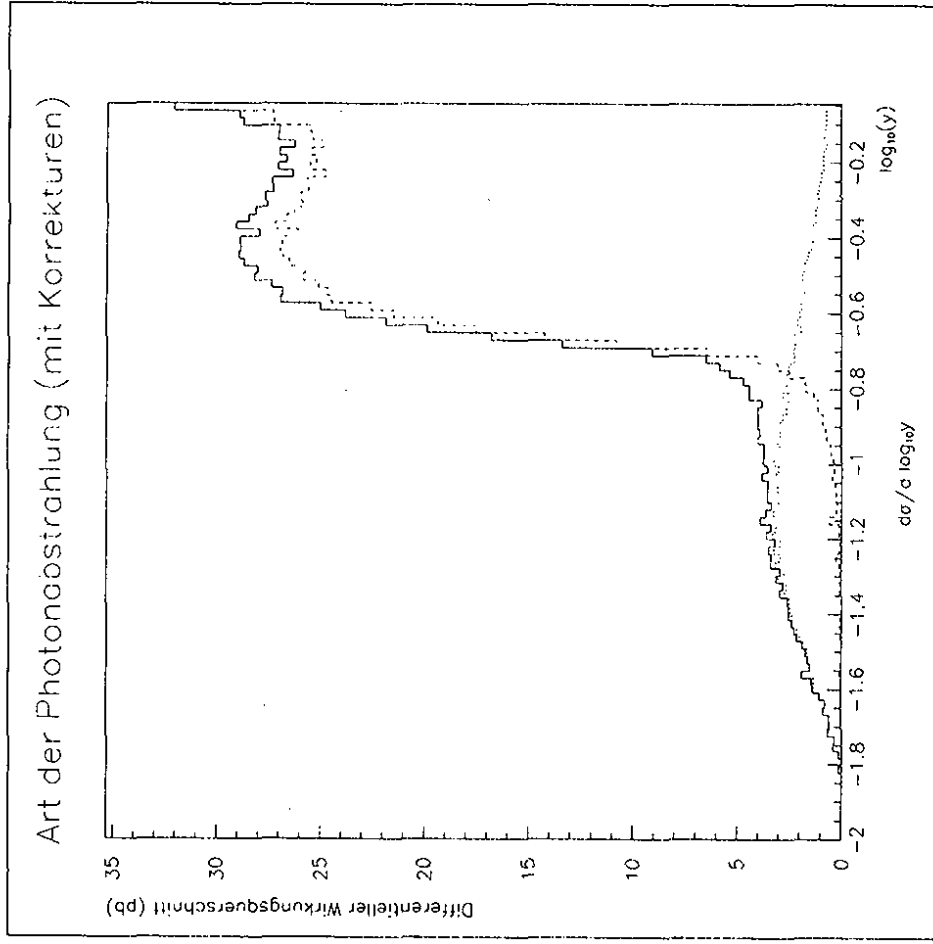


Abbildung 35: Verteilungen in  $y$  mit Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)$  Jets

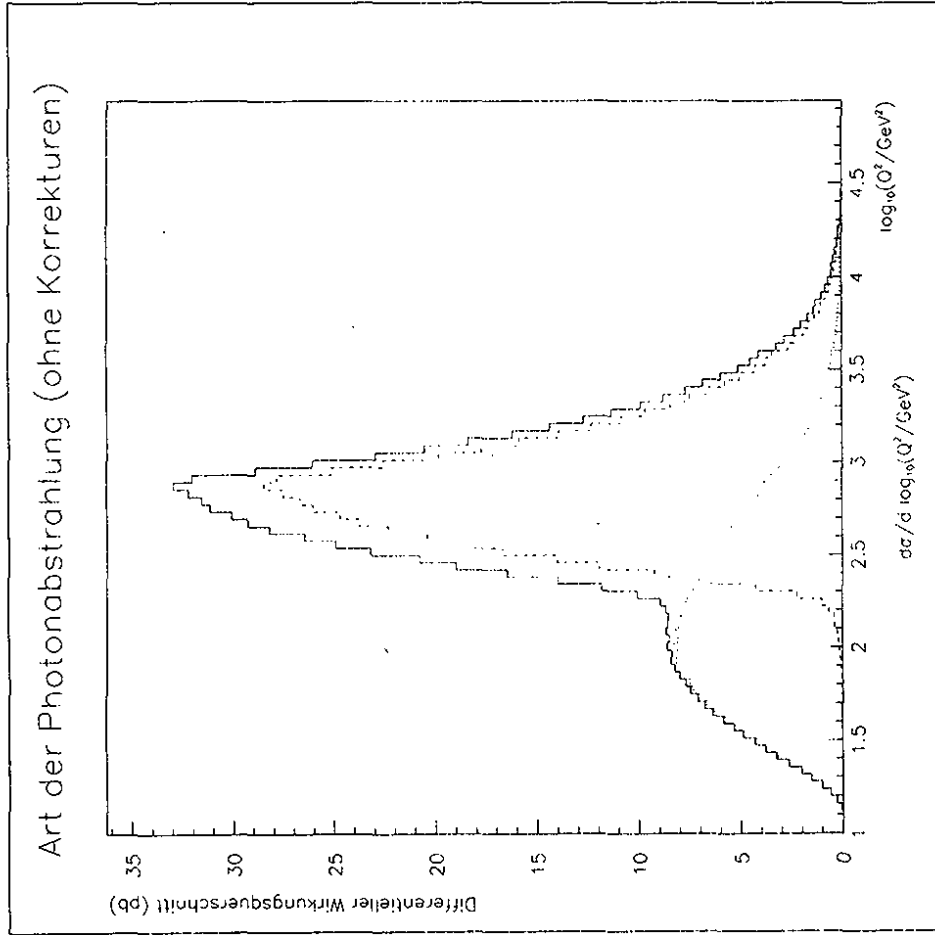


Abbildung 36: Verteilungen in  $Q^2$  ohne Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$

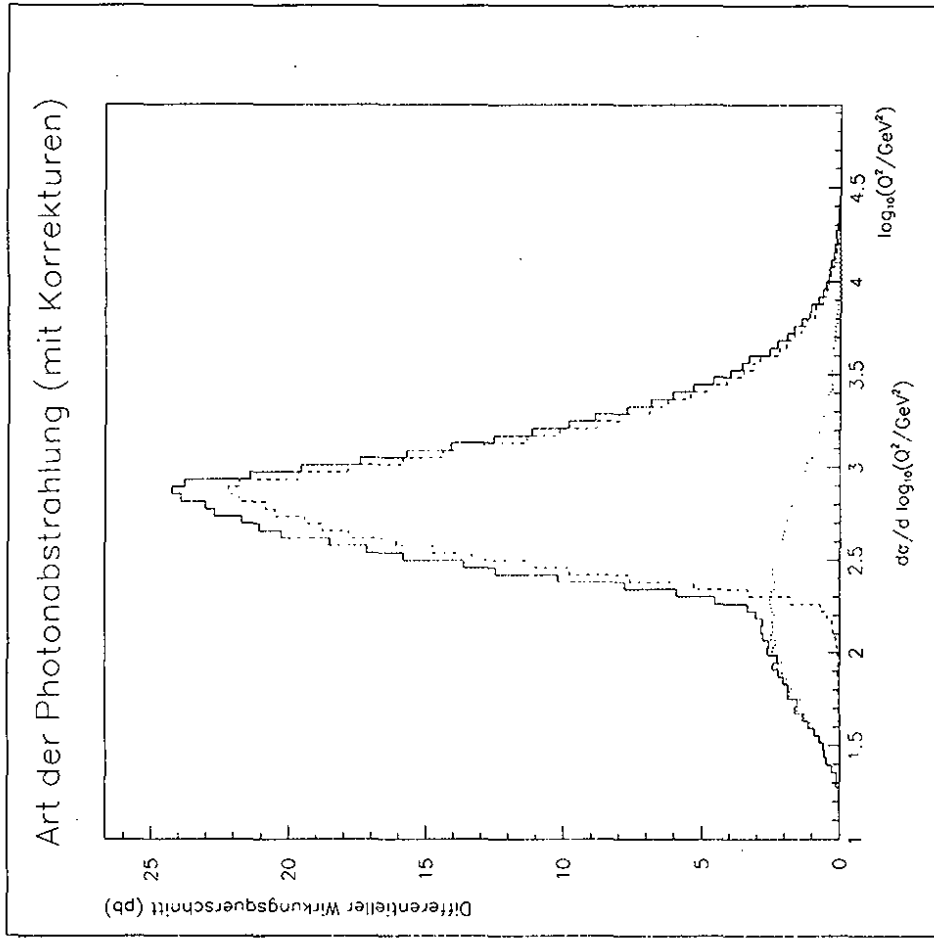


Abbildung 37: Verteilungen in  $Q^2$  mit Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$



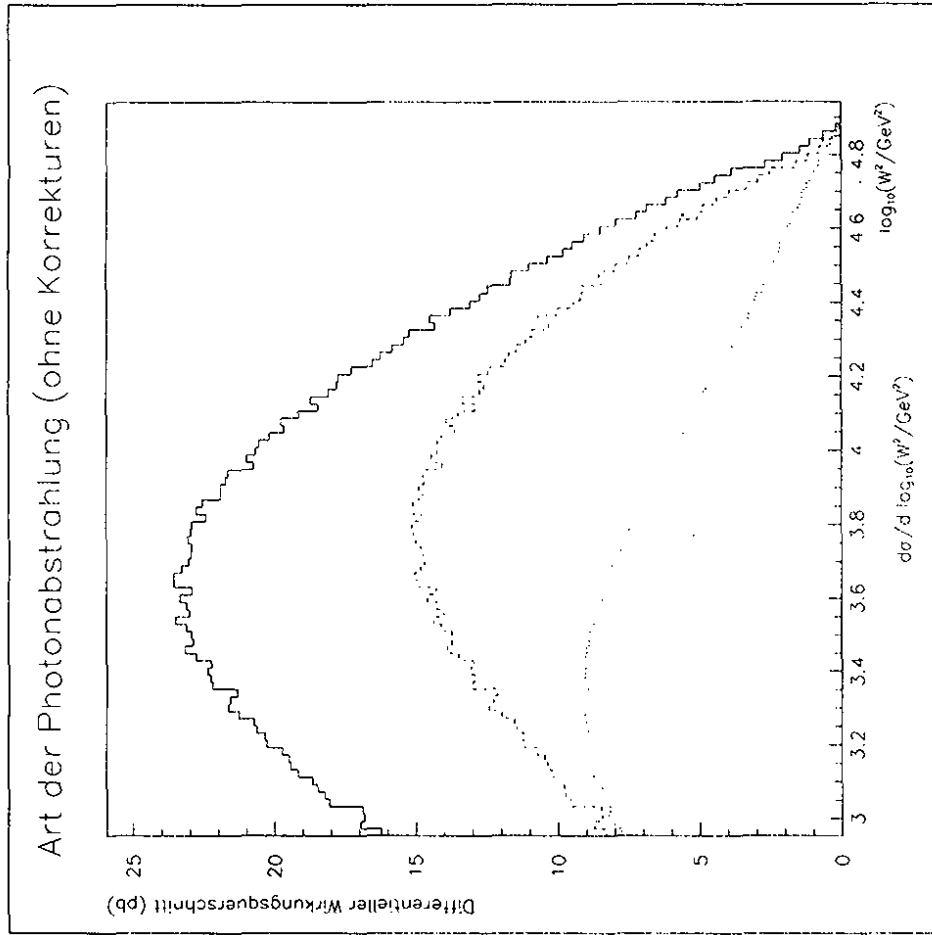


Abbildung 38: Verteilungen in  $W^2$  ohne Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$

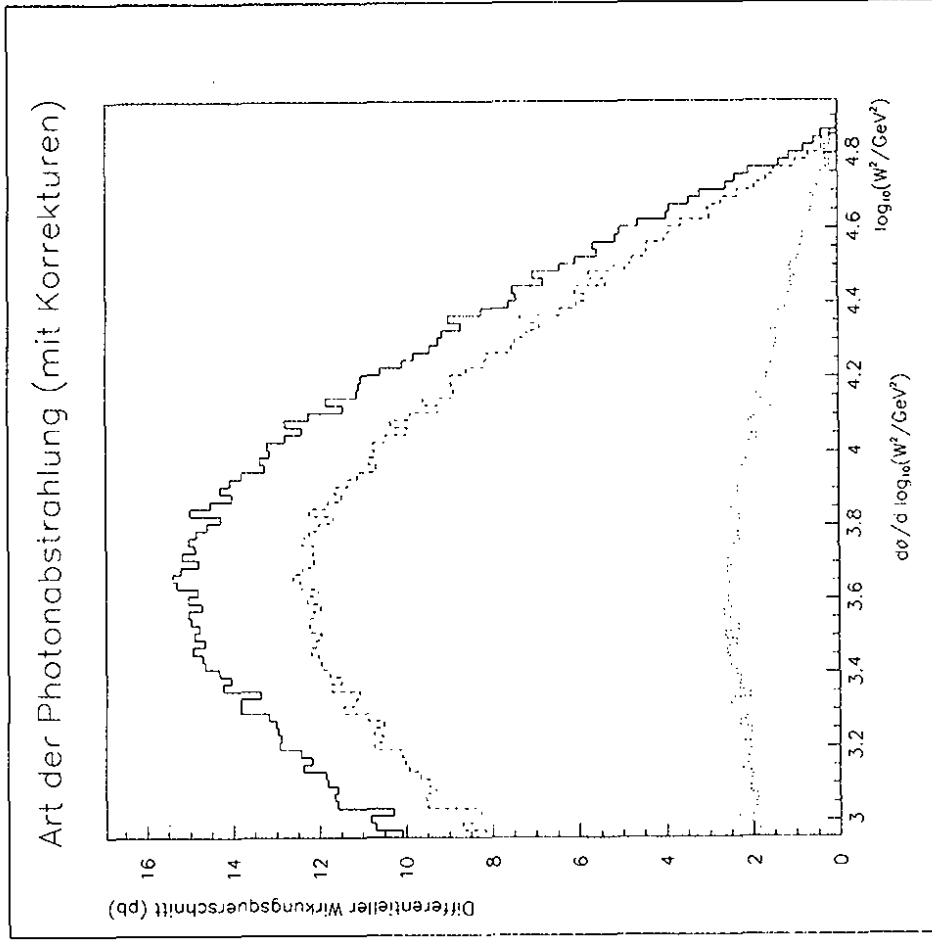


Abbildung 39: Verteilungen in  $W^2$  mit Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1) \text{ Jets}$

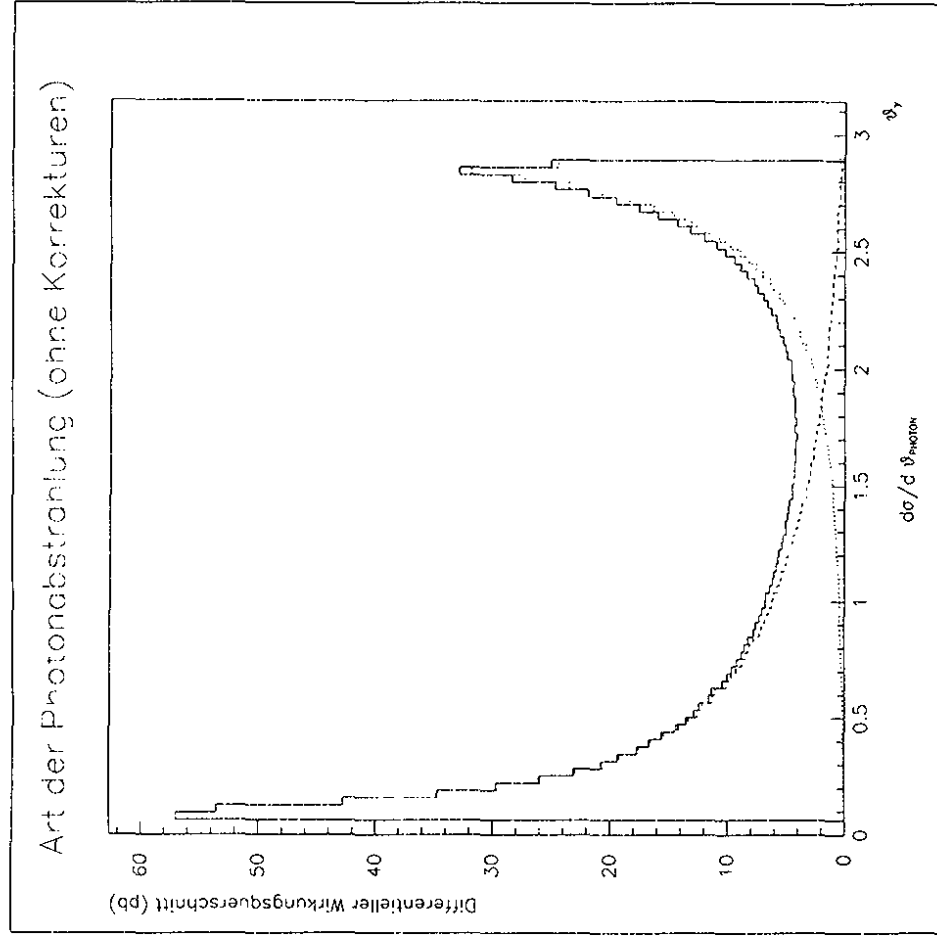


Abbildung 40: Verteilungen in  $\theta_\gamma$  ohne Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma (1+1) \text{ Jets}$

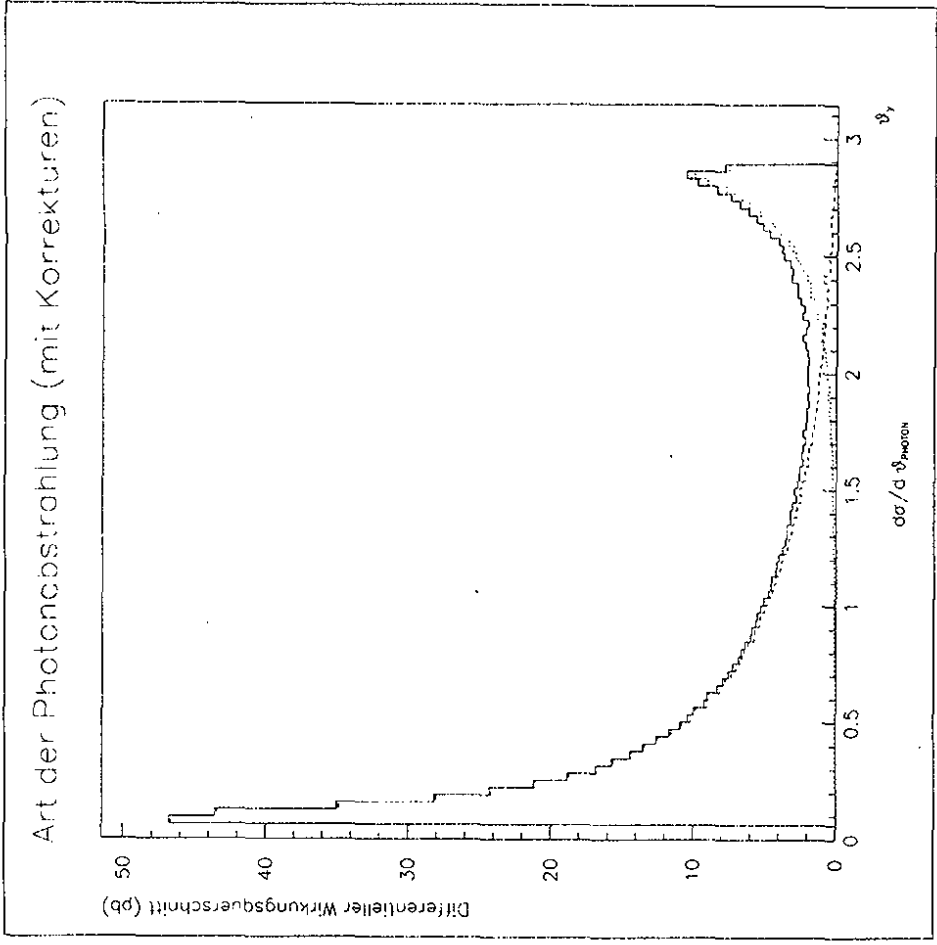


Abbildung 41: Verteilungen in  $\theta_\gamma$  mit Korrekturen für  $e^-p \rightarrow e^- \gamma (1+1) \text{ Jets}$

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die wesentlichen Neuerungen dieser Arbeit dargestellt.

Zum einen wurde gezeigt, daß Methoden zur systematischen Berechnung von Korrekturen ... wie sie bei den virtuellen Korrekturen schon lange bekannt sind ... bei Verwendung eines lorentzinvarianten Schnittes auf die reellen Korrekturen angewendet werden können. Dieser neue Ansatz erlaubt die Reduktion beliebiger masseloser Bremsstrahlungsintegrale auf 5 hier angegebene skalare Standardintegrale. Der Ansatz ist darum geeignet, in der Zukunft durch den Einsatz von Computer-Algebra-Programmen die Berechnung von reellen Korrekturen wesentlich zu erleichtern.

Mit Hilfe dieser Methode wurden die QCD-Korrekturen zum Prozeß  $e^-p \rightarrow e^- \gamma (1+1)$  Jets berechnet. Dabei stellte sich zum einen heraus, daß die Terme, die durch die Interferenz der Photonabstrahlung vom Quark mit der Photonabstrahlung vom Elektron entstehen, sowohl numerisch als auch algebraisch aufwendig zu berechnen sind. Sie tragen zu einigen Prozent zu den Korrekturen bei. Die Strahlungskorrekturen in Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  insgesamt bewirken bei den angegebenen Standardschnitten eine 37-prozentige Reduktion des Wirkungsquerschnittes.

Außerdem wurde gezeigt, daß durch die Betrachtung der Verteilung des Photonwinkels  $\theta_\gamma$  zwischen leptonischer und hadronischer Photonabstrahlung unterschieden werden kann. Der Einfluß der Korrekturen ist dabei besonders stark bei hadronischer Photonabstrahlung. Bei experimentellen Analysen mit einem Photon im Endzustand kann dennoch der Abstrahlungswinkel des Photons genutzt werden, um die hadronische Photonabstrahlung anzureichern. Da die Quarkladung bei Prozessen ohne Photonabstrahlung in zweiter Potenz, bei der hadronischen Photonabstrahlung aber in vierter Potenz in den Wirkungsquerschnitt eingeht, kann dabei eine andere Linearkombination der Partondichten vermessen werden. Somit können unter denselben experimentellen Bedingungen und mit denselben systematischen Fehlern zwei unterschiedliche Linearkombinationen der Partondichten bestimmt werden, um somit zusätzliche Informationen über die Partondichten zu gewinnen.

## Literatur

- [ACP<sup>+</sup>92] P. Aurenche, P. Chiappetta, M. Fontannaz, J. P. Guillet und E. Pilon. Higher order QCD corrections to the photoproduction of a direct photon at HERA. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 56:589-599, 1992.
- [AEM78] G. Altarelli, R. K. Ellis und G. Martinelli. Leptoproduction and Drell-Yan Processes Beyond the Leading Approximation in Chromodynamics. *Nuclear Physics B*, 143:521-545, 1978.
- [AEM79] G. Altarelli, R. K. Ellis und G. Martinelli. Large Perturbative Corrections to the Drell-Yan Process in QCD. *Nuclear Physics B*, 157:461-497, 1979.
- [AG77] G. Altarelli und G. Parisi. Asymptotic Freedom in Parton Language. *Nuclear Physics B*, 126:298-318, 1977.
- [AGS80] B. Andersson, G. Gustafson und T. Sjöstrand. A Three-Dimensional Model for Quark and Gluon Jets. *Z. Physik C. Particles and Fields*, 6:235-240, 1980.
- [AKV89] G. Altarelli, R. Kleiss und C. Verzegnassi. Hrsg. *Z. Physik at LEP 1*. Jgg. 1-3. 1989. GERN 89-08.
- [ALE92] ALEPH Collaboration. Evidence for the triple-gluon vertex from measurements of the QCD colour factors in Z decay into four jets. *Physics Letters B*, 284:151-162, 1992.
- [APKW80] A. Ali, E. Pietarinen, G. Kramer und J. Willrodt. A QCD Analysis of the High Energy  $e^+e^-$  Data from PETRA. *Physics Letters*, 93B(1,2):155-160, 1980.
- [AR89] P. B. Arnold und M. Hall Reno. The Complete Computation of High- $p_T$  W and Z Production in Second-Order QCD. *Nuclear Physics B*, 319:37-71, 1989.
- [AS70] M. Abramowitz und I. A. Stegun, Hrsg. *Handbook of Mathematical Functions*, Jgg. 55 of *Applied Mathematics Series*. National Bureau of Standards, 1970.
- [Ash72] J. F. Ashmore. A Method of Gauge-Invariant Regularization. *Lettere al Nuovo Cimento*, 4(8):289-290, 1972.

- [BCCR89a] D. Yu. Bardin, Č. Burdík, P. Ch. Christova und T. Riemann. Electroweak radiative corrections to deep inelastic scattering at HERA. Neutral current scattering. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 42:679–692, 1989.
- [BCCR89b] D. Yu. Bardin, Č. Burdík, P. Ch. Christova und T. Riemann. Electroweak radiative corrections to deep inelastic scattering at HERA. Charged current scattering. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 44:149–156, 1989.
- [BD64] J. D. Bjorken und S. D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, San Francisco, Toronto, London, 1964.
- [BDI\*94] E. E. Boos, M. N. Dubinin, V. A. Ilyin, A. E. Pukhov, S. A. Shichanin, T. Kaneko, S. Kawabata, Y. Kurihara und Y. Shimizu. Automatic Calculations in High Energy Physics by GRACE and CompHEP. *International Journal of Modern Physics C*, 5(4):615–628, 1994.
- [BG72] C. G. Bollini und J. J. Giambiagi. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. *Nuovo Cimento*, 12B(1):20–26, 1972.
- [BH91] G. Bernardi und W. Hildesheim. A detailed simulation of  $F_2$  measurability at HERA. In W. Buchmüller und G. Ingelman, Hrsg., *Proceedings of the HERA Workshop*, Jgg. 1, Seiten 79–100. DESY, 1991.
- [BI91] W. Buchmüller und G. Ingelman, Hrsg. *Physics at HERA*, Jgg. 1-3, 1991.
- [BIR87] P. N. Burrows, G. Ingelman und E. Ros. Jet Reconstruction and Jet Properties. In R. D. Pececi, Hrsg., *Proceedings of the HERA Workshop*, Jgg. 1, Seiten 167–181. DESY, 1987.
- [BK73] E. Byckling und K. Kajantie. *Particle Kinematics*. John Wiley, London, New York, Sydney, Toronto, 1973.
- [BK92] T. Brodtkorb und J. G. Körner. Lepton-hadron correlations to  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  in  $(2+1)$  jet production at electron-proton colliders. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 54:519–526, 1992.
- [BKMS89] T. Brodtkorb, J. G. Körner, E. Mirkes und G. A. Schuler. QCD Jets at HERA II.  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  four-jet cross-sections. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 44:415–432, 1989.
- [Bö492] D. Böleker. *Der Beitrag des direkten Photons zur Photoproduktion von Jets in Elektron-Proton Kollisionen zur Ordnung  $\alpha_s^2$* . Dissertation. Universität Hamburg, 1992.
- [BP69] J. D. Bjorken und E. A. Paschos. Inelastic Electron-Proton and  $\gamma$ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon. *Physical Review*, 185(5):1975–1982, 1969.
- [BSS7a] M. Röhm und H. Spiesberger. Radiative Corrections to Charged Current Deep Inelastic Lepton Nucleon Scattering at HERA Energies. *Nuclear Physics B*, 304:749–766, 1987.
- [BSS7b] M. Böhm und H. Spiesberger. Radiative Corrections to Neutral Current Deep Inelastic Lepton Nucleon Scattering at HERA Energies. *Nuclear Physics B*, 294:1081–1110, 1987.
- [CDF95] CDF Collaboration. Observation of Top Quark Production in  $\bar{p}p$  Collisions. FERMILAB-PUB-95/022-E, 1995. hep-ex/9503002.
- [CSS94] K. Charchuk, G. A. Schuler und H. Spiesberger. Combined QED and QCD radiative effects in deep inelastic lepton-proton scattering: the Monte Carlo generator DJANGO6. *Computer Physics Communications*, 81:381–402, 1994.
- [dB90] W. de Boer. Review of QCD at LEP and SLC. CERN-PPE/90-161, 1990.
- [DEL91] DELPHI Collaboration. Experimental study of the triple-gluon vertex. *Physics Letters B*, 255:466–476, 1991.
- [DEL93] DELPHI Collaboration. Measurement of the triple-gluon vertex from 4-jet events at LEP. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 59:357–368, 1993.
- [DZE95] DZERO Collaboration. Observation of the Top Quark, 1995. hep-ex/9503003.
- [EGM\*78] R. K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H. D. Politzer und G. G. Ross. Factorization and the Parton Model in QCD. *Physics Letters*, 78B(2,3):281–284, 1978.

[Gra91a] D. Graudenz. Next-to-leading-order QCD corrections to jet cross sections and jet rates in deeply inelastic electron-proton scattering. *Physical Review D*, 49(7):3291-3319, 1994.

[Gra94b] D. Graudenz. PROFET: Jet Cross Sections in Deeply Inelastic Electron Proton Scattering - Version 4.1. CERN-TH.7420/94, 1994. HEP-PH-9408383.

[GV94] L.E. Gordon und W. Vogelsang. Isolated Prompt Photon Production at HERA. Universität Dortmund DO-TH 94/18, 1994.

[GW73] D. J. Gross und F. Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Physical Review Letters*, 30(26):1343-1346, 1973.

[H1 93] H1 Collaboration. Measurement of the proton structure function  $F_2(x, Q^2)$  in the low-x region at HERA. *Nuclear Physics B*, 407:515-535, 1993.

[H1 94] H1 Collaboration. Determination of the Strong Coupling Constant from Jet Rates in Deep Inelastic Scattering. DESY 94-220, 1994.

[H1 95] H1 Collaboration. Experimental Study of Hard Photon Radiation Processes at HERA. DESY 95-024, 1995.

[Head85] A. C. Heath. *REDUCE USER'S MANUAL Version 3.2*. The Rand Corporation, Santa Monica, 1985.

[HOS+79] P. Ilyer, P. Osland, H. G. Sander, T. F. Walsh und P. M. Zerwas. Quantum Chromodynamics and Jets in  $e^+e^-$ . *Nuclear Physics B*, 161:349-372, 1979.

[HvNM91] R. Hamberg, W. L. van Neerven und T. Matsuura. A Complete Calculation of the Order  $\alpha_s^3$  Correction to the Drell-Yan K-Factor. *Nuclear Physics B*, 359:343-405, 1991.

[JAD86] JADE Collaboration. Experimental Studies on Multijet Production in  $e^+e^-$  Annihilation at PETRA Energies. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 33:23-31, 1986.

[JAD92] JADE Collaboration. Experimental Study of Jets in Electron-Positron Annihilation. *Physics Letters B*, 101:129-134, 1992.

[EGM+79] R. K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H. D. Politzer und G. G. Ross. Perturbation Theory and the Parton Model in QCD. *Nuclear Physics B*, 152:285-329, 1979.

[ERT81] R. K. Ellis, D. A. Ross und A. E. Terrano. The Perturbative Calculation of Jet Structure in  $e^+e^-$  Annihilation. *Nuclear Physics B*, 178:421-456, 1981.

[Fey49] R. P. Feynman. The Theory of Positrons. *Physical Review*, 76(6):749-759, 1949.

[Fey69] R. P. Feynman. Very High-Energy Collisions of Hadrons. *Physical Review Letters*, 23(24):1415-1417, 1969.

[Fey72] R. P. Feynman. *Photon-Hadron Interactions*. W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972.

[FF78] R. D. Field und R. P. Feynman. A Parametrization of the Properties of Quark Jets. *Nuclear Physics B*, 136:1-76, 1978.

[FIK+91] M. Fleischer, G. Ingelman, G. Knies, K. Meier, C. Pichler und A. Wegner. The Hadronic Final State in ep-Scattering: Global Features and Jet Reconstruction. In W. Buchmüller und G. Ingelman, Hrsg., *Proceedings of the HERA Workshop*. Jgg. 1, Seiten 303-320, 1991.

[FP82] W. Furmanski und R. Petronzio. Lepton-Hadron Processes Beyond Leading Order in Quantum Chromodynamics. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 11:293-314, 1982.

[Fur82] M. Furman. Study of a Non-Leading QCD Correction to Hadron Calorimeter Reactions. *Nuclear Physics B*, 197:413-445, 1982.

[Gla61] S. L. Glashow. Partial-Symmetries of Weak Interactions. *Nuclear Physics*, 22:579-588, 1961.

[GM64] M. Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Physics Letters*, 8(3):214-215, 1964.

[Gra90] D. Graudenz. *Der Drei-Jet-Wirkungsquerschnitt zur Ordnung  $\alpha_s^3$  in der tief-inelastischen Elektron-Proton-Streuung*. Dissertation, Universität Hamburg, 1990.

- [KBD90] J. Kübilbeck, M. Böhm und A. Denner. Feyn Arts - computer-algebraic generation of Feynman graphs and amplitudes. *Computer Physics Communications*, 60:165-180, 1990.
- [Kin62] T. Kinoshita. Mass Singularities of Feynman Amplitudes. *Journal of Mathematical Physics*, 3(4):650-677, 1962.
- [KL83] G. Kramer und B. Lampe. Application of Gegenbauer Integration Method to  $e^+e^-$  Annihilation Process. *Physica Scripta*, 28:585-592, 1983.
- [KL89] G. Kramer und B. Lampe. Jet Cross Sections in  $e^+e^-$  Annihilation. *Fortschritte der Physik*, 37(3):161-206, 1989.
- [KL91] G. Kramer und B. Lampe. QCD corrections to final state photon bremsstrahlung in  $e^+e^-$  annihilation. *Physics Letters B*, 269:401-406, 1991.
- [Kra82] G. Kramer. Higher Order QCD Corrections for  $e^+e^-$  Annihilation Jet Cross Sections - A Reevaluation. In *Proceedings of the XIII. Spring Symposium on High Energy Physics*. Seiten 80-118. Sektion Physik, Karl-Marx-Universität Leipzig, DDR, 1982.
- [Kra94] G. Kramer. Direct Photoproduction at LEP and HERA. In *Workshop on Two-Photon Physics at LEP and HERA. Lund 1994*, Seiten 171-182, 1994.
- [KS91] G. Kramer und H. Spiesberger. Matrix Element Calculation of Quark Bremsstrahlung in  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ . In *Workshop on Photon Radiation from Quarks. Annecy 1991*, CERN 92-04, Seiten 26-40, 1991.
- [KSM91] A. Kwiatkowski, H. Spiesberger und H. J. Möhring. HERACLES - An Event Generator for ep Interactions at HERA Including Radiative Processes, Version 4.1. In W. Buchmüller und G. Ingelman, Hrsg., *Proceedings of the HERA Workshop*, Jgg. 3, Seiten 1294-1310. DESY, 1991.
- [Kwi91] A. Kwiatkowski. *Monte Carlo Simulation of Neutral Current Radiative Processes in Deep Inelastic Electron-Proton Scattering*. Dissertation, Universität Hamburg, 1991.
- [L3 90] L3 Collaboration. A test of QCD based on 4-jet events from  $Z^0$  decays. *Physics Letters B*, 248:227-231, 1990.
- [LN64] T. D. Lee und M. Nauenberg. Degenerate Systems and Mass Singularities. *Physical Review*, 133(6B):1549-1562, 1964.
- [Mar84] W. J. Marciano. Flavor thresholds and  $\Lambda$  in the modified minimal-subtraction scheme. *Physical Review D*, 29(3):580-582, 1984.
- [Mät93] P. Mättig. Photon Emission from Quarks at LEP. CERN-PPE/93-87, 1993.
- [MBD91] R. Mertig, M. Böhm und A. Denner. Feyn Calc - Computer-algebraic calculation of Feynman amplitudes. *Computer Physics Communications*, 64:345-359, 1991.
- [Mic89] D. Michelsen. *Winkelkorrelationen der  $e^+e^-$  Annihilation in 4 Jets*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1989.
- [MP78] W. Marciano und H. Pagels. Quantum Chromodynamics. *Physics Reports*, 36(3):137-276, 1978.
- [MSR94] A. D. Martin, W. J. Stirling und R. G. Roberts. Parton distributions of the proton. *Physical Review D*, 50(11):6734-6752, 1994.
- [Mut87] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics*. World Scientific, Singapore, 1987.
- [MWA<sup>+</sup>92] G. Marchesini, B. R. Webber, G. Abbiendi, I. G. Knowles, M. H. Seymour und L. Stanco. HERWIG 5.1 - a Monte Carlo event generator for simulating hadron emission reactions with interfering gluons. *Computer Physics Communications*, 67:465-508, 1992.
- [MZ91] P. Mättig und W. Zeuner. Final state photon bremsstrahlung in  $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow$  hadrons as a tool for a precise measurement of the weak quark couplings. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 52:31-41, 1991.
- [Nar82] S. Narison. Techniques of Dimensional Regularization and the Two-Point Functions of QCD and QED. *Physics Reports*, 84(4):263-399, 1982.

- [OPA91] OPAL Collaboration. A study of angular correlations in 4-jet final states of hadronic  $Z^0$  decays. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 49:49-57, 1991.
- [OPA95] OPAL Collaboration. A measurement of the QCD colour factor ratios  $C_A/C_F$  and  $T_F/C_F$  form angular correlations in four-jet events. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 65:367-377, 1995.
- [Par92] Particle Data Group. Review of Particle Properties. *Physical Review D*, 45(11), 1992.
- [Par94] Particle Data Group. Review of Particle Properties. *Physical Review D*, 50(3):1173-1826, 1994.
- [Pec87] R. D. Pecci, Hrsg. *Proceedings of the HERA Workshop*, Jgg. 1-2, 1987.
- [Pol73] H. D. Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Physical Review Letters*, 30(26):1346-1349, 1973.
- [Pol77] H. D. Politzer. QCD Off the Lightcone and the Demise of the Transverse Momentum Cut-Off. *Physics Letters*, 70B(4):430-432, 1977.
- [PV79] G. Passarino und M. Veltman. One-Loop Corrections for  $e^+e^-$  Annihilation into  $\mu^+\mu^-$  in the Weinberg Model. *Nuclear Physics B*, 160:151-207, 1979.
- [Sal68] A. Salam. Weak and electromagnetic interactions. In N. Svartholm, Hrsg., *Elementary Particle Theory*, Seiten 367-377. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968.
- [Sal93] S. G. Salesch. *Photoproduktion von Jets bei HERA mit aufgelösten Photonen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$* . Dissertation, Universität Hamburg, 1993.
- [SGT90] R. G. Stuart und A. Góngora-T. Algebraic Reduction of One-Loop Feynman Diagrams to Scalar Integrals. II. *Computer Physics Communications*, 56:337-350, 1990.
- [Sjö94] T. Sjöstrand. High-energy-physics event generation with PHYTIA 5.7 and JETSET 7.4. *Computer Physics Communications*, 82:74-89, 1994.
- [Stu88] R. G. Stuart. Algebraic Reduction of One-Loop Feynman Diagrams to Scalar Integrals. *Computer Physics Communications*, 48:367-389, 1988.
- [SW77] G. Sterman und S. Weinberg. Jets from Quantum Chromodynamics. *Physical Review Letters*, 39(23):1436-1439, 1977.
- [tV72] G. 't Hooft und M. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nuclear Physics B*, 44:189-213, 1972.
- [tV73] G. 't Hooft und M. Veltman. Diagrammar. CERN Yellow Report 73-9, 1973.
- [Ver91] J. A. M. Vermaseren. *Symbolic Manipulation with FORM*. Computer Algebra Nederland, Amsterdam, 1991.
- [War50] J. C. Ward. An Identity in Quantum Electrodynamics. *Physical Review*, 78:182, 1950.
- [Wei67] S. Weinberg. A Model of Leptons. *Physical Review Letters*, 19(21):1264-1266, 1967.
- [Wol92] G. Wolf. First Results from HERA. DESY 92-190, 1992.
- [ZEU93] ZEUS Collaboration. Measurement of the proton structure function  $F_2$  in ep scattering at HERA. *Physics Letters B*, 316:412-426, 1993.
- [ZEU94] ZEUS Collaboration. Measurement of total and partial photon proton cross sections at 180 GeV center of mass energy. *Zeitschrift für Physik C - Particles and Fields*, 63:391-408, 1994.
- [ZvN92] E. B. Zijlstra und W. L. van Neerven. Order- $\alpha_s^2$  QCD corrections to the deep inelastic proton structure functions  $F_2$  and  $F_L$ . *Nuclear Physics B*, 383:525-574, 1992.

## A Gram-Determinanten

Zur Festlegung der Notation und Darstellung der Methode werden die wichtigsten der 4-dimensionalen Formeln aus [BK73] hier in  $d$ -dimensionaler Verallgemeinerung angegeben.

Die Gram-Determinante der  $n$  Vektoren  $p_1, \dots, p_n$  ist definiert als

$$\Delta(p_1, \dots, p_n) = \det(p_i p_j). \quad (148)$$

Aus der Definition folgt sofort, daß die Gram-Determinante invariant unter Vertauschung der Vektoren ist. Außerdem gilt für beliebiges  $\alpha$  und  $i \neq j$ :

$$\begin{aligned} \Delta(p_1, \dots, p_i + \alpha p_j, \dots, p_n) &= \Delta(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \\ \Delta(p_1, \dots, \alpha p_j, \dots, p_n) &= \alpha^2 \Delta(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \end{aligned} \quad (149)$$

Im  $n$ -dimensionalen Minkowskiraum läßt sich aus den  $n$  Vektoren  $p_i$  ( $i \in 1, \dots, n$ ) eine Determinante  $\det(p_{i\mu})$  bilden. Für diese Determinante gilt bei einer Metrik  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ :

$$\det(p_{i\mu}) = (-1)^{n-1} \det(p_i^2) \quad (150)$$

Zwischen dieser Determinante und der Gram-Determinante besteht die Beziehung

$$|\det(p_{i\mu})| = \sqrt{(-1)^{n-1} \Delta(p_1, \dots, p_n)}. \quad (151)$$

Diese Beziehung erlaubt eine geometrische Interpretation:  $|\det(p_{i\mu})|$  ist das Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren  $p_1, \dots, p_n$  in  $n-1$  räumlichen Dimensionen und einer zeitlichen Dimension aufgespannt wird. Die Gram-Determinante muß somit stets die folgende Bedingung erfüllen:

$$(-1)^{n-1} \Delta(p_1, \dots, p_n) \geq 0. \quad (152)$$

## B Näherung im Grenzwert $p^2 \rightarrow 0$

Aus den Eigenschaften der Gram-Determinanten folgt für beliebige Vektoren  $p_i, p_j, p_k, p_l$ :

$$\Delta(p_i, p_j, p_k, p_l) = \Delta(p_i, p_j, p_k, -p_l, p_l) = \Delta(p_i, p_j, p_k + p_l, p_l) \leq 0. \quad (153)$$

Für die Behandlung der Endzustandssingularitäten läßt sich mit  $p = p_k + p_l$ ,  $k = p_l$  und  $p_k^2 = p_l^2 = 0$  die Beziehung

$$\begin{aligned} (pp_i, kp_j - pp_j, kp_i)^2 &\leq (pp_i, kp_j - pp_j, kp_i)^2 - \Delta(p_i, p_j, p, k) \\ &\leq p^2 (+p^2 \Delta(p_i, p_j) / 4 + p_i p_j (pp_i, kp_j + pp_j, kp_i) - 2kp_i, kp_j) \\ &\quad + p_i^2 kp_j (kp_j - pp_j) + p_j^2 kp_i (kp_i - pp_i) \end{aligned} \quad (154)$$

und somit im Grenzwert  $p^2 \rightarrow 0$  die Näherung

$$pp_i, kp_j = pp_j, kp_i + \mathcal{O}(\sqrt{p^2}) \quad (155)$$

herleiten. Diese Näherung wurde in (72) verwendet. Ebenso läßt sich für die Behandlung der Anfangszustandssingularitäten mit  $p = p_k - p_l$ ,  $k = p_l$  und  $p_k^2 = p_l^2 = 0$ : die Beziehung

$$\begin{aligned} (pp_i, kp_j - pp_j, kp_i)^2 &\leq (pp_i, kp_j - pp_j, kp_i)^2 - \Delta(p_i, p_j, p, k) \\ &\leq -p^2 (-p^2 \Delta(p_i, p_j) / 4 + p_i p_j (pp_i, kp_j + pp_j, kp_i) + 2kp_i, kp_j) \\ &\quad - p_i^2 kp_j (kp_j + pp_j) - p_j^2 kp_i (kp_i + pp_i) \end{aligned} \quad (156)$$

und somit im Grenzwert  $-p^2 \rightarrow 0$  die Näherung

$$pp_i, kp_j = pp_j, kp_i + \mathcal{O}(\sqrt{-p^2}) \quad (157)$$

herleiten.



## C Manifest invariante Integration

Um die Integration  $\int d^d k$  manifest invariant durchzuführen, werden  $d-1$  linear unabhängige Vektoren  $p_i$  benötigt. Dann kann der Übergang von den Variablen  $k_0, \dots, k_{d-1}$  zu den Variablen  $k^2, kp_1, \dots, kp_{d-1}$  mit der Jacobi-Determinante  $\frac{\partial(k_0, k_1, \dots, k_{d-1})}{\partial(k^2, kp_1, \dots, kp_{d-1})}$  durchgeführt werden. Für die Jacobi-Determinante gilt

$$\frac{\partial(k_0, k_1, \dots, k_{d-1})}{\partial(k^2, kp_1, \dots, kp_{d-1})} = \frac{1}{2\sqrt{(-1)^{d-1} \Delta(k, p_1, \dots, p_{d-1})}} \quad (158)$$

Beim Übergang zu invarianten Integrationsvariablen muß außerdem berücksichtigt werden, daß zu jedem Satz von Invarianten zwei verschiedene Vektoren  $k$  gehören. Dies wird offensichtlich, wenn die Komponenten von  $p_1$  ( $p_1^2 > 0$ ) rekonstruiert werden sollen. Die Energiekomponente  $k_0$  ist in dem Fall durch  $kp_1$  festgelegt.  $d-2$  räumliche Komponenten werden durch die Invarianten  $kp_2, \dots, kp_{d-1}$  bestimmt. Die verbleibende räumliche Komponente wird mit der Massenschalenbedingung  $k^2 = k_0^2 - \sum k_i^2$  aus den bisher berechneten Komponenten und aus  $k^2$  ermittelt. Ihr Vorzeichen ist deshalb nicht bestimmt. Die zwei möglichen Vorzeichen werden in der Integrationsformel

$$\int d^d k = \int dk^2 dk p_1 \dots dk p_{d-1} \frac{1}{\sqrt{(-1)^{d-1} \Delta(k, p_1, \dots, p_{d-1})}} \quad (159)$$

berücksichtigt. Diese Formel benötigt in  $d$  Dimensionen stets  $d-1$  extern vorgegebene Vektoren  $p_i$ . Durch die Wahl von  $d-m-1$  externen Vektoren  $t_i$  mit  $t_i t_j = -\delta_{ij}$  und  $t_i p_j = 0$  und Integration über den durch  $(-1)^{d-1} \Delta(k^2, p_1, \dots, p_m, t_1, \dots, t_{d-m-1}) \geq 0$  erlaubten Bereich erhält man eine  $d$ -dimensionale Verallgemeinerung der Formeln aus [BK73]:

$$\int d^d k = \int dk^2 dk p_1 \dots dk p_m \frac{\pi^{\frac{d-m}{2}}}{\Gamma(\frac{d-m}{2})} \frac{((-1)^m \Delta(k, p_1, \dots, p_m))^{\frac{d-m-2}{2}}}{((-1)^{m-1} \Delta(p_1, \dots, p_m))^{\frac{d-m-1}{2}}} \quad (160)$$

## D Die hypergeometrische Funktion

Zur Festlegung der Notation und Darstellung der Methode seien die wichtigsten Formeln aus [AS70] wiedergegeben. Die hypergeometrische Funktion ist definiert durch die Reihenentwicklung:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (161)$$

Für das Konvergenzverhalten im Einheitskreis  $|z| \leq 1$  gilt:

$$\begin{aligned} \Re(c-a-b) \leq -1 &\Rightarrow \text{Divergenz} \\ -1 < \Re(c-a-b) \leq 0 &\Rightarrow \text{Bedingte Konvergenz (bis auf } z=1) \\ 0 < \Re(c-a-b) &\Rightarrow \text{Absolute Konvergenz.} \end{aligned} \quad (162)$$

Unter der Bedingung  $\Re(c) > \Re(b) > 0$  gilt die Integraldarstellung:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}. \quad (163)$$

Für die Ableitung der hypergeometrischen Funktion gilt:

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{ab}{z} {}_2F_1(a+1, b+1, c+1; z). \quad (164)$$

In dieser Arbeit relevante Spezialfälle sind:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, 1; 2; z) &= -\frac{\ln(1-z)}{z}, \\ {}_2F_1(a, b; b; z) &= (1-z)^{-a}, \\ {}_2F_1(a, b; c; 0) &= 1, \\ {}_2F_1(a, b; c; 1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \end{aligned} \quad (165)$$

Die Auswertung der hypergeometrischen Funktion bei Singularitäten geschieht in zwei Schritten. Zuerst wird die Funktion in ein Produkt aus singulärem Faktor und nichtsingulärer hy-

pergeometrischer Funktion überführt. Die dafür benötigten Transformationsformeln sind:

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z); \\
 &= (1-z)^{-a} {}_2F_1(a, c-b; c; \frac{z}{1-z}); \\
 &= (1-z)^{-b} {}_2F_1(b, c-a; c; \frac{z}{1-z}); \\
 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) \\
 &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z); \tag{166} \\
 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}) \\
 &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}); \\
 &= (1-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} {}_2F_1(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z}) \\
 &\quad + (1-z)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z}); \\
 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} z^{-a} {}_2F_1(a, a-c+1; a+b-c+1; 1-\frac{1}{z}) \\
 &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} (1-z)^{c-a-b} z^{-c} {}_2F_1(c-a, 1-a; c-a-b+1; 1-\frac{1}{z}).
 \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird dann die hypergeometrische Funktion im nicht singulären Bereich in  $\epsilon$  entwickelt. Mit der Formel

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \int_0^z dx {}_2F_1(a+1, b+1, c+1, x) \tag{167}$$

erhält man die Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(-2\epsilon, \epsilon; 1-2\epsilon; z) &= 1 - \epsilon^2 \mathcal{L}_2(z) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\
 {}_2F_1(\epsilon, 2\epsilon; 1+2\epsilon; z) &= 1 + 2\epsilon^2 \mathcal{L}_2(z) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\
 {}_2F_1(-\epsilon, \epsilon; 1-\epsilon; z) &= 1 - \epsilon^2 \mathcal{L}_2(z) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
 \end{aligned} \tag{168}$$

## E Distributionen

Zur Festlegung der Notation und Darstellung der Methode seien die wichtigsten Formeln in Anlehnung an [Fur82]<sup>39</sup> hier noch einmal wiedergegeben. Ein Integral der Form

$$I = \int_0^1 du (1-u)^{-1-2\epsilon} R(u) \tag{169}$$

mit einer bei  $u=1$  regulären Funktion  $R(u)$  soll in  $\epsilon$  Laurent-entwickelt werden. Durch Addieren und Subtrahieren von  $R(1)$  erhält man:

$$I = \int_0^1 du (1-u)^{-1-2\epsilon} R(1) + \int_0^1 du (1-u)^{-1-2\epsilon} (R(u) - R(1)). \tag{170}$$

Die Integration des ersten Terms unter der Annahme  $\epsilon < 0$  bringt:

$$I = -\frac{1}{2\epsilon} R(1) + \int_0^1 du (1-u)^{-1-2\epsilon} (R(u) - R(1)). \tag{171}$$

Durch Entwicklung bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^1)$  erhält man:

$$I = -\frac{1}{2\epsilon} R(1) + \int_0^1 du \left( \frac{1}{1-u} - 2\epsilon \frac{\log(1-u)}{1-u} \right) (R(u) - R(1)) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{172}$$

Dies läßt sich mit den "+"-Distributionen schreiben als:

$$I = -\frac{1}{2\epsilon} R(1) + \int_0^1 du \left( \left( \frac{1}{1-u} \right)_+ - 2\epsilon \left( \frac{\log(1-u)}{1-u} \right)_+ \right) R(u) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{173}$$

Insgesamt erhält man für  $(1-u)^{-1-2\epsilon}$ -Terme folgende Reihenentwicklung:

$$(1-u)^{-1-2\epsilon} = -\frac{1}{2\epsilon} \delta(1-u) + \left( \frac{1}{1-u} \right)_+ - 2\epsilon \left( \frac{\log(1-u)}{1-u} \right)_+ + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{174}$$

Bei Integralen mit einer Untergrenze  $\xi \neq 0$  wird unter der Annahme  $R(u) = 0$  für  $u < \xi$  dieselbe Entwicklung verwendet. Die Auswertung der "+"-Distributionen geschieht dann mit

<sup>39</sup>In [Fur82] wurden die Formeln für  $4+\epsilon$  statt für  $4-2\epsilon$  Dimensionen hergeleitet.

den Formeln:

$$\int_0^1 du \left( \frac{1}{1-u} \right)_+ R(u) = \log(1-\xi)R(1) - \int_\xi^1 du \left( \frac{1}{1-u} \right)_+ R(u), \quad (175)$$

$$\int_0^1 du \left( \frac{\log(1-u)}{1-u} \right)_+ R(u) = \frac{1}{2} \log^2(1-\xi)R(1) + \int_\xi^1 du \left( \frac{\log(1-u)}{1-u} \right)_+ R(u).$$

Eine Entwicklung des Terms  $(1-u)^{-\epsilon}$  in  $\epsilon$  führt nur zu integrierbaren Singularitäten und ist somit auch ohne die Verwendung von Distributionen möglich. Andererseits ist eine Normalform wünschenswert, in der nur Terme vorkommen, die zu den Distributionen  $\delta(1-u)$ ,  $\left(\frac{1}{1-u}\right)_+$  und  $\left(\frac{\log(1-u)}{1-u}\right)_+$  proportional sind. Die Umwandlung geschieht mit der Formel

$$(1-u)^{-\epsilon} = (1-u) \left( \frac{1}{1-u} \right)_+ - \epsilon(1-u) \left( \frac{\log(1-u)}{1-u} \right)_+ \quad (176)$$

## F Bezeichnungen

Bei der Angabe der Matrixelemente in den Anhängen G bis I werden die folgenden Symbole verwendet:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \frac{(p_i+p_j)^2}{Q^2}, \\ q_2 &= -Q^2, \\ q_{elec} &= q_{f-}, \\ q_{quark} &= q_f, \\ g_{strong} &= \sqrt{4\pi\alpha_s}, \\ \text{Zeta2} &= \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \\ iLog(x) &= \ell(x), \\ iDilog(x) &= S(x), \\ R(x,y) &= R(x,y), \\ e &= e, \\ \text{CommonFactor} &= \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{i6^{2\epsilon}\Gamma(1-2\epsilon)} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon, \\ y_{Initial} &= \frac{C_F^{j_{el}}}{Q^2}, \\ y_{Final} &= \frac{C_F^{j_{el}}}{Q^2}, \\ y_{Factor} &= \frac{M^2}{Q^2}. \end{aligned} \quad (177)$$

Die Funktionen  $\ell(x)$ ,  $S(x)$ ,  $R(x,y)$  wurden im Abschnitt 5.4.5 definiert.  $\mu$  ist die Regularisierungsskala,  $M$  die Faktorisierungsskala. Die Distributionen werden folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{aligned} \text{Delta}(1-u) &= \delta(1-u) \\ \text{Plus}(1/(1-u)) &= \left( \frac{1}{1-u} \right)_+ \\ \text{Plus}(1/(1-u)*iLog(1-u)) &= \left( \frac{\log(1-u)}{1-u} \right)_+ \end{aligned} \quad (178)$$

Die Matrixelemente der einzelnen Prozess lassen sich in folgende Klassen einteilen:

- eq2epq\_l = Leptonische Photonabstrahlung gemäß Abb. 8,
- eq2epq\_h = Hadronische Photonabstrahlung gemäß Abb. 9,
- eq2epqg\_l = Leptonische Photonabstrahlung gemäß Abb. 10,
- eq2epqg\_h = Hadronische Photonabstrahlung gemäß Abb. 10,
- eg2epqa\_l = Leptonische Photonabstrahlung gemäß Abb. 12,
- eg2epqa\_h = Hadronische Photonabstrahlung gemäß Abb. 13,
- ep2epq\_l\_l = Leptonische Photonabstrahlung gemäß Abb. 20,
- ep2epq\_l\_h = Hadronische Photonabstrahlung gemäß Abb. 21, 22 o. 23.

In den folgenden Abschnitten des Anhangs werden die aus diesen Klassen abgeleiteten Anteile am Betragsquadrat des Matrixelementes angegeben.

(179)

## G Matrixelement für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(1+1)$ Jets der Ordnung

$$\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_S^0)$$

In diesem Anhang werden die Beiträge zum Betragsquadrat des Matrixelementes für den Baumgraphenprozess  $e^-q \rightarrow e^-q\gamma$  angegeben. Es gibt die folgenden Anteile:

$$\begin{aligned} \text{eq2epq\_ll} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_l})(\text{eq2epq\_l})^*, \\ \text{eq2epq\_lh} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_l})(\text{eq2epq\_h})^*, \\ \text{eq2epq\_hl} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_h})(\text{eq2epq\_l})^*, \\ \text{eq2epq\_hh} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_h})(\text{eq2epq\_h})^*. \end{aligned} \quad (180)$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die Terme für einlaufendes Antiquark ergeben sich durch Crossing nach (32). Die verbleibenden Anteile am Betragsquadrat des Matrixelementes für einlaufendes Quark haben folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{eq2epq\_ll} &= \\ &+1/e^0 * ( 1/(y12*y15-y25)^2/q2*q1ec^4*qquark^2*((48*y23*y45+(-96*y23-48*y35)*y14+48*y24 \\ &*y35+(-96*y24-48*y45)*y13)*y12+((-48*y23-48*y35)*y14-96*y23*y24+(-48*y24-48*y45)*y13)*y15) \\ &/y15*(48*y14*y23-48*y23*y45-48*y24*y35+(96*y14+48*y24)*y13)/y15*y25/y25 ) \\ \text{eq2epq\_hh} &= \\ &+1/e^0 * ( 1/q2*q1ec^2*qquark^4*((-48*y14*y25+48*y14*y25*y34/y45+(48*y15*y34/y45-48*y15)* \\ &y24-96*y14*y24/y45*y35)/y35+(48*y14+(-48*y15-96*y14)/y45*y34+(-48*y14-48*y15)/y45*y35)/y35 \\ &*y23+((-48*y25*y34/y45+(48-96*y34/y45)*y24+(-48*y24/y45-48*y25/y45)*y35)/y35+96*y23/y35)* \\ &y13)/y12^2 ) \end{aligned}$$

## H Matrixelemente für $e^-p \rightarrow e^- \gamma(2+1)$ Jets der Ordnung

$$O(\alpha^3 \alpha_s^2)$$

In diesem Anhang werden die Beiträge zum Betragsquadrat des Matrixelementes für den Baumgraphenprozess  $c^-q \rightarrow c^-q\gamma$  angegeben. Es gibt die folgenden Anteile:

$$\begin{aligned} \text{eq2epqg\_ll} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg\_l})(\text{eq2epqg\_l}), \\ \text{eq2epqg\_lh} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg\_l})(\text{eq2epqg\_h}), \\ \text{eq2epqg\_hl} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg\_h})(\text{eq2epqg\_l}), \\ \text{eq2epqg\_hh} &= \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg\_h})(\text{eq2epqg\_h}). \end{aligned} \quad (181)$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie ... wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die Terme für einlaufendes Antiquark ergeben sich durch Crossing nach (39), die für einlaufendes Gluon nach (40). Die verbleibenden Anteile am Betragsquadrat des Matrixelementes für einlaufendes Quark haben folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{eq2epqg\_ll} &= \\ &+1/e^0 * ( \\ &1/(y12+y15-y25)^2 * q2^2 * \text{qqlc} * 2 * \text{qquark} * 2 * \text{gstrong} * 2 * (((((-128*y14*y35+128*y14*y56 \\ &+256*y14*y26+(256*y14+128*y16)*y35-128*y14*y56+(-256*y14-128*y35)*y26)/y46*y34+(256*y16- \\ &128*y56+128*y36+(128*y56-256*y16-256*y35)/y46*y34)*y24+(((128*y14+128*y16)*y35-128*y26*y35 \\ &)/y46+(512*y14-128*y35)/y46*y24)*y36+(256*y14+256*y35+(256*y16+512*y14-128*y56)/y46* \\ &y34+(-128*y56+256*y16+256*y14)/y46*y36)/y36*y23+((-256*y35+(256*y26+128*y56)/y46*y34+(-256 \\ &+512*y34)/y46)*y24+((256*y26+128*y56)/y46+256*y24)/y46)*y13)*y12+((- \\ &128*y14*y35+128*y14*y56+128*y14*y26+((256*y14+128*y16)*y35-128*y14*y56-128*y14*y26)/y46* \\ &y34+(256*y26+128*y16+(-128*y16-256*y26)/y46*y34)*y24+((128*y14+128*y16)*y35/y46+(256*y14/ \\ &y46+256*y24)/y46)*y36)/y36+((-128*y14+(256*y26+128*y16+256*y14)/y46*y34+(-256+512*y34/ \\ &y46)*y24+((128*y14+128*y16+256*y26)/y46+256*y24)/y46)*y36)/y36+256*y23/y36)*y23+((-256*y35+ \\ &(128*y26+128*y56)/y46*y34+(256*y34)/y46-128)*y24+((128*y26+128*y56)/y46+128*y24)/y46)*y36)/ \\ &y36-256*y25/y36)*y13)*y15)/y15+((-128*y14*y26-256*y14*y16+(256*y14*y16+(128*y14+128*y35)* \\ &y26)/y46*y34+(-128*y35-128*y16+128*y56+(256*y35+128*y16-128*y56)/y46*y34)*y24+((128*y26* \\ &y35-256*y14^2)/y46+(-256*y14+128*y35)/y46*y24)*y36)/y36+(-256*y35+128*y14+(128*y56-128*y16 \\ &-256*y14)/y46*y34+(-128*y14+128*y56-128*y16)/y46*y36)/y36+y23+((256*y14+(-512*y14-256*y16- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &128*y26)/y46*y34+(-256*y34/y46+128)*y24+((-128*y26-256*y16-256*y14)/y46-128*y24/y46)*y36)/ \\ &y36+256*y25/y36+256/y36*y13)*y13)/y15*y25)/y25+((( (-128*y26+128*y16+(-128*y16+128*y26)/y46 \\ &*y34+(256*y14/y46-256*y24/y46)*y36)/y36+(-256*y34/y46+128-128/y46*y36)/y36*y23+(256*y34/ \\ &y46-128+128/y46*y36)/y36*y13)*y12+((-128*y16*y34/y46+128*y16+256*y14/y46*y36)/y36+(256*y34 \\ &/y46-128+128/y46*y36)/y36*y13)*y15)/y15+((-128*y26*y34/y46+128*y26+256*y24/y46*y36)/y36+( \\ &256*y34/y46-128+128/y46*y36)/y36*y23)/y15*y25)/y25*y46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{eq2epqg\_hh} &= \\ &+1/e^0 * ( \\ &(((2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)*(128*y35/y36+128*y45/y46)+256/(y35+y36-y56)/ \\ &y36-256/(-y45-y46-y56)/y46)*y16+(128/y35/y46+1/(y35+y36-y56))*(-128/y35*y45/y46-128/y36/y45 \\ &*y46)+128/y36/y45+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))*(-64/y35*y36*y45/y46-64*y36/y45*y46- \\ &128)+1/(-y45-y46-y56)*(128*y35/y36/y45+128/y35*y36/y46)*y15+1/(y35+y36-y56)^2*(384-256/ \\ &y36*y56+256/y35*y36-128/y35*y56+384*y35/y36)+1/(y35+y36-y56))*(-128/y36/y45*y56-128/y35-256 \\ &/y36+128/y45-128/y46+128*y35/y36/y45-128/y36/y45*y46)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))*(-128 \\ &*y35/y36/y45+y46+64*y35^2/y36/y45-64*y35/y36/y45*y56+64*y35/y45-64*y35/y46+64-64*y36/y46+ \\ &128*y45/y46-64*y35/y36)+1/(-y45-y46-y56))*(-384/y46+128*y35/y36/y45-128/y36/y45+2/(y35+y36-y56) \\ &128/y35/y46+1/(y35+y36-y56))*(-128/y35*y45/y46-128/y36/y45*y46)+128/y36/y45+2/(y35+y36-y56) \\ &/(-y45-y46-y56))*(-64/y35*y36*y45/y46-64*y35/y36/y45*y46-128)+1/(-y45-y46-y56)*(128*y35/y36 \\ &/y45+128/y35*y36/y46)*y16+(256/(y35+y36-y56)/y35-256/(-y45-y46-y56)/(-384/y45+128/y35*y36/y46- \\ &-y45-y46-y56)*(128/y45*y46+128/y35*y36)*y15+1/(-y45-y46-y56))*(-384/y45+128/y35*y36/y46- \\ &128/y46)+1/(y35+y36-y56))*(-128/y35/y46*y56+128/y35*y36/y46-128/y36+128/y46-256/y35-128/y35 \\ &*y45/y46-128/y45)+1/(y35+y36-y56)^2*(384+256*y35/y36-128/y36*y56+384/y35*y36-256/y35*y56)+ \\ &2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))*(-128/y35*y36*y45/y46-64/y35*y36/y46+64/y35*y36^2/y46- \\ &64/y35*y36-64*y36/y45+64*y36/y46+128/y45*y46-64*y35/y45+64)*y25+(((1/(y35+y36-y56)^2*(384- \\ &384-256/y36*y56+256/y35*y36-128/y35*y56+384*y35/y36)+1/(y35+y36-y56))*(-128/y36/y45*y56- \\ &128/y35-256/y36+128/y45-128/y46+128*y35/y36/y45-128/y36/y45*y46)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46- \\ &-y56))*(-128*y35/y36/y45+y46+64*y35^2/y36/y45-64*y36/y45-64*y35/y45+64*y35/y46+64- \\ &64*y36/y46+128*y45/y46-64*y35/y36)+1/(-y45-y46-y56))*(-384/y46+128*y35/y36/y45-128/y45)* \\ &y16+1/(-y45-y46-y56))*(-384/y45+128/y35+y36/y46-128/y46)+1/(y35+y36-y56))*(-128/y35/y46*y56 \\ &+128/y35*y36/y46-128/y36+128/y46-256/y35-128/y35*y45/y46-128/y45)+1/(y35+y36-y56)^2*(384+ \\ &256*y35/y36-128/y36*y56+384/y35*y36-256/y35*y56)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))*(-128/y35* \\ &y36*y45/y46-64/y35*y36/y46+y56+64/y35*y36^2/y46-64/y35*y36/y46+64*y36/y46+128/y45* \\ &y46-64*y35/y45+64)*y15+(512/(-y45-y46-y56)/y45/y46*y56+1/(y35+y36-y56))*((256/y35/y36/y46+ \\ &256*y35/y36/y45)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))*((256+128/y35*y36+128/y45*y46+128*y35/y36/ \\ &y45*y46+128*y35/y36/y45*y56+128/y35*y36*y45/y46+128/y36*y36/y46*y56-128/y35*y36^2/y46+128* \\ &y45/y46-128*y35^2/y36/y45+128*y36/y36-384*y35/y45-256*y35/y46-256*y36/y45-384*y36/y46)* \\ &y14)*y24+(((256/(y35+y36-y56)/y36/y46+256/(-y45-y46-y56)/y36/y46)*y16+1/(y35+y36-y56))*(- \end{aligned}$$

192/y35\*y36-64/y35\*y56+192\*y35/y36-128\*y35/y45-64\*y35/y46-128\*y36/y46+192\*y45/y46+64/y46\*  
y56+64/y45\*y56-128/y35\*y45-64/y36\*y45-128/y36\*y48-64/y36/y45\*y46-2-64/y35\*y45-2/y46-64/y36  
/y45\*y46\*y56-64/y35\*y45/y46\*y56-64/y35\*y46+1/(y35\*y36-y56)-2\*(256+256/y35/y36\*y56-2-384/  
y35\*y56-384/y36\*y56)))\*y14+((128/y35/y36/y46+128/y36/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56)  
\*(64/y36/y45\*y56-64/y35\*y36/y46-64/y45+128/y35\*y45/y46+64/y36+128/y35-64\*y35/y36/y45+64/  
y36/y45\*y46-64/y46)+1/(-y45-y46-y56))\*(-256/y35/y45-256/y36/y45+128/y35/y45+128/y35/y45+128/y36  
/y45)-128/(y35+y36-y56)/y35/y36/y46\*y56)\*y16+(128/y35/y36/y45+128/y35/y45+128/y35/y45+128/y36  
/y45)-64/y45-64/y35\*y36/y46-64/y36/y45+64/y35/y46\*y56+128/y36/y45\*y46)+1/(-y45-y46-y56)\*(-  
64/y45-64/y35\*y36/y46-64/y36/y45+64/y35/y46\*y56+128/y36/y45\*y46)+1/(-y45-y46-y56)\*(-  
128/y35/y46-256/y36/y45-128/y36/y45/y46\*y56-256/y36/y46)))\*y15+(-128/y35/y36/y46+2/(y35\*y36  
-y56)/(-y45-y46-y56))\*((256/y35-256/y46-192\*y35/y36/y45+256/y36-192/y35\*y36/y46+192/y35\*y45/  
y46+192/y36/y45\*y46-256/y45-64/y35\*y36/y45-64\*y35/y36/y46+64/y35/y46+64/y36\*y45/y46)-  
256/y35/y36/y45/y46\*y56+128/y35/y45/y46+128/y36/y45/y46-128/y35/y36/y45)\*y14+((128/y35/y36  
/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-64/y35/y45-64/y36/y45-64/y36/y45-64/y36/y45  
y16+(128/y35/y36/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-64/y35/y45-64/y36/y46-64/y36/y45  
-64/y35/y46))\*y15+(256/y35/y36/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-128/y36/y45-128/  
y36/y46-128/y35/y45-128/y36/y46))\*y14\*(y34)\*y23+((1/(-y45-y46-y56)-2\*(-128/y45\*y56-  
256/y46\*y56-384-y36-y56)+1/(y35+y36-y56))\*(-128/y35-384/y36+128/y35\*y45/y46  
)+1/(-y45-y46-y56))\*(-128/y36-128/y45+128/y35/y46\*y56-256/y46+128/y35-128/y35\*y36/y46+128/  
y35+y45/y46)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-128\*y35/y36+64/y36+64-y45-64-64/y35\*y45-2/y46+  
64/y36\*y46+128/y35\*y36\*y45/y46-64/y35\*y45/y46+64/y36\*y46-64-128/y35\*y36+64/y35\*y45+64/  
y35+y46))\*y25+((1/(-y45-y46-y56)-2\*(384/y45\*y56+384/y46\*y56+256/y45/y46\*y56-2+256)+1/(y35+  
y36-y56))\*(-128/y36+256/y35/y36\*y56-128/y35)+1/(-y45-y46-y56))\*((128/y46+128/y45+256/y45/y46\*  
y56)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*((512-64\*y35-2/y36/y45-64/y35\*y36-2/y46-64\*y36/y45+192/  
y45\*y46+256/y35\*y36\*y45/y46+64/y35\*y56+256\*y35/y36/y45\*y46+64\*y35/y36/y45\*y56-64/  
y36\*y56+192/y35\*y36-64/y35\*y56+192\*y35/y36-128\*y35/y45-64\*y35/y46-128\*y36/y46+192\*y45/y46+  
64/y46\*y56+64/y45\*y56-128/y35\*y45-64/y36\*y45-128/y36\*y46-64/y36/y45\*y46-2-64/y36\*y45-2/y46  
-64/y36/y45\*y46\*y56-64/y35\*y45/y46\*y56-64/y36\*y46+1/(y35\*y36-y56)-2\*(256+256/y35/y36\*y56-  
2-384/y35\*y56-384/y36\*y56))\*y24+((128/y35/y36/y46+128/y36/y45/y46+2/(y35+y36-y56)/(-y45-  
y46-y56))\*((64/y36/y45\*y56-64/y35\*y36/y46-64/y45+128/y35\*y45/y46+64/y36+128/y35-64\*y35/y36/  
y45+64/y36/y45)-128/(y35+y36-y56)/y35/y36/y46\*y56))\*y26+(128/y35/y36/y45+128/y35/y45+128/(  
y35+y36-y56)/y35/y36/y45\*y56+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*((128/y36+64/y35+64/y35\*y45+  
-64/y46-64/y45-64/y35\*y36/y46-64\*y35/y36/y45+64/y35/y46\*y56+128/y36/y45\*y46)+1/(-y45-y46-

128/y36/y46+128/y36/y45+128/y35/y46+128/y35/y45)+1/(-y45-y46-y56))\*((128/y36/y46+128/y36/y45  
+128/y35/y46+128/y35/y45)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*((64/y35/y46\*y56+64/y36/y45\*y56)))\*  
y15+1/(1/(y35+y36-y56))\*((256/y36/y45+256/y35/y45-128/y35/y46-128/y36/y36/y45\*y56)-128/(y45-  
y46-y56)/y36/y45/y46\*y56+128/y35/y36/y46+128/y36/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-  
64/y36+128\*y35/y36/y45-64/y35/y46\*y56+128/y45+64/y36/y45\*y46+64/y35\*y36/y46-  
64/y35\*y45/y46))\*y14)\*y26+((1/(y35+y36-y56))\*((128/y36/y46+128/y35/y45+128/y35/y45+128/y36/  
y45)+1/(-y45-y46-y56))\*((128/y36/y46+128/y35/y46+128/y35/y45+128/y35/y45+128/y36/y45+128/y36/  
y45)-128/(y35+y36-y56)/y35/y36/y46\*y56))\*y16+(128/y35/y36/y45+128/y35/y45+128/y35/y45+128/y36  
/y45)-64/y45-64/y35\*y36/y46-64/y36/y45+64/y35/y46\*y56+128/y36/y45\*y46)+1/(-y45-y46-y56))\*(-  
64/y45-64/y35\*y36/y46-64/y36/y45+64/y35/y46\*y56+128/y36/y45\*y46)+1/(-y45-y46-y56))\*(-  
128/y35/y46-256/y36/y45-128/y36/y45/y46\*y56-256/y36/y46)))\*y15+(-128/y35/y36/y46+2/(y35\*y36  
-y56)/(-y45-y46-y56))\*((256/y35-256/y46-192\*y35/y36/y45+256/y36-192/y35\*y36/y46+192/y35\*y45/  
y46+192/y36/y45\*y46-256/y45-64/y35\*y36/y45-64\*y35/y36/y46+64/y35/y46+64/y36\*y45/y46)-  
256/y35/y36/y45/y46\*y56+128/y35/y45/y46+128/y36/y45/y46-128/y35/y36/y45)\*y14+((128/y35/y36  
/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-64/y35/y45-64/y36/y45-64/y36/y45-64/y36/y45  
y16+(128/y35/y36/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-64/y35/y45-64/y36/y46-64/y36/y45  
-64/y35/y46))\*y15+(256/y35/y36/y45/y46+2/(y35\*y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-128/y36/y45-128/  
y36/y46-128/y35/y45-128/y36/y46))\*y14\*(y34)\*y23+((1/(-y45-y46-y56)-2\*(-128/y45\*y56-  
256/y46\*y56-384-y36-y56)+1/(y35+y36-y56))\*(-128/y35-384/y36+128/y35\*y45/y46  
)+1/(-y45-y46-y56))\*(-128/y36-128/y45+128/y35/y46\*y56-256/y46+128/y35-128/y35\*y36/y46+128/  
y35+y45/y46)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*(-128\*y35/y36+64/y36+64-y45-64-64/y35\*y45-2/y46+  
64/y36\*y46+128/y35\*y36\*y45/y46-64/y35\*y45/y46+64/y36\*y46-64-128/y35\*y36+64/y35\*y45+64/  
y35+y46))\*y25+((1/(-y45-y46-y56)-2\*(384/y45\*y56+384/y46\*y56+256/y45/y46\*y56-2+256)+1/(y35+  
y36-y56))\*(-128/y36+256/y35/y36\*y56-128/y35)+1/(-y45-y46-y56))\*((128/y46+128/y45+256/y45/y46\*  
y56)+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*((512-64\*y35-2/y36/y45-64/y35\*y36-2/y46-64\*y36/y45+192/  
y45\*y46+256/y35\*y36\*y45/y46+64/y35\*y56+256\*y35/y36/y45\*y46+64\*y35/y36/y45\*y56-64/  
y36\*y56+192/y35\*y36-64/y35\*y56+192\*y35/y36-128\*y35/y45-64\*y35/y46-128\*y36/y46+192\*y45/y46+  
64/y46\*y56+64/y45\*y56-128/y35\*y45-64/y36\*y45-128/y36\*y46-64/y36/y45\*y46-2-64/y36\*y45-2/y46  
-64/y36/y45\*y46\*y56-64/y35\*y45/y46\*y56-64/y36\*y46+1/(y35\*y36-y56)-2\*(256+256/y35/y36\*y56-  
2-384/y35\*y56-384/y36\*y56))\*y24+((128/y35/y36/y46+128/y36/y45/y46+2/(y35+y36-y56)/(-y45-  
y46-y56))\*((64/y36/y45\*y56-64/y35\*y36/y46-64/y45+128/y35\*y45/y46+64/y36+128/y35-64\*y35/y36/  
y45+64/y36/y45)-128/(y35+y36-y56)/y35/y36/y46\*y56))\*y26+(128/y35/y36/y45+128/y35/y45+128/(  
y35+y36-y56)/y35/y36/y45\*y56+2/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))\*((128/y36+64/y35+64/y35\*y45+  
-64/y46-64/y45-64/y35\*y36/y46-64\*y35/y36/y45+64/y35/y46\*y56+128/y36/y45\*y46)+1/(-y45-y46-

# I Matrixelemente für $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)$ Jets der Ordnung

$$\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^2)$$

## I.1 Einlaufendes Quark oder Antiquark

In diesem Anhang werden die Beiträge zum Betragsquadrat des Matrixelementes für den Prozeß  $e^-q \rightarrow e^-q\gamma$  in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^3 \alpha_s^2)$  angegeben. Die Anteile für einlaufendes Antiquark ergeben sich durch Crossing nach (32) aus den nachfolgend angegebenen Anteilen für einlaufendes Quark.

### I.1.1 Virtuelle Korrekturen

Es gibt die folgenden Beiträge der virtuellen Korrekturen für das Betragsquadrat des Matrixelementes:

$$\begin{aligned} \text{eq2epq}_01_11 &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_1) (\text{eq2epq}_1)^\dagger, \\ \text{eq2epq}_01_1h &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_1) (\text{eq2epq}_1_h)^\dagger, \\ \text{eq2epq}_01_h1 &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_h) (\text{eq2epq}_1)^\dagger, \\ \text{eq2epq}_01_hh &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_h) (\text{eq2epq}_h)^\dagger, \\ \text{eq2epq}_10_11 &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_1) (\text{eq2epq}_1)^\dagger, \\ \text{eq2epq}_10_1h &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_1) (\text{eq2epq}_h)^\dagger, \\ \text{eq2epq}_10_h1 &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_h) (\text{eq2epq}_1)^\dagger, \\ \text{eq2epq}_10_hh &= \sum_{\text{Spins,Farben}} (\text{eq2epq}_h) (\text{eq2epq}_h)^\dagger. \end{aligned} \tag{182}$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Zwischen den Termen bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{eq2epq}_01_11 &= \text{eq2epq}_10_11^\dagger, \\ \text{eq2epq}_01_1h &= \text{eq2epq}_10_h1^\dagger, \\ \text{eq2epq}_01_h1 &= \text{eq2epq}_10_1h^\dagger, \\ \text{eq2epq}_01_hh &= \text{eq2epq}_10_hh^\dagger. \end{aligned} \tag{183}$$

Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die verbleibenden Beiträge zum Betragsquadrat des Matrixelementes haben folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \text{eq2epq\_10\_11} = & \\
 & +1/e^{-2} * (-128 * \text{CommonFactor} * \text{qelec} * 4 * \text{quark}^2 * \text{gstrong}^2 * ((-2 * y23 - y35) * y14 * y23 * y45 * y24 * y35 \\
 & + (-2 * y24 - y45) * y13) * y12 * ((-y23 - y35) * y14 - 2 * y23 * y24 + (-y45 - y24) * y13) * y15 + (-y24 * y35 + y14 * y23 - y23 \\
 & * y45 + (y24 + 2 * y14) * y13) * y25) / (-y12 - y15 + y25)^2 / q2 / y15 / y25 \quad ) \\
 & +1/e^{-1} * (-64 * \text{CommonFactor} * \text{qelec} * 4 * \text{quark}^2 * \text{gstrong}^2 * (((-3 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y35 + (4 * i \text{Log}(y34) \\
 & - 6) * y23) * y14 + (4 * y35 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y23) * y45 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y35 * y24 + ((-3 + 2 * i \text{Log}(y34)) * \\
 & y45 + (4 * i \text{Log}(y34) - 6) * y24) * y13 + 4 * y12 * y34) * y12 + ((-1 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y35 + (-3 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y23) * \\
 & y14 - 2 * y23 * y45 + (-2 * y35 + (4 * i \text{Log}(y34) - 6) * y23) * y24 + ((-1 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y45 + (-3 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y24) \\
 & * y13 + 4 * y12 * y34 + 2 * y15 * y34) * y15 + ((-2 * y35 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y23) * y14 + (-1 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y23 * y45 + (- \\
 & -1 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y35 * y24 + (6 - 4 * i \text{Log}(y34)) * y14 - 2 * y45 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y24) * y13 - 4 * y12 * y34 + 2 * \\
 & y25 * y34) * y25) / (-y12 - y15 + y25)^2 / q2 / y15 / y25 \quad ) \\
 & +1/e^0 * (64 * \text{CommonFactor} * \text{qelec} * 4 * \text{quark}^2 * \text{gstrong}^2 * (((8 + 2 * \text{Zeta}2 + (-3 + i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}( \\
 & y34)) * y35 + (16 + 4 * \text{Zeta}2 + (-6 + 2 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y23) * y14 + (((4 * i \text{Log}(y34) - 6) * y35 + (-8 - 2 * \\
 & \text{Zeta}2 + (3 - i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y23) * y45 + (-8 - 2 * \text{Zeta}2 + (3 - i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y35 * y24 + ((8 + 2 \\
 & * \text{Zeta}2 + (-3 + i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y45 + (16 + 4 * \text{Zeta}2 + (-6 + 2 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y24) * y13 + (4 * \\
 & * \text{Zeta}2 + (-3 + i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y12 + ((2 * \text{Zeta}2 + 5 + (-1 + i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y35 + (8 - 2 * \text{Zeta}2 + (-3 + i \text{Log}( \\
 & y34)) * i \text{Log}(y34) - 6) * y24) * y14 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y23 * y45 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y35 + (16 + 4 * \text{Zeta}2 + (-6 + 2 * \\
 & i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y23) * y24 + (2 * \text{Zeta}2 + 5 + (-1 + i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y45 + (8 + 2 * \text{Zeta}2 + (-3 + \\
 & i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y24) * y13 + (4 * i \text{Log}(y34) - 6) * y34 * y12 + (-1 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y34 * y15) * y15 + ((3 - \\
 & 2 * i \text{Log}(y34)) * y35 + (-8 - 2 * \text{Zeta}2 + (3 - i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y23) * y14 + (2 * \text{Zeta}2 + 5 + (-1 + i \text{Log}(y34)) * \\
 & i \text{Log}(y34)) * y23 * y45 + (2 * \text{Zeta}2 + 5 + (-1 + i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y35 * y24 + ((-4 * \text{Zeta}2 - 16 + (6 - 2 * i \text{Log}( \\
 & y34)) * i \text{Log}(y34)) * y14 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y45 + (-8 - 2 * \text{Zeta}2 + (3 - i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y24) * y13 + (6 - \\
 & 4 * i \text{Log}(y34)) * y34 * y12 - 4 * y15 * y34 + (-1 + 2 * i \text{Log}(y34)) * y34 * y25) * y25) / (-y12 - y15 + y25)^2 / q2 / y15 / y25 \\
 & ) \\
 \text{eq2epq\_10\_hh} = & \\
 & +1/e^{-2} * (-128 * y34 * y14 * y25 * y45 + (y34 * y15 - y15 * y45) * y24 - 2 * y35 * y14 * y24 + (y14 * y45 + (- \\
 & y15 - 2 * y14) * y34 + (-y14 - y15) * y35) * y23 + (-y34 * y25 + (-2 * y34 * y45) * y24 + (-y24 - y25) * y36 + 2 * y23 * y45) * \\
 & y13) / y45 * \text{CommonFactor} * \text{qelec}^2 * \text{quark}^4 * \text{gstrong}^2 / q2 / y12 \quad - 2 \quad ) \\
 & +1/e^{-1} * (-64 * (2 * i \text{Log}(y34) - 1) * y14 * y25 * y45 + (4 * y15 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y34 + ((2 * i \text{Log}(y34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y34) - 1) * y15 * y45 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y18 * y34) * y24 + (-2 * y14 * y25 + (-2 * y15 + (4 * i \text{Log}(y34) - 6) * y14) * y24) \\
 & * y35 + ((-2 * y15 + (3 - 2 * i \text{Log}(y34)) * y14) * y45 + ((2 * i \text{Log}(y34) - 3) * y15 + (4 * i \text{Log}(y34) - 6) * y14) * y34 + ((2 * \\
 & i \text{Log}(y34) - 1) * y15 + (2 * i \text{Log}(y34) - 3) * y14) * y35) * y23 + (-2 * y45 * y25 + (2 * i \text{Log}(y34) - 3) * y25 * y34 + ((3 - 2 * \\
 & i \text{Log}(y34)) * y45 + (4 * i \text{Log}(y34) - 6) * y34) * y24 + ((2 * i \text{Log}(y34) - 1) * y25 + (2 * i \text{Log}(y34) - 3) * y24) * y35 + (6 - 4 \\
 & * i \text{Log}(y34)) * y45 * y23) * y13 + (2 * y45 - 2 + (-4 * y45 + 4 * y34) * y34 + (4 * y34 + 2 * y35) * y12) / y45 / y35 * \\
 & \text{CommonFactor} * \text{qelec}^2 * \text{quark}^4 * \text{gstrong}^2 / q2 / y12 \quad - 2 \quad ) \\
 & +1/e^0 * (32 * \text{gstrong}^2 * \text{quark}^4 * \text{qelec}^2 * \text{CommonFactor} * ((-4 * R(y34, -y45) * y15 * y26 * y45 - 7 + (12 * R \\
 & (y34, -y45) * y15 * y25 * y45 - 6 + (-12 * R(y34, -y45) * y15 * y25 * y45 - 5 * S * 4 * R(y34, -y45) * y15 * y25 * y45 - 4 * y34) * \\
 & y34) * y34) * y34^4 * (((-4 * i \text{Log}(-y45) - 8 * R(y34, -y45)) * y15 * y25 * y45 - 7 + (((4 * i \text{Log}(y34) + 12 * i \text{Log}(-y45) \\
 & + 32 * R(y34, -y45)) * y15 - 2 * R(y34, -y45) * y14) * y25 * y45 - 6 + (((-12 * i \text{Log}(-y45) - 48 * R(y34, -y45) - 12 * i \text{Log} \\
 & (y34)) * y15 + 4 * R(y34, -y45) * y14) * y25 * y45 - 5 + (((12 * i \text{Log}(y34) + 4 * i \text{Log}(-y45) + 32 * R(y34, -y45) - 12 * i \text{Log} \\
 & * R(y34, -y45) * y14) * y25 * y45 - 4 + (-4 * i \text{Log}(y34) - 8 * R(y34, -y45)) * y15 * y25 * y45 - 3 * y34) * y34) * y34) \\
 & * y34 - 3 + (-2 * R(y34, -y45) * y15 * y45 - 6 + (4 * R(y34, -y45) * y15 * y45 - 5 - 2 * R(y34, -y45) * y15 * y45 - 4 * y34) * y34) \\
 & ) * y34^4 * y24 + ((((-4 * R(y34, -y45) - 6 * i \text{Log}(-y45)) * y15 + (4 * \text{Zeta}2 + 4 * R(y34, -y45) + 12 + (4 + 2 * i \text{Log}(y34)) * \\
 & i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y45 - 7 + (((-8 - 28 * i \text{Log}(-y45) + 28 * R(y34, -y45) + 20 * i \text{Log}(y34)) * y15 + (-12 * \text{Zeta}2 - \\
 & 12 * R(y34, -y45) - 41 - 6 * R(y34, -y45) - 2 * i \text{Log}(-y45) + (-10 - 6 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y45 - 6 + ((- \\
 & -2 * i \text{Log}(y35) - 42 * i \text{Log}(-y45) - 64 * R(y34, -y45) - 64 * i \text{Log}(y34) + 8) * y15 + (47 + 4 * i \text{Log}(-y45) + 12 * \text{Zeta}2 + \\
 & 16 * R(y34, -y45) + 2 * i \text{Log}(y35) + 14 * R(y34, -y45) + (14 + 6 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y45 - 6 + (((84 * \\
 & i \text{Log}(y34) + 30 * i \text{Log}(-y45) + 6 * i \text{Log}(y35) + 8 + 64 * R(y34, -y45) + 4 * R(y34, -y45) * y15 + (-14 * R(y34, -y45) - 4 * \\
 & \text{Zeta}2 - 2 * i \text{Log}(y35) - 8 * R(y34, -y45) - 2 * i \text{Log}(-y45) - 18 + (-14 - 2 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y45 - 4 \\
 & + ((-8 * i \text{Log}(-y45) - 28 * R(y34, -y45) - 56 * i \text{Log}(y34) - 8 * R(y34, -y45) + 16 * i \text{Log}(y34) + 4 * R(y34, -y45) * y15 * \\
 & + 4 * R(y34, -y45) * 2 * R(y34, -y45) * y14) * y25 * y45 - 3 + (4 * R(y34, -y45) + 16 * i \text{Log}(y34) + 4 * R(y34, -y45) * y15 * \\
 & y25 * y45 - 2 * y34) * y34) * y34) * y34^2 + (((4 * \text{Zeta}2 + 4 * R(y34, -y45) + 12 + (4 + 2 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}( \\
 & y34)) * y15 - 4 * R(y34, -y45) * y14) * y45 - 7 + (((-12 * \text{Zeta}2 - 12 * R(y34, -y45) - 41 - 6 * R(y34, -y45) - 2 * i \text{Log}(-y45) \\
 & ) * (-10 - 6 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y15 + 8 * R(y34, -y45) * y14) * y45 - 6 + (((47 + 4 * i \text{Log}(-y45) + 12 * \text{Zeta}2 + 16 \\
 & * R(y34, -y45) + 2 * i \text{Log}(y35) + 14 * R(y34, -y45) + (14 + 6 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y15 - 4 * R(y34, -y45) * y14) * \\
 & y45 - 5 + (((-14 * R(y34, -y45) - 4 * \text{Zeta}2 - 2 * i \text{Log}(y35) - 8 * R(y34, -y45) - 2 * i \text{Log}(-y45) - 18 + (-14 - 2 * i \text{Log}(y34)) * \\
 & * i \text{Log}(y34)) * y15 * y45 - 4 + (6 * i \text{Log}(y34) + 4 * R(y34, -y45) + 2 * R(y34, -y45) * y15 * y45 - 3 * y34) * y34) * y34) * \\
 & y34) * y34^2 * y24 + (((-2 * i \text{Log}(-y45) * y15 + (-3 * i \text{Log}(-y45) + 8 * \text{Zeta}2 + 8 * R(y34, -y45) + 24 + (8 + 4 * i \text{Log}(y34)) \\
 & * i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y45 - 7 + (((8 * R(y34, -y45) + 28 * i \text{Log}(y34) + 16 * i \text{Log}(-y45) - 16) * y15 + (-32 * R(y34, \\
 & y35) - 32 * \text{Zeta}2 + i \text{Log}(-y45) - 6 * R(y34, -y45) - 98 + (-30 - 16 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y45 - 6 + ((- \\
 & (-6 * i \text{Log}(y35) - 46 * i \text{Log}(-y45) - 116 * i \text{Log}(y34) + 32 - 32 * R(y34, -y45) * y15 + (48 * \text{Zeta}2 + 8 * i \text{Log}(-y45) + \\
 & 24 * R(y34, -y45) + 54 * R(y34, -y45) + 7 * i \text{Log}(y35) + 165 + (54 + 24 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34)) * y14) * y25 * y45 - 5 + (( \\
 & ((22 * i \text{Log}(y35) + 50 * i \text{Log}(-y45) - 8 * 196 * i \text{Log}(y34) + 48 * R(y34, -y45) + 12 * R(y34, -y45) * y15 + (-131 - 16 * \\
 & i \text{Log}(y35) - 10 * i \text{Log}(-y45) - 32 * R(y34, -y45) - 52 * R(y34, -y45) - 32 * \text{Zeta}2 + (-64 - 16 * i \text{Log}(y34)) * i \text{Log}(y34) \\
 & ) * y14) * y25 * y45 - 4 + (((-24 * i \text{Log}(-y45) - 160 * i \text{Log}(y34) - 32 * R(y34, -y45) - 24 * i \text{Log}(y35) - 32 * R(y34, -y45) \\
 & - 16) * y15 + (8 * \text{Zeta}2 + 8 * i \text{Log}(y35) + 16 * R(y34, -y45) + 40 + 4 * i \text{Log}(-y45) + 30 * R(y34, -y45) + (46 + 4 * i \text{Log}(y34)
 \end{aligned}$$









$$\begin{aligned}
& -54+(-6-8i\log(y34))*i\log(y34)*y45^5+((66R(y34,y35)+28i\log(y35)+40Zeta2+38R(y34,-y45) \\
& )+172+(14+20i\log(y34))*i\log(y34))*y45^4+((-183-40R(y34,-y45)-27i\log(y35)+3i\log(y45)- \\
& 44Zeta2-92R(y34,y35)+(-10-22i\log(y34))*i\log(y34))*y45^3+((-2+i\log(y45)+14R(y34,-y45)+ \\
& 50R(y34,y35)+65+16Zeta2+8i\log(y35)+2+8i\log(y34))*i\log(y34))*y45^2+(-8R(y34,y35)+y45* \\
& y34)*y34)*y24+((4R(y34,-y45)+12-3i\log(y35)+4Zeta2+(4+2i\log(y34))*i\log(y34))* \\
& y25+y45^4*((3+i\log(y35)-8Zeta2-8R(y34,-y45)-24+(-8-4i\log(y34))*i\log(y34))*y25+y45^3*(12 \\
& +4R(y34,-y45)+4Zeta2+(4+2i\log(y34))*i\log(y34))*y25+y45^2*y34+((4R(y34,-y45)+4* \\
& Zeta2+12R(y34,y35)+18+1i\log(y35)+2+2i\log(y34))*i\log(y34))*y45^4+((-34R(y34,y35)-20* \\
& i\log(y35)-35-8R(y34,-y45)-8Zeta2+(-4-4i\log(y34))*i\log(y34))*y45^3+((4R(y34,-y45)+10* \\
& i\log(y35)+4Zeta2+32R(y34,y35)+17+(2+2i\log(y34))*i\log(y34))*y45^2+10R(y34,y35)+y45*y34) \\
& *y34)*y24+((-5i\log(y35)-4R(y34,y35))*y45^3+((8R(y34,y35)+4i\log(y35))*y45^2+4R( \\
& y34,y35)+y45*y34)*y24+y35)*y35)*y35)*y35)*y35+((4R(y34,-y45)+y45^9+((4- \\
& 12R(y34,-y45)+y45^8+(-12R(y34,-y45)+y45^7+4R(y34,-y45)+y45^6+y34)*y34)*y34^2+((-4 \\
& *i\log(-y45)-8R(y34,-y45))*y45^9+((12i\log(-y45)+4*i\log(y34)+36R(y34,-y45))*y45^8+((-60R \\
& (y34,-y45)-12*i\log(y34)-12*i\log(-y45))*y45^7+((44R(y34,-y45)+12i\log(y34)+4*i\log(-y45))* \\
& y45^6+(-12R(y34,-y45)-4i\log(y34))*y45^5+5R(y34,y35)+y34)*y34+((-4R(y34,-y45)-6*i\log( \\
& -y45))*y45^9+((8i\log(y34)+30i\log(-y45)+36R(y34,-y45)+2)*y45^8+((-40-54i\log(-y45)+2* \\
& i\log(y35)-4R(y34,y35)-104R(y34,-y45)-8Zeta2+(-32-4i\log(y34))*i\log(y34))*y45^7+((74+128 \\
& *R(y34,-y45)+42*i\log(-y45)-4R(y34,y35)-12*i\log(y34))*i\log(y34))*i\log(y34))* \\
& y45^6+((-68R(y34,-y45)-4R(y34,y35)-12*i\log(-y45)-36-8Zeta2+(-40-4i\log(y34))*i\log(y34)) \\
& *y45^5+((12*i\log(y34)+12R(y34,-y45))*y45^4+y34)*y34+((16+i\log(-y45)+2+12R( \\
& y34,-y45)+4i\log(y34))*y45^3+((-76R(y34,-y45)-8R(y34,y35)-16Zeta2-60*i\log(-y45)+4i\log( \\
& y35)-78+(-28-8i\log(y34))*i\log(y34))*y45^2+((160R(y34,-y45)+28R(y34,y35)-4i\log(y35)+222 \\
& +84i\log(-y45)+48Zeta2+(72+24i\log(y34))*i\log(y34))*y45^6+((-52i\log(-y45)-218-32R(y34, \\
& y35)-144R(y34,-y45)-48Zeta2+(-84-24i\log(y34))*i\log(y34))*y45^5+((12i\log(-y45)+72+16* \\
& Zeta2+12R(y34,y35)+52R(y34,-y45)+44+8i\log(y34))*i\log(y34))*y45^4+((-8i\log(y34)-4R(y34, \\
& -y45))*y45^3+y34)*y34+(-20R(y34,-y45)-8Zeta2+2i\log(y35)-8R(y34,y35)-8-4R(y34,y35) \\
& )-14i\log(-y45)+(-8-4i\log(y34))*i\log(y34))*y45^7+((218+46i\log(-y45)+48Zeta2+92R(y34,- \\
& y45)+32R(y34,y35)-2i\log(y35)+36+24i\log(y34))*i\log(y34))*y45^6+((-80Zeta2-64R(y34,y35) \\
& )-6i\log(y35)-358-54i\log(-y45)-140R(y34,-y45)+(-64-40i\log(y34))*i\log(y34))*y45^5+((6* \\
& i\log(y35)+26*i\log(-y45)+48R(y34,y35)+48Zeta2+214+84R(y34,-y45)+52+24i\log(y34))*i\log( \\
& y34))*y45^4+((-36-4i\log(-y45)-12R(y34,y35)-8Zeta2-16R(y34,-y45)+(-16-4i\log(y34))*i\log( \\
& y34))*y45^3+y34)*y34+((20R(y34,-y45)+12R(y34,y35)+16Zeta2+4i\log(-y45)+70+(4+ \\
& 8i\log(y34))*i\log(y34))*y45^6+((-48Zeta2-12i\log(-y45)-48R(y34,y35)-60R(y34,-y45)-210- \\
& 12i\log(y35)+(-16-24i\log(y34))*i\log(y34))*y45^5+((12i\log(-y45)+16i\log(y35)+64R(y34,y35) \\
& )+48Zeta2+210+60R(y34,-y45)+20+24i\log(y34))*i\log(y34))*y45^4+((-16Zeta2-4i\log(y35)- \\
& 32R(y34,y35)-20R(y34,-y45)-4i\log(-y45)-70+(-8-8i\log(y34))*i\log(y34))*y45^3+4R(y34,y35) \\
& )+y45^2*y34)*y34+((-34-4i\log(y34))*i\log(y34))*y45^2+12R(y34,y35)-6i\log(y35)-8*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Zeta2)*y45^5+((32R(y34,y35)+8i\log(y34)^2+14i\log(y35)+16Zeta2+16R(y34,-y45)+66)*y45^4+ \\
& ((-34-28R(y34,y35)-8R(y34,-y45)-4i\log(y34)^2-8i\log(y35)-8*Zeta2)*y45^3+8R(y34,y35))* \\
& y45^2*y34)*y34+((4R(y34,y35)+4i\log(y35))*y45^4+((-4i\log(y35)-8R(y34,y35))*y45^3+4 \\
& *R(y34,y35)+y45^2*y34)*y34)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)* \\
& y45^8+(12R(y34,-y45)+y45^7+(-12R(y34,-y45)+y45^6+4R(y34,-y45)+y45^5*y34)*y34)*y34+ \\
& 3+(((4i\log(y34)-2-4i\log(-y45)-8R(y34,-y45))*y45^8+((36R(y34,-y45)-12*i\log(y34)+16+12* \\
& i\log(-y45))*y45^7+((16i\log(y34)-12i\log(-y45)-38-56R(y34,-y45))*y45^6+((4i\log(-y45)+36* \\
& R(y34,-y45)+36-12i\log(y34))*y45^5+(-12-8R(y34,-y45)+4i\log(y34))*y45^4*(30i\log(-y45)+36R(y34,- \\
& y34)*y34)^2+((-6i\log(-y45)+8i\log(y34)-4-4R(y34,-y45))*y45^3*(30i\log(-y45)+36R(y34,- \\
& y45)-32i\log(y34)+30)*y45^2+((-50i\log(-y45)-118-6i\log(y35)+52i\log(y34)-4R(y34,y35)-88* \\
& R(y34,-y45))*y45^6+((34i\log(-y45)+184-40i\log(y34)+88R(y34,-y45)+12R(y34,y35)+10i\log( \\
& y35))*y45^5+((12i\log(y34)-36R(y34,-y45)-4i\log(y35)-116-8i\log(-y45)-12R(y34,y35))*y45^4+ \\
& 4+(4R(y34,-y45)+24+4R(y34,y35))*y45^3*y34)*y34)*y34)*y34)*y34)*y34)*y34)*y34)*y34)* \\
& *8+((12R(y34,-y45)+10-28i\log(y34)+18i\log(-y45))*y45^7+((64i\log(y34)-110-56R(y34,-y45) \\
& -8R(y34,y35)-12i\log(y35)-60i\log(-y45))*y45^6+((88R(y34,-y45)+36R(y34,y35)+38i\log(y35) \\
& )+70i\log(-y45)-64i\log(y34)+290)*y45^5+((32i\log(y34)-56R(y34,-y45)-56R(y34,y35)-32* \\
& i\log(-y45)-32i\log(y35)-292)*y45^4+((12R(y34,-y45)+4i\log(-y45)+116-12i\log(y34)+36R(y34,y35) \\
& ,y35)+8i\log(y35))*y45^3+(-6R(y34,y35)-12+4i\log(y34))*y45^2*y34)*y34)*y34)*y34)*y34)* \\
& +((-4-8i\log(y34))*y45^7+((-6i\log(y35)-18i\log(-y45)-12R(y34,-y45)-4R(y34,y35)+38i\log( \\
& y34)-18)*y45^6+((36R(y34,y35)+46i\log(-y45)+36R(y34,-y45)+46i\log(y35)-64i\log(y34)+164) \\
& *y45^5+((-70i\log(y35)-38i\log(-y45)+12R(y34,-y45)-88R(y34,y35)-290+64i\log(y34)-36R(y34,-y45) \\
& )+34i\log(y35)+184+10i\log(-y45)+12R(y34,-y45)-40i\log(y34)+88R(y34,y35))*y45^4+((12* \\
& i\log(y34)-36R(y34,y35)-4i\log(y35)-36)*y45^3+4R(y34,y35)+12R(y34,-y45)+88R(y34,y35)+118)*y45^3 \\
& y34+((8i\log(y34)+12)*y45^6+((4R(y34,-y45)+18+6i\log(-y45)+12R(y34,y35)-36i\log(y34)+18* \\
& i\log(y35))*y45^5+((-12i\log(-y45)+64i\log(y34)-56R(y34,-y45)-8R(y34,y35)-36i\log(y35))- \\
& 110)*y45^4+((50i\log(y35)+6i\log(-y45)-52i\log(y34)+4R(y34,-y45)+88R(y34,y35)+118)*y45^3 \\
& +((-12i\log(y35)-38+16i\log(y34)-56R(y34,y35))*y45^2+12R(y34,y35)+y45*y34)*y34)*y34)*y34)* \\
& )y34+((-4-8i\log(y34))*y45^5+((28i\log(y34)-18i\log(y35)-10-12R(y34,y35))*y45^4+((30+36* \\
& R(y34,y35)+30i\log(y35)-32i\log(y34))*y45^3+((12i\log(y34)-12i\log(y35)-36R(y34,y35)-16)* \\
& y45^2+12R(y34,y35)+y45*y34)*y34)*y34+((-2+4i\log(y34))*y45^4+((4-8i\log(y34)+6i\log( \\
& y35)+4R(y34,y35))*y45^3+((-2-4i\log(y35)-8R(y34,y35)+4i\log(y34))*y45^2+4R(y34,y35)+y45 \\
& *y34)*y34)*y34)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)*y35)* \\
& y35)^2/y45^3/y35^3/y12^2/q2
\end{aligned}$$

### 1.1.2 Reelle Korrekturen (singuläre Anteile)

Die folgenden Beiträge der reellen Korrekturen zum Betragssquadrat des Matrixelementes ergeben sich durch eine analytisch in  $d = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen durchgeführte Integration über den Bereich des Phasenraumes, in dem der Integrand in  $d = 4$  Dimensionen singularär wird (Gebiet A nach Abbildung 15 bzw. 16):

$$\begin{aligned}
 \text{eq2epq\_gRAD\_ll} &= \sum_{\text{Spinns,Farben}} (\text{eq2epq\_l})(\text{eq2epq\_l})^*, \\
 \text{eq2epq\_gRAD\_lh} &= \sum_{\text{Spinns,Farben}} (\text{eq2epq\_l})(\text{eq2epq\_h})^*, \\
 \text{eq2epq\_gRAD\_hl} &= \sum_{\text{Spinns,Farben}} (\text{eq2epq\_h})(\text{eq2epq\_l})^*, \\
 \text{eq2epq\_gRAD\_hh} &= \sum_{\text{Spinns,Farben}} (\text{eq2epq\_h})(\text{eq2epq\_h})^*.
 \end{aligned}
 \tag{184}$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Die interferierenden Terme werden, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen, hier nicht angegeben. Die verbleibenden Beiträge zum Betragssquadrat des Matrixelementes haben folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \text{eq2epq\_gRAD\_ll} &= \\
 &+1/e^2 * ( 256*\text{Delta}(1-u)*\text{CommonFactor}*q\text{elec}^4*q\text{quark}^2*g\text{strong}^2*(y23*y45+(-2*y23-y35)* \\
 &y14+y24*y35+(-2*y24-y45)*y13)*y12*((-y23-y35)*y14-2*y23*y24+(-y45-y24)*y13)*y15+(-y24*y35+ \\
 &y14*y23-y23*y45+(2*y14+y24)*y13)*y25)/((-y12-y15+y25)^2/q2/y15/y25) \\
 &+1/e^2 * ( -64*\text{CommonFactor}*q\text{elec}^4*q\text{quark}^2*g\text{strong}^2*((2*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y45+(-4* \\
 &Plus(-1/(-1+u)))*y23-2*Plus(-1/(-1+u)))*y35)*y14+2*Plus(-1/(-1+u)))*y24*y35+(-4*Plus(-1/(-1+u)) \\
 &)*y24-2*Plus(-1/(-1+u)))*y45)*y13)*y12+(((-2*Plus(-1/(-1+u)))*y23-2*Plus(-1/(-1+u)))*y35)*y14 \\
 &-4*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y24+(-2*Plus(-1/(-1+u)))*y24-2*Plus(-1/(-1+u)))*y45)*y13)*y15+(-2* \\
 &Plus(-1/(-1+u)))*y24*y35+2*Plus(-1/(-1+u)))*y14*y23-2*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y45+4*Plus(-1/(-1+ \\
 &u)))*y14+2*Plus(-1/(-1+u)))*y24)*y13)*y25+((2*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y45+(-4*Plus(-1/(-1+u)))* \\
 &y23-2*Plus(-1/(-1+u)))*y35)*y14+2*Plus(-1/(-1+u)))*y24*y35+(-4*Plus(-1/(-1+u)))*y24-2*Plus(- \\
 &1/(-1+u)))*y45)*y13)*y12+((-2*Plus(-1/(-1+u)))*y23-2*Plus(-1/(-1+u)))*y35)*y14+4*Plus(-1/(-1+ \\
 &u)))*y23*y24+(-2*Plus(-1/(-1+u)))*y24-2*Plus(-1/(-1+u)))*y45)*y13)*y15+((-2*Plus(-1/(-1+u)))* \\
 &y24*y35+2*Plus(-1/(-1+u)))*y14*y23-2*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y45+4*Plus(-1/(-1+u)))*y14+2*Plus(- \\
 &-1/(-1+u)))*y24)*y13)*y25+((-8*y35+(-3+4*iLog(y34)))*y23)*y45+((3-4*iLog(y34)))*y35+(-8 \\
 &*iLog(y34)+6)*y23)*y14+(-3+4*iLog(y34)))*y35*y24+((3-4*iLog(y34)))*y45+(-8*iLog(y34)+6)*y24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &*y13-8*y12*y24)*y12+(4*y23*y45+((-1-4*iLog(y34)))*y35+(3-4*iLog(y34)))*y23)*y14+(4*y35+(-8* \\
 &iLog(y34)+6)*y23)*y24+((-1-4*iLog(y34)))*y45+(3-4*iLog(y34)))*y24)*y13-8*y12*y34-4*y15*y34)* \\
 &y15+((-1-4*iLog(y34)))*y23*y45+(4*y35+(-3+4*iLog(y34)))*y23)*y14+(-1-4*iLog(y34)))*y35*y24+(4 \\
 &*y45+(8*iLog(y34)-6)*y14+(-3+4*iLog(y34)))*y24)*y13+8*y12*y34-4*y25*y34)*y25)*\text{Delta}(1-u))/ \\
 &-y12-y15+y25)^2/q2/y15/y25) \\
 &+1/e^0 * ( -64*\text{CommonFactor}*q\text{elec}^4*q\text{quark}^2*g\text{strong}^2*((4*Plus(-1/(-1+u)))*y35+(-2*Plus(- \\
 &1/(-1+u)))-2*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u))-2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial))*y23)*y45+((2*Plus(- \\
 &iLog(1-u)/(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+2*Plus(-1/(-1+u)))*y35+(4*Plus(-iLog(1- \\
 &u)/(-1+u)))+4*Plus(-1/(-1+u)))+4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial))*y23)*y14+(-2*Plus(-1/(-1+u)) \\
 &)-2*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u))-2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial))*y35*y24+((2*Plus(-iLog(1-u)/ \\
 &(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+2*Plus(-1/(-1+u)))*y45+(4*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)) \\
 &)+4*Plus(-1/(-1+u)))+4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial))*y24)*y13+4*Plus(-1/(-1+u))*y12*y34)* \\
 &y12+(-2*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y45+((4*Plus(-1/(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+2* \\
 &Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))*y35+2*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))*2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+2 \\
 &*Plus(-1/(-1+u)))*y23)*y14+(-2*Plus(-1/(-1+u)))*y35+(4*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))+4*Plus(-1/(- \\
 &1+u)))+4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial))*y23)*y24+((4*Plus(-1/(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u)))* \\
 &iLog(yInitial)+2*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))*y45+(2*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u)) \\
 &*iLog(yInitial)+2*Plus(-1/(-1+u)))*y24)*y13+4*Plus(-1/(-1+u))*y12*y34+2*Plus(-1/(-1+u)))* \\
 &y34*y15)+((4*Plus(-1/(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+2*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)) \\
 &)*y23*y45+(-2*Plus(-1/(-1+u)))*y35+(-2*Plus(-1/(-1+u)))-2*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u))-2*Plus(- \\
 &1/(-1+u))*iLog(yInitial))*y23)*y14+(4*Plus(-1/(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+2* \\
 &Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))*y35*y24+(-2*Plus(-1/(-1+u)))*y45+(-4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial \\
 &)-4*Plus(-1/(-1+u)))-4*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))*y14+(-2*Plus(-1/(-1+u)))-2*Plus(-iLog(1-u)/ \\
 &-1+u))-2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial))*y24)*y13-4*Plus(-1/(-1+u))*y12*y34+2*Plus(-1/(-1+ \\
 &u)))*y34*y25)*y25+((4*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y45+(-4*Plus(-1/(-1+u)))*y35-8*Plus(-1/(-1+u)))*y23 \\
 &)*y14+4*Plus(-1/(-1+u)))*y24*y35+(-8*Plus(-1/(-1+u)))*y24-4*Plus(-1/(-1+u))*y45)*y12+(( \\
 &-4*Plus(-1/(-1+u)))*y23-4*Plus(-1/(-1+u)))*y35)*y14-8*Plus(-1/(-1+u)))*y23*y24+(-4*Plus(-1/(- \\
 &1+u)))*y45-4*Plus(-1/(-1+u)))*y24)*y13)*y15+(4*Plus(-1/(-1+u)))*y14*y23-4*Plus(-1/(-1+u)))*y23 \\
 &*y45-4*Plus(-1/(-1+u)))*y24*y35+(8*Plus(-1/(-1+u)))*y14+4*Plus(-1/(-1+u)))*y24)*y13)*y25+(((4 \\
 &*Plus(-1/(-1+u)))*y35+(-2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial))-6*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))-2*Plus(- \\
 &1/(-1+u)))-4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(-y34/(y34+u-y34-yInitial*u)))*y23)*y45+((6*Plus(-iLog(1-u)/(-1+ \\
 &u)))/(-1+u))+2*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+2*Plus(-1/(-1+u)))+4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(-y34/( \\
 &y34+u-y34-yInitial*u)))*y35+(4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(yInitial)+12*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))+8 \\
 &*Plus(-1/(-1+u))*iLog(-y34/(y34+u-y34-yInitial*u)))+4*Plus(-1/(-1+u)))*y23)*y14+(-2*Plus(- \\
 &1/(-1+u))*iLog(yInitial)-6*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))-2*Plus(-1/(-1+u))-4*Plus(-1/(-1+u))* \\
 &iLog(-y34/(y34+u-y34-yInitial*u)))*y35*y24+((6*Plus(-iLog(1-u)/(-1+u)))+2*Plus(-1/(-1+u))* \\
 &iLog(yInitial)+2*Plus(-1/(-1+u)))+4*Plus(-1/(-1+u))*iLog(-y34/(y34+u-y34-yInitial*u)))*y45+
 \end{aligned}$$





Korrekturen zum Betragsquadrat des Matrixelementes:

$$\begin{aligned}
 \text{eq2epqg.p3p6.l1} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3! 6} \frac{1}{2^3 3! 6 + 2^3 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.l}) (\text{eq2epqg.l})^*, \\
 \text{eq2epqg.p3p6.lh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3! 6} \frac{1}{2^3 3! 6 + 2^3 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.l}) (\text{eq2epqg.h})^*, \\
 \text{eq2epqg.p3p6.hl} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3! 6} \frac{1}{2^3 3! 6 + 2^3 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.h}) (\text{eq2epqg.l})^*, \\
 \text{eq2epqg.p3p6.hh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3! 6} \frac{1}{2^3 3! 6 + 2^3 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.h}) (\text{eq2epqg.h})^*, \\
 \text{eq2epqg.p4p6.l1} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 3! 6} \frac{1}{2^4 3! 6 + 2^4 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.l}) (\text{eq2epqg.l})^*, \\
 \text{eq2epqg.p4p6.lh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 3! 6} \frac{1}{2^4 3! 6 + 2^4 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.l}) (\text{eq2epqg.h})^*, \\
 \text{eq2epqg.p4p6.hl} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 3! 6} \frac{1}{2^4 3! 6 + 2^4 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.h}) (\text{eq2epqg.l})^*, \\
 \text{eq2epqg.p4p6.hh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 3! 6} \frac{1}{2^4 3! 6 + 2^4 3! 6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqg.h}) (\text{eq2epqg.h})^*.
 \end{aligned}$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Dabei sind  $\mathcal{P} \frac{1}{2^3 3! 6} \frac{1}{2^3 3! 6 + 2^3 3! 6}$  Projektionsoperatoren, die auf Terme mit dem Faktor  $\frac{1}{2^3 3! 6} \frac{1}{2^3 3! 6 + 2^3 3! 6} b_{\text{DW}}$  projizieren. Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die anderen Beiträge am Betragsquadrat des Matrixelementes haben folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \text{eq2epqg.p3p6.l1} &= \\
 &+1/e^0 * ( 1/(-y36-y46)/(y12*y15-y25)^2/q2^2 * qelec^4 * qqquark^2 * gstrong^2 * (((-256*y16*y23- \\
 &128*y16*y35+(-512*y23-256*y35)*y14+(128*y14+128*y23)*y56+(128*y16+256*y23)*y45+(128*y35- \\
 &128*y45+256*y14)*y26)*y34+(-128*y56+256*y16+256*y35)*y34*y24+((-256*y26-256*y45-128*y66)* \\
 &y34-512*y24*y34)*y13)/y36*y12+((-128*y16*y35-128*y16*y23+(-256*y35-256*y23)*y14+128*y14* \\
 &y56+128*y16*y45+(-256*y23+128*y14)*y26)*y34+(128*y16+256*y26-512*y23)*y34*y24+((-128*y66- \\
 &256*y45-128*y26)*y34-256*y24*y34)*y13)/y36*y15/y15+((128*y16*y23+(-256*y16+256*y23)*y14- \\
 &128*y23*y56-256*y23*y45+(-128*y14-128*y35+128*y45)*y26)*y34+(-128*y16-256*y35+128*y56)*y34 \\
 &*y24+((128*y26+256*y16+512*y14)*y34+256*y24*y34)*y13)/y36/y15/y25) /y25 )
 \end{aligned}$$

$$\text{eq2epqg.p3p6.lh} =$$

$$\begin{aligned}
 &+1/e^0 * ( (((-256)/(-y36-y46))/(y35+y36-y56)/y36-256/(-y36-y46)/(-y45-y46-y56)/y36)*y16+(( \\
 &128/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36-128/(-y36-y45)/(-y36-y46)/(-y45-y46-y56)/y36)*y56+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &y46)/(-y36-y46)/y36)*y14)*y26+((-128/(-y36-y46)/(-y45-y46-y56)/y36-128/(-y36-y46)/y35+y36- \\
 &-y56)/y36)*y16+(-256/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/y36+128/(y35+y46)/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/ \\
 &y36+y56)*y14)*y25+(((128/(-y36-y46)/(-y36-y46)/y36-128/(-y36-y45)/(-y36-y46)/(-y45-y46-y56) \\
 &/y36+y56-128/(y35+y46)/(-y36-y46)/y36)*y16+((-256/(y36+y46)/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36)*y56+ \\
 &256/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)*y35/y36+256/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36)*y14)* \\
 &y24+((-128/(y35+y46)/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36-128/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56) \\
 &/y36)*y14*y26+((-256/(y35+y46)/(-y36-y45)/(-y36-y46)*y16/y36+(-128/(y35+y46)/(-y36-y45)/(- \\
 &y36-y46)/y36-128/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y14)*y25+((-128/(y35+y46)/(- \\
 &y36-y45)/(-y36-y46)/y36-128/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y16*y24)*y34 \\
 &+((128/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36+128/(y35+y46)/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/y36+y56-128/(y35+ \\
 &y46)/(-y36-y46)/y36)*y16+(128/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36-256/(y35+y46)/(-y36-y46)/(-y36-y46 \\
 &)/y36+y56+128/(y35+y46)/(-y36-y46)/y36+1/(-y36-y46)/y36+256/(-y45-y46-y56)*(-128/y36- \\
 &*y45+128*y35/y36)*y14+((128/(y35+y46)/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36+256/(-y36-y46)/(y35+y36- \\
 &y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y14)*y34)*y34*y23+(((128/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36+256/(-y36-y46)/(y35+ \\
 &y46)/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/y36+y56-128/(y35+y46)/(-y36-y46)/y36)*y26+(256/(-y36-y46)/(- \\
 &y45-y46-y56)/y36-128/(-y36-y46)/(-y45-y46-y58)/y36)*y26+(128/(-y36-y46)/y36+1/(- \\
 &y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36+y56+128/(y35+y36-y56)/(-y36-y46)/y36+1/(- \\
 &y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)*(-128/y36+y45+128*y35/y36))*y24+((128/(y35+y46)/(- \\
 &y36-y45)/(-y36-y46)/y36+128/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y26+(128/(y35+y46 \\
 &)/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36+128/(-y36-y46)/y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y26+(256/(y35 \\
 &+y46)/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y36+256/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y24)*y34 \\
 &*y34+(256/(y35+y46)/(-y36-y46)/y36-256/(y35+y46)/(-y36-y46)/(-y36-y46)/y36+y56-256/(-y36- \\
 &y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y34*y23)*y13+(256/(y35+y46)/(-y36-y45)/(-y36- \\
 &y46)/y36+y56+128/(-y36-y46)/(-y45-y46-y56)/y36+128/(-y36-y46)/y35+y36-y56)/y36+1/(-y36- \\
 &y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)*(-128*y35/y36+128/y36+y45))*y34^2*y12/y12^2/q2^2 * \\
 &gstrong^2 * qqquark^4 * qelec^2 + (((-128/(-y36-y46)/(-y45-y46-y56)/y36-128/(-y36-y46)/(y35+y36- \\
 &y56)/y36)*y26+(-256/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/y36+128/(y35+y46)/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/ \\
 &y36+y56)*y24+(-256/(y35+y46)/(-y36-y45)/(-y36-y46)/y26/y36+(-128/(y35+y46)/(-y36-y45)/(- \\
 &y36-y46)/y36-128/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y24)*y34*(256/(-y36-y46) \\
 &)/(-y45-y46-y56)/y36-128/(-y36-y45)/(-y36-y46)/(-y45-y46-y56)/y36+y56+128/(y35+y46)/(-y36- \\
 &-y45)/(-y36-y46)/y36+128/(-y36-y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y36)*y34)*y34*y23)/y12^2/ \\
 &q2^2 * gstrong^2 * qqquark^4 * qelec^2 * y15 )
 \end{aligned}$$

$$\text{eq2epqg.p4p6.l1} =$$

$$\begin{aligned}
 &+1/e^0 * ( 1/(y36+y46)/(y12*y15-y25)^2/q2^2 * qelec^4 * qqquark^2 * gstrong^2 * (((128*y16*y35+256 \\
 &*y16*y23+(512*y23+256*y35)*y14+(-128*y23-128*y14)*y56+(-128*y16-256*y23)*y45+(-128*y35-256
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)*y45/y46-256/(y35+y46)/(y36+y46)/(y35+y46)/(y36+y46)/(- \\ & y36-y45)/y46*y56)*y34*y23)*y13+(-256/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46*y56+1/(y36+y46)/( \\ & y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)*(128*y35/y46-128*y45/y46)-128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46-128/ \\ & (y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46)*y34^2*y12)/y12^2/q2^2*strong^2*quark^4*elec^2 \end{aligned}$$

**I.1.4 Faktorisierungsterme**

Es gibt die folgenden Beiträge der Faktorisierungsterme zum Betragsquadrat des Matrixelementes:

$$\begin{aligned} \text{eq2epq\_gFACT\_ll} &= \frac{\alpha_s P_{q-q}}{2\pi} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_l} (\text{eq2epq\_l})), \\ \text{eq2epq\_gFACT\_lh} &= \frac{\alpha_s P_{q-q}}{2\pi} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_l} (\text{eq2epq\_h})), \\ \text{eq2epq\_gFACT\_hl} &= \frac{\alpha_s P_{q-q}}{2\pi} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_h} (\text{eq2epq\_l})), \\ \text{eq2epq\_gFACT\_hh} &= \frac{\alpha_s P_{q-q}}{2\pi} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq\_h} (\text{eq2epq\_h})). \end{aligned} \tag{186}$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die verbleibenden Beiträge der Faktorisierungsterme haben folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{eq2epq\_gFACT\_ll} &= \\ & +1/e^{-1}* ( 64*CommonFactor*quark^2*strong^2*((2*Plus(-1/(-1+u))*y23*y45+(-4*Plus \\ & (-1/(-1+u))*y23-2*Plus(-1/(-1+u))*y35)*y14+2*Plus(-1/(-1+u))*y24*y55+(-4*Plus(-1/(-1+u))* \\ & y24-2*Plus(-1/(-1+u))*y45)*y13)*y12+((-2*Plus(-1/(-1+u))*y23-2*Plus(-1/(-1+u))*y35)*y14-4* \\ & Plus(-1/(-1+u))*y23*y24+(-2*Plus(-1/(-1+u))*y24-2*Plus(-1/(-1+u))*y45)*y13)*y15+(-2*Plus(- \\ & 1/(-1+u))*y24*y35+2*Plus(-1/(-1+u))*y14*y23-2*Plus(-1/(-1+u))*y23*y45+(-4*Plus(-1/(-1+u))*y23-2* \\ & Plus(-1/(-1+u))*y35)*y14+2*Plus(-1/(-1+u))*y24*y35+(-4*Plus(-1/(-1+u))*y24-2*Plus(-1/(-1+u) \\ & ))*y45)*y13)*y12+((-2*Plus(-1/(-1+u))*y23-2*Plus(-1/(-1+u))*y45)*y13)*y15+(-2*Plus(-1/(-1+u) \\ & )*y24+(-2*Plus(-1/(-1+u))*y24-2*Plus(-1/(-1+u))*y23*y45+(-4*Plus(-1/(-1+u))*y14+2*Plus(-1/(-1+u) \\ & )*y13)*y25)*u-2+((3*y23*y45+(-6*y23-3*y35)*y14+3*y24*y35+(-6*y24-3*y45)*y13)*y12+(-3 \\ & *y23-3*y35)*y14-6*y23*y24+(-3*y24-3*y45)*y13)*y15+(3*y14*y23-3*y23*y45-3*y24*y35+(6*y14+3* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & *y14+128*y45)*y26)*y34*(-256*y35+128*y56-256*y16)*y34*y24+((256*y26+256*y45+128*y56)*y34+ \\ & 512*y24*y34)*y13)/y46*y12+((128*y16*y35+128*y16*y23+(256*y23+256*y35)*y14-128*y14*y56-128* \\ & y16*y45+(256*y23-128*y14)*y26)*y34+(-256*y26-128*y16+512*y23)*y34*y24+(256*y45+128*y56+ \\ & 128*y26)*y34+256*y24*y34)*y13)/y46*y15)/y15+((-128*y16*y23+(256*y16-256*y23)*y14+128*y23* \\ & y56+256*y23*y45+(128*y14+128*y35-128*y56)*y26)*y34+(128*y16+256*y35-128*y56)*y34*y24+((- \\ & 128*y26-256*y16-512*y14)*y34-256*y24*y34)*y13)/y46*(y15*y25)/y25 \end{aligned}$$

$$\text{eq2epqg\_p4p6\_hh} =$$

$$\begin{aligned} & +1/e^0*( ((128/(y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46+128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46)*y26*y18+(- \\ & 128/(y35+y46)/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46*y56+256/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46)*y25*y14+(( \\ & 128/(y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46+128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46)*y15+(256/(y36+y46)/(y35+ \\ & y36-y56)/y46+256/(y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46)*y16+(128/(y35+y46)/(y36+y46)/y46-128/(y36+ \\ & y46)/(-y36-y45)/y46+128/(y36+y46)/(-y36-y45)/(-y45-y46-y56)/y46)*y26+((-128/(y35+y \\ & y46)/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46*y56+256/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46)*y15+(128/(y35+y46)/( \\ & y36+y46)/y46-128/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46+128/(y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46)*y16+256 \\ & /y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46*y14)*y24+(256/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)*y16* \\ & y25/y46+(128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y46+128/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45) \\ & /y46)*y25*y14+(256/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)*y15/y46+(128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(- \\ & y45-y46-y56)/y46+128/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)*y14)*y26+(128/(y36+y46)/(y35+y36 \\ & -y56)/(-y45-y46-y56)/y46+128/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46)*y15+(128/(y36+y46)/(y35+ \\ & y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y46+128/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46)*y16)*y24)*y34+(( \\ & 128/(y36+y46)/(-y36-y45)/(-y45-y46-y56)/y46*y56+256/(y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46)*y15+(128 \\ & /y35+y46)/(y36+y46)/y46-128/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46+128/(y35+y46)/(y36+y46)/(y35+y36-y56/( \\ & )/y46*y56)*y16+(1/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56))*(-128*y35/y46+128*y45/y46)+256/( \\ & y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46*y56-128/(y35+y46)/(y36+y46)/y46-128/(y36+y46)/(-y36-y45) \\ & /y46)*y14+((-128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y46-128/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36- \\ & y45)/y46)*y15+(-128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y46-128/(y35+y46)/(y36+y46)/( \\ & y36-y45)/y46)*y16+(256/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(-y45-y46-y56)/y46-256/(y35+y46)/(y36+y46) \\ & /(-y36-y45)/y46)*y14)*y34)*y23+(((128/(y36+y46)/(-y36-y45)/(-y45-y46-y56)/y46*y56+256/ \\ & (y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46)*y25+(128/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46-128/(y36+y46)/(-y36-y45)/ \\ & (y36+y46)/(-y45-y46-y56)/y46)*y26+(128/(y35+y46)/(y36+y46)/y46-128/(y36+y46)/(-y36-y45)- \\ & y46-128/(y35+y46)/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/y46)*y24+((-128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(-y45- \\ & y46)/(y36+y46)/y46-128/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46)*y24+((-128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(-y45- \\ & y46-y56)/y46-128/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46)*y26+((-128/(y36+y46)/(y35+y36-y56)/(- \\ & y45-y46-y56)/y46-128/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46)*y26+(256/(y36+y46)/(y35+y36-y56) \\ & /(-y45-y46-y56)/y46-256/(y35+y46)/(y36+y46)/(-y36-y45)/y46)*y24)*y34+(256/(y36+y46)/(- \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& 6 * i \text{Log}(y \text{Factor}) * y34 - 3 * i \text{Log}(y \text{Factor}) * y45 * y24 + ((3 * 3 * i \text{Log}(y \text{Factor})) * y25 + 3 * i \text{Log}(y \text{Factor}) * y24) \\
& * y35 - 6 * i \text{Log}(y \text{Factor}) * y23 * y45 * y13 + (3 * y45^2 + (-6 * y45 + 6 * y34) * y34 + (6 * y34 + 3 * y35) * y35) * y12 * \\
& \text{Delta}(1 - u) / q2 / y12^2 / y35 / y45 \quad )
\end{aligned}$$

## I.2 Einlaufendes Gluon

### I.2.1 Virtuelle Korrekturen

In Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  gibt es keinen Streuprozess mit einlaufendem Gluon und somit auch keine virtuellen Korrekturen dazu.

### I.2.2 Reelle Korrekturen (singuläre Anteile)

Die folgenden Beiträge der reellen Korrekturen zum Betragssquadrat des Matrixelementes ergeben sich durch eine analytisch in  $d = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen durchgeführte Integration über den Bereich des Phasenraumes, in dem der Integrand in  $d = 4$  Dimensionen singularär wird (Gebiet A nach Abbildung 15 bzw. 16):

$$\begin{aligned}
\text{eg2epq\_gRAD\_ll} &= (1 + \epsilon) \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqa\_l}) (\text{eg2epqa\_l})^*, \\
\text{eg2epq\_gRAD\_lh} &= (1 + \epsilon) \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqa\_l}) (\text{eg2epqa\_h})^*, \\
\text{eg2epq\_gRAD\_hl} &= (1 + \epsilon) \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epqa\_h}) (\text{eg2epqa\_l})^*, \\
\text{eg2epq\_gRAD\_hh} &= (1 + \epsilon) \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa\_h}) (\text{eg2epqa\_h})^*.
\end{aligned} \tag{187}$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Der Faktor  $(1 + \epsilon)$  berücksichtigt die Mittelung über  $d - 2$  Polarisationen der Gluonen. Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die verbleibenden Beiträge am Betragssquadrat des Matrixelementes haben folgende Form:

$$\begin{aligned}
\text{eg2epq\_gRAD\_ll} &= \\
& + 1/e^{-1} * ( \quad 256 * \text{Plus}(-1/(-1+u)) * \text{CommonFactor} * \text{qelec}^4 * \text{quark}^2 * \text{gstrong}^2 * ((y35+2*y23) * y14 - \\
& y23 * y45 - y24 * y35 + (y45+2*y24) * y13) * y12 + ((y35+y23) * y14 + 2 * y23 * y24 + (y24+y45) * y13) * y15 + (y24 * y35 + \\
& y23 * y45 - y14 * y23 + (-2 * y14 - y24) * y13) * y25 + (((-3 * y35 - 6 * y23) * y14 + 3 * y23 * y45 + 3 * y24 * y35) * (-6 * y24 - 3 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y45) * y13) * y12 + ((-3 * y23 - 3 * y35) * y14 - 6 * y23 * y24 + (-3 * y24 - 3 * y45) * y13) * y15 + (3 * y14 * y23 - 3 * y23 * y45 - 3 \\
& * y24 * y35 + (6 * y14 + 3 * y24) * y13) * y25 + (((8 * y23 + 4 * y35) * y14 - 4 * y23 * y45 - 4 * y24 * y35 + (4 * y45 + 8 * y24) * y13) \\
& * y12 + ((4 * y23 + 4 * y35) * y14 + 8 * y23 * y24 + (4 * y24 + 4 * y45) * y13) * y15 + (-4 * y14 * y23 + 4 * y23 * y45 + 4 * y24 * y35 + (- \\
& 4 * y24 - 8 * y14) * y13) * y25 + (((-4 * y23 - 2 * y35) * y14 + 2 * y23 * y45 + 2 * y24 * y35 + (-4 * y24 - 2 * y45) * y13) * y12 + (( \\
& -2 * y23 - 2 * y35) * y14 - 4 * y23 * y24 + (-2 * y24 - 2 * y45) * y13) * y15 + (-2 * y24 * y35 + 2 * y14 * y23 - 2 * y23 * y45 + (4 * y14 \\
& + 2 * y24) * y13) * y25) * u) / (-y12 - y15 * y25)^2 / q2 / y15 / y25 \quad ) \\
& + 1/e^0 * ( \quad (1/(y12+y15-y25) - 2 * \text{Plus}(1/(1-n)) * i \text{Log}(1-n)) / q2 * ((((-512 * y23 - 256 * y35) * y14 + 256 * \\
& y23 * y45 + 256 * y24 * y35 + (-512 * y24 - 256 * y45) * y13) * y12 + ((-256 * y35 - 256 * y23) * y14 - 512 * y23 * y24 + (-256 * \\
& y24 - 256 * y45) * y13) * y15) / y15 + (256 * y14 * y23 - 256 * y23 * y45 - 256 * y24 * y35 + (256 * y24 + 512 * y14) * y13) / y15 \\
& * y25) / y25 + (((((-1536 * y23 + 768 * y35) * y14 - 768 * y23 * y45 - 768 * y24 * y35 + (768 * y45 + 1536 * y24) * y13) * y12 + ( \\
& (768 * y23 + 768 * y35) * y14 + 1536 * y23 * y24 + (768 * y45 + 768 * y24) * y13) * y15) / y15 + (-768 * y14 * y23 + 768 * y24 * \\
& y35 + 768 * y23 * y45 + (-1536 * y14 - 768 * y24) * y13) * y12 + ((-1024 * y23 - 1024 * y35) * y14 - 2048 * y23 * y24 + \\
& y23 * y45 + 1024 * y24 * y35 + (-1024 * y45 - 2048 * y24) * y13) * y12 + ((-1024 * y23 + 1024 * y35 + 1024 * y14 * y23 + (2048 * y14 + 1024 \\
& (-1024 * y45 - 1024 * y24) * y13) * y15) / y15 + (-1024 * y23 * y45 - 1024 * y24 * y35 + 1024 * y14 * y23 + (2048 * y14 + 1024 \\
& * y24) * y13) / y15 * y25) / y25 + (((((-512 * y23 + 1024 * y35) * y14 - 512 * y23 * y45 - 512 * y24 * y35 + (1024 * y24 + 512 * \\
& y45) * y13) * y12 + ((512 * y23 + 512 * y35) * y14 + 1024 * y23 * y24 + (512 * y24 + 512 * y45) * y13) * y15) / y15 + (512 * y23 \\
& * y45 + 512 * y24 * y35 - 512 * y14 * y23 + (-512 * y24 - 1024 * y14) * y13) / y15 * y25) / y25 * u) * u) + ((y12 + y15 - y25 \\
& )^2 / q2 * (((((-256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y35 - 512 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y23) * y14 + (256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y23 - \\
& 512 * y35) * y45 + 256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y24 * y36 + (-256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y45 - 512 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y24) * \\
& y13 - 512 * y12 * y34) * y12 + (((-256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) - 256) * y35 - 256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y23) * y14 + 256 * y23 * \\
& y45 + (-512 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y23 + 256 * y35) * y24 + ((-256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) - 256) * y45 - 256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) \\
& ) * y24) * y13 - 512 * y12 * y34 - 256 * y15 * y34) * y15) / y15 + (((256 * y35 + 256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y23) * y14 + (-256 * \\
& i \text{Log}(y \text{Initial}) - 256) * y23 * y45 + (-256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) - 256) * y35 * y24 + (512 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y14 + 256 * \\
& y45 + 256 * i \text{Log}(y \text{Initial}) * y24) * y13 + 512 * y12 * y34) / y15 - 256) * y15 * y25 * y34) * y25) / y25 + (((((-768 * i \text{Log}( \\
& y \text{Initial}) - 512) * y35 + (1536 * i \text{Log}(y \text{Initial}) - 1024) * y23) * y14 + (1536 * y35 + (512 - 768 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * \\
& y23) * y45 + (512 - 768 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y35 * y24 + ((768 * i \text{Log}(y \text{Initial}) - 512) * y45 + (1536 * i \text{Log}( \\
& y \text{Initial}) - 1024) * y24) * y13 + 1536 * y12 * y34) * y12 + (((256 * 768 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y35 + (768 * i \text{Log}( \\
& y \text{Initial}) - 512) * y23) * y14 - 768 * y23 * y45 + (-768 * y35 + (1536 * i \text{Log}(y \text{Initial}) - 1024) * y23) * y24 + ((256 + \\
& 768 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y45 + (768 * i \text{Log}(y \text{Initial}) - 512) * y24) * y13 + 1536 * y12 * y34 + 768 * y15 * y34) * y15) / \\
& y15 + ((((-768 * y35 + (512 - 768 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y23) * y14 + (256 + 768 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y23 * y45 + (256 + \\
& 768 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y35 * y24 + ((1024 - 1536 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y14 - 768 * y45 + (512 - 768 * i \text{Log}(y \text{Initial}) \\
& )) * y24) * y13 - 1536 * y12 * y34) / y15 + 768) / y15 * y25 * y34) * y25) / y25 + (((((-512 * i \text{Log}(-1/(-q2 * y34 - q2 * \\
& y \text{Initial} * u) * q2 * y34) + 1024 - 1024 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y35 + (2048 - 1024 * i \text{Log}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y \text{Initial} * \\
& u) * q2 * y34) - 2048 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y23) * y14 + (-2048 * y35 + (-1024 + 1024 * i \text{Log}(y \text{Initial})) + 512 * i \text{Log}(- \\
& 1/(-q2 * y34 - q2 * y \text{Initial} * u) * q2 * y34) * y23) * y45 + (-1024 + 1024 * i \text{Log}(y \text{Initial})) + 512 * i \text{Log}(-1/(-q2 * \\
& y34 - q2 * y \text{Initial} * u) * q2 * y34) * y35 * y24 + ((-512 * i \text{Log}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y \text{Initial} * u) * q2 * y34) + 1024 - \\
& 1024 * i \text{Log}(y \text{Initial})) * y45 + (2048 - 1024 * i \text{Log}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y \text{Initial} * u) * q2 * y34) - 2048 * i \text{Log}
\end{aligned}$$

```

yInitial)*y24*y13-2048*y12*y34)*y12*((-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)-1024
*iLog(yInitial))*y35+(-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+1024-1024*iLog(yInitial
))*y23)*y14+1024*y23*y45+(1024*y35+(2048-1024*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)-2048
*iLog(yInitial))*y23)*y24+((-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+1024-1024*iLog(
yInitial))*y45+(-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+1024-1024*iLog(yInitial))*y24
)*y13-2048*y12*y34-1024*y15*y34)*y15/((1024*y35+(-1024+1024*iLog(yInitial)+512*iLog(-
1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34))*y23)*y14+(-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)
-1024*iLog(yInitial))*y23*y45+(-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)-1024*iLog(
yInitial))*y35*y24+(2048-1024*iLog(yInitial)-2048+1024*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)
)*y14+1024*y45+(-1024+1024*iLog(yInitial)+512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34))*y24
)*y13+2048*y12*y34)/y15-1024/y15*y25*y34)*y25/((512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+
1024-1024*iLog(yInitial))*y23)*y14+(1024+1024*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+
1024*iLog(yInitial))*y23)*y45+(-512*iLog(yInitial)-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*
q2*y34))*y35*y24+((512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)-512+512*iLog(yInitial))*y45
+(-1024+1024*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+1024*iLog(yInitial))*y24)*y13+1024*y
12*y34)*y12+((512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+512*iLog(yInitial))*y35+512*
iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)-512+512*iLog(yInitial))*y23)*y14-512*y23*y45+(-512
*y35+(-1024+1024*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+1024*iLog(yInitial))*y23)*y24+((
512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+512*iLog(yInitial))*y45+(-512*iLog(-1/(-q2*y34-
q2*yInitial*u)*q2*y34)-512+512*iLog(yInitial))*y24)*y13+1024*y12*y34+512*y15*y34)*y15)/y15
+((-512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+512*iLog(yInitial))*y23)*y14
+512*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+512*iLog(yInitial))*y23*y45+512*iLog(-1/(-
q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34)+512*iLog(yInitial))*y35*y24+((-1024+1024*iLog(yInitial)+1024-1024
*iLog(-1/(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34))*y14-512*y45+512*iLog(yInitial)-512*iLog(-1/
(-q2*y34-q2*yInitial*u)*q2*y34))*y24)*y13-1024*y12*y34)/y15+512/y15*y25*y34)*y25/(y25*u)*u
eg2epq_gRAD_hh =
+1/e-1*( 256*Plus(-1/(-1-u))*CommonFactor*qe1ec^2*qqquark^4*gsstrong^2*(-y14*y25*y34*y14*
y25*y45+(-y15*y34+y15*y45)*y24+2*y14*y24*y35+(-y14*y45+(2*y14*y15)*y34+(y15+y14)*y35)*y23+
(y25*y34+(2*y34-y45)*y24+(y25-y24)*y35-2*y23*y45)*y13+(-3*y14*y25*y45+3*y14*y25*y34+(-3*
y15*y45+3*y15*y34)*y24-6*y14*y24*y35+(3*y14*y45+(-3*y14-3*y15)*y34+(-3*y14-3*y15)*y35)*y23
+(-3*y25*y34+(3*y45-6*y34)*y24+(-3*y25-3*y24)*y35+6*y23*y45)*y13+(-4*y14*y25*y34+4*y14*y25
*y45+(4*y15*y34)*y24+8*y14*y24*y35+(-4*y14*y45+(8*y14+4*y15)*y34+(4*y14+4*y15)*
y35)*y23+(4*y25*y34+(8*y34-4*y45)*y24+(4*y24+4*y25)*y35-8*y23*y45)*y13+(2*y14*y25*y34+2*
y14*y25*y45+(-2*y15*y45+2*y15*y34)*y24-4*y14*y24*y35+(2*y14*y45+(-2*y15-4*y14)*y34+(-2*y14

```

Beiträge der reellen Korrekturen zum Betragsquadrat des Matrixelementes:

$$\begin{aligned}
 \text{eg2epqa.p3p6.gRAD.ll} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.l})(\text{eg2epqa.l})^* \\
 \text{eg2epqa.p3p6.gRAD.lh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.l})(\text{eg2epqa.h})^* \\
 \text{eg2epqa.p3p6.gRAD.hl} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.h})(\text{eg2epqa.l})^* \\
 \text{eg2epqa.p3p6.gRAD.hh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^3 3^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.h})(\text{eg2epqa.h})^* \\
 \text{eg2epqa.p4p6.gRAD.ll} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 1^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.l})(\text{eg2epqa.l})^* \\
 \text{eg2epqa.p4p6.gRAD.lh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 1^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.l})(\text{eg2epqa.h})^* \\
 \text{eg2epqa.p4p6.gRAD.hl} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 1^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.h})(\text{eg2epqa.l})^* \\
 \text{eg2epqa.p4p6.gRAD.hh} &= \mathcal{P} \frac{1}{2^4 1^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eg2epqa.h})(\text{eg2epqa.h})^* .
 \end{aligned}
 \tag{188}$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Dabei sind  $\mathcal{P} \frac{1}{2^3 3^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6}$  und  $\mathcal{P} \frac{1}{2^4 1^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6}$  Projektionsoperatoren, die auf Terme mit dem Faktor  $\frac{1}{2^3 3^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6}$  bzw.  $\frac{1}{2^4 1^6} \frac{1}{2^3 3^6 + 2^4 1^6}$  projizieren. Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die verbleibenden Beiträge am Betragsquadrat des Matrixelementes haben folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \text{eg2epqa.p3p6.ll} &= \\
 &+1/e^0 * ( 1/(y34+y36)/(y12*y15-y25)^2/q2^2 * \text{qelec}^4 * \text{quark}^2 * \text{strong}^2 * ((((-256*y16*y23- \\
 &128*y16*y35+(-256*y23-128*y35)*y14+(256*y14+128*y23)*y56+(256*y16+128*y23)*y45+(128*y35- \\
 &256*y45+512*y14)*y26)+(-256*y56+512*y16+128*y35)*y46*y24+((-256*y26-128*y45-128*y56)* \\
 &y46-256*y24*y46)*y13)/y36*y12+((-128*y16*y35-128*y16*y23+(-128*y35-128*y23)*y44+256*y14* \\
 &y56+256*y16*y45+(-256*y23+256*y14)*y26)*y46+(256*y16+512*y26-256*y23)*y46*y24+((-128*y56- \\
 &128*y45-128*y26)*y46-128*y24*y46)/y13)/y36*y15)/y15+((128*y16*y23+(-512*y16+128*y23)*y14- \\
 &128*y23*y56-128*y23*y45+(-256*y14-128*y35+256*y45)*y26)*y46+(-256*y16-128*y35+256*y56)*y46 \\
 &*y24+((128*y26+256*y14)*y46+128*y24*y46)*y13)/y36/y15*y25)/y25 )
 \end{aligned}$$

$$\text{eg2epqa.p3p6.hh} =$$

$$\begin{aligned}
 &+1/e^0 * ( (((-256/(y34+y36)/(y35+y36-y56)/(y34+y35-y45)/y36+y56+256/(y34+y36)/(-y36-y45)/ \\
 &y36+256/((-y34-y56)/(y34+y36)/(-y36-y45)*y35/y36)*y24*y14+(-128/(-y34-y56)/(y34+y36)/y36-
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{iLog}(y\text{Initial}) * y15 + (2048 - 1024 * \text{iLog}(-1/(-q2*y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 2048 * \text{iLog}(y\text{Initial} \\
 & * y14) / y45 * y34 + ((-1024 * \text{iLog}(y\text{Initial}) - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34)) * y15 + ( \\
 & * 1024 - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 1024 * \text{iLog}(y\text{Initial}) * y14) / y45 * y35) / y35 * \\
 & * y23 + (((1024 * y25 + (1024 - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 1024 * \text{iLog}(y\text{Initial})) * y25 / \\
 & * y45 * y34 + (1024 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 1024 + (2048 - 1024 * \\
 & \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 2048 * \text{iLog}(y\text{Initial})) / y45 * y34) * y24 + ((-1024 * \text{iLog}( \\
 & * y\text{Initial}) - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) * y25 / y45 + (1024 - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - \\
 & q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 1024 * \text{iLog}(y\text{Initial})) / y45 * y24) * y35 + (1024 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * \\
 & * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 2048) / y35 * y23) * y13 + ((-1024 * y45 + (2048 - 2048 * y34 / y45) * \\
 & * y34 + (-2048 * y34 / y45 - 1024 * y35 / y45) * y35) / y35 * y12) / y12 * 2 * (((512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 512 * \text{iLog}(-1/(- \\
 & -q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) * y14) * y25 / y45 * y34 + ((512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 \\
 & -q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) * y14) * y25 / y45 * y34 + ((512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 \\
 & * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) * y15 + (-512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y34) - q2 * \\
 & + 512) * y15 / y45 * y34) * y24 + (-512 * y14 * y25 / y45 + (-512 * y15 + (-1024 + 1024 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * \\
 & * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) + 1024 * \text{iLog}(y\text{Initial})) * y14) / y45 * y24) * y35) / y35 + (-512 * y15 + (-512 * \text{iLog}( \\
 & * y\text{Initial}) - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) + 512) * y14 + ((-512 + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 \\
 & - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) + 512 * \text{iLog}(y\text{Initial})) * y15 + (-1024 + 1024 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u \\
 & ) * q2 * y34) + 1024 * \text{iLog}(y\text{Initial})) * y14) / y45 * y34 + ((512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * \\
 & * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) * y15 + (-512 * y15 + (-512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * \\
 & * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) * y14) / y45 * y35) / y35 * y23 + ((-512 * y25 + (-512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} \\
 & * u)) * q2 * y34) + 512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) - 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 1024 * \text{iLog}(y\text{Initial})) / \\
 & * y45 * y34) * y24 + ((512 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) * y25 / y45 + (- \\
 & * 512 + 512 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) + 512 * \text{iLog}(y\text{Initial})) / y45 * y24) * y35) / y35 + (- \\
 & * 1024 * \text{iLog}(-1/(-q2 * y34 - q2 * y\text{Initial} * u)) * q2 * y34) - 1024 * \text{iLog}(y\text{Initial}) + 1024) / y35 * y23) * y13 + (512 * \\
 & * y45 + (-1024 + 1024 * y34 / y45) * y34 + (1024 * y34 / y45 + 512 * y35 / y45) * y35) / y35 * y12) / y12 * 2 * u) * u) * Plus( \\
 & 1/(1-u)) / q2 * \text{strong}^2 * \text{quark}^4 * \text{qelec}^2 * \text{CommonFactor} )
 \end{aligned}$$

### I.2.3 Reelle Korrekturen (endliche Anteile)

Die folgenden Terme ergeben bei numerischer Integration über den Bereich des Phasenraums, in dem der Integrand endlich bleibt (Gebiet  $B$  auf Abbildung 15 bzw. 16),



$$\begin{aligned}
& y34)*y26-256/(y34+y36)/(-y34-y56)/(-y36-y45)/(y34*y25)*y46)*y46+(-256/(y34+y36)/(y35+y36- \\
& y56)/y34-256/(y34+y36)/(y34+y35-y45)/y34)*y46*y23)*y13+(-128/(y34+y36)/(y34+y35-y45)/y34+ \\
& 256/(y34+y36)/(-y34-y56)/(y34+y36)/(y35+y36-y56)/(y34+y35-y45)*(-128/ \\
& y34*y45-128/(y34+y36)-128/(y34+y36)/(y35+y36-y56)/y34)*y46^2*y12^2/q2^2*ngstronq^2* \\
& qqvar^4*qlqc^2 \quad )
\end{aligned}$$

#### I.2.4 Faktorisierungsterme

Man benötigt die folgenden Faktorisierungsterme zum Betragsquadrat des Matrixelementes:

$$\begin{aligned}
\text{eg2epq.gFACT}_11 &= \frac{8}{3} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{q \rightarrow g} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq}_1) (\text{eq2epq}_1) \quad (189) \\
\text{eg2epq.gFACT}_1h &= \frac{8}{3} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{q \rightarrow g} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq}_1) (\text{eq2epq}_h) \\
\text{eg2epq.gFACT}_hh &= \frac{8}{3} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{q \rightarrow g} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq}_h) (\text{eq2epq}_h) \\
\text{eg2epq.gFACT}_hh &= \frac{8}{3} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{q \rightarrow g} \sum_{\text{Spins, Farben}} (\text{eq2epq}_h) (\text{eq2epq}_h)
\end{aligned}$$

Die verwendeten Bezeichnungen sind im Abschnitt F angegeben. Der Faktor  $\frac{8}{3}$  berücksichtigt die unterschiedlichen Mittlungsfaktoren für einlaufendes Quark und einlaufendes Gluon. Die Interferenzterme werden hier nicht angegeben, da sie — wie die Monte-Carlo-Integration ergab — nicht wesentlich zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Die verbleibenden Beiträge der Faktorisierungsterme haben folgende Form:

$$\begin{aligned}
& +1/e^1*( \quad -256*plus(-1/(-1+n))*CommonFactor*qlqc^4*quark^2*ngstronq^2*((2*y23+y35)*y14- \\
& y23*y45-y24*y35+(y45+2*y24)*y13)*y12+(y23+y35)*y14+2*y23*y24+(y24+y45)*y13)*y15+(-y14*y23 \\
& +y24*y35+y23*y45+(-y24-2*y14)*y13)*y25+(((6*y23-3*y35)*y14+3*y23*y45+3*y24*y35+(-3*y45-6* \\
& y24)*y13)+(-3*y23-3*y35)*y14-6*y23*y24+(-3*y45-3*y24)*y13)*y15+(3*y14*y23-3*y24*y35-3 \\
& *y23*y45+(6*y14+3*y24)*y13)*y25+(((8*y23+4*y35)*y14-4*y23*y45-4*y24*y35+(8*y24+4*y45)*y13) \\
& *y12+(4*y23+4*y35)*y14+8*y23*y24+(4*y45+4*y24)*y13)*y15+(4*y24*y35+4*y23*y45-4*y14*y23+(- \\
& 8*y14-4*y24)*y13)*y25+((-2*y35-4*y23)*y14+2*y23*y45+2*y24*y35+(-2*y45-4*y24)*y13)*y12+((- \\
& 2*y23-2*y35)*y14-4*y23*y24+(-2*y24-2*y45)*y13)*y15+(2*y14*y23-2*y23*y45-2*y24*y35+(4*y14+2 \\
& *y24)*y13)*y25)*u)*u)/(-y12-y15+y25)^2/q2/y15/y25 \quad ) \\
& +1/e^0*( \quad 1/(y12+y15-y25)^2*plus(1/(1-n))/q2*CommonFactor*qlqc^4*quark^2*ngstronq^2*(((((
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (256*iLog(yFactor)*y35+512*iLog(yFactor)*y14+(512*y35-256*iLog(yFactor)*y23)*y45-256* \\
& iLog(yFactor)*y24*y35+(512*iLog(yFactor)*y24+256*iLog(yFactor)*y45)*y13+512*y12*y34)*y12+( \\
& ((256*iLog(yFactor)+256)*y35+256*iLog(yFactor)*y23)*y14-256*y23*y45+(512*iLog(yFactor)*y23 \\
& -256*y35)*y24+((256*iLog(yFactor)+256)*y45+256*iLog(yFactor)*y24)*y13+512*y12*y34+256*y15* \\
& y34)*y15)/y15+(((256*y35-256*iLog(yFactor)*y23)*y14+(256*iLog(yFactor)*y14)*y13-512* \\
& iLog(yFactor)+256)*y35*y24+(-256*iLog(yFactor)*y24-256*y45-512*iLog(yFactor)*y35-1536*iLog(yFactor)*y23) \\
& y12*y34)/y15+256/y15*y25*y34)*y25+(((256*iLog(yFactor)*y23)*y45+768*iLog(yFactor)*y24*y35+(-1536*iLog(yFactor)* \\
& y14+(-1536*y35+768*iLog(yFactor)*y23)*y45+768*iLog(yFactor)*y24*y35+(-768*iLog(yFactor)-768*y35*iLog( \\
& yFactor)*y23)*y14+768*y23*y45+(-1536*iLog(yFactor)*y23+768*y35)*y24+((-768*iLog(yFactor)-768*y35+768*iLog \\
& 768)*y45-768*iLog(yFactor)*y24)*y13-1536*y12*y34)*y12+(((256*iLog(yFactor)*y15)/y15+(((768*y35+768*iLog \\
& (yFactor)*y23)*y14+(-768*iLog(yFactor)-768)*y23*y45+(-768*iLog(yFactor)-768)*y35*y24+(768* \\
& iLog(yFactor)*y24+768*y45+1536*iLog(yFactor)*y14)*y13+1536*y12*y34)/y15-768/y15*y25*y34)* \\
& y25)/y25+(((1024*iLog(yFactor)*y35+2048*iLog(yFactor)*y23)*y14+(2048*y35-1024*iLog( \\
& yFactor)*y23)*y45-1024*iLog(yFactor)*y24*y35+(2048*iLog(yFactor)*y24+1024*iLog(yFactor)* \\
& y45)*y13+2048*y12*y34)*y12+(((1024*iLog(yFactor)+1024)*y35+1024*iLog(yFactor)*y23)*y14- \\
& 1024*y23*y45+(2048*iLog(yFactor)*y23-1024*y35)*y24+((1024*iLog(yFactor)+1024)*y45+1024* \\
& iLog(yFactor)*y24)*y13+2048*y12*y34+1024*y15*y34)*y15)/y15+((-1024*y35-1024*iLog(yFactor) \\
& *y23)*y14+(1024*iLog(yFactor)+1024)*y23*y45+(1024*iLog(yFactor)+1024)*y35*y24+(-1024*iLog( \\
& yFactor)*y24-1024*y45-2048*iLog(yFactor)*y14)*y13-2048*y12*y34)/y15+1024/y15*y25*y34)*y25) \\
& /y25+(((512*iLog(yFactor)*y35-1024*iLog(yFactor)*y23)*y14+(-1024*y35+512*iLog(yFactor)* \\
& y23)*y45+512*iLog(yFactor)*y24*y35+(-1024*iLog(yFactor)*y24-512*iLog(yFactor)*y45)*y13- \\
& 1024*y12*y34)*y12+(((512*iLog(yFactor)-512)*y35-512*iLog(yFactor)*y23)*y14+512*y23*y45+(- \\
& 1024*iLog(yFactor)*y23+512*y35)*y24+((-512*iLog(yFactor)-512)*y45-512*iLog(yFactor)*y24)* \\
& y13-1024*y12*y34-512*y15*y34)*y15)/y15+(((512*y35+512*iLog(yFactor)*y23)*y14+(-512*iLog( \\
& yFactor)-512)*y23*y45+(-512*iLog(yFactor)-512)*y35*y24+(512*iLog(yFactor)*y24+512*y45+1024 \\
& *iLog(yFactor)*y14)*y13+1024*y12*y34)/y15-512/y15*y25*y34)*y25)/y25)*u)*u \quad )
\end{aligned}$$

eg2epq\_gFACT\_hh =

$$\begin{aligned}
& +1/e^1*( \quad -256*Plus(-1/(-1+n))*CommonFactor*qlqc^2*quark^4*ngstronq^2*(y14+2*y35*y34+y14* \\
& y25*y45+(y15*y45-y15*y34)*y24+2*y14*y24*y35+(-y14*y45+(y15+2*y14)*y34+(y15+y14)*y35)*y23+( \\
& y25*y34+(-y45+2*y34)*y24+(y24+y25)*y35-2*y23*y45)+(-6*y14-3*y15)*y34+(-3*y14+3*y15 \\
& *y45+3*y15*y34)*y24-6*y14*y24*y35+(3*y14*y45+(-6*y14-3*y15)*y34+(-3*y14-3*y15)*y35)*y23+(- \\
& 3*y25*y34+(-6*y34+3*y45)*y24+(-3*y24-3*y25)*y35+6*y23*y45)*y13+(-4*y14*y25*y34+4*y14*y25* \\
& y45+(-4*y15*y34+4*y15*y45)*y24+8*y14*y24*y35+(-4*y14*y45+(4*y15+8*y14)*y34+(4*y15+4*y14)* \\
& y35)*y23+(4*y25*y34+(-4*y45+8*y34)*y24+(4*y24+4*y25)*y35-8*y23*y45)*y13+(-2*y14*y25*y45+2* \\
& y14*y25*y34+(-2*y15*y45+2*y15*y16*y34)*y24-4*y14*y24*y35+(-2*y15-4*y14)*y34+(-2*y15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2*y14*y35*y23+(-2*y25*y34+(-4*y34+2*y45)*y24+(-2*y24-2*y25)*y35+y4+y23*y45)*y13*(*)u \\
 & )/q2/y12-2/y35/y45) \\
 & +1/e^0*(\text{Plus}(1/(1-u))/q2\text{CommonFactor}\text{qelec}^2*\text{quark}^4*\text{gstrong}^2*(((256+256*i\text{Log}(\text{yFactor}) \\
 & *y14*y25+(512*y15-256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)*y25/y45*y34+((256+256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15 \\
 & -256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15*y34/y45)*y24+(-256*y14*y25/y45+(-256*y15+512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45 \\
 & *y24)*y35)/y35+(-256*y15-256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14+((256+256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15+512*i\text{Log}(\text{yFactor})* \\
 & y14)/y45*y34+((256+256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15+256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y35)/y35*y23+((-256* \\
 & y25+256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y25*y34/y45+(-256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y12+256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y34/y45)*y24+((256 \\
 & +256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y25/y45+256*i\text{Log}(\text{yFactor})*y24/y45)*y35)/y35-512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y23/y35) \\
 & *y13+(256*y45+(-512*y12*y34/y45)*y34+(512*y34/y45+256*y35/y45)*y35)/y12+2+((( - \\
 & 768-768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14*y25+(-1536*y15+768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)*y25/y45*y34+((-768-768* \\
 & i\text{Log}(\text{yFactor})*y15+768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15*y34/y45)*y24+(768*y14*y25/y45+(768*y15-1536*i\text{Log}(\text{yFactor}) \\
 & *y14)/y45*y24)*y35)/y35+(768*y15+768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14+(-768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15- \\
 & 1536*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y34+((-768-768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14+(-768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15- \\
 & y35)/y35*y23+((768*y25-768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y25*y34/y45+(768*i\text{Log}(\text{yFactor})-1536*i\text{Log}(\text{yFactor}) \\
 & *y34/y45)*y24+((-768-768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y25/y45-768*i\text{Log}(\text{yFactor})*y24/y45)*y35)/y35+1536* \\
 & i\text{Log}(\text{yFactor})*y23/y35)*y13+(-768*y45+(1536-1536*y34/y45)*y34+(-1536*y34/y45-768*y35/y45)* \\
 & y35)/y35*y12)/y12-2+(((1024+1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14*y25+(2048*y15-1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14) \\
 & *y25/y45*y34+((1024+1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15-1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15*y34/y45)*y24+(-1024*y14 \\
 & *y25/y45+(-1024*y15+2048*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y24)*y35)/y35+(-1024*y15-1024*i\text{Log}(\text{yFactor}) \\
 & )*y14+(1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15+2048*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y34+((1024+1024*i\text{Log}(\text{yFactor})* \\
 & y15+1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y35)/y35*y23+((-1024*y25+1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y25*y34/y45+(- \\
 & 1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*2048*i\text{Log}(\text{yFactor})*y34/y45)*y24+((1024+1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y25/y45+1024 \\
 & *i\text{Log}(\text{yFactor})*y24/y45)*y35)/y35-2048*i\text{Log}(\text{yFactor})*y23/y35)*y13+(1024*y45+(-2048+2048*y34 \\
 & /y45)*y34+(2048*y34/y45+1024*y35/y45)*y35)/y12+2+((( -512-512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14* \\
 & y25+(-1024*y15+512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)*y25/y45*y34+((-512-512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15+512*i\text{Log}(\text{yFactor}) \\
 & *y24+512*y14*y25/y45+(512*y15-1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y24)*y35)/ \\
 & y35+(512*y15+512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14+(-512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15-1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y34 \\
 & +((-512-512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y15-512*i\text{Log}(\text{yFactor})*y14)/y45*y35)/y35*y23+((512*y25-512*i\text{Log}(\text{yFactor}) \\
 & *y25*y34/y45+(512*i\text{Log}(\text{yFactor})-1024*i\text{Log}(\text{yFactor})*y34/y45)*y24+((-512-512*i\text{Log}(\text{yFactor}) \\
 & *y23/y35)*y13+(- \\
 & 512*y45+(1024-1024*y34/y45)*y34+(-1024*y34/y45-512*y35/y45)*y35)/y12-2)*u)*u)
 \end{aligned}$$

Wirkungsquerschnitte in pb

| Bezeichnung                          | Standardschnitte (Down-quarks) |           | Standardschnitte (Up-quarks) |           | NC-Fehler | WC-Fehler |
|--------------------------------------|--------------------------------|-----------|------------------------------|-----------|-----------|-----------|
|                                      | Wirkungsquerschnitt            | NC-Fehler | Wirkungsquerschnitt          | NC-Fehler |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Born)               | 4.26E-01                       | 3.75E-04  | 7.00E-03                     | 6.23E-03  |           |           |
| LH0G                                 | 2.50E-04                       | 1.72E-07  | 3.75E-04                     | 2.04E-02  |           |           |
| LH0K                                 | -1.00E-01                      | 2.27E-04  | 3.40E-04                     | 2.42E-03  |           |           |
| LH0A                                 | 3.10E-01                       | 2.27E-04  | 3.40E-04                     | 2.42E-03  |           |           |
| LH0B                                 | 1.43E-00                       | 2.02E-03  | 3.59E-03                     | 5.05E-03  |           |           |
| LH0D                                 | 9.85E-02                       | 1.60E-04  | -5.21E-01                    | 8.35E-04  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Korr.)              | -2.15E-01                      | 4.65E-04  | -4.08E-03                    | 8.04E-03  |           |           |
| LH0C                                 | -4.52E-01                      | 1.74E-04  | -2.69E-03                    | 4.08E-02  |           |           |
| LH0E                                 | 6.37E-02                       | 4.24E-04  | -5.94E-03                    | 4.24E-03  |           |           |
| LH0F                                 | -1.60E-01                      | 3.05E-04  | -1.71E-03                    | 3.24E-03  |           |           |
| LH0G                                 | -2.31E-01                      | 9.25E-04  | -5.56E-01                    | 1.27E-03  |           |           |
| LH0H                                 | -4.14E-02                      | 2.00E-04  | -2.17E-01                    | 2.39E-03  |           |           |
| LH0I                                 | -7.81E-01                      | 3.02E-04  | -3.14E-03                    | 3.22E-07  |           |           |
| LH0J                                 | 0.00E-00                       | 0.00E-00  | 0.00E-00                     | 0.00E-00  |           |           |
| LH0K                                 | 7.41E-02                       | 2.46E-04  | 1.18E-03                     | 4.44E-03  |           |           |
| LH0L                                 | 3.13E-01                       | 1.43E-03  | 1.51E-00                     | 5.79E-03  |           |           |
| LH0M                                 | -3.68E-02                      | 1.81E-04  | 3.07E-01                     | 1.63E-03  |           |           |
| LH0N                                 | 5.01E-02                       | 1.59E-04  | 2.65E-01                     | 2.05E-03  |           |           |
| LH0O                                 | -2.41E-02                      | 1.07E-04  | -1.92E-01                    | 2.02E-03  |           |           |
| LH0P                                 | -3.62E-04                      | 5.64E-07  | -3.86E-03                    | 6.02E-06  |           |           |
| LH0Q                                 | -3.90E-03                      | 9.64E-06  | -1.04E-02                    | 2.57E-05  |           |           |
| LH0R                                 | -1.08E-04                      | 5.66E-07  | 5.78E-04                     | 3.02E-06  |           |           |
| LH0S                                 | 7.55E-04                       | 7.69E-06  | 1.85E-02                     | 1.30E-04  |           |           |
| LH0T                                 | -2.34E-03                      | 2.27E-05  | 6.72E-02                     | 4.98E-04  |           |           |
| LH0U                                 | -3.01E-04                      | 2.10E-06  | -2.94E-03                    | 2.94E-05  |           |           |
| LH0V                                 | 1.74E-03                       | 1.17E-05  | 4.79E-03                     | 3.28E-05  |           |           |
| LH0W                                 | 8.74E-04                       | 1.61E-06  | -4.56E-04                    | 1.12E-05  |           |           |
| LH0X                                 | -3.60E-03                      | 1.59E-06  | -3.87E-03                    | 1.70E-05  |           |           |
| LH0Y                                 | 1.36E-04                       | 1.37E-05  | -1.04E-02                    | 3.65E-05  |           |           |
| LH0Z                                 | 1.86E-06                       | 1.86E-06  | -5.77E-04                    | 8.82E-06  |           |           |
| (2,1)Jet-Photon (Born)               | 3.82E-02                       | 9.32E-05  | 8.21E-02                     | 2.18E-03  |           |           |
| LH10                                 | 1.22E-01                       | 5.02E-04  | 8.56E-01                     | 4.04E-03  |           |           |
| LH11                                 | -1.16E-02                      | 5.11E-05  | 1.31E-01                     | 5.21E-04  |           |           |
| LH12                                 | 2.01E-02                       | 5.94E-05  | 1.75E-01                     | 6.21E-04  |           |           |
| LH13                                 | 5.44E-03                       | 2.57E-05  | -2.84E-02                    | 6.18E-04  |           |           |
| LH14                                 | 7.38E-02                       | 3.01E-04  | 7.91E-01                     | 2.85E-03  |           |           |
| LH15                                 | 1.38E-01                       | 6.23E-04  | 6.67E-01                     | 1.66E-03  |           |           |
| LH16                                 | 1.26E-04                       | 6.69E-05  | -6.76E-04                    | 3.52E-04  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Born, Mad.)         | 7.36E-01                       | 4.66E-04  | 1.64E-01                     | 6.88E-03  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Born, Lep.)         | 3.93E-00                       | 4.25E-03  | 1.69E-01                     | 2.10E-02  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Born, Int.)         | -4.57E-02                      | 2.37E-04  | 7.55E-01                     | 2.52E-03  |           |           |
| (1,2)Jet-Photon (Born.)              | 4.62E+00                       | 4.28E-03  | 2.80E+01                     | 2.22E-02  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Korr., Mad.)        | -5.64E-01                      | 6.97E-04  | -7.16E-00                    | 1.05E-02  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Korr., Lep.)        | -2.98E-03                      | 1.42E-05  | -2.24E-00                    | 1.27E-02  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Korr., Int.)        | -1.50E-03                      | 3.03E-03  | -2.66E-01                    | 4.80E-03  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Korr., Mad.)        | 1.72E-01                       | 8.39E-04  | 1.25E-00                     | 1.25E-02  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Born., Korr., Mad.) | 2.98E+00                       | 5.13E-03  | 1.36E+01                     | 5.42E-02  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Born., Korr., Lep.) | -3.62E-02                      | 5.23E-04  | 5.49E-01                     | 5.42E-02  |           |           |
| (1,1)Jet-Photon (Born., Korr., Int.) | 3.12E+00                       | 5.23E-04  | 1.74E-01                     | 2.81E-02  |           |           |
| (2,1)Jet-Photon (Born., Mad.)        | 1.21E-01                       | 3.21E-04  | 1.82E-00                     | 3.02E-03  |           |           |
| (2,1)Jet-Photon (Born., Lep.)        | -5.52E-03                      | 8.73E-05  | 4.23E-02                     | 7.42E-03  |           |           |
| (2,1)Jet-Photon (Born., Int.)        | -5.52E-03                      | 8.73E-05  | 4.23E-02                     | 7.42E-03  |           |           |
| (2,1)Jet-Photon (Born.)              | 4.38E-01                       | 9.03E-04  | 3.26E+00                     | 5.76E-03  |           |           |
| (1,2)Jet-Photon (Born.)              | 3.05E-01                       | 8.38E-04  | 5.06E+00                     | 1.30E-02  |           |           |
| (1,2)Jet-Photon (Mad.)               | 3.29E+00                       | 5.20E-03  | 1.49E+01                     | 2.49E-02  |           |           |
| (1,2)Jet-Photon (Lep.)               | -4.18E-02                      | 5.20E-04  | 4.50E-01                     | 5.47E-02  |           |           |
| (1,2)Jet-Photon (Int.)               | 3.29E+00                       | 5.20E-03  | 1.49E+01                     | 2.49E-02  |           |           |
| (1,2)Jet-Photon (Summ.)              | 3.29E+00                       | 5.20E-03  | 1.49E+01                     | 2.49E-02  |           |           |

Tabelle 21: Tabelle der Anteile am Wirkungsquerschnitt bei Standardschnitten

## J Details der numerischen Resultate

Der Inhalt der Tabellen 11 und 16 wurde aus den einzelnen Anteilen der Tabellen 21 und



laufenden Partons. Die Anteile LOH1CQ bis LXHXCG stammen von den analytisch berechneten QCD-Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zum Prozeß  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)$  Jets jeweils getrennt nach der Art der Photonabstrahlung und des einlaufenden Partons. Die Anteile LOH11QX bis LXHX1AX gehören zu den numerisch berechneten Anteilen der Anfangszustandssingularitäten bei einlaufendem Quark bzw. Antiquark. Die Anteile LOH11GX bis LXHX1GX wurden numerisch für die Gluon-Antiquark-Anfangszustandssingularität bei einlaufendem Gluon berechnet. Die Anteile LOH11QY bis LXHX1AY gehören zu den numerisch berechneten Anteilen der Endzustandssingularitäten bei einlaufendem Quark bzw. Antiquark. Die Anteile LOH11GY bis LXHX1GY wurden numerisch für die Gluon-Quark-Anfangssingularität bei einlaufendem Gluon ermittelt. Die verbleibenden Anteile LOH11Q bis LXHX1G entfallen auf die Baumgraphen zum Prozeß  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(2+1)$  Jets getrennt nach der Art der Photonabstrahlung und des einlaufenden Partons. Für jeden dieser Anteile wurde der entsprechende Wirkungsquerschnitt unter der Voraussetzung, daß die laufende Kopplungskonstante  $\alpha_s$  mit 5 Flavours berechnet wird, einmal nur unter Berücksichtigung der Down- (Spalte (Down-Quarks)) und einmal nur unter Berücksichtigung der Up-Quarks (Spalte (Up-Quarks)) berechnet. Dabei wurde auch für ein einlaufendes Gluon nach der Art des erzeugten Quark-Antiquark-Paars zwischen Down-Quark- und Up-Quark-Anteil getrennt. In den Tabellen 15 und 20 ist der Gluon-Anteil die Summe dieser beiden Anteile.

Die genannten Tabellen weisen — unter Berücksichtigung der Monte-Carlo-Fehler — für einlaufendes Gluon aufgrund der Quark-Antiquark-Symmetrie des Matrixelementes bei hadronischer Photonabstrahlung und der Quark-Antiquark-Antisymmetrie des Matrixelementes bei leptonscher Photonabstrahlung folgende Symmetrien auf:

$$\begin{aligned}
 LXHXCG &= 0, \\
 LOH11GX &= +LOH11GY, \\
 LH01GX &= +LH01GY, \\
 LXHX1GX &= -LXHX1GY.
 \end{aligned}
 \tag{190}$$

Die Betrachtung der einzelnen Anteile der Korrekturen zeigt, daß die analytisch berechneten Terme, d.h. die Terme LOH1CQ bis LXHXCG, stets die dominierenden sind. Die numerisch integrierbaren Anteile für die Anfangszustandssingularitäten, d.h. die Anteile LOH11QX bis LXHX1GX und LOH11GY bis LXHX1GY — tragen dabei mit etwa 20 Prozent zu den Korrekturen bei. Diese

Wirkungsquerschnitte in pb

| Bezeichnung                        | Hadronische Schritte (Down-Quarks) |           | Hadronische Schritte (Up-Quarks) |           | MC-Fehler |
|------------------------------------|------------------------------------|-----------|----------------------------------|-----------|-----------|
|                                    | Wirkungsg.                         | MC-Fehler | Wirkungsg.                       | MC-Fehler |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born)             |                                    |           |                                  |           |           |
| LOH100                             | 3,45E-01                           | 2,44E-04  | 5,75E-00                         | 5,81E-03  |           |
| LH0000                             | 3,31E-01                           | 5,34E-04  | 5,56E-02                         | 4,43E-05  |           |
| LXHX00                             | -7,56E-02                          | 1,19E-04  | 5,72E-01                         | 2,11E-03  |           |
| LOH10A                             | 2,46E-01                           | 4,13E-05  | 2,03E-02                         | 9,83E-05  |           |
| LH000A                             | 5,12E-02                           | 7,58E-05  | -2,73E-01                        | 3,90E-04  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Korr.)            |                                    |           |                                  |           |           |
| LOH1CQ                             | -1,89E-01                          | 4,03E-04  | -3,35E-00                        | 7,82E-03  |           |
| LH000C                             | -2,12E-02                          | 5,93E-05  | -1,15E-01                        | 4,13E-05  |           |
| LXHX0C                             | 3,25E-01                           | 2,75E-04  | -1,34E-00                        | 2,76E-03  |           |
| LOH10A                             | -1,62E-02                          | 2,70E-05  | -2,42E-02                        | 6,41E-05  |           |
| LXHX0A                             | -2,37E-02                          | 1,63E-04  | 1,23E-01                         | 1,56E-03  |           |
| LOH1CQ                             | -2,38E-01                          | 2,75E-04  | -2,54E-00                        | 2,93E-03  |           |
| LH000C                             | -1,64E-02                          | 0,20E-04  | -0,36E-02                        | 7,04E-05  |           |
| LXHX0C                             | 0,00E-00                           | 0,00E-04  | 0,00E-00                         | 0,00E-03  |           |
| LOH10A                             | 9,81E-03                           | 5,52E-05  | 4,82E-02                         | 3,59E-04  |           |
| LXHX0A                             | -1,74E-02                          | 1,08E-04  | 1,46E-01                         | 7,82E-03  |           |
| LOH11AX                            | 4,29E-02                           | 1,88E-04  | 4,95E-01                         | 1,92E-03  |           |
| LH011AX                            | 5,23E-03                           | 3,25E-05  | 1,47E-02                         | 6,24E-05  |           |
| LXHX1AX                            | 1,19E-02                           | 4,95E-05  | -6,42E-02                        | 2,75E-04  |           |
| LOH10X                             | -3,45E-05                          | 8,55E-08  | -2,15E-05                        | 1,12E-07  |           |
| LXHX0X                             | -2,44E-05                          | 9,31E-08  | 1,30E-04                         | 4,97E-07  |           |
| LOH11QY                            | 6,77E-04                           | 8,60E-06  | 1,75E-02                         | 2,24E-04  |           |
| LH011QY                            | 2,82E-04                           | 5,80E-06  | 2,60E-03                         | 5,00E-05  |           |
| LXHX1QY                            | -1,42E-04                          | 3,68E-06  | 2,17E-03                         | 1,61E-04  |           |
| LOH10Y                             | 2,77E-06                           | 2,42E-06  | 2,96E-03                         | 3,02E-05  |           |
| LXHX0Y                             | 7,42E-05                           | 1,55E-07  | -2,85E-04                        | 5,54E-06  |           |
| LOH11GX                            | -3,34E-06                          | 2,22E-06  | 1,75E-07                         | 3,37E-05  |           |
| LH011GX                            | -1,93E-05                          | 1,75E-07  | -5,14E-05                        | 4,66E-07  |           |
| LXHX1GX                            | 2,38E-05                           | 3,52E-07  | -1,27E-04                        | 1,88E-06  |           |
| (2+1)Jet+Photon (Born)             |                                    |           |                                  |           |           |
| LOH11Q                             | 3,48E-02                           | 8,97E-05  | 7,55E-01                         | 1,99E-03  |           |
| LH011Q                             | 9,30E-03                           | 3,75E-05  | 6,98E-02                         | 2,06E-04  |           |
| LXHX1Q                             | -6,82E-03                          | 3,33E-05  | 7,83E-02                         | 4,07E-04  |           |
| LOH11A                             | 1,84E-02                           | 5,04E-05  | 1,77E-01                         | 5,65E-04  |           |
| LH011A                             | 3,63E-03                           | 1,05E-05  | 7,99E-02                         | 2,39E-05  |           |
| LXHX1A                             | 3,47E-03                           | 1,58E-05  | -1,66E-02                        | 7,14E-05  |           |
| LOH11G                             | 6,58E-02                           | 2,43E-04  | 1,52E-02                         | 4,50E-05  |           |
| LH011G                             | 2,43E-04                           | 1,62E-06  | 1,62E-02                         | 2,45E-04  |           |
| LXHX1G                             | 9,84E-06                           | 4,40E-05  | -5,49E-05                        | 2,45E-04  |           |
| Quasren                            |                                    |           |                                  |           |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Had.)       | 5,91E-01                           | 3,40E-04  | 8,44E-00                         | 6,36E-03  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Lep.)       | 3,60E-01                           | 5,36E-04  | 1,26E-01                         | 1,29E-05  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Int.)       | -2,44E-02                          | 1,50E-04  | 3,96E-00                         | 6,40E-03  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Had.)       | -4,45E-01                          | 6,41E-04  | -5,69E+00                        | 1,01E-02  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Lep.)       | -3,24E-02                          | 9,53E-05  | -1,38E-01                        | 5,44E-04  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Int.)       | 6,21E-03                           | 2,40E-04  | -1,48E-01                        | 2,19E-03  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Had., Had.) | 1,66E-03                           | 7,25E-04  | -5,98E+00                        | 1,04E-02  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Had., Lep.) | 3,27E-02                           | 2,78E-04  | 1,14E-00                         | 1,15E-04  |           |
| (1+1)Jet+Photon (Born, Had., Int.) | 4,57E-01                           | 9,48E-04  | 2,51E-01                         | 2,48E-03  |           |
| (2+1)Jet+Photon (Born, Had.)       | 1,19E-01                           | 2,36E-04  | 1,63E+00                         | 3,07E-03  |           |
| (2+1)Jet+Photon (Born, Lep.)       | 1,90E-02                           | 4,25E-05  | 9,40E-02                         | 2,13E-04  |           |
| (2+1)Jet+Photon (Born, Int.)       | -3,34E-03                          | 5,89E-05  | 6,16E-02                         | 4,81E-04  |           |
| (1+2+1)Jet+Photon (Had.)           | 1,35E-01                           | 2,47E-04  | 1,19E+00                         | 1,22E-02  |           |
| (1+2+1)Jet+Photon (Lep.)           | 2,66E-01                           | 5,46E-04  | 8,18E-02                         | 5,98E-04  |           |
| (1+2+1)Jet+Photon (Int.)           | -1,95E-02                          | 2,84E-04  | 3,12E-01                         | 2,53E-03  |           |
| (1+2+1)Jet+Photon (Had., Had.)     | 5,92E-01                           | 9,80E-04  | 4,77E+00                         | 1,26E-02  |           |

Tabelle 22: Tabelle der Anteile am Wirkungsquerschnitt bei Hadronsschnitten 22 abgeleitet. Die Anteile LOH10Q bis LXHX0A stehen dabei für die Baumgraphenanteile des Prozesses  $e^-p \rightarrow e^-\gamma(1+1)$  Jets unterteilt nach der Art der Photonabstrahlung und des ein-

Anteile wurden schon in [Gra90, BK92] berücksichtigt. Die numerisch integrierbaren Anteile für die Endzustandssingularitäten, d.h. die Anteile LOH11QY bis LXHX1AY, fehlen bei [Gra90, BK92] und tragen nur zu einigen Prozent zu den Korrekturen bei.

## Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei meinem "Doktorvater" Herrn Prof. Dr. G. Kramer für das interessante Thema und seine ausdauernde Unterstützung danken.

Dann gilt mein Dank Herrn Dr. habil. H. Spiesberger, der mich in vielen Diskussionen wieder auf den rechten Weg brachte.

Ferner gilt mein Dank Herrn Dr. D. Graudenz, der mir seine Arbeit ausführlich erläuterte und stets einen helfenden Rat für mich hatte.

Weiterhin möchte ich mich bei meinen Kollegen am II. Institut für Theoretische Physik, insbesondere bei den Herren M. Klasen und T. Kleinwort, für eine angenehme und interessante Arbeitsatmosphäre bedanken.

Den Damen und Herren vom Rechenzentrum des DESY danke ich für die viele Zeit, die sie mir persönlich und meinen Rechnungen auf der IBM-3090 und dem HP-Cluster geopfert haben.

Zu guter Letzt danke ich der Studienstiftung des deutschen Volkes, die diese Arbeit finanziell unterstützte.