DESY 96-195
September 1996
ISSN 0418-9833

Inklusive 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitte in Photon–Photon–Kollisionen in nächstführender Ordnung der QCD

Thorsten Kleinwort
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die inklusive 1– und 2–Jet–Produktion in Photon–Photon–Kollisionen bis zur nächstführenden Ordnung der QCD berechnet. Die Photonen werden als quasi–reell ($Q^2 \simeq 0$) betrachtet. Die Korrekturen in nächstführender Ordnung werden für die direkten, einfach und zweifach aufgelösten Photonen vollständig berechnet. Zu den QCD–Korrekturen gehören die virtuellen Korrekturen und die $2 \to 3$ Prozesse, die mit Hilfe der "Phase–Space–Slicing"–Methode teilweise analytisch, teilweise numerisch ausintegriert werden. Dadurch werden alle auftretenden Singularitäten beseitigt, bis auf solche, die in die Renormierung der Partondichtefunktionen des Photons absorbiert werden.

Die gewonnenen Ergebnisse werden benutzt, um mit experimentellen Daten, wie sie von TRISTAN oder LEP veröffentlicht sind, zu vergleichen und einen Ausblick auf zukünftige Beschleuniger, wie LEP2 oder einen $500\,GeV$–NLC zu machen.

Inclusive 1– and 2–Jet–Cross Sections in Photon–Photon–Collisions in Next–To–Leading Order QCD

Thorsten Kleinwort
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Abstract

In this work we calculate the inclusive 1– and 2–jet production in photon–photon–collisions up to next–to–leading–order QCD. The photons are treated as quasi–real ($Q^2 \simeq 0$). The next–to–leading order corrections are completely calculated for direct, single– and double–resolved photon. The QCD corrections consist of the virtual corrections and the real $2 \to 3$ processes, which are integrated by using the "phase–space–slicing"–method partly analytically, partly numerically. In this way all appearing singularities are cancelled, or absorbed in the renormalization of the parton densities of the photon.

The results of that calculation are used to make comparisons to existing experimental data from TRISTAN and LEP and to make an outlook to future experiments like LEP2 or an $500\,GeV$–NLC.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Der Streuquerschnitt **7**
2.1 Das Photonspektrum 7
2.2 Inklusive Wirkungsquerschnitte 7
2.3 Direktes und aufgelöstes Photon 8
2.4 Der partonische Wirkungsquerschnitt 10
2.5 Jets im Endzustand 11

3 Die $2 \to 2$ Beiträge **13**
3.1 'Direct'–Photon 14
3.2 'Single–Resolved'–Photon 14
3.3 'Double–Resolved'–Photon 15
3.4 Faktoren aus den Partondichten 17

4 Die $2 \to 3$ Beiträge **19**
4.1 Endzustandssingularitäten 20
4.2 Anfangszustandssingularitäten 24
4.3 'Direct'–Photon 27
4.4 'Single–Resolved'–Photon 27
4.5 'Double–Resolved'–Photon 29
4.6 Faktoren aus den Partondichten 35
4.7 Der endliche Wirkungsquerschnitt in NLO 36

5 Numerische Auswertung **39**
5.1 Snowmass Jet–Definition 39
5.2 Zur numerischen Integration 40
5.3 Tests und allgemeine Betrachtungen 40
5.4 Vergleich mit experimentellen Daten 47
5.5 Ausblick auf zukünftige Beschleuniger 51

6 Zusammenfassung **61**

7 Anhang **63**
7.1 Die Bornterme 63
7.2 Die Altarelli–Parisi–Splitting–Funktionen 64
7.3 Die Integranden für die Endzustände 64
7.4 Die Integranden für die Anfangszustände 65
7.5 Die Integrale für die Endzustandssingularitäten 66
7.6 Die Integrale für die Anfangszustandssingularitäten 67
7.7 Die virtuellen Korrekturen 68
7.8 Die Endzustandskorrekturen 70
7.9 Die 'Direct'–Photon–Anfangszustandskorrektur 71
7.10 Die 'Resolved'–Photon–Anfangszustandskorrekturen 72

1 Einleitung

Seit einiger Zeit werden an Elektron–Positron–Beschleunigern inklusive Jet–Wirkungsquerschnitte in Photon–Photon–Kollisionen gemessen [1, 2, 3]. Hierbei strahlen die beiden einlaufenden Leptonen jeweils ein sehr energiereiches Photon ab. Die zwei Leptonen sind nicht weiter an der Wechselwirkung beteiligt. Werden sie dabei nur schwach abgelenkt, so verschwinden sie im Strahlrohr und werden nicht nachgewiesen. In diesem Fall haben die abgestrahlten Photonen nur eine geringe virtuelle Masse ($Q^2 \sim 0$) und können als quasi–reell angesehen werden. Ihre Abstrahlung wird dann durch die Weizsäcker–Williams–Approximation [4] beschrieben.

Die Wechselwirkung der Photonen wird durch die Quantenelektrodynamik (QED) und die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. In niedrigster Näherung koppeln die Photonen direkt über die QED–Kopplungskonstante α an ein Quark–Antiquark Paar im Endzustand. Sind die in den Prozessen involvierten Energien groß, so kann neben der QED auch die QCD störungstheoretisch behandelt werden. Die perturbative Entwicklung erfolgt nach den Kopplungskonstanten α (QED) und α_s (QCD).

Das einlaufende Photon nimmt auf zwei Arten am Streuprozeß teil:

- Als Eichboson der elektromagnetischen Wechselwirkung koppelt es über die Kopplungskonstante α direkt an die elektromagnetische Ladung der (Anti-) Quarks im Streuprozeß.
- Das Photon verhält sich wie ein Hadron und nimmt über seine Konstituenten (Quarks, Antiquarks und Gluonen) an der Streuung teil; man spricht von einem aufgelösten Photon.

Es ist seit längerem bekannt [5], daß die Wirkungsquerschnitte, die sich aus der direkten Kopplung der Photonen und jene, die sich aus der Wechselwirkung der Konstituenten der Photonen ergeben, von der gleichen Größenordnung sind und daher in einer konsistenten Rechnung beide betrachtet werden müssen. Ist das Photon aufgelöst, so wird es ähnlich einem Hadron durch seine Photon–Struktur–Funktion beschrieben. Die sich aus dieser Photon–Struktur–Funktion ergebenden Partonverteilungen sind nichtperturbative Größen, die im Experiment bei einer Referenzskala gemessen werden müssen. Die Änderung dieser Größen mit variierender Skala ergibt sich aus den QCD Altarelli–Parisi–Entwicklungs–Gleichungen. Für eine Übersicht siehe z.B. [6]. Wechselwirkt ein aufgelöstes Photon, so wird ein Photon–Remnant zu beobachten sein, der allerdings im Experiment schwierig zu messen ist, da er fast parallel zum einlaufenden Photon ist und damit im Strahlrohr verschwindet.

Eine wichtige Eigenschaft der QCD als nichtabelsche Eichtheorie ist die asymptotische Freiheit. Sie gewährleistet auf der einen Seite die Möglichkeit der perturbativen Störungstheorie bei hohen Energien, auf der anderen Seite verbietet diese Theorie freie Quarks und Gluonen, wie sie in der Natur bis heute auch nicht gemessen wurden. Die aus den Reaktionen hervorgehenden (Anti-) Quarks und Gluonen müssen daher auf ihrem Weg vom Streuprozeß zum Detektor hadronisieren. Während der Hadronisation bilden sich Schauer von neuen Teilchen, die als Jets bezeichnet werden. Dabei ist es sowohl im Experiment als auch in einer theoretischen Rechnung notwendig, genau zu definieren, was ein Jet ist. In einer theoretische Betrachtung tritt eine Abhängigkeit vom gewählten Jet–Algorithmus und seinen Parametern erst in der nächstführenden Ordnung der Störungstheorie auf.

In dieser Arbeit wird die inklusive 1– und 2–Jet–Produktion durch quasi–reelle Photonen betrachtet. Die Jets haben einen hohen Transversalimpuls $p_T \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$, so daß die starke Kopplungskonstante α_s klein ist und die Wechselwirkung durch eine Störungsreihe beschrieben werden kann. Es wird neben der führenden Ordnung (LO) auch die nächstführende Ordnung (NLO) der QCD betrachtet. Bei Jets mit endlichen Transversalimpulsen haben die LO–Prozesse zwei und die NLO–Prozesse bis zu drei Teilchen im Endzustand.

Bei der Berechnung der NLO–Korrekturen treten sowohl in den virtuellen Prozessen als auch bei der Integration der 3–Teilchen Phasenräume divergente Integrale auf. Diese Divergenzen werden durch dimensionale Regularisierung auf endliche Beiträge gebracht, indem die Rechnungen in $d = 4 - 2\varepsilon$

Dimensionen durchgeführt werden. Die Divergenzen erscheinen dann als Pole in $1/\varepsilon$ und $1/\varepsilon^2$. Die Pole heben sich bei vollständiger Betrachtung der NLO–Korrekturen zwischen virtuellen und reellen Korrekturen weg oder werden bei der Renormierung der Partondichten des Photons absorbiert.

Durch die vielen verschiedenen Möglichkeiten, wie die Partonen und hier speziell die Konstituenten des Photons miteinander wechselwirken können, gibt es in LO und vor allem in NLO eine große Anzahl von Prozessen, die die Rechnungen sehr umfangreich machen. Es wurden sowohl die Prozesse mit direktem als auch die mit aufgelöstem Photon in nächstführender Ordnung QCD berechnet, da sich zeigt, daß alle Beiträge von der gleichen Größenordnung sind. Hinzukommt, daß die Aufteilung in direktes und aufgelöstes Photon, wie sie in LO definiert ist, in NLO ihre exakte Definition verliert.

Dies ist einer der Gründe, warum die Betrachtung *aller* Beiträge in NLO wichtig ist. Hierzu gehört neben den Beiträgen der QCD–Rechnung, die sich für das direkte und das aufgelöste Photon ergeben, auch die Betrachtung der Partondichten im Photon in nächstführender Ordnung. Es gibt bereits einige Parametrisierungen in NLO, siehe z.B. [7, 8, 9].

Es zeigt sich weiterhin, daß die starke Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala M im Photon, die bei den Prozessen mit aufgelöstem Photon in LO vorhanden ist, sich durch die Anfangszustände der NLO–Rechnungen fast vollständig kompensiert. Hinzukommt, daß eine genauere Definition eines Jets erst in NLO–Rechnungen einen Sinn macht, da es in LO immer zwei auslaufende Teilchen gibt, die im Parton–Parton–Schwerpunktsystem in entgegengesetzter Richtung laufen, und daher nie zu einem Jet rekombiniert werden können. In NLO ist es möglich, da es bis zu drei auslaufende Teilchen gibt, daß zwei dieser Partonen fast parallel werden und zu einem Jet rekombinieren. Die Rekombination hängt vom Jet–Algorithmus und der Größe des Jets ab, wie es auch in experimentellen Ergebnissen der Fall ist. Somit ist erst in NLO eine genauere Jet–Analyse möglich.

Nach Durchführung der zur Beseitigung der Singularitäten notwendigen analytischen Rechnungen wurden die gewonnenen Ergebnisse in einem Computerprogramm implementiert, welches es gestattet, inklusive 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitte zu berechnen. Hierbei kann wahlweise über die Rapiditäten und den Transversalimpuls (bis zu einem $P_{T,\min}$) integriert werden, weiterhin können aus verschiedenen Photonspektren und Partondichtefunktionen im Photon gewählt werden, sowie Parameter wie Skalen, Jet–Kegelradius usw. variiert werden.

Mit Hilfe des numerischen Programms werden NLO–Wirkungsquerschnitte zu Prozessen ausgerechnet, die mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden. Hier gibt es seit einiger Zeit veröffentlichte Daten von den zwei Experimenten TOPAZ [1] und AMY [2] am Speicherring TRISTAN und neuere Messungen von der Kollaboration OPAL [3] am Speicherring LEP. Die Rechnungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen und damit die Notwendigkeit, neben den Prozessen mit direktem Photon auch alle Beiträge mitzunehmen, an denen aufgelöste Photonen beteiligt sind.

Es gab in der Vergangenheit schon NLO–Rechnungen, die sich mit der Jet–Produktion in Photon–Photon–, bzw. Photon–Proton– oder Proton– (Anti–)Proton–Wechselwirkungen befaßt haben. Da sich das Photon, wie eingangs erwähnt, wie ein Hadron verhalten kann, sind Prozesse mit einem oder zwei aufgelösten Photonen in der theoretischen Untersuchung denen von Proton– (Anti–)Protonen– oder Photon–Proton–Prozessen, wie sie für HERA berechnet wurden, ähnlich. Inklusive 1–Jet–Rechnungen zu Hadron–Hadron–Wirkungsquerschnitten in NLO finden sich z.B. in den Arbeiten von Arversa et al. [10]. Eine Analyse für inklusive 1–Jet–Rechnungen in Photon–Proton–Kollisionen mit aufgelöstem Photon bei HERA findet sich z.B. in den Arbeiten von Salesch [11], wobei in diesen Arbeiten andere Methoden zur Berechnung der NLO–Korrekturen verwendet worden sind.

Inklusive 2–Jet–Rechnungen für Hadron–Hadron–Kollisionen sind z.B. in der Arbeit von Ellis, Kunszt und Soper [12] und in den Arbeiten von Giele, Glover und Kosower [13] zu finden. Rechnungen für den inklusiven 1– und 2–Jet–Fall in [14].

Inklusive 1– und 2–Jet–Rechnungen für den Fall des direkten Photons bei HERA gibt es in den Arbeiten von Bödeker [15] und von Klasen und Kramer [16, 17], wobei in den letzten zwei Referenzen

die gleiche Methode zur Berechnung der NLO–Korrekturen verwendet wurde wie in dieser Arbeit.

Für Photon–Photon–Reaktionen existieren bereits Arbeiten für die inklusive 1–Jet–Produktion, siehe dazu z.B. die Arbeiten von Aurenche et al. [18, 19] und Gordon [20]. In [21, 22] sind Ergebnisse für inklusive 1– und 2–Jet–Rechnungen vorgestellt, wobei dort die NLO–Korrekturen im 2–Jet–Fall für zwei aufgelöste Photonen durch einen k–Faktor abgeschätzt wurde, der aus dem Vergleich von LO und NLO 1–Jet–Rechnungen gewonnen wurde.

Ziel und Motivation dieser Arbeit ist eine vollständige Berechnungen aller Beiträge in Photon–Photon–Kollisionen in nächstführender Ordnung der QCD Störungstheorie. Diese wird für den inklusiven 1–Jet– und 2–Jet–Fall durchgeführt. Dies ist die erste Arbeit, in der die NLO–Beiträge in inklusiven 2–Jet–Rechnungen für den direkten und den zweifach aufgelösten Fall berechnet werden. Mit Hilfe einer solchen Analyse können theoretischen Unsicherheiten verringert werden. Dazu gehören die Abhängigkeit von (unphysikalischen) Skalen und von der Parametrisierung der Partondichten im Photon und dort insbesondere von der Gluonverteilung. Die Rechnungen sind darüber hinaus so flexibel gestaltet, daß eine leichte Anpassung an experimentelle Gegebenheiten möglich ist, um Meßergebnisse theoretisch vorhersagen zu können.

Die Arbeit gliedert sich in folgende Abschnitte: In Abschnitt 2 wird der Zusammenhang zwischen dem leptonischen (e^+–e^-) und dem Photon–Photon–Wirkungsquerschnitt unter der Annahme fast reeller Photonen hergestellt. Es folgt in Abschnitt 3 die Auflistung der $2 \to 2$ Beiträge für direktes und aufgelöstes Photon sowie in Abschnitt 4 die $2 \to 3$ Beiträge, die nach Anfangs– und Endzuständen getrennt aufgeführt und integriert sind. Es folgt in Abschnitt 5 eine numerische Auswertung der erhaltenen Ergebnisse, die einige allgemeine Betrachtungen und Tests, sowie Vergleiche mit Experimenten und einen Ausblick auf zukünftige Beschleuniger enthält.

2 Der Streuquerschnitt

2.1 Das Photonspektrum

Das Spektrum der virtuellen Photonen wird im Fall kleiner Q^2 durch die Weizsäcker–Williams–Approximation [4] genähert, die im einfachsten Fall die folgende Gestalt annimmt:

$$F_{\gamma/e}(\xi) \;=\; \frac{\alpha}{2\pi}\frac{(1+(1-\xi)^2)}{\xi}\ln\left(\frac{E^2\theta_{\max}^2}{m_e^2}\right). \tag{1}$$

Dabei ist m_e die Masse des Positrons (Elektrons), E seine Energie, $\xi = E_\gamma/E$ der Anteil der Energie des Photons am Lepton. $\theta_{\max}$ ist der Winkel, bis zu dem die Leptonen maximal gestreut werden. In dieser Näherung wird das abgestrahlte Photon als quasi–reell betrachtet und der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \mathrm{Jet(s)} + X$ ergibt sich dann folgendermaßen aus dem entsprechenden Photon–Photon Prozeß:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\sigma\left(e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \mathrm{Jet(s)} + X\right) = \\ &\int\limits_{\xi_{a,\min}}^{1} \mathrm{d}\xi_a F_{\gamma/e}(\xi_a) \int\limits_{\xi_{b,\min}}^{1} \mathrm{d}\xi_b F_{\gamma/e}(\xi_b)\mathrm{d}\sigma\left(\gamma_a + \gamma_b \to \mathrm{Jet(s)} + X\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Daher brauchen im folgenden nur noch Photon–Photon–Wirkungsquerschnitte betrachtet zu werden. $\xi_{a,\min}$ und $\xi_{b,\min}$ ergeben sich aus der Bedingung, daß eine gewisse Mindestenergie in den Photon–Photon–Streuprozeß gehen muß, um einen Jet mit endlichem Transversalimpuls p_T zu erzeugen. X steht für sonstige Beiträge, die bei dieser Reaktion entstehen können, jedoch nicht weiter betrachtet werden. Dabei kann es sich um weitere Jets handeln, die entweder aus nicht betrachteten Partonen im Endzustand oder aus dem Photon–Remnant entstehen, wenn das Photon vermöge seiner hadronischen Struktur wechselwirkt (siehe dazu Abschnitt 2.3).

Im Abschnitt über numerische Auswertung der Ergebnisse werden noch andere Photonspektren angegeben, die die Weizsäcker–Williams–Approximation korrigieren bzw. die sich aus neuen Effekten ergeben. Ferner wird der Winkel $\theta_{\max}$ entsprechend den experimentellen Gegebenheiten spezifiziert. Im Experiment können durch die endliche Dicke des Strahlrohrs die auslaufenden Leptonen nur bis zu einem minimalen Winkel gemessen werden. Liegt der Winkel des auslaufenden Leptons darunter, wird es nicht gemessen. Man spricht dann von einem no–tag Ereignis. Nach oben wird der Winkel $\theta_{\max}$ durch die Näherung, die durch Gleichung (1) gemacht wird, beschränkt. Die verwendeten Werte für $\theta_{\max}$ liegen zwischen 1.7° (LEP2) und 13° (AMY).

2.2 Inklusive Wirkungsquerschnitte

In dieser Arbeit wird die Produktion von inklusiven 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitten betrachtet. Die Jets werden durch ihren Transversalimpuls p_T und ihre Rapiditäten η_1 und η_2 beschrieben. In der gesamten Arbeit wird die Lichtgeschwindigkeit auf $c = 1$ gesetzt, so daß der Transversalimpuls p_T in Energieeinheiten angegeben wird.

Im 2–Jet–Fall betrachten wir den dreifach differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p_T\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2}\left(\gamma_a + \gamma_b \to \mathrm{Jet}_1 + \mathrm{Jet}_2 + X\right) \tag{3}$$

und im 1–Jet–Fall den doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}p_T\mathrm{d}\eta}\left(\gamma_a + \gamma_b \to \mathrm{Jet} + X\right). \tag{4}$$

Für Prozesse mit zwei Teilchen im Endzustand ist die Definition von p_T, η_1 und η_2 einfach, denn es gilt $p_{T_1} = p_{T_2}$. η_1 und η_2 sind die Rapiditäten der beiden Jets. Da in dieser Arbeit Prozesse bis in

nächstführender Ordnung der QCD betrachtet werden, sind Prozesse mit drei Teilchen im Endzustand möglich. Für solche Fälle müssen p_T, η_1 und η_2 neu definiert werden. Es haben die beiden Partonen mit den größten Transversalimpulsen die beiden Rapiditäten η_1 und η_2. p_T ist der Transversalimpuls eines der beiden Teilchen, so daß gilt:

$$p_T, p_{T1}, p_{T2} > p_{T3}. \tag{5}$$

Es kann ein Zusammenhang hergestellt werden zwischen den Energieanteilen der Photonen/Partonen am Elektron/Positron $x_{a,b}$ und den Rapiditäten η_1 und η_2 der Jets, der im $2 \to 2$ Fall folgende Gestalt annimmt:

$$x_a = \frac{p_T}{2E}\left(e^{-\eta_1} + e^{-\eta_2}\right) \tag{6}$$

$$x_b = \frac{p_T}{2E}\left(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}\right). \tag{7}$$

Im $2 \to 3$ Fall ist der Zusammenhang im allgemeinen nicht mehr so einfach.

Der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt kann auf einen einfach differentiellen zurückgeführt werden:

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma}{\mathrm{d}p_T \mathrm{d}\eta_1 \mathrm{d}\eta_2} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\partial(x_a, x_b, t)}{\partial(p_T, \eta_1, \eta_2)}\right|_{x_a, x_b = \mathrm{konst}}. \tag{8}$$

Die Jacobi–Determinante hat im $2 \to 2$ Fall die folgende Gestalt:

$$\frac{\partial(x_a, x_b, t)}{\partial(p_T, \eta_1, \eta_2)} = 2 x_a x_b p_T. \tag{9}$$

Die Mandelstam–Variablen sind wie folgt definiert:

$$s = (p_a - p_b)^2 = 2p_a.p_b, \tag{10}$$

$$t = (p_a - p_1)^2 = -2p_a.p_1, \tag{11}$$

$$u = (p_b - p_1)^2 = -2p_b.p_1 \tag{12}$$

(alle Quarkmassen werden vernachlässigt). Es wird sich zeigen, daß der $2 \to 2$ Wirkungsquerschnitt die Form $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$ besitzt und der $2 \to 3$–Wirkungsquerschnitt entweder durch analytische oder numerische Integration auf diese Form gebracht werden kann, was Gegenstand der folgenden Abschnitte sein wird.

2.3 Direktes und aufgelöstes Photon

Die im Endzustand produzierten Jets haben einen großen Transversalimpuls $p_T \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$, so daß gewährleistet ist, daß der Streuprozeß in einer Störungsreihe berechnet werden kann. Nimmt das Photon an dieser sogenannten 'harten' Wechselwirkung unmittelbar teil, so spricht man von einem *direct*–Photon. Hierbei koppelt das Photon direkt an (Anti–) Quarks im harten Streuprozeß. In LO entstehen zwei auslaufende Partonen, die aufgrund von Erhaltungssätzen beide den Transversalimpuls p_T besitzen. In NLO kann es ein weiteres Parton im Endzustand geben, und die Impulserhaltung impliziert nicht mehr, daß alle auslaufenden Teilchen einen hohen Transversalimpuls besitzen, so daß es auslaufende Teilchen mit fast verschwindendem p_T geben kann. Diese Teilchen laufen parallel zur Strahlachse aus dem Wechselwirkungspunkt heraus und führen in den Rechnungen zu Divergenzen in den Wirkungsquerschnitten. Der Fall tritt z.B. ein, wenn ein einlaufendes Photon in ein paralleles Quark–Antiquark Paar aufspaltet, von dem nur ein Partner weiter wechselwirkt und der andere im Strahlrohr verschwindet. In dieser Aufspaltung ist keine harte Skala mehr involviert, dieser Beitrag kann daher nicht perturbativ beschrieben werden. Diese Art Prozeß wird in völliger Analogie zum Proton mit Hilfe der Partondichten im Photon beschrieben. Das Photon wird dann als *resolved*–Photon

bezeichnet. Es hat jedoch, da es auch direkt an Quarks koppeln kann, eine sog. anomale Komponente und damit im Gegensatz zum Proton einen inhomogenen Anteil in den Altarelli–Parisi–Entwicklungs–Gleichungen (siehe dazu z.B. [7, 23]).

Die Aufteilung in *direct*– und *resolved*–Photon ist nur in LO eindeutig. Wie sich zeigen wird, ist die eindeutige Trennung in NLO im allgemeinen nicht mehr möglich, da die in den NLO–Rechnungen auftretenden Divergenzen in die Partondichtefunktionen des Photons absorbiert werden und hierbei eine künstliche Skala M eingeführt wird. Diese Skala findet sich sowohl in den Anfangszuständen der *direct*–Photon–Beiträge als auch in den Partondichten des Photons der *resolved*–Beiträge. Erst in der Summe verschwindet diese Abhängigkeit fast vollständig, wie es in physikalischen Ergebnissen sein muß. Hier wird sichtbar, warum eine konsistente Betrachtung in NLO nur gemacht werden kann, wenn alle Beiträge berücksichtigt werden.

Da zwei Photonen wechselwirken, gibt es insgesamt vier Situationen (siehe Bild 1): *direct–direct* (a), *direct–resolved* (b), *resolved–direct* (c) und *resolved–resolved* (d). Der Fall, daß beide Photonen direkt wechselwirken, wird im folgenden mit *direct*–Photon bezeichnet. Die Fälle *resolved–direct* und *direct–resolved* sind bis auf Vertauschung der Partonen im Anfangszustand identisch und werden zusammen als *single–resolved* bezeichnet. Der Fall zweier aufgelöster Photonen mit *double–resolved* [24].

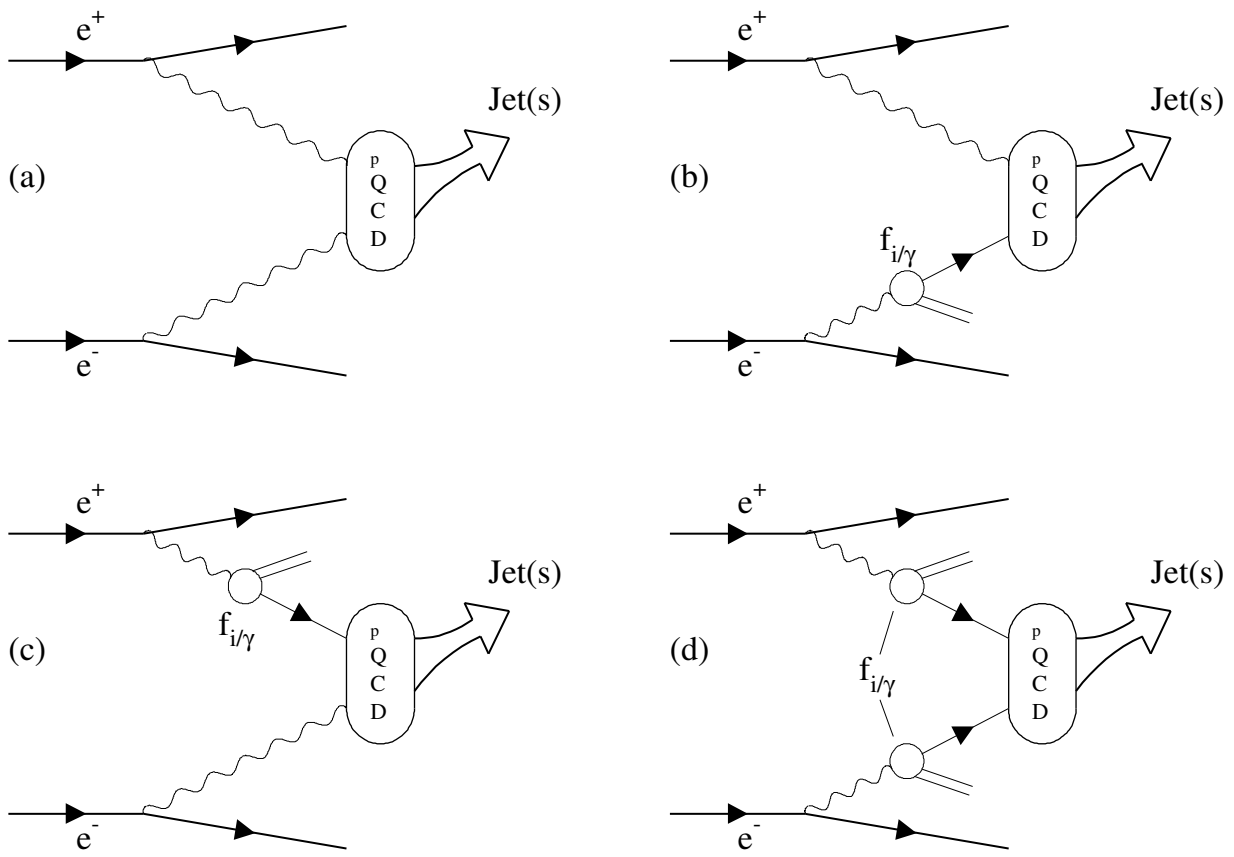

Abbildung 1: Die vier möglichen Arten, auf die die einlaufenden Photonen an der 'harten' Wechselwirkung (pQCD) teilnehmen können: *direct* (a), *single–resolved* (b)+(c) und *double–resolved* (d).

Noch ein Wort zu den Größenordnungen der Kopplungen. Wechselwirkt das Photon direkt, so koppelt es über die QED–Kopplungskonstante α, beim aufgelösten Photon über die QCD–Kopplungskonstante α_s im harten Streuprozeß. Beide Beiträge sind jedoch von der gleichen Größenordnung, da die Partondichtefunktion, die beim aufgelösten Photon noch hinzukommt, ein Hochenergieverhalten $f_{i/\gamma} \to \alpha/\alpha_s$ hat [5]. Ferner gibt es durch den Gluon–Anteil der Partondichten des Photons einen

zusätzlichen Beitrag, der insbesondere bei kleinen y groß ist, wobei y die Variable ist, die den Energieanteil des Partons am Photon beschreibt. Somit sind alle Prozesse, zumindest in diesem Limes, von der gleichen Größenordnung. Es ist jedoch einsichtig, daß die Prozesse mit aufgelöstem Photon eher bei kleineren Transversalimpuls p_T eine Rolle spielen, da nur ein Teil der Photonenergie in die Jet–Produktion geht.

Im *single–resolved*–Fall ergibt sich der Photon–Photon–Wirkungsquerschnitt aus dem partonischen Wirkungsquerschnitt zu:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^{SR}(\gamma\gamma \to \mathrm{Jet(s)} + X) &= \sum_i \left(\int_{x_a}^1 \mathrm{d}y_a f_{i/\gamma}(y_a) \mathrm{d}\sigma(i\gamma \to \mathrm{Jet(s)} + X) \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_b}^1 \mathrm{d}y_b f_{i/\gamma}(y_b) \mathrm{d}\sigma(\gamma i \to \mathrm{Jet(s)} + X) \right) \end{aligned} \tag{13}$$

und im *double–resolved*–Fall zu:

$$\mathrm{d}\sigma^{DR}(\gamma\gamma \to \mathrm{Jet(s)} + X) = \sum_{i,j} \int_{x_a}^1 \mathrm{d}y_a f_{i/\gamma}(y_a) \int_{x_b}^1 \mathrm{d}y_b f_{j/\gamma}(y_b) \mathrm{d}\sigma(ij \to \mathrm{Jet(s)} + X). \tag{14}$$

Die Summen laufen über alle möglichen Quarks bzw. Antiquarks und die Gluonen.

Die Variable ξ beschreibt den Energieanteil des Photons am Elektron/Positron, y ist der Energieanteil des Partons am Photon beim aufgelösten Photon. Damit ergibt sich für den Energieanteil des Partons am Elektron $x = \xi y$. Da beim direkten Photon das Parton das Photon selbst ist, gilt dort $y = 1$ und somit $\xi = x$.

2.4 Der partonische Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt auf Partonlevel ergibt sich zu:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2s} \overline{|M|}^2 \mathrm{dPS}^{(N)}. \tag{15}$$

Es ist $\frac{1}{2s}$ der Flußfaktor, $\overline{|M|}^2$ das über die Freiheitsgrade der Spins, der Polarisationen und der Farben der auslaufenden Teilchen summierte und über die der einlaufenden Teilchen gemittelte und quadrierte Matrixelement. Die Mittelung lautet für ...

$$\ldots\text{ein einlaufendes Photon:} \qquad \frac{1}{2(1-\varepsilon)}, \tag{16}$$

$$\ldots\text{ein einlaufendes Quark:} \qquad \frac{1}{2N_C}, \tag{17}$$

$$\ldots\text{ein einlaufendes Gluon:} \qquad \frac{1}{4N_C C_F(1-\varepsilon)}. \tag{18}$$

$N_C = 3$ ist die Anzahl der Farben und $C_F = (N_C^2 - 1)/(2N_C) = 4/3$ der Colourfaktor. Desweiteren gibt es für N gleiche Teilchen im Endzustand einen Symmetriefaktor $\frac{1}{N!}$.

Der Phasenraum hat in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen für N Teilchen im Endzustand die allgemeine Form:

$$\mathrm{dPS}^{(d,N)} = (2\pi)^d \left(\prod_{i=1}^N \frac{\mathrm{d}^d p_i \, \delta(p_i^2)}{(2\pi)^{d-1}} \right) \delta^d \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^N p_i \right). \tag{19}$$

Hieraus ergeben sich die in den folgenden Abschnitten benötigten Phasenräume für 2 und 3 Teilchen im Endzustand.

Dadurch, daß die NLO–Korrekturen in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen berechnet werden, sind die Kopplungskonstanten α und α_s nicht länger dimensionslos. Ihre Dimension lautet:

$$\dim[\alpha] = \dim[\alpha_s] = 4 - d = 2\varepsilon. \tag{20}$$

Um die Kopplungskonstanten in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen dimensionslos zu halten, wird eine Massenskala μ eingeführt. Die Kopplungskonstanten werden bei Rechnungen in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen mit $\mu^{2\varepsilon}$ multipliziert. Dadurch werden die Ergebnisse jedoch von dieser Skala abhängig, wie in Abschnitt 5 gezeigt wird.

Daraus ergibt sich auch für α_s eine Skalenabhängigkeit. In dieser Arbeit werden folgende Formeln für α_s verwendet. In LO gilt:

$$\alpha_s(\mu^2) \quad = \quad \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)}. \tag{21}$$

In NLO gilt:

$$\alpha_s(\mu^2) \quad = \quad \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)} \left(1 - \frac{6(153 - 19N_f)}{(33 - 2N_f)^2} \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right)}{\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)}\right). \tag{22}$$

Es ist N_f die Anzahl der berücksichtigten Quarkflavours. Die QED–Kopplungskonstante α wird in allen Rechnungen als konstant betrachtet.

2.5 Jets im Endzustand

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, bilden die im partonischen Streuprozeß entstandenen Quarks und Gluonen auf ihrem Weg zum Detektor Schauer aus, die sogenannten Jets. Diese Hadronisierung der Teilchen ist wegen der relativ großen Längenskalen und relativ kleinen involvierten Energien ein Prozeß, der nicht perturbativ beschrieben werden kann. In dieser Arbeit wird jedoch auf die Hadronisierung der Teilchen nicht weiter eingegangen, sondern es wird vorausgesetzt, daß die auslaufenden Quarks und Gluonen mit der Wahrscheinlichkeit 1 in irgendwelche (meßbaren) Teilchen hadronisieren müssen. Da es sich dabei im Experiment oft um sehr viele Teilchen handelt, ist es notwendig, Algorithmen anzugeben, die diese Teilchen zu einem oder eventuell zu mehreren Jets rekombinieren. Das Problem taucht auch bei einer theoretischen Analyse auf, wenn, wie in dieser Arbeit, mehr als zwei Teilchen im Endzustand betrachtet werden. Daher wird in den Abschnitten über die analytische Integration der Endzustandsbeiträge und bei der numerischen Integration auf dieses Problem näher eingegangen.

3 Die $2 \to 2$ Beiträge

In diesem Abschnitt werden die Prozesse mit zwei Partonen im Endzustand beschrieben. Dazu gehören die Borngraphen sowie in NLO jene Beiträge, die sich aus der Multiplikation der Bornamplituden mit den Amplituden der virtuellen Korrekturen ergeben. Diese enthalten innere Gluonen– oder Quark–Antiquark–Schleifen. Da der Impuls der inneren Schleifen nicht beschränkt ist und ausintegriert wird, divergieren die Integrale. Man unterscheidet dabei drei Arten von Divergenzen. Zum ersten kann der innere Schleifenimpuls gegen Null gehen. Das verursacht eine Infrarotdivergenz. Zum zweiten kann der Impuls, da er auch nach oben keiner weiteren Einschränkung unterliegt, gegen Unendlich laufen. Das führt zu einer Ultraviolettdivergenz. Wird der Schleifenimpuls kollinear zu einem weiteren Impuls, der in dem Prozeß involviert ist, so können kollineare Divergenzen auftreten. Die infraroten und kollinearen Divergenzen treten auch in den reellen Korrekturen auf, die Ultraviolettdivergenzen werden in die Renormierung der starken Kopplungskonstante α_s absorbiert. Um die Divergenzen zu handhaben, werden die virtuellen Korrekturen dimensional regularisiert und in $d = 4-2\varepsilon$ Dimensionen berechnet, wodurch sich die Divergenzen als Pole in $1/\varepsilon^2$ und $1/\varepsilon$ zeigen. Die benötigten Beiträge der virtuellen Korrekturen sind in der Literatur seit längerem bekannt, sowohl für den *direct*– [25] und *single–resolved*–Fall [26, 15], als auch im *double–resolved*–Fall [27]. Sie ergeben sich aus der Gleichung (25). Die V_i's finden sich in den Tabellen der Abschnitte 3.1 bis 3.3 und sind im Anhang 7.7 in $d = 4-2\varepsilon$ Dimensionen aufgeführt, um die Pole explizit anzugeben. Diese Pole heben sich später gegen jene aus den reellen Korrekturen weg. Es wurde auf eine möglichst kompakte Schreibweise Wert gelegt, und dabei im *double–resolved*–Fall die Notation aus [27] übernommen.

Wegen der großen Anzahl von Beiträgen wurden sie in Tabellenform aufgeführt. Um diese übersichtlicher zu gestalten, wurde der allen Prozessen einer Tabelle gemeinsame Vorfaktor, bestehend aus Kopplungskonstanten, Mittelungsfaktor und evtl. Symmetriefaktor, als Konstante $C_{2.i}$ getrennt aufgeführt. Der allen NLO–Beiträgen gemeinsame Vorfaktor

$$\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon} \tag{23}$$

ist explizit aufgeführt und enthält die zusätzliche Kopplungskonstante und einen Term, der sich im Fall $\varepsilon \to 0$ zu 1 ergibt.

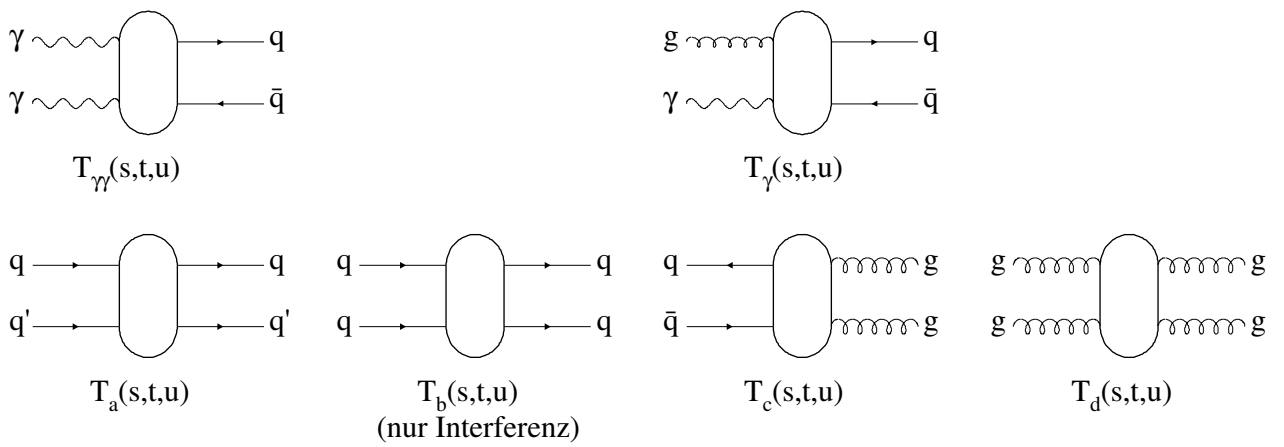

Abbildung 2: Die $2 \to 2$–Grundprozesse für *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Photon. Hierzu gehören die Bornprozesse und die virtuellen Korrekturen.

Im $2 \to 2$ Fall gibt es insgesamt sechs Grundprozesse, wie in Abbildung 2 zu sehen ist. Alle anderen Prozesse lassen sich aus diesen durch Kreuzen gewinnen, wie aus den Tabellen in den Abschnitten 3.1–3.3 zu entnehmen ist.

Die Beiträge ergeben sich folgendermaßen aus den Tabellen:

$$\overline{|M|}^2_{\text{Born}} = C_{2.i} T_i, \tag{24}$$

$$\overline{|M|}^2_{\text{Virt}} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\varepsilon} C_{2.i} V_i. \tag{25}$$

Der Index i durchläuft die Prozesse, die T_i's sind die Born– und die V_i's die Prozesse der virtuellen Korrektur. Anhang 7.1 enthält die Größen T_i und in Anhang 7.7 finden sich die Funktionen V_i, die die virtuellen Korrekturen bestimmen.

Für einen 2–Teilchen Endzustand lautet der Phasenraum:

$$\mathrm{dPS}^{(2)} = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi s}{tu} \right)^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{8\pi s} \tag{26}$$

$$\stackrel{\varepsilon \to 0}{=} \frac{\mathrm{d}t}{8\pi s} \tag{27}$$

und der Wirkungsquerschnitt in $d = 4$ Dimensionen:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2s} \overline{|M|}^2 \frac{\mathrm{d}t}{8\pi s}. \tag{28}$$

Aus der Tabelle in Abschnitt 3.4 kann man entnehmen, über welche Partondichten nach Gleichung (13) und (14) bei den jeweiligen Prozessen zu integrieren und über welche Teilchen und Ladungen zu summieren ist.

3.1 'Direct'–Photon

In dieser Tabelle ist der Beitrag für das *direct*–Photon aufgeführt. Es handelt sich um den Grundprozeß $T_{\gamma\gamma}$ aus Bild 2. Dabei sind das Bornmatrixelement T_i, die Funktion der virtuellen Korrektur V_i und der Vorfaktor in ihren Definitionen angegeben. Die T_i's und V_i's sind in Anhang 7.1 und 7.7 angegeben.

Prozeß 2.1: $\gamma(p_a) + \gamma(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}(p_2)$	
Born–Matrixelement T_1:	$T_{\gamma\gamma \to q\bar{q}}(s,t,u) = T_{\gamma\gamma}(s,t,u)$
Virtuelle Korrektur V_1:	$V_{\gamma\gamma}(s,t,u)$
Vorfaktor $C_{2.1}$:	$\dfrac{e^4 \mu^{4\varepsilon}}{4(1-\varepsilon)^2}$

3.2 'Single–Resolved'–Photon

Hier sind die Beiträge für das *single–resolved*–Photon aufgeführt. Es handelt sich um den Grundprozeß T_γ aus Bild 2, der mit einlaufendem Gluon und, gekreuzt, mit einlaufendem (Anti–) Quark beiträgt.

Prozeß 2.2: $\gamma(p_a) + q(p_b) \to q(p_1) + g(p_2)$	
T_2:	$T_{\gamma q \to qg}(s,t,u) = -T_\gamma(u,t,s)$
V_2:	$-V_\gamma(u,t,s)$
$C_{2.2}$:	$\dfrac{e^2 g^2 \mu^{4\varepsilon}}{4N_C(1-\varepsilon)}$

Prozeß 2.3: $\gamma(p_a) + g(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}(p_2)$	
T_3:	$T_{\gamma g \to q\bar{q}}(s,t,u) = T_\gamma(s,t,u)$
V_3:	$V_\gamma(s,t,u)$
$C_{2.3}$:	$\dfrac{e^2 g^2 \mu^{4\varepsilon}}{8 N_C C_F (1-\varepsilon)^2}$

3.3 'Double–Resolved'–Photon

In diesem Abschnitt sind die Beiträge für das *double–resolved*–Photon aufgeführt. Es handelt sich um insgesamt neun Beiträge, die sich aus den Grundprozessen T_a bis T_d der Abbildung 2 ergeben. Der Prozeß T_a mit verschiedenen Quark–Flavours tritt insgesamt dreimal auf, für die zwei Prozesse mit gleichen Quark–Flavours muß neben dem Grundprozeß T_a auch der Prozeß mit vertauschten Teilchen im Endzustand und der Prozeß T_b genommen werden, der nur den Interferenzteil bei gleichen Quark–Flavours beschreibt. Der Grundprozeß T_c taucht in drei Varianten auf: Mit keinem, einem oder zwei Gluonen im Endzustand. Der Grundprozeß T_d mit vier Gluonen ist völlig symmetrisch und tritt somit nur einmal auf.

Prozeß 2.4: $q(p_a) + q'(p_b) \to q(p_1) + q'(p_2)$	
T_4:	$T_{qq' \to qq'}(s,t,u) = T_a(s,t,u)$
V_4:	$V_a(s,t,u)$
$C_{2.4}$:	$\dfrac{g^4 \mu^{4\varepsilon}}{4 N_C^2}$

Prozeß 2.5: $q(p_a) + \bar{q}'(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}'(p_2)$	
T_5:	$T_{q\bar{q}' \to q\bar{q}'}(s,t,u) = T_a(u,t,s)$
V_5:	$V_a(u,t,s)$
$C_{2.5}$:	$\dfrac{g^4 \mu^{4\varepsilon}}{4 N_C^2}$

Prozeß 2.6: $q(p_a) + q(p_b) \to q(p_1) + q(p_2)$	
T_6:	$T_{qq \to qq}(s,t,u) = T_a(s,t,u) + T_a(s,u,t) + T_b(s,t,u)$
V_6:	$V_a(s,t,u) + V_a(s,u,t) + V_b(s,t,u)$
$C_{2.6}$:	$\dfrac{1}{2!}\dfrac{g^4 \mu^{4\varepsilon}}{4 N_C^2}$

Prozeß 2.7: $q(p_a) + \bar{q}(p_b) \to q'(p_1) + \bar{q}'(p_2)$	
T_7:	$T_{q\bar{q}\to q'\bar{q}'}(s,t,u) = T_a(u,s,t)$
V_7:	$V_a(u,s,t)$
$C_{2.7}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$

Prozeß 2.8: $q(p_a) + \bar{q}(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}(p_2)$	
T_8:	$T_{q\bar{q}\to q\bar{q}}(s,t,u) = T_a(u,t,s) + T_a(u,s,t) + T_b(u,t,s)$
V_8:	$V_a(u,t,s) + V_a(u,s,t) + V_b(u,t,s)$
$C_{2.8}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$

Prozeß 2.9: $q(p_a) + \bar{q}(p_b) \to g(p_1) + g(p_2)$	
T_9:	$T_{q\bar{q}\to gg}(s,t,u) = T_c(s,t,u)$
V_9:	$V_c(s,t,u)$
$C_{2.9}$:	$\dfrac{1}{2!}\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$

Prozeß 2.10: $q(p_a) + g(p_b) \to q(p_1) + g(p_2)$	
T_{10}:	$T_{qg\to qg}(s,t,u) = -T_c(t,s,u)$
V_{10}:	$-V_c(t,s,u)$
$C_{2.10}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{8N_C^2C_F(1-\varepsilon)}$

Prozeß 2.11: $g(p_a) + g(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}(p_2)$	
T_{11}:	$T_{gg\to q\bar{q}}(s,t,u) = T_c(s,t,u)$
V_{11}:	$V_c(s,t,u)$
$C_{2.11}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{16N_C^2C_F^2(1-\varepsilon)^2}$

Prozeß 2.12: $g(p_a) + g(p_b) \to g(p_1) + g(p_2)$	
T_{12}:	$T_{gg\to gg}(s,t,u) = T_d(s,t,u)$
V_{12}:	$V_d(s,t,u)$
$C_{2.12}$:	$\dfrac{1}{2!}\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{16N_C^2C_F^2(1-\varepsilon)^2}$

3.4 Faktoren aus den Partondichten

In den folgenden Tabellen sind für jeden der zwölf $2 \to 2$ Prozesse aus den Abschnitten (3.1) bis (3.3) die für die Prozesse mit aufgelöstem Photon nötigen Summen über die Partondichten und die für die Prozesse mit direktem Photon nötigen Summen über die normierten Quarkladungen Q_i aufgeführt. Q_i ist die Ladung des i–ten Quarks normiert auf die Ladung des Positrons. Es wird zwischen Quarks und Antiquarks unterschieden. Die Integration über die Partondichten erfolgt über den kinematisch erlaubten Bereich.

Prozeß:		Partondichte/Ladungssumme:
2.1	$\gamma\gamma \to q_i\bar{q}_i$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} Q_i^4$
2.2	$\gamma q_i \to q_i g$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left(f_{q_i/\gamma_b}(y_b) + f_{\bar{q}_i/\gamma_b}(y_b)\right)$
2.3	$\gamma g \to q_i\bar{q}_i$	$\displaystyle f_{g/\gamma_b}(y_b) \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2$
2.4	$q_iq_j' \to q_iq_j'$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_f} \left(f_{q_i/\gamma_a}(y_a) f_{q_j'/\gamma_b}(y_b) + f_{\bar{q}_i/\gamma_a}(y_a) f_{\bar{q}_j'/\gamma_b}(y_b)\right)$
2.5	$q_i\bar{q}_j' \to q_i\bar{q}_j'$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_f} \left(f_{q_i/\gamma_a}(y_a) f_{\bar{q}_j'/\gamma_b}(y_b) + f_{\bar{q}_i/\gamma_a}(y_a) f_{q_j'/\gamma_b}(y_b)\right)$
2.6	$q_iq_i \to q_iq_i$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} \left(f_{q_i/\gamma_a}(y_a) f_{q_i/\gamma_b}(y_b) + f_{\bar{q}_i/\gamma_a}(y_a) f_{\bar{q}_i/\gamma_b}(y_b)\right)$

Prozeß:		Partondichte/Ladungssumme:
2.7	$q_i\bar{q}_i \to q'_j\bar{q}'_j$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma_a}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma_b}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma_a}(y_a)f_{q_i/\gamma_b}(y_b)\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_f}$
2.8	$q_i\bar{q}_i \to q_i\bar{q}_i$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma_a}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma_b}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma_a}(y_a)f_{q_i/\gamma_b}(y_b)\right)$
2.9	$q_i\bar{q}_i \to gg$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma_a}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma_b}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma_a}(y_a)f_{q_i/\gamma_b}(y_b)\right)$
2.10	$q_ig \to q_ig$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma_a}(y_a)f_{g/\gamma_b}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma_a}(y_a)f_{g/\gamma_b}(y_b)\right)$
2.11	$gg \to q_i\bar{q}_i$	$f_{g/\gamma_a}(y_a)f_{g/\gamma_b}(y_b)\sum_{i=1}^{N_f}$
2.12	$gg \to gg$	$f_{g/\gamma_a}(y_a)f_{g/\gamma_b}(y_b)$

4 Die $2 \to 3$ Beiträge

In NLO tragen neben den virtuellen die reellen Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt bei. Das sind jene Prozesse mit drei Partonen im Endzustand. Die zu diesen Prozessen gehörenden Matrixelemente sind in der Literatur in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen seit längerem bekannt und werden wegen ihres Umfangs hier nicht erneut angegeben. Sie mußten jedoch zum Teil neu berechnet werden, da sie in elementarer Form benötigt wurden. Es gibt insgesamt acht Grundprozesse, wie in Bild 3 zu sehen ist. Alle übrigen lassen sich aus diesen durch Kreuzen gewinnen. Den *direct*–Prozeß findet man z. B. in [28], die *single–resolved*–Prozesse in [26] und die *double–resolved*–Prozesse in [27], wobei die Notation wieder aus jener Arbeit übernommen wurde.

Da nur maximal zwei Jets im Endzustand betrachtet werden, muß der Phasenraum des dritten Teilchens ausintegriert werden. Nach der Integration liegt der 3–Teilchen Phasenraum in der gewünschten Form (8) vor. Bei der Integration trifft man auf das Problem divergenter Integrale für den Fall, daß das ausintegrierte Teilchen kollinear zu einem anderen wird oder zusätzlich, im Fall des Gluons, wenn dessen Energie verschwindet. Deshalb werden die Matrixelemente und die Integrale auch im Fall der reellen Korrekturen in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen ausgeführt. Die Divergenzen haben die gleiche Struktur wie bei den virtuellen Korrekturen und heben sich gegen jene weg oder sind proportional zu den Altarelli–Parisi–Splitting–Funktionen (siehe Anhang 7.2) und werden in die Partondichten des Photons absorbiert.

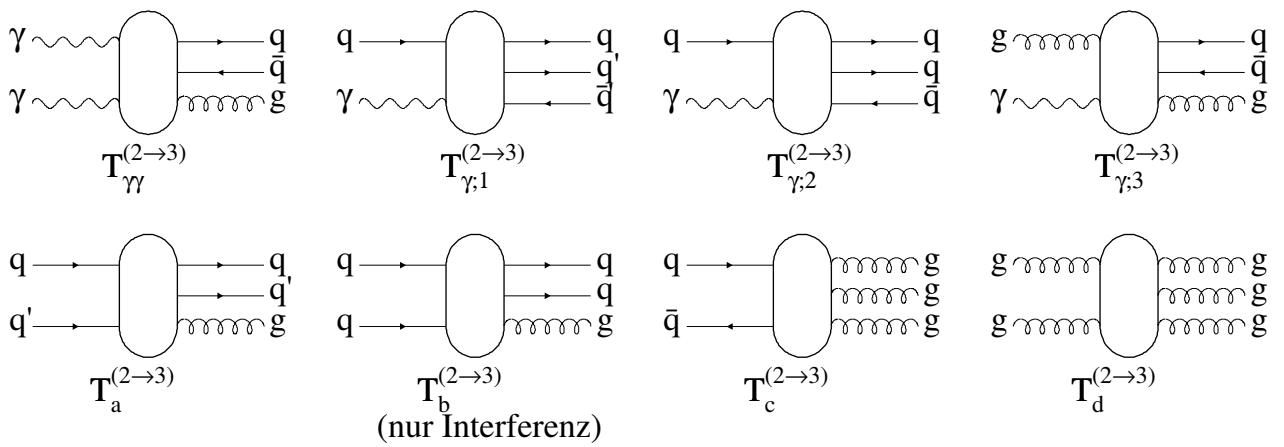

Abbildung 3: Die $2 \to 3$–Grundprozesse für *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Photon. Alle nicht aufgeführten Prozesse lassen sich aus diesen durch Kreuzen gewinnen.

Bei der Ausintegration des Phasenraums wird die "Phase–Space–Slicing"–Methode angewandt. Hierbei wird der Phasenraum nur um die singulären Pole analytisch ausintegriert. Dabei wird die Variable, deren Verschwinden eine Divergenz verursacht, nur von 0 bis zu einem invarianten y–Cut integriert. Dieser y–Cut ist eine auf die Schwerpunktsenergie des harten Streuprozesses normierte Größe. Für den Cut gilt $y \ll 1$, so daß Terme der Ordnung $O(y^1)$ vernachlässigt werden können. Der Rest des Phasenraums, in dem die Matrixelemente keine Singularitäten mehr enthalten, kann numerisch integriert werden. Dadurch erhält man relativ kompakte Integrationskerne, die analytisch in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen integriert werden müssen, während die vollen numerisch zu integrierenden Matrixelemente dadurch kompakter werden, daß sie in $d = 4$ Dimensionen betrachtet werden können.

Die Bereiche im Phasenraum, in denen die Matrixelemente singulär werden, lassen sich in drei Klassen aufteilen. Zum ersten ergeben sich Endzustandssingularitäten (EZS) für den Fall, daß zwei auslaufende Partonen kollinear sind und, wenn es sich bei einem der auslaufenden Partonen um ein Gluon handelt, wenn dieses verschwindende Energie hat (siehe Bild 4(a)). Ist dort z.B. das Gluon p_1 kollinear zum Quark p_2, $p_1 = \lambda p_2$, so verschwindet der Nenner des Propagators $(p_1 + p_2)^2$ genauso, wie im Fall verschwindender Energie des Gluons (weiches Gluon) $p_1 \to 0$. Beide Fälle führen zu

Singularitäten im Gesamtmatrixelement.

Im Experiment stößt man in solchen Fällen auf das Problem, daß zwei auslaufende Teilchen nur dann getrennt detektiert werden können, wenn sie nicht 'zu kollinear' sind, und daß die auslaufenden Teilchen nur ab einer gewissen Mindestenergie gemessen werden können. Es ist daher notwendig, Kriterien anzugeben, wann zwei auslaufende Teilchen getrennt gemessen werden und wann sie zu einem Jet zusammengefaßt werden.

Es gibt mehrere Jet–Algorithmen, die im Experimenten ihre Anwendung finden. Ihnen allen ist gemein, daß im Grenzfall fast kollinearer Teilchen die Jet–Rekombinationsformel auf eine einfache Vierervektoraddition hinausläuft. Da wir die analytische Integration nur in diesem extrem kollinearen Phasenraumbereich $0 \leq r \leq y \ll 1$ durchführen, ist die Integration vom später verwendeten Jet–Algorithmus unabhängig. Die zwei Teilchen werden so ausintegriert, daß sie nach der Integration als rekombiniertes Teilchen $(p_1 + p_2)$ erscheinen.

Zum zweiten kann ein auslaufendes (Anti–) Quark kollinear zu einem einlaufenden Photon werden (Bild 4(b)). Wird in diesem Fall der Viererimpuls p_3 des auslaufenden Quarks kollinear zum Viererimpuls p_a des einlaufenden Photons, $p_3 = \lambda p_a$, so verschwindet das Viererprodukt $(p_a - p_3)^2$, so daß im Propagator des Matrixelements eine Singularität auftritt. Da Gluonen nicht direkt an Photonen koppeln, gibt es diese Photon–Anfangszustandssingularität nur in Verbindung mit (Anti–) Quarks. Es gibt somit bei den Photon–Anfangszustandssingularitäten keine Divergenzen aufgrund von Gluonen verschwindender Energie.

Diese Singularitäten können durch Einführung von Quarkmassen behoben werden, was aber zu sehr großen Beiträgen führt, die nicht mehr perturbativ beschrieben werden können. In dieser Arbeit werden die Divergenzen mit Hilfe von dimensionaler Regularisierung berechnet. Die Divergenzen führen lediglich zu Polen in $1/\varepsilon$, die in den inhomogenen Anteil der Partonverteilungen des Photons absorbiert werden.

Im Experiment ist ein solches zum Photon kollineares Teilchen nicht meßbar, da es fast parallel zum einlaufenden Teilchen im Strahlrohr verschwindet. Der Transversalimpuls des Teilchens ist daher sehr klein, und es ist somit bei der Produktion dieses Teilchens keine 'harte' Skala mehr involviert, die die Anwendung perturbativer QCD rechtfertigt. Dieses Teilchen, welches aus einem (NLO) *direct*–Prozeß stammt kann damit zum Remnant eines *resolved*–Prozesses gezählt wird.

Zum dritten kann das ausintegrierte Teilchen kollinear zu einem einlaufenden Parton werden. Der Fall ist dem zweiten ähnlich. Das einlaufende Parton stammt aus der Partondichtefunktion des Photons. Es handelt sich daher um eine Parton–Anfangszustandssingularität (siehe Bild 4(c)). Da die einlaufenden (Anti–) Quarks und Gluonen im Gegensatz zum Photon selbst Gluonen abstrahlen können, sind in diesem Fall weiche Gluonen möglich, so daß es sowohl Pole in $1/\varepsilon$ als auch in $1/\varepsilon^2$ gibt.

Die Berechnung der divergenten Beiträge wird Gegenstand der nächsten Abschnitte sein, in denen die analytische Integration mit Hilfe des invarianten Massen–Cuts genauer beschrieben wird.

4.1 Endzustandssingularitäten

Endzustandssingularitäten entstehen in dem Fall, daß das ausintegrierte Teilchen kollinear zu einem auslaufenden Teilchen wird, oder, im Fall des Gluons, wenn es verschwindende Energie hat. In beiden Fällen divergiert ein Propagator im Matrixelement und damit auch das gesamte Matrixelement.

Um eine solche Singularität auszuintegrieren, geht man in das Schwerpunktsystem der zwei auslaufenden Teilchen, deren Invariante verschwindet. Seien dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit Teilchen p_1 und p_2 (siehe Bild 5[1]). In dem Schwerpunktsystem bekommen die zehn Invarianten im

[1]Ich danke Herrn B. Pötter für die Überlassung dieser Abbildung.

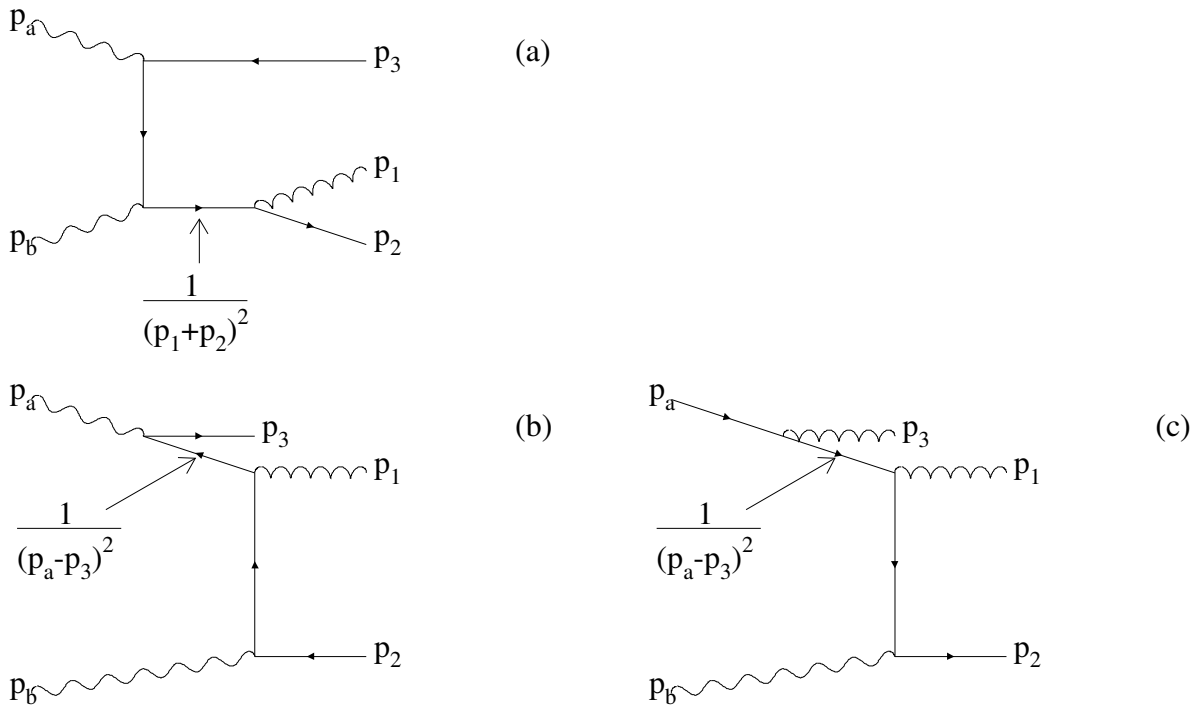

Abbildung 4: Beispiele für das Verschwinden eines Propagators im Fall (a) einer Endzustandssingularität, (b) einer Photon–Anfangszustandssingularität und (c) einer Parton–Anfangszustandssingularität.

Grenzfall $p_{12} \to 0$ folgende Gestalt:

$$\left.\begin{array}{llll} p_a.p_b = \frac{s_F}{2} & p_b.p_1 = -\frac{u_F}{2}b & p_1.p_2 = \frac{s_F}{2}r & p_2.p_3 = \frac{s_F}{2}(1-b) \\ p_a.p_1 = -\frac{t_F}{2}b & p_b.p_2 = -\frac{u_F}{2}(1-b) & p_1.p_3 = \frac{s_F}{2}b & \\ p_a.p_2 = -\frac{t_F}{2}(1-b) & p_b.p_3 = -\frac{t_F}{2} & & \\ p_a.p_3 = -\frac{u_F}{2}, & & & \end{array}\right\} \tag{29}$$

wobei:

$$r = \frac{p_1.p_2}{p_a.p_b}, \tag{30}$$

$$b = \frac{p_a.p_1}{p_b.p_3 - p_1.p_2} \to \frac{1}{2}(1-\cos\theta), \tag{31}$$

$$s_F = 2p_a.p_b, \tag{32}$$

$$t_F = -2p_a.(p_1+p_2), \tag{33}$$

$$u_F = -2p_a.p_3. \tag{34}$$

Es ist r die normierte Invariante, deren Verschwinden die Divergenz im Matrixelement verursacht, p_a und p_b sind die Impulse der einlaufenden Teilchen, p_1, p_2 und p_3 sind die Impulse der auslaufenden Teilchen, wobei Teilchen p_1 und p_2 nach der Integration zu einem Teilchen $p_1 + p_2$ zusammengefaßt werden. Es handelt sich damit um einen $2 \to 2$ Prozeß der Art: $p_a + p_b \to (p_1 + p_2) + p_3$. Dieses ist berücksichtigt in den drei Mandelstam–Variablen s_F, t_F und u_F, deren Definition für den betrachteten Grenzfall $r \to 0$ unter der Annahme verschwindender Quarkmassen angegeben ist.

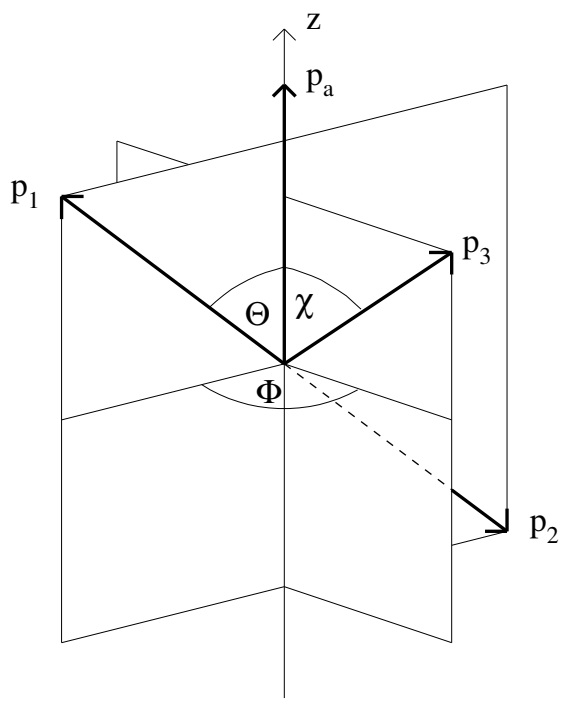

Abbildung 5: $(p_1$–$p_2)$–Schwerpunktsystem für die Integration der Anfangs– und Endzustandssingularitäten im Fall $p_1.p_2 \to 0$ bzw. $p_a.p_3 \to 0$.

Im nächsten Schritt werden die Matrixelemente durch diese Näherungen (29) ausgedrückt; sie erhalten damit eine relativ kompakte Form, sind aber nur gültig im Limes $r \to 0$.

Die genäherten Matrixelemente für den *direct*– und den *single–resolved*–Fall finden sich in [22] bzw. in [17], diejenigen für die *double–resolved*–Prozesse sind im Anhang 7.3 aufgeführt, in einer Form, die es erlaubt, daß sie gekreuzt werden können.

Bei der Integration der Matrixelemente über den singulären Bereich im Phasenraum, in dem diese Näherung gilt, tritt eine weitere Schwierigkeit auf. Im Falle eines auslaufenden Gluons können mehrere Invarianten gleichzeitig verschwinden, was dazu führt, daß das Matrixelement divergiert. Um jede Singularität eindeutig einer Invarianten zuordnen zu können, werden solche Terme partialbruchzerlegt.

In einem solchen Fall wird z.B. der Bruch $\frac{1}{p_{12}p_{23}}$ gemäß:

$$\frac{1}{p_{12}p_{23}} = \frac{1}{p_{12}\,(p_{12}+p_{13})} + \frac{1}{p_{13}\,(p_{12}+p_{13})} \tag{35}$$

aufgespalten. In der oben angegebenen Näherung (29) gilt dann:

$$\frac{1}{p_{12}p_{13}} \to \underbrace{\frac{1}{r\,(r+b)}}_{P_A} + \underbrace{\frac{1}{b\,(r+b)}}_{P_B}. \tag{36}$$

Damit wird der Term aufgespalten in einen Beitrag P_A proportional zu $\frac{1}{r}$, der im Fall $r \to 0$ singulär wird und in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen integriert werden muß, und in einen Beitrag P_B, der

berücksichtigt wird, wenn die andere Invariante die Singularität verursacht. Der Phasenraum in p_{12} und p_{13} wird, wie in Bild 6 zu sehen ist, aufgespalten. Das partialbruchzerlegte Matrixelement P_A wird

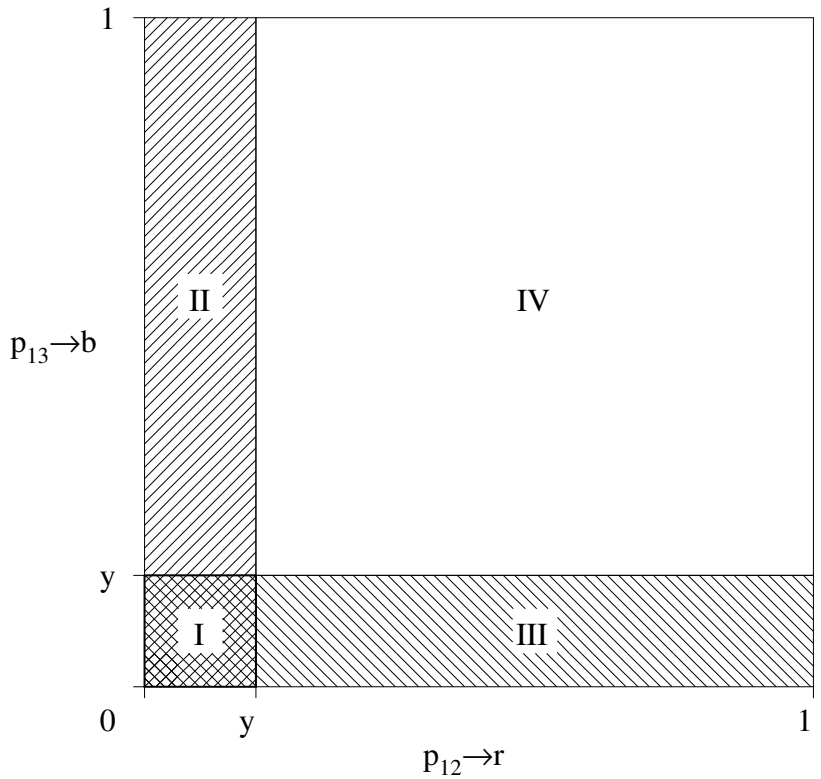

Abbildung 6: Aufteilung des Phasenraums für die numerische und analytische Integration, siehe Text.

über den Bereich I+II, das Matrixelement P_B über den Bereich I+III integriert. Die numerische Integration des Gesamtmatrixelement findet nur über den Bereich IV statt. Es werden damit die jeweils anderen Teile des partialbruchzerlegten Matrixelements nicht über die Bereiche II bzw. III integriert, da diese Anteile in diesen Bereichen nicht singulär sind. Es zeigt sich jedoch, daß diese Integrale einen endlichen, vom y–Cut unabhängigen Beitrag liefern. Diese Beiträge werden berücksichtigt, indem die numerische Integration auf die Bereiche II und III erweitert wird, wobei die Integration nur über den nichtsingulären Anteil des Matrixelements ausgeführt wird. Es ist wichtig, daß bei den numerisch ausintegrierten Anteilen die gleichen Partialbruchzerlegungen verwendet werden wie jene zur analytischen Berechnung der Streifen.

Um die Zerlegung der Matrixelemente machen zu können, müssen sie in elementarer Form vorliegen, wie es in der Literatur nicht der Fall ist. Deshalb mußten die Matrixelemente für die *double–resolved*–Prozesse neu berechnet werden. Die nötigen Rechnungen wurden mit Hilfe des Programms REDUCE [29] in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen durchgeführt. Als Test konnten die so gewonnenen Gesamtmatrixelemente mit denen aus der Literatur verglichen werden.

Für die Endzustände lautet der Phasenraum für drei Teilchen im Endzustand in den gewünschten Variablen:

$$\mathrm{dPS}_F^{(3)} \quad = \quad \mathrm{dPS}_F^{(2)} \mathrm{dPS}_F^{(r)}, \tag{37}$$

mit:

$$\mathrm{dPS}_F^{(2)} = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{4\pi s_F}{t_F u_F}\right)^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t_F}{8\pi s_F}, \tag{38}$$

$$\mathrm{dPS}_F^{(r)} = \left(\frac{4\pi}{s_F}\right)^{\varepsilon}\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\frac{s_F}{16\pi^2}\mathrm{d}\mu_F, \tag{39}$$

$$\mathrm{d}\mu_F = \frac{1}{1-2\varepsilon}\mathrm{d}r\, r^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}b}{N_b}b^{-\varepsilon}(1-b)^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\phi}{N_\phi}\sin^{-2\varepsilon}\phi + O(r^0), \tag{40}$$

$$N_b = \int_0^1 \mathrm{d}b\, b^{-\varepsilon}(1-b)^{-\varepsilon} = \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}, \tag{41}$$

$$N_\phi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \sin^{-2\varepsilon}\phi = 2\pi 4^{\varepsilon}\frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}. \tag{42}$$

Der Phasenraum kann nach Gleichung (37) in einen 2–Teilchen Phasenraum $\mathrm{dPS}_F^{(2)}$ und einen Restphasenraum $\mathrm{dPS}_F^{(r)}$ für die Integration des dritten Teilchens aufgespalten werden. Der Restphasenraum für das dritte Teilchen wird durch die Variablen r, b und ϕ parametrisiert. Im betrachteten Grenzfall hängt das Matrixelement nicht von ϕ ab, so daß die Integration über ϕ trivial ist und sofort ausgeführt werden kann. Die Integration über b erfolgt über den kinematisch erlaubten Bereich $[0,1]$ und die Integration von r erfolgt in $[0, y_F]$. y_F ist die obere Integrationsgrenze, die durch den invarianten Massen–Cut y festgelegt wird, der wegen der betrachteten Näherung $y \ll 1$ gewählt werden muß. Dieser kann jedoch nicht beliebig klein gewählt werden, wie sich im Abschnitt über die Numerik noch zeigen wird. Weiterhin ist y_F durch die kinematische Grenzen nach oben beschränkt, die jedoch kaum Anwendung finden, da sie meistens über dem y–Cut liegen. Die für die Integration der Endzustandsbeiträge im *double–resolved*–Fall notwendigen Integrale sind im Anhang 7.5 aufgeführt. Sie enthalten Terme der Gestalt $\ln(y)$ und $\ln^2(y)$, die von der oberen Integrationsgrenze herrühren. Da die Integrationsgrenze y eine rein technische und damit unphysikalische Grenze ist, dürfen physikalische Gesamtergebnisse nicht vom y–Cut abhängen. Die numerischen Integrationen müssen mit anderem Vorzeichen die gleiche Cut–Abhängigkeit aufzeigen. Das ist für eine geeignete Wahl von y auch der Fall, wie im Kapitel 5 noch gezeigt wird.

Durch die Integration wird aus dem 3–Teilchen Endzustand faktisch ein 2–'Teilchen' Endzustand, wobei das eine 'Teilchen' sich als Summe der zwei kollinearen Partonen ergibt. Der Wirkungsquerschnitt erhält im Endzustandsfall folgende Gestalt:

$$\mathrm{d}\sigma^F = \frac{1}{2s}\int_F \overline{|M|}^2 \mathrm{dPS}^{(3)}, \tag{43}$$

$$= \frac{1}{2s_F}\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon} C_{3.i}\, F_i\, \mathrm{dPS}_F^{(2)}, \tag{44}$$

wobei die F_i die ausintegrierten Endzustandssingularitäten sind, die, nach Prozessen geordnet, in den Abschnitten 4.3 - 4.5 zu finden sind. Ihre Definitionen befinden sich im Anhang 7.8. $C_{3.i}$ enthält die Kopplungen, Mittelungsfaktoren und evtl. Symmetriefaktoren. Außerdem ist wieder der allen NLO–Korrekturen gemeinsame Vorfaktor, der auch die zusätzliche Kopplung enthält, aufgeführt. F steht für den Phasenraumbereich, in dem die Endzustandsbeiträge integriert werden.

4.2 Anfangszustandssingularitäten

Anfangszustandssingularitäten treten für den Fall auf, daß das auszuintegrierende Teilchen kollinear zu einem einlaufenden Teilchen wird, oder, im Fall des Gluons, wenn dieses zusätzlich weich wird (siehe dazu Bild 4(a) und (b)).

In beiden Fällen verschwindet der Nenner eines Propagators, in diesem Fall: $(p_a - p_3)^2$. Die Vierer-impulse der kollinearen Teilchen p_a und p_3 können in diesem Grenzfall in folgende Beziehung gesetzt werden:

$$p_3 = (1 - z_a)p_a. \tag{45}$$

Im Fall einer Anfangszustandssingularität wird das auszuintegrierende Teilchen nicht mit einem zweiten Teilchen zu einem Jet rekombiniert, sondern verschwindet als Photon–Remnant im Strahlrohr und gehört nicht zum harten Streuprozeß. Daher kann der Energieanteil $(1 - z_a)$, den dieses Teilchen mitführt, nicht ausintegriert werden, sondern bleibt als Integration offen, da der Integrand die Partonverteilungen des Photons als Faktoren enthält, die im allgemeinen nicht in geschlossener analytischer Form vorliegen. Durch δ– und +–Distributionen ist es trotzdem möglich, die bei $z_a = 1$ (d.h. p_3 weich) lokalisierten Singularitäten zu extrahieren. Diese haben die gleiche Form, wie jene aus den Endzustandssingularitäten und aus den virtuellen Korrekturen und heben sich in der Summe weg. Die übrigbleibenden Singularitäten sind jeweils einfach und proportional zu einer Altarelli–Parisi–Splitting Funktion (siehe Anhang 7.2) und einem Bornterm (siehe Anhang 7.1). Sie werden, wie in Abschnitt 4.7 beschrieben wird, bei der Renormierung der Partondichtefunktionen im Photon absorbiert.

Zur weiteren Berechnung der Singularitäten betrachten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Fall, daß die Invariante p_{a3} verschwindet. Wir gehen dazu wieder ins p_1–p_2 Schwerpunktsystem (Bild 5). Die zehn Invarianten bekommen in diesem System im Grenzfall $p_{a3} \to 0$ folgende Gestalt:

$$\left.\begin{array}{llll}
p_a.p_b = \dfrac{s_I}{2z_a} & p_b.p_1 = -\dfrac{u_I}{2z_a}z_a & p_1.p_2 = \dfrac{s_I}{2z_a}z_a & p_2.p_3 = -\dfrac{u_I}{2z_a}(1 - z_a) \\
p_a.p_1 = -\dfrac{t_I}{2z_a} & p_b.p_2 = -\dfrac{t_I}{2z_a}z_a & p_1.p_3 = -\dfrac{t_I}{2z_a}(1 - z_a) & \\
p_a.p_2 = -\dfrac{u_I}{2z_a} & p_b.p_3 = \dfrac{s_I}{2z_a}(1 - z_a) & & \\
p_a.p_3 = \dfrac{s_I}{2z_a}r, & & &
\end{array}\right\} \tag{46}$$

wobei:

$$r = \frac{p_a.p_3}{p_a.p_b}, \tag{47}$$

$$z_a = \frac{p_1.p_2}{p_a.p_b}, \tag{48}$$

$$s_I = 2p_1.p_2, \tag{49}$$

$$t_I = -2p_b.p_2, \tag{50}$$

$$u_I = -2p_b.p_1. \tag{51}$$

Es ist r die Invariante, die im Grenzfall $p_{a3} \to 0$ verschwindet und die Singularität verursacht. p_a und p_b sind die einlaufenden und p_1, p_2 und p_3 die auslaufenden Teilchen. Da das Parton p_3 nicht mehr zum harten QCD–Prozeß gezählt wird, handelt es sich faktisch um einen $2 \to 2$ Streuprozeß der Art: $z_a p_a + p_b \to p_1 + p_2$. Danach sind in diesem Fall die Mandelstamvariablen s_I, t_I und u_I definiert.

Die weitere Vorgehensweise ist die gleiche wie bei den Endzuständen. Die auf diese Weise genäherten Matrixelemente für die *direct*– und *single–resolved*–Prozesse finden sich in [22] und [17], die für den *double–resolved*–Fall sind in Anhang 7.4 angegeben, die dafür benötigten Integrale in Anhang 7.6.

Der Phasenraum hat in dieser Näherung folgende Gestalt:

$$\mathrm{dPS}_I^{(3)} = \mathrm{dPS}_I^{(2)}\mathrm{dPS}_I^{(r)}, \tag{52}$$

$$\mathrm{dPS}_I^{(2)} = \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}\left(\frac{4\pi s_I}{u_I t_I}\right)^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t_I}{8\pi s_I}, \tag{53}$$

$$\mathrm{dPS}_I^{(r)} = \left(\frac{4\pi}{s_I}\right)^{\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{s_I}{16\pi^2} \mathrm{d}\mu_I, \tag{54}$$

$$\mathrm{d}\mu_I = \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \mathrm{d}r\, r^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z_a}{z_a} \left(\frac{z_a}{1-z_a}\right)^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\phi}{N_\phi} \sin^{-2\varepsilon}\phi + O(r^0), \tag{55}$$

$$N_\phi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin^{-2\varepsilon}\phi = 2\pi 4^{\varepsilon} \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}, \tag{56}$$

und kann nach Gleichung (52) in einen 2–Teilchen Phasenraum $\mathrm{dPS}_I^{(2)}$ und einen Restphasenraum $\mathrm{dPS}_I^{(r)}$ für die Integration des dritten Teilchens aufgespalten werden. Die Integration von ϕ ist trivial, die von z_a geht über den Bereich $[y_a, 1]$, da eine gewisse Mindestenergie in den harten Streuprozeß gehen muß und r wird von 0 bis zum y–Cut integriert. Die integrierten Matrixelemente haben die gleiche Cut–Abhängigkeit wie im Fall der Endzustände.

Nach der Integration liegt wie bei den Endzustandsrechnungen im Fall der Anfangszustände ein 2–Teilchen Endzustand vor. Man erhält, in Abhängigkeit von der Art der Anfangszustandssingularität, zwei Fälle:

- direktes Photon:

$$\mathrm{d}\sigma^D = \frac{1}{2s} \int_D \overline{|M|}^2 \mathrm{dPS}^{(3)} \tag{57}$$

$$= \frac{1}{2s_I} \int_{y_a}^1 \frac{\mathrm{d}z_a}{z_a} g(z_a) \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon} C_{3.i}^D\, D_i^a\, \mathrm{dPS}_I^{(2)}, \tag{58}$$

- aufgelöstes Photon:

$$\mathrm{d}\sigma^R = \frac{1}{2s} \int_R \overline{|M|}^2 \mathrm{dPS}^{(3)} \tag{59}$$

$$= \frac{1}{2s_I} \int_{y_a}^1 \frac{\mathrm{d}z_a}{z_a} g(z_a) \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon} C_{3.i}\, R_i^a\, \mathrm{dPS}_I^{(2)}. \tag{60}$$

Da bei den *direct*–Photon–Beiträgen D_i^a die Korrektur mit der Kopplungskonstanten α herausfaktorisiert, ist dort ein anderer Faktor $C_{3.i}^D$ nötig. Daher treten in den Prozessen mit *direct*–Photon zwei Vorfaktoren auf. D und R stehen für die Phasenraumbereiche, über die die Integrationen im Fall der Anfangszustände ausgeführt werden. Die D_i^a's bzw R_i^a's sind die (bis auf über z_a) ausintegrierten Matrixelemente für die jeweiligen Anfangszustände, die $C_{3.i}$ bzw. $C_{3.i}^D$ sind die Faktoren mit den Kopplungen, Mittelungen und Symmetriefaktoren. Die Größen befinden sich in den Abschnitten 4.3 - 4.5, die Definitionen in Anhang 7.9 und 7.10. Die Funktion $g(z_a)$ steht für die für die z_a–Integration unbekannten äußeren Funktionen, wie Partondichtefunktion $f_{i/\gamma}$ und Photonenfluß $f_{\gamma/e}$. Die NLO–Kopplung und der für $\varepsilon \to 0$ gegen 1 gehende und allen NLO–Korrekturen gemeinsame Vorfaktor ist explizit angegeben.

Den Fall, daß eine Anfangszustandssingularität mit dem einlaufenden Parton p_b auftritt, erhält man durch Vertauschung der Indizes a und b.

4.3 'Direct'–Photon

Hier ist der Prozeß für das *direct*–Photon angegeben ($T_{\gamma\gamma}^{(2\to3)}$ aus Bild 3). Es gibt in diesem Fall Endzustandssingularitäten F_1 und, da zwei Photonen einlaufen, nur Photon–Anfangszustandssingularitäten D_1. Es ist in allen Tabellen zusätzlich angegeben, welche Invariante die Singularität verursacht. Wegen des Umfangs der Formeln für die Größen F_i, D_i und später auch R_i sind sie in den Anhängen 7.8 - 7.10 aufgeführt. Das vollständige Matrixelement des $2 \to 3$–Prozesses für den *direct*–Photon–Fall findet sich z.B. in [28].

Prozeß 3.1: $\gamma(p_a) + \gamma(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}(p_2) + g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Beitrag:	
Endzustand F_1:	$p_{13}, p_{23} \to 0$	$2F_{\gamma\gamma}^{(q\to q)}(s,t,u)$	
γ_a–Anfangszustand D_1^a:	$p_{a1}, p_{a2} \to 0$	$-2D_{\gamma}^{(\gamma\to q)}(z_a;t,s,u)$	
γ_b–Anfangszustand D_1^b:	$p_{b1}, p_{b2} \to 0$	$-2D_{\gamma}^{(\gamma\to q)}(z_b;t,s,u)$	
$C_{3.1}$:	$\dfrac{e^4\mu^{4\varepsilon}}{4(1-\varepsilon)^2}$	$C_{3.1}^D$:	$\dfrac{e^2g^2\mu^{4\varepsilon}}{4(1-\varepsilon)^2}$

4.4 'Single–Resolved'–Photon

In diesem Abschnitt sind die Beiträge angegeben, die sich für den *single–resolved*–Fall ergeben. Neben den Endzuständsbeiträgen F_2 - F_5 gibt es hier sowohl Photon– als auch Parton–Anfangszustandssingularitäten, da es sowohl ein *direct*– als auch ein *resolved*–Photon gibt. Hierhin gehören die Grundprozesse $T_{\gamma;1}^{(2\to3)}$ bis $T_{\gamma;3}^{(2\to3)}$, wobei der letzte auch gekreuzt mit einlaufendem Quark benötigt wird, so daß es im *single–resolved*–Fall insgesamt vier Prozesse (3.2 - 3.5) gibt. Die vollständigen $2 \to 3$ Matrixelemente finden sich in [26].

Prozeß 3.2: $\gamma(p_a) + q(p_b) \to q(p_1) + g(p_2) + g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Beitrag:	
EZS F_2:	$p_{12}, p_{13} \to 0$	$-2F_{\gamma}^{(q\to q)}(u,t,s)$	
	$p_{23} \to 0$	$-F_{\gamma}^{(g\to g)}(u,t,s)$	
γ–AZS D_2^a:	$p_{a1} \to 0$	$D_c^{(\gamma\to q)}(z_a;s,t,u)$	
q–AZS R_2^b:	$p_{b2}, p_{b3} \to 0$	$-2R_{\gamma}^{(q\to q)}(z_b;u,t,s)$	
$C_{3.2}$:	$\dfrac{1}{2!}\dfrac{e^2g^2\mu^{4\varepsilon}}{4N_C(1-\varepsilon)}$	$C_{3.2}^D$:	$\dfrac{1}{2!}\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C(1-\varepsilon)}$

Prozeß 3.3: $\gamma(p_a) + q(p_b) \to q(p_1) + q'(p_2) + \bar{q}'(p_3)$		
Singularität:	Invariante:	Beitrag:
EZS F_3:	$p_{23} \to 0$	$-F_\gamma^{(g\to q)}(u,t,s)$
γ–AZS D_3^a:	$p_{a1} \to 0$	$D_a^{(\gamma\to q)}(z_a;t,s,u)$
	$p_{a2}, p_{a3} \to 0$	$2D_a^{(\gamma\to q)}(z_a;s,t,u)$
q–AZS R_3^b:	$p_{b1} \to 0$	$R_\gamma^{(q\to g)}(z_b;s,t,u)$

$C_{3.2}$:	$\frac{e^2 g^2 \mu^{4\varepsilon}}{4N_C(1-\varepsilon)}$	$C_{3.2}^D$:	$\frac{g^4 \mu^{4\varepsilon}}{4N_C(1-\varepsilon)}$

Prozeß 3.4: $\gamma(p_a) + q(p_b) \to q(p_1) + q(p_2) + \bar{q}(p_3)$		
Singularität:	Invariante:	Beitrag:
EZS F_4:	$p_{13}, p_{23} \to 0$	$-2F_\gamma^{(g\to q)}(u,t,s)$
γ–AZS D_4^a:	$p_{a1}, p_{a2} \to 0$	$2\Big[D_a^{(\gamma\to q)}(z_a;u,t,s)$ $+D_a^{(\gamma\to q)}(z_a;u,s,t)$ $+D_b^{(\gamma\to q)}(z_a;u,t,s)\Big]$
	$p_{a3} \to 0$	$\Big[D_a^{(\gamma\to q)}(z_a;s,t,u)$ $+D_a^{(\gamma\to q)}(z_a;s,u,t)$ $+D_b^{(\gamma\to q)}(z_a;s,t,u)\Big]$
q–AZS R_4^b:	$p_{b1}, p_{b2} \to 0$	$2R_\gamma^{(q\to g)}(z_b;s,t,u)$

$C_{3.2}$:	$\frac{1}{2!}\frac{e^2 g^2 \mu^{4\varepsilon}}{4N_C(1-\varepsilon)}$	$C_{3.2}^D$:	$\frac{1}{2!}\frac{g^4 \mu^{4\varepsilon}}{4N_C(1-\varepsilon)}$

Prozeß 3.5: $\gamma(p_a) + g(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}(p_2) + g(p_3)$		
Singularität:	Invariante:	Beitrag:
EZS F_5:	$p_{13}, p_{23} \to 0$	$F_\gamma^{(q\to q)}(s,t,u)$ $+F_\gamma^{(q\to q)}(s,u,t)$
γ–AZS D_5^a:	$p_{a1}, p_{a2} \to 0$	$-2D_c^{(\gamma\to q)}(z_a;t,s,u)$
g–AZS R_5^b:	$p_{b1}, p_{b2} \to 0$	$-2R_\gamma^{(g\to q)}(z_b;u,t,s)$
	$p_{b3} \to 0$	$R_\gamma^{(g\to g)}(z_b;s,t,u)$

$C_{3.2}$:	$\frac{e^2 g^2 \mu^{4\varepsilon}}{8N_C C_F (1-\varepsilon)^2}$	$C_{3.2}^D$:	$\frac{g^4 \mu^{4\varepsilon}}{8N_C C_F (1-\varepsilon)^2}$

4.5 'Double–Resolved'–Photon

In diesem Abschnitt befinden sich die Beiträge für das *double–resolved*–Photon. Es sind insgesamt zehn Beiträge (3.6 - 3.15), die sich aus den vier Grundprozessen $T_a^{(2\to3)}$ bis $T_d^{(2\to3)}$ der Abbildung 3 ergeben. Wie im $2 \to 2$ Fall tritt der Prozeß mit verschiedenen Quarkflavours $T_a^{(2\to3)}$ insgesamt dreimal auf. Der Prozeß mit gleichen Quarkflavours setzt sich, wie in den Tabellen angegeben, aus den Prozessen $T_a^{(2\to3)}$ und $T_b^{(2\to3)}$ zusammen und tritt dreimal auf. Den Prozeß $T_c^{(2\to3)}$ gibt es in drei Varianten: Mit einem, zwei oder drei Gluonen im Endzustand. Der Grundprozeß $T_d^{(2\to3)}$ mit fünf Gluonen ist völlig symmetrisch unter Vertauschung irgendwelcher Teilchen und tritt somit nur einmal auf.

Da die Rechnungen für den *double–resolved*–Fall noch an keiner anderen Stelle veröffentlicht sind, sind in den Tabellen neben den ausintegrierten Matrixelementen auch die Integranden angegeben, die sich aus den Matrixelementen unter den Näherungen (29) für den Endzustand bzw. (46) für den Anfangszustand zusammen mit der Partialbruchzerlegung und unter Vernachlässigung solcher Terme ergeben, die nach der Integration einen Beitrag $O(y)$ liefern. Die Formeln dafür stehen in Anhang 7.3 und 7.4.

Prozeß 3.6: $q(p_a)+q'(p_b)\to q(p_1)+q'(p_2)+g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_6:	$p_{13},p_{23}\to 0$	$2M_{F_a}^{(q\to q)}(s,t,u)$	$2F_a^{(q\to q)}(s,t,u)$
q_a–AZS R_6^a:	$p_{a3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$	$R_a^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$
	$p_{a1}\to 0$	$-M_{I_c}^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$	$-R_c^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$
q'_b–AZS R_6^b:	$p_{b3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$	$R_a^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$
	$p_{b2}\to 0$	$-M_{I_c}^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$	$-R_c^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$
$C_{3.6}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$		

Prozeß 3.7: $q(p_a)+\bar{q}'(p_b)\to q(p_1)+\bar{q}'(p_2)+g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_7:	$p_{13},p_{23}\to 0$	$2M_{F_a}^{(q\to q)}(u,t,s)$	$2F_a^{(q\to q)}(u,t,s)$
q_a–AZS R_7^a:	$p_{a3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_a;u,t,s)$	$R_a^{(q\to q)}(z_a;u,t,s)$
	$p_{a1}\to 0$	$-M_{I_c}^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$	$-R_c^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$
$\bar{q}'_b$–AZS R_7^b:	$p_{b3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_b;u,t,s)$	$R_a^{(q\to q)}(z_b;u,t,s)$
	$p_{b2}\to 0$	$-M_{I_c}^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$	$-R_c^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$
$C_{3.7}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$		

Prozeß 3.8: $q(p_a)+q(p_b)\to q(p_1)+q(p_2)+g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_8:	$p_{13},p_{23}\to 0$	$2\Big[M_{F_a}^{(q\to q)}(s,t,u)$ $+M_{F_a}^{(q\to q)}(s,u,t)$ $+M_{F_b}^{(q\to q)}(s,t,u)\Big]$	$2\Big[F_a^{(q\to q)}(s,t,u)$ $+F_a^{(q\to q)}(s,u,t)$ $+F_b^{(q\to q)}(s,t,u)\Big]$
q_a–AZS R_8^a:	$p_{a3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$ $+M_{I_a}^{(q\to q)}(z_a;s,u,t)$ $+M_{I_b}^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$	$R_a^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$ $+R_a^{(q\to q)}(z_a;s,u,t)$ $+R_b^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$
	$p_{a1},p_{a2}\to 0$	$-2M_{I_c}^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$	$-2R_c^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$
q_b–AZS R_8^b:	$p_{b3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$ $+M_{I_a}^{(q\to q)}(z_b;t,s,u)$ $+M_{I_b}^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$	$R_a^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$ $+R_a^{(q\to q)}(z_b;s,u,t)$ $+R_b^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$
	$p_{b1},p_{b2}\to 0$	$-2M_{I_c}^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$	$-2R_c^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$
$C_{3.8}$:	$\dfrac{1}{2!}\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$		

Prozeß 3.9: $q(p_a)+\bar{q}(p_b)\to q'(p_1)+\bar{q}'(p_2)+g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_9:	$p_{13},p_{23}\to 0$	$2M_{F_a}^{(q\to q)}(u,s,t)$	$2F_a^{(q\to q)}(u,s,t)$
	$p_{12}\to 0$	$M_{F_c}^{(g\to q)}(s,t,u)$	$F_c^{(g\to q)}(s,t,u)$
q_a–AZS R_9^a:	$p_{a3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_a;u,s,t)$	$R_a^{(q\to q)}(z_a;u,s,t)$
$\bar{q}_b$–AZS R_9^b:	$p_{b3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_b;u,s,t)$	$R_a^{(q\to q)}(z_b;u,s,t)$
$C_{3.9}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}(N_f-1)}{4N_C^2}$		

Prozeß 3.10: $q(p_a)+\bar{q}(p_b)\to q(p_1)+\bar{q}(p_2)+g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_{10}:	$p_{13},p_{23}\to 0$	$2\Big[M_{F_a}^{(q\to q)}(u,t,s)$ $+M_{F_a}^{(q\to q)}(u,s,t)$ $+M_{F_b}^{(q\to q)}(u,t,s)\Big]$	$2\Big[(F_a^{(q\to q)}(u,t,s)$ $+F_a^{(q\to q)}(u,s,t)$ $+F_b^{(q\to q)}(u,t,s)\Big]$
	$p_{12}\to 0$	$M_{F_c}^{(g\to q)}(s,t,u)$	$F_c^{(g\to q)}(s,t,u)$
q_a–AZS R_{10}^a:	$p_{a3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_a;u,t,s)$ $+M_{I_a}^{(q\to q)}(z_a;u,s,t)$ $+M_{I_b}^{(q\to q)}(z_a;u,t,s)$	$R_a^{(q\to q)}(z_a;u,t,s)$ $+R_a^{(q\to q)}(z_a;u,s,t)$ $+R_b^{(q\to q)}(z_a;u,t,s)$
	$p_{a1}\to 0$	$-M_{I_c}^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$	$-R_c^{(q\to g)}(z_a;t,s,u)$
$\bar{q}_b$–AZS R_{10}^b:	$p_{b3}\to 0$	$M_{I_a}^{(q\to q)}(z_b;u,t,s)$ $+M_{I_a}^{(q\to q)}(z_b;u,s,t)$ $+M_{I_b}^{(q\to q)}(z_b;u,t,s)$	$R_a^{(q\to q)}(z_b;u,t,s)$ $+R_a^{(q\to q)}(z_b;u,s,t)$ $+R_b^{(q\to q)}(z_b;u,t,s)$
	$p_{b2}\to 0$	$-M_{I_c}^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$	$-R_c^{(q\to g)}(z_b;t,s,u)$
$C_{3.10}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$		

Prozeß 3.11: $q(p_a)+g(p_b)\to q(p_1)+q'(p_2)+\bar{q}'(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_{11}:	$p_{23}\to 0$	$-M_{F_c}^{(g\to q)}(t,s,u)$	$-F_c^{(g\to q)}(t,s,u)$
q_a–AZS R_{11}^a:	$p_{a1}\to 0$	$M_{I_c}^{(q\to g)}(z_a;s,t,u)$	$R_c^{(q\to g)}(z_a;s,t,u)$
g_b–AZS R_{11}^b:	$p_{b1}\to 0$	$M_{I_a}^{(g\to q)}(z_b;t,s,u)$	$R_a^{(g\to q)}(z_b;t,s,u)$
	$p_{b2},p_{b3}\to 0$	$2M_{I_a}^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$	$2R_a^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$
$C_{3.11}$:	$\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}(N_f-1)}{8N_C^2C_F(1-\varepsilon)}$		

Prozeß 3.12: $q(p_a) + g(p_b) \to q(p_1) + q(p_2) + \bar{q}(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_{12}:	$p_{13}, p_{23} \to 0$	$-2M_{F_c}^{(g\to q)}(t,s,u)$	$-2F_c^{(g\to q)}(t,s,u)$
q_a–AZS R_{12}^a:	$p_{a1}, p_{a2} \to 0$	$2M_{I_c}^{(q\to g)}(z_a;s,t,u)$	$2R_c^{(q\to g)}(z_a;s,t,u)$
g_b–AZS R_{12}^b:	$p_{b1}, p_{b2} \to 0$	$2\Big[M_{I_a}^{(g\to q)}(z_b;u,t,s)$ $+M_{I_a}^{(g\to q)}(z_b;u,s,t)$ $+M_{I_b}^{(g\to q)}(z_b;u,t,s)\Big]$	$2\Big[R_a^{(g\to q)}(z_b;u,t,s)$ $+R_a^{(g\to q)}(z_b;u,t,s)$ $+R_b^{(g\to q)}(z_b;u,t,s)\Big]$
	$p_{b3} \to 0$	$M_{I_a}^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$ $+M_{I_a}^{(g\to q)}(z_b;s,u,t)$ $M_{I_a}^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$	$R_a^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$ $+R_a^{(g\to q)}(z_b;s,u,t)$ $R_a^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$
$C_{3.12}$:	$\dfrac{1}{2!}\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{8N_C^2C_F(1-\varepsilon)}$		

Prozeß 3.13: $q(p_a) + \bar{q}(p_b) \to g(p_1) + g(p_2) + g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_{13}:	$p_{13}, p_{23}, p_{12} \to 0$	$3M_{F_c}^{(g\to g)}(s,t,u)$	$3F_c^{(g\to g)}(s,t,u)$
q_a–AZS R_{13}^a:	$p_{a1}, p_{a2}, p_{a3} \to 0$	$3M_{I_c}^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$	$3R_c^{(q\to q)}(z_a;s,t,u)$
$\bar{q}_b$–AZS R_{13}^b:	$p_{b1}, p_{b2}, p_{b3} \to 0$	$3M_{I_c}^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$	$3R_c^{(q\to q)}(z_b;s,t,u)$
$C_{3.13}$:	$\dfrac{1}{3!}\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{4N_C^2}$		

Prozeß 3.14: $q(p_a) + g(p_b) \to q(p_1) + g(p_2) + g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_{14}:	$p_{12}, p_{13} \to 0$	$-2M_{F_c}^{(q\to q)}(t,s,u)$	$-2F_c^{(q\to q)}(t,s,u)$
	$p_{23} \to 0$	$-M_{F_c}^{(g\to g)}(t,s,u)$	$-F_c^{(g\to g)}(t,s,u)$
q_a–AZS R_{14}^a:	$p_{a2}, p_{a3} \to 0$	$-2M_{I_c}^{(q\to q)}(z_a;t,s,u)$	$-2R_c^{(q\to q)}(z_a;t,s,u)$
	$p_{a1} \to 0$	$M_{I_d}^{(q\to g)}(z_a;s,t,u)$	$R_d^{(q\to g)}(z_a;s,t,u)$
g_b–AZS R_{14}^b:	$p_{b2}, p_{b3} \to 0$	$-2M_{I_c}^{(g\to g)}(z_b;t,s,u)$	$-2R_c^{(g\to g)}(z_b;t,s,u)$
	$p_{b1} \to 0$	$M_{I_c}^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$	$R_c^{(g\to q)}(z_b;s,t,u)$
$C_{3.14}$:	$\frac{1}{2!}\frac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{8N_C^2C_F(1-\varepsilon)}$		

Prozeß 3.15: $g(p_a) + g(p_b) \to q(p_1) + \bar{q}(p_2) + g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_{15}:	$p_{13}, p_{23} \to 0$	$2M_{F_c}^{(q\to q)}(s,t,u)$	$2F_c^{(q\to q)}(s,t,u)$
	$p_{12} \to 0$	$M_{F_d}^{(g\to q)}(s,t,u)$	$F_d^{(g\to q)}(s,t,u)$
g_a–AZS R_{15}^a:	$p_{a1}, p_{a2} \to 0$	$-2M_{I_c}^{(g\to q)}(z_a;t,s,u)$	$-2R_c^{(g\to q)}(z_a;t,s,u)$
	$p_{a3} \to 0$	$M_{I_c}^{(g\to g)}(z_a;s,t,u)$	$R_c^{(g\to g)}(z_a;s,t,u)$
g_b–AZS R_{15}^b:	$p_{b1}, p_{b2} \to 0$	$-2M_{I_c}^{(g\to q)}(z_b;t,s,u)$	$-R_c^{(g\to q)}(z_b;t,s,u)$
	$p_{b3} \to 0$	$M_{I_c}^{(g\to g)}(z_b;s,t,u)$	$R_c^{(g\to g)}(z_b;s,t,u)$
$C_{3.15}$	$\frac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{16N_C^2C_F^2(1-\varepsilon)^2}$		

Prozeß 3.16: $g(p_a) + g(p_b) \to g(p_1) + g(p_2) + g(p_3)$			
Singularität:	Invariante:	Integrand:	Beitrag:
EZS F_{16}:	$p_{13}, p_{23}, p_{12} \to 0$	$3M_{F_d}^{(g\to g)}(s,t,u)$	$3F_d^{(g\to g)}(s,t,u)$
g_a–AZS R_{16}^a:	$p_{a1}, p_{a2}, p_{a3} \to 0$	$3M_{I_d}^{(g\to g)}(z_a;s,t,u)$	$3R_d^{(g\to g)}(z_a;s,t,u)$
g_b–AZS R_{16}^b:	$p_{b1}, p_{b2}, p_{b3} \to 0$	$3M_{I_d}^{(g\to g)}(z_b;s,t,u)$	$3R_d^{(g\to g)}(z_b;s,t,u)$
$C_{3.16}$:	$\dfrac{1}{3!}\dfrac{g^4\mu^{4\varepsilon}}{16N_C^2C_F^2(1-\varepsilon)^2}$		

4.6 Faktoren aus den Partondichten

In diesem Abschnitt sind für jeden der 15 $2 \to 3$ Prozesse aus den Abschnitten (4.3) bis (4.5) die für die Prozesse mit aufgelöstem Photon nötigen Summen über die Partondichten und die für die Prozesse mit direktem Photon nötigen Summen über die normierten Quarkladungen Q_i aufgeführt. Q_i ist die Ladung des i–ten Quarks normiert auf die Ladung des Positrons. Es wird zwischen Quarks und Antiquarks unterschieden. In dem Prozeß 3.3 kann das einlaufende Photon an zwei verschiedene Quarkflavours koppeln, so daß die Quarkladungssumme entweder über ${Q'_j}^2$ oder über ${Q_j}^2$ geht.

Prozeß:		Partondichte/Ladungssumme:
3.1	$\gamma\gamma \to q_i\bar{q}_i g$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} Q_i^4$
3.2	$\gamma q_i \to q_i g g$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left(f_{q_i/\gamma}(yb) + f_{\bar{q}_i/\gamma}(yb)\right)$
3.3	$\gamma q_i \to q_i q'_j \bar{q}'_j$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} \left(f_{q_i/\gamma}(yb) + f_{\bar{q}_i/\gamma}(yb)\right) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_f} \left({Q'_j}^2, {Q_j}^2\right)$
3.4	$\gamma q_i \to q_i q_i \bar{q}_i$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \left(f_{q_i/\gamma}(yb) + f_{\bar{q}_i/\gamma}(yb)\right)$
3.5	$\gamma g \to q_i\bar{q}_i g$	$f_{g/\gamma}(yb) \displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2$
3.6	$q_i q'_j \to q_i q'_j g$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_f} \left(f_{q_i/\gamma}(y_a) f_{q'_j/\gamma}(y_b) + f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a) f_{\bar{q}'_j/\gamma}(y_b)\right)$

Prozeß:		Partondichte/Ladungssumme:
3.7	$q_i\bar{q}'_j \to q_i\bar{q}_j g$	$\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{\bar{q}'_j/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{q'_j/\gamma}(y_b)\right)$
3.8	$q_i q_i \to q_i q_i g$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{q_i/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_b)\right)$
3.9	$q_i\bar{q}_i \to q'_j\bar{q}'_j g$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{q_i/\gamma}(y_b)\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_f}$
3.10	$q_i\bar{q}_i \to q_i\bar{q}_i g$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{q_i/\gamma}(y_b)\right)$
3.11	$q_i g \to q_i q'_j\bar{q}'_j$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{q_i/\gamma}(y_b)\right)$
3.12	$q_i g \to q_i q_i\bar{q}_i$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{g/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{g/\gamma}(y_b)\right)$
3.13	$q_i\bar{q}_i \to ggg$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{q_i/\gamma}(y_b)\right)$
3.14	$q_i g \to q_i gg$	$\sum_{i=1}^{N_f}\left(f_{q_i/\gamma}(y_a)f_{g/\gamma}(y_b)+f_{\bar{q}_i/\gamma}(y_a)f_{g/\gamma}(y_b)\right)$
3.15	$gg \to q_i\bar{q}_i g$	$f_{g/\gamma}(y_a)f_{g/\gamma}(y_b)\sum_{i=1}^{N_f}$
3.16	$gg \to ggg$	$f_{g/\gamma}(y_a)f_{g/\gamma}(y_b)$

4.7 Der endliche Wirkungsquerschnitt in NLO

In den letzten Abschnitten wurden die reellen NLO–Korrekturen zu den $2 \to 2$ Prozessen aus Abschnitt 2 angegeben und über die singulären Phasenraumbereiche integriert. Die Integration erfolgte dabei über den Phasenraum des dritten Teilchens, wodurch aus diesen Beiträgen faktisch $2 \to 2$ Prozesse wurden. Die Integrationen wurden in dimensionaler Regularisierung durchgeführt, so daß die Singularitäten als Pole in $1/\varepsilon$ und $1/\varepsilon^2$ erscheinen. Werden die Pole aus den Anfangs– und Endzuständen und jene aus den virtuellen Korrekturen addiert, so heben sie sich weg bis auf Beiträge aus den Anfangszuständen, die proportional den zu Altarelli–Parisi–Splitting–Funktionen (siehe Anhang 7.2) sind. Diese Beiträge haben einfache Pole $\propto 1/\varepsilon$ und sind in den Anfangszustandsbeiträgen (Anhang 7.9 und 7.10) explizit angegeben. Sie enthalten alle einen gemeinsamen Faktor. Dieser lautet

- für das *direct*–Photon:

$$\int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}\frac{\alpha}{2\pi}\left\{-\frac{1}{\varepsilon}P_{a\leftarrow\gamma}(z)\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon}\right\}, \tag{61}$$

- und für das *resolved*–Photon:

$$\int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\left\{-\frac{1}{\varepsilon}P_{a\leftarrow b}(z)\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{\varepsilon}\right\}. \tag{62}$$

Die Indizes a und b durchlaufen alle möglichen Partonen, also Quarks, Antiquarks und Gluonen. Es ist zu beachten, daß es keinen direkten Beitrag ($g \leftarrow \gamma$) gibt, also $P_{g\leftarrow\gamma} = 0$. Die Faktoren finden sich in der Entwicklungsgleichung der Partondichtefunktionen des Photons wieder. Neben dem homogenen Term (62) gibt es beim Photon anders als z.B. beim Proton einen inhomogenen Term (61). Diese singulären Terme werden in die Partondichtefunktionen des Photons absorbiert [23]. Dazu führen wir neben der (unrenormierten) Partondichtefunktion $f_{b/\gamma}(x)$ für das *resolved*–Photon eine Partondichte für das *direct*–Photon ein:

$$f_{\gamma/\gamma}(x) = \delta(1-x). \tag{63}$$

Die renormierte Partondichte eines Partons a im Photon ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} f_{a\leftarrow\gamma}^{\mathrm{Ren}}(y,M^2) &= \sum_b \int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}\left[\delta_{ab}\delta(1-z)+\frac{\alpha_s}{2\pi}R_{a\leftarrow b}(z,M^2)\right] f_{b/\gamma}\left(\frac{y}{z}\right) \\ &\quad + \int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}\left[\delta_{a\gamma}\delta(1-z)+\frac{\alpha}{2\pi}R_{a\leftarrow\gamma}(z,M^2)\right] f_{\gamma/\gamma}\left(\frac{y}{z}\right), \end{aligned} \tag{64}$$

mit

$$R_{a\leftarrow b}(z,M^2) = \frac{1}{\varepsilon}P_{a\leftarrow b}(z)\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\varepsilon} + C_{a\leftarrow b}(z), \tag{65}$$

$$R_{a\leftarrow\gamma}(z,M^2) = \frac{1}{\varepsilon}P_{a\leftarrow\gamma}(z)\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\varepsilon} + C_{a\leftarrow\gamma}(z). \tag{66}$$

Die Faktoren C hängen vom Renormierungsschema ab. Im $\overline{\mathrm{MS}}$ Schema gilt $C = 0$. Die renormierten partonischen Wirkungsquerschnitte ergeben sich für die einzelnen Beiträge folgendermaßen:

- *direct*–Photon:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{Ren}}(\gamma\gamma\to\mathrm{Jet(s)}) &= \mathrm{d}\sigma(\gamma\gamma\to\mathrm{Jet(s)}) \\ &\quad -\sum_i \int_{y_a}^1 \mathrm{d}z_a R_{i\leftarrow\gamma}(z_a,M_a^2)\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}(i\gamma\to\mathrm{Jet(s)}) \\ &\quad -\sum_i \int_{y_b}^1 \mathrm{d}z_b R_{i\leftarrow\gamma}(z_b,M_b^2)\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}(\gamma i\to\mathrm{Jet(s)}), \end{aligned} \tag{67}$$

- *single–resolved*–Photon (nur γ_a):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{Ren}}(i\gamma\to\mathrm{Jet(s)}) &= \mathrm{d}\sigma(i\gamma\to\mathrm{Jet(s)}) \\ &\quad -\sum_j \int_{y_a}^1 \mathrm{d}z_a R_{j\leftarrow i}(z_a,M_a^2)\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}(j\gamma\to\mathrm{Jet(s)}) \\ &\quad -\sum_j \int_{y_b}^1 \mathrm{d}z_b R_{j\leftarrow\gamma}(z_b,M_b^2)\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}(ij\to\mathrm{Jet(s)}), \end{aligned} \tag{68}$$

- *single–resolved*–Photon (nur γ_b):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{Ren}}\left(\gamma i \to \mathrm{Jet(s)}\right) &= \mathrm{d}\sigma\left(\gamma i \to \mathrm{Jet(s)}\right) \\ &\quad - \sum_j \int_{y_a}^1 \mathrm{d}z_a R_{j\leftarrow\gamma}(z_a, M_a^2) \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}\left(ji \to \mathrm{Jet(s)}\right) \\ &\quad - \sum_j \int_{y_b}^1 \mathrm{d}z_b R_{j\leftarrow i}(z_b, M_b^2) \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}\left(\gamma j \to \mathrm{Jet(s)}\right), \end{aligned} \tag{69}$$

- *double–resolved*–Photon:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{Ren}}\left(ij \to \mathrm{Jet(s)}\right) &= \mathrm{d}\sigma\left(ij \to \mathrm{Jet(s)}\right) \\ &\quad - \sum_k \int_{y_a}^1 \mathrm{d}z_a R_{k\leftarrow i}(z_a, M_a^2) \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}\left(kj \to \mathrm{Jet(s)}\right) \\ &\quad - \sum_k \int_{y_b}^1 \mathrm{d}z_b R_{k\leftarrow j}(z_b, M_b^2) \mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}\left(ik \to \mathrm{Jet(s)}\right). \end{aligned} \tag{70}$$

$\mathrm{d}\sigma$ ist der NLO–Wirkungsquerschnitt vor der Subtraktion der Singularitäten, $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{LO}}$ der LO–Wirkungsquerschnitt, wie er in Abschnitt 3 zu finden ist und $\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{Ren}}$ ist der renormierte und nach der Subtraktion endliche Wirkungsquerschnitt in NLO. Der Index i durchläuft die möglichen Partonen im Photon, also Quarks, Antiquarks und Gluonen.

Der Faktor $(4\pi\mu^2/Q^2)^\varepsilon$ aus den Gleichungen (61) und (62) wird mit dem Faktor $(4\pi\mu^2/M^2)^\varepsilon$ aus den Gleichungen (65) und (66) kombiniert und führt auf endliche, von der Faktorisierungsskala M abhängige Terme:

- Bei den Photon–Anfangszustandsbeiträgen:

$$-\frac{1}{\varepsilon} P_{a\leftarrow\gamma}(z) \left[\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon - \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\varepsilon \right] = -P_{a\leftarrow\gamma}(z) \ln\left(\frac{M^2}{Q^2} \right) + O(\varepsilon). \tag{71}$$

- Bei den Parton–Anfangszustandsbeiträgen:

$$-\frac{1}{\varepsilon} P_{a\leftarrow b}(z) \left[\left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon - \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\varepsilon \right] = -P_{a\leftarrow b}(z) \ln\left(\frac{M^2}{Q^2} \right) + O(\varepsilon). \tag{72}$$

Damit ist die exakte Trennung von *direct*– und *resolved*–Photon, wie sie in LO vorhanden war, aufgehoben, denn durch Variation der Faktorisierungsskala M in den Photon–Anfangszustandsbeiträgen und gleichzeitig in den Partondichtefunktionen des Photons können Beiträge vom *direct*– zum *resolved*–Photon und umgekehrt verschoben werden. Wenn in dieser Arbeit trotzdem in Zukunft von *direct*– und *resolved*–Photon die Rede ist, so ist immer der Fall gemeint, daß alle Faktorisierungsskalen auf den Wert p_T gesetzt sind.

Nachdem der Wirkungsquerschnitt in NLO endlich ist, können inklusive 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitte berechnet werden, was Gegenstand des nächsten Abschnitts sein wird.

5 Numerische Auswertung

Nachdem in den Abschnitten 3 und 4 die Integration der Matrixelemente über jene Bereiche im Phasenraum, in denen sie singulär werden, ausgeführt wurde, sind die Matrixelemente im Rest des Phasenraums endlich und können dort numerisch integriert werden. Dadurch erspart man sich die analytische Integration der vollständigen (nicht genäherten) Matrixelemente. Es ist darüber hinaus sehr einfach möglich, experimentelle Cuts in die numerische Integration einzubauen. Dieses ermöglicht äußerst flexible Anwendungen auch für andere Observable als die hier betrachteten.

Obwohl in der numerischen Integration die vollständigen Matrixelemente integriert werden, müssen sie nach Formel (35) partialbruchzerlegt werden, um die "Streifen" (II+III, Bild 6) im Phasenraum zu integrieren, die zwar für $y \to 0$ nicht singulär und damit nicht analytisch integriert werden, aber dennoch einen vom y–Cut unabhängigen endlichen Beitrag liefern. Daher mußten für diese Rechnung die Matrixelemente größtenteils neu berechnet werden. Die Berechnung verläuft im Prinzip wie im analytischen Fall, jedoch können hier keine Näherungen angebracht werden. Die Rechnungen werden handlicher, da sie in $d = 4$ Dimensionen durchgeführt wurden.

Weiterhin kommt bei allen Beiträgen mit aufgelöstem Photon noch die numerische Integration über die Partonverteilungen im Photon hinzu, so daß sich eine 0– bis 8–dimensionale numerische Integration ergeben kann, die mit Hilfe der Intgrationsroutine VEGAS [30] durchgeführt wurde.

5.1 Snowmass Jet–Definition

Gibt es drei Teilchen im Endzustand, so ist es möglich, daß zwei Teilchen zu einem Jet rekombinieren. Die Rekombination hängt vom verwendeten Jet–Algorithmus ab. Im Grenzfall fast kollinearer Teilchen reduziert sich die Rekombination auf eine einfache Viererimpulsaddition. Daher konnten die analytischen Rechnungen für die Endzustandsbeiträge (Abschnitt 4.1) durchgeführt werden, ohne näher auf die Jet–Definition einzugehen.

In dieser Arbeit wird die Snowmass Jet–Definition [31] in Übereinstimmung mit den experimentellen Analysen von TRISTAN, AMY und OPAL verwendet. Es ist jedoch durch Umparametrisierung der $2 \to 3$ Phasenräume in den numerischen Rechnungen möglich, andere Jet–Algorithmen zu implementieren.

Gemäß der Snowmass Jet–Definition werden zwei Partonen p_1 und p_2 zu einem Jet p_J rekombiniert, wenn beide Partonen von diesem rekombinierten Jet um weniger als ein Jet–Radius R in der η–ϕ–Ebene abweichen[2]:

$$\sqrt{(\eta_J - \eta_i)^2 + (\phi_J - \phi_i)^2} < R \qquad i = 1, 2. \tag{73}$$

Ist die Bedingung (73) erfüllt, so werden die zwei Partonen p_1 und p_2 zu einem Jet p_J rekombiniert, mit:

$$p_{TJ} = p_{T1} + p_{T2}, \tag{74}$$

$$\eta_J = \frac{p_{T1}\eta_1 + p_{T2}\eta_2}{p_{TJ}}, \tag{75}$$

$$\phi_J = \frac{p_{T1}\phi_1 + p_{T2}\phi_2}{p_{TJ}}. \tag{76}$$

Aus dieser Definition geht hervor, daß bei kollinearen Teilchen p_1 und $p_2 = \lambda p_1$ gilt:

$$p_J = p_1 + p_2. \tag{77}$$

[2] Man beachte die Periodizität des Azimutwinkels ϕ!

5.2 Zur numerischen Integration

Dadurch, daß im 3–Teilchen Phasenraum Rekombinationen möglich sind, ergeben sich für die numerische Rechnung zwei bzw. drei unterschiedliche Integrationsbereiche. Zum ersten gibt es den 3–Jet–Phasenraum, in dem kein Paar der drei auslaufenden Teilchen die Bedingung (73) erfüllt. Hier zählt jedes Parton als ein Jet und der Jet–Phasenraum stimmt mit dem Phasenraum des Teilchens überein. Zum zweiten gibt es den Fall, daß zwei Partonen die Bedingung (73) erfüllen und nach (74) bis (76) zu einem Jet zusammengefaßt werden. Hier sind Jet– und Parton–Phasenraum unterschiedlich, dementsprechend muß auch der Phasenraum anders parametrisiert werden. Zum dritten ist es bei 2–Jet–Rechnungen noch möglich, daß zwei Partonen zum zweiten Jet rekombinieren. Hier gilt dann ähnliches wie im ersten Jet.

Der 3–Jet–Phasenraum ist größer und schwieriger zu parametrisieren als der Bereich des rekombinierten Jets im Jet–Kegel. Die Integration dort erfordert daher die höchste Statistik und die längste Rechenzeit bei der numerischen Integration. Auch der zweite Jet–Kegel im 2–Jet–Fall ist schwierig zu parametrisieren, da der Transversalimpuls p_{T_2} nicht festgelegt ist und nur ungefähr $p_{T_2} \simeq p_{T_1}$ gilt. Daher erfordert die Integration dort eine im Vergleich zum ersten Jet–Kegel relativ hohe Statistik und damit lange Rechenzeit.

5.3 Tests und allgemeine Betrachtungen

Um das numerische Programm zu testen, wurde zuerst die y–Cut Abhängigkeit überprüft. Der y–Cut ist die obere Grenze bei der analytischen Integration einer Invarianten normiert auf die Schwerpunktsenergie. Wie in den Abschnitten über die analytische und numerische Phasenraumintegration erwähnt, muß die Abhängigkeit von diesem technischen y–Cut in allen physikalischen Ergebnissen verschwinden. Dieses gilt für jeden $2 \to 3$–Prozeß und wurde einzeln überprüft. Als Beispiel ist die y–Cut Abhängigkeit des gesamten *double–resolved*–Prozesses in Bild 7 gezeigt.

Auf der Abbildung ist der numerisch integrierte 3–Teilchen Beitrag und der analytisch integrierte 2–Teilchen Beitrag dargestellt, der aus den Anteilen der Anfangs– und Endzustände besteht, sowie aus Born– und virtuellen Prozessen, die jedoch keine y–Cut Abhängigkeit besitzen. Es ist sehr gut zu erkennen, daß der 3–Teilchen Beitrag mit kleiner werdendem y–Cut ansteigt, da die numerische Integration immer weiter in die bei $y = 0$ lokalisierten Singularitäten hinein läuft. Diese Abhängigkeit wird gerade kompensiert durch die analytisch integrierten Beiträge, die das typische $\ln(y)$ und $\ln^2(y)$ Verhalten aufweisen, welches von der Integration in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen mit y als oberer Integrationsgrenze herrührt.

Auf dem Plot ist zu erkennen, daß die Unabhängigkeit der Summe für einen Bereich $10^{-4} < y < 10^{-2}$ gegeben ist. Für größere Werte von y sind die analytischen Rechnungen aufgrund der Näherungen nicht mehr gültig. Für Werte von $y < 10^{-4}$ benötigt die numerische Integration eine zu hohe Statistik und damit unvertretbar viel Rechenzeit, um Ergebnisse mit akzeptabel kleinen Fehlern zu produzieren. Dieses resultiert in zu kleinen 3–Teilchen Beiträgen, was in der Summe ein leichtes Abfallen des Wirkungsquerschnitts bedeutet, wie es auf der Abbildung 7 zu erkennen ist. In allen Rechnungen wird daher ein Wert für den y–Cut von 10^{-3} gewählt.

Sowohl in dieser als auch in den nachfolgenden Abbildungen wurde bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 90\,GeV$ gerechnet, was einer Kinematik von LEP1 entspricht. Als Photonenspektrum wurde die Funktion

$$F_{\gamma/e}(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1+(1-\xi)^2}{\xi}\ln\frac{E^2\Theta_c^2(1-\xi)^2+m_e^2\xi}{m_e^2\xi^2} + 2(1-\xi)\left[\frac{m_e^2\xi}{E^2\Theta_c^2(1-\xi)^2+m_e^2\xi^2}-\frac{1}{\xi}\right]\right\} \tag{78}$$

verwendet [32] mit $\theta_{\max} = 3°$. Für die für die *resolved*–Prozesse nötigen Partonverteilungen im Photon wurden die NLO–Parametrisierungen von Glück, Reya & Vogt verwendet [7]. Diese sind allerdings

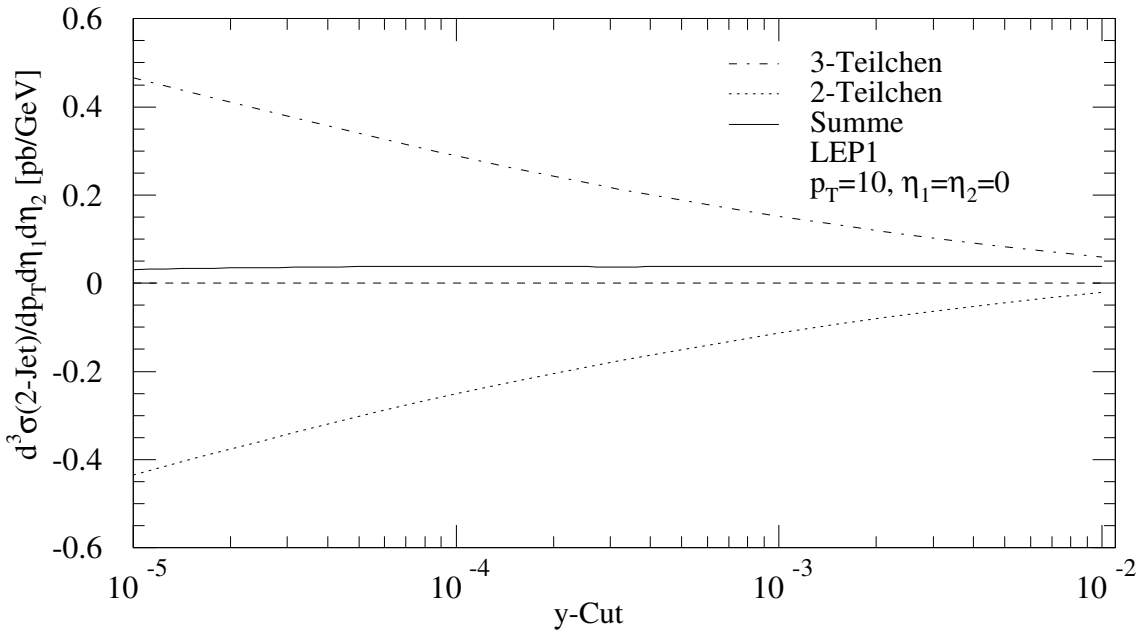

Abbildung 7: Die Abhängigkeit des inklusiven 2–Jet–Wirkungsquerschnitts vom y–Cut, der Grenze zwischen analytischer (2–Teilchen) und numerischer (3-Teilchen) Integration. Es handelt sich hierbei nur um den *double–resolved*–Beitrag.

im sogenannten DIS_γ–Schema angegeben. Die Transformation ins $\overline{\text{MS}}$–Schema ist bekannt und auch in [7] angegeben. Die Skalen sind, soweit sie nicht variiert werden, alle auf p_T gesetzt: $\mu = M_a = M_b = p_T$. Die Rechnungen wurden durchgeführt mit $N_f = 5$ Flavours und daran angepaßtem $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.1303\,GeV$, was einem $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.200\,GeV$ bei $N_f = 4$ Flavours entspricht.

Als weiterer Test wurden die Ergebnisse für den *double–resolved*–1–Jet–Fall mit jenen verglichen, die mit Hilfe des Programms JETsam [11, 33] gewonnen wurden. JETsam war ursprünglich für die Photoproduktion mit aufgelöstem Photon bei HERA geschrieben worden, wurde dann aber noch für den *double–resolved*–Fall in Photon–Photon–Kollisionen erweitert. Die Übereinstimmung konnte für alle *double–resolved*–Prozesse ($qq', q\bar{q}', qq, q\bar{q}, gg, gg \to 1$ Jet) getestet werden und war sehr gut. Diese Tatsache ist um so erfreulicher, da in früheren Veröffentlichungen [21, 22] die *double–resolved*–1–Jet–Prozesse mit Hilfe des Programms JETsam berechnet wurden und dieses Programm eine völlig andere Methode zur Berechnung der NLO–Korrekturen verwendet.

In den Abbildungen 8 und 9 sind für eine LEP1–Kinematik LO– und NLO–Beiträge im Vergleich aufgetragen, sowohl für ein p_T– als auch für ein η–Spektrum. Es sind *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Beiträge und die Summe angegeben. Zusätzlich sind in beiden Fällen die k–Faktoren in einem Extra–Plot angegeben. Im p_T–Spektrum ist gut zu erkennen, daß der NLO–Beitrag des *direct*–Photons kleiner ist als der LO–Beitrag, damit ist die Korrektur negativ im Gegensatz zu den *resolved*–Beiträgen, wo die NLO–Korrektur in beiden Fällen positiv ist. Die Korrektur im *double–resolved*–Fall beträgt fast 100%, wie aus dem k–Faktor zu entnehmen ist. Dieses ist darauf zurückzuführen, daß für die Vergleiche auch die LO–Rechnungen mit NLO–α_s und NLO–Partonverteilungen im Photon

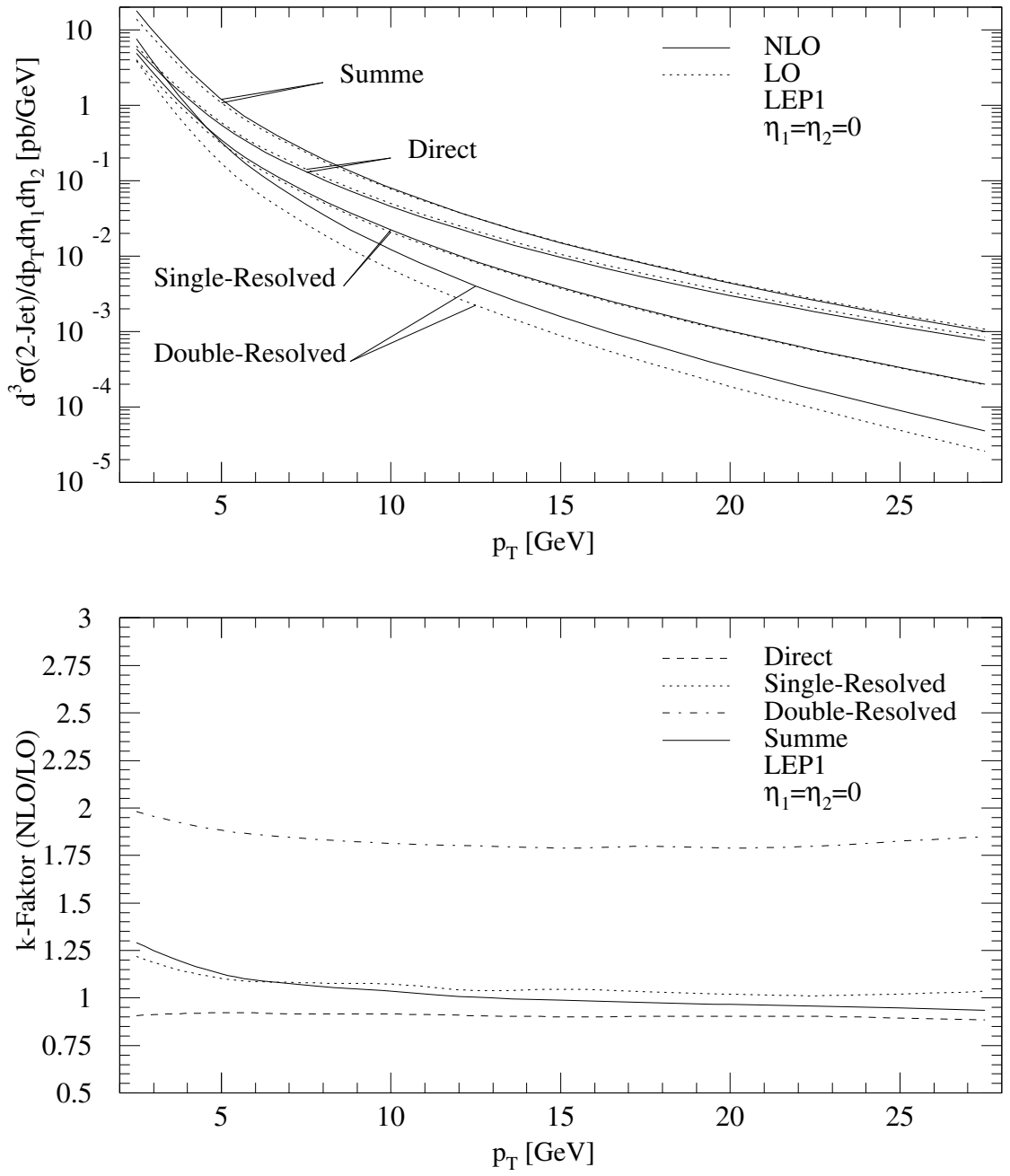

Abbildung 8: Die Beiträge für *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Photon und die Summe in LO und NLO für einen inklusiven 2–Jet–Wirkungsquerschnitt bei LEP1. Oberes Bild: p_T–Spektrum, unteres Bild: zugehörige k–Faktoren.

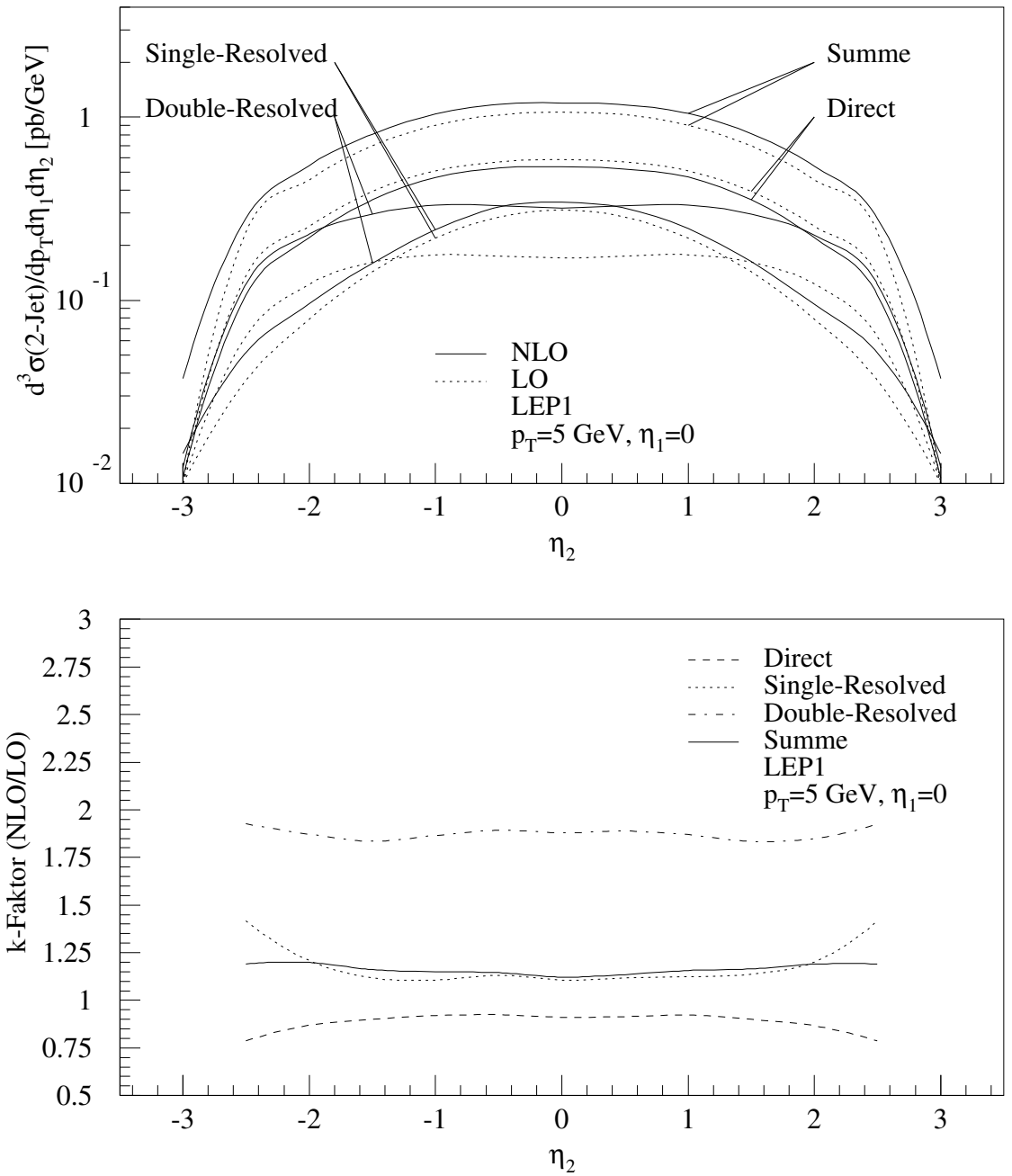

Abbildung 9: Die Beiträge für *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Photon und die Summe in LO und NLO für einen inklusiven 2–Jet–Wirkungsquerschnitt bei LEP1. Oberes Bild: η–Spektrum, unteres Bild: zugehörige k–Faktoren.

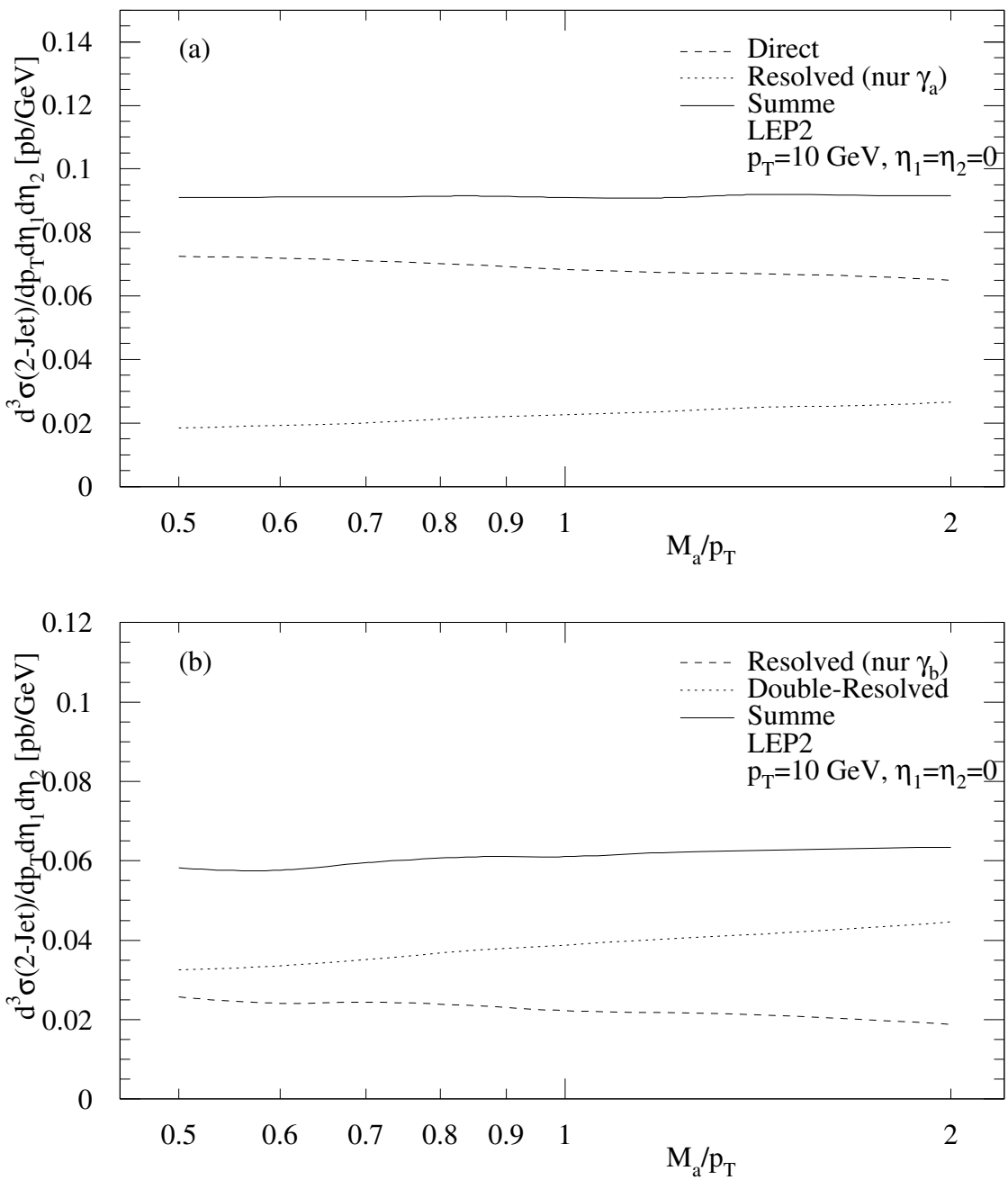

Abbildung 10: Abhängigkeit des inklusiven 2–Jet–Wirkungsquerschnitts von der Faktorisierungsskala M_a im Photon γ_a, oberes Bild: NLO–*direct*– und LO–*single–resolved*–Photon (nur γ_a aufgelöst), unteres Bild: NLO–*single–resolved*– und LO–*double–resolved*–Photon (nur Photon γ_b aufgelöst im *single–resolved*–Fall).

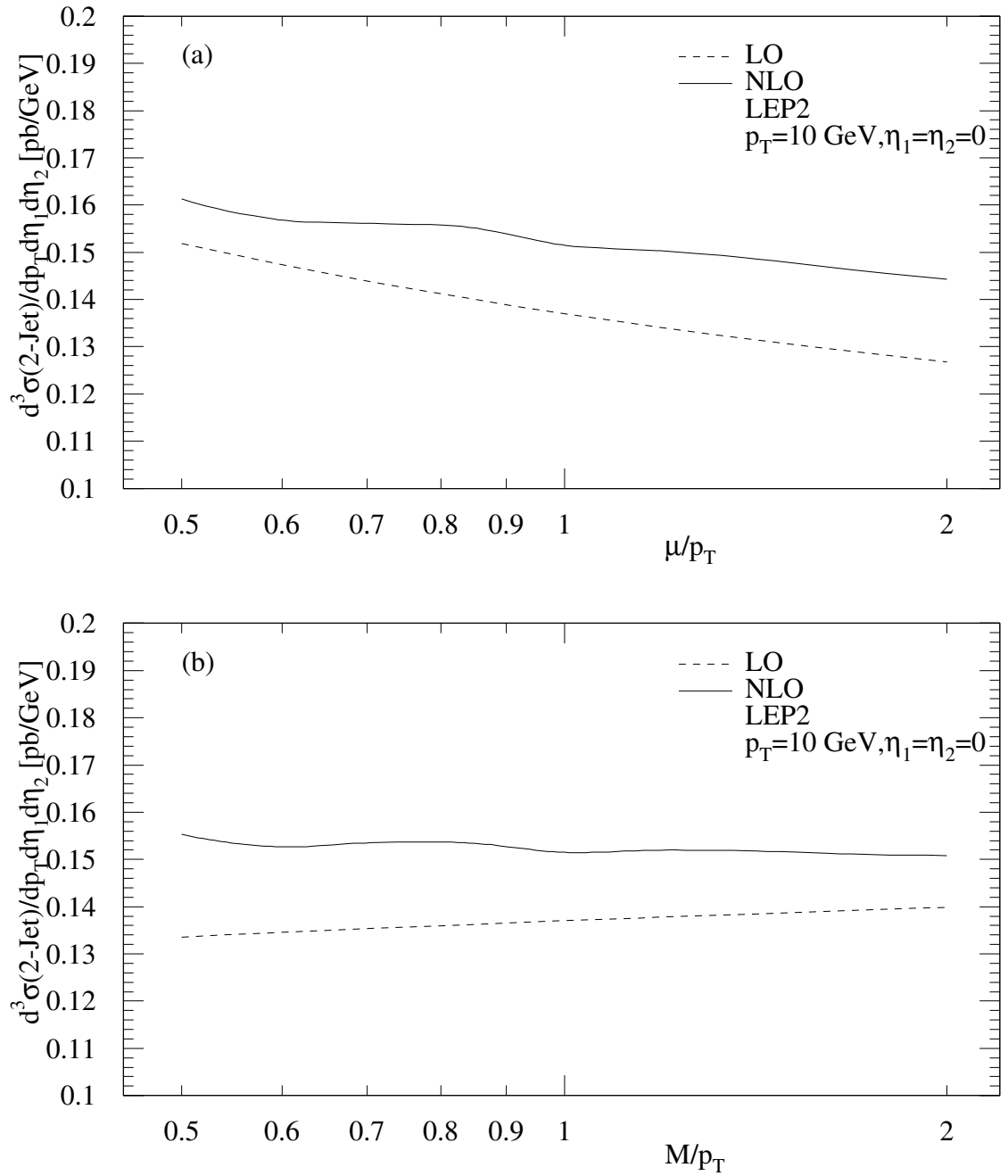

Abbildung 11: Abhängigkeit des inklusiven 2–Jet–Wirkungsquerschnitts nur von der Renormierungsskala μ (a) und von der Variation aller Skalen $M_a = M_b = \mu = M$ (b).

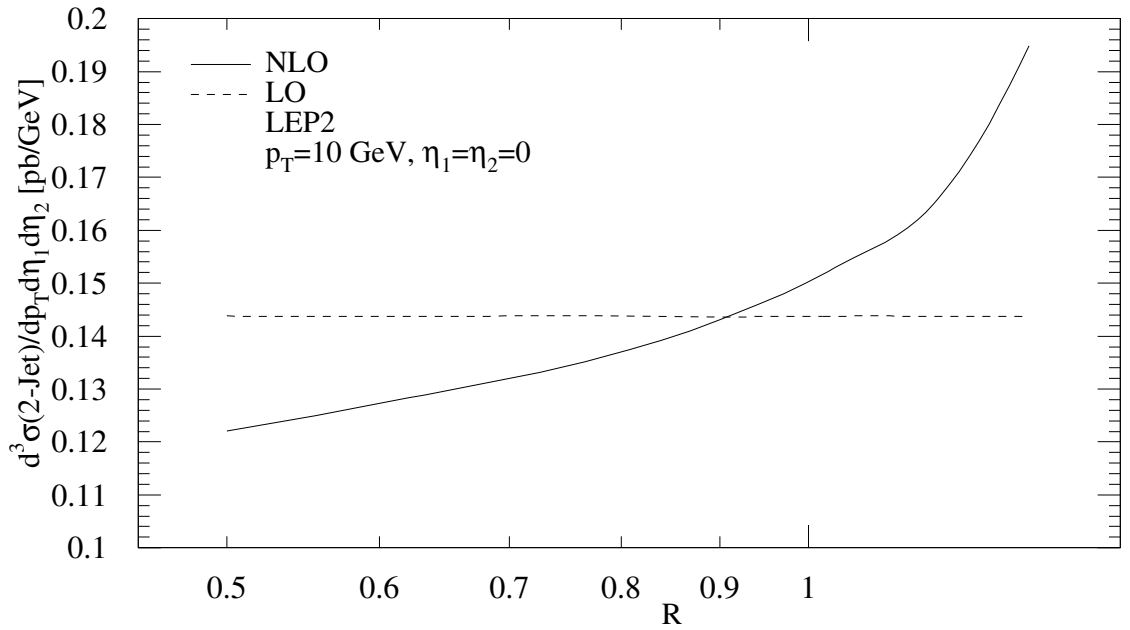

Abbildung 12: Abhängigkeit des inklusiven 2–Jet–Wirkungsquerschnitts von der Größe des Jet–Kegelradius R für LO und NLO.

durchgeführt wurden. Der k–Faktor wird kleiner, wenn man das LO–Ergebnis mit LO–α_s und LO–Partonverteilungen berechnet. Daraus ergibt sich für die Summe folgendes Verhalten: für relativ kleine Transversalimpulse ist der Gesamtprozeß vom *resolved*–Photon dominiert, es ergibt sich eine positive NLO–Korrektur und ein k–Faktor größer als 1. Bei mittleren und großen p_T dominiert der *direct*–Beitrag, so daß sich dort eine negative Korrektur und ein k–Faktor kleiner als 1 ergibt. Im η–Spektrum, welches bei einem relativ kleinen Transversalimpuls von $p_T = 5\,GeV$ genommen ist, spiegelt sich dieses Verhalten auch wider. Es ist zusätzlich zu erkennen, daß die Form der Beiträge im η–Spektrum verschiedenes Verhalten zeigt.

In den Abbildungen 10 und 11 ist die Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts in LO und in NLO näher untersucht. Es wurde der 2–Jet–Wirkungsquerschnitt für festes p_T, η_1 und η_2 bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 175\,GeV$ (LEP2) berechnet. Das $\theta_{\max}$ beträgt hier 1.72°.

In Abbildung 10(a) ist der NLO–*direct*– und der LO–*single–resolved*–Beitrag nur mit aufgelöstem Photon γ_a gezeigt. Beim *direct*–Beitrag ist die Abhängigkeit der Anfangszustandsbeiträge von der Faktorisierungsskala zu erkennen (siehe Abschnitt 4.7). Diese Abhängigkeit wird durch die M–Abhängigkeit der Partonverteilungen im Photon im *single–resolved*–Fall kompensiert. Betrachtet man die entsprechenden Beiträge für den NLO–*single–resolved*–Fall, wobei nur das Photon γ_b aufgelöst ist, und den LO–*double–resolved*–Fall, so erhält man den gleichen Effekt, wie in Bild 10(b) zu sehen ist. Auch hier ist die Kompensation gut zu erkennen.

In Abbildung 11(a) ist die Abhängigkeit des gleichen Wirkungsquerschnitts von der Renormierungsskala μ für die Summe von *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Photon zu sehen. Die Faktorisierungsskalen in den Partonverteilungen sind hier zu $M_a = M_b = p_T$ gewählt. Es ist zu erkennen, daß die Abhängigkeit von dieser Größe μ in NLO abnimmt, wie es zu erwarten ist.

In Abbildung 11(b) sind alle Skalen $M_a = M_b = \mu = M$ gemeinsam variiert, LO und NLO im Vergleich. Es ist interessant zu sehen, daß die Abhängigkeit in LO mit wachsender Skala zunimmt, was darauf zurückzuführen ist, daß die Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala M stärker ist als jene von der Renormierungsskala μ, da im Vergleich zu Abbildung 10 die Variation von M doppelt eingeht. In NLO hat man den Effekt, daß die Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala durch Hinzunahme der NLO–Korrekturen, wie in Abbildung 10 verdeutlicht, fast kompensiert wird und somit die Gesamtskalenabhängigkeit in NLO mit wachsender Skala wieder abnimmt. Im ganzen ist wie in den vorigen Plots der Effekt zu sehen, daß die Abhängigkeit von den Skalen in NLO abnimmt.

In Abbildung 12 ist die Abhängigkeit des inklusiven 2–Jet–Wirkungsquerschnitts vom gewählten Jet–Kegelradius R für LEP2 Kinematik aufgetragen. Wie bereits erwähnt, ist der LO–Wirkungsquerschnitt unabhängig vom gewählten Jet–Radius und Jet–Algorithmus. In NLO zeigt sich jedoch die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts, der mit wachsendem Jet–Radius anwächst, zuerst, für Jet–Radien kleiner 0.75, fast linear, und dann stärker mit wachsendem Jet–Radius. Außerdem ist der Wirkungsquerschnitt in LO und NLO etwa gleich für einen Jet–Radius von ca. 0.9, so daß es sinnvoll erscheint, diesen auf einen Wert zwischen 0.7 und 1.0 zu setzen. In allen Rechnungen ist daher, auch in Übereinstimmung mit den Experimenten, der Jet–Radius auf den Wert $R = 1$ gesetzt.

5.4 Vergleich mit experimentellen Daten

Nach diesen allgemeinen Tests und Untersuchungen werden die gewonnenen Ergebnisse verwendet, um mit vorhandenen experimentellen Daten zu vergleichen. Die ersten experimentellen Meßergebnisse für inklusive 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitte in Photon–Photon–Kollisionen kamen von den beiden Kollaborationen TOPAZ [1] und AMY [2] vom Beschleuniger TRISTAN. Dieser arbeitet bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 58\,GeV$. Von beiden Gruppen wurden p_T–Spektren veröffentlicht, in denen über die Rapiditäten integriert wurde. Für die theoretischen Vergleiche mit TOPAZ und AMY wurde die folgende Weizsäcker–Williams Funktion verwendet:

$$F_{\gamma/e}(x) \;=\; \frac{\alpha}{\pi}\frac{(1+(1-x)^2)}{x}\ln\left(\frac{E\theta_{\max}(1-x)}{m_e x}\right). \tag{79}$$

Für die Partonverteilungen im Photon wurde GRV–NLO [7] verwendet. Die Skalen wurden alle auf p_T gesetzt: $\mu = M_a = M_b = p_T$. Die Rechnungen wurden wegen der geringen Schwerpunktsenergie mit $N_f = 4$ und einem dazu korrespondierenden $\Lambda_{\rm QCD} = 0.2\,GeV$ gerechnet.

Die ersten beiden Kurven (Abbildung 13) sind Vergleiche mit den Daten von TOPAZ [1]. Es ist $\theta_{\max} = 3.2°$. x_a und x_b sind zusätzlich durch die Bedingung $x_a, x_b \leq 0.75$ eingeschränkt. Die Wirkungsquerschnitte sind über die Rapiditäten integriert mit $|\eta_1|, |\eta_2| \leq 0.7$. Der Jet–Radius ist auf $R = 1$ gesetzt. Es sind für die Vergleiche mit den experimentellen Daten der *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Anteil und die Summe in NLO angegeben.

Beim Vergleich mit den TOPAZ–Daten erhalten wir folgende Ergebnisse: Die theoretische 1–Jet–Kurve stimmt für kleine p_T gut mit den Daten überein, für mittlere und große p_T, wo die Störungsrechnung eigentlich glaubwürdiger ist, liegt die theoretische Kurve jedoch unter den Datenpunkten. Die Fehlerbalken der experimentellen Daten enthalten sowohl statistische als auch systematische Fehler.

Für die 2–Jet–Kurve ist die Übereinstimmung sehr gut. Hier liegt die theoretische Kurve über dem gesamten dargestellten Bereich des Transversalimpulses p_T sehr gut auf den Datenpunkten. Aus beiden Kurven ist zu erkennen, daß die Kurve des *direct*–Photons zwar den gesamten p_T–Bereich dominiert, da die Schwerpunktsenergie relativ gering ist, die Daten jedoch ohne die *resolved*–Prozesse auf keinen Fall beschrieben werden könnten.

Die nächsten zwei Kurven (Abbildung 14) sind Vergleiche mit den Daten der Kollaboration AMY [2]. Dort wurden folgende kinematische Parameter verwendet: $\theta_{\max} = 13°$, x_a und x_b sind keiner weiteren Einschränkung unterworfen und die Rapiditäten werden über das Intervall $|\eta_1|, |\eta_2| \leq 1$ ausintegriert.

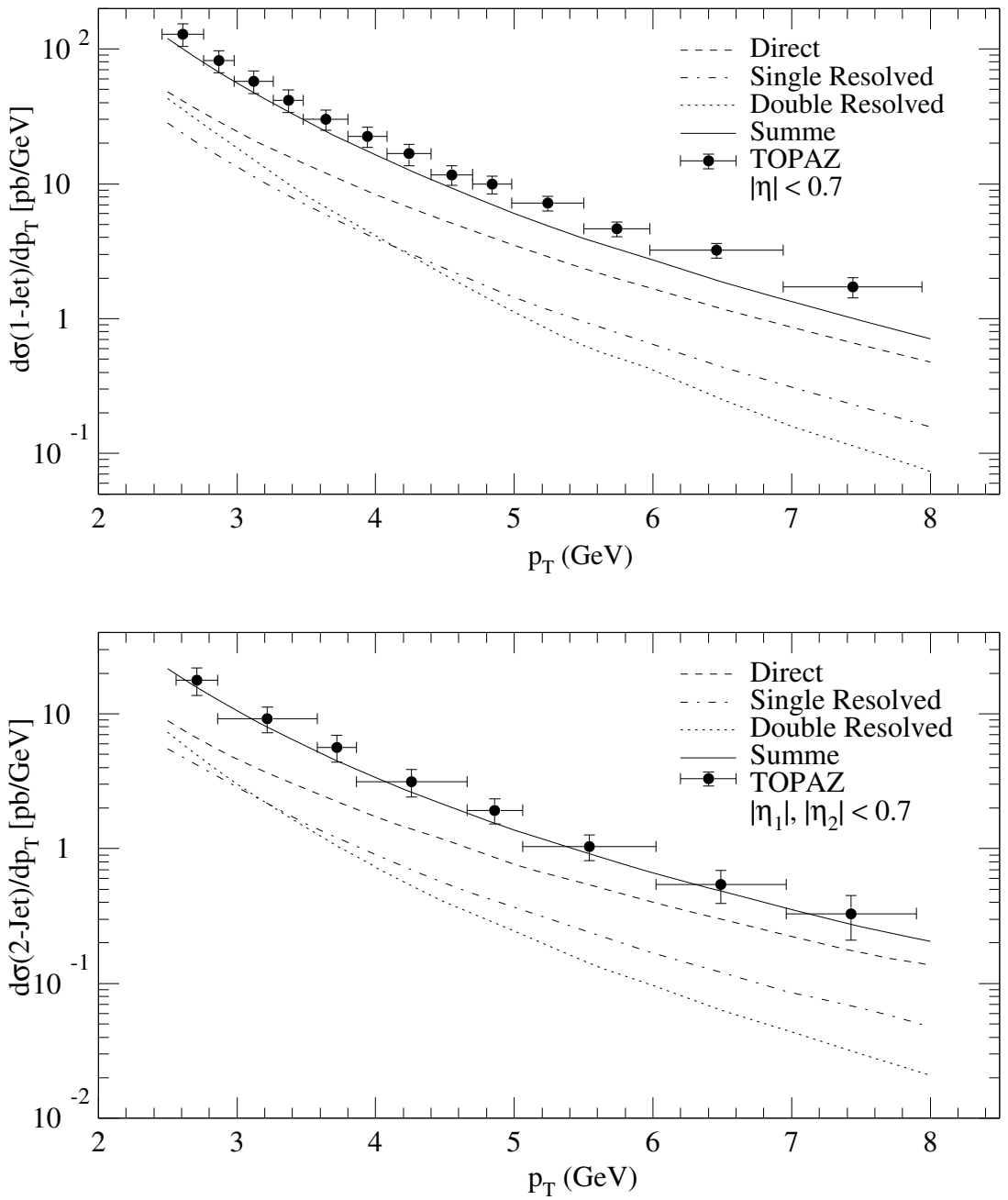

Abbildung 13: Vergleich der experimentellen Daten von der Kollaboration TOPAZ mit der theoretischen Vorhersage, die einzelnen Beiträge (*direct*, *single–resolved*, *double–resolved*) und die Summe, für 1–Jet (obere Kurve) und für 2–Jet (untere Kurve).

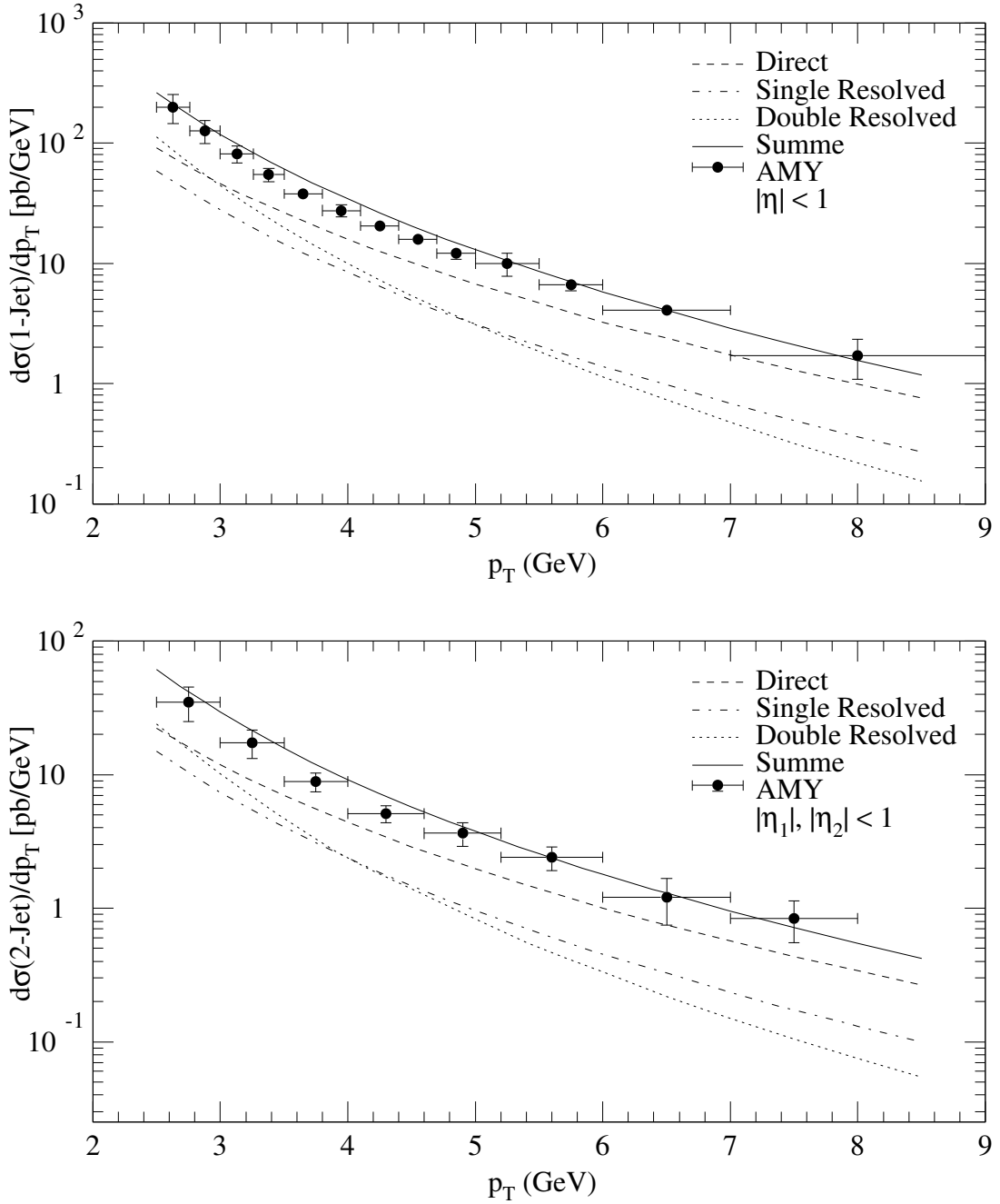

Abbildung 14: Vergleich der experimentellen Daten der Kollaboration AMY mit der theoretischen Vorhersage, die einzelnen Beiträge (*direct*, *single–resolved*, *double–resolved*) und die Summe, für 1–Jet (obere Kurve) und für 2–Jet (untere Kurve).

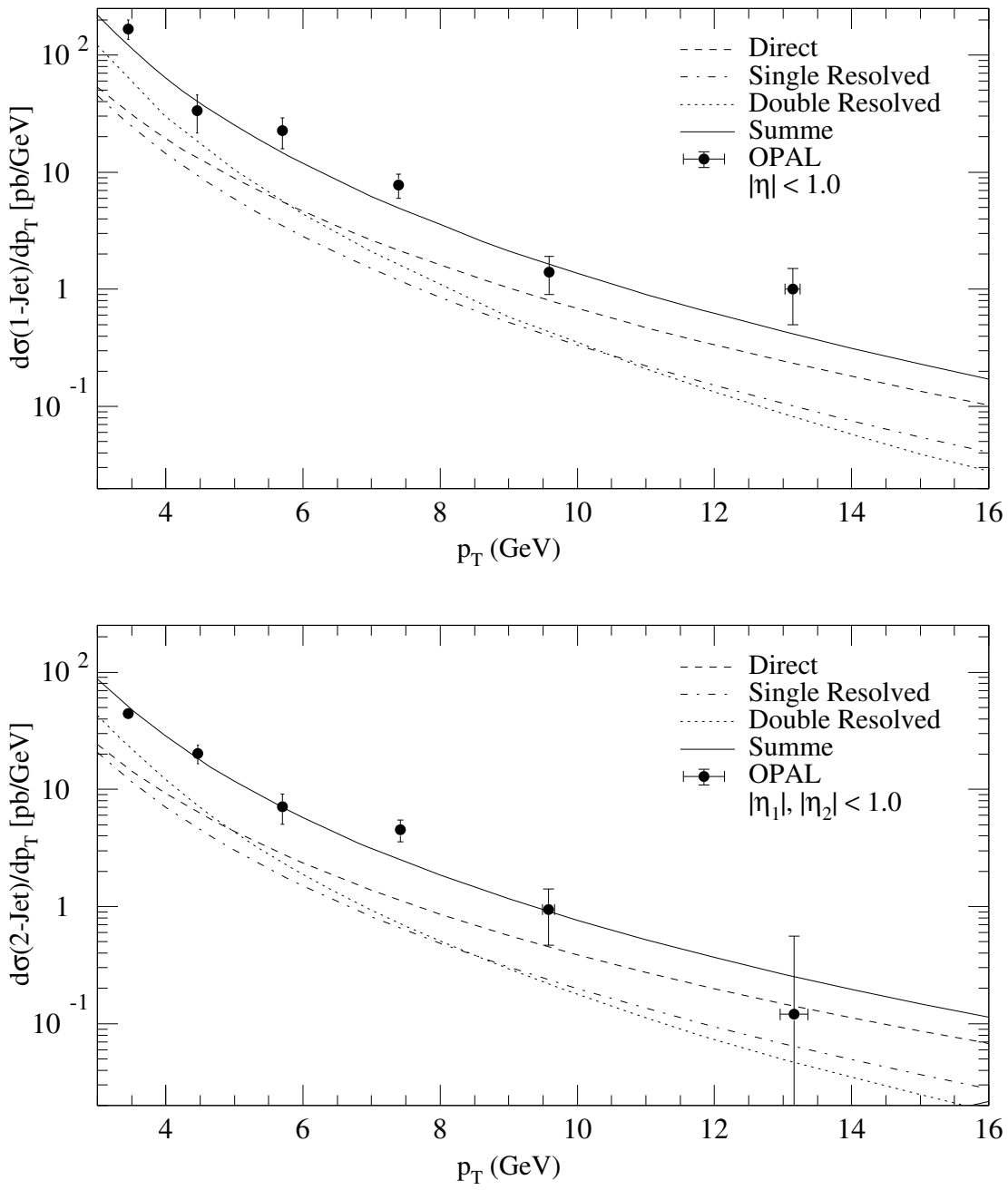

Abbildung 15: Vergleich der experimentellen Daten der Kollaboration OPAL mit der theoretischen Vorhersage, die einzelnen Beiträgen (*direct*, *single–resolved*, *double–resolved*) und die Summe, für 1–Jet (obere Kurve) und für 2–Jet (untere Kurve).

Es wurde der Jet–Radius zu $R = 1$ gewählt. Bei den Vergleichen sind die einzelnen Beiträge und die Summe in NLO angegeben.

Der Vergleich mit den AMY Daten zeigt im 1–Jet–Fall eine bessere Übereinstimmung. Lediglich in der mittleren Region des Transversalimpulses von etwa $3.5\,GeV \leq p_T \leq 5.5\,GeV$ liegt der theoretische Wert über den Daten. Die Fehlerbalken beinhalten den systematischen und den statistischen Fehler. Im Vergleich zu den TOPAZ Kurven liegen die Wirkungsquerschnitte bei AMY höher, was auf weiter gefaßte kinematische Grenzen zurückzuführen ist. Insbesondere der maximale Streuwinkel von $\theta_{\max} = 13°$ liegt sehr hoch. Hier könnten sich Effekte durch die Näherung $Q^2 = 0$ bemerkbar machen.

Es sind Untersuchungen unternommen worden, um z.B. die Näherung der Weizsäcker–Williams–Funktion zu verbessern [19]. Weitere mögliche Korrekturen zu den theoretischen Vorhersagen können von anderen Effekten stammen, wie intrinsische p_T–Effekte, die durch das Nichtverschwinden der Photonvirtualität zustande kommen, die Vernachlässigung der Masse des Charm–Quarks oder nichtperturbative p_T–Effekte in den Partonverteilungen des Photons. Alle diese Effekte, soweit sie in [19, 18] abgeschätzt wurden, sind kleiner als die Fehlerbalken der experimentellen Daten und liefern einen relevanten Beitrag nur bei relativ kleinen Werten des Transversalimpulses.

Seit kurzem gibt es inklusive Jet–Wirkungsquerschnitte in Photon–Photon–Reaktionen vom Beschleuniger LEP, der im Herbst '95 für kurze Zeit bei einer Schwerpunktsenergie von $133\,GeV$ lief (LEP1.5). Die Daten kommen von der Kollaboration OPAL [3] und sind zusammen mit der theoretischen Vorhersage, aufgeteilt nach *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Photon und der Summe, in Abbildung 15 zu sehen. Es wurde die Weizsäcker–Williams–Funktion aus Gleichung (78) mit $\theta_{\max} = 1.43°$ verwendet. Wegen der höheren Schwerpunktsenergie wurde mit $N_f = 5$ Flavours und einem $\Lambda_{\overline{\rm MS}}$ von $0.1303\,GeV$ gerechnet. Die Rapiditäten sind ausintegriert mit $|\eta_1|, |\eta_2| \leq 1$. An x_a und x_b sind keine weiteren Einschränkungen angelegt. Die Partonverteilung im Photon ist GRV–NLO. Der 2–Jet–Wirkungsquerschnitt ist nicht auf die Anzahl der detektierten Jets normiert und um einen relativen Faktor 2 größer definiert als bei den TOPAZ und AMY Kurven.

Der Vergleich mit den experimentellen Daten in Abbildung 15 zeigt sowohl im 1–Jet– als auch im 2–Jet–Fall eine gute Übereinstimmung. Die Fehlerbalken sind relativ klein. Es handelt sich um den statistischen und systematischen Fehler. In den Plots ist zu erkennen, daß der *double–resolved*–Beitrag eine wesentlich größere Rolle spielt und für $p_T \leq 5\,GeV$ sogar den dominanten Beitrag liefert. Selbst beim größten gezeigten Transversalimpuls von $p_T = 16\,GeV$ liefert der *direct*–Beitrag nur etwa 60% des Gesamtwirkungsquerschnitts.

Zusätzlich ist in der Abbildung 16 für den inklusiven 2–Jet–Fall die Abhängigkeit der theoretischen Vorhersage von der Wahl der Partondichten im Photon gezeigt. Es sind Kurven für die Partondichten von Glück, Reya & Vogt [7], Gordon & Storrow [8] und Aurenche et al. [9] gezeigt. Alle diese Partondichten sind NLO–Parametrisierungen. Zusätzlich sind die 2–Jet–Daten von OPAL angegeben. Es zeigt sich, daß die Unterschiede relativ gering sind, lediglich bei kleinen p_T liegt die Kurve mit der Partonverteilung von Gordon & Storrow stärker unter den anderen beiden. Alle drei Kurven sind im Rahmen der Fehler mit den Meßpunkten verträglich.

5.5 Ausblick auf zukünftige Beschleuniger

Als Ausblick wurden einige NLO–Rechnungen bei Schwerpunktsenergien von $175\,GeV$ (LEP2) und $500\,GeV$ (NLC) gemacht. LEP soll demnächst bei einer Energie von $175\,GeV$ betrieben werden und $500\,GeV$ ist eine der Energien, bei der ein geplanter Next–Linear–Collider laufen soll.

Da es sich bei den folgenden Plots um Vorhersagen handelt, werden keine besonderen kinematischen Cuts an die Rechnung gelegt. Es werden inklusive 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitte angegeben. Es sind Transversalimpulsspektren angegeben, bei denen die Rapiditäten nicht ausintegriert wurden. Sie sind auf den Wert $\eta_1 = \eta_2 = 0$ gesetzt, wo der Wirkungsquerschnitt bei festem p_T sein Maximum besitzt. Darüberhinaus wurden Rapiditätsspektren berechnet, bei denen der Transversalimpuls auf einen Wert von $p_T = 10\,GeV$ gesetzt wurde, da dort die Beiträge von *direct*– und *resolved*–Photon

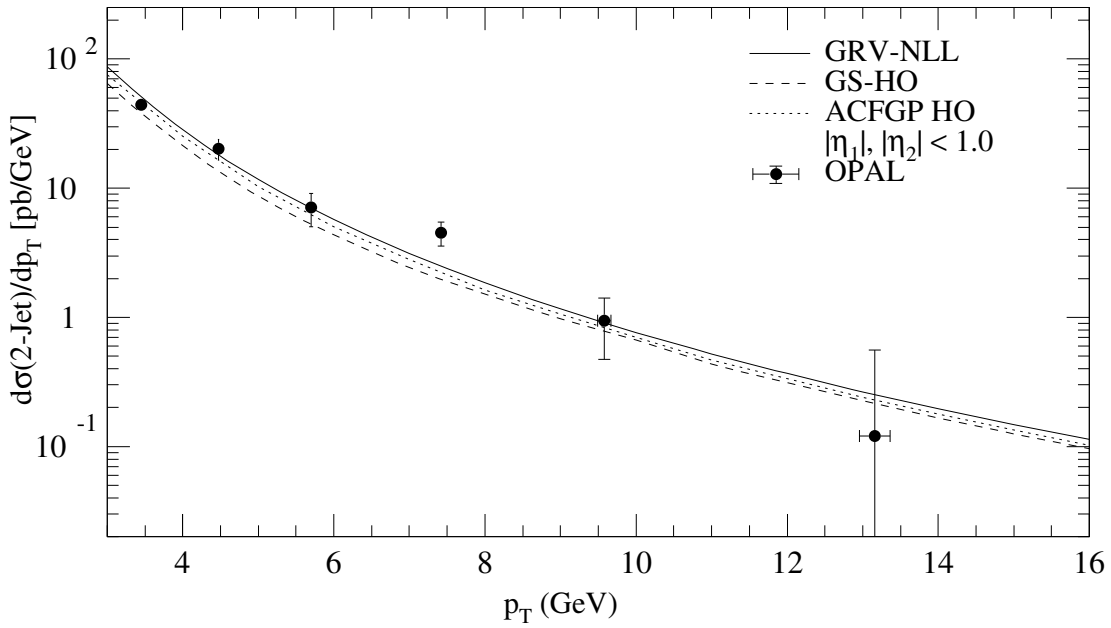

Abbildung 16: Vergleich verschiedener NLO–Partonverteilungen im Photon mit den Daten der Kollaboration OPAL für den inklusiven 2–Jet–Fall.

etwa gleiche Anteile am Wirkungsquerschnitt liefern.

Bei den Energien, bei denen ein geplanter NLC betrieben werden soll, macht sich der Effekt der Beamstrahlung bemerkbar, der das Photonspektrum beeinflußt und einen zusätzlichen Beitrag liefert. Dieser zusätzliche Beitrag zum Photonenfluß kann durch das Beamstrahlungsspektrum berücksichtigt werden (siehe dazu [34, 35]).

Für die Rechnungen wurden folgende Parameter verwendet: (i) LEP2 bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s_H} = 175\,GeV$ und $\theta_{\max} = 30\,\mathrm{mrad} = 1.72°$, (ii) NLC bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s_H} = 500\,GeV$ und $\theta_{\max} = 10.0°$. Als Photonspektrum wurde in beiden Fällen die Funktion (78) verwendet und bei den NLC Kurven zusätzlich das Beamstrahlungsspektrum aus [34] mit den Parametern: $\Upsilon_{\mathrm{eff}} = 0.039$ und $\sigma_z = 0.5\,mm$ [35] (zum Einfluß der verschiedenen Parameter auf das Beamstrahlungsspektrum siehe [36]).

Bild 17 zeigt p_T–Spektren für den inklusiven 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt bei LEP2. Es sind die NLO–Beiträge für *direct*–, *single–resolved*– und *double–resolved*–Photon und die Summe angegeben. Man erkennt bei dieser Schwerpunktsenergie sehr gut den dominanten Beitrag vom *double–resolved*–Photon bis zu einem p_T von $5\,GeV$ (1–Jet) bzw. $7.5\,GeV$ (2–Jet). Oberhalb von ca. $10\,GeV$ ist der *direct*–Beitrag dominant, die *resolved*–Prozesse liefern aber auch dort einen nicht vernachlässigbaren Beitrag.

In Abbildung 18 sind die entsprechenden NLO–η–Spektren für den inklusive 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt angegeben bei einem Transversalimpuls von $p_T = 10\,GeV$, bei dem die einzelnen Beiträge etwa von gleicher Größenordnung sind. Wegen der Symmetrie des Streuprozesses müssen die Rapiditätsverteilungen symmetrisch bezüglich $\eta = 0$ sein, was aus den Plots hervorgeht und ein weiterer Test für die Rechnungen ist. Es ist auffällig, daß die 1–Jet–Spektren für alle Beiträge ein relativ

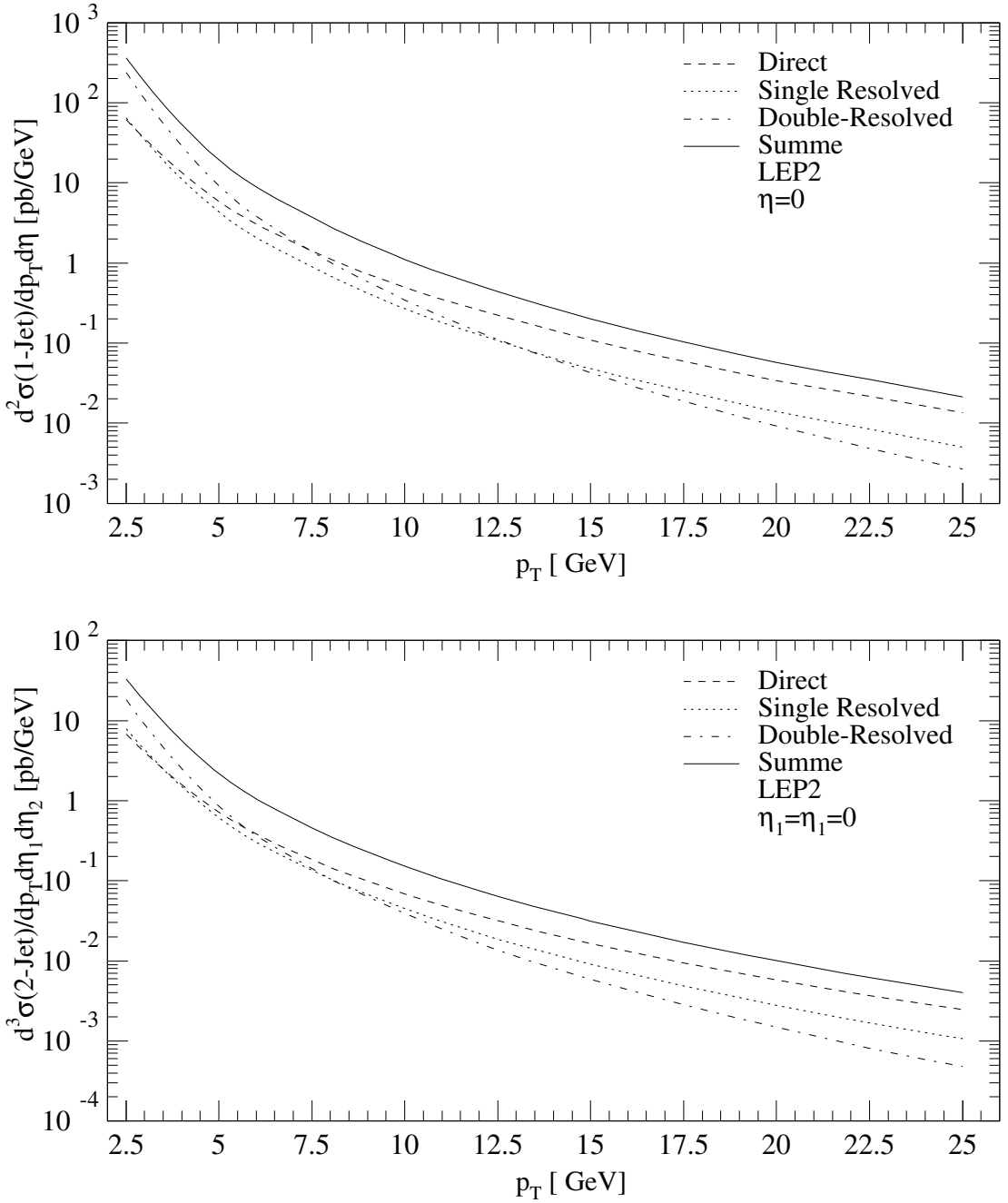

Abbildung 17: Inklusiver 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt, p_T–Spektrum für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 175\,GeV$ (LEP2). Einzelne Beiträge (*direct*, *single–resolved*und *double–resolved*) und die Summe.

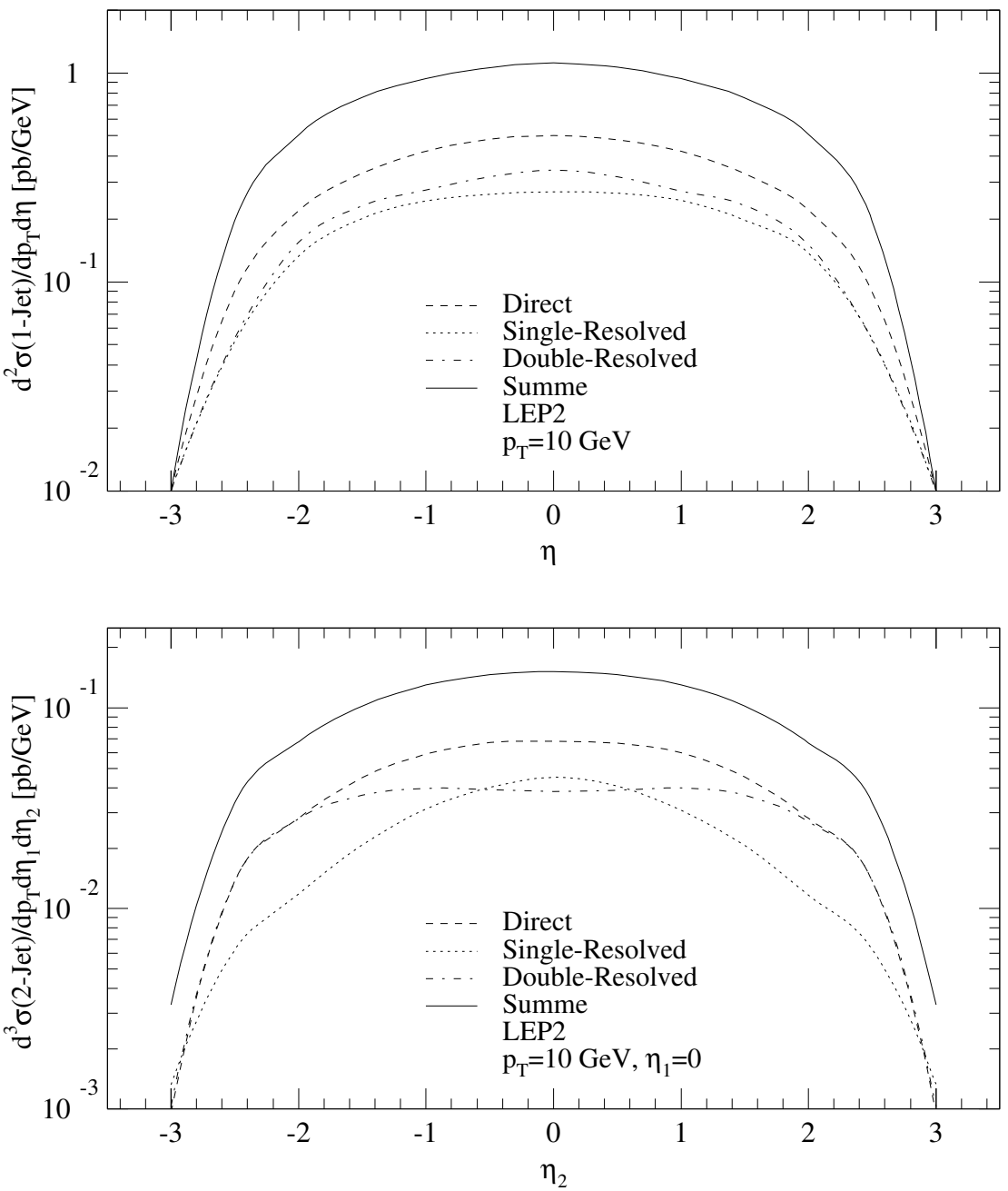

Abbildung 18: Inklusiver 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt, η–Spektrum für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 175\,GeV$ (LEP2). Einzelne Beiträge (*direct*, *single–resolved*und *double–resolved*) und die Summe.

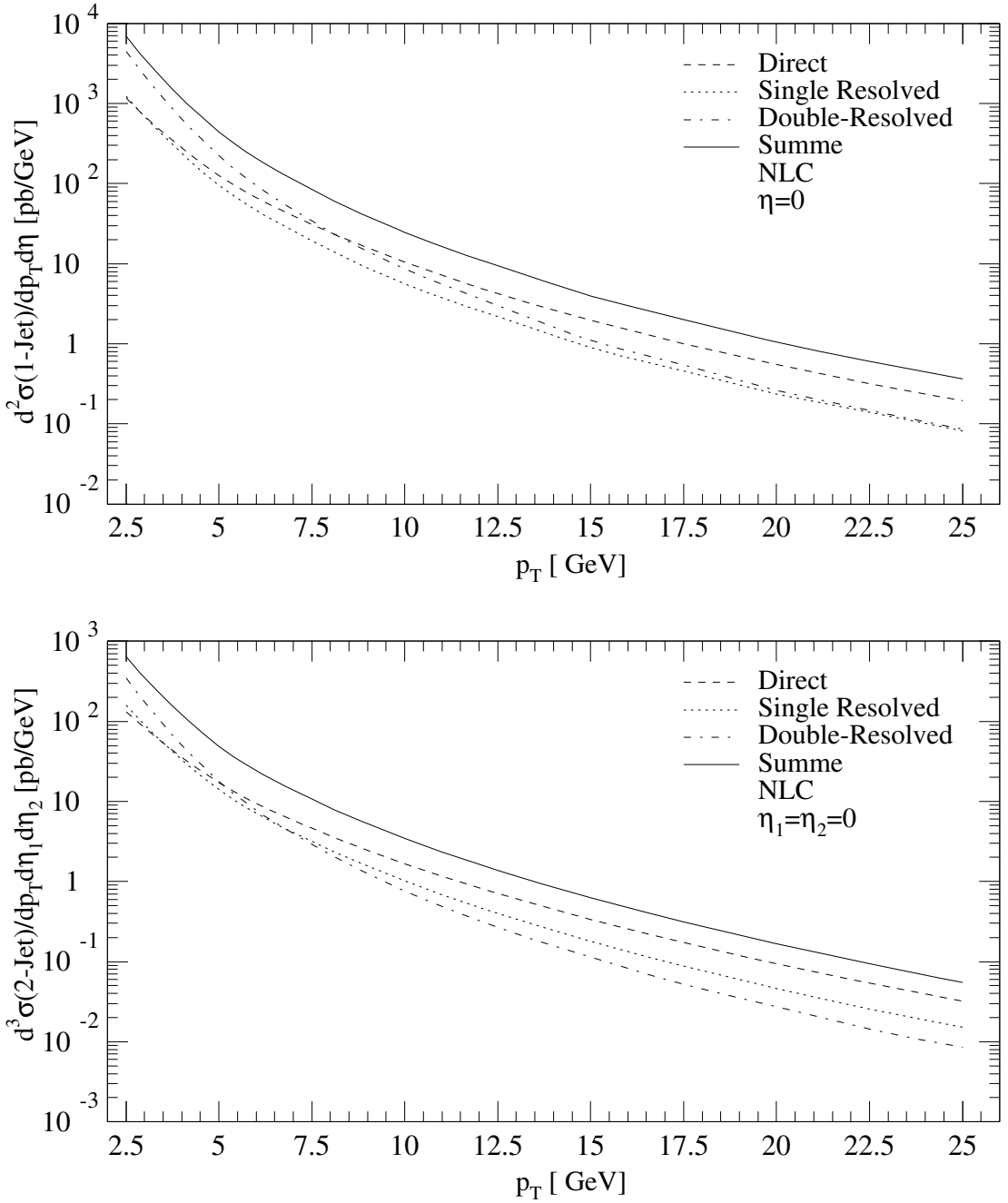

Abbildung 19: Inklusiver 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt, p_T–Spektrum für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 500\,GeV$ (NLC). Einzelne Beiträge (*direct*, *single–resolved*und *double–resolved*) und die Summe. Im Photonspektrum ist die Beamstrahlung berücksichtigt.

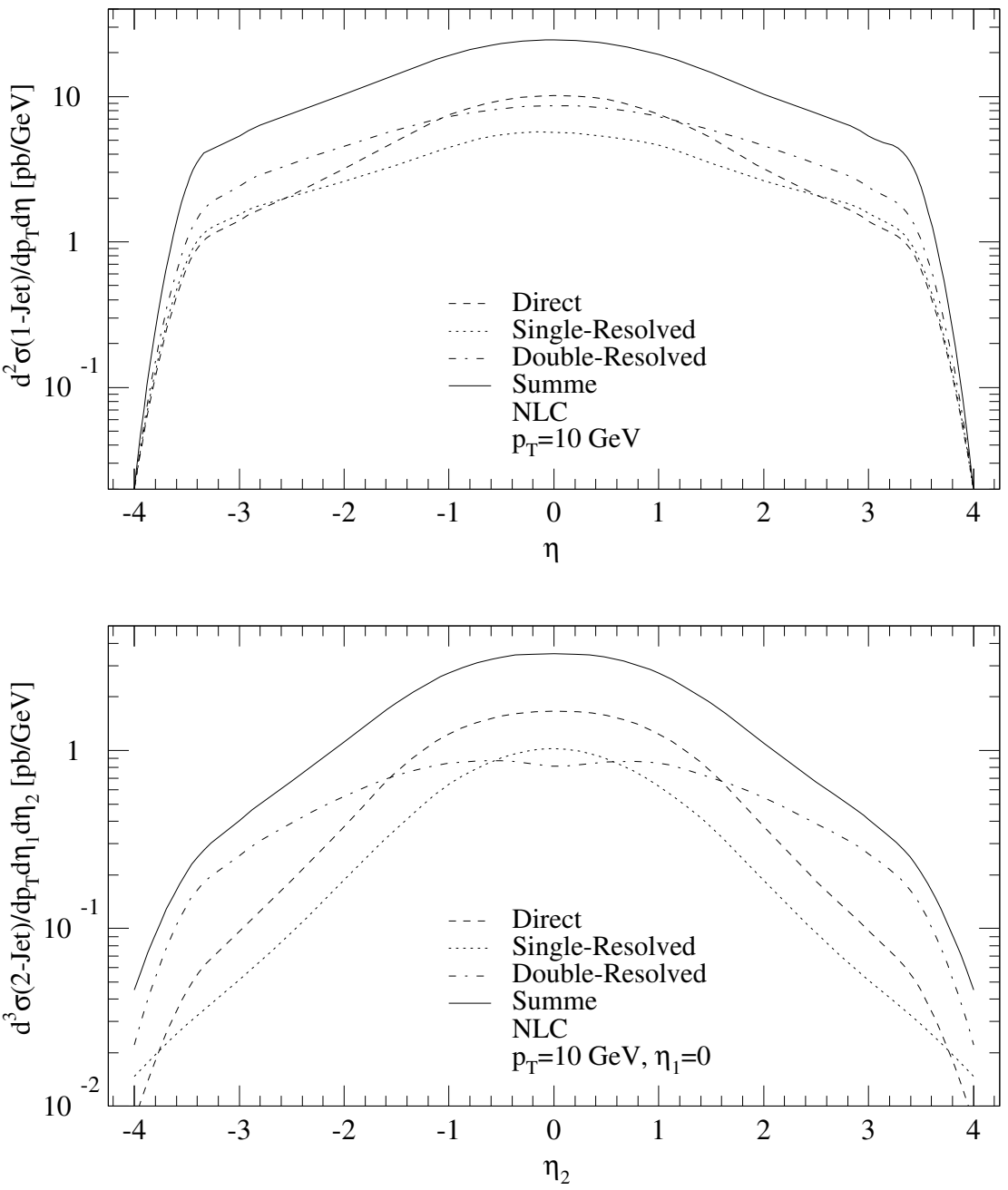

Abbildung 20: Inklusiver 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt, η–Spektrum für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 500\,GeV$ (NLC). Einzelne Beiträge (*direct*, *single–resolved*und *double–resolved*) und die Summe. Im Photonspektrum ist die Beamstrahlung berücksichtigt.

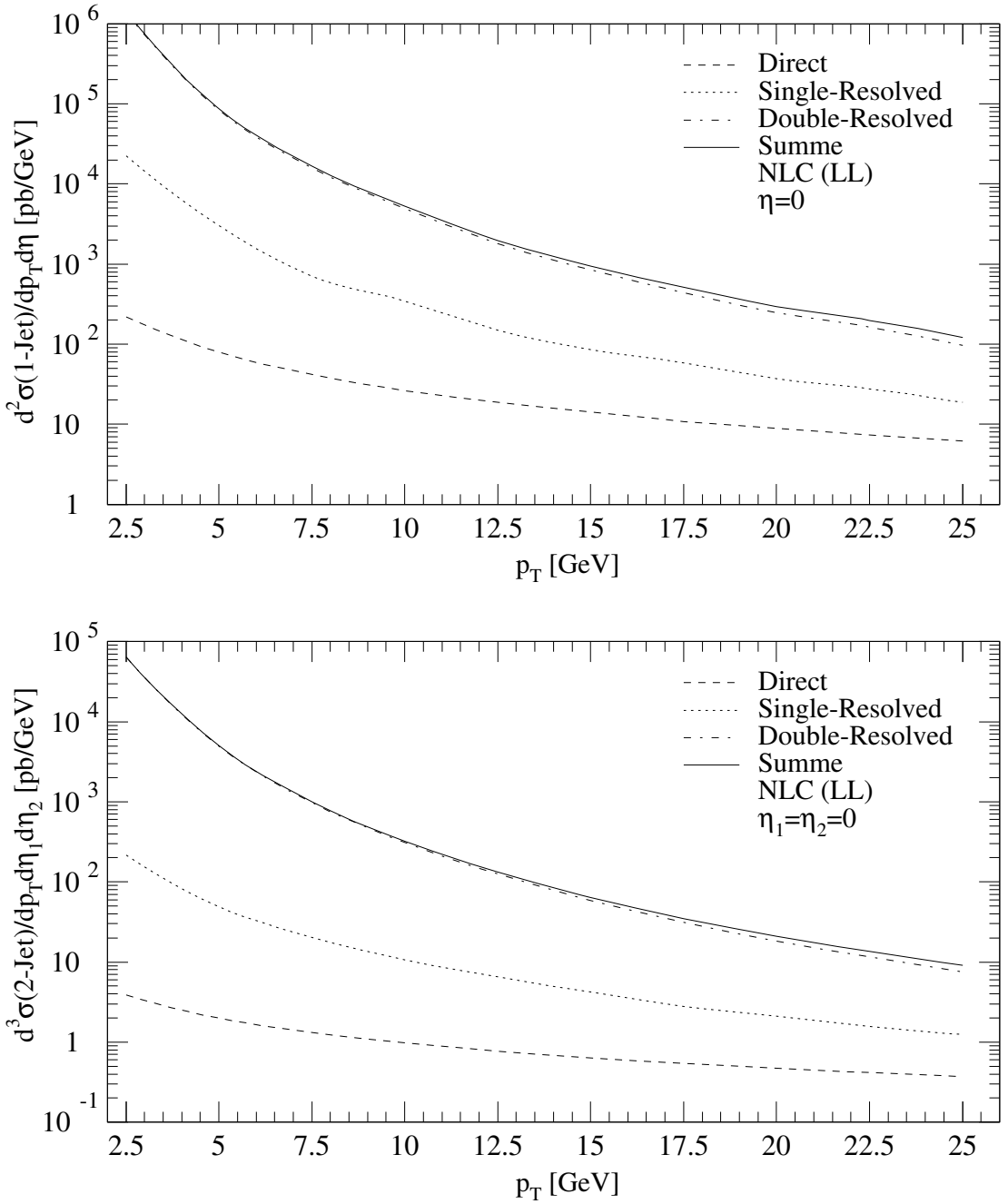

Abbildung 21: Inklusiver 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt, p_T–Spektrum für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 500\,GeV$ (NLC). Einzelne Beiträge (*direct*, *single–resolved*und *double–resolved*) und die Summe. Hier wurde als Photonspektrum das Laser–Light–Spektrum verwendet (siehe Text).

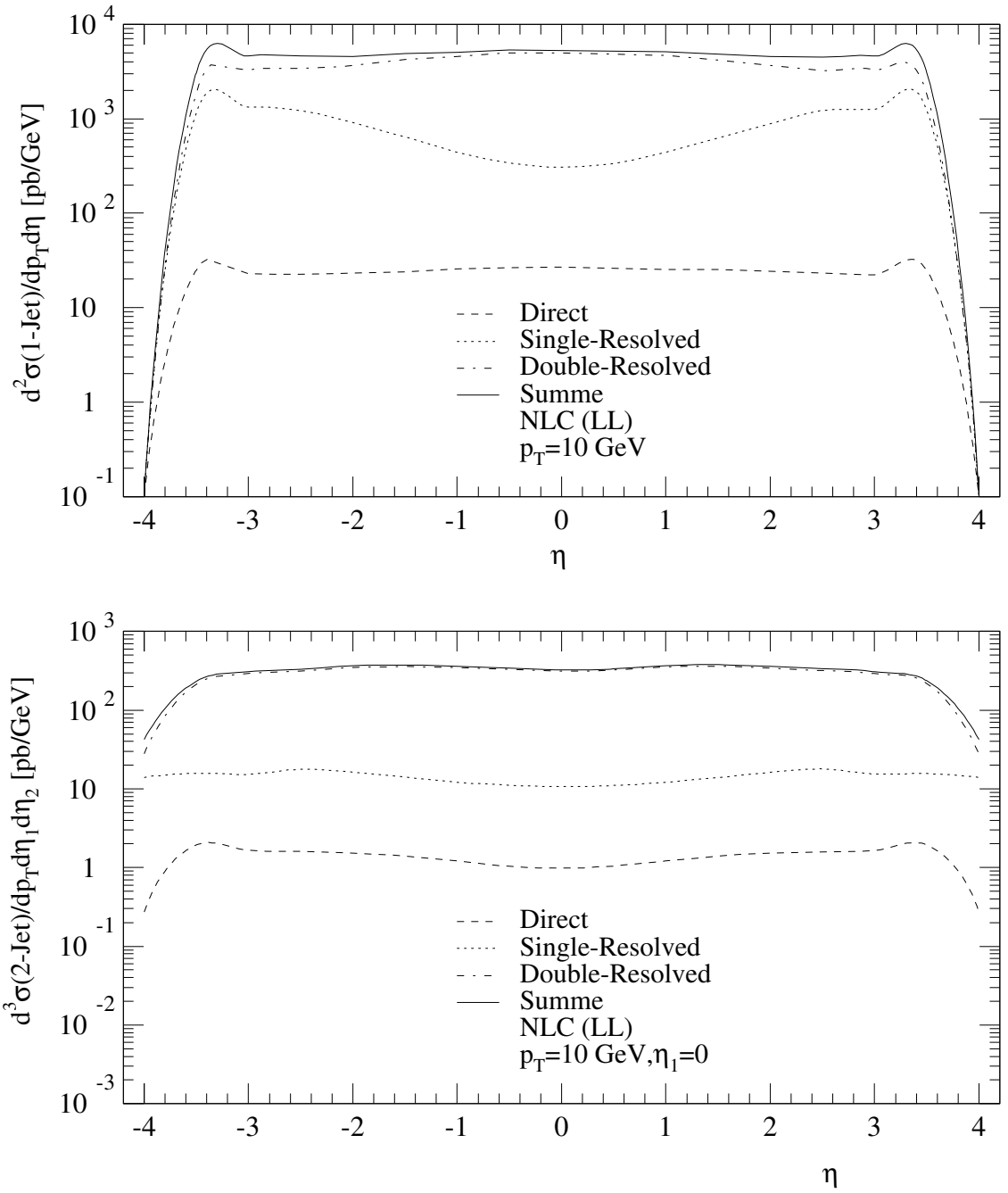

Abbildung 22: Inklusiver 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt, η–Spektrum für eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s_H} = 500\,GeV$ (NLC). Einzelne Beiträge (*direct*, *single–resolved*und *double–resolved*) und die Summe. Hier wurde als Photonspektrum das Laser–Light–Spektrum verwendet (siehe Text).

breites Plateau um $\eta = 0$ zeigen, während im 2–Jet–Fall der *double–resolved*–Beitrag bei $\eta_2 = 0$ sogar ein leichtes Minimum aufweist.

Das nächste Bild 19 zeigt NLO p_T–Spektren für den inklusiven 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitt für einen Next–Linear–Collider bei einer Schwerpunktsenergie von $500\,GeV$. Es fällt auf, daß sich die Wirkungsquerschnitte beim Übergang von $175\,GeV$ (LEP2) zu $500\,GeV$ (NLC) um etwa eine Zehnerpotenz vergrößern. Das Verhältnis der einzelnen Beiträge zueinander bleibt jedoch etwa gleich. Auch hier hat man die Dominanz des *double–resolved*–Beitrags für kleine p_T bis etwa $7\,GeV$, danach liefert der *direct*–Prozeß den größten Beitrag. Auffällig ist, daß im 1–Jet–Fall der *double–resolved*–Beitrag bis zu einem $p_T > 20\,GeV$ über dem *single–resolved*–Beitrag liegt.

Im letzten Bild 20 dieser Reihe sind die entsprechenden Rapiditätsspektren in NLO für den NLC angegeben, wieder bei einem Transversalimpuls von $p_T = 10\,GeV$. Hier zeigen die Beiträge kein flaches Plateau mehr, sondern haben ein Maximum um $\eta = 0$. Lediglich der *double–resolved*–Fall zeigt im 2–Jet–Fall auf dem Maximum ein kleines Minimum bei $\eta_2 = 0$. Er ist dort der kleinste Beitrag, während er bei größeren Rapiditäten $2 \leq |\eta_2| \leq 3.5$ den bei weitem größten Beitrag liefert. Diese 'Flanken' sind dafür verantwortlich, daß der *double–resolved*–Beitrag beim Übergang vom inklusiven 2–Jet– zum inklusiven 1–Jet–Wirkungsquerschnitt einen größeren Beitrag liefert, da dieser Übergang eine Integration über η_2 bedeutet.

Ein völlig neues Verhalten des Wirkungsquerschnitts zeigt sich wenn man den NLC als Photon–Photon–Collider betreibt. Hierbei werden die einlaufenden Elektronen (Positronen) kurz vor dem Wechselwirkungspunkt an Laser–Licht gestreut und produzieren ein sehr hartes Spektrum reeller Photonen, das Laser–Light–Spektrum (siehe dazu [37, 36]). Dieses Photonenspektrum liefert fast über den gesamten x–Bereich ein konstantes Spektrum bis zu einem $x_{\max}$, welches zu 0.85 gewählt wurde. Oberhalb des Wertes $x_{\max}$ wird das Spektrum abgeschnitten.

Durch dieses sehr harte und intensive Photonenspektrum liegen die Wirkungsquerschnitte, wie in Abbildung 21 zu sehen ist, um einige Größenordnungen über den vorher gezeigten. Insbesondere sind die einzelnen Beiträge um Größenordnungen voneinander getrennt und der *double–resolved*–Anteil liefert den bei weitem größten Anteil über dem gesamten gezeigten p_T–Bereich. Die Beiträge des *direct*– und *single–resolved*–Photon können praktisch vernachlässigt werden, so daß die Wechselwirkung ähnlich einem Proton–(Anti)Proton–Beschleuniger nur noch über den hadronischen Teil der aufgelösten Photonen stattfindet. Diese Möglichkeit wäre optimal, um die Partondichten, und hier im besonders den Gluonanteil wesentlich genauer zu bestimmen.

Die NLO–Rapiditätsspektren in Abbildung 20 sind für $p_T = 10\,GeV$ gerechnet und zeigen ein breites Plateau, d.h. mit Außnahme des *single–resolved*–Anteils bei der 1–Jet–Verteilung sind sie über einem Rapiditätsbereich $|\eta| \leq 3$ nahezu konstant. Es ist deutlich sichtbar, daß der *double–resolved*–Anteil praktisch den gesamten Beitrag liefert, insbesondere im 2–Jet–Fall, während im 1–Jet–Fall am Rande des Phasenraums bei $|\eta| \approx 3.5$ der *single–resolved*–Anteil in der gleichen Größenordnung wie der *double–resolved*–Anteil liegt.

6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Berechnung des inklusiven 1– und 2–Jet–Wirkungsquerschnitts in Photon–Photon–Kollisionen beschrieben. Die Berechnung erfolgte dabei bis in nächstführender Ordnung der QCD. Neben den Photonprozessen, die durch direkte Wechselwirkung erfolgen, wurden auch all jene Prozesse berücksichtigt, bei denen das Photon vermöge seines Quark– und Gluon–Anteils aufgelöst wechselwirkt. Es zeigt sich, daß alle diese Prozesse von der gleichen Größenordnung sind und daher bei einer vollständigen Behandlung berücksichtigt werden müssen. Außerdem zeigt sich, daß die Aufteilung in direktes und aufgelöstes Photon in NLO ihre exakte Definition verliert. Die NLO–Korrekturen wurden in dimensionaler Regularisierung gerechnet, um die in den virtuellen und reellen Korrekturen auftretenden Singularitäten zu handhaben. Zur Integration des 3–Teilchen Phasenraums wurde die "Phase–space–slicing"–Methode angewandt, bei der nur die singulären Bereiche des Phasenraums analytisch bis zu einem invarianten Massen–Cut y integriert wurden. Die auftretenden Singularitäten heben sich zwischen den virtuellen und den reellen Korrekturen weg oder werden durch Renormierung in die Partondichten des Photon absorbiert. Der Rest des Phasenraums wird numerisch integriert.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden die gewonnenen Ergebnisse getestet und mit vorhandenen experimentellen Ergebnissen verglichen. Dabei handelte es sich um Vergleiche zwischen LO und NLO Rechnungen und um Untersuchungen der Abhängigkeit von den Skalen und vom Jet–Kegel. Weiterhin wurde mit experimentellen Ergebnissen von TOPAZ und AMY, sowie mit Ergebnissen von OPAL verglichen. Die Übereinstimmung ist gut, sowohl bei den 1–Jet– als auch bei den 2–Jet–Daten. Als weiterer Punkt wurde ein Ausblick auf zukünftige Beschleuniger wie LEP2 oder einen Linearbeschleuniger bei $500\,GeV$ gemacht. Die gewonnenen Ergebnisse für LEP2 und einen NLC sind ähnlich, beim NLC ist zusätzlich das Beamstrahlungsspektrum berücksichtigt. Wird der NLC als Photon–Photon–Collider betrieben, so ergibt sich ein völlig neues Verhalten, welches dem eines Hadron–Hadron–Beschleunigers ähnlich ist.

7 Anhang

Zu Beginn sind einige Funktionen definiert, die im Anhang häufiger Verwendung finden.

Da die Matrixelemente, virtuellen Korrekturen und End– und Anfangszustandsbeiträge so angegeben sind, daß sie gekreuzt werden können, benötigt man eine Referenzskala q^2, die so definiert ist, daß sie immer der Schwerpunktsenergie des betrachteten Prozesses entspricht, auch wenn diese bei gekreuzten Aufrufen nicht mit der Variablen s übereinstimmt. Sie hat folgende Definition:

$$q^2 = \max\{s,t,u\}. \tag{80}$$

Die in den Funktionen auftretende Logarithmusfunktion ist wie folgt definiert:

$$l(x) = \log\left(\frac{|x|}{q^2}\right) \tag{81}$$

Das Quadrat dieser Funktion ist im Falle der virtuellen Korrekturen:

$$l^2(x) = \ln^2\left(\frac{|x|}{q^2}\right) - \pi^2 \quad \text{für } x > 0, \tag{82}$$

$$l^2(x) = \ln^2\left(\frac{|x|}{q^2}\right) \qquad \text{für } x < 0, \tag{83}$$

während für die reellen Korrekturen gilt:

$$l^2(x) = \ln^2\left(\frac{|x|}{q^2}\right) \quad \text{für alle } x. \tag{84}$$

Für die Anfangszustandsbeiträge benötigt man weiterhin folgende Funktion:

$$\hat{R}(x) = \left(\frac{\ln\left(x\left(\frac{1-z}{z}\right)^2\right)}{1-z}\right)_+ - \ln\left(x\left(\frac{1-z}{z}\right)^2\right) - \frac{z}{1-z}\ln\left(1+\frac{x}{y_I}\frac{1-z}{z}\right). \tag{85}$$

Die +–Funktion ist wie folgt auszuführen:

$$\int_a^1 \mathrm{d}x\, g(x)\,(f(x))_+ = \int_a^1 \mathrm{d}x\, g(x)\, f(x) - \int_0^1 \mathrm{d}x\, g(1)\, f(x). \tag{86}$$

7.1 Die Bornterme

In diesem Abschnitt sind die Bornterme angegeben, die für die Wirkungsquerschnitte in LO benötigt werden und aus Teilen der Anfangs– und Endzustandsbeiträge sowie der virtuellen Korrekturen herausfaktorisieren. Da sich dort Pole in ε bis zur Ordnung $1/\varepsilon^2$ ergeben, ist es notwendig, die Bornterme bis zur Ordnung ε^2 zu betrachten, weil sich daraus endliche Beiträge ergeben können. Die Prozesse sind in der Abbildung 2 in Abschnitt 2 abgebildet.

$$T_{\gamma\gamma}(s,t,u) = 8N_C(1-\varepsilon)\left[\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)(1-\varepsilon)-2\varepsilon\right] \tag{87}$$

$$T_{\gamma}(s,t,u) = 8N_C C_F(1-\varepsilon)\left[\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)(1-\varepsilon)-2\varepsilon\right] \tag{88}$$

$$T_a(s,t,u) = 4N_C C_F \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} - \varepsilon \right) \tag{89}$$

$$T_b(s,t,u) = -8C_F(1-\varepsilon) \left(\frac{s^2}{ut} + \varepsilon \right) \tag{90}$$

$$T_c(s,t,u) = 4C_F(1-\varepsilon) \left(\frac{2N_C C_F}{ut} - \frac{2N_C^2}{s^2} \right) \left(t^2+u^2-\varepsilon s^2 \right) \tag{91}$$

$$T_d(s,t,u) = 32N_C^3 C_F (1-\varepsilon)^2 \left(3 - \frac{ut}{s^2} - \frac{us}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right) \tag{92}$$

7.2 Die Altarelli–Parisi–Splitting–Funktionen

Hier sind die Altarelli–Parisi–Splitting–Funktionen angegeben, die in den Anfangszustandsbeiträgen vorkommen und dort bei der Renormierung der Partondichtefunktionen des Photons benötigt werden.

$$P_{q\leftarrow\gamma}(z) = N_C \left[2z^2 - 2z + 1 \right] \tag{93}$$

$$P_{q\leftarrow q}(z) = C_F \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z) \right] \tag{94}$$

$$P_{g\leftarrow q}(z) = C_F \left[\frac{z^2-2z+2}{z} \right] \tag{95}$$

$$P_{q\leftarrow g}(z) = \frac{1}{2} \left[2z^2 - 2z + 1 \right] \tag{96}$$

$$P_{g\leftarrow g}(z) = 2N_C \left[\frac{1}{(1-z)_+} + \frac{1}{z} + z(1-z) - 2 \right] + \left[\frac{11}{6}N_C - \frac{1}{3}N_f \right] \delta(1-z) \tag{97}$$

7.3 Die Integranden für die Endzustände

In diesem Abschnitt sind die Matrixelemente für den *double–resolved*–Fall angegeben, in der Näherung, daß ein Teilchen eine Endzustandssingularität verursacht, d.h. die zehn Invarianten wurden durch die Näherungen aus Gleichung (29) ausgedrückt. Terme, die nach der Phasenraumintegration einen Beitrag $O(y)$ liefern, wurden vernachlässigt, allerdings wurde die in Abschnitt 4.1 angesprochene Partialbruchzerlegung berücksichtigt. Die Matrixelemente wurden größenteils neu berechnet, die Notation für den *double–resolved*–Fall an [27] angelehnt. Die Integranden für den *direct*– und den *single–resolved*–Fall sind an anderer Stelle veröffentlicht [22, 17] und nicht erneut aufgeführt.

$$\begin{aligned} M_{F_a}^{(q\to q)}(s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 T_a(s,t,u) \frac{1}{q^2 r} \left\{ 2C_F \left[(1-b)(1-\varepsilon) - 2 \right.\right. \\ &\quad - \frac{4|s|}{q^2 r + |s|(1-b)} + \frac{2|t|}{q^2 r + |t|(1-b)} + \frac{4|u|}{q^2 r + |u|(1-b)} \Big] \\ &\quad \left. - 2N_C \left[-\frac{2|s|}{q^2 r + |s|(1-b)} + \frac{|t|}{q^2 r + |t|(1-b)} + \frac{|u|}{q^2 r + |u|(1-b)} \right] \right\} \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned} M_{F_b}^{(q\to q)}(s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 T_b(s,t,u) \frac{1}{q^2 r} \left\{ 2C_F \left[(1-b)(1-\varepsilon) - 2 \right.\right. \\ &\quad - \frac{2|s|}{q^2 r + |s|(1-b)} + \frac{2|t|}{q^2 r + |t|(1-b)} + \frac{4|u|}{q^2 r + |u|(1-b)} \Big] \\ &\quad \left. - 2N_C \left[-\frac{2|s|}{q^2 r + |s|(1-b)} + \frac{|t|}{q^2 r + |t|(1-b)} + \frac{|u|}{q^2 r + |u|(1-b)} \right] \right\} \end{aligned} \tag{99}$$

$$M^{(g\to q)}_{F_{(c,d)}}(s,t,u) = \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r}\left\{\left(2(b^2-b)(1+\varepsilon)+1\right)\right\} T_{(c,d)}(s,t,u) \tag{100}$$

$$\begin{aligned}
M^{(q\to q)}_{F_c}(s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r}\left\{2C_F\left((1-\varepsilon)(1-b)-2\right) T_c(s,t,u)\right. \\
&+ \left[\frac{4|s|}{q^2 r-|s|(1-b)}\right]\left\{\frac{2C_F}{N_C}\left(2N_C^2+\frac{s^2}{ut}\right)(1-\varepsilon)\frac{u^2+t^2-\varepsilon s^2}{s^2}\right\} \\
&+ \left[\frac{4|t|}{q^2 r-|t|(1-b)}\right]\left\{2N_C C_F\left(N_C^2\frac{u}{t}-\frac{s^2}{ut}\right)(1-\varepsilon)\frac{u^2+t^2-\varepsilon s^2}{s^2}\right\} \\
&+ \left.\left[\frac{4|u|}{q^2 r-|u|(1-b)}\right]\left\{2N_C C_F\left(N_C^2\frac{t}{u}-\frac{s^2}{ut}\right)(1-\varepsilon)\frac{u^2+t^2-\varepsilon s^2}{s^2}\right\}\right\}
\end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
M^{(g\to g)}_{F_c}(s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r}\left\{-4N_C\left(b^2-b+2\right) T_c(s,t,u)\right. \\
&+ \left[\frac{4|s|}{q^2 r-|s|(1-b)}+\frac{4|s|}{q^2 r-|s|b}\right]\left\{2N_C^3 C_F\frac{u^2+t^2}{ut}(1-\varepsilon)\frac{u^2+t^2-\varepsilon s^2}{s^2}\right\} \\
&+ \left[\frac{4|t|}{q^2 r-|t|(1-b)}+\frac{4|t|}{q^2 r-|t|b}\right]\left\{2N_C C_F\left(N_C^2\frac{u}{t}-\frac{s^2}{ut}\right)(1-\varepsilon)\frac{u^2+t^2-\varepsilon s^2}{s^2}\right\} \\
&+ \left.\left[\frac{4|u|}{q^2 r-|u|(1-b)}+\frac{4|u|}{q^2 r-|u|b}\right]\left\{2N_C C_F\left(N_C^2\frac{t}{u}-\frac{s^2}{ut}\right)(1-\varepsilon)\frac{u^2+t^2-\varepsilon s^2}{s^2}\right\}\right\}
\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
M^{(g\to g)}_{F_d}(s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r}\left\{-4N_C\left(b^2-b+2\right) T_d(s,t,u)\right. \\
&+ \left[\frac{4|s|}{q^2 r-|s|(1-b)}+\frac{4|s|}{q^2 r-|s|b}\right]\left\{8N_C^4 C_F\left(3-2\frac{ut}{s^2}+\frac{t^4+u^4}{s^4}\right)\right\} \\
&+ \left[\frac{4|t|}{q^2 r-|t|(1-b)}+\frac{4|t|}{q^2 r-|t|b}\right]\left\{8N_C^4 C_F\left(3-2\frac{su}{t^2}+\frac{s^4+u^4}{t^4}\right)\right\} \\
&+ \left.\left[\frac{4|u|}{q^2 r-|u|(1-b)}+\frac{4|u|}{q^2 r-|u|b}\right]\left\{8N_C^4 C_F\left(3-2\frac{st}{u^2}+\frac{s^4+t^4}{u^4}\right)\right\}\right\}
\end{aligned} \tag{103}$$

7.4 Die Integranden für die Anfangszustände

Hier sind die Matrixelemente für den *double–resolved*–Fall angegeben, in der Näherung, daß ein Teilchen eine Anfangszustandssingularität verursacht. Es finden die Näherungen für die zehn Invarianten aus Gleichung (46) Anwendung. Wie im Fall der Endzustandsbeiträge sind die Matrixelemente partialbruchzerlegt und es sind die Beiträge vernachlässigt, die nach der Phasenraumintegration einen Beitrag $O(y)$ liefern. Die genäherten Matrixelemente für den *direct*– und den *single–resolved*–Fall finden sich in [22, 17].

$$\begin{aligned}
M^{(q\to q)}_{I_a}(z;s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 T_a(s,t,u)\frac{1}{q^2 r}\left\{2C_F\left[(1-z)(1-\varepsilon)-2\right.\right. \\
&- \left.\frac{4|s|}{q^2 r+|s|(1-z)}+\frac{2|t|}{q^2 r+|t|(1-z)}+\frac{4|u|}{q^2 r+|u|(1-z)}\right] \\
&- \left.2N_C\left[-\frac{2|s|}{q^2 r+|s|(1-z)}+\frac{|t|}{q^2 r+|t|(1-z)}+\frac{|u|}{q^2 r+|u|(1-z)}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{104}$$

$$M^{(q\to q)}_{I_b}(z;s,t,u) = \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 T_b(s,t,u)\frac{1}{q^2 r}\left\{2C_F\left[(1-z)(1-\varepsilon)-2\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{2|s|}{q^2 r + |s|(1-z)} + \frac{2|t|}{q^2 r + |t|(1-z)} + \frac{2|u|}{q^2 r + |u|(1-z)}\Bigg] \\
&- 2N_C \left[- \frac{2|s|}{q^2 r + |s|(1-z)} + \frac{|t|}{q^2 r + |t|(1-z)} + \frac{|u|}{q^2 r + |u|(1-z)} \right] \Bigg\} \qquad (105)
\end{aligned}
$$

$$
M^{(q\to g)}_{I_{(c,d)}}(z;s,t,u) = \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r} \left\{ 2C_F \frac{z^2 - 2z + 2 - \varepsilon z^2}{z} \right\} \frac{T_{(c,d)}(s,t,u)}{2C_F(1-\varepsilon)} \qquad (106)
$$

$$
M^{(g\to q)}_{I_{(a,b,c)}}(z;s,t,u) = \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r} \Big\{ 2(z^2 - z)(1+\varepsilon) + 1 \Big\} 2C_F(1-\varepsilon) T_{(a,b,c)}(s,t,u) \qquad (107)
$$

$$
\begin{aligned}
M^{(q\to q)}_{I_c}(z;s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r} \Big\{ 2C_F \left((1-\varepsilon)(1-z) - 2 \right) T_c(s,t,u) \\
&+ \left[\frac{4|s|}{q^2 r - |s|(1-z)} \right] \left\{ \frac{2C_F}{N_C} \left(2N_C^2 + \frac{s^2}{ut} \right) (1-\varepsilon) \frac{u^2 + t^2 - \varepsilon s^2}{s^2} \right\} \\
&+ \left[\frac{4|t|}{q^2 r - |t|(1-z)} \right] \left\{ 2N_C C_F \left(N_C^2 \frac{u}{t} - \frac{s^2}{ut} \right) (1-\varepsilon) \frac{u^2 + t^2 - \varepsilon s^2}{s^2} \right\} \\
&+ \left[\frac{4|u|}{q^2 r - |u|(1-z)} \right] \left\{ 2N_C C_F \left(N_C^2 \frac{t}{u} - \frac{s^2}{ut} \right) (1-\varepsilon) \frac{u^2 + t^2 - \varepsilon s^2}{s^2} \right\} \Bigg\} \qquad (108)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{(g\to g)}_{I_c}(z;s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r} \Big\{ - 4N_C \left(z^2 - z + 2 - \frac{1}{z} \right) T_c(s,t,u) \\
&+ \left[\frac{4|s|}{q^2 r - |s|(1-z)} \right] \left\{ 2N_C^3 C_F \frac{u^2 + t^2}{ut} (1-\varepsilon) \frac{u^2 + t^2 - \varepsilon s^2}{s^2} \right\} \\
&+ \left[\frac{4|t|}{q^2 r - |t|(1-z)} \right] \left\{ 2N_C C_F \left(N_C^2 \frac{u}{t} - \frac{s^2}{ut} \right) (1-\varepsilon) \frac{u^2 + t^2 - \varepsilon s^2}{s^2} \right\} \\
&+ \left[\frac{4|u|}{q^2 r - |u|(1-z)} \right] \left\{ 2N_C C_F \left(N_C^2 \frac{t}{u} - \frac{s^2}{ut} \right) (1-\varepsilon) \frac{u^2 + t^2 - \varepsilon s^2}{s^2} \right\} \Bigg\} \qquad (109)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{(g\to g)}_{I_d}(z;s,t,u) &= \left(4\pi\alpha_s\mu^2\right)^3 \frac{1}{q^2 r} \Big\{ - 4N_C \left(z^2 - z + 2 + \frac{1}{z} \right) T_d(s,t,u) \\
&+ \left[\frac{4|s|}{q^2 r - |s|(1-z)} \right] \left\{ 8N_C^3 C_F \left(3 - 2\frac{ut}{s^2} + \frac{t^4 + u^4}{s^4} \right) \right\} \\
&+ \left[\frac{4|t|}{q^2 r - |t|(1-z)} \right] \left\{ 8N_C^3 C_F \left(3 - 2\frac{su}{t^2} + \frac{s^4 + u^4}{t^4} \right) \right\} \\
&+ \left[\frac{4|u|}{q^2 r - |u|(1-z)} \right] \left\{ 8N_C^3 C_F \left(3 - 2\frac{st}{u^2} + \frac{s^4 + t^4}{u^4} \right) \right\} \Bigg\} \qquad (110)
\end{aligned}
$$

7.5 Die Integrale für die Endzustandssingularitäten

Die in Abschnitt 7.3 angegebenen genäherten Matrixelemente werden nach Gleichung (43) integriert. Dazu sind die angegebenen Integrale notwendig. Es sind Beiträge der Ordnung $O(y)$ vernachlässigt. Die Größe $\mathrm{d}\mu_F$ ist in Gleichung (40) definiert.

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \int \mathrm{d}\mu_F \frac{1}{r} \frac{x}{r + xb} = \int \mathrm{d}\mu_F \frac{1}{r} \frac{x}{r + x(1-b)} \\
&= \left[\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \ln x - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{x}{y_F} \right) + \frac{1}{4} \ln^2 x - \frac{1}{6}\pi^2 \right] \qquad (111)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &= \int \mathrm{d}\mu_F \frac{1}{r}\left((1-b)(1-\varepsilon)-2\right) \\
&= \left[\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\ln y_F\right] \qquad (112)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3 &= \int \mathrm{d}\mu_F \frac{1}{r}\Big(2(b^2-b)(1+\varepsilon)+1\Big) \\
&= \left[-\frac{1}{3\varepsilon}-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\ln y_F\right] \qquad (113)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4 &= \int \mathrm{d}\mu_F \frac{1}{r}\Big(b^2-b+2\Big) \\
&= \left[-\frac{11}{6\varepsilon}-\frac{67}{18}+\frac{11}{6}\ln y_F\right] \qquad (114)
\end{aligned}
$$

7.6 Die Integrale für die Anfangszustandssingularitäten

Hier sind die Integrale angegeben, die nötig sind, um die genäherten Matrixelemente aus 7.4 zu integrieren. Die Integration wird nach Gleichung (59) ausgeführt. Es ist zu bedenken, daß die Integrationsvariable z auch Argument der Partondichteverteilung im Photon und der Photon–Fluß–Funktion ist, so daß diese Integration nicht ausgeführt werden kann. Die unbekannte Funktion wird durch $g(z)$ angedeutet. An diese Funktion wird die Bedingung gestellt, daß sie im Integrationsbereich von $z=[x_a,1]$ beschränkt ist und für $z=1$ gilt: $g(z=1)=1$, was für die +–Funktionen benötigt wird und durch Normierung immer möglich ist. $\mathrm{d}\mu_I$ ist in Gleichung (55) definiert.

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= \int \mathrm{d}\mu_I \frac{1}{r}\frac{x}{r+x(1-z)}g(z) \\
&= \int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}g(z)\left\{-\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{(1-z)_+}+\hat{R}(x)+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right. \\
&\quad \left.+\delta(1-z)\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{2\varepsilon}\ln x+\frac{1}{4}\ln^2 x+\frac{1}{2}\pi^2\right]\right\} \qquad (115)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \mathrm{d}\mu_I \frac{1}{r}\left((1-z)(1-\varepsilon)-2\right)g(z) \\
&= \int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}g(z)\left\{\frac{1}{\varepsilon}(1+z)+(1-z)-(1+z)\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right\} \qquad (116)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int \mathrm{d}\mu_I \frac{1}{r}\left(z^2-z+2-\frac{1}{z}\right)g(z) \\
&= \int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}g(z)\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\left(z^2-z+2-\frac{1}{z}\right)+\left(z^2-z+2-\frac{1}{z}\right)\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right\} \qquad (117)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int \mathrm{d}\mu_I \frac{1}{r}\Big(2(z^2-z)(1-\varepsilon)+1\Big)g(z) \\
&= \int_y^1 \frac{\mathrm{d}z}{z}g(z)\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\Big(2z^2-2z+1\Big)+2z(1-z)+\Big(2z^2-2z+1\Big)\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right\} \qquad (118)
\end{aligned}
$$

7.7 Die virtuellen Korrekturen

In diesem Anhang sind die virtuellen Korrekturen aufgeführt, die für die Prozesse in den Abschnitten 3.1 - 3.3 nötig sind. Die Beiträge sind in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen angegeben, um die Pole in $1/\varepsilon$ und $1/\varepsilon^2$ explizit aufzuzeigen. Die Beiträge für das *direct*–Photon finden sich z.B. in [22], diejenigen für das *single–resolved*–Photon in [17] und jene für das *double–resolved*–Photon sind aus [27] übernommen.

$$
\begin{aligned}
V_{\gamma\gamma}(s,t,u) &= \left\{ C_F \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} + l^2(t) + l^2(u) - 7 + \frac{2}{3}\pi^2 \right] \right\} T_{\gamma\gamma}(s,t,u) \\
&+ 8 N_C C_F \left(2l(t)\left(1 + l(t)\right) + 2l(u)\left(1 + l(u)\right) + \frac{u}{t}\left[3l(t) + l^2(u) \right] + \frac{t}{u}\left[3l(u) + l^2(t) \right] \right) \qquad (119)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\gamma}(s,t,u) &= \left\{ C_F \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\left(3 - 2l(s)\right) + l^2(t) + l^2(u) + l(s)\left(l(s) - 2l(t) - 2l(u)\right) - 7 + \frac{5}{3}\pi^2 \right] \right. \\
&- N_C \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(l(s) - l(t) - l(u)\right) + \frac{1}{2} l(s)\left(l(s) - 2l(t) - 2l(u)\right) + \frac{1}{2}\left(l(t) + l(u)\right)^2 + \frac{2}{3}\pi^2 \right] \\
&\left. + \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - l(-\mu^2) \right) \left(\frac{1}{3} N_f - \frac{11}{6} N_C \right) \right] \right\} T_{\gamma}(s,t,u) \\
&+ 8 N_C C_F^2 \left(2l(t)\left(1 + l(t)\right) + 2l(u)\left(1 + l(u)\right) - 4l(s)\left(1 + l(t) + l(u) - l(s)\right) + 4\pi^2 \right. \\
&\left. + \frac{u}{t}\left[\left(l(s) - l(u)\right)^2 + 3l(t) + \pi^2 \right] + \frac{t}{u}\left[\left(l(s) - l(t)\right)^2 + 3l(u) + \pi^2 \right] \right) \\
&- 4 N_C^2 C_F \left(2l(t)\left(1 + l(t)\right) + 2l(u)\left(1 + l(u)\right) + 4l(s)\left(l(s) - 1 - l(t) - l(u)\right) + 4\pi^2 \right. \\
&\left. + \frac{u}{t}\left[\left(l(s) - l(u)\right)^2 + \pi^2 \right] + \frac{t}{u}\left[\left(l(s) - l(t)\right)^2 + \pi^2 \right] \right) \qquad (120)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{a}(s,t,u) &= \left\{ C_F \left[-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\left(6 + 8l(s) - 4l(t) - 8l(u)\right) - \frac{2}{3}\pi^2 \right. \right. \\
&- 16 - 2l^2(t) + l(t)(6 + 8l(s) - 8l(u)) \\
&- 2\left(\frac{s^2 - u^2}{s^2 + u^2} \right) \left(2\pi^2 + \left(l(t) - l(s)\right)^2 + \left(l(t) - l(u)\right)^2 \right) \\
&\left. + 2\left(\frac{s + u}{s^2 + u^2} \right) \left((s+u)(l(u) - l(s)) + (u - s)(2l(t) - l(s) - l(u)) \right) \right] \\
&+ N_C \left[\frac{1}{\varepsilon}\left(4l(s) - 2l(u) - 2l(t)\right) \right. \\
&+ \frac{85}{9} + \pi^2 + 2l(t)(l(t) + l(u) - 2l(s)) \\
&+ \left(\frac{s^2 - u^2}{2\left(s^2 + u^2\right)} \right) \left(3\pi^2 + 2\left(l(t) - l(s)\right)^2 + \left(l(t) - l(u)\right)^2 \right) \\
&\left. - \frac{st}{s^2 + u^2}\left(l(t) - l(u)\right) + \frac{2ut}{s^2 + u^2}\left(l(t) - l(s)\right) + \frac{11}{3}\left(l(-\mu^2) - l(t) \right) \right] \\
&+ N_f \left[\frac{2}{3}\left(l(t) - l(-\mu^2) \right) - \frac{10}{9} \right] \Bigg\} T_a(s,t,u) \qquad (121)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{b}(s,t,u) &= \left\{ C_F \left[-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\left(6 + 4l(s) - 4l(t) - 4l(u)\right) - 16 \right. \right. \\
&\left. - \frac{3}{2}\left(l(t) + l(u)\right)^2 + 2l(s)\left(l(t) + l(u)\right) + 2\left(l(t) + l(u)\right) - \frac{7}{6}\pi^2 \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ N_C \left[\frac{2}{\varepsilon}\left(2l(s) - l(t) - l(u)\right) + \frac{85}{9} + \frac{5}{4}\left(l(t) + l(u)\right)^2 - l(t)l(u)\right.\\
&\left.-2l(s)\left(l(t) + l(u)\right) - \frac{4}{3}\left(l(t) + l(u)\right) + \frac{5}{4}\pi^2 + \frac{11}{3}l(-\mu^2)\right]\\
&+ N_f \left[-\frac{10}{9} + \frac{1}{3}\left(l(t) + l(u) - 2l(-\mu^2)\right)\right]\\
&+ \frac{1}{N_C}\left[\left(\pi^2 + \left(l(t) - l(u)\right)^2\right)\frac{ut}{2s^2} + \frac{u}{s}l(t) + \frac{t}{s}l(u)\right]\Bigg\} T_b(s,t,u) \qquad (122)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_c(s,t,u) \;=\; &\left\{C_F\left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 7 - \frac{\pi^2}{3}\right]\right.\\
&+ N_C\left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{11}{3\varepsilon} + \frac{11}{3}l(-\mu^2) - \frac{\pi^2}{3}\right]\\
&\left.+ N_f\left[\frac{2}{3\varepsilon} - \frac{2}{3}l(-\mu^2)\right]\right\} T_c(s,t,u)\\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\left[l(s)\left(\left(4N_C^3C_F + 4\frac{C_F}{N_C}\right)\frac{t^2+u^2}{ut} - 16N_C^2C_F^2\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right.\\
&+ 8N_C^3C_F\left(l(t)\left(\frac{u}{t} - \frac{2u^2}{s^2}\right) + l(u)\left(\frac{t}{u} - \frac{2t^2}{s^2}\right)\right) - 8N_CC_F\left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u}\right)\left(l(t) + l(u)\right)\Big]\\
&+ f^c(s,t,u) + f^c(s,u,t) \qquad (123)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_d(s,t,u) \;=\; &\left\{N_C\left[-\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{22}{3\varepsilon} - \frac{67}{9} + \frac{11}{3}l(-\mu^2) + \frac{\pi^2}{3}\right]\right.\\
&\left.+N_f\left[\frac{4}{3\varepsilon} + \frac{10}{9} - \frac{2}{3}l(-\mu^2)\right]\right\} T_d(s,t,u)\\
&+ \frac{32N_C^4C_F}{\varepsilon}\left[l(s)\left(3 - \frac{2tu}{s^2} + \frac{t^4+u^4}{t^2u^2}\right)\right.\\
&+ l(t)\left(3 - \frac{2us}{t^2} + \frac{u^4+s^4}{u^2s^2}\right) + l(u)\left(3 - \frac{2st}{u^2} + \frac{s^4+t^4}{s^2t^2}\right)\Big]\\
&+ 8N_C^3C_F\left(f^d(s,t,u) + f^d(t,u,s) + f^d(u,s,t)\right) \qquad (124)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^c(s,t,u) \;=\; &8N_C^2C_F\left\{\frac{l(t)l(u)}{N_C}\left(\frac{t^2+u^2}{2tu}\right)\right.\\
&+ l^2(s)\left(\frac{1}{4N_C^3}\frac{s^2}{tu} + \frac{1}{4N_C}\left(\frac{1}{2} + \frac{t^2+u^2}{tu} - \frac{t^2+u^2}{s^2}\right) - \frac{N_C}{4}\left(\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right)\\
&+ l(s)\left(\left(\frac{5}{4}C_F - \frac{1}{2N_C} - \frac{1}{N_C^3}\right) - \left(N_C + \frac{1}{N_C^3}\right)\left(\frac{t^2+u^2}{2tu}\right) - \frac{C_F}{2}\left(\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right)\\
&+ \pi^2\left(\frac{1}{8N_C} + \frac{1}{N_C^3}\left(\frac{3\left(t^2+u^2\right)}{8tu} + \frac{1}{2}\right) + N_C\left(\frac{t^2+u^2}{8tu} - \frac{t^2+u^2}{2s^2}\right)\right)\\
&+ \left(N_C + \frac{1}{N_C}\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{t^2+u^2}{4s^2}\right)\\
&+ l^2(t)\left(N_C\left(\frac{s}{4t} - \frac{u}{s} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{N_C}\left(\frac{t}{2u} - \frac{u}{4s}\right) + \frac{1}{N_C^3}\left(\frac{u}{4t} - \frac{s}{2u}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ l(t)\left(N_C\left(\frac{t^2+u^2}{s^2}+\frac{3t}{4s}-\frac{5u}{4t}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{N_C}\left(\frac{u}{4s}+\frac{2s}{u}+\frac{s}{2t}\right)-\frac{1}{N_C^3}\left(\frac{3s}{4t}+\frac{1}{4}\right)\right)\\
&+l(s)l(t)\left(N_C\left(\frac{t^2+u^2}{s^2}-\frac{u}{2t}\right)+\frac{1}{N_C}\left(\frac{u}{2s}-\frac{t}{u}\right)+\frac{1}{N_C^3}\left(\frac{s}{u}-\frac{u}{2t}\right)\right)\Bigg\} \qquad (125)\\
f^d(s,t,u) &= N_C\left[\left(\frac{2\,(t^2+u^2)}{tu}\right)l^2(s)+\left(\frac{4s\,(t^3+u^3)}{t^2u^2}-6\right)l(t)l(u)\right.\\
&+\left.\left(\frac{4}{3}\frac{tu}{s^2}-\frac{14}{3}\frac{t^2+u^2}{tu}-14-8\left(\frac{t^2}{u^2}+\frac{u^2}{t^2}\right)\right)l(s)-1-\pi^2\right]\\
&+N_f\left[\left(\frac{5}{3}\frac{t^2+u^2}{tu}+\frac{8}{3}\frac{tu}{s^2}-1\right)l(s)-\frac{1}{2}\left(\frac{s^2+tu}{tu}\right)l^2(s)\right.\\
&-\left.\left(\frac{t^2+u^2}{tu}\right)l(t)l(u)+1-\frac{\pi^2}{2}\right] \qquad (126)
\end{aligned}
$$

7.8 Die Endzustandskorrekturen

In diesem Abschnitt sind die Endzustandsbeiträge angegeben, die in den Tabellen der Abschnitte 4.3 - 4.5 aufgeführt sind und die sich ergeben, wenn man die $2 \to 3$ Matrixelemente über die singulären Phasenraumbereiche integriert, wie es in Abschnitt 4.1 beschrieben ist. Es sind Terme der Ordnung $O(y)$ vernachlässigt.

$$
\begin{aligned}
F_{\gamma\gamma}^{(q\to q)}(s,t,u) &= C_F\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\ln y_F-\ln^2 y_F\right]T_{\gamma\gamma}(s,t,u) \qquad (127)\\
F_{\gamma}^{(q\to q)}(s,t,u) &= \left[C_F\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2}-l(s)\right)+\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\pi^2-\frac{3}{2}\ln y_F+\frac{1}{2}l^2(s)-l^2\left(\frac{s}{y_F}\right)\right\}\right.\\
&\left.-N_C\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{2}l(s)+\frac{1}{2}l(u)\right)+\frac{1}{4}l^2(s)-\frac{1}{4}l^2(u)-\frac{1}{2}l^2\left(\frac{s}{y_F}\right)+\frac{1}{2}l^2\left(\frac{u}{y_F}\right)\right\}\right]T_\gamma(s,t,u) \qquad (128)\\
F_{\gamma}^{(g\to g)}(s,t,u) &= N_C\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(-l(t)-l(u)+\frac{11}{3}\right)+\frac{67}{9}-\frac{2}{3}\pi^2-\frac{11}{3}\ln y_F\right.\\
&\left.-l^2\left(\frac{u}{y_F}\right)-l^2\left(\frac{t}{y_F}\right)+\frac{1}{2}l^2(u)+\frac{1}{2}l^2(t)\right]T_\gamma(s,t,u) \qquad (129)\\
F_{\gamma}^{(g\to q)}(s,t,u) &= \left[-\frac{1}{3\varepsilon}-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\ln y_F\right]T_\gamma(s,t,u) \qquad (130)\\
F_{a}^{(q\to q)}(s,t,u) &= \left[C_F\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2}+2l(s)-l(t)-2l(u)\right)+\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\pi^2-\frac{3}{2}\ln y_F\right.\right.\\
&\left.-l^2(s)+\frac{1}{2}l^2(t)+l^2(u)+2l^2\left(\frac{s}{y_F}\right)-l^2\left(\frac{t}{y_F}\right)-2l^2\left(\frac{u}{y_F}\right)\right\}\\
&-N_C\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(l(s)-\frac{1}{2}l(t)-\frac{1}{2}l(u)\right)-\frac{1}{2}l^2(s)+\frac{1}{4}l^2(t)+\frac{1}{4}l^2(u)\right.\\
&\left.\left.+l^2\left(\frac{s}{y_F}\right)-\frac{1}{2}l^2\left(\frac{t}{y_F}\right)-\frac{1}{2}l^2\left(\frac{u}{y_F}\right)\right\}\right]T_a(s,t,u) \qquad (131)\\
F_{b}^{(q\to q)}(s,t,u) &= \left[C_F\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2}+l(s)-l(t)-l(u)\right)+\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\pi^2-\frac{3}{2}\ln y_F\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}l^2(s)+\frac{1}{2}l^2(t)+\frac{1}{2}l^2(u)+l^2\left(\frac{s}{y_F}\right)-l^2\left(\frac{t}{y_F}\right)-l^2\left(\frac{u}{y_F}\right)\right\}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- N_C \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left(l(s) - \frac{1}{2} l(t) - \frac{1}{2} l(u) \right) - \frac{1}{2} l^2(s) + \frac{1}{4} l^2(t) + \frac{1}{4} l^2(u) \right. \\
&\left. + l^2 \left(\frac{s}{y_F} \right) - \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{t}{y_F} \right) - \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{u}{y_F} \right) \right\} \Bigg] T_b(s,t,u) \qquad (132)
\end{aligned}
$$

$$
F_{(c,d)}^{(g \to q)}(s,t,u) = \left[-\frac{1}{3\varepsilon} - \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \ln y_F \right] T_{(c,d)}(s,t,u) \qquad (133)
$$

$$
\begin{aligned}
F_c^{(q \to q)}(s,t,u) &= C_F \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \ln y_F - \frac{1}{3} \pi^2 \right] T_c(s,t,u) \\
&+ N_C C_F \left\{ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(s) + 2l(s) - 2l^2 \left(\frac{s}{y_F} \right) + l^2(s) \right) \left(2 \left(\frac{t^2+u^2}{s^2} \right) + \frac{1}{N_C^2} \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) \right) \right. \\
&+ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(t) + 2l(t) - 2l^2 \left(\frac{t}{y_F} \right) + l^2(t) \right) \left(N_C^2 \left(\frac{u}{t} - 2\frac{u^2}{s^2} \right) - \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) \right) \\
&+ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(u) + 2l(u) - 2l^2 \left(\frac{u}{y_F} \right) + l^2(u) \right) \left(N_C^2 \left(\frac{t}{u} - 2\frac{t^2}{s^2} \right) - \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) \right) \\
&\left. + 2 \left(l(s) \left(2 + \frac{1}{N_C^2} \frac{s^2}{ut} \right) + l(t) \left(N_C^2 \frac{u}{t} - \frac{s^2}{ut} \right) + l(u) \left(N_C^2 \frac{t}{u} - \frac{s^2}{ut} \right) \right) \right\} \qquad (134)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_c^{(g \to g)}(s,t,u) &= N_C \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{11}{3\varepsilon} + \frac{67}{9} - \frac{11}{3} \ln y_F - \frac{2}{3} \pi^2 \right] T_c(s,t,u) \\
&+ 2 N_C C_F \left\{ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(s) + 2l(s) - 2l^2 \left(\frac{s}{y_F} \right) + l^2(s) \right) \left(N_C^2 \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} - 2\frac{t^2+u^2}{s^2} \right) \right) \right. \\
&+ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(t) + 2l(t) - 2l^2 \left(\frac{t}{y_F} \right) + l^2(t) \right) \left(N_C^2 \left(\frac{u}{t} - 2\frac{u^2}{s^2} \right) - \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) \right) \\
&+ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(u) + 2l(u) - 2l^2 \left(\frac{u}{y_F} \right) + l^2(u) \right) \left(N_C^2 \left(\frac{t}{u} - 2\frac{t^2}{s^2} \right) - \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) \right) \\
&\left. + 2 \left(l(s) N_C^2 \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right) + l(t) \left(N_C^2 \frac{u}{t} - \frac{s^2}{ut} \right) + l(u) \left(N_C^2 \frac{t}{u} - \frac{s^2}{ut} \right) \right) \right\} \qquad (135)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_d^{(g \to g)}(s,t,u) &= N_C \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{11}{3\varepsilon} + \frac{67}{9} - \frac{11}{3} \ln y_F - \frac{2}{3} \pi^2 \right] T_d(s,t,u) \\
&8 N_C^4 C_F \left\{ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(s) + 4l(s) - 2l^2 \left(\frac{s}{y_F} \right) + l^2(s) \right) \left(3 - 2\frac{tu}{s^2} + \frac{t^4+u^4}{t^2u^2} \right) \right. \\
&+ \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(t) + 4l(t) - 2l^2 \left(\frac{t}{y_F} \right) + l^2(t) \right) \left(3 - 2\frac{su}{t^2} + \frac{s^4+u^4}{s^2u^2} \right) \\
&\left. + \left(-\frac{2}{\varepsilon} l(u) + 4l(u) - 2l^2 \left(\frac{u}{y_F} \right) + l^2(u) \right) \left(3 - 2\frac{st}{u^2} + \frac{s^4+t^4}{s^2t^2} \right) \right\} \qquad (136)
\end{aligned}
$$

7.9 Die 'Direct'–Photon–Anfangszustandskorrektur

Hier ist der Beitrag angegeben, der sich ergibt, wenn ein auslaufendes Teilchen zusammen mit einem einlaufenden Photon eine Singularität verursacht. Die Struktur dieses Beitrags ist in allen Fällen gleich und deshalb kann dieser Beitrag sehr kompakt geschrieben werden. Er wird in den Tabellen der Abschnitte 4.3 und 4.4 benötigt, da dort Photonen einlaufen. Der Beitrag, der in die Partondichtefunktionen des Photons absorbiert wird, ist explizit angegeben.

$$
D_{(\gamma,a,b,c)}^{(\gamma \to q)}(z;s,t,u) = \left[-\frac{1}{\varepsilon} P_{q \leftarrow \gamma}(z) \right.
$$

$$+N_C\left\{\ln\left(\frac{y_I(1-z)}{z}\right)\left(2z^2-2z+1\right)-2z^2+2z\right\}\Bigg]\frac{(1-\varepsilon)}{N_C}T_{(\gamma,a,b,c)}(s,t,u) \qquad (137)$$

7.10 Die 'Resolved'–Photon–Anfangszustandskorrekturen

Hier finden sich die Anfangszustandsbeiträge, die sich daraus ergeben, daß ein auslaufendes Teilchen zusammen mit einem einlaufenden Parton aus dem Photon eine Singularität verursacht. Diese Beiträge werden für die Tabellen in Abschnitt 4.4 und 4.5 benötigt, in denen aufgelöste Photonen vorkommen. Es sind die Beiträge, die in die Partondichten des Photons absorbiert werden, explizit aufgeführt.

$$\begin{aligned}
R_\gamma^{(q\to q)}(z;s,t,u) &= \Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}P_{q\leftarrow q}(z)\\
&+C_F\left\{(1-z)\left(1+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right)+2\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)\right.\\
&\left.+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2}-l(s)\right)+\frac{1}{2}l^2(s)+\pi^2\right]\right\}\\
&-N_C\left\{\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)-\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)\right.\\
&\left.\left.+\delta(1-z)\left[\frac{1}{2\varepsilon}\left(l(t)-l(s)\right)+\frac{1}{4}l^2(s)-\frac{1}{4}l^2(t)\right]\right\}\Bigg]T_\gamma(s,t,u) \qquad (138)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_\gamma^{(q\to g)}(z;s,t,u) &= \left[-\frac{1}{\varepsilon}P_{g\leftarrow q}(z)\right.\\
&\left.+C_F\left\{\left(z+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\left(\frac{z^2-2z+2}{z}\right)\right)\right\}\right]\frac{T_\gamma(s,t,u)}{2C_F(1-\varepsilon)} \qquad (139)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_\gamma^{(g\to q)}(z;s,t,u) &= \left[-\frac{1}{\varepsilon}P_{q\leftarrow g}(z)\right.\\
&\left.+\left(z(1-z)+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\left(\frac{2z^2-2z+1}{2}\right)\right)\right]\\
&2C_F(1-\varepsilon)T_\gamma(s,t,u) \qquad (140)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_\gamma^{(g\to g)}(z;s,t,u) &= \Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}P_{g\leftarrow g}(z)\\
&+N_C\left\{2\left(z(1-z)-1+\frac{1}{z}\right)\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)+\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)+\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)\right.\\
&\left.+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(-\frac{1}{2}l(t)-\frac{1}{2}l(u)\right)+\frac{1}{4}l^2(t)+\frac{1}{4}l^2(u)+\pi^2\right]\right\}\\
&+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{11}{6}N_C-\frac{1}{3}N_f\right)\right]\Bigg]T_\gamma(s,t,u) \qquad (141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_a^{(q\to q)}(z;s,t,u) &= \Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}P_{q\leftarrow q}(z)\\
&+C_F\left\{(1-z)\left(1+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right)-4\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)+2\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)+4\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)\right.\\
&+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2}+2l(s)-l(t)-2l(u)\right)\right.\\
&\left.\left.-l^2(s)+\frac{1}{2}l^2(t)+l^2(u)+\pi^2\right]\right\}\\
&-N_C\left\{-2\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)+\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)+\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(l(s)-\frac{1}{2}l(t)-\frac{1}{2}l(u)\right)\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4}l^2(s)+\frac{1}{4}l^2(t)+\frac{1}{2}l^2(u)\right]\right\}\Bigg] T_a(s,t,u) \tag{142}$$

$$\begin{aligned}
R_b^{(q\to q)}(z;s,t,u) &= \Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}P_{q\leftarrow q}(z)\\
&+C_F\left\{(1-z)\left(1+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right)-2\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)+2\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)+2\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)\right.\\
&+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{2}+l(s)-l(t)-l(u)\right)\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}l^2(s)+\frac{1}{2}l^2(t)+\frac{1}{2}l^2(u)+\pi^2\right]\right\}\\
&-N_C\left\{-2\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)+\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)+\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)\right.\\
&+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(l(s)-\frac{1}{2}l(t)-\frac{1}{2}l(u)\right)\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}l^2(s)+\frac{1}{4}l^2(t)+\frac{1}{4}l^2(u)\right]\right\}\Bigg] T_b(s,t,u)
\end{aligned} \tag{143}$$

$$\begin{aligned}
R_{(c,d)}^{(q\to g)}(z;s,t,u) &= \left[-\frac{1}{\varepsilon}P_{g\leftarrow q}(z)\right.\\
&\left.+C_F\left\{\left(z+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\left(\frac{z^2-2z+2}{z}\right)\right)\right\}\right]\frac{T_{(c,d)}(s,t,u)}{2C_F(1-\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{144}$$

$$\begin{aligned}
R_{(a,b,c)}^{(g\to q)}(z;s,t,u) &= \left[-\frac{1}{\varepsilon}P_{q\leftarrow g}(z)\right.\\
&\left.+\left(z(1-z)+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\left(\frac{2z^2-2z+1}{2}\right)\right)\right]2C_F(1-\varepsilon)T_{(a,b,c)}(s,t,u)
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
R_c^{(q\to q)}(z;s,t,u) &= \Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}P_{q\leftarrow q}(z)\\
&+C_F\left\{(1-z)\left(1+\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right)\right.\\
&\left.+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{3}{2\varepsilon}+\pi^2\right]\right\}\Bigg] T_c(s,t,u)\\
&+2N_CC_F\left\{2\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)\left(2\frac{t^2+u^2}{s^2}+\frac{1}{N_C^2}\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)\right)\right.\\
&+2\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)\left(N_C^2\left(\frac{u}{t}-2\frac{u^2}{s^2}\right)-\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)\right)\\
&\left.+2\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)\left(N_C^2\left(\frac{t}{u}-2\frac{t^2}{s^2}\right)-\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)\right)\right\}\\
&+\delta(1-z)\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(s)+l(s)+\frac{1}{2}l^2(s)\right)\left(2\frac{t^2+u^2}{s^2}+\frac{1}{N_C^2}\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)\right.\\
&+\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(t)+l(t)+\frac{1}{2}l^2(t)\right)\left(N_C^2\left(\frac{u}{t}-2\frac{u^2}{s^2}\right)-\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)\\
&\left.+\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(u)+l(u)+\frac{1}{2}l^2(u)\right)\left(N_C^2\left(\frac{t}{u}-2\frac{t^2}{s^2}\right)-\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)\right.
\end{aligned}$$

$$+ l(s)\left(2+\frac{1}{N_C^2}\frac{s^2}{ut}\right)+l(t)\left(N_C^2\frac{u}{t}-\frac{s^2}{ut}\right)+l(u)\left(N_C^2\frac{t}{u}-\frac{s^2}{ut}\right)\Bigg]\Bigg\} \tag{146}$$

$$\begin{aligned}
R_c^{(g\to g)}(z;s,t,u) &= \Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}P_{g\leftarrow g}(z)\\
&+N_C\left\{2\left(z(1-z)-1+\frac{1}{z}\right)\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right.\\
&\left.+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\pi^2\right]\right\}+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{11}{6}N_C-\frac{1}{3}N_f\right)\right]\Bigg]T_c(s,t,u)\\
&+2N_CC_F\left\{2\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)\left(N_C^2\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}-2\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right)\right.\\
&2\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)\left(N_C^2\left(\frac{u}{t}-2\frac{u^2}{s^2}\right)-\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)\\
&2\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)\left(N_C^2\left(\frac{t}{u}-2\frac{t^2}{s^2}\right)-\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)\\
&+\delta(1-z)\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(s)+l(s)+\frac{1}{2}l^2(s)\right)\left(N_C^2\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}-2\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right)\right.\\
&+\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(t)+l(t)+\frac{1}{2}l^2(t)\right)\left(N_C^2\left(\frac{u}{t}-2\frac{u^2}{s^2}\right)-\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)\\
&+\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(u)+l(u)+\frac{1}{2}l^2(u)\right)\left(N_C^2\left(\frac{t}{u}-2\frac{t^2}{s^2}\right)-\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)\\
&\left.+l(s)\left(N_C^2\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)\right)+l(t)\left(N_C^2\frac{u}{t}-\frac{s^2}{ut}\right)+l(u)\left(N_C^2\frac{t}{u}-\frac{s^2}{ut}\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{147}$$

$$\begin{aligned}
R_d^{(g\to g)}(z;s,t,u) &= \Bigg[-\frac{1}{\varepsilon}P_{g\leftarrow g}(z)\\
&+N_C\left\{2\left(z(1-z)-1+\frac{1}{z}\right)\ln\left(y_I\frac{1-z}{z}\right)\right.\\
&\left.+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\pi^2\right]\right\}+\delta(1-z)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{11}{6}N_C-\frac{1}{3}N_f\right)\right]\Bigg]T_d(s,t,u)\\
&+8N_C^4C_F\left\{2\hat{R}\left(\frac{|s|}{q^2}\right)\left(3-2\frac{tu}{s^2}+\frac{t^4+u^4}{t^2u^2}\right)\right.\\
&+2\hat{R}\left(\frac{|t|}{q^2}\right)\left(3-2\frac{su}{t^2}+\frac{s^4+u^4}{s^2u^2}\right)\\
&+2\hat{R}\left(\frac{|u|}{q^2}\right)\left(3-2\frac{st}{u^2}+\frac{s^4+t^4}{s^2t^2}\right)\\
&+\delta(1-z)\left[\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(s)+2l(s)+\frac{1}{2}l^2(s)\right)\left(3-2\frac{tu}{s^2}+\frac{t^4+u^4}{t^2u^2}\right)\right.\\
&+\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(t)+2l(t)+\frac{1}{2}l^2(t)\right)\left(3-2\frac{su}{t^2}+\frac{s^4+u^4}{s^2u^2}\right)\\
&\left.+\left(-\frac{1}{\varepsilon}l(u)+2l(u)+\frac{1}{2}l^2(u)\right)\left(3-2\frac{st}{u^2}+\frac{s^4+t^4}{s^2t^2}\right)\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{148}$$

Literatur

[1] H. Hayashii et al., TOPAZ Kollaboration, Phys. Lett. B314 (1993) 149.

[2] B. J. Kim et al., AMY Kollaboration, Phys. Lett. B325 (1994) 248.

[3] Opal Kollaboration, OPAL Physics Note PN223, Juni 1996,
eingereicht zur ICHEP96 Konferenz in Warschau, July 1996.

[4] C.F. v. Weizsäcker, Z. Phys. 88 (1934) 612,
E.J. Williams, Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat.-Fiz. Medd. 13 (1935) N4.

[5] S.J. Brodsky, T. Grand, J. Gunion, J. Weis, Phys. Rev. D (1979) 1418.

[6] A. Vogt, Dissertation, Dortmund 1992.

[7] M. Glück, E. Reya, A. Vogt, Phys. Rev. D45 (1992) 3986,
Phys. Rev. D46 (1992) 1973.

[8] L. E. Gordon, J. K. Storrow, Z. Phys. C56 (1992) 307.

[9] P. Aurenche, P. Chiapetta, M. Fontannaz, J.–Ph. Guillet, E. Pilon, Z. Phys. C56 (1992) 589.

[10] F. Aversa, M. Greco, P. Chiappetta, J.Ph. Guillet, Z. Phys. C46 (1990) 253,
F. Aversa, P. Chiappetta, L. Gonzales, M. Greco, J.Ph. Guillet, Z. Phys. C49 (1991) 459.

[11] S.G. Salesch, Dissertation, DESY 93-196, Dezember 1993,
G. Kramer, S.G. Salesch, Z. Phys. C61 (1994) 277.

[12] S.D. Ellis, Z. Kunszt, D.E. Soper, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1496.

[13] W.T. Giele, E.W.N. Glover, D.A. Kosower, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 2019,
Phys. Rev. D52 (1995) 1486.

[14] Z. Kunszt, D.E. Soper, Phys. Rev. D46 (1992) 192.

[15] D. Bödeker, Dissertation, Hamburg 1992,
Phys. Lett. B292 (1992) 164,
Z. Phys. C61 (1994) 277.

[16] M. Klasen, G. Kramer, Phys. Lett. B366 (1996) 385.

[17] M. Klasen, G. Kramer, DESY 95–226, Dezember 1995, wird in Z. Phys. C veröffentlicht.

[18] P. Aurenche, J.–Ph. Guillet, M. Fontannaz, Y. Shimizu, J. Fujimoto, K. Kato, Progr. Theor. Phys. 92 (1994) 175

[19] P. Aurenche, J.–Ph. Guillet, M. Fontannaz, Y. Shimizu, J. Fujimoto, K. Kato, Proc. of the Workshop on Two–Photon Physics at LEP and HERA, Lund, Eds. G. Jarlskog and L. Jönsson, Lund Univ., 1994, p. 269.

[20] L.E. Gordon, Nucl. Phys. B 419 (1994) 25.

[21] T. Kleinwort, G. Kramer, Phys. Lett. B 370 (1996) 141.

[22] T. Kleinwort, G. Kramer, DESY 96–035, Februar 1996, wird in Nucl. Phys. B veröffentlicht.

[23] J.F. Owens, Phys. Rev. D 21 (1980) 54.

[24] M. Drees, R.M. Godbole, Nucl. Phys. B 339 (1990) 355.

[25] F. A. Berends, Z. Kunszt, R. Gastmans, Nucl. Phys. B 182 (1981) 397,
I. Kang, Oxford University preprint 50/82 (1982).

[26] P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontanaz, D. Schiff, Nucl. Phys. B286 (1987) 553.

[27] R.E. Ellis, J.C. Sexton, Nucl. Phys. B269 (1986) 445 .

[28] P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontanaz, D. Schiff, Z. Phys. C 29 (1985) 423.

[29] REDUCE User's Manual, Version 3.4, Anthony C. Hearn, RAND Publication CP78, 1991.

[30] G.P. Lepage, J. Comp. Phys. 27 (1978) 192, Cornell University Preprint CLNS-80/447 (1980).

[31] J.E. Huth et al., Proc. of the 1990 DPF Summer Study on High Energy Physics, Snowmass, Colorado, edited by E.L. Berger, World Scientific, Singapore, 1992, p. 134.

[32] S. Frixione, M.L. Mangano, P. Nason, G. Ridolfi, Phys. Lett. B 319 (1993) 339.

[33] JETsam 3.1 – the Manual, S.G. Salesch, H1-05/95-441, 1995.

[34] T. Barklow, P. Chen, W. Kozanecki, in *Proceeding of the Workshop on* e^+e^- *Collisions at* $500\,GeV$*: The Physics Potential,* edited by P.M. Zerwas, DESY Orange Report No. 92–123B (1992) p. 845.

[35] P. Chen et al., Phys. Rev. D46 (1992) 1186,
Phys. Rev. D49 (1994) 3209.

[36] M. Drees, R.M. Godbole, Z. Phys. C59 (1993) 591.

[37] I.F. Ginzburg et al., Nucl. Inst. Meth. A205, 47,
Nucl. Inst. Meth. A219, 5.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Kramer für die Vergabe des Themas und die engagierte Betreuung der Arbeit.

Bei Herrn Michael Klasen möchte ich mich für die überaus fruchtbare Zusammenarbeit ganz herzlich bedanken.

Weiterhin bedanke ich mich bei den Herren Janko Binnewies, Peter Büttner und Björn Pötter für die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre.

Außerdem Dank an Herrn Björn Pötter für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Mein Dank gilt nicht zuletzt dem DESY für die finanzielle Unterstützung und das interessante Arbeitsumfeld.