

Strahlungseffekte im Elektronen-SynchrotronEinleitung

Die in einem Elektronen-Synchrotron* umlaufenden Elektronen geben bei ihrer Bewegung auf nahezu kreisförmigen Bahnen Energie in Form elektromagnetischer Strahlung ab. Die abgegebene Energie erreicht für Elektroenergien von einigen GeV Werte von einigen MeV pro Umlauf. Dieser Energieverlust ist also am Ende des Beschleunigungsvorganges wesentlich größer als der dem Anwachsen des Führungsfeldes entsprechende Energiezuwachs. Die Beschleunigungsstrecken haben diesen zusätzlichen Energiebedarf zu decken und werden daher bei hohen Energien besonders stark belastet. Wegen der Größe des Energieverlustes ist dessen Rückwirkung auf die Bewegung der Teilchen im ES zu berücksichtigen. Die Bewegung der Teilchen wird hierdurch entscheidend beeinflusst, so daß eine Grenze für die im ES erreichbare Energie hauptsächlich durch diese Effekte bestimmt wird. Im folgenden soll über den Strahlungsverlust und seinen Einfluß auf die Teilchenbahnen zusammenfassend berichtet werden.

I. Energieverlust durch Strahlung

Das von Elektronen bei der Bewegung auf einer Kreisbahn im Magnetfeld ausgesandte Strahlungsspektrum sowie der mit dieser Strahlung verbundene Energieverlust wurden zuerst von Iwanenko und Pommerantschuk (1) sowie gleichzeitig von Schwinger (2) berechnet.

Sie erhielten für die Strahlungsleistung

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} \left(\frac{W}{mc^2} \right)^4 \quad (\text{I.1})$$

* Im folgenden kurz mit ES bezeichnet

Hierbei sind e , m und W Ladung, Ruhmasse und Gesamtenergie des Elektrons, R ist der Radius der Kreisbahn und c die Lichtgeschwindigkeit. Die Gültigkeit dieser aus der klassischen Elektrodynamik gewonnenen Formel wurde von Sokolow und Mitarbeitern (3) durch eine quantenmechanische Rechnung überprüft. Sie konnten zeigen, daß bis zu Energien der Größenordnung

$$W_{\frac{1}{2}} = mc^2 \left(\frac{mcR}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.2})$$

die klassische Rechnung brauchbare Resultate liefert.

Bei dieser Grenzenergie liegt die Wellenlänge der ausgesandten Strahlung in der Größenordnung der de Broglie-Wellenlänge des Elektrons, so daß es verständlich ist, wenn hier die klassische Rechnung versagt.

Für die Zahl der pro Sekunde ausgestrahlten Photonen mit einer Energie zwischen \mathcal{E} und $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ erhält man:

$$P(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{3^{\frac{5}{2}} S d\mathcal{E}}{8\pi \mathcal{E}_c^2} \int_{\mathcal{E}/\mathcal{E}_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(\eta) d\eta \quad (\text{I.3})$$

Die pro Sekunde im gleichen Energieintervall ausgestrahlte Energie ist

$$\mathcal{E} P(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{3^{\frac{5}{2}} S}{8\pi} \frac{\mathcal{E} d\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c^2} \int_{\mathcal{E}/\mathcal{E}_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(\eta) d\eta \quad (\text{I.4})$$

Das Maximum dieses Spektrums liegt bei

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{2} \frac{\hbar c}{R} \left(\frac{W}{mc^2} \right)^3 \quad (\text{I.5})$$

Oberhalb dieses Wertes fällt das Spektrum exponentiell ab. Für die Gesamtzahl der ausgestrahlten Photonen erhält man

$$\int_0^{\infty} P(\epsilon) d\epsilon = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{S}{\epsilon_c} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \frac{e^2}{\hbar R} \frac{W}{mc^2} \quad (\text{I.6})$$

Integration über (I.4) ergibt den richtigen Wert für die Strahlungsleistung S. Für später sei noch vermerkt

$$\int_0^{\infty} \epsilon^2 P(\epsilon) d\epsilon = \frac{55}{24\sqrt{3}} S \epsilon_c = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e^2 \hbar c^2}{R^3} \left(\frac{W}{mc^2}\right)^7 \quad (\text{I.7})$$

Die Strahlung wird praktisch tangential ausgesandt. Der Öffnungswinkel des Bündels ist von der Größenordnung mc^2/W .

II. Strahlungsrückwirkung auf die Bewegung der Elektronen

Zur Berechnung der Strahlungsrückwirkung auf die Bahnen der Teilchen im ES sind zunächst zwei Wege beschritten worden. Einmal haben Sokolow und Mitarbeiter (4) im Anschluß an ihre quantenmechanischen Untersuchungen über den Energieverlust diese Frage untersucht. Sie behandelten dabei sowohl die Bewegung im homogenen Magnetfeld als auch den Fall eines rotationssymmetrischen Feldes mit dem Feldindex $n < 1$, also den Fall eines ES mit schwacher Fokussierung ohne gerade Stücke. Sie erhielten hierbei eine Zunahme des mittleren Amplitudenquadrates der Betatronschwingungen nach der Formel:

$$\frac{d}{dt} \overline{x^2} - \frac{\dot{W}}{W} \overline{x^2} + \frac{R^2}{(1-n)^2 W^2} \int_0^{\infty} \epsilon^2 P(\epsilon) d\epsilon \quad (\text{II.1})$$

Ein anderes Verfahren zur Untersuchung der gleichen Frage wurde von einer Reihe von Verfassern (5) gewählt. Hierbei wurde zunächst die Unstetigkeit des Energieverlustes vernachlässigt und in einer klassischen Rechnung nur der mittlere Strahlungsverlust berücksichtigt. In einem zweiten Näherungsschritt wurde dann die Quantennatur der ausgesandten Strahlung nachträglich berücksichtigt, wobei die Aussendung der einzelnen Photonen als Fluktuation um den klassischen Mittelwert betrachtet wurde. Das Ergebnis für die gleiche Maschine wie in (II.1) ist hiernach:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}^2 = - \frac{\dot{W}}{W} \bar{x}^2 - \frac{n}{1-n} \frac{S}{W} \bar{x}^2 + \frac{R^2}{(1-n)^2 W^2} \int_0^{\infty} \epsilon^2 P(\epsilon) d\epsilon \quad (\text{II.2})$$

Das in (II.1) fehlende Glied stammt aus der klassischen Näherung und wird als klassische Strahlungsdämpfung bezeichnet werden.

Mit dem momentum compaction factor

$$\alpha = \frac{dr}{r} \frac{dp}{dp} = \frac{1}{1-n} \quad (\text{II.3})$$

kann man (II.2) auch schreiben

$$\frac{d}{dt} \bar{z}^2 = - \frac{\dot{W}}{W} \bar{z}^2 + (1-\alpha) \frac{S}{W} \bar{z}^2 + \frac{R^2}{(1-n)^2 W^2} \int_0^{\infty} \epsilon^2 P(\epsilon) d\epsilon \quad (\text{II.4})$$

In dieser Form ist (II.4) auch das Ergebnis der entsprechenden Rechnung für ein ES mit AG-Fokussierung, nur ist in diesem Falle der Faktor $(1-n)^{-2}$ durch einen Formfaktor F zu ersetzen, der von der Anordnung im ES abhängt (Länge der geraden Stücke, Feldindex n und Länge der Magnetsektoren).

Die zwischen den Formeln (II.1) und (II.2) bzw. (II.4) bestehende Diskrepanz fordert die Frage nach der Gültigkeit der gemachten Näherungsannahmen heraus. Die (II.1) zugrundeliegenden Näherungen sind die gleichen wie bei der Berechnung der quantenmechanischen Korrektur der Strahlungsleistung S . Korrekturglieder der Größenordnung $(W/W_1)^2$ wurden wie in S vernachlässigt. Der Gültigkeitsbereich von (II.1) und (II.2) sollte der gleiche sein wie für S . Die Berechtigung zur klassischen Behandlung sollte daher gegeben sein. Vor kurzem hat nun Matweew (6) gezeigt, daß der Fehler der klassischen Rechnung in der Annahme eines kontinuierlichen Energieverlustes liegt. Hierdurch wird der nichtadiabatische Vorgang der Strahlung als adiabatischer Vorgang behandelt, was zur klassischen Strahlungsdämpfung führt. Matweew gelangt unter Berücksichtigung des Energieverlustes durch Emission einzelner Photonen genau zu dem Sokolowschen Ergebnis (II.1).

In den folgenden Abschnitten sollen beide halbklassischen Näherungsverfahren kurz diskutiert werden.

III. Behandlung der Strahlungsrückwirkung auf die Betatronschwingungen in klassischer Näherung

Ausgangspunkt der Rechnungen sind die Bewegungsgleichungen für ein Elektron im Magnetfeld unter Berücksichtigung des Energieverlustes durch Strahlung sowie des elektrischen Feldes, das sowohl zur Kompensation der Strahlungsverluste als auch zur Beschleunigung der Teilchen dient.

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\eta}) = -e \left[\frac{\eta}{c} \dot{\eta} \right] - e \left\{ - \frac{S}{v^2} \eta \right. \quad (\text{III.1})$$

Bei der Behandlung dieser Gleichungen sind im wesentlichen zwei Wege beschritten worden, die sich durch die Ansätze für das elektrische Feld unterscheiden. Von den meisten Verfassern (7) wurde das in Beschleunigungsstrecken lokalisierte elektrische Feld durch eine Wanderwelle ersetzt. Dieses Verfahren ist das allgemein zur Behandlung der Synchrotronschwingungen verwendete, seine Berechtigung im vorliegenden Falle mußte jedoch erst überprüft werden. Es wurde daher, wie in einer früheren Arbeit bereits beschrieben (8), das elektrische Feld als an einigen Stel-

len des Umfangs der Maschine lokalisiert angenommen. In beiden Fällen ergibt sich für die Betatronschwingungen die gleiche klassische Strahlungsdämpfung

$$\frac{d}{dt} x^2 = - \frac{\dot{W}}{W} x^2 + (1 - \alpha) \frac{S}{W} x^2 \quad (\text{III.2})$$

Die Übereinstimmung der Ergebnisse beider Methoden läßt sich wie folgt erklären: Bei der Verwendung einer Wanderwelle zur Kompensation des Energieverlustes durch Strahlung wird dieser Energieverlust für ein Teilchen, das auf der geometrischen Sollbahn läuft, zu jeder Zeit kompensiert. Im Falle der lokalisierten Beschleunigungsstrecken erleiden alle Teilchen in den Magnetsektoren zwischen den Beschleunigungsstrecken Strahlungsverluste, so daß es kein Teilchen mit konstanter Energie gibt. Der Unterschied zwischen beiden Methoden liegt jedoch nur in der verschiedenen Definition des Bezugsteilchens. Bei der Verwendung der Wanderwelle hat das Sollteilchen die gleichen Eigenschaften wie bei Vernachlässigung der Strahlungsverluste: seine Energie ist konstant, seine Bahn stimmt mit der geometrischen Sollbahn völlig überein. Bei der Verwendung von lokalisierten Beschleunigungsstrecken schwankt zwar die Energie des Bezugsteilchens, seine Bahn weicht jedoch praktisch nicht von der geometrischen Sollbahn ab. Da die Bahn, um die die Betatronschwingungen erfolgen, in beiden Fällen praktisch die gleiche ist, wird so die Verwendung einer Wanderwelle als Beschleunigungsfeld nachträglich gerechtfertigt.

IV Quanteneffekte

Außer der klassischen Strahlungsdämpfung sind bei der Behandlung der Strahlungsrückwirkung auf die Betatronschwingungen die Fluktuationen um den klassischen Wert des Energieverlustes zu berücksichtigen, die dadurch entstehen, daß der Energieverlust des Teilchens in Wirklichkeit nicht kontinuierlich erfolgt, sondern

in einzelnen Quantensprüngen. Bei der Behandlung dieser Quanteneffekte im Anschluß an die klassische Rechnung ist zu berücksichtigen, daß der klassische Mittelwert bereits voll berücksichtigt ist. Es ist daher von der Energie \mathcal{E} des ausgesandten Lichtquants die dem mittleren Energieverlust entsprechende Energie abzuziehen. Dieser Punkt wurde von den meisten unter (5) genannten Autoren nicht beachtet. In der Arbeit von Henry wird die mittlere Energie eines Lichtquants $\bar{\mathcal{E}}$ zwar in die Rechnung eingeführt, durch einen Rechenfehler wird sie jedoch als Null angenommen. Tatsächlich ist dies nicht der Fall, wie sich aus der Definition von $\bar{\mathcal{E}}$ leicht ersehen läßt.

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\int_0^{\infty} \mathcal{E} P(\mathcal{E}) d\mathcal{E}}{\int_0^{\infty} P(\mathcal{E}) d\mathcal{E}} = \frac{8}{15\sqrt{3}} \mathcal{E}_c \quad (\text{IV.1})$$

Die einfachste Behandlungsweise für die Quanteneffekte ist die von Kolomenskij und Lebedew (9) benutzte. Da auch diese Rechnungen durch Fehler entstellt sind, sei die Rechnung im folgenden kurz wiedergegeben:

Die Lösung der Betatronschwingungsgleichung unter Vernachlässigung der Strahlung sei gegeben durch

$$x = \alpha f(\mathcal{J}) e^{i\mu m} + \alpha^* f^*(\mathcal{J}) e^{-i\mu m} \quad (\text{IV.2})$$

μ ist hierbei der charakteristische Exponent des Floquetschen Theorems, m ist die Nummer der Feldperiode. Die Funktion $f(\mathcal{J})$ sei normiert durch

$$ff^* - f'f'^* = -2i \quad (\text{IV.3})$$

Der closed orbit eines Teilchens mit der Energieabweichung δW sei gegeben durch

$$x_c = \xi \Psi(\vartheta) \frac{dW}{W} \quad (\text{IV.4})$$

ξ ist der Krümmungsradius der Sollbahn im Magnetsektor. Sendet das Elektron an einer Stelle \mathcal{J} ein Lichtquant der Energie $\bar{\mathcal{E}}$ aus, so bleibt sein Ort ungeändert, der zu dem Teilchen gehörende closed orbit ändert sich jedoch sprunghaft, so daß eine Änderung der Betatronsoschwingungsamplitude des Teilchens von gleicher Größe erfolgt.

$$\Delta x_c = -\Delta x = \xi \Psi(\vartheta) \frac{\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}}{W} \quad (\text{IV.5})$$

$$\Delta x'_c = -\Delta x' = \xi \Psi'(\vartheta) \frac{\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}}{W}$$

Für die Änderung der Amplitude Δa erhält man durch Einsetzen in (IV.2)

$$\Delta a = \frac{i}{2} e^{-i\mu m} (\Delta x f^{*1} - \Delta x' f^{*}) \quad (\text{IV.6})$$

Hiernach ist die Änderung des Amplitudenquadrates durch die Emission eines Lichtquants der Energie $\bar{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} \Delta |a|^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \Delta x^2 |f^{12}|^2 + \Delta x'^2 |f|^2 - \Delta x \Delta x' (ff^{*1} + f'f^{*}) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\xi^2}{W^2} (\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}})^2 \left\{ \Psi^2 |f^{12}|^2 + \Psi'^2 |f|^2 - \Psi \Psi' (ff^{*1} + f'f^{*}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Zu berechnen ist die Änderung des mittleren maximalen Amplitudenquadrats durch die Quanteneffekte pro Zeiteinheit. Für die maximale Amplitude A besteht die Beziehung

$$|A| = 2 |f|_{\max} |a| \quad (\text{IV. 8})$$

Es ist also

$$\Delta |\bar{A}|^2 = \frac{S^2}{W^2} (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon})^2 |f|_{\max}^2 \left\{ \overline{\Psi^2 |f'|^2} + \overline{\Psi'^2 |f|^2} - \overline{\Psi \Psi' (ff'^* + f'f^*)} \right\} \quad (\text{IV. 9})$$

Die Mittelung ist zunächst über den Winkel \mathcal{J} und dann über das Strahlungsspektrum durchzuführen. Es ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \bar{A}^2 = \frac{211}{120\sqrt{3}} S \epsilon_c \frac{S^2}{W^2} F = \frac{211}{120\sqrt{3}} \frac{e^2}{mc^2} \frac{\hbar}{mc} \frac{c}{R} F \left(\frac{W}{mc^2} \right)^5 \quad (\text{IV. 10})$$

mit dem Formfaktor

$$F = |f|_{\max}^2 \left\{ \overline{\Psi^2 |f'|^2} + \overline{\Psi'^2 |f|^2} - \overline{\Psi \Psi' (ff'^* + f'f^*)} \right\} \quad (\text{IV. 11})$$

Das letzte Glied in (IV.11) ist von Kolomenskij und Lebedew übersehen worden. Robinson (10) ersetzt den Formfaktor F durch das Quadrat des momentum compaction factors α , dies führt zu einer Unterschätzung der Wirkung der Quanteneffekte. Fügt man zur Gleichung (IV.10) noch die in Gleichung (III.2) enthaltenen klassischen Glieder hinzu, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \bar{A}^2 = - \frac{\dot{W}}{W} \bar{A}^2 + (1 - \alpha) \frac{S}{W} \bar{A}^2 + \frac{211}{120\sqrt{3}} \frac{e^2}{mc^2} \frac{\hbar}{mc} \frac{c}{R} F \left(\frac{W}{mc^2} \right)^5 \quad (\text{IV. 12})$$

mit der Lösung

$$\bar{A}^2 = \frac{W_i}{W} \bar{A}_i^2 \exp \left[\int_{t_i}^t (1-\alpha) \frac{S}{W} dt' \right] \quad (\text{IV.13})$$

$$+ \frac{211}{120\sqrt{3}} \frac{e^2}{mc^2} \frac{\hbar}{mc} \frac{c}{R} F \frac{mc^2}{W} \int_{t_i}^t dt' \left(\frac{W}{mc^2} \right)^6 \exp \left[\int_{t'}^t (1-\alpha) \frac{S}{W} dt'' \right]$$

V. Behandlung der Strahlungsrückwirkung nach Matveev

Abweichend von dem unter III. und IV. geschilderten Verfahren geht Matveev (6) in seiner Behandlung der Strahlungsrückwirkung auf die Betatronschwingung von der Bewegungsgleichung

$$\ddot{X} + \omega_0^2 (1-n) X = - \sum_i \xi \psi \frac{\epsilon}{W} \delta'(t-t_i) \quad (\text{V.1})$$

aus. Hier wird also die Strahlung als nichtadiabatischer Vorgang behandelt. Da für das Zustandekommen der klassischen Strahlungsdämpfung eine feste Phasenbeziehung zwischen dem Strahlungsglied der Gleichung und der Bewegung des Teilchens vorhanden sein muß, tritt in der Matveevschen Rechnung die klassische Strahlungsdämpfung nicht auf. Das (IV.10) entsprechende Ergebnis lautet hier

$$\bar{A}^2 = \frac{E_i}{E} \bar{A}_i^2 + \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{e^2}{mc^2} \frac{\hbar}{mc} \frac{c}{R} \frac{mc^2}{W} F \int_{t_i}^t dt' \left(\frac{W}{mc^2} \right)^6 \quad (\text{V.2})$$

In diesem Falle ist in die (IV.5) entsprechenden Gleichungen die volle Energie \tilde{E} des ausgesandten Lichtquants einzusetzen. Hieraus ergibt sich die Änderung des Zahlenfaktors vor dem 2. Glied in (V.2). Für den Fall der schwachen Fokussierung stimmt (V.2) mit dem quantenmechanisch abgeleiteten Ergebnis von Sokolow überein.

Anhang

Für die Hamburger Maschine sind die Formeln ausgewertet worden und in den anliegenden Diagrammen enthalten. Die Wirkung der Strahlung hängt bei fester Frequenz des Magnetstromes nur von der Maximalfeldstärke ab. Es wurde hierbei ein Verlauf des Magnetfeldes von der Form

$$B = \frac{1}{2} B_{\max} (1 - \cos \omega_c t) \quad (\text{A.1})$$

angenommen. Bei einem Krümmungsradius von 31,65 m ist der niedrigste Wert den B_{\max} annehmen kann 7,9 kT. Eine Erhöhung des maximalen Feldes führt zu einer Abkürzung des Beschleunigungsvorganges und damit zu einer Abschwächung der Wirkung der Strahlung.

Fig. 1 zeigt den gesamten Energieverlust durch Strahlung in Abhängigkeit von B_{\max} für Endenergien von 6 und 7,5 GeV.

In Fig. 2 ist die Wirkung der klassischen Strahlungsdämpfung auf die Amplituden der Betatronschwingung für die gleichen Energien dargestellt; die im unteren Teil des Diagramms gezeichneten gestrichelten Linien geben die Amplituden für die gleichen Energien ohne Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung an.

In Fig. 3 ist die Amplitude der Betatronschwingung durch die Quanteneffekte nach dem Verfahren des Abschnittes IV dargestellt. Hierbei entspricht die durchgezogene Kurve der Verwendung des richtigen Formfaktors F , die gestrichelt gezeichnete Kurve entsteht bei Verwendung von \mathcal{A}^2 anstelle von F (Robinson).

In Fig. 4 ist die Amplitude durch Quanteneffekte nach Matveev dargestellt.

L i t e r a t u r h i n w e i s e

- (1) D.D. Iwanenko und I. Pomerantschuk,
Doklady Akad. Nauk UdSSR 44, 343 (1944)
D.D. Iwanenko und A.A. Sokolow,
Doklady Akad. Nauk UdSSR 59, 1551 (1948)
D.D. Iwanenko und A.A. Sokolow,
Klassische Feldtheorie, Berlin 1953
- (2) J. Schwinger
Phys. Rev., 75, 1912 (1949)
- (3) A.A. Sokolow, N.P. Klepikow und I.M. Ternow,
Doklady Akad. Nauk UdSSR 89, 665 (1953)
JETP 23, 632 (1952)
- (4) A.A. Sokolow und I.M. Ternow
Doklady Akad. Nauk UdSSR 92, 537 (1953)
Doklady Akad. Nauk UdSSR 97, Nr. 5 (1954)
JETP 28, 431 (1955)
- (5) K.W. Robinson und D.M. Ritson CAP 14
K.W. Robinson CEA 28
K.W. Robinson CEA 44
A.A. Kolomenskij und A.N. Lebedew in CERN Symposium Bd. 1
S. 447 (Genf 1956)
A.A. Kolomenskij und A.N. Lebedew,
Suppl. Nuovo Cimento 7, 43 (1958)
I.G. Henry,
Phys. Rev., 106, 1057 (1957)
- (6) A.N. Matweew,
Nuovo Cimento, 6, 1296 (1957)
- (7) siehe (5)
- (8) F. Sauter und H.O. Wüster,
Zur Strahlungsrückwirkung auf die Betatronsoscillierungen
im AG-Elektronen-Synchrotron.
- (9) A.A. Kolomenskij und A.N. Lebedew,
Suppl. Nuovo Cimento, 7, 43 (1958)
- (10) K.W. Robinson CEA 44

31.5.58
Dr. Wü/Schw.

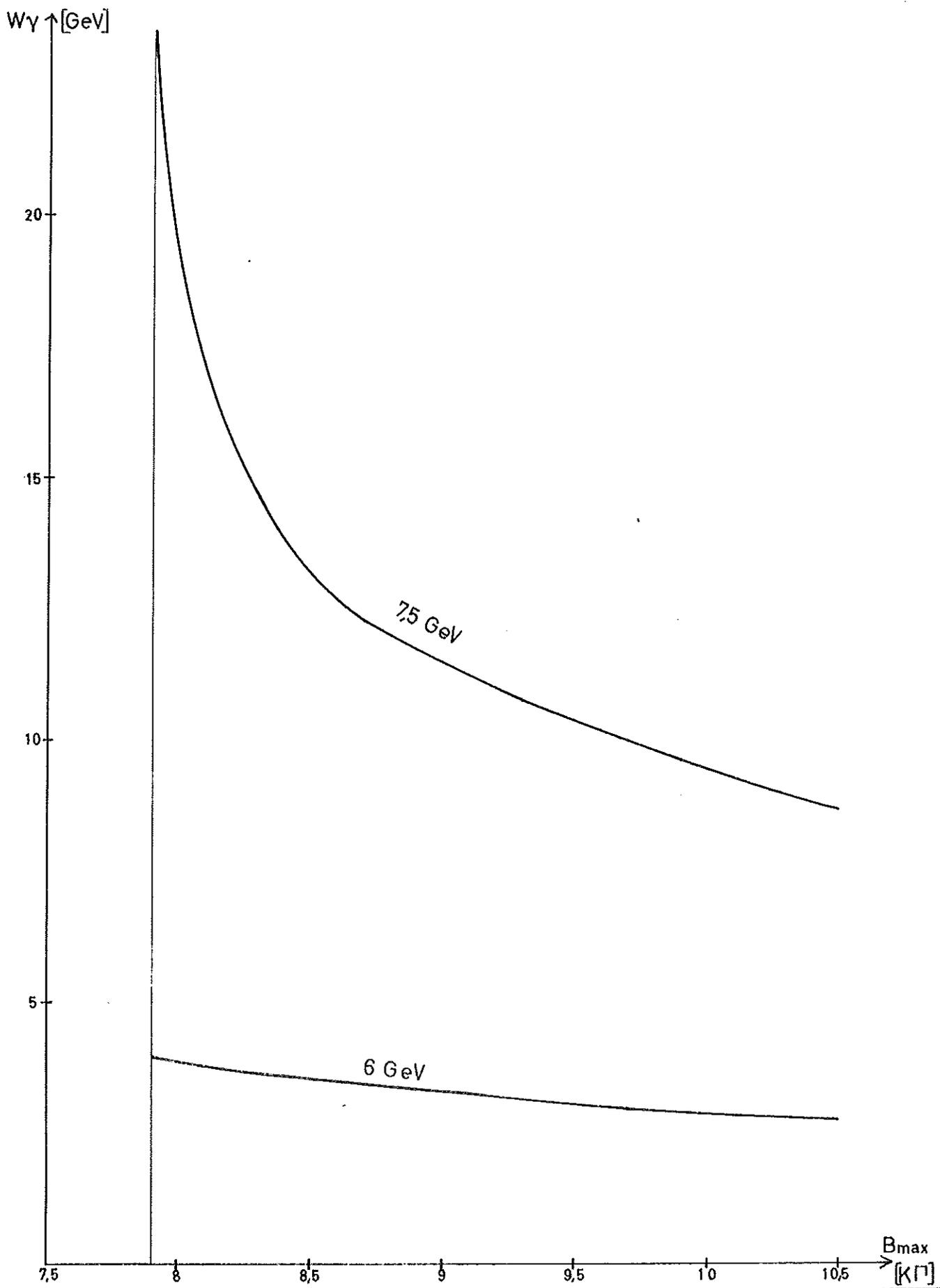


Fig. 1

Gesamter Energieverlust durch Strahlung während des Beschleunigungsvorgangs.

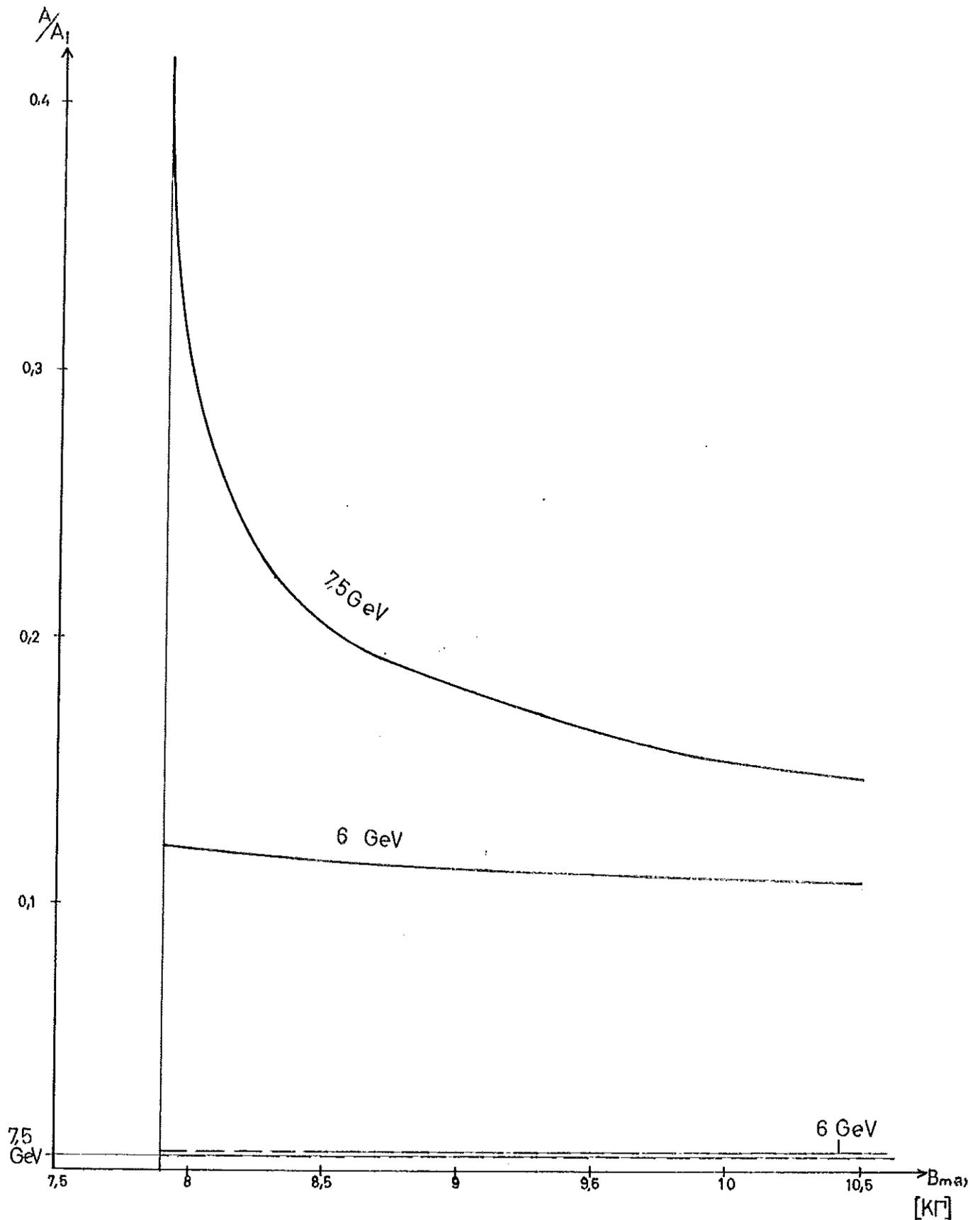


Fig. 2

Entdämpfung der Betatronschwingungen in klassischer Näherung.
 Amplitude in Einheiten der Amplitude beim Einschleiben. (40 MeV)

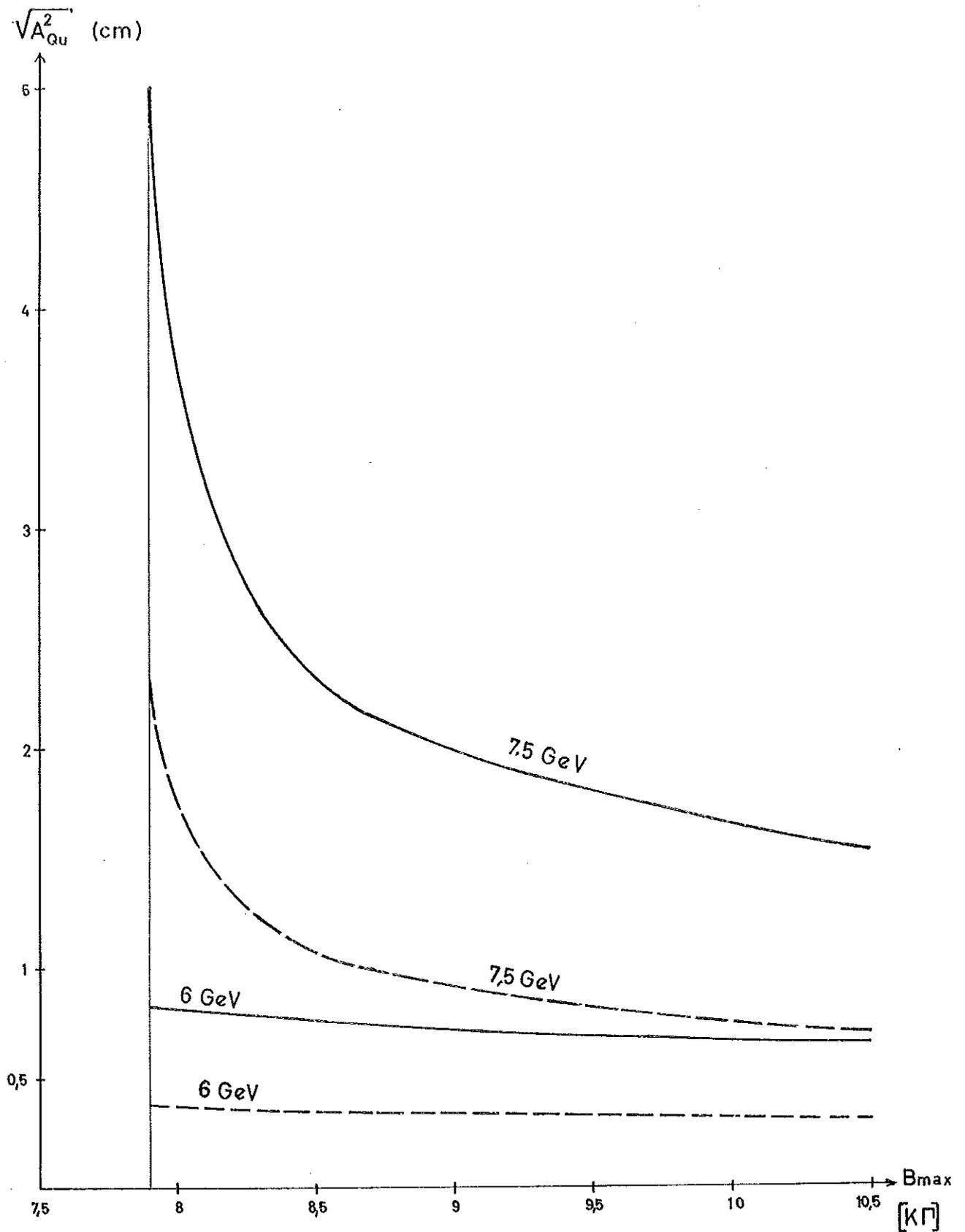


Fig. 3

Betatronschwingungsamplitude durch
 Quanteneffekte
 nach Kolomenskij
 nach Robinson

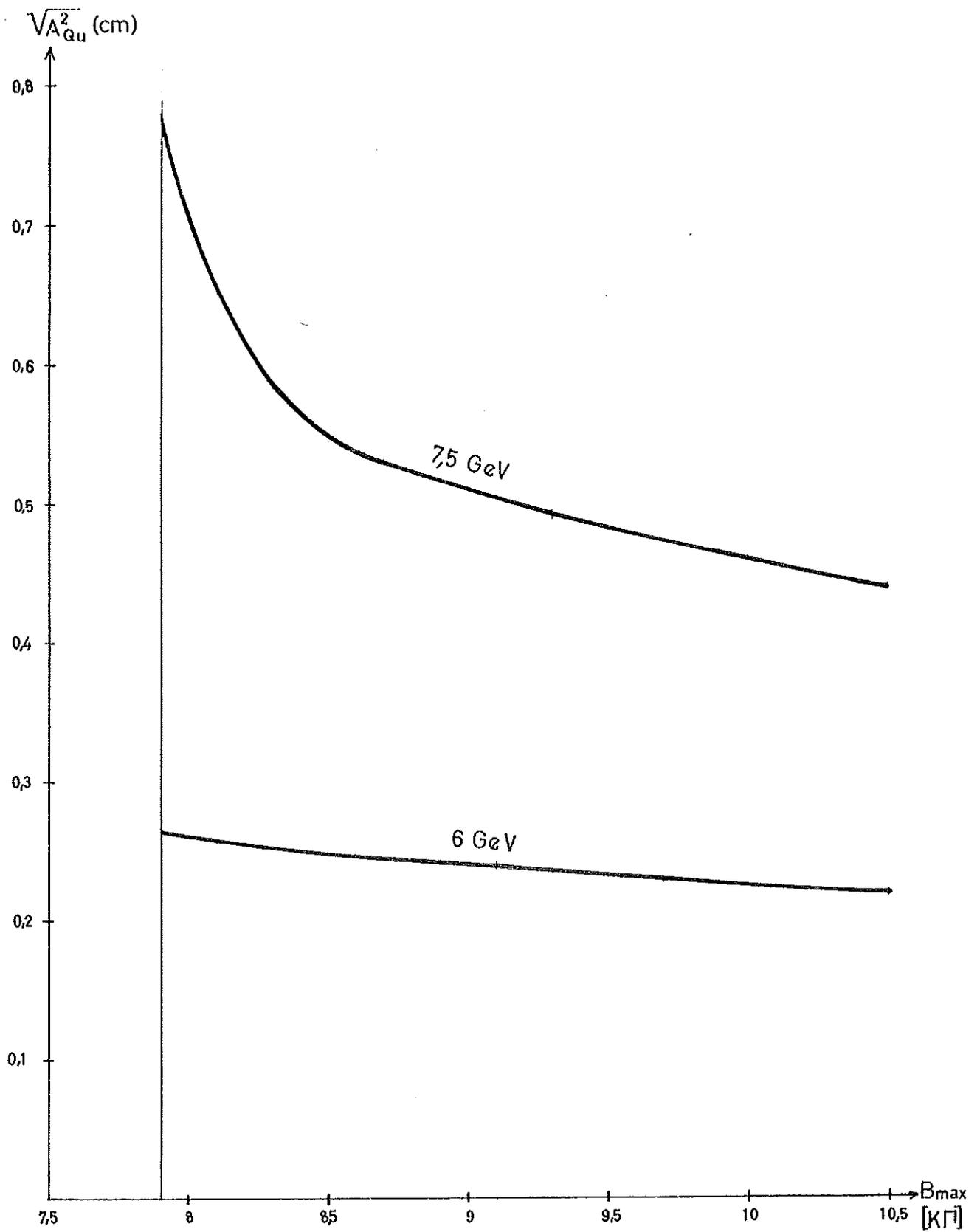


Fig. 4

Betatronschwingungsamplitude durch Quanteneffekte nach Matveev.