

Über die Auswirkung von Streuprozessen an Restgasatomen auf den Querschnitt des Elektronenstrahls eines Synchrotrons

Ein in einem Synchrotron umlaufendes Elektron kann durch einen Zusammenstoß mit einem Atom des in der Vakuumkammer verbliebenen Gasrestes zu Schwingungen um die Sollbahn angeregt oder ganz aus der Kammer gelenkt werden. Im Folgenden soll die Häufigkeit dieser Prozesse (während des Beschleunigungsvorganges) sowie deren Auswirkung auf die Endintensität und den Querschnitt des Elektronenstrahls untersucht werden.

I. Teilchenbahnen in einem Synchrotron

Die Schwingungsgleichungen, die die Betatronschwingung der Teilchen um die Sollbahn beschreiben, lauten:

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\vartheta} \frac{dr}{d\vartheta} + \frac{R^2}{\rho^2} (1-n)r = 0 \quad \frac{d^2 z}{d\vartheta^2} \frac{dp}{d\vartheta} + \frac{1}{\rho} \frac{dz}{d\vartheta} \frac{R^2}{\rho^2} nz = 0 \quad (1)$$

r mißt die Abweichung des Teilchens von der Sollbahn in horizontaler Richtung, z in vertikaler Richtung, n ist der Feldgradient $n = -\frac{\rho}{B} \frac{dB}{dr}$. Die Gleichungen werden durch die Substitution $\gamma = r \sqrt{\frac{\rho}{P_0}}$ und $\gamma = z \sqrt{\frac{\rho}{P_0}}$ in die Form überführt:

$$\gamma'' + \left[\frac{R^2}{\rho^2} n^* + \left(\frac{\rho'}{2\rho} \right)' - \left(\frac{\rho'}{2\rho} \right)^2 \right] \gamma = 0$$

Hierbei wurde für die r-Richtung $n^* = 1-n$ und für die z-Richtung $n^* = n$ gesetzt. Die Glieder $\left(\frac{\rho'}{2\rho}\right)'$, $\left(\frac{\rho'}{2\rho}\right)^2$ können als klein gegen $\frac{R^2}{\rho^2} n^*$

vernachlässigt werden. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y = a \sin \frac{R}{\rho} \sqrt{n^*} \mathcal{Y} + b \cos \frac{R}{\rho} \sqrt{n^*} \mathcal{Y}$$

Bei einem Synchrotron mit alternierendem Feldgradienten ist n eine Funktion von \mathcal{Y} . Näherungsweise kann jedoch die Bahnkurve durch die obigen Lösungen beschrieben werden, ohne daß die verschiedenen Lösungen in den Stücken mit verschiedenen Feldgradienten aneinandergespaßt zu werden brauchen, wenn man $\frac{R^2}{\rho^2} \sqrt{n^*}$ durch die Wellenlänge der Betatronschwingungen in einem derartigen Synchrotron ersetzt (smooth approximation). Es folgen für die Gleichungen der Betatronschwingungen die Lösungen:

$$y = a \sin Q \mathcal{Y} + b \cos Q \mathcal{Y}$$

$$r = a \sqrt{\frac{p_0}{p}} \sin Q \mathcal{Y} + b \sqrt{\frac{p_0}{p}} \cos Q \mathcal{Y}$$

Die Gleichungen für die r - und z -Komponente sind gleichartig, so daß die folgenden Betrachtungen für nur eine Komponente durchgeführt werden können.

Für hohe Energien beim Einschießen der Teilchen kann $p = \frac{E}{c}$ gesetzt werden. Der Anstieg von E wird durch den Anstieg des Magnetfeldes bestimmt und kann in der Form

$$E = E_1 + E_2 \sin^2 \frac{x \pi f^2}{c} \quad (2)$$

geschrieben werden. Läuft das Teilchen von einem x_0 bis x_{\max} im Synchrotron, so errechnen sich E_1 und E_2 aus der Einschuß- und Maximalenergie. Mit x soll die Laufstrecke des Teilchens in cm gemessen werden. Die gesamte Laufstrecke ist gleich: $x_{\max} - x_0$. Die im allgemeinen mit dem Winkel \mathcal{Y} geschriebenen Schwingungsgleichungen für die Betatronschwingungen können leicht für x umgeschrieben werden. $Q_x = \frac{Q}{2\pi R}$ gibt dann die Zahl der Schwingungen pro cm an.

$$r = a \sqrt{\frac{p_0}{p}} \sin(Q_x x) + b \sqrt{\frac{p_0}{p}} \cos Q_x x$$

$$r' = a Q_x \sqrt{\frac{p_0}{p}} \cos Q_x x - b Q_x \sqrt{\frac{p_0}{p}} \sin Q_x x \quad (3)$$

$r_0 = \sqrt{\frac{p_0(a_0^2 + b_0^2)}{p}}$ ist die Primärampplitude der Betatronschwingung beim Einschub der Teilchen im Synchrotron. Mit den obenstehenden Lösungen soll im Folgenden weitergerechnet werden.

II. Aufgabenstellung

Aus den Bewegungsgleichungen für die Betatronschwingungen erkennt man, daß Streuprozesse von Teilchen an Restgasatomen zu einer Änderung der Amplitude der Betatronschwingung führen. Wegen der begrenzten Dimensionen ist zu befürchten, daß ein Teil der Teilchen durch derartige Streuprozesse gegen die Kammerwände geraten und verlorengelangen.

Die erste Aufgabe besteht also in der Berechnung der zu erwartenden Verluste. Gleichzeitig kann die Zahl der überhaupt auftretenden Streuungen berechnet werden.

In einem Elektronen-Synchrotron werden die Betatronschwingungen durch die γ -Ausstrahlung der schnellbewegten Elektronen im Laufe der Beschleunigungsperiode aufgeschaukelt. Die hieraus resultierenden mittleren Betatronamplituden werden unter der Annahme berechnet, daß die Dämpfung durch Massenzunahme mit \sqrt{E} in Rechnung gesetzt werden kann. Weiterhin geht in den Ausdruck die Anfangsamplitude ein, das ist die Amplitude, bei der die Dämpfung zu wirken beginnt.

Es ist demnach die zweite Aufgabe, auszurechnen, ob auch die mittlere Amplitude eines Elektronenstrahls in einem vorgegebenen Vakuum unter Berücksichtigung der Streuprozesse nach zu erwartendem Anstieg schließlich mit der Wurzel aus der Energie gedämpft wird. Zu einer numerischen Berechnung der Endamplitude eines Elektronenstrahls in einem Synchrotron ist also in:*

$$r^2 = \frac{E_i}{E} A_i^2 \exp \left[\int_{t_0}^t (1-\alpha) \frac{S}{E} dt' \right] + \frac{55}{24 \cdot 3} \frac{e^2 \hbar F}{m R E} \int_{t_i}^t dt' \left(\frac{E}{mc^2} \right)^6 \exp \left[\int_{t_i}^t (1-\alpha) \frac{S}{E} dt' \right] \quad (4)$$

die Energie und die Amplitude des Elektronenstrahls an der Stelle einzusetzen, von der an die Aufblähung des Strahles durch Gasstreuung beendet ist, wenn überhaupt mit einer Dämpfung proportional der Wurzel aus der Energie gerechnet werden kann.

*Formel f.d. Strahlungsentdämpfung
DESY-Notiz A 2.26 IV (13)

III. Berechnung von Stoß- und Verlustzahlen

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen auf der Strecke $x+dx$ keinen Stoß erleidet, der es um einen Winkel \mathcal{D} ablenkt, sei $w(x+dx, \mathcal{D})$, wenn $\mathcal{D}_0 \leq \mathcal{D} \leq \mathcal{D}_1$ ist. Sie ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß sowohl die Strecke x als auch die Strecke dx ohne Stoß durchlaufen wird, also gleich $w(x, \mathcal{D}) \cdot w(dx, \mathcal{D})$ ist. Es ist aber $w(dx, \mathcal{D}) = 1 - n \sigma_{\text{St}}(\mathcal{D})$ wenn δ_{St} der Streuquerschnitt für Streuungen im Winkel zwischen \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1 ist. Er errechnet sich aus dem differentiellen Streuquerschnitt durch Integration $\delta_{\text{St}} = \int_{\mathcal{D}_0}^{\mathcal{D}_1} s(\mathcal{D}) d\mathcal{D}$. $n(x)$ ist die Zahl der Teilchen, die pro Kubikzentimeter im Gasrest enthalten ist. Entwickelt man $w(x+dx)$ und setzt dies dem oben ermittelten Ausdruck gleich, so erhält man:

$$w(x) = \exp - \int_0^x n \int_{\mathcal{D}_0}^{\mathcal{D}_1} s(x, \mathcal{D}) dx d\mathcal{D} \quad (5)$$

also die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen die Strecke x ohne Stoß in den Winkelbereich zwischen \mathcal{D}_0 und \mathcal{D}_1 durchläuft.

Aus den Abmessungen der Vakuumkammer und den Fokussierungseigenschaften des Magnetfeldes lassen sich für jedes Synchrotron die Winkel bestimmen, die als untere Grenze für Streuprozesse angesehen werden können, für die ein Teilchen mit großer Wahrscheinlichkeit verlorenght. Es zeigt sich, daß in den meisten Fällen der Beitrag der oberen Grenze vernachlässigt werden kann. Das ist äquivalent einer Integration bis \mathcal{D}_1 gleich ∞ . Zur Berechnung der Stoßzahlen insgesamt wird \mathcal{D}_0 gleich Null gesetzt.

Die Zahl der eingeschossenen Teilchen sei z_0 , so ist die Zahl der Teilchen, die auf der gesamten Laufstrecke keinen Stoß erleiden:

$$z_s = z_0 \exp - \int_0^x n \int_0^{\infty} s(x, \mathcal{D}) dx d\mathcal{D} \quad (6)$$

IV. Berechnung der mittleren Betatronamplitude

Bewegt sich ein Teilchen bis zu dem ersten Streuprozeß an der Stelle x_1 entsprechend der Gleichung I (3), so sei die aus den Ungenauigkeiten beim Einschub herrührende Betatronamplitude durch:

$$|r_0| = \sqrt{\frac{p_0}{p} (a_0^2 + b_0^2)}$$

gegeben. An der Stelle x_1 dem Ort eines Streuproesses ändert sich sprunghaft die Neigung der Bahn um den Streuwinkel \mathcal{G}_1 . Das Teilchen bewegt sich nach der Lösung r_1 weiter. An der Stelle x_1 müssen also die Lösungen r_0 und r_1 übereinstimmen. Weiter muß die Ableitung von r_0 gleich der Ableitung r_1 plus der Änderung durch den Streuprozeß um \mathcal{G}_1 sein. Für kleine \mathcal{G} ist:

$$r_0 = r_1 = \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} (a_0 \sin Q_x x_1 + b_0 \cos Q_x x_1) = \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} (a_1 \sin Q_x x_1 + b_1 \cos Q_x x_1)$$

$$r_0' = r_1' + \mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} (a_0 \cos Q_x x_1 - b_0 \sin Q_x x_1) + \mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} (a_1 \cos Q_x x_1 - b_1 \sin Q_x x_1)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist leicht anzugeben.

$$a_1 = a_0 + \frac{\mathcal{G}_1}{Q_x} \sqrt{\frac{p_1}{p_0}} \cos Q_x x_1$$

$$b_1 = b_0 - \frac{\mathcal{G}_1}{Q_x} \sqrt{\frac{p_1}{p_0}} \sin Q_x x_1$$

Die Gleichungen lassen sich für den Fall, daß das Teilchen L Streuprozesse hinter sich hat, erweitern.

$$a_L = a_0 + \frac{1}{Q_x \sqrt{p_0}} \sum_{l=1}^L \sqrt{p_l} \mathcal{G}_l \cos Q_x x_l$$

$$b_L = b_0 - \frac{1}{Q_x \sqrt{p_0}} \sum_{l=1}^L \sqrt{p_l} \mathcal{G}_l \sin Q_x x_l$$

Hieraus errechnet sich die Amplitude der Teilchen nach dem L -ten Stoß:

$$|r_d|^2 = |r_0|^2 + \frac{2}{\sqrt{p} Q_x} \sum_l \mathcal{G}_l \sqrt{p_l} \left\{ a_0 \cos Q_x x_l - b_0 \sin Q_x x_l \right\} + \frac{1}{Q_x^2 p} \sum_n \sum_l \sqrt{p_n p_l} \mathcal{G}_l \mathcal{G}_n \cos Q_x (x_l - x_n)$$

Es kann nun die mittlere Amplitude vieler Teilchen an der Stelle x_{max} errechnet werden. Hierzu wird eine Mittelbildung über die möglichen Streuwinkel sowie über alle möglichen Teilchenbahnen von Elektronen, die sich durch die Anzahl der bis zum Punkt x_{max} erlittenen Stöße unterscheiden, durchgeführt werden. Hierzu wird der Laufweg von x_0 bis x_{max} in eine sehr große Zahl sehr kleiner Wegstücke Δx eingeteilt. Dann wird die Summe über die Stöße in eine Summe über die Beiträge der einzelnen Wegstücke Δx_μ umgewandelt.

$$\begin{aligned}
 |\bar{r}|^2 = |r_0|^2 &+ \frac{2}{\sqrt{P} Q_x} \sum_{i=0}^J \sum_{\mu}^M \mathcal{G}_{\mu i} \sqrt{p(x_\mu)} \left\{ a_0 \cos Q_x x_\mu + b_0 \sin Q_x x_\mu \right\} \\
 &+ \frac{1}{Q_x^2 P} \sum_{i=0}^J \sum_{\mu}^M \sum_{\lambda}^{\Delta} \mathcal{G}_{\mu i} \mathcal{G}_{\lambda i} \sqrt{p(x_\mu) p(x_\lambda)} \cos Q_x (x_\mu - x_\lambda) \\
 &+ \frac{1}{Q_x^2 P} \sum_{i=0}^J \sum_{\lambda}^{\Delta^{\mu \neq \lambda}} p(x_\mu) \mathcal{G}_{i\lambda}^2
 \end{aligned}$$

Die Summe über i soll die Summation über sehr viele Teilchen andeuten und x_μ entsprechend x_λ ist gleich $\sum_{\nu=0}^M \Delta x_\nu + \frac{\Delta \mu}{2}$.

Die Summation über die Teilchen ist mit der Summation über die Stöße vertauschbar. Die Zahl der Teilchen, die an der Stelle $x_\mu, x_\mu + \Delta x$ einen Stoß in das Winkelelement $\mathcal{G}, \mathcal{G} + d\mathcal{G}$ erleiden, ist gleich der Elementarwahrscheinlichkeit $dW(\mathcal{G}, x) = N_s(\mathcal{G}, x_\mu) d\mathcal{G} \Delta x$. Diese Elementarwahrscheinlichkeit geht in die Summe als Gewichtungsfaktor ein. Ersetzt man die Summation durch eine Integration, so steht:

$$\begin{aligned}
 |\bar{r}|^2 = |r_0|^2 &+ \frac{2n}{\sqrt{P} Q_x} \sum_{\mu=0}^M \sqrt{p(x_\mu)} \int_{\mathcal{G}_1}^{\infty} \mathcal{G}_s(\mathcal{G}, x_\mu) d\mathcal{G} \Delta x \left\{ a_0 \cos Q_x x_\mu + b_0 \sin Q_x x_\mu \right\} \\
 &+ \frac{n}{P Q_x} \sum_{\mu \neq \lambda}^M \sum_{\lambda}^{\Delta} \sqrt{p(x_\mu)} \int_{\mathcal{G}_1}^{\infty} \mathcal{G}_s(\mathcal{G}, x_\mu) d\mathcal{G} \int_{\mathcal{G}_1}^{\infty} \mathcal{G}_s(\mathcal{G}, x_\lambda) \sqrt{p(x_\lambda)} d\mathcal{G} \Delta x^2 \cos Q_x (x_\mu - x_\lambda) \\
 &+ \frac{n}{Q_x^2 P} \sum_{\mu}^M p(x_\mu) \int_{\mathcal{G}_1}^{\infty} \mathcal{G}_s^2(\mathcal{G}, x_\mu) d\mathcal{G} \Delta x_\mu
 \end{aligned}$$

Die Summation über die Wegstrecke kann durch eine Integration ersetzt werden. Für den in der Praxis im allgemeinen stets erfüllten Falle, daß sich die Funktionen, die als Faktoren vor den trigonometrischen Funktionen stehen, innerhalb einiger Wellenlängen, nur sehr geringfügig ändern, ergibt die Integration über die ersten drei Integrale Null. Es bleibt schließlich für die mittlere Amplitude der Betatronschwingung bei Berücksichtigung von Streuprozessen zwischen Elektronen und Restgasatomen der Ausdruck:

$$\bar{r}^2 = r_0^2 + \frac{n}{pQ_x^2} \int_0^x \int_{\mathcal{G}_1}^{\infty} \mathcal{G}^2 s(\mathcal{G}, x) p(x) d\mathcal{G} dx \quad (7)$$

V. Berechnung des Streuquerschnittes eines relativistischen Elektrons an einem Gasatom

Den folgenden Berechnungen liegt ein einfacher physikalischer Prozeß zugrunde. Ein parallel einfallender Elektronenstrahl trifft auf ein Atom. Beobachtet wird die Verteilung der Elektronen nach der Wechselwirkung mit dem Atom in Abhängigkeit der erlittenen Impulsänderung. In die Rechnung gehen ein:

- die Primärenergie des einfallenden Elektrons
- der Primärimpuls des einfallenden Elektrons
- der Streuwinkel der Elektronen nach dem Stoß
- der Impuls des auslaufenden Elektrons
- die Energie des auslaufenden Elektrons

Es müssen Annahmen gemacht werden über:

- die Verteilung der positiven Ladung im Atomkern
- die Ladungsverteilung der Elektronen im Kern

Allgemein gilt der Impuls- und Energiesatz. In Bild 1 sind die Bezeichnungen eingetragen. Das Primärteilchen wird grundsätzlich mit dem Index 1 unten und dem Index 0 vor dem Stoß oben und einem Strich oben nach dem Stoß bezeichnet. Für den Fall

der Streuung an Atomelektronen wird das gestoßene Teilchen mit dem Index 2-1 unten und oben mit der gleichen Induzierung wie das stoßende Teilchen versehen.

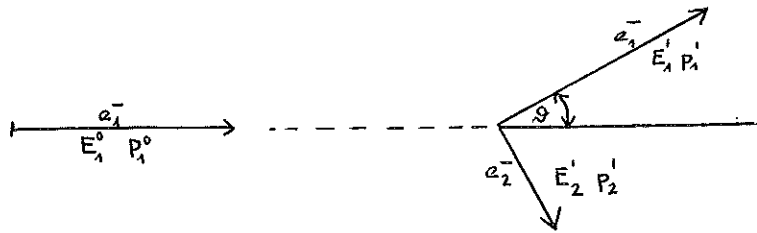


Bild 1

Die Impulsänderung des ersten Teilchens wird mit $q = p_1^0 - p_1^1$ bezeichnet. Aus dem Energie- und Impulssatz errechnen sich die folgenden Beziehungen:

- 1) Die Impulsänderung bei der elastischen Streuung für $m_1 > m_2$ und $E_2 = m_2 c^2$ sowie für $E_1^0 \gg m_1 c^2$:

$$q^2 = \frac{4E_1^2}{c^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 4 |p_1^1|^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (8)$$

Diese Bedingung ist für den Fall, daß das gestoßene Teilchen ein Kern ist, erfüllt.

- 2) Bei der inelastischen Streuung φ als Funktion von E_2^1 und E_1^0 .

$$\cos \varphi_1 = \frac{E_1^0 - m_1^2 c^2 + (E_2^1 - m_2 c^2)(E_1^0 + m_2 c^2)}{\sqrt{[E_1^0 - m_1^2 c^2][E_2^1 - m_2 c^2]^2 - m_2^4 c^4}} \quad (9)$$

Für kleine E_2^1 und $E_1^0 \gg m_1 c^2$ kann der Ausdruck entwickelt werden

$$\varphi_1 \approx \sqrt{\frac{2(E_2^1 - m_2 c^2) \cdot m_2 c^2}{E_1^0}} \quad m_1 - m_2$$

- 3) Die Impulsänderung für den Fall der elastischen Streuung ist gleich:

$$q^2 = \frac{4E_1^0 - E_1^0 (E_2^1 - m_2 c^2)}{c^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{E_2^1 - m_2 c^2}{c^2} \quad (10)$$

das ist für kleine $E_2^1 - m_2 c^2$, d.h. für kleine φ noch sehr gut durch:

$$q^2 = \frac{4E_1^0}{c^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (10a)$$

anzunähern.

- 4) Die Energieänderung für große Energien $E_1^0 \gg mc^2$ ergibt sich zu:

$$E_1^0 - E_1^1 = 2E_1 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (11)$$

Des Weiteren wurden folgende Bezeichnungen und Näherungen in der Arbeit verwendet:

$$E^2 = E^2 + p^2 c^2 \quad \begin{array}{l} \text{die Ruheenergie: } E_0 = mc^2 \\ \text{die Ruhemasse : } m \end{array}$$

Für hohe Energien kann E_0^2 gegen $p^2 c^2$ vernachlässigt werden. Es kann dann geschrieben werden:

$$\frac{E}{c} = p \quad \frac{v}{c} = 1$$

In einem Synchrotron interessieren vor allem Streuprozesse, die eine Ablenkung in kleinste Winkel zur Folge haben. Die folgenden Rechnungen werden einmal an die von Möller durchgeführten Berechnungen angeschlossen, zum anderen werden hierbei die Untersuchungen von Koppe, v. Borries und Lenz, die für die Elektronenmikroskopie durchgeführt wurden, benutzt.

- 5) Die Streuquerschnitte werden mit Hilfe der Bornschen Näherung berechnet. Der ein- und auslaufende Elektronenstrom wird durch eine ebene Welle beschrieben:

$$\Psi_{n1} = \Psi_{n1}(\mathbf{r}_1) e^{i \frac{E_1 t}{\hbar}} = a_1 e^{i \frac{1}{\hbar}(p_1 \mathbf{r}_1 - E_1 t)} \quad (12)$$

Der Index n gibt den Quantenzustand des freien Elektrons an. Die Amplituden a lauten für die verschiedenen Spinstellungen:

$$\frac{\sqrt{mc^2 + E}}{4(\pi \hbar)^{3/2} \sqrt{2E}} \begin{pmatrix} -c \frac{p_x - i p_y}{mc^2 + E} \\ c \frac{p_z}{mc^2 + E} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{\sqrt{mc^2 + E}}{4(\pi \hbar)^{3/2} \sqrt{2E}} \begin{pmatrix} -c \frac{p_z}{mc^2 + E} \\ -c \frac{p_x + i p_y}{mc^2 + E} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12a)$$

Der Zustand des Atoms soll durch den Ausdruck

$$\Psi_K = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P(-1)^P \prod_L \phi_L = \Psi_K e^{i/\hbar E_K t}$$

beschrieben werden. ϕ_L sind die Atomeigenfunktionen der gebundenen Elektronen einschließlich der Spinfaktoren. Die N -Elektronen werden über die Eigenfunktionen permutiert, wobei bei jeder Inversion ein Vorzeichenwechsel durchzuführen ist. Dies soll der Operator $P(-1)^P$ anzeigen. K gibt den gesamten Quantenzustand des Atomes an.

Der Zustand des gesamten Systems läßt sich in der Form schreiben:

$$\Psi_{\text{ges}} = \sum_K \sum_{n_1} a_{n_1 k^0} \Psi_{n_1} \Psi_K^*$$

Die Verteilung der Ladung im Atomkern wird mit $\gamma (1/R_A)$ bezeichnet. Für die Atomeigenfunktionen wird für kleine Winkel die Hartreesche Näherung, für größere Winkel die Fermi-Verteilung herangezogen.

Störungsrechnungsansatz

Nach (12) bedeutet $|a_{n_1 k}|^2$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich das erste Elektron im Zustand n_1 befindet und daß das Atom den Zustand k besitzt. Man erhält nun die zeitliche Änderung eines Zustandes, dessen Koeffizient $a_{n_1 k'}$ ist, indem man vom Grundzustand des Systems: $|a_{n_1 k^0}|^2 = 1$ und alle anderen $|a_{n_1 k'}|^2 = 0$ ausgeht, zu:

$$i\hbar \frac{da_{n_1 k'}}{dt} = (n_1^0 k^0 | u | n_1 k') e^{-i/\hbar (E_1^0 + E_k^0 - E_1' - E_k') t}$$

Auch hier wird der Anfangszustand mit dem Index Null, der Endzustand mit einem Strich bezeichnet.

Der Wechselwirkungsterm

Der in die Störungsrechnung eingehende Wechselwirkungsterm $(n_1^0 k^0 | u | n_1^1 k^1)$ berechnet sich aus dem Coulomb-Potential des Atomkernes mit der Ladungsverteilung $\varphi(\mathbf{r}_A)$ und den zum Atom gehörenden Skalaren- und Vektorpotentialen der Elektronen in folgender Weise:

$$-e^2 \iint \sum_{L=2}^{n+1} \psi_{n_1^0}(\mathbf{r}_1) \psi_K^0 \frac{z \varphi(\mathbf{r}_A)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A|} \psi_{n_1^1}^*(\mathbf{r}_1) \psi_K^{1*} e^{i/\hbar (E_{n_1^0} - E_{n_1^1}) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_A}{c}} d\tau_1 d\tau_A$$

$$-e^2 \iint \sum_{L=2}^{N+1} \psi_{n_1^0}(\mathbf{r}_1) \psi_K^0 \frac{1+\alpha^2+\alpha^4}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_L|} \psi_{n_1^1}^*(\mathbf{r}_1) \psi_K^{1*} e^{i/\hbar (E_{n_1^0} - E_{n_1^1}) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_L}{c}} d\tau_1 d\tau_2$$

Die Komponenten von α sind die Matrizen:

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \\ 0100 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 000-i \\ 00i \ 0 \\ 0-i00 \\ i000 \end{pmatrix} \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0010 \\ 000-1 \\ 1000 \\ 0-100 \end{pmatrix}$$

\mathbf{r}_A ist der Ortsvektor des Atomkerns. Der Faktor $e^{i/\hbar (E_{n_1^0} - E_{n_1^1}) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_L}{c}}$ ergibt sich aus der Retardierung der Diracschen Strom- und Ladungsmatrizen. Im ersten Term ist er für unendlich große Kernmasse gleich eins. Der gesamte Ausdruck ist über alle N Elektronen des Atoms zu summieren.

Auswertung des Ansatzes nach der Störungstheorie

Integriert man

$$i\hbar \frac{da_{n_1^1 k^1}}{dt} = (n_1^0 k^0 | u | n_1^1 k^1) e^{i/\hbar (E_{n_1^0} + E_K^0 - E_{n_1^1} - E_K^1) t}$$

über die Grenzen von $t=0$ bis t und bildet den Betrag, davon die Ableitung nach der Zeit, so erhält man für große Zeite t die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Zustandes $n_1^0 k^0$ in den Zustand $n_1^1 k^1$ in der Zeiteinheit:

$$W = \Delta |a_{n_1^1 k^1}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |(n_1^0 k^0 | u | n_1^1 k^1)|^2 \delta E$$

Multipliziert mit der Elementarzelle des Impulsraumes und dividiert durch die Stromdichte des einlaufenden Stromes, danach integriert über dE' ergibt sich der differentielle Streuquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{16\pi^4 \hbar^2}{c^4} \frac{p_1'}{p_1^0} E_1^0 E_1' \sin \mathcal{J} \cdot d\mathcal{J} d\varphi \sum_{\text{Spin}} |(n_1^0 k^0 | u | n_1' k')|^2 \quad (13)$$

Auswertung des Wechselwirkungsterms für kleine Streuwinkel

Mit Hilfe eines Fourie-Integrals kann der Wechselwirkungsterm umgeschrieben werden. Daraufhin kann zuerst über $d\tau_1$ integriert werden. Hierbei ergibt sich der Impulssatz. Weiter läßt sich die Integration über $dp_x dp_y dp_z$ ausführen, und man erhält:

$$\frac{4e^2 \pi \hbar^2 c^2}{c^2 q^2 - \Delta E^2} \sum_{\text{Spin}} \sum_{l=2}^{N+1} \left\{ \begin{aligned} & a_{n_1^0} \Psi_K^0 z \rho(\kappa_A) \Psi_K'^* a_{n_1'} e^{i \frac{1}{\hbar} q \kappa_A} d\tau_L d\tau_A \\ & - \left(a_{n_1^0} \Psi_K^0 (1 + \alpha^l \alpha^1) a_{n_1'} \Psi_K'^* e^{i \frac{1}{\hbar} q \kappa_L} d\tau_L \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Der letzte Term im Integral läßt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung: $\text{icdiv} \Psi_K^0 \alpha^l \Psi_K'^* = \frac{\partial}{\partial t} \Psi_K^0 \Psi_K'^*$ umschreiben. Die Differentiation läßt sich ausführen und ergibt den Faktor $\frac{\Delta E}{c\hbar}$. Für kleine q könnten die Exponentialfunktionen entwickelt werden. Je nach den vor den Integralen stehenden Faktoren wird die Entwicklung beim ersten, zweiten oder dritten Glied abgebrochen. Es bleibt so der Ausdruck:

$$d\sigma = E_1^0 E_1' \frac{p_1'}{p_1^0} \frac{16e^4 \pi^6 \hbar^6}{|c^2 q^2 - \Delta E^2|^2} \left| \sum_{\text{Spin}} \sum_{l=2}^{N+1} \left\{ \begin{aligned} & a_{n_1^0} \Psi_K^0 z \rho(\kappa_A) \left(1 - \left(\frac{iq}{\hbar}\right) \kappa_A\right) a_{n_1'}^* \Psi_K'^* d\tau_L d\tau_A \\ & - \left(a_{n_1^0} \Psi_K^0 \left(1 + \frac{i}{\hbar} q \kappa_L - \left(\frac{q}{\hbar} \kappa\right)^2 + \frac{\Delta E}{c\hbar} \alpha^1\right) \Psi_K'^* a_{n_1'}^* d\tau_L \right) \end{aligned} \right\} \right|^2 \sin \mathcal{J} d\mathcal{J} d\varphi$$

Er kann in einen Term für die elastische Streuung und einen weiteren für die unelastische Streuung aufgespalten werden. Weiterhin können die Summen über die verschiedenen Spin-

stellungen für $E > E_0$:

$$\sum_{\text{Spin}} \left| a_{n_i^0} a_{n_i^*} \right|^2 = \frac{1}{16^2 (\pi \hbar)^6} (1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2})$$

$$\text{und } \sum \left| a_{n_i^0} a_{n_i^*} q + \frac{\Delta E}{c} a_{n_i^0} \alpha^1 a_{n_i^*} \right|^2 = \frac{q^2}{16^2 (\pi \hbar)^6} \left(1 - \beta \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{1 + mc^2}{E\beta^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + 2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{\beta} \sin^6 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

vor die Integrale vorgezogen werden. Ist \mathcal{M} der Einheitsvektor in Richtung von $a_{n_i^0} a_{n_i^*} q + \frac{\Delta E}{c\hbar} a_{n_i^0} \alpha^1 a_{n_i^*}$, so lautet die Streuformel schließlich für kleine q, ϑ :

$$d\sigma = \frac{E_i^0 E_i^1}{|c^2 q^2|^2} \frac{P_i^1}{P_i^0} \left\{ \left| \sum_{l=2}^{N+1} \Psi_K^0 \left(\frac{q}{\hbar} r_0 \right)^2 \Psi_K^* d\tau \right|^2 + \frac{q^2 E_i^0 E_i^1 P_i^1}{|c^2 q^2 - \Delta E^2|^2 P_i^0} \left| \sum_{l=1}^{N+1} \Psi_K^0(\mathcal{M} r) \Psi_K^* d\tau \right|^2 \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Der Betrag des Quadrats des letzten Integrals läßt sich näherungsweise in:

$$\int \Psi_K^0(r') \Psi_K^0(r) \Psi_K^0(r) \Psi_K^0(r') (\mathcal{M} r) (\mathcal{M} r') d\tau' d\tau \approx \int \Psi_K^0 \Psi_K^0(\mathcal{M} r)^2 d\tau$$

umformen. Führt man auch beim elastischen Streuquerschnitt im Integral $\int \Psi_K^0 \Psi_K^0(\mathcal{M} r)^2 d\tau$ die Integrationen über die Winkel φ und ϑ aus und setzt für $\sum_n \int 4\pi \Psi_K^0 \Psi_K^* r^4 dr = \Theta_n$, so ergibt sich der Streuquerschnitt für kleine Winkel wie folgt:

$$d\sigma = 2\pi \frac{e^4 E^2}{c^4 \hbar^4} \left| \frac{1}{3} \Theta_n \right|^2 \sin \vartheta d\vartheta + 2\pi \frac{4e^4 E^4}{3c^2 \hbar^2} \Theta_n \frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta d\vartheta}{(c^2 q^2 - \Delta E^2)^2} \quad (15)$$

Hierbei wurden Glieder mit $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ und höherer Ordnung gegen 1 vernachlässigt.

Umformung des Wechselwirkungsterms für große Streuwinkel.

Zur Auswertung des Wechselwirkungsterms für große Streuwinkel sollen die Terme für elastische und unelastische Streuung getrennt geschrieben werden:

$$\left(c^2 \sum \left(\int \int \int a_i' \psi_K \left(\frac{2g(\kappa_A) e^{\frac{iq}{\hbar} \kappa_A}}{|\kappa_1 - \kappa_A|} - \frac{e^{\frac{iq}{\hbar} \kappa_L}}{|\kappa_1 - \kappa_L|} \right) a_i' \psi_K^* d\tau_1 d\tau_L d\tau_A \right) \right)_{k=k}$$

$$+ \left(+ c^2 \int \int a_i^0 \psi_K^0 \frac{1 + \alpha^1 \alpha^L}{|\kappa_1 - \kappa_L|} e^{\frac{i}{\hbar} \Delta E \frac{\kappa_1 - \kappa_L}{c}} e^{\frac{i}{\hbar} q \kappa_L} a_i' \psi_K^* d\tau \right)_{k \neq k}$$

Das Potential des elastischen Teiles kann nach Wentzel durch ein abgeschirmtes Coulomb-Potential ersetzt werden, für den Fall, daß man den Kernradius gleich Null setzt: $\frac{1}{\kappa_1 - \kappa_A} - \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_L} \approx \frac{1}{\kappa_1} e^{-\alpha r}$. Das Integral läßt sich dann elementar auswerten.

Bei der Berechnung des Integrals für die unelastische Streuung verfährt man analog den Berechnungen für kleine Winkel. Der aus den Übergangsdichten resultierende Term kann als klein vernachlässigt werden, denn für große q geht $f(x)e^{iqx}$ in $f(0)$ über. Es ist aber im Gegensatz zu $\psi_K(0) \psi_K^*(0)$ stets $\kappa(\psi_K(0) \psi_K^*(0))$ an der Stelle $\kappa = 0$ gleich Null. Der erste Term wird nach Heisenberg-Bewiloga zu:

$$q^2 \text{Si} - q^2 z \left[1 - \int_0^z \xi^2 d\xi \left[\left(\frac{\psi(\xi)}{\xi} \right)^2 - v \right] \left(\frac{\psi(\xi)}{\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} v \right] = \left| \int \psi_{K^0} \psi_K^* e^{\frac{i}{\hbar} q \kappa} d\tau \right|^2_{k \neq k}$$

gegeben. Die Näherung liefert bis zu Kernladungszahlen $z=6$ gute Werte. Die aus den Summen über die Spins resultierenden Glieder $1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ sollen durch 1 ersetzt werden. Dies ist für kleine Winkel sicher erlaubt und bedeutet für große Winkel lediglich eine Vergrößerung des Beitrages, der aber wegen der absoluten Kleinheit der Streuquerschnitte bei großen Winkeln keine Rolle spielt. Insgesamt ergibt sich damit der Streuquerschnitt für große Winkel zu:

$$d\sigma = \frac{e^4 z^2}{\hbar^4 c^4} \frac{E^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta}{\left| (\alpha)^2 - \left(\frac{q}{\hbar} \right)^2 \right|^2} + 4 \frac{E^2 e^4}{\left| q^2 - \frac{\Delta E^2}{c^2} \right|^2} \text{Si} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (16)$$

Anpassung der Streuquerschnitte für große und kleine \mathcal{S}

Die beiden Näherungen für kleine und große Winkel sollen jeweils für die elastische und unelastische Streuung so aneinander angepaßt werden, daß die Formeln für den Grenzfall $q = 0$ ineinander übergehen.

Beim elastischen Streuquerschnitt kann dies durch Bestimmung des Parameters α geschehen. Es folgt für α : $\alpha^2 = \frac{6z}{\Theta_n}$. Zur Vereinfachung der Formeln sollen im folgenden gesetzt werden: Für die inelastische Streuung ist eine Anpassung nicht so einfach möglich. Für kleine Winkel geht die Funktion S_i in einen Ausdruck der Form βq über. Durch Vergleich mit der Näherung für kleine Streuwinkel erkennt man jedoch, daß die Funktion mit q^2 gegen Null gehen muß. Der von Heisenberg angegebene Näherungsausdruck kann nach dem Vorschlag von Koppe in die Form $S = \frac{q}{q+r} S_i$ umgewandelt werden. Dieser Ausdruck geht für kleine q in die geforderte Näherung, für große q dagegen in das Integral S_i über. Darüber hinaus soll das Integral $S_i = Z \frac{q^2}{q^2 + \delta^2}$ gesetzt werden, wobei sich δ^2 durch Anpassung an den für kleine q erhaltenen Streuquerschnitt an der Stelle $q=0$ ergibt, so daß insgesamt für die inelastische Streuung für alle Winkel der Ausdruck:

$$\frac{e^4 z E^2}{|c^2 q^2 - \Delta E^2|^2} \frac{c^2 q^2}{c^2 q^2 + \frac{\eta^2}{2}}$$

steht. Durch Vergleich kann man sehen, daß diese empirisch gefundene Funktion durchweg den Verlauf gut wiedergibt und nur an einer Stelle bis zu etwa 20 % über die numerisch ermittelten Ergebnisse hinausragt.

Somit lauten also die Streuquerschnitte für die elastische und inelastische Streuung:

$$d\sigma = z^2 e^4 E^2 \frac{\sin \Theta d\Theta d\varphi}{|\eta^2 + c^2 q^2|^2} + \frac{e^4 E^2 z}{|c^2 q^2 - \Delta E^2|^2} \frac{c^2 q^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi}{c^2 q^2 + \frac{\eta^2}{2}} \quad (17)$$

Dieser Ausdruck läßt sich gut in den Formeln in Abschn. III und IV weiter verwerten, da die Integrationen über die Winkel und darauf folgend über den Energieverlauf sowie auch die Erwartungswerte für die mittleren Winkel elementar durchgeführt werden können. Da bei einem elastischen Streuprozeß die Mindestenergie zum Anheben eines Atomelektrons in einen höheren Quantenzustand aufgebracht werden muß, darf die Integration über den elastischen Streuquerschnitt nur bis zu einem dieser Energie entsprechenden Winkel ausgeführt werden.

VI. Integration der Streuquerschnitte

1. Berechnung der Stoßzahlen

Zur Berechnung der Zahl der Teilchen, die während der Beschleunigungsperiode keinen Stoß erleiden, wird die Integration der Formel (6), nach Einsetzen des Ausdruckes für die Streuquerschnitte (17) über den gesamten zulässigen Winkelbereich, d.h. für die elastische Streuung von 0 bis ∞ und für die inelastische von q_{\min} bis ∞ durchgeführt. Hierbei wird q_{\min} nach (9) durch $\sqrt{2(E_2' - mc^2)/mc^2}$ gegeben, wobei $(E_2' - mc^2) = T_2$ gleich der minimalsten Anregungsenergie der Gasatome sein muß. Nach Einsetzen der Werte erhält man die Formel:

$$z = z_0 \exp \left[\frac{n z^2 r e^4}{n^2} \cdot L \left\{ 1 + \frac{z}{z} \ln \frac{\frac{n^2}{z^2} + c^2 q_{\min}^2}{c^2 q_{\min}^2} \right\} \right] \quad (18)$$

Man erkennt, daß der Exponent von der Energie unabhängig ist, so daß bei der Integration über den Weg nur die Weglänge L , die das Teilchen im Beschleuniger zurücklegt, als Faktor ergibt.

2. Berechnung der Verluste in einem Synchrotron durch Gasstreuung

Zur Berechnung der Verluste soll davon ausgegangen werden, daß grundsätzlich ein Winkel ϑ_{\min} angegeben werden kann, für den ein Streuprozeß zum Verlust des Teilchens führt. Streuprozesse in Winkel, die kleiner sind als dieser Grenzwinkel,

führen zur Aufschaukelung der Betatronamplitude. ϑ_{\min} wird als untere Grenze in die Formel (6) eingesetzt. Der Beitrag der oberen Grenze kann vernachlässigt werden. Für die inelastische Streuung ist darauf zu achten, daß $\frac{E \vartheta_{\min}}{c} \geq q_{\min}$ ist. Im anderen Fall muß die Integration für diese Energiebereiche stückweise bis zu dem Winkel q_{\min} durchgeführt werden. Die Zahl der in der Kammer verbleibenden Teilchen ergibt sich nach Integration über den Winkel aus (17):

$$Z_r = Z_0 \exp \left[\pi e^4 z^2 n \left(\frac{dx}{\eta^2 + E^2 \vartheta_{\min}^2} + \frac{2}{\eta^2 z} \int \ln \frac{\frac{\eta^2}{z} + E^2 \vartheta^2}{E^2 \vartheta^2} dx \right) \right] \quad (19)$$

Für die Integration über den Weg wird entsprechend (2) näherungsweise $E = E_1 + \varepsilon x^2$ gesetzt. Da die Hauptbeiträge zum Integral von den kleinen Energien herrühren, und die Näherungskurve durchweg für große Energien unterhalb der Kurve, Formel (2), liegt, ist diese Näherung sicher zulässig.

Die Integration läßt sich elementar durchführen, und es steht:

$$Z_r = Z_0 \exp \left\{ \pi e^4 z^2 n \left[\frac{1}{\vartheta^2 \varepsilon^2 (x_1^2 - x_2^2)} \left(\frac{1}{2x_1} \ln \frac{x - x_1}{x + x_1} - \frac{1}{2x_2} \ln \frac{x - x_2}{x + x_2} \right) + \frac{2}{\eta^2 z} \left(x \ln \frac{\frac{\eta^2}{z} \vartheta^2 + (E_1 + \varepsilon x^2)^2}{(E_1 + \varepsilon x^2)^2} + x_1' \ln \frac{x + x_1'}{x - x_1'} + x_2' \ln \frac{x + x_2'}{x - x_2'} - x_1'' \ln \frac{x + x_1''}{x - x_1''} - x_2'' \ln \frac{x + x_2''}{x - x_2''} \right) \right] \right\}_{x_0}^{x_m} \quad (20)$$

wobei die x_1', x_1'', x_1 und x_2', x_2'', x_2 die Wurzeln der biquadratischen Gleichungen:

$$\frac{\eta^2}{\vartheta^2 \varepsilon^2} + \frac{E_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{2E_1}{\varepsilon} x^2 + x^4 = 0$$

$$\frac{\eta^2}{\vartheta^2 2\varepsilon^2} + \frac{E_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{2E_1}{\varepsilon} x'^2 + x'^4 = 0$$

$$\frac{E_1^2}{\varepsilon^2} + \frac{2E_1}{\varepsilon} x''^2 + x''^4 = 0$$

sind.

3. Berechnung des mittleren Strahldurchmessers

Entsprechend den Ausführungen unter IV sollen nur Streuprozesse mitgezählt werden, die Streuwinkel kleiner als gleich ϑ_{\min} zur Folge haben. Nach Einsetzen der Streuquerschnitte (17) in (7) und Integration über den Winkel ergibt sich für die mittlere Amplitude:

$$\begin{aligned} \left| \bar{\kappa} \right|^2 = \left| \kappa_0 \right|^2 + \frac{\pi n z^2 e^4}{E(x) Q_x^2} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{E(x')} \left\{ \ln \frac{\eta^2 + E^2 \vartheta^2}{\eta^2} - \frac{E^2 \vartheta^2}{\eta^2 E^2 \vartheta^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\eta^2}{2} + E^2 \vartheta^2}{\frac{\eta^2}{2} + 2 T_2 m c^2} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

Die Integration führt auf Ausdrücke, die für die numerische Auswertung sehr umständlich sind. Für die benötigte Genauigkeit reicht eine numerische oder graphische Integration aus. Das Verhalten der Funktion kann durch folgende Betrachtungen ermittelt werden. Für kleine x , d.h. auch für langsame Energiezunahme kann die Integration durchgeführt werden:

$$E(x) = E_i + \varepsilon x^2 \approx E_i \quad \text{für} \quad \varepsilon x^2 \ll E_i$$

$$\left| \bar{\kappa} \right|^2 = \left| \kappa_0 \right|^2 + \frac{\pi n z^2 e^4}{E_i^2 Q_x^2} x \left\{ \ln \frac{\eta^2 + E_i^2 \vartheta^2}{\eta^2} - \frac{E_i^2 \vartheta^2}{\eta^2 + E_i^2 \vartheta^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\eta^2}{2} + E_i^2 \vartheta^2}{\frac{\eta^2}{2} + 2 T_2 m c^2} \right\} \quad (22)$$

Man sieht, daß die Amplitude im Anfang linear mit der Laufstrecke zunimmt. Für große x denkt man sich das Integral bis zu einem genügend x^* durchgeführt. Die Integration von x^* bis x läßt sich dann ausführen, und es steht, wenn c der Beitrag des Integrals von 0 bis x^* ist:

$$\begin{aligned} \left| \bar{\kappa} \right|^2 = \left| \kappa_0 \right|^2 + \frac{\pi n z^2 e^4}{Q_x^2} \frac{1}{E(x)} \left[c + \frac{1}{\varepsilon \sqrt{E(x^*)}} \left\{ \ln \frac{E^2(x^*) \vartheta^2}{\eta^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{E^2(x^*) \vartheta^2}{\frac{\eta^2}{2} + 2 T_2 m c^2} + \frac{1}{2} - 3 \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon \sqrt{E(x)}} \left\{ \ln \frac{E^2(x) \vartheta^2}{\eta^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{E^2(x) \vartheta^2}{\frac{\eta^2}{2} + 2 T_2 m c^2} + \frac{1}{2} - 3 \right\} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Für große x überwiegt also der Faktor $\frac{1}{E}$, der vor dem Integral steht, das bedeutet, daß die mittlere Amplitude auch unter Berücksichtigung der Gasstreuung nach einer gewissen Zeit proportional \sqrt{E} gedämpft wird.

Zur Berechnung des Strahldurchmessers des Elektronenstrahls in einem storage ring kann die Integration wegen der Energiekonstanz bei nicht zu hohen Energien über eine große Anzahl von Umläufen durchgeführt werden. Es ergibt sich für die mittlere Amplitude:

$$\begin{aligned} \left| \bar{r} \right|^2 - \left| r_0 \right|^2 + \frac{\pi n z^2 e^4}{E(x)^2 Q_x^2} \times \left\{ \ln \frac{\eta^2 + E^2 \varrho^2}{\eta^2} - \frac{E^2 \varrho^2}{\eta^2 + E^2 \varrho^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\eta^2}{2} + E^2 \varrho^2}{\frac{\eta^2}{2} + 2T_2 mc^2} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Die Zahl der Teilchen, die durch Einzelstöße verlorengehen, ergibt sich zu:

$$z_v = z_0 \left(1 - \exp \left\{ - \left[\frac{\pi e^4 z^2 n}{\eta^2 + E^2 \varrho_{\min}^2} + \frac{2\pi e^4 z^2 n}{\eta^2 z} \ln \frac{\eta^2 + E^2 \varrho^2}{E^2 \varrho^2} \right] x \right\} \right) \quad (25)$$

Im Anhang sind die Formeln dieses Abschnittes für einige im Bau befindliche oder geplante Maschinen numerisch ausgewertet.

Anhang

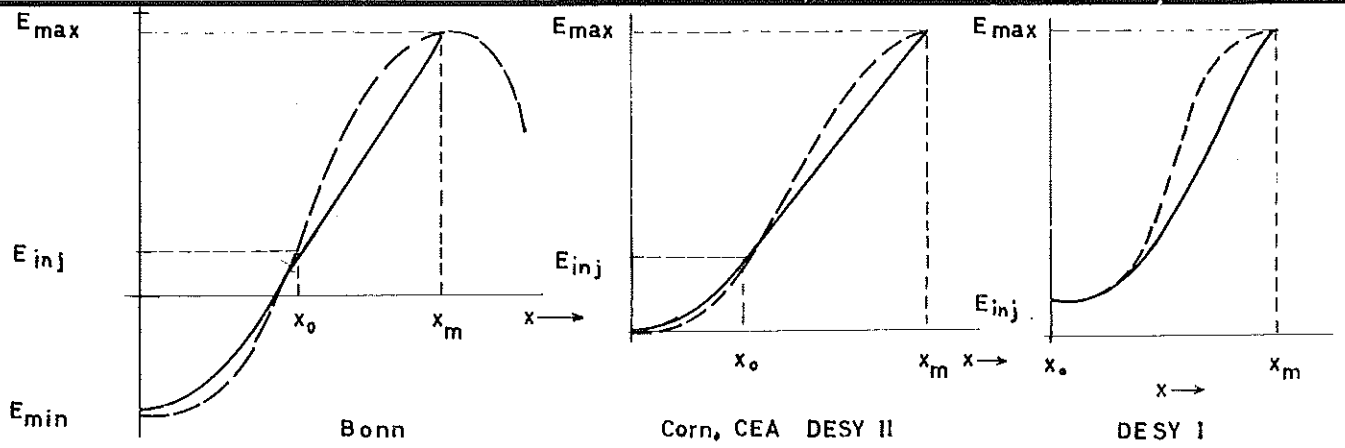
Im Anhang sind die berechneten Teilchenverluste für die Maschinen in Bonn, Cornell, CEA und zwei Variationen der Maschine in Hamburg zusammengestellt. Die Maschinenparameter sowie die dem Energieanstieg zugrunde gelegten Annahmen sind in Form von Tabellen und Bildern dargestellt. Für die in der Vakuumkammer verbleibenden Gasreste wurde die Annahme gemacht, daß Öldiffusionspumpen Verwendung finden und sich hauptsächlich Kohlenwasserstoffe mit einer mittleren Anzahl einmal von 2 zum anderen von 5 C-Atomen in der Vakuumkammer befinden.

Des weiteren wurden die Betragsquadrate der Amplitudenzunahme durch Gasstreuung für die beiden DESY-Projekte ausgerechnet.

Bei der Verwendung von Quecksilberdampfpumpen ergeben sich unter der Annahme, daß in der Vakuumkammer vorwiegend Quecksilberdämpfe vorhanden sind, bedeutend höhere Teilchenverluste, da die Streuquerschnitte proportional z^2 sind.

Als letztes wurden die Teilchenverluste sowie die Amplitudenzunahme, die ein Elektronenstrahl in einem storage ring nach einer Umlaufzeit von 1 min erleidet, berechnet. Die für den storage ring angenommenen in die Rechnung eingehenden Parameter wurden an gleicher Stelle aufgeführt.

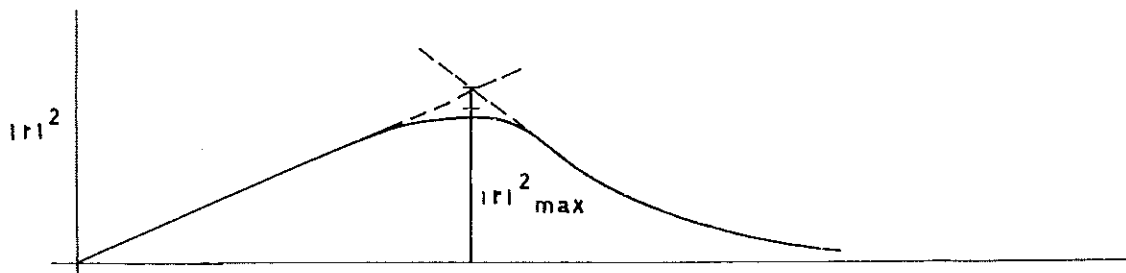
Bild 2



Energieverlauf als Funktion der Laufstrecke

----- wirklicher Verlauf
 ————— angenommener Verlauf

Bild 3



Verlauf der Amplitude als Funktion der Laufstrecke der Elektronen.

Bild 4

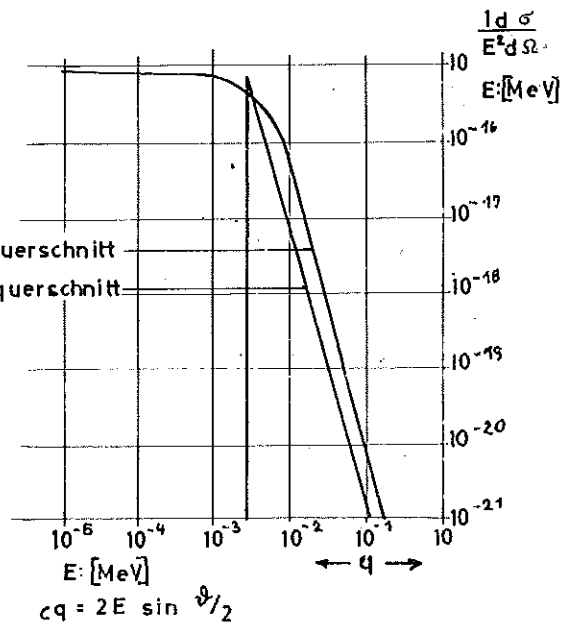
Kleinwinkel-Streuung von Hochenergie-Elektronen an C, Streuquerschnitt.

Gesamtstreuquerschnitt

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{\pi e^4 z^2}{k^2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{q_{\text{max}}^2 + q_{\text{min}}}{q_{\text{min}}} \right)$$

$\approx 1,05 \cdot 10^{-19} \text{ cm}^2$

inelastischer Steuerquerschnitt
 elastischer Steuerquerschnitt



DESY	gez.:	Datum	Name	Gruppe: M 1
	gepr.:	159	Ne	Zchg. No.:
	gen.:			Blatt No.:
Maßstab:	DESY-NOTIZ			Ersatz für:
				Ersetzt durch:
				x ausf.:
				ausgef. von:
				Auftrag No.:

Tabelle der Teilchenzahlen pro cm^3

p (Torr)	Moleküle	C-Atome ^x
$5 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{12}$	$0,8 \cdot 10^{13}$
$1 \cdot 10^{-5}$	$0,32 \cdot 10^{12}$	$0,16 \cdot 10^{13}$
$5 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{11}$	$0,8 \cdot 10^{12}$
$1 \cdot 10^{-6}$	$0,32 \cdot 10^{11}$	$0,16 \cdot 10^{12}$

x) Unter der Annahme, dass die mittlere Zahl der in einem Kohlenwasserstoff-Molekül enthaltene C gleich 5 ist.

Sonstige Konstanten

für C: $\eta^2 = 3,031 \cdot 10^{-5} [\text{MeV}]^2$ $z = 6$ $cq_{\text{min}} = 2,7 \cdot 10^{-3}$ $T_2 = 7,5 \text{ eV}$	Tabelle einiger Θ_n (nach Lenz) in $(\text{cm})^2$	
	He $0,66 \cdot 10^{-16}$	F $3,30 \cdot 10^{-16}$
	Be 5,48 "	Ne 2,83 "
	B 5,43 "	Ca 18,3 "
	C 4,62 "	Zn 11,3 "
	N 4,22 "	Ge 14,15 "
	O 3,74 "	As 14,49 "

Maschinen-Parameter (siehe Bild 2)

	Bonn	Cornell	CEA	DESY I	DESY II	
f	50	30	30	50	50	Hz
E_{inj}	3	2	20	40	40	MeV
E_{max}	500	1500	6000	6000	6000	MeV
Q	2,25	3,3	6,25	6,25	6,25	
L	$18,1 \cdot 10^7$	$48,2 \cdot 10^7$	$47,2 \cdot 10^7$	$30 \cdot 10^7$	$27,6 \cdot 10^7$	cm
E_{min}	- 90	0	0	+ 40	0	MeV
x_c	$11,915 \cdot 10^7$	$1,8257 \cdot 10^7$	$2,89 \cdot 10^7$	0	$2,45 \cdot 10^7$	cm
x_m	$30,000 \cdot 10^7$	$50,00 \cdot 10^7$	$50,00 \cdot 10^7$	$30,00 \cdot 10^7$	$30,00 \cdot 10^7$	cm
ε	$0,65556 \cdot 10^{-14}$	$0,600 \cdot 10^{-14}$	$2,4 \cdot 10^{-14}$	$6,622 \cdot 10^{-14}$	$6,6667 \cdot 10^{-14}$	MeV / cm^2

Teilchenverluste

p [Torr]	Bonn	Cornell	CEA	DESY I	DESY II		für C-Atome pro Molekül im Mittel
$5 \cdot 10^{-5}$	45	90	42	33	25	%	2 C-Atome
$1 \cdot 10^{-5}$	11	38	10	8	5	%	
$5 \cdot 10^{-6}$	6	19	5	4	3	%	
$1 \cdot 10^{-6}$	2	5	10	1	0,6	%	
$5 \cdot 10^{-5}$	77	99	75	64	50	%	5 C-Atome
$1 \cdot 10^{-5}$	25	70	24	18	10	%	
$5 \cdot 10^{-6}$	13	47	12	10	7	%	
$1 \cdot 10^{-6}$	3	11	3	2	1	%	

Teilchenverluste bei Verwendung von Quecksilber-Dampfpumpen

[Hg-Dampf in der Vakuumkammer] $z=80$

p	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	Torr
DESY I	99,99	99,8	97	50	%
DESY II	99,99	99,0	90	47	%

Amplituden $|r_g|_{\max}^2$ für 2 C-Atome pro Molekül im Mittel $|r| = \sqrt{|r_0|^2 + |r_g|^2}$

p	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	Torr
DESY I	7,0	1,4	0,70	0,14	[cm ²] bei ca 80 MeV
DESY II	1,8	0,36	0,18	0,036	[cm ²] bei ca 130 MeV

Storage - Ring

 $Q = 2,25$ $R = 5$ m $E = 500$ MeV $\vartheta_{\min} \cdot 10^{-3}$ [2 C-Atome pro Gasmolekül]nach 1 Minute Umlaufzeit: $|r_g|^2 = 5,0$ cm² Verluste: 95 %