

DESY A 2.43

Hamburg, den 4. März 1959
He/Schw.

Synchrotronschwingungen

Die vom Linearbeschleuniger in das Synchrotron eingeschossenen Elektronen zeigen eine Unschärfe in Energie, weisen Radial- und Vertikal-amplituden Δr und Δz und Richtungsabweichungen \dot{r} und \dot{z} auf. Dabei gibt es zu jeder Energieabweichung ΔE ein bestimmtes $(\Delta r)_0$ (closed orbit).

Das überschüssige $\Delta r - (\Delta r)_0$ und $r \neq 0$ geben Veranlassung zu einer radialen Betatronschwingung, entsprechend führt $\Delta z \neq 0$ zu einer vertikalen Betatronschwingung. Wir betrachten hier nur Teilchen mit $(\Delta r)_0 = \alpha \frac{\Delta E}{E_s} R_0$ (reine Synchrotronschwingungen), beachten aber, daß wir für die Betatronschwingungen Platz vorsehen müssen.

Die Synchrotronschwingung eines Elektrons gehört zum Freiheitsgrad der Longitudinalbewegung.

1. Ableitung der Differentialgleichung

Zur Ableitung gehen wir aus von den Hamiltonschen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die für die ψ -Komponente lauten:

$$\frac{dP_\psi}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\psi} \quad (2)$$

\mathcal{H} spaltet im allgemeinen auf in einen Teil, der von den Impulsen P_k unabhängig ist ("potentielle Energie") und in einen Teil, der von den Koordinaten x_k unabhängig ist ("kinetische Energie")

$$\frac{dP_\psi}{dt} = f_1(\psi) \quad (1a)$$

$$\psi = M\varphi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = f_2(P_\psi) \quad (2a)$$

Kombiniert ergeben diese Gleichungen eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

Gleichung (1a) bedeutet einfach: zeitliche Änderung des Drehimpulses = Drehmoment

$$\frac{dP_\psi}{dt} = \frac{eU}{2\pi} \sin \psi$$

Bezogen auf ein mit dem Sollelektron rotierendes Bezugssystem:

$$\frac{d\Delta P_\psi}{dt} = \frac{eU}{2\pi} (\sin \psi - \sin \psi_0) \quad (3)$$

Durch Kombination von bekannten Beziehungen im AG-Synchrotron

$$\frac{\Delta r}{R_0} = \alpha \frac{\Delta P}{P_S} \approx \alpha c \frac{\Delta P}{E_S}$$

$$\frac{\dot{\psi}}{\omega_0} = \frac{\dot{\varphi}}{M\omega_0} = - \frac{\Delta r}{R_0}$$

erhalten wir

$$\frac{d\psi}{dt} = - \frac{c^2 M \alpha}{R_0 E_S} \Delta P_\psi \quad (4)$$

Das ist bis auf den Unterschied von kinematischem Impuls Δp_f und kanonischem Impuls ΔP_f bereits Gleichung (2).

Es gilt:

$$\Delta P_f = P_f - P_{f,s} = (p + eA_f)g - (p_s + eA_{f,s})g_0$$

(Drehimpuls = Impuls \cdot Projektion des Dreharmes)

Umformung und Substitution $B = \frac{\partial A_f}{\partial r} + \frac{1}{r} A_f$ ergibt einfach:

$$\Delta P_f = \Delta p_f \cdot R_0 \quad (5)$$

damit lautet Gleichung (2)

$$\frac{d\psi}{dt} = - \frac{c^2 M \alpha}{E_s R_0 g_0} \Delta P_f \quad (6)$$

Gleichung (3) und (6) kombiniert

$$- \frac{d}{dt} \left\{ \frac{E_s}{\omega_0^2 M \alpha} \dot{\psi} \right\} = \frac{eU}{2\pi} (\sin \psi - \sin \psi_0) \quad (7)$$

2. Formulierung des Problems

Man hat also als Differentialgleichung

$$\ddot{\psi} + \frac{\dot{E}_s}{E_s} \dot{\psi} + \frac{eU \omega_0^2 M \alpha}{2\pi E_s} \{ \sin \psi - \sin \psi_s \} = 0 \quad (8)$$

die beschleunigende Kraft auf das Sollteilchen

$$K_s = - \frac{eU(t) \cdot \sin \psi_s(t)}{2\pi R_0} \quad \text{und entsprechend die}$$

Änderung der Sollenergie

$$\dot{E}_s = \frac{\omega_0 eU(t) \sin \psi_s(t)}{2\pi} \quad (9)$$

bzw.

$$\dot{B} = \frac{R_0 U(t) \cdot \sin \psi_s(t)}{2\pi g_0 c^2} \quad (9a)$$

Da über die Parameter R_0 , S_0 , M , α etc. und den sinusförmigen Feldverlauf schon verfügt wurde, ist frei wählbar

- 1) das Spannungsprogramm $U(t)$
- 2) B_{\min} , das minimale Feld (Vormagnetisierung)
 B_{\max} , das maximale Feld (Übersteuerung)

Diese Parameter sind so zu bestimmen:

- a) Es sollen möglichst wenig Elektronen während des Beschleunigungsvorganges verlorengehen.
- b) Die Parameter sollen vernünftig technisch zu realisieren sein, vor allem sollen sie genügend genau eingehalten werden können.

Das eben formulierte Problem zerfällt physikalisch in zwei Teile:

Den Einfangvorgang und die Beschleunigung auf Energien von etwa 1 - 2 GeV;

die Teilchenverluste bei hohen Energien durch Strahlung.

Hier wird nur der erste Teil behandelt, und außerdem bleibt die Rückwirkung des Elektronenstroms auf das Hochfrequenzsystem außer Betracht.

Statt $U(t)$ wollen wir zur mathematischen Behandlung gemäß (9) oder (9a) $\psi_s(t)$ als noch willkürliche Zeitfunktion wählen. (In der Praxis gibt man $U(t)$ vor, die Sollphase $\psi_s(t)$ stellt sich gemäß (9) oder (9a) ein.

$$\ddot{\psi} + \frac{\dot{B}}{B} \dot{\psi} + \frac{B}{B} M \omega_0 \alpha \sin \psi_s(t) \left\{ \sin \psi - \sin \psi_s(t) \right\} = 0 \quad (10)$$

Instabil wollen wir die Elektronenbewegung (8) oder (10) dann nennen, wenn das Elektron gegen die Kammerwand prallt und damit verlorengeht. Dafür bestehen zwei Möglichkeiten:

Instabilität 1. Art

Die Schwingungsamplitude $(\Delta r)_{\text{Synchr.}} + (\Delta r)_{\text{Betatron}}$ des stabil an das Sollteilchen gebundenen Elektrons ist zu irgendeinem Zeitpunkt größer als der Kammerradius. In unserem Falle bedeutet das: $(\Delta r)_{\text{Synchr.}} > 3 \text{ [cm]}$

Instabilität 2. Art

Die sinusförmige Kraft in der Differentialgleichung bringt mit sich, daß nur bestimmte Anfangswerte $(\psi_0, \dot{\psi}_0)$ zu stabilen Schwingungen führen.

3. Durchführung der Lösung

Die Differentialgleichung (8) bzw. (10) ist eine nichtlineare Schwingungsgleichung und enthält außerdem zeitabhängige (gegenüber ψ langsam veränderliche Faktoren;

die Dämpfung
$$2\beta(t) = \frac{\dot{B}}{B} \quad (11)$$

$$\omega_{syn}(t) = \sqrt{\frac{\dot{B}}{B}} \sqrt{\frac{M\omega_0\alpha}{\sin\psi_s(t)}} \quad (12a)$$

und die Frequenz

$$= \sqrt{\frac{eU\omega_0^2 M\alpha}{2\pi E_s}} \quad (12b)$$

Für kleine Zeiten kann man die Dämpfung streichen und außerdem $\omega_{syn} = \text{const.}$ setzen. Diese Näherung wird Aufschluß geben über die Verhältnisse bei der Injektion, nach diesen Ergebnissen werden die Parameter

B_{min} und $\psi_s(0)$ (bzw. $U(0)$) zu wählen sein.

Für diese Differentialgleichung

$$\ddot{\psi} + \omega_{syn}^2 \{ \sin\psi - \sin\psi_s \} = 0 \quad (13)$$

erhalten wir das 1. Integral mit dem Energiesatz, wobei wir die Konstante so bestimmen, daß für $t = 0$

$$\psi = \psi_0 \quad \text{und} \quad \dot{\psi} = 0 \quad \text{wird.}$$

$$\dot{\psi}^2 - 2\omega_{syn}^2 \{ \cos\psi + \sin\psi_s \cdot \psi \} + 2\omega_{syn}^2 \{ \cos\psi_0 + \sin\psi_s \cdot \psi_0 \} = 0 \quad (14)$$

Wegen $\frac{\dot{\psi}}{M\omega_0} = -\frac{\Delta r}{R_0}$ können wir statt $\dot{\psi}$ auch Δr einführen

$$(\Delta r)^2 - 2C \{ \cos\psi + \sin\psi_s \cdot \psi \} + 2C \cdot \{ \cos\psi_0 + \sin\psi_s \cdot \psi_0 \} = 0 \quad (15)$$

$$C = \frac{\dot{B} R_0^2 \alpha}{B M \omega_0 \sin\psi_s} \quad (16a)$$

$$= \frac{eUR_0^2 \alpha}{2\pi ME_s} \quad (16b)$$

Gleichung (15) gibt uns die Bahn der Elektronen in der $(\psi, \Delta r)$ -Ebene.

Das Potential ist (s. Fig. 13):

$$V(\psi) = - C \cdot \left\{ \cos \psi + \sin \psi_s \cdot \psi \right\} \quad (17)$$

$$\frac{dV(\psi)}{d\psi} = 0, \quad \text{das ist } -\sin \psi + \sin \psi_s = 0 \quad (18)$$

liefert uns mit der 1. Lösung

$$\psi = \psi_s \quad (19)$$

das Amplitudenmaximum der Elektronenbahn

$$(\Delta r)_{\max} = \sqrt{\frac{B}{B}} \sqrt{\frac{R_0^2 \alpha_{\max}^2}{M \omega_0}} \sqrt{\frac{\cos \psi_s - \cos \psi_0}{\sin \psi_s} - (\psi_0 - \psi_s)} \quad (20a)$$

$$= \sqrt{\frac{e U R_0^2 \cdot \alpha_{\max}}{\pi M E_s}} \sqrt{\cos \psi_s - \cos \psi_0 - \sin \psi_s \{ \psi_0 - \psi_s \}} \quad (20b)$$

(Berechnet für B_{\min} in Abständen von 4Γ , angefangen von -4Γ bis 40Γ und für ψ_s in Abständen von 4° , angefangen von 2° bis 42° , für $\psi_0 = 50^\circ$ und $\psi_0 = 100^\circ$).

Die 2. Lösung

$$\psi = \psi_0 = +\pi - \psi_s \quad (21)$$

liefert den Grenzykel (s. Fig. 1-12):

$$(\Delta r)_{\text{Extr}} = \pm \sqrt{\frac{B}{B}} \sqrt{\frac{2 R_0^2 \alpha_{\max}}{M \omega_0}} \sqrt{\frac{\cos \psi + \cos \psi_s}{\sin \psi_s} + (\psi - \pi + \psi_s)} \quad (22a)$$

$$\pm \sqrt{\frac{e U R_0^2 \alpha_{\max}}{M \pi E_s}} \sqrt{\cos \psi + \cos \psi_s + \sin \psi_s \{ \psi - \pi + \psi_s \}} \quad (22b)$$

$$\psi_0 = +\pi - \psi_s \quad \text{und} \quad \psi = \psi_s$$

liefern das Maximum des Grenzykels

$$(\Delta r)_{\text{Extr, max}} = \sqrt{\frac{B}{B}} \sqrt{\frac{2 R_0^2 \alpha_{\max}}{M \omega_0}} \sqrt{2 \cotg \psi_s + 2 \psi_s - \pi} \quad (23a)$$

$$(\Delta r)_{\text{Ext}, \text{max}} = \sqrt{\frac{eU R_0^2 \alpha_{\text{max}}}{M \pi E_s}} \sqrt{2 \cos \psi_0 + \sin \psi_0 \{2 \psi_0 - \pi\}} \quad (23b)$$

(Berechnet für B_{min} in Abständen von 4Γ , angefangen von -4Γ bis 40Γ und für die Sollphase ψ_0 in Abständen von 4° , angefangen von 2° bis 42°).

Alle Anfangswerte, die innerhalb der Grenzkurve (22a) bzw. (22b) liegen, führen zu stabilen Schwingungen. Diese Grenzkurven sind für Sollphasen zwischen 2° und 24° von 2° zu 2° gezeichnet. Dabei hängen die Amplituden noch linear von $\frac{B}{B}$ ab.

Für den Injektionszeitpunkt gilt

$$\sqrt{\frac{\dot{B}}{B}} \approx \frac{\sqrt{B_{\text{max}} (B_i - B_{\text{min}})}}{|B_i|} \sqrt{\omega} \quad (24)$$

Je näher wir mit dem Minimumfeld an das Injektionsfeld rücken, desto kleiner werden die Amplituden (zum Injektionszeitpunkt und zu benachbarten Zeiten).

Man ersieht aus den vorliegenden Zeichnungen bzw. Rechnungen, daß man eine Sollphase von etwa $-\psi_0 = 2^\circ$ zu wählen hat, um alle Elektronenbunche einzufangen, wegen

$$(\Delta r) \sim \sqrt{\frac{\dot{B}}{B}} \sim \sqrt{(B_i - B_{\text{min}})}$$

müßten wir $(B_i - B_{\text{min}})$ sehr klein wählen, etwa

$$B_i - B_{\text{min}} \approx 0,2\Gamma$$

um Instabilitäten 1. Art zu vermeiden.

Diese Forderung ist aus technischen Gründen kaum zu realisieren:

1. Aus Gleichung (9a) und Gleichung (24) folgt:

$$\sin(-\psi_0) = \text{const.} \frac{\sqrt{(B_i - B_{\text{min}})}}{U} \quad (\text{zum Injektionszeitpunkt})$$

Das Minimumfeld B_{min} und die Umfangsspannung U sind aber nur mit gewisser Genauigkeit von Puls zu Puls zu reproduzieren

$$\frac{\delta(\sin(-\psi_0))}{\sin(-\psi_0)} = -\frac{1}{2} \frac{\delta B_{\text{min}}}{(B_i - B_{\text{min}})} - \frac{\delta U}{U} + \frac{\delta \omega}{\omega}$$

Bei $B_i - B_{\min} = 0,2r$ führt ein $\delta B_{\min} = 1r$ zu einem Schwanken der Sollphase von 250 %. Das ist untragbar, da dann der Strom sich von Puls zu Puls sehr stark ändert.

2. Ein δB_{\min} von $1r$ führt zu $B_{\min} > B_i$, d.h. das Injektionsfeld wird nie erreicht. In diesem Fall findet überhaupt keine Injektion statt.

Um möglichst viele der eingeschossenen Elektronen einzufangen, ist das Minimumfeld B_{\min} möglichst hoch zu wählen. Nach der Wahl des B_{\min} kann man aufgrund der vorliegenden Zeichnungen Fig. 1-12 übersichtlich die richtige Sollphase wählen (möglichst klein, aber so, daß keine Instabilitäten 1. Art vorkommen).

Nach dieser Wahl von B_{\min} und $\psi_0(0)$ prüft man die Richtigkeit der Näherungslösung und untersucht den Einfangvorgang mit dem vorliegenden Rechenprogramm, das die exakte Lösung gibt.

4. Exakte Lösung

Eine exakte Lösung der Differentialgleichung (8) bzw. (10) ist auf analytischem Weg nicht zu erhalten. Praktisch blieb nur die Möglichkeit der numerischen Lösung, und es wurde ein umfangreiches Rechenprogramm für die IBM 650 aufgestellt. Dabei wurde das Runge-Kutta-Verfahren angewandt (Fehlerabgleich bis zur 4. Ordnung einschließlich) und mit der größten erzielbaren Rechengeschwindigkeit gearbeitet. Bei insgesamt 42 Stunden Rechenzeit wurden drei Beispiele durchgerechnet, die Schwingungen wurden vom Anfangwert $\psi_0 = 100^\circ$ und $\dot{\psi}_0 = 0$ verfolgt. Die Rechenzeit pro Synchrotronschwingung betrug 30 Minuten (600 Runge-Kutta-Schritte), die relative Genauigkeit 0,37 %.

Das Verfahren zeigt sehr gut den Einfluß der zeitabhängigen Faktoren.

a) Wäre keine Dämpfung vorhanden (Glied mit $\dot{\psi} = 0$) ergäben sich geschlossene Kurven in der A_r, ψ -Ebene. Mit Dämpfung erhalten wir ein Schrumpfen der Fläche

$$F \approx F_0 e^{-\frac{\delta}{B} t}$$

- b) Die Größe $\frac{\dot{B}}{B}$ wächst nach der Injektion an, wenn $B_{\min} > \frac{B_i}{2}$ ist, damit steigen auch die Radialamplituden. Entsprechend diesem Anwachsen werden die Teilchen dann stärker in der Phase gedämpft.
- c) Dieses Ansteigen der Radialamplitude ist für dasselbe B_{\min} für kleine Sollphasen $\gamma_s(0)$ nach Gleichung (20a) nicht so ausgeprägt (Änderung der Sollphase von $\gamma_s(0)$ auf etwa 45° bei 6 GeV).

A. Hermann

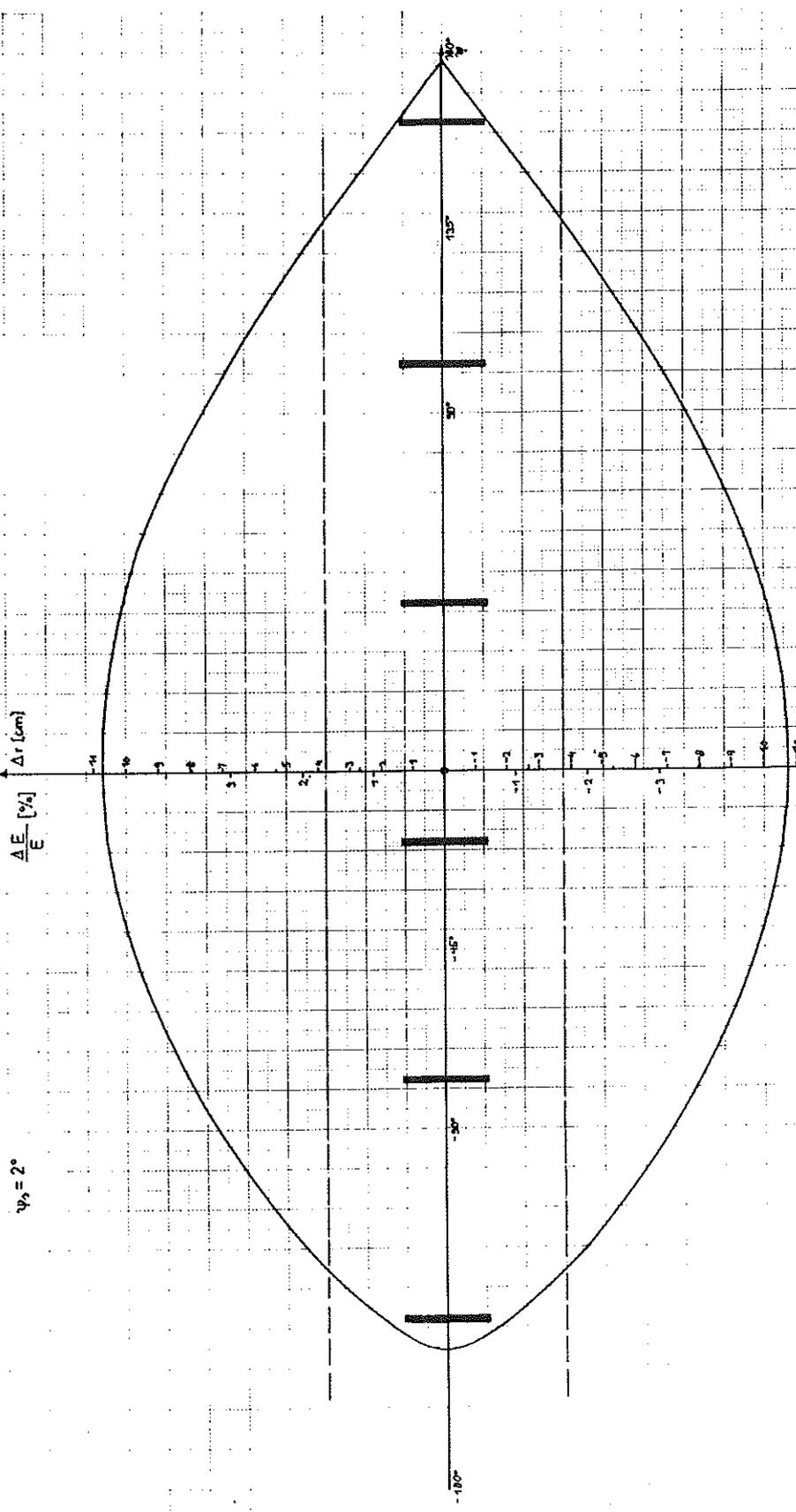
Maximalamplituden Δ_r in [cm]

(Näherungsformeln nach Energiesatz)

B_{\min} [°]	- 4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
ψ_s												
2°	13	13	13	12	12	12	11	11	10	9,1	8,0	6,1
6°	7,3	7,1	6,9	6,7	6,5	6,3	6,0	5,7	5,4	5,0	4,4	3,3
10°	5,3	5,2	5,1	4,9	4,8	4,6	4,4	4,2	4,0	3,6	3,2	2,4
14°	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,6	3,5	3,3	3,1	2,9	2,5	1,9
18°	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,4	2,0	1,6
22°	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,0	1,7	1,3
26°	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	1,8	1,7	1,5	1,1
30°	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,0
34°	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,4	1,4	1,2	1,1	0,8
38°	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	0,9	0,7
42°	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9	0,8	0,6

Fig.1

Gebiet stabiler Synchrotronschwingungen ($B_{max} = 22\Gamma$)



$\psi_s = 2^\circ$

Gebiet stabiler Synchrotronoscillierungen ($B_{max} = 22 \Gamma$)

$$\varphi_0 = 4^\circ$$

Fig. 2

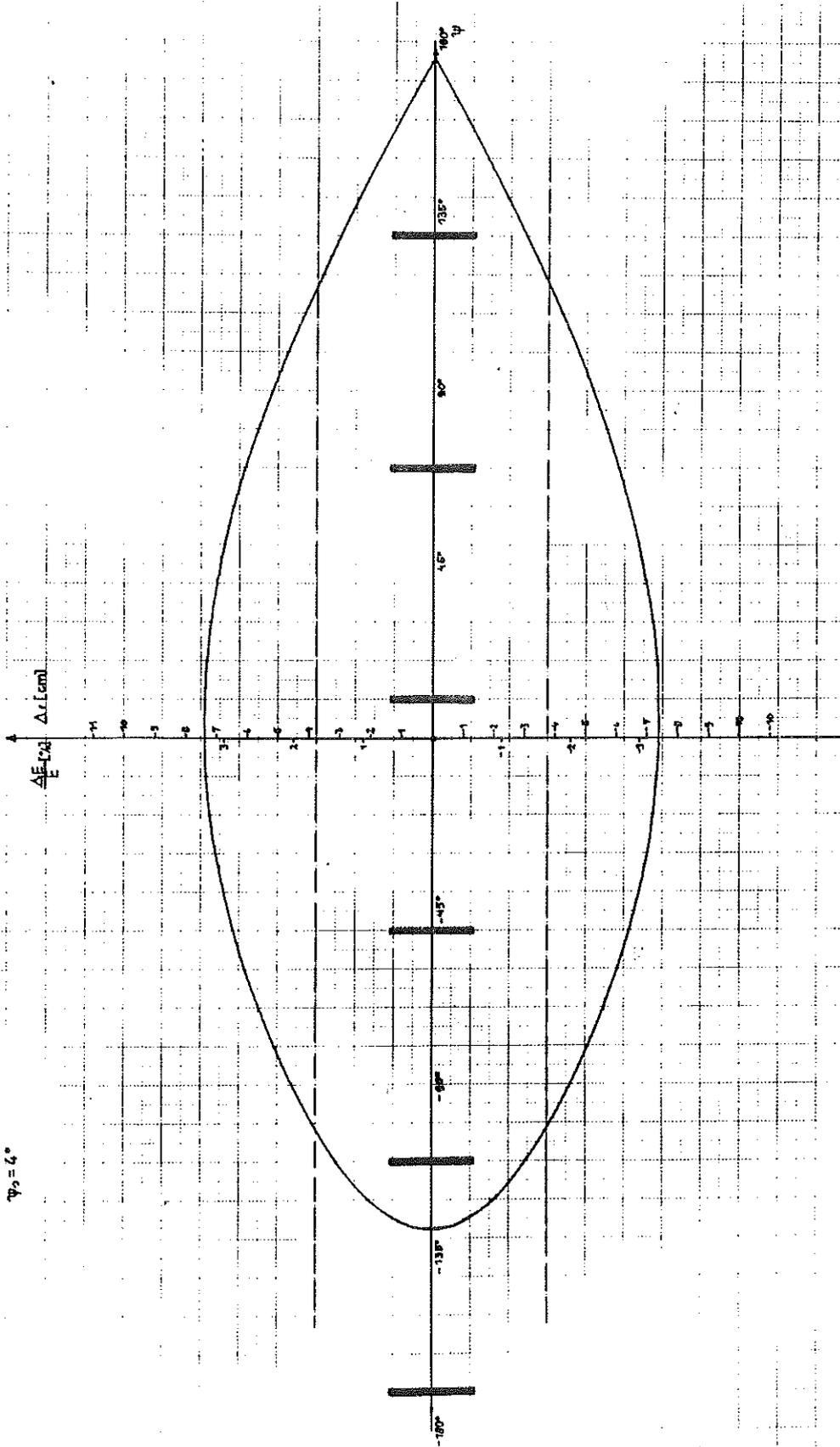


Fig. 3

Gebiet stabiler Synchrotronoscillungen ($B_{max} = 22\text{T}$)

$\psi_s = 6^\circ$

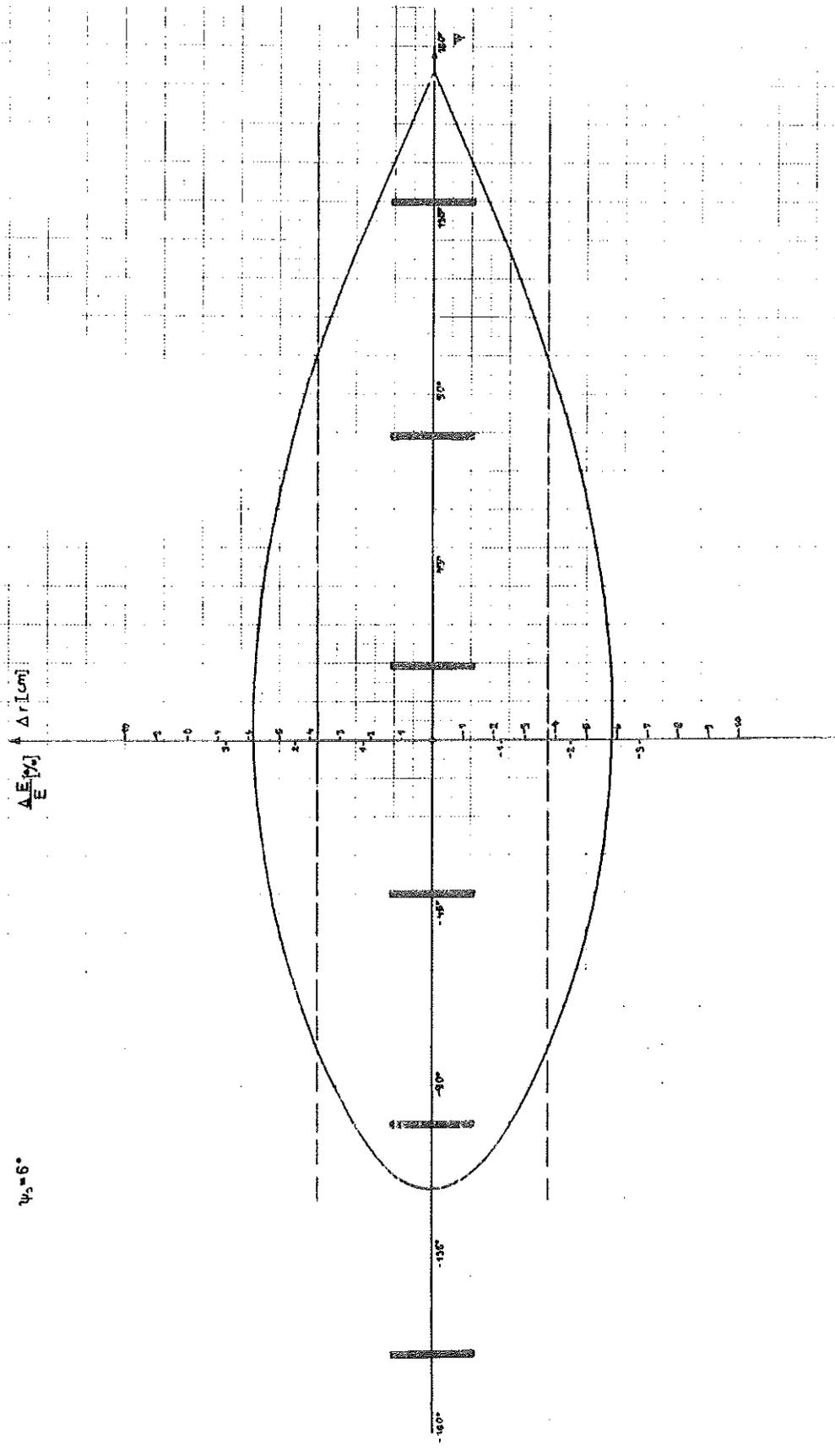
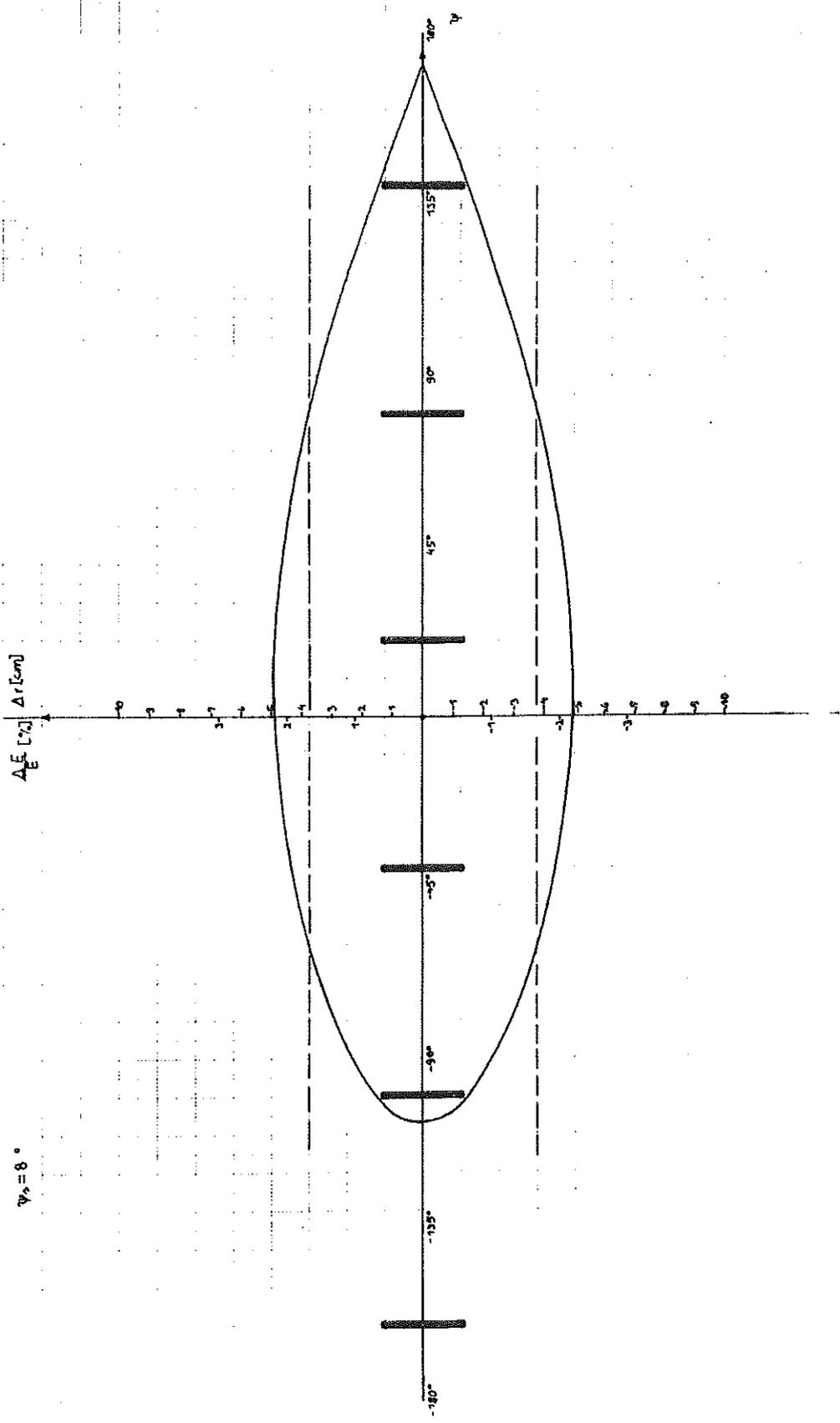


Fig. 4

Gebiet stabiler Synchrotronschwingungen ($B_{max} \approx 22\%$)



$\psi_s = 8^\circ$

Gebiet stabiler Synchrotronschwingungen ($B_{\text{max}} = 22.7$)

$\eta_s = 10^\circ$

Fig. 5

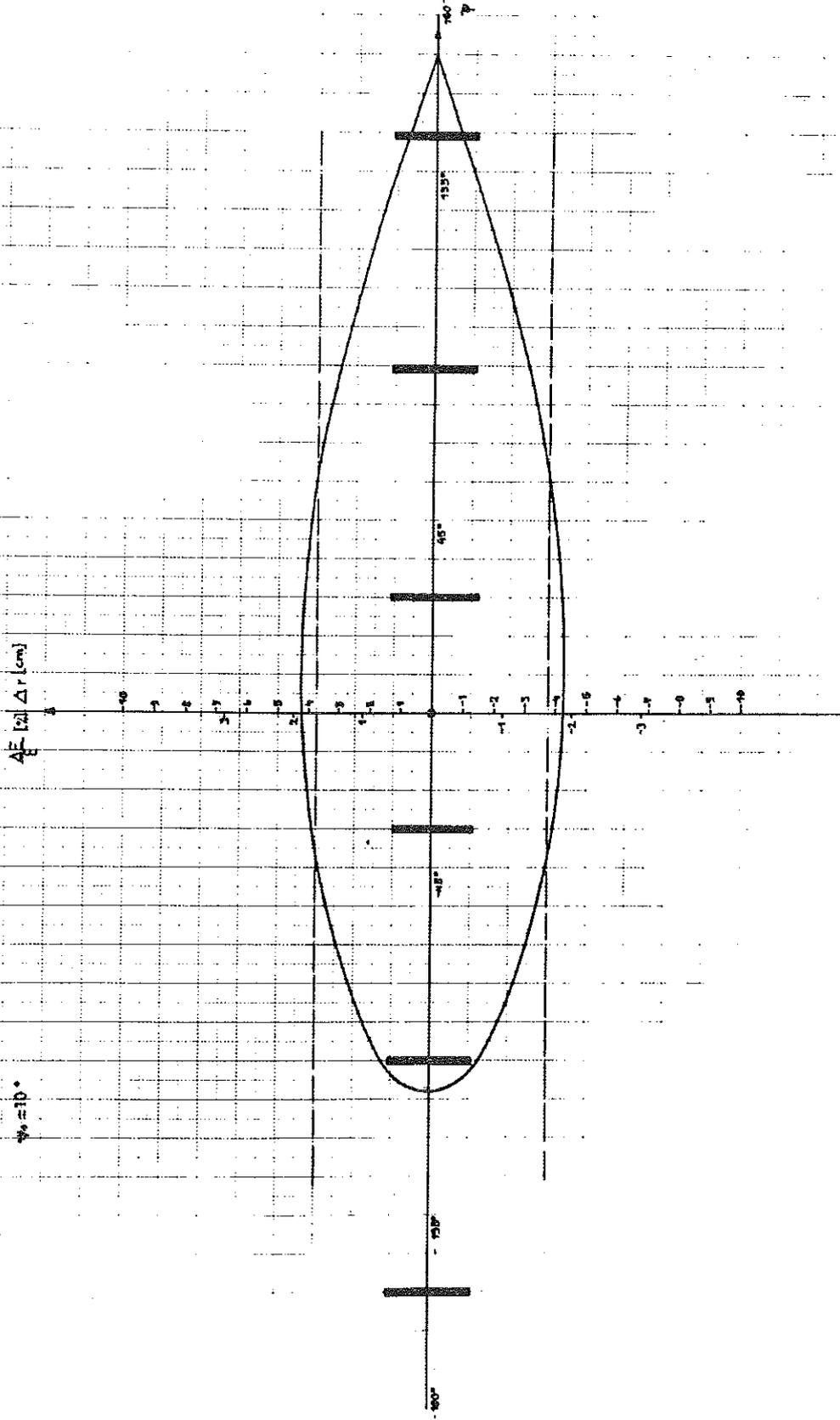


Fig. 6

Gebiet stabiler Synchrotronschwingungen ($B_{\text{max}} = 22 \text{ T}$)

$\gamma_{\text{rel}} = 12.6$

$\frac{\Delta E}{E} [\%] \quad \Delta r [\text{cm}]$

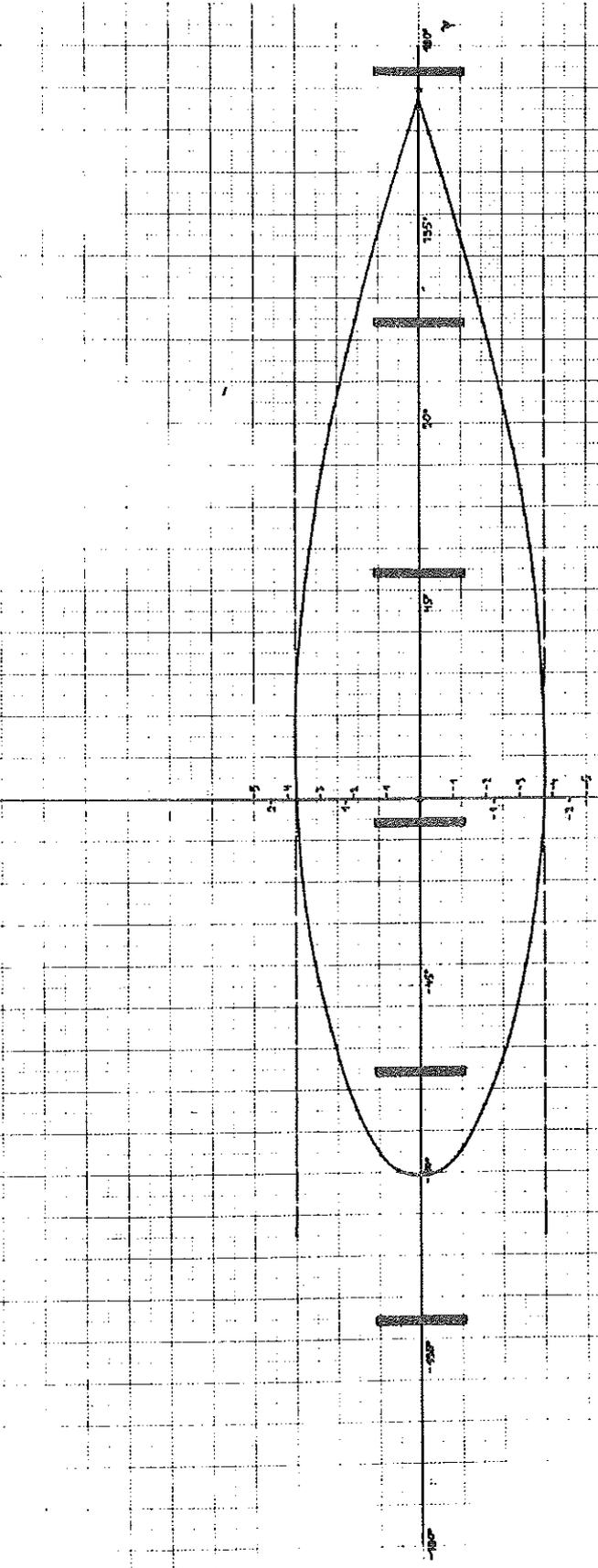
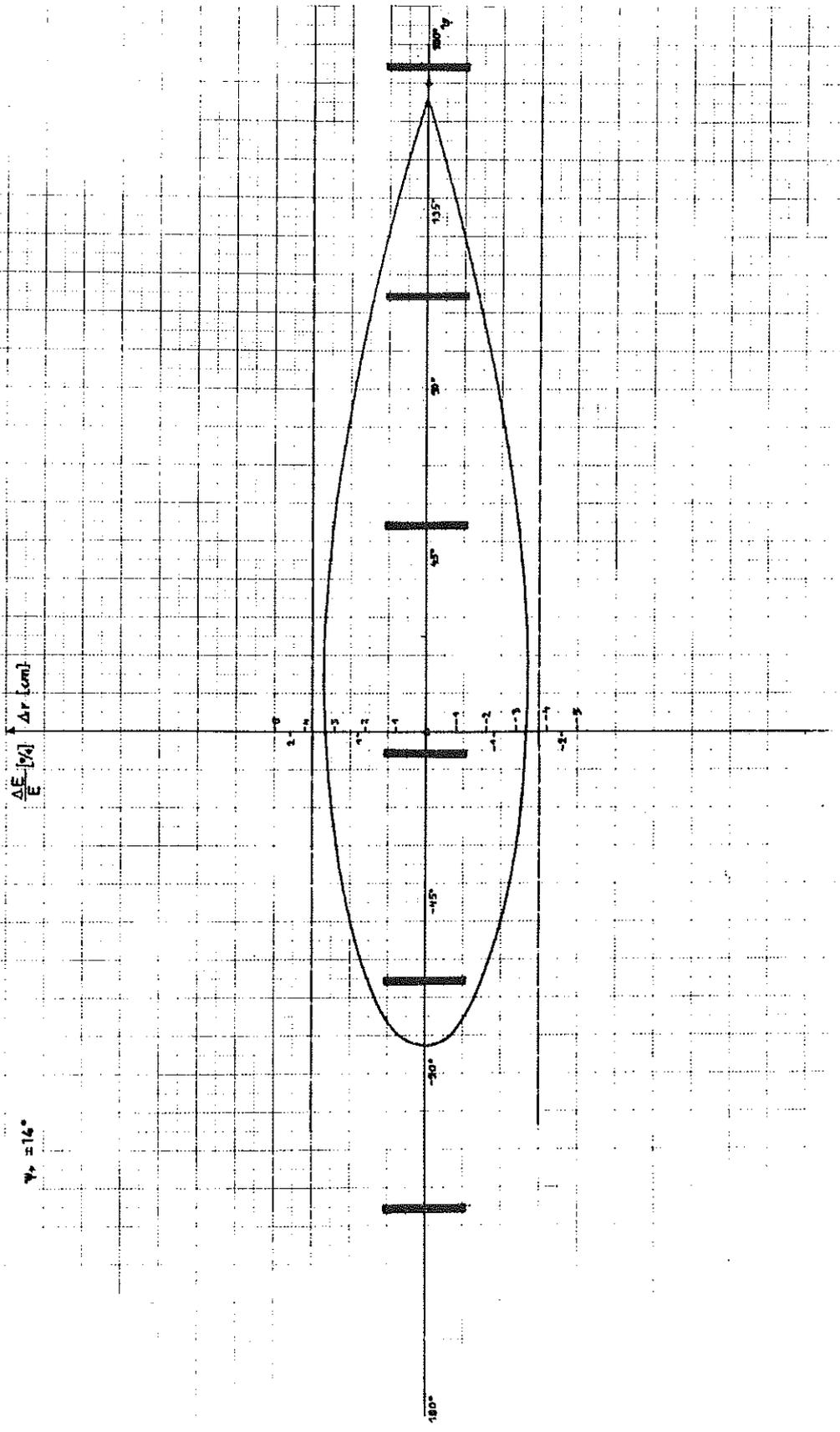


Fig. 7

Gebiet stabiler Synchrotronschwingungen ($B_{max} = 22 \Gamma$)

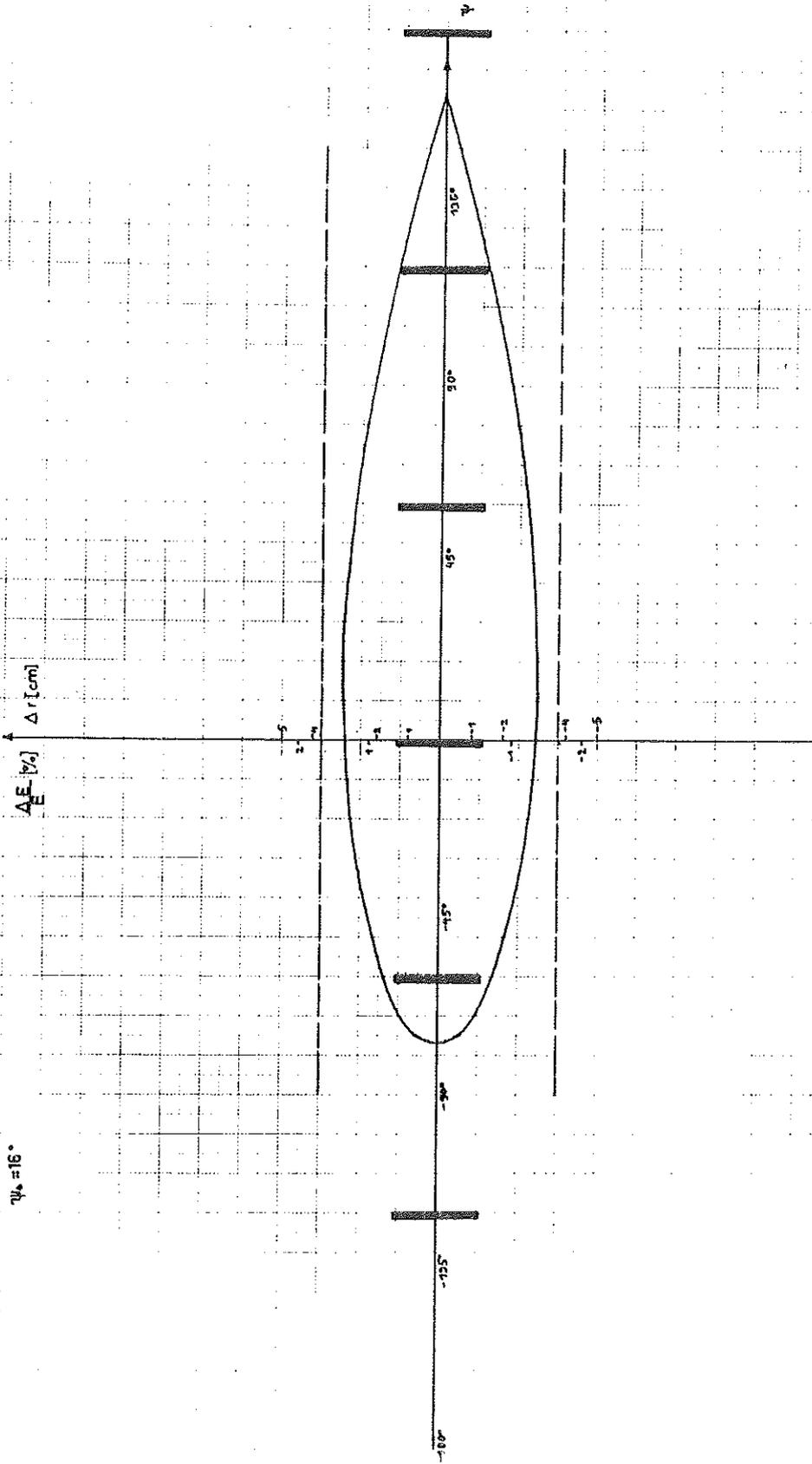


$\psi_s = 14^\circ$

Gebiet stabiler Synchrotronoscillungen ($B_{\text{max}} = 22 \Gamma$)

$\eta_s = 16^\circ$

Fig. 8



Gebiet stabiler Synchrotronoscillierungen (B₁ = 22 T)

Fig. 9

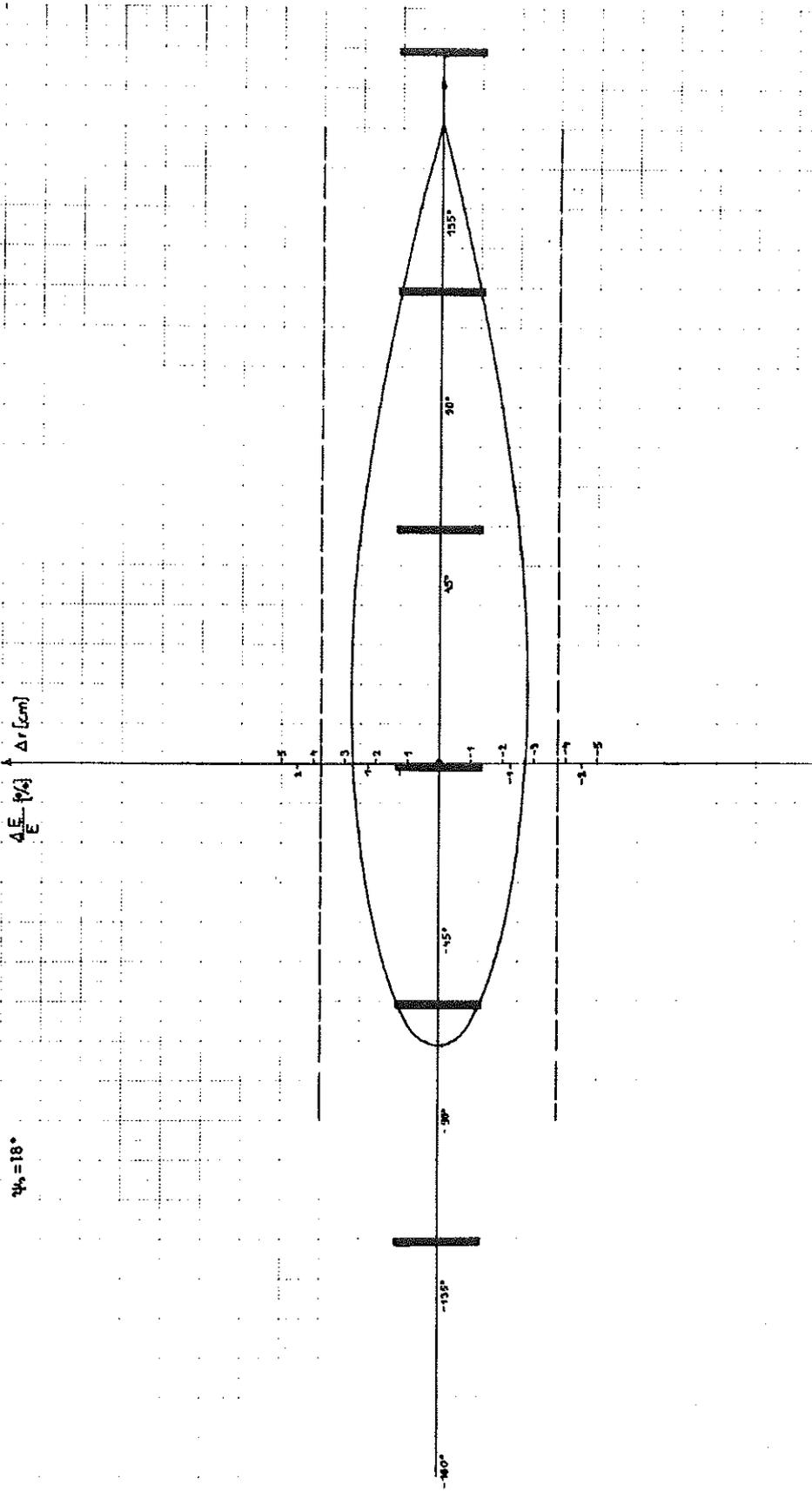


Fig. 10

Gebiet stabiler Synchrotronschwingungen ($B_{max}=22T$)

$$\psi_s = 20^\circ$$

$$\frac{\Delta E}{E} [\%] \quad \Delta t [\text{ns}]$$

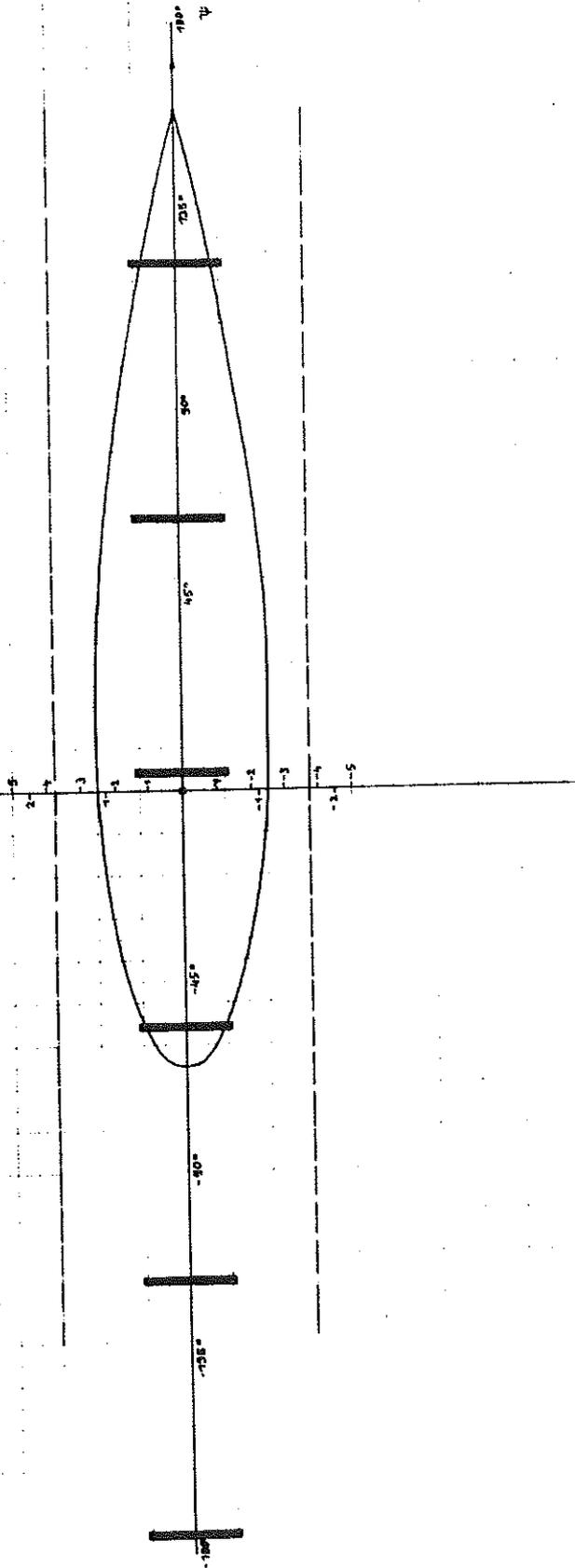


Fig. 11

Gebiet stabiler Synchrotranschwingungen ($B_{max} = 22 \text{ r}$)

$$\psi_s = 22^\circ$$

$\frac{\Delta E}{E} [\%] \quad \Delta r [\text{cm}]$

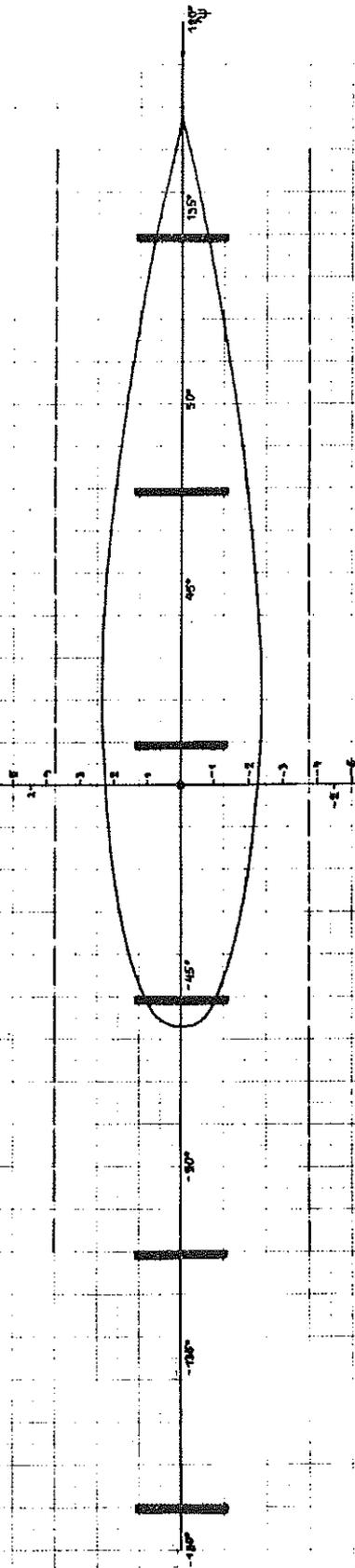
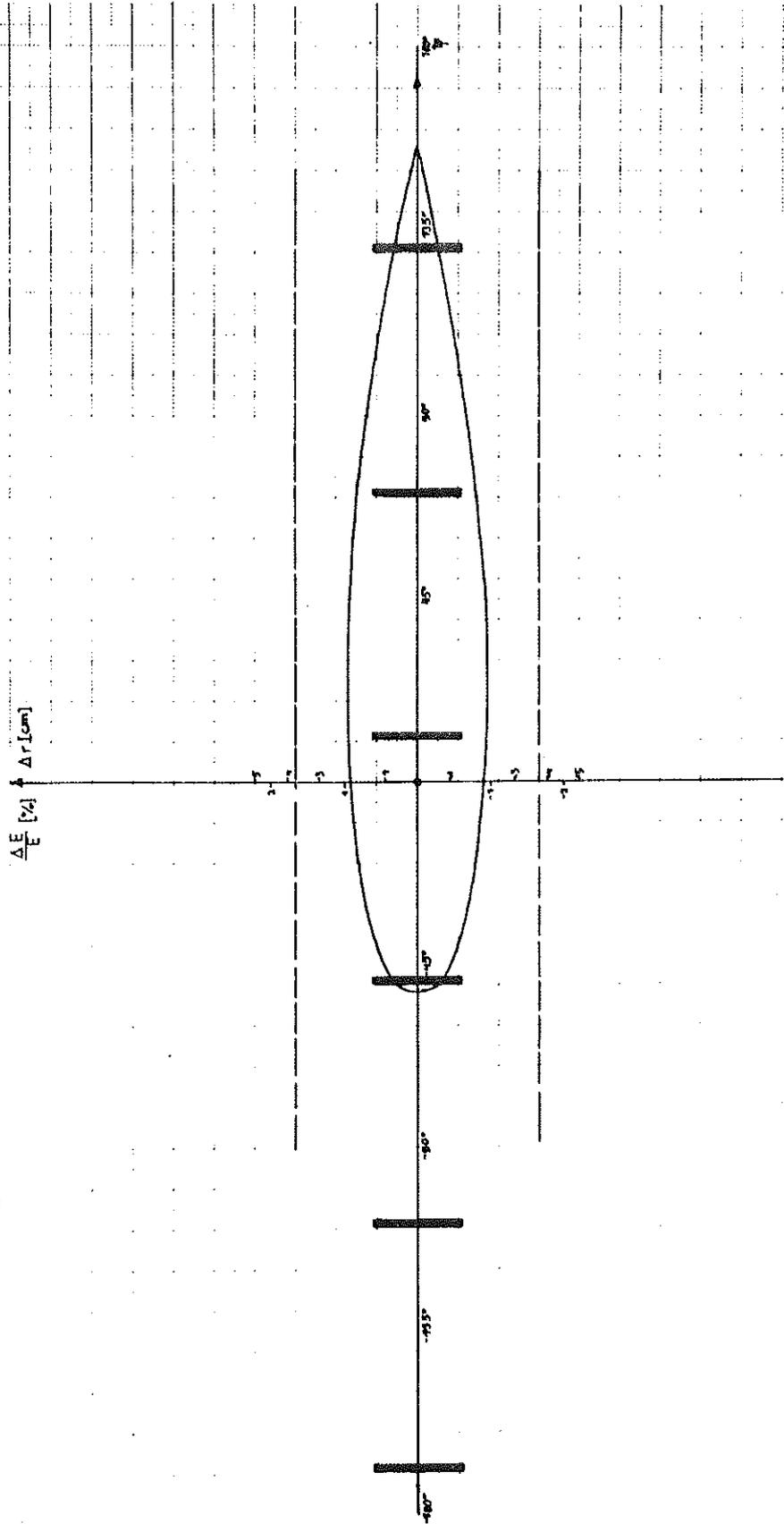


Fig. 12

Gebiet stabiler Synchrotronschwingungen ($B_{max} = 22 \Gamma$)

$\eta_0 = 26^\circ$



$\psi_0 = 90^\circ$

$\psi_0 = 30^\circ$

$\psi_0 = 0^\circ$

Potential der Synchrotronschwingung

$$V(\psi) = -C(\cos\psi + \sin\psi_0 \cdot \psi)$$

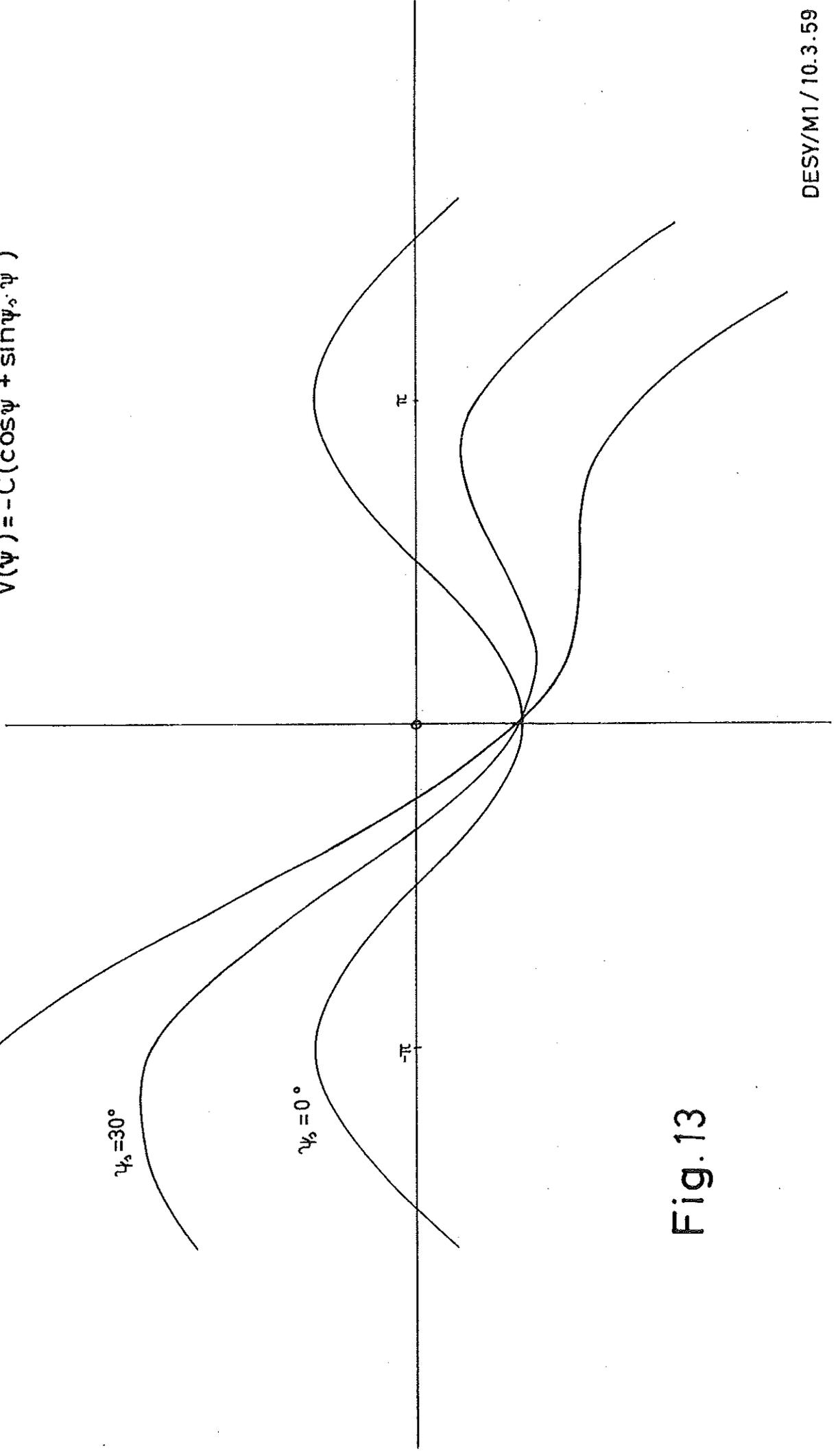


Fig.13