D e u t s c h e s   E l e k t r o n e n - S y n c h r o t r o n

Hamburg-Bahrenfeld, Luruper Chaussee 149

DESY-Notiz A 2.5o

Hamburg, den 6. Oktober 59
M 1 - Dr. W./H.

Feldfehler und Aufstellungstoleranzen für DESY.

Es soll die Wirkung von Störungen, die eine Abweichung von der idealen Struktur der Maschine darstellen, im Rahmen der linearen Theorie der Betatronschwingungen diskutiert werden.

I. Statistische Feld- und Gradientenfehler.

Statistische Fehler im Führungsfeld, wie sie sich einerseits aus der unvermeidlichen Ungenauigkeit der Justierung der Magnetsektoren, andererseits für kleine Felder aus den statistischen Schwankungen der Koerzitivkraft des Magnetmaterials ergeben, führen zu einer Abweichung des closed orbit von der geometrischen Sollbahn der Maschine. Zur Berechnung dieses Effektes wurden von einer Reihe von Autoren[1] verschiedene Methoden benutzt, deren Ergebnisse nur unwesentlich voneinander abweichen.

Für DESY ergibt sich hieraus:
Zur Justierung der Magnetsektoren werden die Endpunkte der Sektoren eingemessen. Nimmt man die Fehler dieser Vermessung als statistisch unabhängig an, so ergibt sich zwischen dem mittleren Fehler der Vermessung $\langle \delta \xi \rangle$ und dem Erwartungswert des Maximums der Amplitude des closed orbit $\langle \hat{x} \rangle$ die Beziehung:

$$\langle \hat{x} \rangle = 15{,}62 \langle \delta \xi \rangle \qquad (I,1)$$

Aus Betrachtungen über die Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Maximum der Amplitude des closed orbit ergibt sich, dass der obengenannte Erwartungswert von 63 % der Elemente eines statistischen Ensembles nicht überschritten wird.

Benutzt man anstelle des Erwartungswertes den doppelten Wert, so liegen 98 % des Ensembles unterhalb dieser Grenze. Hieraus folgt, dass der mittlere Fehler bei der Vermessung der Endpunkte der Magnetsektoren nicht größer als o,32 mm sein darf, wenn für die Abweichungen des Maximums des closed orbit von der geometrischen Sollbahn ein Raum von 1 cm in der Vakuumkammer zur Verfügung steht.

Die Wirkung der Schwankungen der Koerzitivkraft von Blech zu Blech in einem Block des Magneten wird sich in ihrer Wirkung auf die Bewegung der Teilchen teilweise herausmitteln, sie sollte für einen Block aus N Blechen um den Faktor $\sqrt{N}$ kleiner sein als beim Einzelblech. Zur Vereinfachung der Rechnung wurde angenommen, dass der Fehler im Führungsfeld über einen Magnetsektor konstant ist. Dieser Fehler dürfte nach den Erfahrungen bei anderen Beschleunigern eine Größenordnung von etwa 1 o/oo des Feldes haben. Auch hier läßt sich wieder eine Beziehung zwischen dem Mittelwert des relativen statistischen Feldfehlers von Sektor zu Sektor und dem Erwartungswert des Maximums der Amplitude des closed orbit angeben, sie lautet:

$$\langle \hat{x} \rangle [\mathrm{cm}] = 10{,}08 \, \langle \frac{\delta B}{B} \rangle [\%] \qquad (1,\ 2)$$

Da für die Wahrscheinlichkeitsverteilung wieder das gleiche gilt, ist zur Einhaltung einer maximalen closed orbit Amplitude von 1 cm der mittlere relative Feldfehler kleiner als o,5 o/oo zu halten.

Die Schwankungen der Koerzitivkraft führen jedoch nicht nur zu Schwankungen im magnetischen Feld am Sollkreis für kleine Energien, sondern lassen auch statistische Schwankungen im Werte des Feldindex n von Sektor zu Sektor erwarten. Diese Störungen der idealen Struktur der Maschine führen zum Auftreten von instabilen Bereichen in der Nähe von ganz- und halbzahligen Werten von Q (Q = Zahl der Betatronschwingungen pro Umlauf).

Der Erwartungswert für die Breite dieser instabilen Bereiche, der Stopbänder, hängt mit dem Mittelwert des relativen statistischen Fehlers des Feldindex n wie folgt zusammen:

$$\left\langle \frac{\delta Q}{Q} \right\rangle_{St.} = 0{,}411 \left\langle \frac{\delta n}{n} \right\rangle \qquad (I,3)$$

Hieraus ergibt sich für einen mittleren relativen n-Fehler von 1 % ein Erwartungswert für die Stopbandbreite von o,41 %, was einer Breite von etwa o,o25 in Q entspricht.

II. Die Wirkung von systematischen Fehlern.

Außer den oben betrachteten statistischen Fehlern des Führungsfeldes sind bei DESY auch noch systematische Fehler zu erwarten, die den closed orbit beeinflussen. Einerseits wird das nach dem Abschalten des Inflektors in diesem stehenbleibende Restfeld eine closed orbit-Abweichung erzeugen, zum anderen ist zu erwarten, dass das Feld am Sollkreis in F- und D-Sektor bei kleinen Feldern nicht das gleiche ist.

Die Wirkung des nach dem Abschalten am Inflektor stehenbleibenden elektrostatischen Feldes läßt sich leicht ermitteln, es ergibt sich für den Fall, dass das Restfeld 1 % des zum Einlenken des Strahles benutzten Feldes ist, eine closed orbit-Abweichung, die zwischen -4,8 mm und + 4,8 mm in den einzelnen Feldperioden liegt. Wegen des Ansteigens der Teilchenenergie geht die Wirkung dieser Restspannung zurück, so dass dieser Effekt für Energien in der Größenordnung von 2oo MeV vernachlässigbar wird.

Ein systematischer Unterschied zwischen F- und D-Sektoren ist in den Feldstärkebereichen zu erwarten, wo der Wert des Magnetfeldes nicht allein durch die Spulenströme bestimmt wird, sondern auch die Materialeigenschaften des Eisens eine wesentliche Rolle spielen. Für kleine Felder ist zu erwarten, dass das Feld im F-Sektor etwas höher ist als im D-Sektor.

Definiert man das Sollfeld als arithmetisches Mittel zwischen den Feldern im F- und D-Sektor, so zeigt sich, dass die Bahn eines Teilchens mit der zu dem so definierten Sollfeld passenden Energie etwa 4 mm innerhalb der geometrischen Sollbahn liegen würde, wenn die Abweichung der Felder in F- und D-Sektor vom arithmetischen Mittel +1 % bzw. -1 % beträgt. Dies würde aber eine Abweichung der Umlaufsfrequenz des Teilchens von der Sollfrequenz bedeuten.

Die Energie des synchronen Teilchens, dessen Umlaufsfrequenz durch die beschleunigende Hochfrequenz festgelegt ist, ist anders zu definieren. Benutzen wir die oben gegebene Definition des Sollfeldes, so ändert sich der Zusammenhang zwischen der Feldstärke und der Energie des synchronen Teilchens.
Für die Abweichung der Energie des synchronen Teilchens vom normalen Wert als Funktion der Abweichung des Magnetfeldes im F-Sektor vom arithmetischen Mittel für F- und D-Sektor ergibt sich die Beziehung:

$$\frac{\delta E}{E} = 0{,}277 \frac{\delta B}{B} \qquad (II,1)$$

Hiernach ist für eine Abweichung des Feldes im F-Sektor von 1 % die Energie des synchronen Teilchens um o,28 % höher als im Falle der idealen Maschine. Der closed orbit für ein Teilchen dieser Energie weicht von der geometrischen Sollbahn etwas ab; seine maximale Amplitude beträgt in diesem Falle ± 1,5 mm.
Beim Auftreten dieses systematischen Feldfehlers gehört also zur Injektionsenergie von 4o MeV ein etwas kleinerer Wert des Magnetfeldes.

III. Anregung von Betatronschwingungen durch die Synchrotronschwingung.

Die im ersten Abschnitt in ihrer Wirkung für DESY beschriebenen statistischen Fehler machen den Betrieb eines Synchrotrons bei ganz- und halbzahligen Q-Werten wegen der mit ihnen verbundenen Resonanzerscheinungen unmöglich.

Weitere Resonanzen werden durch die Tatsache hervorgerufen, daß die Betatronschwingungsfrequenz eines Teilchens mit einer von der Sollenergie abweichenden Energie durch die Synchrotronschwingung moduliert wird. Wie zuerst von Orlow und Robinson[2] gezeigt wurde, hat diese Frequenzmodulation das Auftreten zusätzlicher Resonanzen, kurz Satellitenstopbänder genannt, zur Folge. Zu jedem ganzzahligen Stopband gehören Satellitenstopbänder, die in einem Abstand zum ursprünglichen Stopband liegen, der einem ganzzahligen Vielfachen der Synchrotronschwingungsfrequenz entspricht. Zu einem halbzahligen Stopband gehören Satellitenstopbänder, deren gegenseitiger Abstand der halben Synchrotronschwingungsfrequenz entspricht. Auf die Entstehung dieser zusätzlichen Stopbänder und ihre Bedeutung soll in diesem Abschnitt eingegangen werden.

Für ein Teilchen, dessen Impuls vom Impuls des Sollteilchens p_s um den Betrag δp abweicht, gilt für die Abweichung δQ dieses Teilchens vom Werte Q für ein Teilchen mit der Sollenergie im Rahmen der linearen Theorie die Beziehung:

$$\frac{\delta Q}{Q} = - \frac{\delta p}{p} \qquad \text{(III,1)}$$

Die Impulsabweichung δp bleibt aber nicht konstant, sondern ändert sich mit der Frequenz der Synchrotronschwingung. Es tritt also an die Stelle der konstanten Betatronschwingungsfrequenz

$$\omega_B = Q \omega_s \qquad \text{(III,2)}$$

eine modulierte Frequenz

$$\omega = \omega_s (Q + \delta Q(t) \qquad \text{(III,3)}$$

Sieht man von der Abweichung der Synchrotronschwingung von einer harmonischen Schwingung ab, so kann man für die Betatronschwingungsfrequenz als Funktion der Zeit schreiben:

$$\omega = \omega_B + \delta\omega_B \cos\omega_{Ph} t \qquad (III,4)$$

mit

$$\delta\omega_B = \omega_s\, \delta Q_{max} = - \omega_s\, Q \left(\frac{\delta p}{p}\right)_{max} \qquad (III,5)$$

Das heißt aber, dass die Betatronschwingung nunmehr mit der Frequenz der Synchrotronschwingung ω_{Ph} moduliert ist, wobei der Frequenzhub der Modulation von der Größe der während einer Synchrotronschwingung auftretenden maximalen Impulsabweichung abhängt. Schreibt man die Betatronschwingung eines Teilchens in der Form

$$x = \sin\int \omega\, dt = \sin\left[\omega_B t + \frac{\delta\omega_B}{\omega_{Ph}} \sin\omega_{Ph} t\right] \qquad (III,6)$$

so erhält man durch Fourier-Zerlegung ein Spektrum, das außer der Grundfrequenz ω_B noch die Frequenzen

$$\omega_B \pm k\,\omega_{Ph} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (III,7)$$

enthält. Das Auftreten dieser Frequenzen entspricht den Seitenbändern eines frequenzmodulierten Senders.

Die alte Resonanzbedingung

$$\omega_B = q\,\omega_s \qquad q = 1, 2, 3, \ldots \qquad (III,8)$$

für die ganzzahligen Stopbänder wird ersetzt durch die Bedingung

$$\omega_B \pm k\,\omega_{Ph} = q\,\omega_s \qquad q = 1, 2, 3, \ldots \qquad (III,9)$$

Hiernach liegen Satelliten des ursprünglichen Stopbandes bei $Q = m$ an den Stellen

$$Q = m \pm k \frac{\omega_{Ph}}{\omega_s} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(III,1o)}$$

An die Stelle der Bedingung

$$\omega_B = \frac{q}{2}\omega_s \qquad q = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(III,11)}$$

für die halbzahligen Stopbänder tritt nunmehr die Bedingung

$$\omega_B = \frac{q}{2}\omega_s \pm \frac{k}{2}\omega_{Ph} \qquad q, k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(III,12)}$$

Das halbzahlige Stopband bei $Q = \frac{m}{2}$ hat also Satelliten bei

$$Q = \frac{m}{2} \pm \frac{k}{2} \frac{\omega_{Ph}}{\omega_s} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(III,13)}$$

Die relative Stärke des k-ten Satelliten eines ganzzahligen Stopbandes wird gegeben durch

$$J_k\left(\frac{\pi\,\delta Q_{max}}{\sin \pi\frac{\omega_{Ph}}{\omega_s}}\right). \qquad \text{(III,14)}$$

Hierbei ist J_k die Besselfunktion der Ordnung k. Bei festem Wert des Arguments nimmt J_k mit wachsendem k ab, so dass nur die dem ursprünglichen Stopband am nächsten liegenden Satelliten zu gefährlichen Resonanzen Anlaß geben können. Je kleiner δQ_{max} und damit der Frequenzhub ist, umso schwächer ist auch die Wirkung der Satellitenstopbänder.
Für die Satelliten eines ganzzahligen Stopbandes reicht jedoch die Kenntnis der relativen Stärke noch nicht aus, um ihre Gefährlichkeit beurteilen zu können. Da sich nämlich die Synchrotronschwingungsfrequenz während des Beschleunigungsvorganges ändert, ändert sich auch die Lage der Satellitenstopbänder.

Es wird also im Verlaufe des Beschleunigungsvorganges, selbst bei festgehaltenem Q eine gewisse Anzahl von Satellitenstopbändern über den Arbeitspunkt hinwegwandern. Es ist daher die Frage zu stellen, wie groß die beim Durchgang eines Satellitenstopbandes durch den Arbeitspunkt induzierte closed orbit-Amplitude ist. Der zeitlich veränderlichen Betatronschwingungsfrequenz (III,4) überlagert sich in diesem Falle noch ein der Zeit proportionales Glied:

$$\omega = \omega_B + \delta\omega_B \cos \omega_{Ph}\, t + \omega'\, t. \qquad \text{(III,15)}$$

Ist die maximal zulässige closed orbit-Amplitude durch $\hat{x}_m$ gegeben, so wird in diesem Falle beim einmaligen Durchlaufen des k-ten Satellitenstopbandes eine zusätzliche Amplitude induziert, die durch

$$\hat{x} = \hat{x}_m\, \varepsilon \left(\frac{\omega_s}{2\omega'}\right)^{1/2} J_k\left(\frac{\pi\, \delta Q_{max}}{\sin \pi \frac{\omega_{Ph}}{\omega_s}}\right) \qquad \text{(III,16)}$$

gegeben ist. Hierbei ist ε die halbe Breite des ursprünglichen Stopbandes.

Die Breite der Satelliten eines halbzahligen Stopbandes ist

$$\delta Q_k = \delta Q_o\, J_k\left(\frac{2\pi\, \delta Q_{max}}{\sin \pi \frac{\omega_{Ph}}{\omega_s}}\right) \qquad \text{(III,17)}$$

für das k-te Stopband, hierbei ist δQ_o die Breite des ursprünglichen Stopbandes.

Zur zahlenmäßigen Erläuterung seien zwei Beispiele angeführt: Nehmen wir an, dass der Arbeitspunkt bei Q = 6,25 liegt und dass keine Nichtlinearitäten in der Maschine vorhanden sind. Als Anfangswert der Sollphase beim Einschießen wollen wir 15^o bzw. $3o^o$ wählen. Wie sich aus der beigefügten Figur ergibt, gehören zu diesen Werten der Sollphase folgende Synchrotronschwingungsfrequenzen sowie maximalen Impulsabweichungen:

	φ_s	ω_{Ph}/ω_s	$\left(\frac{\delta p}{p}\right)_{max}$
I	15^o	o,18o	1,73 %
II	$3o^o$	o,123	o,92 %

(III,18)

Betrachten wir zunächst den Fall I:
Wie sich aus der Tabelle ergibt, liegen Satelliten des ganzzahligen Stopbandes bei Q = 6 an den Stellen Q = 6,18; 6,36; 6,54 usw. Satelliten des halbzahligen Stopbandes bei Q = 6 liegen bei Q = 6,o9; 6,18; 6,27; 6,36; 6,45 usw. Satelliten von Q = 6,5 liegen bei Q = 6,41; 6,32; 6,23; 6,14; 6,o5 usw.

Während des Beschleunigungsvorgangs nimmt die Synchrotronschwingungsfrequenz bis auf etwa 5 % der Umlaufsfrequenz ab. Es werden also die Satelliten sich auf die ursprünglichen Stopbänder zusammenziehen. Hierbei wird der Arbeitspunkt bei Q = 6,25 von den höheren Satelliten des ganzzahligen Stopbandes bei Q = 6 überstrichen.
Mit (III,16) ergibt sich, dass hierdurch Amplituden induziert werden, die für k = 2 44,6 % der zulässigen Amplitude und für k = 31,6 % derselben betragen.
Auch die höheren Satelliten der halbzahligen Stopbänder werden den Wert Q = 6,25 während des Beschleunigungsvorgangs überstreichen. Die Breite dieser Stopbänder ist kleiner als 5 % der ursprünglichen Stopbandbreite.

Für den Fall II ergibt sich ein günstigeres Bild:
Hier liegen die Satelliten des ganzzahligen Stopbandes bei Q = 6,123; 6,246; 6,369; 6,492 usw., so dass das zweite Satellitenstopband Q = 6,25 nicht mehr erreicht. Es würde 33 % der maximal zulässigen Amplitude induzieren. Die Satelliten der halbzahligen Stopbänder liegen bei Q = 6,o61; 6,123; 6,184; 6,246; 6,3o7; 6,369 usw. und bei Q = 6,439; 6,377; 6,316; 6,254; 6,193; 6,131 usw. Die Breite dieser Stopbänder (k = 4) ist nur noch 2 % der ursprünglichen Stopbandbreite. In beiden Fällen ist die Gefahr wesentlicher Teilchenverluste gering.

Es sind jedoch bei der Rechnung einige Idealisierungen gemacht worden, auf die abschließend eingegangen werden soll.

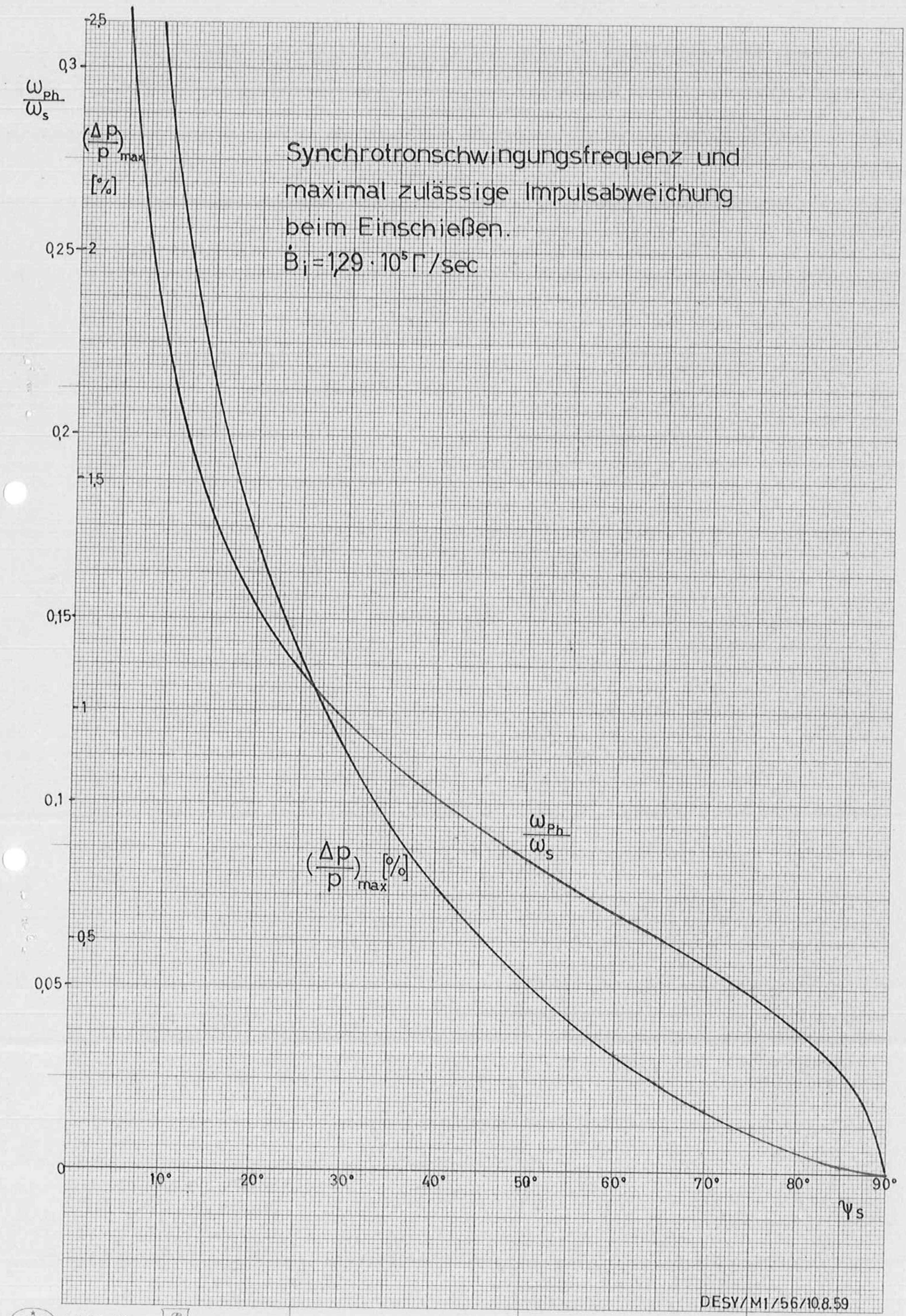
Zunächst ist die Synchrotronschwingung nichtlinear, so dass Gleichung (III,4) nur näherungsweise für kleine Impulsabweichungen gilt. Für größere Amplituden ist zwar die Frequenz der Synchrotronschwingungen kleiner, doch treten auch wegen der Nichtlinearität der Schwingung ihre höheren Harmonischen auf. Beide Effekte dürften sich in etwa die Waage halten, so dass die angeführten Ergebnisse nicht wesentlich geändert werden. Andererseits ändern Nichtlinearitäten im Magnetfeld die Beziehung (III,1). Es läßt sich durch geeignete Nichtlinearitäten sogar erreichen, dass der Arbeitspunkt von der Impulsabweichung nahezu unabhängig wird. In diesem Falle verlieren die Satellitenstopbänder stark an Bedeutung, da der Frequenzhub stark herabgesetzt wird. Die Einführung solcher Nichtlinearitäten würde sich besonders dann empfehlen, wenn sich bei den Messungen an den Magnetmodellen herausstellen sollte, dass der Arbeitspunkt für kleine Energien wesentlich unter dem Sollwert von 6,25 liegt.

Dr. H.O. Wüster

<u>Literaturhinweise:</u>

1) E.D. Courant und H.S. Snyder, Ann. of Phys., <u>3</u> (1958) 1.
G. Lüders, Suppl. Nuovo Cimento, <u>2</u> (1955) 1o75.
A. Schoch, CERN-Report, 57-21 (1958).

2) I u. F. Orlow, Soviet Physics JETP, <u>5</u> (1957) 45.
[JETP, <u>32</u> (1957) 13o].
K.W. Robinson, CEA-Report 54, (1958).


Synchrotronschwingungsfrequenz und
maximal zulässige Impulsabweichung
beim Einschießen.
$\dot{B}_i = 1{,}29 \cdot 10^5\, \Gamma/\mathrm{sec}$
$\frac{\omega_{Ph}}{\omega_s}$
$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{max}$ [%]
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
2,5
2
1,5
1
0,5
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
ψ_s
DESY/M1/56/10.8.59