

DESY-Notiz A 2.52

Hamburg, den 17. Nov. 1959  
M 8 - Dr.Br/Dr.Ste/H.

Beeinflussung von Teilchenbahnen  
durch homogene Ablenkkfelder  
(f-Typ-Störungen)

Inhalt:

I. Allgemeine Gleichungen	S. 2
II. Zeitlich konstantes Ablenkkfelde	S. 5
III. Langsam ansteigendes Ablenkkfeld	S. 6
IV. HF-Ablenkkfeld mit konstanter Frequenz	S. 6
V. HF-Ablenkkfeld mit linear veränderlicher Frequenz	S. 12

- - - -

Die Teilchenbahnen werden für diese Ablenkkfelder mit Hilfe der Phasen- und Amplitudenfunktionen in geschlossener Form dargestellt.

Die angegebenen Gleichungen ermöglichen eine einfache numerische Auswertung.

Beeinflussung von Teilchenbahnen durch homogene  
Ablenfelder (f-Typ-Störungen)

I. Allgemeine Gleichungen

Ist  $r(s)$  die radiale oder vertikale Abweichung der Teilchenbahn vom Sollkreis, und  $F(s)$  die durch ein magnetisches oder elektrisches Feld in Richtung  $r$  hervorgerufene, von  $r$  unabhängige Störkraft, so lautet die Bewegungsgleichung für diese Komponente:

$$r''(s) + k(s) \cdot r(s) = F(s)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen zusammen. Sie kann geschrieben werden<sup>1)</sup>

$$r(s, k) = A \sqrt{\beta(s)} \exp i \left[ \phi(s + (k-1)L) + B + \beta(s) \int F(x) \beta(x) \exp(-i) \left[ \phi(x) - \phi(s + (k-1)L) + \frac{\pi}{2} \right] dx \right] \quad (1)$$

Bei der verwendeten komplexen Schreibweise sei stets nur der Realteil gemeint; es darf daher nur mit reellen Zahlen multipliziert werden. Es werde festgesetzt, daß die auf dem Sollkreis gemessene Weglänge  $s$  vom festgelegten Anfangspunkt  $s = 0$  an nur über einen Umlauf geht.  $L$  ist die Länge des Sollkreises,  $k - 1$  die Zahl der betrachteten vollen Umläufe. Nach Gleichung (1) überlagern sich durch die Störkraft  $F(s)$  den vorhandenen Betatronschwingungen, die durch die Parameter  $A$  und  $B$  nach Amplitude und Phasenlage gekennzeichnet sind, additiv weitere Schwingungen. Man kann für alle weiteren Betrachtungen zunächst  $A = 0$  setzen, d.h. es werden nur Teilchen betrachtet, die sich vor Einschalten des Ablenkfeldes auf dem Sollkreis bewegen. Die Störkraft kann von der Zeit abhängen, doch soll die relative Feldänderung während des Durchgangs eines Teilchens klein sein.

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, daß die Störkraft  $F(s)$  innerhalb des Intervalles  $s_1 \leq s \leq s_2$  nicht von  $s$  abhängt und außerhalb

dieses Intervalls null ist. Gleichung (1) mit  $A = 0$  läßt sich dann umformen in

$$r(s, k) = \sqrt{\beta(s)} \exp i \left[ \phi(s) - \frac{\pi}{2} \right] \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\beta(x)} \exp [-i \phi(x)] dx \sum_{j=0}^{k-1} F(k-j) \exp [i 2j\mathcal{J}] \quad (2)$$

Hierin ist  $\mathcal{J} = \pi \Delta Q$  mit  $\Delta Q = Q - q$ ,  $Q$  ist die Zahl der Betatronschwingungen auf dem Umfang der Maschine,  $q$  die nächst kleinere ganze Zahl.  $\phi(s)$  und  $\phi(x)$  sind an den gleichen Anfangspunkt gebunden und gehen gemäß der obigen Definition von  $s$  nur über einen Umlauf.  $F(k)$  kann für zeitlich aufeinander folgende Teilchen verschieden sein. Gleichung (2) gilt für den  $k$ -ten Umlauf nach dem  $k$ -ten Durchgang durch das Ablenkkfeld, d.h. für  $s + (k-1)L > s_2 + (k-1)L$ . Die entsprechende Gleichung, die während des  $k$ -ten Umlaufes vor dem Durchgang durch das Ablenkkfeld, d.h. für  $s + (k-1)L < s_1 + (k-1)L$  gültig ist, erhält man aus Gleichung (2), indem man in der Summe  $k$  durch  $k-1$  ersetzt und in dem Faktor vor dem Integral  $\phi(s)$  durch  $\phi(s) + \mathcal{J}$  ersetzt.

Die neue geschlossene Bahn ergibt sich aus Gleichung (1) durch die Bedingungen

$$r(s+L) = r(s)$$

$$r'(s+L) = r'(s)$$

zu

$$\hat{r}(s, k) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \mathcal{J}} \int_s^{s+L} F(x, k) \sqrt{\beta(x)} \exp(-i) [\phi(x) - \phi(s) - \mathcal{J}] dx. \quad (3)$$

Nimmt man, wie oben, ein konstantes Störfeld im Bereich  $s_1 \leq s \leq s_2$  an, so läßt sich Gleichung (3) umformen in

$$\hat{r}(s, k) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \mathcal{J}} \exp i [\phi(s) - \mathcal{J}] F(k) \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\beta(x)} \exp [-i \phi(x)] dx. \quad (4)$$

Bei dieser Umformung ist die Lage des Punktes  $s$  in Bezug auf das Störfeld zu berücksichtigen (daher  $+\mathcal{J}$  statt  $-\mathcal{J}$  in Gleichung (3)). Das Integral in Gleichung (4) stimmt so mit dem Integral in Gleichung (2) überein. Die Gleichungen (2) und (4) gelten nicht, wenn der Punkt  $s$  sich innerhalb des Ablenkfeldes befindet.

Mit den folgenden Abkürzungen lassen sich Gleichung (2) und (4) sehr einfach schreiben:

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{1}{l} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\beta(x)} \cos \phi(x) dx \\ I_s &= \frac{1}{l} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\beta(x)} \sin \phi(x) dx \\ R^2 &= I_c^2 + I_s^2 \\ \mathcal{J} &= \arctan \frac{I_s}{I_c} \end{aligned}$$

$l = s_2 - s_1$  ist die Länge des Ablenkfeldes.

Die Gleichung der Teilchenbahnen lautet dann

$$r(s, k) = \sqrt{\beta(s)} \cdot R \exp i \left[ \phi(s) - \mathcal{J} - \frac{\pi}{2} \right] \sum_{j=0}^{k-1} F(k-j) \exp[i 2 \mathcal{J} j] \quad (5)$$

und die der geschlossenen Bahnen

$$\hat{r}(s, k) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \mathcal{J}} R \exp i \left[ \phi(s) - \mathcal{J} - \mathcal{J} \right] \quad (6)$$

Bei sehr kurzem Ablenkfeld, das sich am Ort  $s_d$  befindet, gehen die Integrale über in

$$I_c \rightarrow \sqrt{\beta(s_d)} \cos \phi(s_d), \quad I_s \rightarrow \sqrt{\beta(s_d)} \sin \phi(s_d)$$

und für die konstante Phase gilt  $\mathcal{J} \rightarrow \phi(s_d)$ .

Befindet sich das Ablenkfeld in einem feldfreien Beschleunigerstück, so lassen sich gute Näherungen für die Amplituden und Phasenfunktionen derart einsetzen, daß die Integrale geschlossen auswertbar sind. Wenn man die Phasenfunktion  $\phi(s)$  und  $s$  am Anfang des feldfreien Stückes 0 setzt, erhält man auf diese Weise

$$I_c = \frac{1}{2\sqrt{\beta_0}} \left\{ 2\beta_0 - \alpha_c (s_1 + s_2) \right\} \quad (7a)$$

$$I_s = \frac{1}{2\sqrt{\beta_0}} (s_1 + s_2) \quad (7b)$$

$\beta_0$  und  $\alpha_0$  sind die Werte der Funktionen  $\beta(s)$  und  $\alpha(s)$  am Anfang des feldfreien Stückes.

## II. Zeitlich konstantes Ablenkkfeld

Für ein zeitlich konstantes Ablenkkfeld B oder E wird

$$\xi = e F(k) = \begin{cases} \frac{eB}{p} \\ \frac{eE}{p} \end{cases}$$

$\xi$  bedeutet bei kurzem Ablenkkfeld die Richtungsänderung, welche das Teilchen beim Durchlaufen des Feldes erfährt ("Kick").

Aus Gleichung (5) wird nach Auswertung der Summe

$$r(s, k) = \varepsilon \sqrt{\beta(s)} R \frac{\sin k\delta}{\sin \delta} \exp i \left[ \phi(s) + (k-1)\delta - \vartheta - \frac{\pi}{2} \right] \quad (8)$$

Durch das plötzlich eingeschaltete konstante Ablenkkfeld (Einschaltzeit klein gegen die Umlaufzeit) entsteht somit eine Betatronschwingung, die jeweils beim Durchgang durch das Ablenkkfeld einen Phasensprung  $-\delta = -\pi \Delta Q$  macht. Die Amplitude dieser Schwingung schwebt mit einer Schwebungsdauer von  $k = \frac{1}{\Delta Q}$  Umläufen. Gleichung (8) läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$r(s, k) = \frac{\varepsilon \sqrt{\beta(s)} R}{2 \sin \delta} \exp i \left[ \phi(s) - \vartheta \right] \left\{ \exp(-i\delta) - \exp i \left[ (k-1)2\delta + \delta \right] \right\} \quad (9)$$

Hierin stellt der erste Term genau die geschlossene Bahn (6) dar. Die Bewegung kann somit auch als Schwingung um den neuen closed orbit mit konstanter Amplitude und der normalen Phasenverschiebung von  $2\pi \Delta Q$  pro Umlauf aufgefaßt werden.

### III. Langsam ansteigendes Ablenkkfeld

Die Störkraft möge langsam linear mit der Zeit gemäß Gleichung  $F = k\Delta F = K \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{L}}$  ansteigen, d.h. der Anstieg der Störkraft pro Umlauf sei  $\Delta F$ . Dann wird aus Gleichung (5)

$$r(s, k) = \frac{\Delta \mathcal{E} \sqrt{\beta(\vartheta)} R}{2 \sin \vartheta} \exp i [\phi(s) - \vartheta] \left\{ k \exp(-i\vartheta) - \frac{\sin k\vartheta}{\sin \vartheta} \exp(i k \vartheta) \right\} \quad (10)$$

Hierin entspricht der erste Term genau dem Gleichgewichtskreis für die augenblickliche Ablenkkraft  $k\Delta F$ . Der zweite Term, der die schwebende Schwingung darstellt, kann für  $k \gg \frac{1}{\sin \vartheta}$  gegen den ersten vernachlässigt werden. Die Teilchen bewegen sich somit für große  $k$  praktisch auf dem Gleichgewichtskreis. Für  $\Delta \vartheta = \frac{1}{4}$  liegt der Schwebungsanteil schon nach 20 Umläufen unter 10 % des übrigen Anteils. Gleichung (10) ohne Schwebungsanteil gilt angenähert auch bei großem  $k$  für nichtlinearen Anstieg des Feldes, sofern nur  $\Delta \mathcal{E}$  stets genügend klein ist. Bei der Herleitung von Gleichung (10) wird benutzt, daß die Stufen  $\Delta \mathcal{E}$  nur über jeweils  $k = \frac{1}{\Delta \vartheta}$  Umläufe untereinander gleich sind.

### IV. HF-Ablenkkfeld mit konstanter Frequenz

Der Einfluß eines hochfrequenten Ablenkkfeldes <sup>2)</sup> kann untersucht werden, wenn man in Gleichung (5) für die Störkraft einsetzt

$$F(k) = F_0 \cos \left\{ \frac{\omega}{f} (k-1) + \varphi_0 \right\}$$

$$= \frac{F_0}{2} \left\{ \exp i \left[ \frac{\omega}{f} (k-1) + \varphi_0 \right] + \exp(-i) \left[ \frac{\omega}{f} (k-1) + \varphi_0 \right] \right\}$$

Hierin ist  $\omega$  die Kreisfrequenz des HF-Feldes und  $f$  die Umlauffrequenz der Teilchen im Synchrotron.  $\varphi_0$  ist die Phase der HF beim ersten Durchgang der Teilchen durch das Feld ( $k = 1$ ). Sie unterscheidet die zeitlich nacheinander in das Feld gelangenden Teilchen. Die Teilchen mit  $\varphi_0 = 0$  finden beim ersten Durchgang maximales Feld vor. Mit der Abkürzung  $\xi_0 = F_0 \frac{1}{f}$  ergibt die Auswertung von Gleichung (5)

$$r(s, k) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 R \sqrt{\beta(\omega)} \exp\left[\phi(s) + (k-1)2\delta - \vartheta - \frac{\pi}{2}\right] \left\{ \frac{\sin k(\delta + \frac{\omega}{2f})}{\sin(\delta + \frac{\omega}{2f})} \exp(-i) \left[ (\delta + \frac{\omega}{2f})(k-1) + \varphi_0 \right] \right. \\ \left. + \frac{\sin k(\delta - \frac{\omega}{2f})}{\sin(\delta - \frac{\omega}{2f})} \exp(-i) \left[ (\delta - \frac{\omega}{2f})(k-1) - \varphi_0 \right] \right\} \quad (11)$$

Durch das HF-Feld entsteht die Überlagerung zweier Betatronschwingungen, die mit den Frequenzen  $\frac{2f\delta + \omega}{2\pi}$  und  $\frac{2f\delta - \omega}{2\pi}$  schweben. Bei jedem Durchgang durch das Ablenkkfeld machen die beiden Anteile der Betatronschwingungen einen Phasensprung von  $-\left(\frac{\omega}{2f} + \delta\right)$  bzw.  $\frac{\omega}{2f} - \delta$ .

Im Resonanzfall  $\delta \pm \frac{\omega}{2f} = 0 \text{ mod } \pi$  wird aus Gleichung (11)

$$r(s, k) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 R \sqrt{\beta(s)} \exp\left[\phi(s) + (k-1)2\delta - \vartheta - \frac{\pi}{2}\right] \left\{ k \exp(i\varphi_0) \right. \\ \left. + \frac{\sin 2\delta k}{\sin 2\delta} \exp(-i) \left[ 2\delta(k-1) \mp \varphi_0 \right] \right\} \quad (12)$$

Der Resonanzfall tritt ein, wenn  $\omega = 2\pi f(m \mp \Delta Q)$  ist mit ganzzahligem  $m$ . Der zweite Term in Gleichung (12) kann gegen den ersten vernachlässigt werden, wenn  $k \gg \frac{1}{\sin 2\delta}$ ; für große Umlaufzahlen  $k$  liefert das HF-Feld im Resonanzfall Betatronschwingungen, deren Amplitude linear mit der Zeit anwächst und deren Phase die normale Phasenverschiebung von  $2\delta$  pro Umlauf erfährt. Die Phasenverschiebung der HF pro Umlauf beträgt dann ebenfalls  $2\delta$ . Im Resonanzfall besitzt also die Betatronschwingung für ein Teilchen stets die gleiche Phasendifferenz gegenüber der HF. Zur Veranschaulichung der Strahlbeeinflussung im Resonanzfall dienen folgende 2 Fragen:

- 1) Wie ist der Strahlverlauf nach großen Umlaufzahlen  $k$  zu einem festen Zeitpunkt  $t$  ?
  - 2) Wie ist der zeitliche Verlauf des Strahles an einem festen Ort ?
- Es sei angenommen, daß zur Zeit  $t_0 = 0$  das Feld eingeschaltet wurde und maximale Amplitude besaß. Die Teilchen, welche zu diesem Zeitpunkt das Feld passierten, besitzen die HF-Anfangsphase  $\varphi_0 = 0$ . Die Anfangsphase aller anderen Teilchen ergibt sich aus der Entfernung, welche das Teilchen zur Zeit  $t_0$  bis zum Deflektor zurückzulegen hat:

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{c} \left\{ ct - [(k-1)L + S - s_d] \right\}$$

$s_d$  ist der Ort des Deflektors,  $(k - 1) L + s - s_d$  der zurückgelegte Weg vom ersten Deflektordurchgang bis zum betrachteten Ort und  $ct$  der zurückgelegte Weg vom Zeitpunkt  $t_0 = 0$  an bis zum betrachteten Zeitpunkt.  $\varphi_0$  in Gleichung (12) eingesetzt ergibt, bei Vernachlässigung des zweiten Termes,

$$r(s, k) = \frac{k}{2} \epsilon_0 R \sqrt{\beta(s)} \expi \left[ \phi(s) \mp \omega t \pm \frac{\omega}{c} (s - s_d) \cdot \vartheta - \frac{\pi}{2} \right] \quad (13)$$

An jedem Ort schwingt also der Strahl sinusförmig mit der HF-Frequenz  $\omega/2\pi$  um den Sollkreis.

Setzt man in "smooth approximation"

$$\phi(s) = \frac{2\pi Q f}{c} (s - s_d) + \phi(s_d),$$

so stellt Gleichung (13) in Abhängigkeit von  $s$  eine mit  $\sqrt{\beta(s)}$  modulierte sinusförmige Schwingung dar:

$$r(s, k) = \frac{k}{2} \epsilon_0 R \sqrt{\beta(s)} \expi \left[ \mp \omega t + \frac{1}{c} (2\pi Q f \pm \omega) (s - s_d) - \frac{\pi}{2} - \vartheta + \phi(s_d) \right]$$

mit der Wellenlänge  $\frac{c}{Q f \pm \omega/2\pi}$ . Wenn im speziellen Feld  $2\pi Q f = \omega$  ist, d.h. wenn die Frequenz der HF gleich der Betatronfrequenz ist, hat der Strahl in "smooth approximation" zu jedem Zeitpunkt überall die gleiche Abweichung vom Sollkreis. Der Strahl läuft auf einem Kreis, der mit der HF-Frequenz  $\omega/2\pi$  atmet.

Betrachtet man in der Nähe einer Resonanzstelle, z.B.  $\vartheta - \frac{\omega}{2f} = 0$ , den Resonanzterm in Gleichung (11), so erhält man für die Amplitude

$$(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 R \sqrt{\beta(s)} \left| \frac{\sin k(\vartheta - \frac{\omega}{2f})}{\sin(\vartheta - \frac{\omega}{2f})} \right|$$

Das Maximum der Schwebung tritt ein bei

$$k_{\max} = \frac{1}{2 \Delta Q f - \omega/\pi}$$

und für das Maximum der Amplitude ergibt sich

$$(r)_{\max} = \epsilon_0 R \sqrt{\beta(s)} \cdot \frac{k_{\max}}{\pi}$$

In dem Spezialfall, wenn die HF-Frequenz  $\frac{\omega}{2\pi}$  mit der Umlauffrequenz  $f \bmod 2\pi$  übereinstimmt, reduziert sich Gleichung (11) auf

$$r(s, k) = \varepsilon_0 \cos \varphi_0 \sqrt{\beta(s)} R \frac{\sin kd}{\sin d} \exp i \left[ \phi(s) + (k-1)d - \vartheta - \frac{\pi}{2} \right],$$

die mit der für den Fall eines konstanten Ablenkkfeldes gültigen Gleichung (8) übereinstimmt, wenn  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \varphi_0$  gesetzt wird.

Der Resonanzanteil in Gleichung (12) kann in "smooth approximation" auch auf andere Weise erhalten werden, wie K.W. Robinson <sup>3)</sup> angegeben hat. Beim k-ten Durchgang des Teilchens durch das HF-Ablenkkfeld ist in dem Resonanzfall  $d - \frac{\omega}{2f} = 0$  die hervorgerufene Richtungsänderung gegeben durch

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0 \cos \left\{ (k-1)2d + \varphi_0 \right\} = \varepsilon_0 \cos \vartheta_{\text{HF}}(k).$$

Die nach diesem Durchgang vorhandene Betatronschwingung am Ausgang des Deflektors sei gegeben durch

$$r(k) = r_0(k) \cos \left[ (k-1)2d + \varphi_0 + \Theta(k) \right] = r_0(k) \cos \vartheta_{\beta}(k). \quad (14)$$

$\Theta(k)$  ist somit die Differenz zwischen der Phase  $\vartheta_{\beta}(k)$  der Betatronschwingung und  $\vartheta_{\text{HF}}(k)$  der Hochfrequenz.

Der beim Durchgang durch ein kurzes Ablenkkfeld hervorgerufene maximale Amplitudenzuwachs ist in "smooth approximation" gegeben durch

$$\Delta r_0 = \varepsilon \bar{\beta}$$

mit dem Mittelwert der Amplitudenfunktion  $\bar{\beta} = \frac{L}{2\pi Q}$ .

Aus Fig. 1 ist ersichtlich, daß die folgenden Gleichungen gelten, wenn  $\Delta r_0$  klein ist gegen  $r_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d r_0}{d k} &= -\varepsilon_0 \bar{\beta} \cos \vartheta_{\text{HF}} \sin \vartheta_{\beta} \\ \frac{d \vartheta_{\beta}}{d k} &= -\frac{\varepsilon_0 \bar{\beta}}{r_0} \cos \vartheta_{\text{HF}} \cos \vartheta_{\beta} + 2d \end{aligned} \quad (15)$$

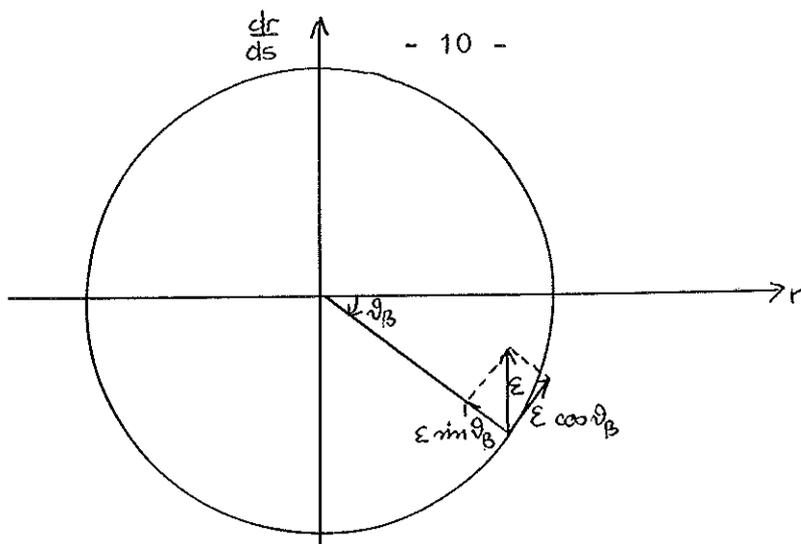


Fig. 1

Ersetzt man  $\vartheta_B$  durch  $\vartheta_{HF} + \Theta$  und mittelt die Ausdrücke (15) über eine Periode von  $\cos \vartheta_{HF}$ , so erhält man

$$\frac{dr_0}{dk} = - \frac{\epsilon_0 \bar{B}}{2} \sin \Theta \quad (16)$$

$$\frac{d\Theta}{dk} = - \frac{\epsilon_0 \bar{B}}{2r_0} \cos \Theta$$

Die Lösungen von (16) sind gegeben durch

$$\Theta(k) = \arctan \left\{ \tan \Theta_1 - \frac{\epsilon_0 \bar{B}}{2} \cdot \frac{k}{r_1 \cos \Theta_1} \right\} \quad (17)$$

$$r_0(k) = \frac{r_1 \cos \Theta_1}{\cos \Theta(k)} = \sqrt{r_1^2 + \left( \frac{\epsilon_0 \bar{B}}{2} \right)^2 k^2 - \epsilon_0 \bar{B} k r_1 \sin \Theta_1}$$

$r_1$  und  $\Theta_1$  sind die Anfangswerte von  $r_0$  und  $\Theta$  für  $k = 0$ , d.h. vor dem ersten Durchgang durch das HF-Feld.

Für große Umlaufzahlen  $k$  wird

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tan \Theta(k) = \begin{cases} -\infty & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq \Theta_1 < \frac{\pi}{2} \\ +\infty & \text{für } -\frac{3\pi}{2} < \Theta_1 \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

In beiden Fällen geht also  $\Theta(k)$  gegen  $-\frac{\pi}{2}$ . Variiert man die Anfangsamplitude  $\Theta_1$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$  (bzw.  $-\frac{\pi}{2}$  und  $-\frac{3\pi}{2}$ ), so bewegt sich die Amplitude  $r_0(k)$  zwischen

$$\begin{aligned} r_0(k)_{\min} &= \frac{\epsilon_0 \bar{B}}{2} k - r_1 \\ r_0(k)_{\max} &= \frac{\epsilon_0 \bar{B}}{2} k + r_1 \end{aligned} \quad (18)$$

Diese Ergebnisse stimmen mit den oben erhaltenen für ein kurzes Ablenkfeld in "smooth approximation" überein. Aus Gleichung (12) wird nämlich mit  $R \rightarrow \sqrt{B(s_d)} \rightarrow \sqrt{\bar{B}}$  und  $\phi(s_d) \rightarrow \vartheta$  (s. Seite 4)

$$r(s_d, k) = \frac{\varepsilon_0 \bar{B}}{2} k \exp i \left[ (k-1) 2\vartheta + \varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right] \quad (19)$$

für  $(\vartheta - \frac{\omega}{2f}) = 0 \text{ mod } \pi$  und  $k \gg \frac{1}{\sin 2\vartheta}$ . Addiert man hierzu gemäß Gleichung (1) eine Anfangsbetatronschwingung  $r^* = r_0 \exp i [(k-1) 2\vartheta + \varphi_0 + \vartheta_1]$ , so ergeben sich genau die Gleichungen (17) und (18). Die Phasenverschiebung von  $r$  in Gleichung (19) gegen die Hochfrequenz  $F(k) = F_0 \cos [(k-1) 2\vartheta + \varphi_0]$  beträgt stets  $-\frac{\pi}{2}$ . Für große  $k$  ist der Anteil  $r$  gegen (19) zu vernachlässigen.

Im bisher behandelten Fall eines hochfrequenten Ablenkfeldes sollte das Feld in einer Zeit, die klein ist gegen die Umlaufzeit der Teilchen, auf volle Amplitude geschaltet werden. Es sei nun noch kurz der Fall behandelt, daß die Amplitude des Ablenkfeldes gem.

$$F = k \Delta F_0 \cos \left( \frac{\omega}{f} (k-1) + \varphi_0 \right)$$

linear mit der Zeit anwächst. Dann entsteht aus Gleichung (5) zunächst wieder ein Anteil, der mit Gleichung (11) identisch ist, wenn man dort  $\varepsilon_0 = k \Delta F_0 \ell$  setzt. Die beiden Glieder dieses Anteiles steigen also im Resonanzfall mit  $k^2$  bzw.  $k$  an. Außerdem entstehen aber die Anteile

$$r^0(s, k) = \frac{R \ell \Delta F_0}{2} \sqrt{B(s)} \exp i [\phi(s) - \vartheta] \left\{ \frac{\exp(-i) [k(\vartheta + \frac{\omega}{2f}) + \varphi_0]}{2 \sin(\vartheta - \frac{\omega}{2f})} \left\{ \frac{\sin k(\vartheta - \frac{\omega}{2f})}{\sin(\vartheta - \frac{\omega}{2f})} - k \exp(-i) [(k-1)(\vartheta - \frac{\omega}{2f})] \right\} \right. \\ \left. + \frac{\exp(-i) [k(\vartheta - \frac{\omega}{2f}) - \varphi_0]}{2 \sin(\vartheta + \frac{\omega}{2f})} \left\{ \frac{\sin k(\vartheta + \frac{\omega}{2f})}{\sin(\vartheta + \frac{\omega}{2f})} - k \exp(-i) [(k-1)(\vartheta + \frac{\omega}{2f})] \right\} \right\}$$

Im Resonanzfall gehen diese Anteile über in

$$r^0(s, k) = \frac{R \ell \Delta F_0}{4 \sin 2\vartheta} \sqrt{B(s)} \exp i [\phi(s) + \varphi_0 - \vartheta] \left\{ \frac{\sin 2\vartheta k}{\sin 2\vartheta} - k \exp(-i) [2\vartheta (k-1)] \right\}$$

Für große Umlaufzahlen ( $k \gg \frac{1}{\sin 2\vartheta}$ ) sind sie gegen das mit  $k^2$  ansteigende Glied vernachlässigbar.

V. HF-Ablenkfeld mit linear veränderlicher Frequenz

Wie zuerst von Geiger <sup>4)</sup> gezeigt wurde, läßt sich auch der Fall linear veränderlicher Frequenz des Ablenkfeldes verhältnismäßig einfach und anschaulich behandeln. Hierbei ist das Durchfahren einer Resonanz von besonderem Interesse. Im folgenden sollen die Verhältnisse in der Umgebung einer Resonanz untersucht werden.

In der Störkraft

$$F(k) = F_0 \cos \left( \frac{1}{f} \int_0^{k-1} \omega(\tau) d\tau + \varphi_0 \right) \quad (20)$$

soll die Kreisfrequenz  $\omega$  nach der Gleichung

$$\omega(\tau) = \omega_{res} + \Delta\omega(\tau - k_0) \quad (20a)$$

linear von der Umlaufzahl abhängen.  $\omega_{res}$  ist die Resonanzfrequenz gemäß  $2\sigma \pm \frac{\omega}{f} = 0 \pmod{2\pi}$ ,  $\Delta\omega$  ist der Zuwachs der HF-Kreisfrequenz pro Umlauf, und die Resonanz wird erreicht beim  $k_0$ -ten Durchgang. Setzt man Gleichung (20) in Gleichung (5) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} r(s, k) = & \frac{RF_0 \ell}{2} \sqrt{\beta(s)} \exp i \left[ \phi(s) + (k-1)2\sigma - \vartheta - \frac{\pi}{2} \right] \times \\ & \times \left\{ \exp(-i\varphi_0) \sum_{j=0}^{k-1} \exp \frac{-i}{f} \left[ \frac{\Delta\omega}{2} j^2 + (\omega_{res} + 2\sigma f)j - \Delta\omega k_0 j \right] \right. \\ & \left. + \exp(i\varphi_0) \sum_{j=0}^{k-1} \exp \frac{i}{f} \left[ \frac{\Delta\omega}{2} j^2 + (\omega_{res} - 2\sigma f)j - \Delta\omega k_0 j \right] \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

Beim Durchgang durch die Resonanz  $2\sigma f + \omega_{res} = 0 \pmod{2\pi}$  überwiegt der erste Term, beim Durchgang durch die Resonanz  $(2\sigma f - \omega_{res}) = 0 \pmod{2\pi}$  der zweite Term, wie man dem Ergebnis des Kapitels IV entnehmen kann. Deshalb kann für den Durchgang durch eine Resonanz Gleichung (21) geschrieben werden in der Form

$$\begin{aligned} r(s, k) = & \frac{R\epsilon_0}{2} \sqrt{\beta(s)} \exp i \left[ \phi(s) + (k-1)2\sigma - \vartheta - \frac{\pi}{2} \mp \varphi_0 \right] \times \\ & \times \sum_{j=0}^{k-1} \exp \frac{\mp i \Delta\omega}{f} \left[ \frac{1}{2} j^2 - k_0 j \right] \quad (22) \end{aligned}$$

Die Summe in dieser Gleichung kann durch ein Integral angenähert werden, wenn die Ableitung des Exponenten nach  $j$  klein ist gegen  $\frac{\pi}{2}$  wenn also

$$\left| \frac{\Delta\omega}{f} (j - k_0) \right| \ll \frac{\pi}{2}$$

oder nach Gleichung (20a)

$$\frac{1}{f} \left| \omega(k) - \omega_{res} \right| \ll \frac{\pi}{2}$$

Für diese Näherung muß also  $\omega(k)$  stets in der Nähe der Resonanzfrequenz liegen. Aus Gleichung (22) wird dann

$$r(s, k) = \frac{k\epsilon_0}{2} \sqrt{\beta(s)} \exp i \left[ \phi(s) + (k-1)2\delta - \delta - \frac{\pi}{2} + \varphi_0 \right] \int_0^{k-1} e^{-\frac{i\Delta\omega}{f} [c^2 - ck_0]} dc \quad (23)$$

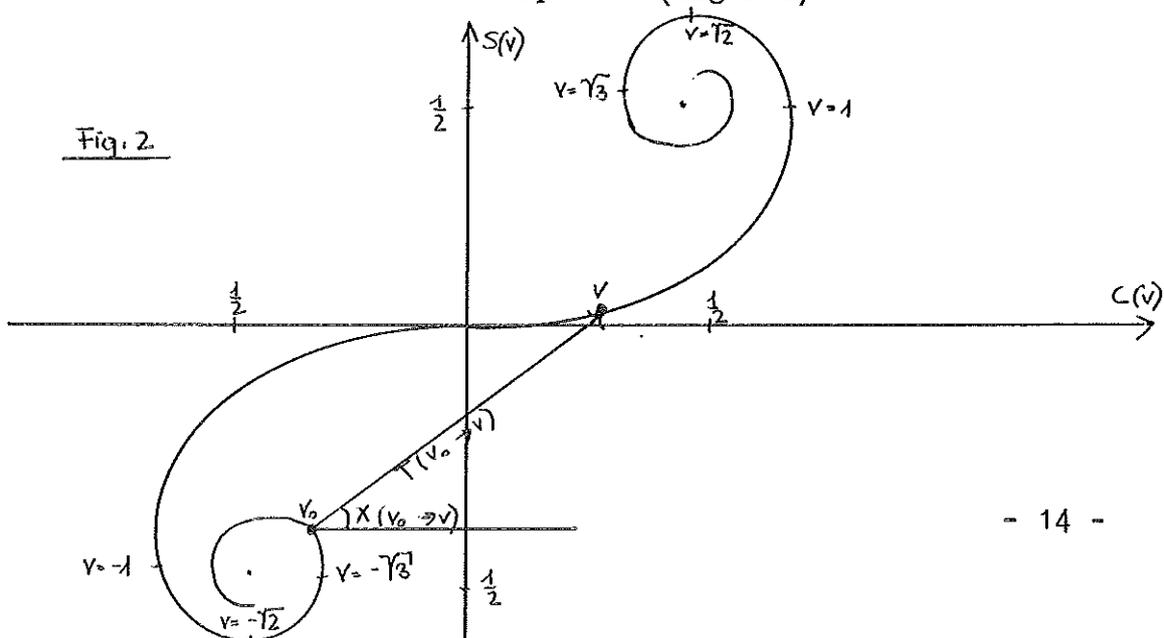
Das Integral in Gleichung (23) kann gemäß

$$\int_0^{k-1} e^{-\frac{i\Delta\omega}{f} [c^2 - ck_0]} dc = \sqrt{\frac{\pi f}{|\Delta\omega|}} e^{\pm \frac{\Delta\omega i}{f} k_0^2} \left\{ C(v) - C(v_0) \mp i [S(v) - S(v_0)] \right\} \quad (24)$$

auf die Fresnel'schen Integrale

$$C(v) = \int_0^v \cos \frac{\pi}{2} n^2 dn \quad S(v) = \int_0^v \sin \frac{\pi}{2} n^2 dn \quad (25)$$

zurückgeführt werden, die z.B. in Jahnke-Embde <sup>5)</sup> tabuliert sind. In Gleichung (24) ist  $v_0 = \sqrt{\frac{|\Delta\omega|}{f\pi}}$  und  $v = (k-1) \sqrt{\frac{|\Delta\omega|}{2\pi}}$ , wenn  $\Delta\omega$  positiv ist. Bei abnehmender Frequenz ( $\Delta\omega < 0$ ) ändern sich die Vorzeichen von  $v_0$  und  $v$ . Trägt man  $S(v)$  gegen  $C(v)$  in kartesischen Koordinaten auf, so erhält man die Cornu'sche Spirale (Figur 2)



Der Kurvenparameter  $v$  ist die vom Nullpunkt aus gemessene Bogenlänge der Spirale. Gleichung (23) läßt sich mit Hilfe von Gleichung (24) auch in der Form schreiben

$$r(v, k) = \frac{k \varepsilon_0}{2} \sqrt{\frac{\pi f}{\Delta \omega}} \cdot T(v_0 \rightarrow v) \cdot \exp i \left[ \phi(v) + (k-1) 2\sigma - \vartheta - \frac{\pi}{2} \tau \rho \pm \frac{(\Delta \omega)}{2f} k_0^2 \mp \mathcal{K}(v_0 \rightarrow v) \right] \quad (26)$$

mit dem Abstand

$$T(v_0 \rightarrow v) = \sqrt{[C(v) - C(v_0)]^2 + [S(v) - S(v_0)]^2}$$

der Punkte  $(v)$  und  $(v_0)$  in der  $[C(v), S(v)]$ -Ebene und dem Winkel

$$X = (v_0 \rightarrow v) = \arctan \frac{S(v) - S(v_0)}{C(v) - C(v_0)}$$

der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte gegen die  $C(v)$ -Achse.  $v$  und  $v_0$  hängen nach den Gleichungen (24a) von der laufenden Umlaufzahl  $k$  und der Resonanzumlaufzahl  $k_0$  ab.

Liegen die Punkte  $(v_0)$  und  $(v)$  im mittleren Teil der Spirale, der angenähert linear verläuft, so geht die Amplitude  $\sqrt{\frac{\pi f}{\Delta \omega}} T(v_0 \rightarrow v)$  über in

$$\sqrt{\frac{\pi f}{\Delta \omega}} T(v_0 \rightarrow v) \approx (v - v_0) \sqrt{\frac{\pi f}{\Delta \omega}}$$

und die Phase  $\mathcal{K}$  ist praktisch null. Es ist aber

$$\sqrt{\frac{\pi f}{\Delta \omega}} \cdot (v - v_0) = k - 1$$

und Gleichung (26) geht in den Resonanzterm von Gleichung (12) über. Für das spezielle Beispiel

$$\frac{k_0 \Delta \omega}{f} = \frac{1}{20}, \quad \frac{\Delta \omega}{f} = \frac{1}{800} \quad (\text{d.h. } k_0 = 40)$$

und  $k = k_0$  ergibt sich der Amplitudenfaktor  $\sqrt{\frac{\pi f}{\Delta \omega}} T = 38,2$  statt des Faktors  $k - 1 = 39$ , den man für den Resonanzfall konstanter Frequenz erhält. Für größere Umlaufzahlen  $k_0$  nimmt die Abweichung stark zu.

Z.B. erhält man für  $\frac{k_0 \Delta \omega}{f} = \frac{1}{20}$ ,  $\frac{\Delta \omega}{f} = \frac{1}{4000}$  (d.h.  $k_0 = 200$ )

und  $k = k_0$  dem Amplitudenfaktor  $\sqrt{\frac{\pi f}{\Delta \omega}} T = 61,4$  statt des Faktors  $k - 1 = 199$  für konstante Frequenz.

F. Brasse

K.G. Steffen

Literaturhinweise

- 1) K.G. Steffen: CEA-45
- 2) vergl. z.B. M. Geiger: CERN-PS/Int. RF. 59-2
- 3) K.W. Robinson: CEA-72
- 4) M. Geiger: CERN private Mitteilung
- 5) Jahnke-Embde: Tafeln Höherer Funktionen, S. 35