

Desy Notiz A 2,62

Hamburg, den 4. Mai 1960

M 1-Dr. Ri/VM

KORREKTUREN FÜR ENDEFFEKTE

I. Einführung und Problemstellung

Bei der Behandlung der Elektronenbewegung im Synchrotron rechnet man üblicherweise mit einem Magnetfeld, das zwischen den Polen des Magneten konstant ist und an seinen Endflächen diskontinuierlich auf Null abfällt, während man den durch die Streufelder bedingten kontinuierlichen Abfall des Magnetfeldes in erster Näherung durch die Einführung einer Feldlänge

$$(1) \quad l_B \equiv \frac{1}{B_0} \int_{-\infty}^{+\infty} B \cdot dl$$

und einer Gradientenlänge

$$(2) \quad l_n \equiv \frac{1}{n^{(0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} n \cdot dl = l_B - \frac{\rho}{n_0} \frac{d}{dx} l_B$$

(B_0 , n_0 = Feldstärke und Feldindex im Innern des Magneten)

berücksichtigt. Im allgemeinen stimmen diese Längen nicht mit der geometrischen Länge l_0 des Magneten überein. Die Differenzen

$$(3a) \quad \Delta l_B = l_B - l_0$$

$$(3b) \quad \Delta l_n = l_n - l_0$$

zwischen der Feld- und Gradientenlänge und der Länge l_0 bedingen nun ein abweichendes Verhalten des Elektronenstrahls im Synchrotron gegenüber dem Strahl der idealen Maschine in der Weise, daß neben einer Verformung des closed orbit eine Verschiebung des Arbeitspunktes auftritt. Da die Frequenz der Betatronschwingung außer von λ_1 und λ_2 auch von dem Feldindex n abhängt, kann man versuchen, durch eine Änderung des Feldindex

$$(4) \quad \delta n = n - n^{(0)}$$

($n^{(0)}$ = Feldindex der idealen Maschine)

diese Verschiebung rückgängig zu machen. In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, wie sich eine Korrektur von n und l_0 auf die Gestalt des closed orbit und auf die Frequenz der Betatronschwingung auswirkt und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Arbeitspunkt seine Lage beibehält.

II. Die Bewegungsgleichungen

Den Ausgangspunkt zur Berechnung des closed orbit und der Frequenzverschiebung bilden die Bewegungsgleichungen der Elektronen in der Form

$$(5a) \quad x'' + \frac{R^2}{\rho^2} (1 - n) x = \frac{x_0}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} - \frac{3B_0}{8} \right)$$

$$(5b) \quad y'' + \frac{R^2}{\rho^2} n y = 0$$

Hier soll das in (5a) auftretende Sollfeld B_0 der idealen Maschine definiert werden als arithmetisches Mittel von B_p (= Feld im P-Sektor) und B_D (= Feld im D-Sektor)

$$(6) \quad B_s = \frac{1}{2} (B_F + B_D),$$

$$(7a) \quad B_F = B_s + \delta B,$$

$$(7b) \quad B_D = B_s - \delta B$$

und δB_s die Abweichung des gemessenen Feldes von $B_s(J)$ angeben.
Auf Grund der Gln. (3a) und (7a, b) ergibt sich die Größe $\frac{\delta B_s}{B_s}$

im F-Sektor zu:

$$(8) \quad \frac{\delta B_s}{B_s} = \begin{cases} \frac{\delta B}{B_s} & \text{für } -\frac{\theta_r}{2} < J < \frac{\theta_r}{2}, \\ 1 & \text{für } -\left(\frac{\theta_r}{2} + \Delta\theta_{BF}\right) < J < -\frac{\theta_r}{2}, \\ 1 & \text{für } \frac{\theta_r}{2} < J < \frac{\theta_r}{2} + \Delta\theta_{BF}, \end{cases}$$

im D-Sektor zu:

$$(9) \quad \frac{\delta B_s}{B_s} = \begin{cases} -\frac{\delta B}{B_s} & \text{für } \frac{\theta}{2} - \frac{\theta_r}{2} < J < \frac{\theta}{2} + \frac{\theta_r}{2}, \\ 1 & \text{für } \frac{\theta}{2} - \left(\frac{\theta_r}{2} + \Delta\theta_{BD}\right) < J < \frac{\theta}{2} - \frac{\theta_r}{2}, \\ 1 & \text{für } -\frac{\theta}{2} + \frac{\theta_r}{2} < J < -\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\theta_r}{2} + \Delta\theta_{BF}\right), \end{cases}$$

und für den Feldindex n finden wir nach (3b) und (4)

$$(10a) \quad n = -n_- = -(n_-^{(0)} + \delta n_-) \\ -\left(\frac{\theta_r}{2} + \Delta\theta_{BF}\right) < J < \left(\frac{\theta_r}{2} + \Delta\theta_{BF}\right)$$

$$n = n_+ \approx (n_+^{(0)} + \delta n_+) \quad (10b)$$

$$\text{für } \frac{\theta}{2} - \left(\frac{\theta_1}{2} + \Delta \theta_{\pm 0} \right) < j < \frac{\theta}{2} + \left(\frac{\theta_1}{2} + \Delta \theta_{\pm 0} \right).$$

Dabei wurde

$$\Delta \theta_3 = \frac{1}{R} \Delta l_B, \quad (11)$$

$$\Delta \theta_n = \frac{1}{R} \Delta l_n = \frac{1}{R} \left(\Delta l_B - \frac{p}{n_+} \frac{d}{dx} \Delta l_B \right)$$

gesetzt.

Durch die Gleichungen (5), (8), (9) und (11) wird bereits das Verhalten der Elektronen eindeutig beschrieben, und wir sind in der Lage, alle physikalischen Daten des Elektronenstrahls zu bestimmen, insbesondere die Amplituden des closed orbit und die Lage des Arbeitspunktes zu ermitteln.

III. Berechnung des closed orbit

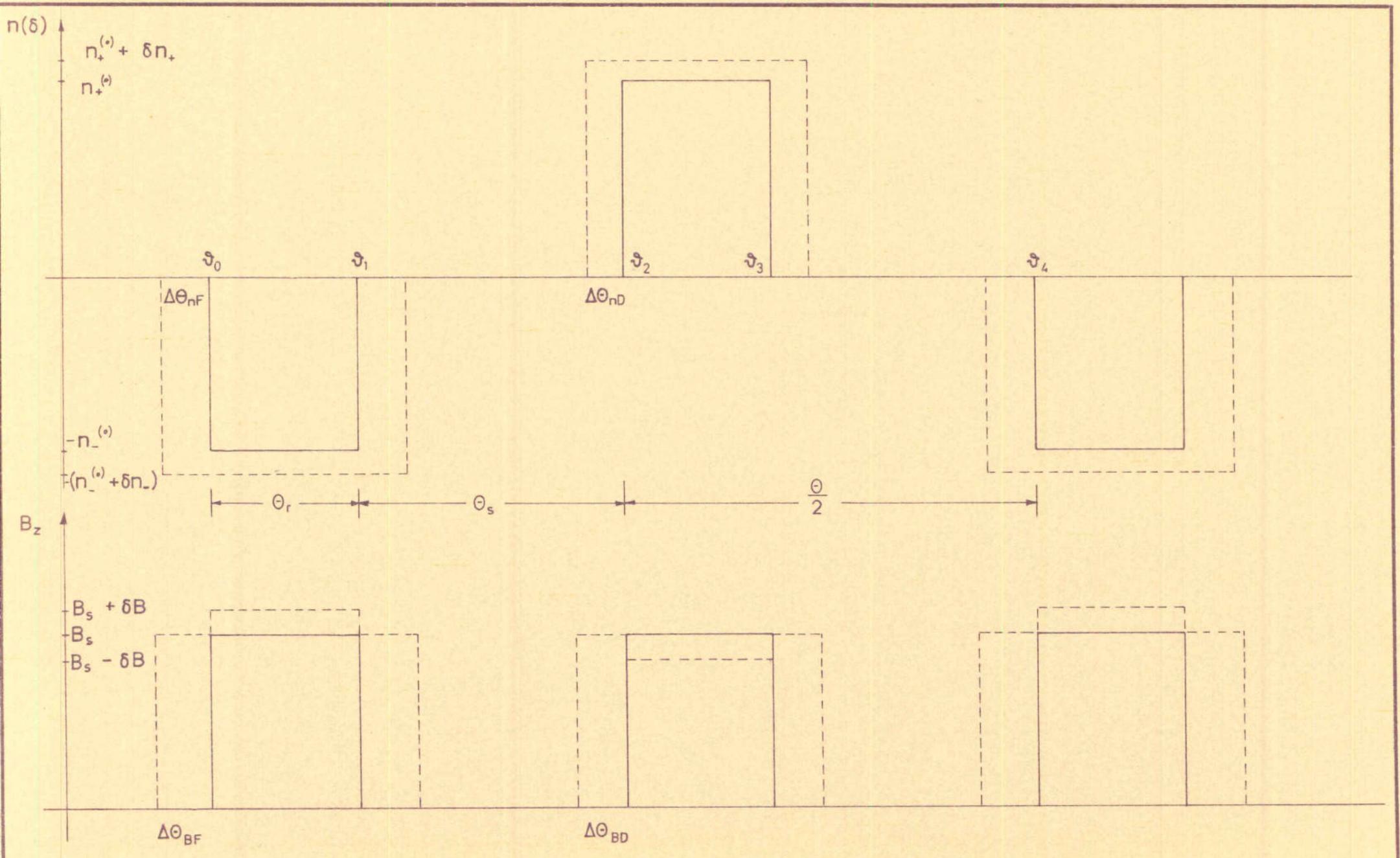
Wir beginnen die Auswertung der Formeln (5)-(11) mit der Berechnung des closed orbit, wobei wir uns in erster Linie für die Extremwerte der closed-orbit-Amplituden interessieren, die natürlich nicht zu groß ausfallen dürfen, damit die Teilchen nicht auf die Wand der Vakuumkammer treffen und für den Elektronenstrahl verlorengehen. Die Bestimmungsgleichungen des closed orbit lauten

$$(12) \quad \hat{x}'' + \frac{R^2}{\rho^2} (1 - n) \cdot \hat{x} = \frac{R^2}{\rho} \left(\frac{\delta p}{p} - \frac{\delta B_z}{B_0} \right),$$

$$(13) \quad \hat{x}(j + \theta) = \hat{x}(j), \quad \hat{x}'(j + \theta) = \hat{x}'(j),$$

$$(14) \quad \hat{x} = 0$$

(θ = Maschinenperiode)



Bezeichnen wir den Vektor $\begin{pmatrix} X(\beta) \\ X'(\beta) \end{pmatrix}$ mit $\hat{q}(\beta)$, so bekommen wir aus (12) bei Beschränkung auf lineare Glieder in $\Delta\theta$, $\Delta\theta_0 = \frac{\beta_0}{\mu}$ und $\frac{\beta}{\mu}$

im P-Sektor $\beta_0 < \beta < \beta_c \pm \theta_c = \beta_c$

$$\begin{aligned} \hat{q}(\beta) &= M(\beta, \beta_0) \hat{q}(\beta_0) + u(\beta, \beta_0) \\ M(\beta, \beta_0) &= M^0(\beta, \beta_0) + \delta M = \frac{\beta - \beta_0}{\beta} M^0(\beta, \beta_0) \\ (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{q}(\beta_0) &= M(\beta_0, \beta_0) \hat{q}(\beta_0) + u_0 \\ M(\beta_0, \beta_0) &= M_0 + \delta M_0 = \frac{\beta - \beta_0}{\beta} M_0 \end{aligned}$$

mit

$$M^0(\beta, \beta_0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} (\beta - \beta_0) & \frac{\sin \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} (\beta - \beta_0)}{\beta \sqrt{\alpha^2 + 1}} \\ -\frac{\beta_0}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} \sin \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} (\beta - \beta_0) & \cos \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} (\beta - \beta_0) \end{pmatrix}$$

$$u(\beta, \beta_0) = \left(\frac{\delta p}{\mu} \quad \frac{\delta \theta}{\mu} \right) \cdot \frac{\beta}{\mu} \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} (\beta - \beta_0) \\ \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} \sin \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\alpha^2 + 1} (\beta - \beta_0) \end{pmatrix}$$

im geraden Stück $\beta_0 < \beta < \beta_c \pm \theta_c = \beta_c$

$$\begin{aligned} \hat{q}(\beta) &= M(\beta, \beta_0) \hat{q}(\beta_0) + u \\ (16) \end{aligned}$$

$$M(\beta, \beta_0) = M_0 + \Delta M$$

mit

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & \theta_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta M_0 = \frac{R^2}{f^2} \begin{pmatrix} -\theta_v \cdot [n_1^{(0)} \cdot \Delta\theta_{1F} + \Delta\theta_{0F}] & 0 \\ [n_1^{(0)} \cdot \Delta\theta_{1D} - \Delta\theta_{2D}] - [n_1^{(0)} \cdot \Delta\theta_{1F} + \Delta\theta_{0F}] & \theta_v \cdot [n_1^{(0)} \cdot \Delta\theta_{1D} - \Delta\theta_{2D}] \end{pmatrix}$$

$$u_i = -\frac{R^2}{f} \cdot M_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta_{0F} \end{pmatrix} = -\frac{R^2}{f} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta_{0D} \end{pmatrix};$$

im D-Sektor $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2 + \theta_v \equiv \vartheta_2$:

$$\hat{q}(\vartheta) = M(\vartheta, \vartheta_1) \hat{q}(\vartheta_1) + u(\vartheta, \vartheta_1),$$

$$M(\vartheta, \vartheta_1) = M^{(0)}(\vartheta, \vartheta_1) + \delta n_1 \cdot \frac{\partial M^{(0)}(\vartheta, \vartheta_1)}{\partial n_1^{(0)}};$$

(17)

$$\hat{q}(\vartheta_2) = M(\vartheta_2, \vartheta_1) \hat{q}(\vartheta_1) + u_2,$$

$$M(\vartheta_2, \vartheta_1) = M_D + \delta n_2 \cdot \frac{\partial M_D}{\partial n_1^{(0)}}$$

mit

$$M^{(1)}(J, J_2) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} (J - J_2) & \frac{\sinh \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} (J - J_2)}{\frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1}} \\ \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} \sinh \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} (J - J_2) & \cosh \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} (J - J_2) \end{pmatrix}$$

$$u(J, J_2) = - \left(\frac{\partial p}{\partial J} + \frac{\delta \beta}{\delta J} \right) \frac{\rho}{n_r^{(1)} - 1} \begin{pmatrix} 1 - \cosh \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} (J - J_2) \\ - \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} \sinh \frac{R}{\rho} \sqrt{n_r^{(1)} - 1} (J - J_2) \end{pmatrix}$$

im geraden Stück $J_3 < J < J_2 + \theta_s \approx J_4$:

$$\hat{q}(J_4) = M(J_4, J_3) \hat{q}(J_3) + u,$$

$$(18) \quad M(J_4, J_3) = M_0 + \Delta M_1$$

mit

$$\Delta M_1 = \begin{pmatrix} \theta_s \cdot [n_r^{(1)} \cdot \Delta \theta_{sD} - \Delta \theta_{sD}] \\ [n_r^{(1)} \cdot \Delta \theta_{sD} - \Delta \theta_{sD}] - [n_r^{(1)} \cdot \Delta \theta_{sF} + \Delta \theta_{sF}] \\ 0 \\ -\theta_s \cdot [n_r^{(1)} \cdot \Delta \theta_{sF} + \Delta \theta_{sF}] \end{pmatrix}$$

$$m_4 = -\frac{R^2}{f} m_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta_{zD} \end{pmatrix} = -\frac{R^2}{f} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta_{zF} \end{pmatrix}$$

Aus (15), (16), (17) und (18) folgt unter Berücksichtigung der Periodizitätsbedingung (13)

$$\begin{aligned} \hat{q}(j_4) &= m(j_4, j_3) m(j_3, j_2) m(j_2, j_1) m(j_1, j_0) \hat{q}(j_0) + \\ &+ m_4 + m(j_4, j_3) m_3 + m(j_4, j_3) m(j_3, j_2) m_2 + \\ &+ m(j_4, j_3) m(j_3, j_2) m(j_2, j_1) m_1 \\ &= \hat{q}(j_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{q}(j_0) &= [I - m(j_4, j_3) m(j_3, j_2) m(j_2, j_1) m(j_1, j_0)]^{-1} \times \\ &\times \left\{ m_4 + m(j_4, j_3) m_3 + m(j_4, j_3) m(j_3, j_2) m_2 + \right. \\ &\quad \left. + m(j_4, j_3) m(j_3, j_2) m(j_2, j_1) m_1 \right\} \\ &\approx [I - m_0 m_D m_0 m_F]^{-1} \left\{ m_4 + m_0 m_3 + \right. \\ &\quad \left. + m_0 m_D m_2 + m_0 m_2 m_0 m_1 \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Die Extremwerte $\hat{\lambda}_F$ und $\hat{\lambda}_D$ von $\hat{\lambda}$ liegen nun aus Symmetriegründen in der Mitte des fokussierenden und defokussierenden Sektors.

Somit wird

$$\begin{aligned} \hat{q}_F &= \hat{q}(j_0 + \frac{\theta_F}{2}) = m(j_0 + \frac{\theta_F}{2}, j_0) \hat{q}(j_0) + m(j_0 + \frac{\theta_F}{2}, j_0) \\ &\approx m^{(1)}(j_0 + \frac{\theta_F}{2}, j_0) \hat{q}(j_0) + m(j_0 + \frac{\theta_F}{2}, j_0), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\hat{\lambda}_F = \alpha_1 \cdot p \frac{\delta p}{p} + \alpha_2 \cdot g \frac{\delta B}{B} + \alpha_3 \cdot f \Delta\theta_{zF} + \alpha_4 \cdot f \Delta\theta_{zD};$$

$$\begin{aligned}
 \hat{q}_p &= \hat{q}(J_2 + \frac{\theta_r}{2}) = M(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) M(J_2, J_2) M(J_2, J_2) \hat{q}(J_2) + \\
 &+ M(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) M(J_2, J_2) u_1 + \\
 &+ M(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) u_2 + u(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) \\
 &= M^{(0)}(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) M_0 M_F \hat{q}(J_2) + \\
 &+ M^{(0)}(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) M_0 u_1 + M^{(0)}(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) u_2 + \\
 &+ u(J_2 + \frac{\theta_r}{2}, J_2) ,
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$\hat{x}_0 = \beta_1 \cdot \delta \frac{\delta p}{p} + \beta_2 \cdot \delta \frac{\delta B}{B} + \beta_3 \cdot \delta \Delta \theta_{BF} + \beta_4 \cdot \delta \Delta \theta_{BD} .$$

wobei der Vektor $\hat{q}(J_2)$ aus (19) zu entnehmen ist.

Aus (20) und (21) ist ersichtlich, daß der closed orbit noch von der Impulsabweichung δp abhängt. Wir betrachten weiterhin die Gleichgewichtsbahn des synchronen Teilchens, indem wir fordern

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{\delta L}{L} = \frac{N \cdot R}{L \cdot \rho} \cdot \left\{ \int_{F\text{-Sektor}} \hat{x} d\vartheta + \int_{D\text{-Sektor}} \hat{x} d\vartheta \right\} \\
 &= \frac{N \cdot R}{L \cdot \rho} \cdot \left\{ \int_0^{\theta_r} M^{(0)}(J_2 + J, J_2) dJ \cdot \hat{q}(J_2) + \right. \\
 &+ \int_0^{\theta_r} dJ \cdot u(J_2 + J, J_2) + \\
 &+ \left. \int_0^{\theta_r} M^{(0)}(J_2 + J, J_2) dJ \cdot [M_0 M_F \hat{q}(J_2) + \right. \\
 &+ \left. M_0 u_1 + u_2] \right. \\
 &+ \left. \int_0^{\theta_1} u(J_2 + J, J_2) dJ \right\} , \\
 &= \gamma_1 \cdot \frac{\delta p}{p} + \gamma_2 \cdot \frac{\delta B}{B} + \gamma_3 \cdot \Delta \theta_{BF} + \gamma_4 \cdot \Delta \theta_{BD} .
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Die in (20), (21) und (22) eingeführten Konstanten $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$ ergeben sich für DESY zu

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 = 0,06709; & \beta_1 = 0,03410; & \gamma_1 = 0,0317566; \\
 \alpha_2 = -0,01385; & \beta_2 = -0,01409; & \gamma_2 = -0,0087857; \\
 \alpha_3 = -0,93612; & \beta_3 = -0,52550; & \gamma_3 = -0,453267; \\
 \alpha_4 = -0,70953; & \beta_4 = -0,31744; & \gamma_4 = -0,316854;
 \end{array}$$

Mit diesen Zahlenwerten gewinnen wir aus (22)

$$(23) \quad \left(\frac{\delta p}{p} \right)_{\text{synchron}} = 0,27666 \cdot \frac{\delta B}{B_0} + 14,27316 \cdot \Delta \theta_{BF} + 9,97758 \cdot \Delta \theta_{BD}$$

Damit errechnen sich schließlich die Extremwerte der closed-orbit-Amplitude für das synchrone Teilchen zu

$$(24) \quad \begin{aligned}
 \hat{x}_F &= 0,00471 \cdot \rho \frac{\delta B}{B_0} + 0,02147 \cdot \rho \Delta \theta_{BF} - 0,04013 \cdot \rho \Delta \theta_{BD} \\
 \hat{x}_D &= -0,00466 \cdot \rho \frac{\delta B}{B_0} - 0,038786 \cdot \rho \Delta \theta_{BF} + 0,02280 \cdot \rho \Delta \theta_{BD}
 \end{aligned}$$

IV. Die Frequenzverschiebung

Der closed orbit des synchronen Teilchens ist gekennzeichnet durch die Periodizitätseigenschaft (13) und die Forderung, daß das Teilchen keine Synchrotronoschwingungen ausführen soll, was gerade durch die Bedingung (22) erreicht wird. Jede andere Teilchenbahn führt bekanntlich freie Betatronoschwingungen um diese Gleichgewichtsbahn herum aus mit der Frequenz

$$Q_x = \frac{N}{2\pi} \mu_x, \quad \cos \mu_x = \frac{1}{2} \text{Sp. } M(\theta);$$

$$Q_z = \frac{N}{2\pi} \mu_z, \quad \cos \mu_z = \frac{1}{2} \text{Sp. } N(\theta);$$

$$\left(\begin{array}{l} Q = \text{Zahl der Betatronwellen pro Umfang} \\ M(\theta), N(\theta) = \text{Übertragungsmatrizen für die x- und z-Amplitude} \end{array} \right)$$

Wie schon gesagt wurde, fällt nun der durch das Wertepaar (Q_x, Q_z) definierte Arbeitspunkt des Synchrotrons im allgemeinen nicht mit dem Arbeitspunkt $(Q_x^{(0)}, Q_z^{(0)})$ der idealen Maschine zusammen. Gemäß dem in der Einleitung entwickelten Programm ergibt sich damit die Aufgabe, die durch die Gleichungen

$$(25a) \quad \delta Q_x \equiv Q_x - Q_x^{(0)} = - \frac{N}{4\pi \sin \mu^{(0)}} S_p \left\{ \mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}^{(0)}(\theta) \right\}$$

$$(25b) \quad \delta Q_z \equiv Q_z - Q_z^{(0)} = - \frac{N}{4\pi \sin \mu^{(0)}} S_p \left\{ \mathcal{M}(\theta) - \mathcal{M}^{(0)}(\theta) \right\}$$

gegebene Verschiebung des Arbeitspunktes zu berechnen.

A. Berechnung von δQ_x .

Die Berechnung von δQ_x ist sehr einfach, da wir die in (25a) auftretende Matrix $\mathcal{M}(\theta)$ schon bei der Behandlung des closed orbit aufgestellt haben. Aus (15), (16), (17) und (18) gewinnen wir sofort:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\theta) &\equiv \mathcal{M}(J_4, J_2) = \mathcal{M}(J_4, J_3) \mathcal{M}(J_3, J_1) \mathcal{M}(J_1, J_1) \mathcal{M}(J_1, J_0) \\ &= \left(\mathcal{M}_0 + \Delta \mathcal{M}_2 \right) \left(\mathcal{M}_D + \delta n_+ \frac{\partial \mathcal{M}_D}{\partial n_+^{(0)}} \right) \left(\mathcal{M}_0 + \Delta \mathcal{M}_1 \right) \left(\mathcal{M}_F + \delta n_- \frac{\partial \mathcal{M}_F}{\partial n_-^{(0)}} \right) \\ &= \mathcal{M}^{(0)}(\theta) + \Delta \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_D \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_F + \delta n_+ \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_D \cdot \Delta \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_F + \\ &\quad + \delta n_+ \cdot \mathcal{M}_0 \frac{\partial \mathcal{M}_D}{\partial n_+^{(0)}} \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_F + \delta n_- \cdot \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_D \mathcal{M}_0 \frac{\partial \mathcal{M}_F}{\partial n_-^{(0)}} \end{aligned} \quad (26)$$

und durch Einsetzen von (26) in (25a)

$$\begin{aligned} \delta Q_x &= - \frac{N}{4\pi \sin \mu^{(0)}} \left\{ S_p \cdot (\mathcal{M}_D \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_F \cdot \Delta \mathcal{M}_2) + S_p \cdot (\mathcal{M}_F \mathcal{M}_0 \mathcal{M}_D \cdot \Delta \mathcal{M}_1) \right. \\ &\quad \left. + \delta n_+ \cdot S_p \cdot (\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_F \mathcal{M}_0 \frac{\partial \mathcal{M}_D}{\partial n_+^{(0)}}) + \delta n_- \cdot S_p \cdot (\mathcal{M}_0 \mathcal{M}_D \mathcal{M}_0 \frac{\partial \mathcal{M}_F}{\partial n_-^{(0)}}) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

Für DESY wird:

$$(28) \quad \begin{aligned} \delta Q_x = & - 0,04140 \cdot \delta n_x + 0,14963 \cdot \delta n_z \\ & + 204,2419 \cdot \Delta \theta_{nF} - 85,3317 \cdot \Delta \theta_{nD} \\ & + 2,9489 \cdot \Delta \theta_{BF} + 1,2145 \cdot \Delta \theta_{BD} \end{aligned}$$

B. Berechnung von δQ_x .

Zur Berechnung von δQ_x muß die Übertragungsmatrix noch bestimmt werden. Zu dem Zweck lösen wir zunächst die Bewegungsgleichung (5b) für die z-Amplitude der Teilchen

$$z'' + \frac{R^2}{\rho^2} n \cdot z = 0$$

und finden

im F-Sektor $J_0 < J < J_1$:

$$(29) \quad \begin{aligned} z(J_1) &= \pi(J_1, J_0) z(J_0), \\ \pi(J_1, J_0) &= \pi_0 + \delta n_x \cdot \frac{\partial \pi_0}{\partial n_x^{(0)}}; \end{aligned}$$

im geraden Stück $J_1 < J < J_2$:

$$z(J_2) = \pi(J_2, J_1) z(J_1), \quad \pi(J_2, J_1) = \pi_0 + \Delta \pi_1,$$

$$(30) \quad \Delta \pi_1 = \frac{R^2}{\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} \theta_x \cdot n_x^{(0)} \cdot \Delta \theta_{nF} & 0 \\ n_x^{(0)} \cdot \Delta \theta_{nF} - n_x^{(0)} \cdot \Delta \theta_{nD} & - \theta_x \cdot n_x^{(0)} \cdot \Delta \theta_{nD} \end{pmatrix};$$

im D-Sektor $J_2 < J < J_3$:

$$(31) \quad \begin{aligned} z(J_3) &= \pi(J_3, J_2) z(J_2), \\ \pi(J_3, J_2) &= \pi_F + \delta n_x \cdot \frac{\partial \pi_F}{\partial n_x^{(1)}}; \end{aligned}$$

im geraden Stück $J_3 < J < J_4$:

$$\begin{aligned} z(J_4) &= \pi(J_4, J_3) z(J_3), \\ \pi(J_4, J_3) &= m_0 + \Delta \pi_1. \end{aligned}$$

(32)

$$\Delta \pi_1 = \frac{R^2}{\rho^2} \begin{pmatrix} -\theta_3 \cdot n_3^{(1)} \cdot \Delta \theta_{3,D} & 0 \\ n_3^{(1)} \cdot \Delta \theta_{3,F} - n_3^{(1)} \cdot \Delta \theta_{3,T} & \theta_3 \cdot n_3^{(1)} \cdot \Delta \theta_{3,F} \end{pmatrix}.$$

Aus (29), (30), (31) und (32) folgt jetzt:

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= \pi(J_4, J_3) \pi(J_3, J_2) \pi(J_2, J_1) \pi(J_1, J_0) \\ &= (m_0 + \Delta \pi_1) (m_F + \delta n_1 \cdot \frac{\partial m_F}{\partial n_1^{(1)}}) (m_0 + \Delta \pi_1) (m_D + \delta n_2 \cdot \frac{\partial m_D}{\partial n_2^{(1)}}) \\ &= \pi^{(0)}(\theta) + \Delta \pi_1 \cdot m_F \cdot m_0 \cdot m_D + m_0 \cdot m_F \cdot \Delta \pi_1 \cdot m_D + \\ &+ \delta n_1 \cdot m_0 \cdot \frac{\partial m_F}{\partial n_1^{(1)}} \cdot m_0 \cdot m_D + \delta n_2 \cdot m_0 \cdot m_F \cdot m_0 \cdot \frac{\partial m_D}{\partial n_2^{(1)}} \end{aligned}$$

(33)

und wir bekommen

$$\begin{aligned} \delta Q_2 &= - \frac{M}{4 \pi \sin^2 \theta} \cdot \left\{ S_F (m_F \cdot m_0 \cdot m_D \cdot \Delta \pi_1) + S_F (m_D \cdot m_0 \cdot m_F \cdot \Delta \pi_1) \right. \\ &+ \delta n_1 \cdot S_F (m_0 \cdot m_D \cdot m_0 \cdot \frac{\partial m_F}{\partial n_1^{(1)}}) + \delta n_2 \cdot S_F (m_0 \cdot m_F \cdot m_0 \cdot \frac{\partial m_D}{\partial n_2^{(1)}}) \left. \right\} \end{aligned}$$

(34)

Für DESY ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta Q_2 &= + 0,14963 \cdot \delta n_1 & - 0,04140 \cdot \delta n_2 \\ &- 84,1172 \cdot \Delta \theta_{3,F} & + 207,1908 \cdot \Delta \theta_{3,D} \end{aligned}$$

(35)

V. Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war die Berechnung der Frequenzverschiebung und der Verformung des closed orbit auf Grund der Endeffekte des Magneten.

Für die Extremwerte der closed-orbit-Amplitude fanden wir:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_F &= 0,00471 \cdot \rho \frac{\delta B}{B_z} + 0,02147 \cdot \rho \Delta \theta_{BF} - 0,04013 \cdot \rho \Delta \theta_{BD} \\
 &= 0,00296 \cdot R \frac{\delta B}{B_z} + 0,01350 \cdot \Delta l_{BF} - 0,02523 \cdot \Delta l_{BD} \\
 \hat{x}_D &= 0,00466 \cdot \rho \frac{\delta B}{B_z} - 0,03879 \cdot \rho \Delta \theta_{BF} + 0,02280 \cdot \rho \Delta \theta_{BD} \\
 &= 0,00293 \cdot R \frac{\delta B}{B_z} - 0,02439 \cdot \Delta l_{BF} + 0,01434 \cdot \Delta l_{BD}
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Dabei sind die Größen $\frac{\delta B}{B_z}$, Δl_{BF} , Δl_{BD} im Interesse eines großen Abstandes des Elektronenstrahls von der Vakuumkammerwand so zu wählen, daß \hat{x}_F , \hat{x}_D möglichst klein ausfallen.

Die Frequenzverschiebung ergab sich zu:

$$\begin{aligned}
 \delta Q_x &= - 0,04140 \cdot \delta n_+ + 0,14963 \cdot \delta n_- \\
 &\quad + 204,2419 \cdot \Delta \theta_{BF} - 85,3317 \cdot \Delta \theta_{BD} \\
 &\quad + 2,9489 \cdot \Delta \theta_{BF} + 1,2145 \cdot \Delta \theta_{BD} \\
 \delta Q_z &= 0,14963 \cdot \delta n_+ - 0,04140 \cdot \delta n_- \\
 &\quad - 84,1172 \cdot \Delta \theta_{BF} + 207,1908 \cdot \Delta \theta_{BD}
 \end{aligned}
 \tag{37a}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann die Verschiebung des Arbeitspunktes ermittelt werden, wenn δn_+ , δn_- , $\Delta \theta_{BF}$, $\Delta \theta_{BD}$, $\Delta \theta_{BF}$ und $\Delta \theta_{BD}$ bekannt sind. Zur numerischen Auswertung der Gl. (37a) ist es zweckmäßig, anstelle von $\Delta \theta_n$ und $\Delta \theta_B$ die in der Messung auftretenden Größen Δl_B und $\frac{d}{dx} \Delta l_B$ einzuführen. Dann wird (Δl_B ist in m zu messen):

$$\begin{aligned}
 \delta Q_x = & - 0,04140 \cdot \delta n_1 & + 0,14963 \cdot \delta n_2 \\
 & + 4,109384 \cdot \Delta l_{BF} & - 1,668365 \cdot \Delta l_{BD} \\
 & + 1,854176 \cdot \frac{d \Delta l_{BF}}{dx} & + 0,763644 \cdot \frac{d \Delta l_{BD}}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{37b}$$

$$\begin{aligned}
 \delta Q_x = & 0,14963 \cdot \delta n_1 & - 0,04140 \cdot \delta n_2 \\
 & - 1,668365 \cdot \Delta l_{BF} & + 4,109384 \cdot \Delta l_{BD} \\
 & - 0,763644 \cdot \frac{d \Delta l_{BF}}{dx} & - 1,854176 \cdot \frac{d \Delta l_{BD}}{dx}
 \end{aligned}$$

Soll der Arbeitspunkt seine alte Lage beibehalten, so haben wir zu fordern:

$$\delta Q_x = \delta Q_x = 0,$$

und es entstehen die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 0 = & - 0,04140 \cdot \delta n_1 & + 0,14963 \cdot \delta n_2 \\
 & + 4,109384 \cdot \Delta l_{BF} & - 1,668365 \cdot \Delta l_{BD} \\
 & + 1,854176 \cdot \frac{d \Delta l_{BF}}{dx} & + 0,763644 \cdot \frac{d \Delta l_{BD}}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & 0,14963 \cdot \delta n_1 & - 0,04140 \cdot \delta n_2 \\
 & - 1,668365 \cdot \Delta l_{BF} & + 4,109384 \cdot \Delta l_{BD} \\
 & - 0,763644 \cdot \frac{d \Delta l_{BF}}{dx} & - 1,854176 \cdot \frac{d \Delta l_{BD}}{dx}
 \end{aligned}$$

Dieses System umfaßt 2 Gleichungen mit 6 Unbekannten δn_1 , δn_2 , Δl_{BF} , Δl_{BD} , $\frac{d \Delta l_{BF}}{dx}$ und $\frac{d \Delta l_{BD}}{dx}$, so daß 4 Unbekannte beliebig gewählt werden können, während die übrigen dann nach (38) eindeutig bestimmt sind.

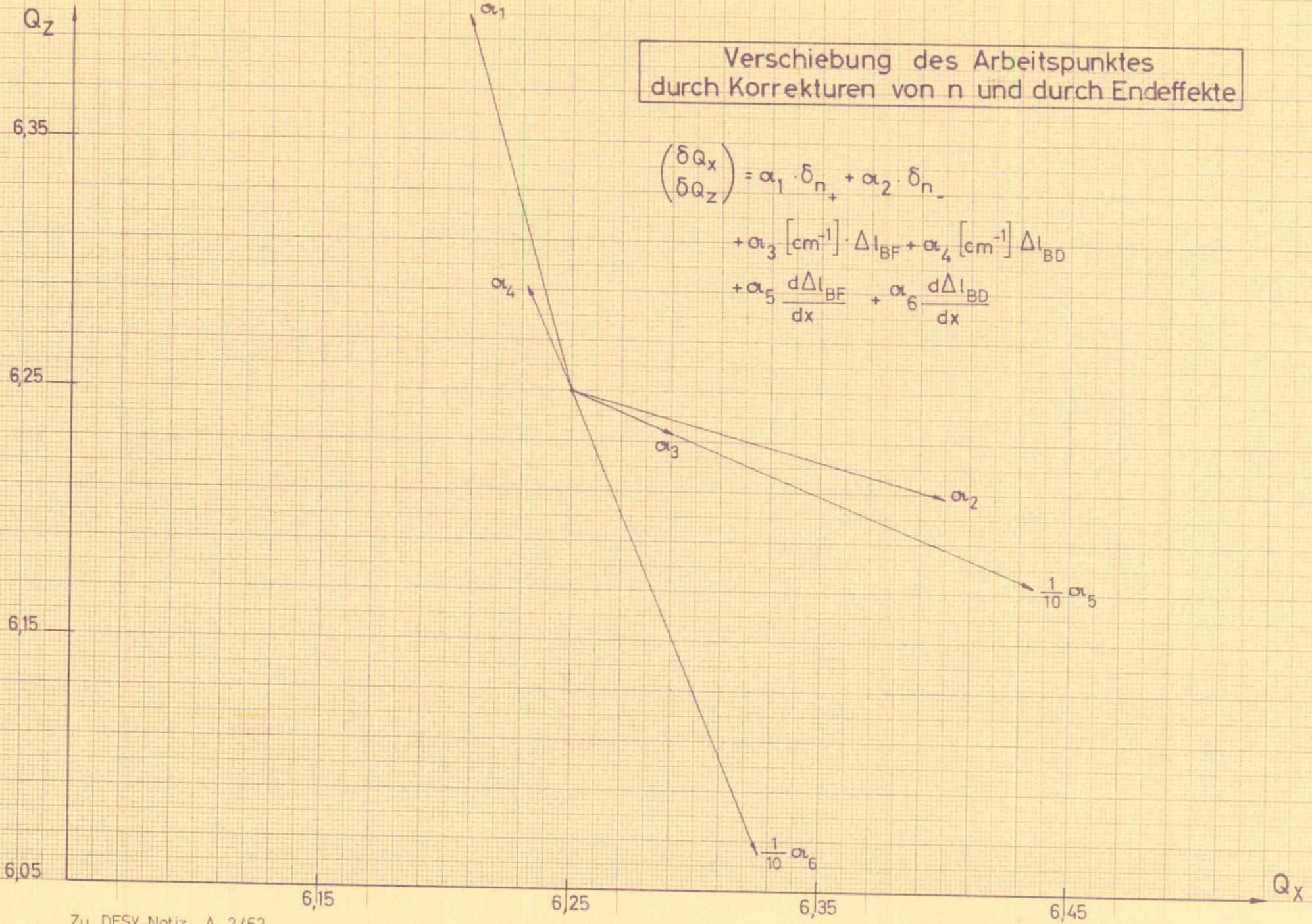
Setzen wir beispielsweise $\delta n_1 = \delta n_2 = \delta n$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Delta l_{BF} = & - 0,01873 \cdot \delta n & - 0,4499196 \cdot \frac{d \Delta l_{BF}}{dx} & + 0,4418411 \cdot \frac{d \Delta l_{BD}}{dx} \\
 \Delta l_{BD} = & + 0,018732 \cdot \delta n & + 0,003166 \cdot \frac{d \Delta l_{BF}}{dx} & + 0,6305880 \cdot \frac{d \Delta l_{BD}}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

und wir können Δl_{BF} und Δl_{BD} bei Vorgabe von δn , $\frac{d \Delta l_{BF}}{dx}$ und $\frac{d \Delta l_{BD}}{dx}$ berechnen.

Verschiebung des Arbeitspunktes durch Korrekturen von n und durch Endeffekte

$$\begin{pmatrix} \delta Q_x \\ \delta Q_z \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \delta n_+ + \alpha_2 \cdot \delta n_- \\ + \alpha_3 [\text{cm}^{-1}] \cdot \Delta l_{BF} + \alpha_4 [\text{cm}^{-1}] \Delta l_{BD} \\ + \alpha_5 \frac{d\Delta l_{BF}}{dx} + \alpha_6 \frac{d\Delta l_{BD}}{dx}$$



Zu DESY-Notiz A 2/62