

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON
(DESY)

Hamburg-Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

(HECK)

Desy Notiz A 2.63

Hamburg, den 10. Mai 1960
M 1-Pa/VM

DESY-Bibliothek

BERECHNUNG DER TEILCHENVERLUSTE DURCH DIFFUSION

Elektronen mit Energien, die von der Sollenergie abweichen, führen Schwingungen in einem Potential aus, dessen Form durch die Phasenschwingungsgleichung bestimmt wird. Die bestimmenden Größen dieses Potentials werden durch das Hochfrequenzprogramm festgelegt. Bei der Berücksichtigung der sprunghaften Änderung der Teilchenenergie durch die Aussendung von Bremsstrahlung sowie das Frequenzrauschen der Hochfrequenz treten in der Phasenschwingungsgleichung statistische Kräfte auf, die in der Lage sind, die Schwingungsenergie einzelner Teilchen so aufzuschaukeln, daß die Teilchen aus dem gegebenen Potentialtopf herausgelangen und für den Beschleunigungsprozess verloren gehen.

Das Problem wurde bereits von Christy in Anlehnung an die Kramersche Arbeit behandelt. Robinson kommt in seinem CEA-Report zu dem gleichen Ergebnis auf etwas anderem Wege, was darauf schließen läßt, daß in seiner Ableitung die gleichen Näherungen durchgeführt werden. Im folgenden soll die Fokker-Planck-Gleichung direkt für die Energieverteilung abgeleitet werden. So ist man in der Lage, auch die adiabatische Dämpfung, die von der zeitlich veränderlichen Frequenz des Oszillators herrührt, mit zu berücksichtigen. Dies ist vor allem bei niedrigen Energien notwendig, wenn sich ein Frequenzrauschen ergeben sollte, das in der Lage ist, eine meßbare Zahl von Teilchen aus dem Potentialberg hinauszuerwerfen.

Darüber hinaus werden Eigenfunktionen der Fokker-Planck-Gleichung angegeben, die zur Bildung genäherter Funktionen für die Wahrschein-

lichkeitsverteilung im Energieraum benutzt werden können. So ist man in der Lage, die Grenzbedingung, daß für alle Zeiten die Wahrscheinlichkeitsverteilung an der Spitze des Potentialberges gleich Null ist, näherungsweise durchzuführen und verschiedene Anfangsverteilungen beim Beginn des Einsetzens der Störung vorzuschreiben. In einem besonderen Absatz wird ein Vergleich mit den Näherungsannahmen der obengenannten Autoren durchgeführt.

Ableitung der Phasenschwingungsgleichung

Die Energiebilanz für ein Teilchen kann geschrieben werden:

$$E = E_f + eV \sin \hat{\psi}$$

Dividiert man durch die Umlaufzeit eines Teilchens so er-
hält man die zeitliche Änderung der Energie:

$$\dot{E} = feV \sin \hat{\psi} + \dot{E}_f$$

Definiert man ein Sollteilchen, so ergibt sich die Energie des realen Teilchens zu: $E = E_f + E_A$ die Frequenz zu: $f = f_f + f_A$
die ausgestrahlte Energie ist gleich: $E_f = E_{fs} + E_{fa}$. Definiert man das Sollteilchen als kontinuierlich ausstrahlendes Teilchen und nimmt an, daß die Differenz zwischen den Quanteneinflüssen auf das Sollteilchen und den betrachteten Teilchen vernachlässigt werden können, so läßt sich der gesamte Strahlungsterm wie folgt angeben:

$$\dot{E}_f = \dot{E}_{fs} + \dot{E}_{fa} + \dot{E}_{fs} - \sum_i \dot{E}_i(t - t_i)$$

Betrachtet man ein Sollteilchen in einem Beschleunigungsfeld, dessen Frequenz f_{hf} von der Sollfrequenz f_{hfs} um Δf_{hf} abweicht, so erhält man:

$$\hat{\psi} = \int (2\pi f_{hf} - 2\pi M f_s) dt = \int 2\pi \Delta f_{hf} dt ; \quad f_{hf} = f_{hfs} + \Delta f_{hf}$$

und $\dot{\psi} = 2\pi \Delta f_{hf}$ für ein wirkliches Teilchen mit der Frequenz f , das sich in einem hochfrequenten Feld mit Sollfrequenz bewegt, er-

gibt sich:

$$\dot{\psi} = 2\pi \int M(t-t_0) dt - 2\pi \int M t_0 dt$$

und $\dot{\psi} = 2\pi M t_0$

Dementsprechend ergibt sich für ein reales Teilchen im Hochfrequenzfeld mit abweichender Frequenz:

$$\dot{\psi} = 2\pi M t_0 + 2\pi \Delta f_M$$

und $t_0 = \frac{1}{2} \frac{2\pi \Delta f_M}{2\pi M}$; wobei $2\pi \Delta f_M = 2\pi \Delta f \delta(t-t_0)$ gesetzt werden kann.

Unter Benutzung der bekannten Beziehungen:

$$\frac{E_0}{E_s} = \frac{P_0}{P_s} = \frac{4}{\alpha} \frac{R_1}{R_2} = -\frac{1}{\alpha} \frac{I_0}{I_s}$$

läßt sich die Phasenschwingungsgleichung entwickeln:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & -(\dot{\psi} - 2\pi \Delta f_M) \left\{ \frac{E_0}{E_s} - (4-\alpha) \frac{E_{0s}}{E_s} \right\} + \frac{2\pi \alpha M I_0^2}{E_s} eV (\sin \psi_0 - \sin \psi) + \\ & + \frac{2\pi \alpha M I_0}{E_s} \left\{ E_{0s} - \sum_i E_i \delta(t-t_i) + 2\pi \Delta f_M \delta(t-t_0) \right\} \end{aligned}$$

Für manche Fälle muß diese Gleichung linearisiert werden, indem man um die Sollphase herumentwickelt: $\dot{\psi} = \psi_0 = \psi$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} = & -\dot{\psi} - 2\pi \Delta f_M \left\{ \frac{E_0}{E_s} - (4-\alpha) \frac{E_{0s}}{E_s} \right\} - \frac{2\pi \alpha M I_0^2}{E_s} \cos \psi_0 \cdot \psi + \\ & + \frac{2\pi \alpha M I_0}{E_s} \left\{ E_{0s} - \sum_i E_i \delta(t-t_i) + 2\pi \Delta f_M \delta(t-t_0) \right\} \end{aligned}$$

Im folgenden sollen in der linearisierten Gleichung als Abkürzungen verwendet werden: γ für die Dämpfungskonstante, Ω^2 für die zeitlich veränderliche Frequenz, $f(t)$ für die statistische Störkraft aus den Quanteneffekten und $b(t)$ für die Störkraft, die von den Frequenzfehlern herrührt. Die linearisierte Gleichung schreibt sich dann:

$$\ddot{\psi} + \gamma \dot{\psi} + \Omega^2 \psi = f(t) + b(t)$$

Hieraus folgt für die Energie der Ausdruck:

$$\frac{\dot{\psi}^2}{2} + \Omega^2 \frac{\psi^2}{2} = \int \left(\frac{\dot{\psi}^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Omega^2 - \gamma \dot{\psi}^2 + f(t)\dot{\psi} + b(t)\dot{\psi} \right) dt = \dot{E}(t)$$

Auf der rechten Seite steht die zeitliche Änderung der Energie durch die statistische Kraft und die Einflüsse der beiden Dämpfungen.

Ableitung der Fokker-Planck-Gleichung.

Ist $W(\epsilon, t) d\epsilon$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen zur Zeit t die Schwingungsenergie $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ besitzt und $\varphi(\epsilon - \eta, \eta) d\eta$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen mit der Schwingungsenergie $\epsilon - \eta$ innerhalb der Zeit τ die Schwingungsenergie ϵ erhält, so kann zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Energieraum die folgende Gleichung angegeben werden:

$$W(\epsilon, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\epsilon - \eta, t) \varphi(\epsilon - \eta, \eta) d\eta$$

Für kleine η läßt sich der Ausdruck unter dem Integral entwickeln. Man macht somit die Annahme, daß $\varphi(\epsilon - \eta, \eta)$ für große η hinreichend klein ist. Die Entwicklung wird bis zu den quadratischen Gliedern durchgeführt und es ergibt sich somit:

$$W(\epsilon, t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(W(\epsilon, t) - \eta \frac{\partial W(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 W(\epsilon, t)}{\partial \epsilon^2} \right) \cdot \left(\varphi(\epsilon, \eta) - \eta \frac{\partial \varphi(\epsilon, \eta)}{\partial \epsilon} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(\epsilon, \eta)}{\partial \epsilon^2} \right) d\eta$$

Nach Ausmultiplikation ebenfalls nur bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung ergeben sich eine Reihe von Integralen:

$$W(\epsilon, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\epsilon, t) \psi(\epsilon, \eta) d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} W(\epsilon, t) \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \eta d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} W(\epsilon, t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon^2} \eta^2 d\eta - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \eta d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon^2} \eta^2 d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \eta^2 d\eta$$

Die einzelnen Terme bedeuten:

$$W(\epsilon, t); \quad W(\epsilon, t) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{\eta}; \quad \frac{1}{2} W(\epsilon, t) \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \bar{\eta}^2; \\ \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \bar{\eta}; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon^2} \bar{\eta}^2; \quad \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \bar{\eta}^2;$$

Die mittlere Energieänderung $\bar{\eta}$ ermittelt man aus der Gleichung S.4 oben, indemman die Integration über die kleine Zeitdifferenz τ mit der Annahme durchführt, daß die Funktionen unter dem Integral auf der rechten Seite des Energieausdruckes während der Zeit praktisch konstant bleiben.

$$\text{Für } \frac{\bar{\psi}^2}{2} = \frac{1}{2} \epsilon_{pot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \epsilon \quad \text{und} \quad \bar{\psi}^2 = 2 \epsilon_{kin} = \epsilon \quad \text{ist}$$

$$\bar{\eta} = \epsilon(\tau) - \epsilon(0) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2} - \gamma \right) \epsilon \tau = -\beta \epsilon \tau$$

$\bar{\eta}^2$ errechnet sich ebenfalls aus der Gleichung S.4 oben, wobei Glieder von der Ordnung größer als proportional τ als klein vernachlässigt werden. Während beim obigen Ausdruck das Integral über die statistische Funktion nach der Mittlung über eine Teilchenschär verschwindet, ergibt das Quadrat einen endlichen Beitrag:

$$\bar{\eta}^2 = \overline{(\epsilon(0) - \epsilon(\tau))^2} = \bar{\psi}^2 \cdot \iint_0^{\tau} \overline{f(t) f(t')} dt dt' + \bar{\psi}^2 \cdot \iint_0^{\tau} \overline{b(t) b(t')} dt dt' = 2q\epsilon\tau$$

Das Doppelintegral wird auf S. 8 weiter ausgewertet. Nach Einsetzen der oben eingeführten Abkürzungen ergeben sich die in der statistischen Gleichung enthaltenden Ausdrücke:

$$\bar{\eta} = -\beta \epsilon T \quad ; \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \epsilon} = -\beta T \quad ; \quad \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \epsilon^2} = 0$$

$$\bar{\eta}^2 = 2q \epsilon T \quad ; \quad \frac{\partial \bar{\eta}^2}{\partial \epsilon} = 2q T \quad ; \quad \frac{\partial^2 \bar{\eta}^2}{\partial \epsilon^2} = 0$$

und die Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Energieraum lautet:

$$\frac{\partial W(\epsilon, t)}{\partial t} = \beta W + \epsilon \beta \frac{\partial W}{\partial \epsilon} + \epsilon q \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial W}{\partial \epsilon} q$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\frac{\partial W(\epsilon, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\beta W + \epsilon q \frac{\partial W}{\partial \epsilon})$$

In der letzten Form ist sie einer Diffusionsgleichung, die sich aus den beiden Ausdrücken aufstellen läßt, analog:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } j \quad j = \text{grad } \rho + \mu \rho$$

Man kann also den Ausdruck in der Klammer:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{ds}{dt} \quad S = \beta W + \epsilon q \frac{\partial W}{\partial \epsilon}$$

als Teilchenstrom im Energieraum an der Stelle ϵ auffassen. Die Lösungen der Gleichung lassen sich als Eigenfunktion angeben. Aus diesen Lösungen kann man näherungsweise die Lösungen des Rand- und Anfangswert-Problems der partiellen Differentialgleichung aufbauen.

Die Eigenwertlösungen lauten:

$$W_m = \frac{\partial^m}{\partial \epsilon^m} \epsilon^m e^{-\frac{\beta}{2} \epsilon} e^{-m\beta \epsilon}$$

$$W = \sum_m A_m \frac{\partial^m}{\partial \epsilon^m} \epsilon^m e^{-\frac{\beta}{2} \epsilon} e^{-m\beta \epsilon}$$

Die Ströme ergeben sich entsprechend zu:

$$S = \sum_m A_m \dot{e}_q \frac{\partial^m}{\partial t^m} m E^{m-1} a \frac{1}{r} e^{-mbt}$$

Numerische Auswertung

1.) Bestimmung der Größen: $\dot{E}_{rs}, \dot{E}_{rs}, q, \ell_s, \beta$

Die zeitliche Änderung der ausgestrahlten Energie errechnet man sich aus dem Feld des strahlenden Teilchens, das durch den Ausdruck:

$$e \dot{E}_r = \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \frac{1}{1-\beta^2} \ddot{R} + \ddot{R} \frac{\beta \dot{R} \ddot{R}}{c^2(1-\beta^2)} + \frac{\dot{R}}{c^2(1-\beta^2)} \left[(1-\beta^2) + \frac{\beta(\dot{R} \ddot{R})^2}{c^2(1-\beta^2)} \right] \right\}$$

gegeben wird. Vernachlässigt man die Energiezunahme während des Umlaufs, so kann man $\dot{R} \perp \ddot{R}$ setzen. Hieraus bildet man die Energie durch Multiplikation mit \dot{R} in der üblichen Weise und erhält so:

$$\dot{E}_{rs} = e(\dot{R} \ddot{R}) = -\frac{2e^2}{3} c \frac{1}{r^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4$$

wobei die Beziehungen $1-\beta^2 = \left(\frac{E}{mc^2} \right)^{-2}$ und $|\dot{R}| = \frac{c}{r}$ benutzt wurden. Entwickelt man den Ausdruck für kleine Abweichungen ℓ_s und r_s so kommt man unter Benutzung bekannter, im Synchrotron gültiger Beziehungen zu:

$$\dot{E}_{rs} = \frac{q \dot{E}_{rs}(1-a)}{4M^2 \pi f_s}$$

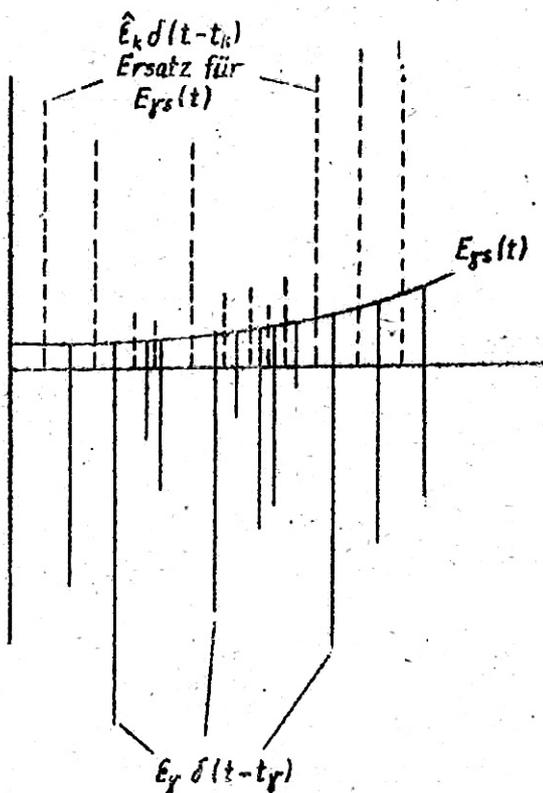
Zur Berechnung des Ausdruckes $2\tau q$ muß das Integral:

$$2\tau q = \left(\int_0^1 \frac{dM^2 \pi f_s}{E} \left[\dot{E}_{rs} - \sum_i \dot{e}_i A(i-t) \right] dt \right)^2$$

ausgewertet werden. Betrachtet man den Integranden:

$$E_{ys} = \sum_i \epsilon_i \delta(t-t_i)$$

so erkennt man, daß es sich um eine zeitlich ansteigende Funktion E_{ys} handelt, die von einer δ -Funktion statistisch unterbrochen ist. Die Flächen der beiden Funktionen sind gleich. Man



kann deshalb den Integranden durch eine δ -Funktion annähern, die doppelt so viele Ereignisse enthält, deren mittlere Amplitude und deren Ereignishäufigkeit mit der δ -Funktion im Integranden jedoch übereinstimmend bzw. um einen Faktor 2 verschieden ist. Während jedoch bei der im Integranden enthaltenen δ -Funktion nur positive Werte von ϵ_i vorkommen können, enthält die neue δ -Funktion auch negative Werte. Es ist also:

$$E_{ys} = \sum_i \epsilon_i \delta(t-t_i) \approx \sum_k \hat{\epsilon}_k \delta(t-t_k)$$

$$\epsilon_i \geq 0, \quad \hat{\epsilon}_k \text{ sowohl positiv als auch negativ}$$

$$|\epsilon_i| = |\hat{\epsilon}_k|$$

Mit der neu definierten δ -Funktion läßt sich das Integral auswerten:

$$2Tq = \int_0^T \int_0^T f_s^2 \frac{4\pi^2 \alpha^2 M^2}{E_s^2} \left(\sum_i \hat{\epsilon}_i \delta(t'-t_i) \right) \left(\sum_k \hat{\epsilon}_k \delta(t-t_k) \right) dt' dt = \frac{8\pi^2 \alpha^2 M^2}{E_s^2} f_s^2 \cdot \frac{t}{R} \cdot \overline{\epsilon_r^2} T$$

Man erhält dieses Ergebnis dadurch, daß sich bei der Mittlung nur Glieder mit gleichem Index nicht herausheben. $\overline{\epsilon_r^2}$ ist im Mittel pro Ausstrahlungsprozess ausgestrahlte Energie. Der Faktor $\frac{t}{R}$ ergibt sich aus der Reduktion der Ausstrahlungsereignisse durch die

Anwesenheit der geraden Stücke im Synchrotron bezüglich der Zeit:
 denn es ist $\sum_i \bar{\epsilon}_i^2 = 2\pi \frac{f}{R} \bar{\epsilon}_f^2$. $\bar{\epsilon}_f^2$ kann aus dem Spektrum errechnet werden:

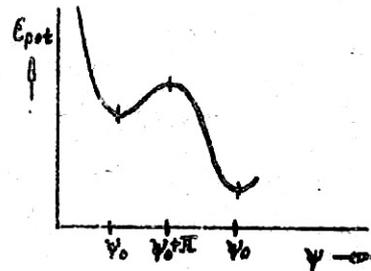
$$\bar{\epsilon}_f^2 = \frac{55}{24 \cdot 13} \cdot \frac{c^2 \hbar^2 \omega^2}{\rho^2 R} \left(\frac{E_s}{mc^2} \right)^2$$

so ergibt sich schließlich:

$$q = 2 \cdot \frac{4\pi^2 \alpha^2 M^2}{E_s^2} \cdot f_s^2 \cdot \frac{55}{24 \cdot 13} \cdot \frac{c^2 \hbar^2 \omega^2}{\rho^2 R} \cdot \left(\frac{E_s}{mc^2} \right)^2$$

Die Höhe des Potentials errechnet sich aus der nicht linearisierten Phasenschwingungsgleichung. Man errechnet sich das Potential:

$$E_{pot} = \frac{2\pi \alpha M f_s^2}{E_s} eV (\cos \psi + \psi \sin \psi_s)$$



und hieraus die Maxima und Minima:

$$\psi = \psi_0 \quad \text{min}$$

$$\psi = \psi_0 + \pi \quad \text{max}$$

Setzt man die erhaltenen Werte ein und bildet die Potentialdifferenz, so ergibt sich ϵ_g zu:

$$\epsilon_g = \frac{2\pi \alpha M f_s^2}{E_s} eV \cdot 2 \left(\cos \psi_0 + \left(\psi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \sin \psi_0 \right)$$

Das Dämpfungsglied β ist entsprechend Formel (5.3) und (5.4) gleich:

$$\beta = \gamma - \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{\dot{E}_s}{E_s} - (1 - \alpha) \frac{\dot{E}_{ps}}{E_s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{E}_s - \dot{E}_{ps}}{E_s - E_{ps}} - \frac{\dot{E}_s}{2E_s} - \frac{\dot{\psi}_s}{2 \sin \psi_s \cos \psi_s}$$

Aus den Werten ϵ errechnen sich die Abweichungen von der Sollbahn \bar{r}_s nach der Formel:

$$\epsilon = \frac{4\pi^2 M^2 f_s^2}{R^2} \cdot \bar{r}_s^2$$

Die Auswertung erfolgte mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage IBM 650, wobei 6 Partiaillösungen W_0 bis W_5 verwendet wurden. Es steht also ein System von 6 Gleichungen mit 6 bestimmbareren Koeffizienten A_m zur Verfügung. Die A_m wurden so festgelegt, daß:

- 1.) $W(\epsilon_0) = 0$, d. h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung an der Potentialgrenze gleich 0 ist,
- 2.) $\int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} W(\epsilon) d\epsilon = Z(t)$; hierdurch wird die Normierung auf die zur Zeit t vorhandenen Teilchen durchgeführt,
- 3.) auch zur Zeit $t + \Delta t$ die Grenzbedingung entsprechend 1.) aufrechterhalten wird.

Zur Festlegung einer vorgegebenen Form wurden

$$4.) \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \epsilon W(\epsilon) d\epsilon = \bar{\epsilon}$$

$$5.) \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \epsilon^2 W(\epsilon) d\epsilon = \bar{\epsilon}^2$$

$$6.) \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_1} \epsilon^3 W(\epsilon) d\epsilon = \bar{\epsilon}^3$$

die mittleren Energien bzw. die Quadrate und dritte Potenz der Energieverteilung (Anfangszeitpunkt t_0) vorgegeben. Das Gleichungssystem wurde für eine feste Zeit t_1 gelöst. Aus den errechneten Werten für die Strom- und Verteilungsfunktion wurden dann die Änderungen von $Z(t)$ und $\bar{\epsilon}(t)$ aus

$$Z(t + \Delta t) = Z(t) + \Delta t \sum_i S_i(t)$$

$$\bar{\epsilon}(t + \Delta t) = \bar{\epsilon}(t) + \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} \Delta t$$

sowie die Änderungen für $\bar{\epsilon}^2$ und $\bar{\epsilon}^3$ aus den entsprechenden Beziehungen errechnet. Die erhaltenen Werte wurden daraufhin in ein neues Gleichungssystem eingesetzt und das Verfahren von vorne begonnen. Die während der Zeiten Δt als konstant angenommenen Ströme werden aufaddiert und geben direkt den Verlust der Teilchen an.

Numerische Ergebnisse

Die errechneten Teilchenverluste wurden als Funktion verschiedener Parameter in den Kurven Bild 1 aufgetragen. Die Kurven werden unter Punkt 3 im einzelnen diskutiert. In allen Fällen wurde eine Anfangs-sollphase von 30° angenommen und der Verlauf der Sollphase durch den Ausdruck: $\psi_0 + \psi_1 t$ angenähert. Etwaige Kopplung zwischen der Betatronschwungung und der Synchrotronschwungung, die eine Verringerung der Dämpfung der Synchrotronschwungung zur Folge hat, wurde durch einen Faktor h berücksichtigt, mit dem die Dämpfung multipliziert wurde und der jeweils ≤ 1 ist.

Vergleich der verschiedenen Näherungen und Anfangsbedingungen:

- 1.) In Tabelle 1 sind die Teilchenverluste, die bis zum Erreichen der verschiedenen Energien bei einer Maximalenergie von $E_{max} = 6.620$ aufgetreten sind, als Funktion der entsprechenden Energie aufgeführt.

Die Werte wurden einmal nach den Endformeln von Christy und Robinson, zum anderen nach der hier entwickelten Näherung errechnet. Die Ergebnisse zeigen, daß der unphysikalische Rückstrom aus dem Gebiet $\ell > \ell_0$ in das Gebiet $\ell < \ell_0$, der bei der Annahme einer Boltzmann-Verteilung, wie sie von Christy und Robinson über das ganze Zeitintervall angenommen wurde (Bild 2), im wesentlichen durch den Strom kompensiert wird, der in der richtigen Richtung fließt aber größer ist als bei der wirklichen Verteilung, bei der an der Stelle ℓ_0 die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(\ell_0)$ gleich Null sein muß. Die Abweichungen bei hohen Verlusten zwischen den Werten nach Robinson und Christy und den anderen Werten entstehen durch die Berücksichtigung der Teilchenverluste in den vorhergehenden Zeitintervallen bei der Berechnung des Stromes. Das heißt, es wird nicht mit einem unveränderlichen Teilchenvorrat gerechnet.

2.) Der Vergleich der Verluste für verschiedene Anfangsbedingungen zeigt, daß nur eine sehr geringe Abhängigkeit von einander besteht. In den Bildern 3-5 wurden die Verteilungsfunktionen der Teilchen über die Schwingungsenergie ϵ , der Synchrotron-schwingung aufgetragen. Für eine Maximalenergie bei 6 GeV hat sich bereits für alle Anfangsverteilungen, im Beispiel eine normale als auch eine sehr schmale Kastenverteilung und eine sehr weit ausladende Boltzmann-Verteilung, die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung eingestellt, so daß für den höheren Energiebereich, bei dem die hauptsächlichsten Verluste auftreten, die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung wirksam ist und dementsprechend die Verluste bis auf einige o/oo gleich sind.

Zwei der Anfangsverteilungen besitzen auch negative Werte innerhalb des physikalischen Bereiches, die darauf zurückzuführen sind, daß mit der verwendeten Anzahl von Partiaillösungen die Kurve nicht genau genug angenähert werden kann. Sie sind jedoch wegen der Kleinheit der negativen Bereiche und wegen der Tatsache, daß sich ohne Teilchenverluste schon nach wenigen Rechenschritten infolge der statistischen Kräfte Verteilungsfunktionen ohne negative Werte eingestellt haben, nicht gefährlich.

Die Forderung, daß an der Stelle ϵ_g $w(\epsilon_g) = 0$ ist, führt zu negativen Werten der Verteilungsfunktion für $\epsilon > \epsilon_g$. Das bedeutet, daß die Teilchenverluste pessimistisch abgeschätzt werden. Bei genauer Darstellung müßte $w(\epsilon) = 0$ für alle $\epsilon > \epsilon_g$ sein. Das heißt, die Rechnungen sind umso genauer, je kleiner die Werte von $w(\epsilon)$ für $\epsilon > \epsilon_g$ sind. Bei der Mitnahme mehrerer Partiaillösungen würde sich auch hier eine Verbesserung durchführen lassen.

3.) Bild 1 Kurve 1 zeigt die Zunahme der Teilchenverluste als Funktion der Sollphase bei der maximalen Energie $E_{max} = 6 \text{ GeV}$. Da in diesen Rechnungen auch die Teilchenzahl entsprechend den Verlusten jeweils neu normiert wurde, bleiben die Formeln auch für hohe Verluste gültig, so daß die eingetragenen Werte realistisch sind.

Als zweites wurden die Teilchenverluste als Funktion des Koppelparameter h aufgetragen.

Die dritte Kurve zeigt die Teilchenverluste als Funktion von r_0 . r_0 ist der mittlere Radius der angenommenen Ausgangsverteilung der Teilchen in der Vakuumkammer infolge von Energieabweichungen. Aus r_0 läßt sich direkt die Schwingungsenergie der Synchrotronschwingung berechnen. Der Radius errechnet sich aus der Energie in der Synchrotronschwingung und gibt den für die Synchrotronschwingung in der Vakuumkammer zur Verfügung stehenden Bereich in cm an. Man erkennt, daß über einen weiten Bereich keine wesentliche Abhängigkeit vom Primärradius vorliegt.

Als vierte Kurve wird die Abhängigkeit der Verluste von der Maximalenergie aufgezeigt. Die Welligkeit der Kurve rührt wahrscheinlich im wesentlichen von der Ungenauigkeit her, mit der der Punkt, an dem die Maximalenergie erreicht wurde, bestimmt werden konnte. Obwohl es möglich ist, daß infolge der Abnahme der Strahlung aber auch des Potentialberges mit abnehmender Energie gewisse Veränderungen der Teilchenverluste bei konstanter Sollphase ψ_s bei Änderung der Energie vorliegen, so ergibt sich doch, daß innerhalb der hier durch die Ausgabe der Zahlenwerte bestimmten Genauigkeit mit konstanten Teilchenverlusten gerechnet werden kann. Obwohl es grundsätzlich möglich ist, die Punkte genauer festzulegen, würde der Aufwand an Rechenzeit und Lochkarten nicht gerechtfertigt erscheinen.

Es ist vorgesehen, im Laufe der Zeit nach Eintreffen genauerer Informationen über das Hochfrequenz-Programm und die Frequenzschwankungen des Senders das Rechenprogramm zur Errechnung weiterer Werte zu verwenden.

Das Rechenprogramm wurde
von Herrn Hermann aufgestellt.

Card Passow.

Die ersten 6 Lösungen lauten:

$$W_0 = e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$W_1 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-2t} \left(1 - \frac{1}{2}t\right)$$

$$W_2 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-2t} \left(2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right)$$

$$W_3 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-2t} \left(6 - 18\frac{1}{2}t + 9\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3\right)$$

$$W_4 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-4t} \left(24 - 96\frac{1}{2}t + 72\frac{1}{2}t^2 - 16\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right)$$

$$W_5 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-6t} \left(120 - 600\frac{1}{2}t + 600\frac{1}{2}t^2 - 200\frac{1}{2}t^3 + 25\frac{1}{2}t^4 - t^5\right)$$

Daraus errechnen sich die Ströme zu:

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = -\beta e^{-\frac{1}{2}t} e^{-2t}$$

$$S_2 = -\beta \left(4e - 2\frac{1}{2}t^2\right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-2t}$$

$$S_3 = -\beta \left(18e - 18\frac{1}{2}t^2 + 7\frac{1}{2}t^3\right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-2t}$$

$$S_4 = -\beta \left(96e - 144\frac{1}{2}t^2 + 48\frac{1}{2}t^3 - 4\frac{1}{2}t^4\right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-4t}$$

$$S_5 = -\beta \left(600e - 1200\frac{1}{2}t^2 + 600\frac{1}{2}t^3 - 100\frac{1}{2}t^4 + 5\frac{1}{2}t^5\right) e^{-\frac{1}{2}t} e^{-6t}$$

Bezeichnungen

Es bedeuten die Buchstaben:

E	Energie des Teilchens
V	Hochfrequenzspannung
φ	Phase des Teilchens
ψ	Abweichung des Teilchens von der Sollphase
f	Umlauffrequenz des Teilchens
f_{HF}	Frequenz der HF
ϵ	Schwingungsenergie des Teilchens in der Synchrotronschwingung
R	Mittlerer Bahnradius
ρ	Krümmungsradius des Magneten
t	Zeit
M	Verhältnis zwischen der Umlauffrequenz und der Beschleunigungsfrequenz
α	momentum compection factor
h	Kopplungskonstante
S	Teilchenstrom
\bar{r}	Mittlerer Radius der Anfangsverteilung
β	Dämpfungskonstante
q	Statistische Störkraft

Es bedeuten die Indizes:

s	Sollteilchen
Δ	Abweichungen vom Sollteilchen
γ	Strahlung
q	Grenzwert

Weiter bedeutet:

$\dot{\quad}$	$\frac{d}{dt}$
$\ddot{\quad}$	$\frac{d^2}{dt^2}$
\dots	$\frac{d^3}{dt^3}$

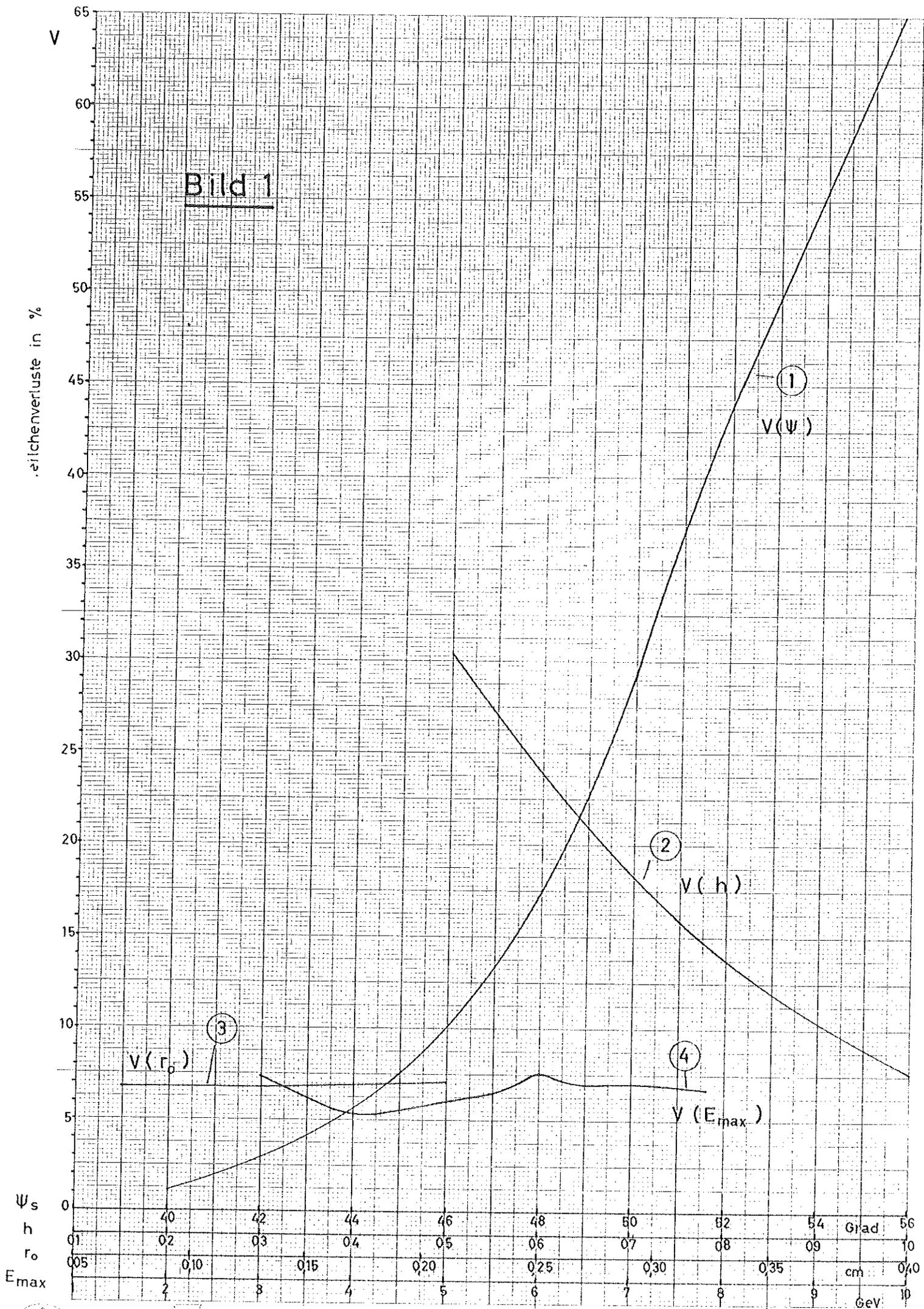


Tabelle 1

Verluste %

E GeV	h = 1			h = 0,5			h = 1
	Robinson-Christy	Gauss	r = 0,12 Kasten	Robinson-Christy	Gauss	r = 0,12 Kasten	r = 0,05 Kasten
3,99							
4,20		0,2					
4,42		0,2		0,1			
4,62		0,2			0,2		
4,81		0,2		1,1	0,4	0,2	
4,99		0,2			0,6	0,4	
5,16	0,2	0,3	0,1	3,3	1,1	0,9	
5,32		0,4	0,2		1,8	1,7	0,1
5,46	0,7	0,5	0,3	7,2	2,8	2,9	0,2
5,59		0,7	0,5		4,2	4,4	0,4
5,70	1,7	1,1	0,9	13,1	6,1	6,6	0,7
5,79		1,6	1,4		8,6	9,4	1,2
5,87	3,4	2,3	2,1	20,9	11,6	12,7	1,9
5,93		3,2	3,1		15,2	16,6	2,8
5,97	6,0	4,4	4,2	30,9	19,4	21,0	4,0
5,99		6,0	5,8		24,0	26,0	5,6
6,00	12,2	7,9	7,7	42,8	29,0	31,3	7,5
5,99		10,3	10,1		34,5	36,9	9,9
5,95	16,2	13,2	13,0	56,6	40,2	42,7	12,8
5,90		16,6	16,4		46,0	48,6	16,2
5,83	24,7	20,6	20,4	71,9	51,9	54,6	20,3

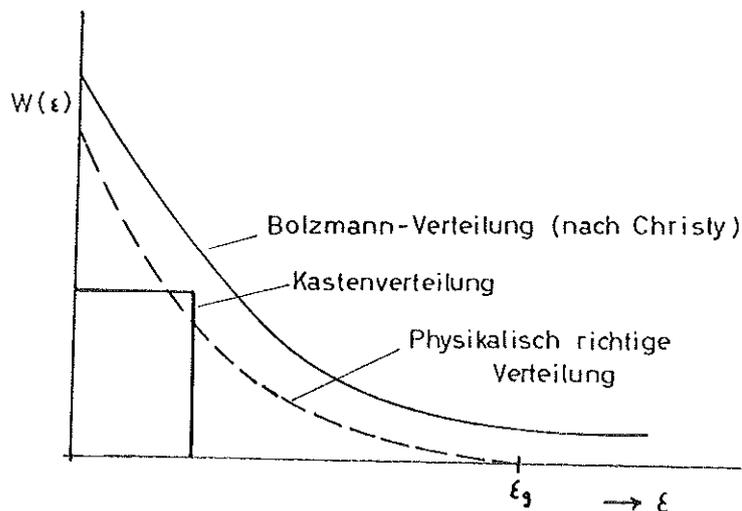


Bild 2

Bild 3

$$E_{\max} = 6 \text{ GeV}$$

$$r_0 = 0,12 \text{ cm}$$

Vorgegebene Form: Kastenverteilung

$$\psi_s = \psi_0 + \psi_1 t \quad \psi_{s\max} = 45^\circ \quad \psi_{s\min} = 30^\circ$$

$$E_s = 3,76 \text{ GeV}$$

$$E_s = 4,61 \text{ GeV}$$

$$E_s = 5,32 \text{ GeV}$$

$$E_s = 5,79 \text{ GeV}$$

$$E_s = 5,99 \text{ GeV}$$

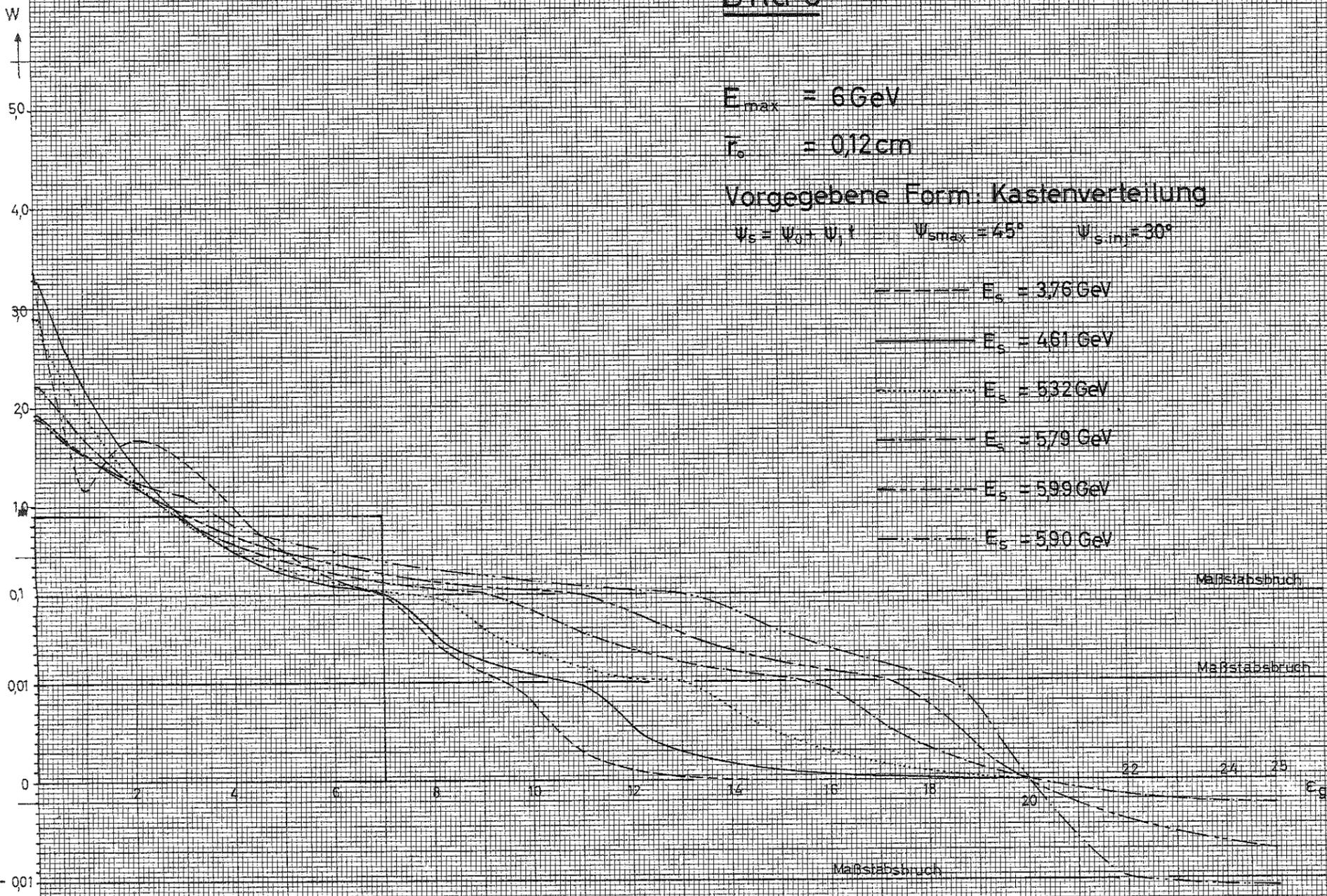
$$E_s = 5,90 \text{ GeV}$$

Maßstabsbruch

Maßstabsbruch

Maßstabsbruch

E_g



W

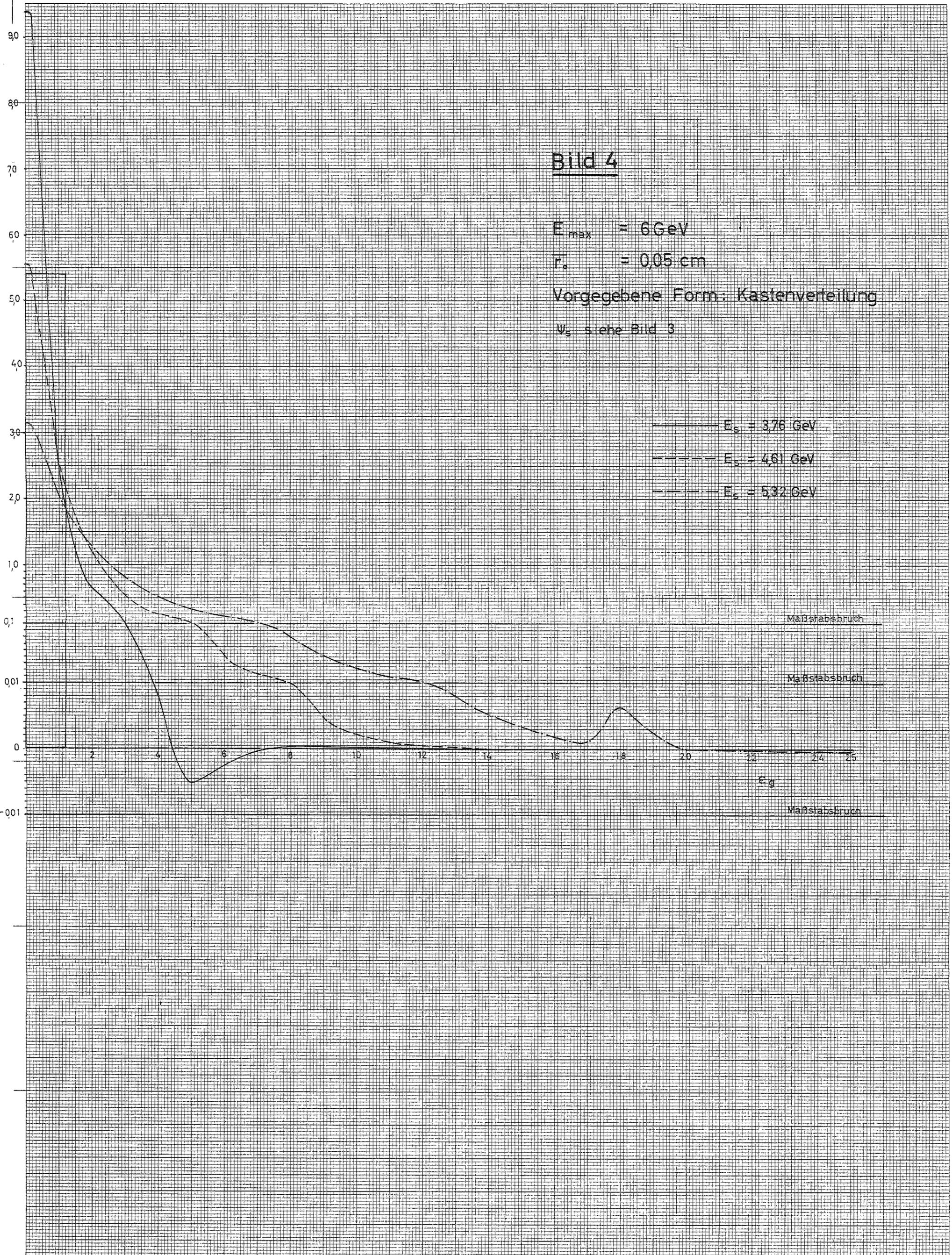


Bild 5

$$E_{\max} = 6 \text{ GeV}$$

$$\bar{r}_0 = 0,12 \text{ cm}$$

Vorgegebene Form: Gaussverteilung in r

$$\bar{e}_s = \frac{q_s}{\beta_s}$$

ψ_s siehe Bild 3

- $E_s = 3,76 \text{ GeV}$
- - - $E_s = 4,61 \text{ GeV}$
- · - $E_s = 5,32 \text{ GeV}$

