

ZUR ENTWICKLUNG DER QUADRUPELLINSEN

1) Ziel der Arbeit

1.1 Linearität

Die Linsen sollen im Nutzungsbereich möglichst linear sein, das heißt in den Entwicklungen

$$B_r = B_0 \left[ \frac{r}{r_0} \cos 2\theta + \gamma \left( \frac{r}{r_0} \right)^3 \cos 4\theta + \alpha \left( \frac{r}{r_0} \right)^5 \cos 6\theta + \delta \left( \frac{r}{r_0} \right)^7 \cos 8\theta + \dots \right]$$

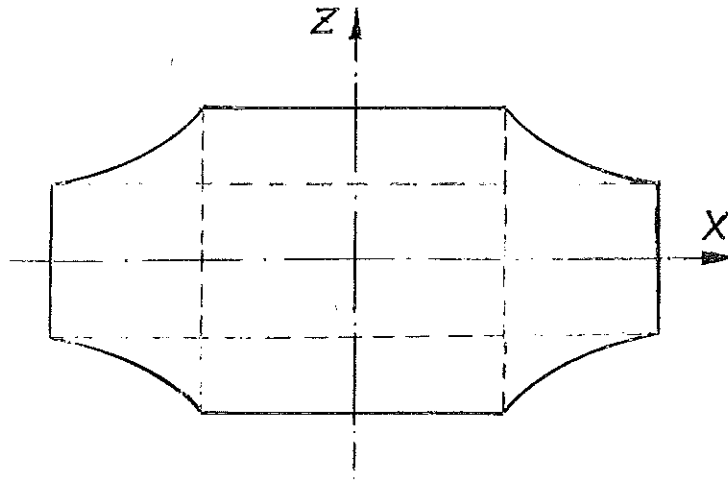
$$B_\theta = B_0 \left[ \frac{r}{r_0} \sin 2\theta + \gamma \left( \frac{r}{r_0} \right)^3 \sin 4\theta + \alpha \left( \frac{r}{r_0} \right)^5 \sin 6\theta + \delta \left( \frac{r}{r_0} \right)^7 \sin 8\theta + \dots \right]$$

sollen  $\gamma$ ,  $\alpha$  und  $\delta$  möglichst klein sein. Bei Linsen, die bezüglich der horizontalen und der vertikalen Richtung symmetrisch gebaut sind, ist  $\gamma, \delta = 0$ . Der maximale relative Feldfehler für  $r = r_0$  beträgt dann  $\alpha$  und nimmt nach innen mit  $\left( \frac{r}{r_0} \right)^4$  ab. Er beträgt bei  $r = 0,84 r_0$  (oder etwa 70 % des Querschnittes) noch  $1/2 \alpha$ . Als Nutzungsbereich wird bei klassischen Quadrupollinsen maximal der einbeschriebene Kreis angesetzt. Wir wollen versuchen, den Fehler im Gradienten unter 1 % zu halten, woraus  $\alpha = 0,2 \%$  folgt.

1.2 Querschnitt

In der Strahlführungstheorie wird mit guter Näherung Unabhängigkeit der x- und z-Komponenten angesetzt. Daraus folgt: Es ist im allgemeinen sinnvoll, einen rechteckigen Nutzungsbereich zu verlangen.

Mit Quadrupollinsen ist eine Fokussierung in einer Komponente grundsätzlich mit einer Defokussierung in der anderen verbunden. Dadurch ändert sich das Verhältnis der Enveloppen der beiden Komponenten von Linse zu Linse und innerhalb der Linsen. Das Seitenverhältnis des erforderlichen Linsenquerschnitts ist daher im allgemeinen ungleich eins. Eine nähere Betrachtung läßt ein Seitenverhältnis zwischen etwa 1 und 4 sinnvoll erscheinen. Bezüglich des Nutzungsbereiches wäre eine Linse ideal, die ein Rechteck  $4 \bar{X} \cdot \bar{Z} = Q$  mit  $1 \leq \frac{\bar{X}}{\bar{Z}} \leq 4$  aufzunehmen gestattet. Daraus folgt ein Querschnitt mit Begrenzung durch die Hyperbeln  $X \cdot Z = \pm Q$  und die Geraden  $Z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{Q}$  und  $X = \pm \sqrt{Q}$ .



Die Alternativlösung ist ein Linsensortiment etwa mit Seitenverhältnissen 1, 2 und 4 denkbar. Der numerische Wert für die Fläche des Nutzungsbereiches liegt bei ausgeführten Quadrupollinsen für ähnliche Zwecke zwischen 200 und 1000 cm<sup>2</sup>. Die bei uns erforderliche Fläche Q des Rechteckes liegt in ähnlicher Größenordnung, so daß etwa Linsen mit Q = 200, 400 und 800 cm<sup>2</sup> gebaut werden mußten.

### 1.3 Endeffekte

Die Differentialgleichung für die Teilchenbewegung lautet in Näherung bis zu quadratischen Gliedern

$$x'' = \pm \frac{e}{p} \left[ B_z \left( 1 + \frac{3}{2} x'^2 + \frac{1}{2} z'^2 \right) - z' (B_s + x' B_x) \right]$$

Im Innern einer exakten Quadrupollinse gilt  $B_s = 0$  und  $B_z = G \cdot x$ ,  $B_x = G \cdot z$ . Das maximale  $x'$  und  $z'$  dürfte bei unseren Strahlen bei 3 % liegen, das heißt das Verhältnis zwischen den Geschwindigkeiten in Achsenrichtung  $s$  und in der Richtung  $x$  bzw.  $z$  senkrecht zur Achse ist minimal 100 : 3. Für  $x = z$  kann daher die maximale Abweichung von der Linearität durch die quadratischen Glieder 3 o/oo betragen (der Nulldurchgang von  $x$  bzw.  $z$  kann zu integralen Abweichungen von etwa 1 % führen). Am Anfang und Ende treten zwangsläufig Abweichungen vom exakten Quadrupolfeld auf, die als Endeffekte bezeichnet werden und deren integrale Fehlerwirkung kleiner als 1 % sein soll. Eine gegenseitige Auslöschung der Fehler ist nur für Teilchenmanigfaltigkeiten möglich, die in der  $x, x'$ -bzw.  $z, z'$ -Phasenebene strichförmig erscheinen.

### 1.4 Kosten

Die Bau- und Betriebskosten sollen möglichst gering gehalten werden.

### 1.5 Ziel des vorliegenden Berichtes

Es werden 3 aus der Pinofsky-Linse ableitbare Linzenformen angegeben, die theoretisch ein exaktes Quadrupolfeld im Innern liefern, einen rechteckigen

Querschnitt zulassen und kostenmäßig mit den klassischen Linsen etwa vergleichbar sein dürften. Bezüglich der Endeffekte sind nähere Überlegungen aus Zeitgründen noch nicht angestellt worden.

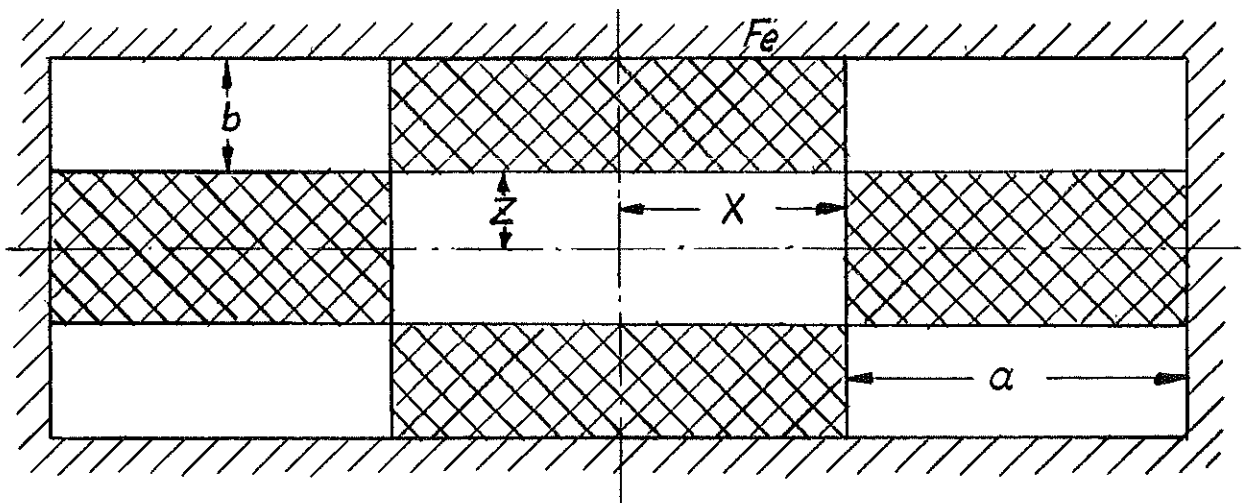
## 2) Linsentypen mit exaktem Quadrupolfeld

### 2.1 Blewett-Linse

Frau H. Blewett gibt eine Linse mit kreisförmigem Querschnitt an, bis an den Wicklungen und Eisen herantreten und die ein exaktes Quadrupolfeld im Innern besitzt. Diese Linse läßt sich auch für ellipsenförmigen Querschnitt berechnen. Ihre Nachteile sind neben hohen Herstellungskosten infolge der komplizierten Begrenzungsflächen eine hohe Stromdichte und ein relativ großer Leistungsbedarf.

#### 2.2.1 Panofsky-Linse

Mit beliebigem rechteckigem Querschnitt läßt sich die folgende Linse mit konstantem Feldgradienten angeben.



Die Linse muß der Forderung  $bX = aZ$  genügen.  
Stromdichte und Leistung ergeben sich wie folgt:

$$j = \frac{X + a}{a} G$$

$$N = j^2 F L \cdot \xi$$

$$N = 8 \left( \frac{X}{a} + \frac{a}{X} + 2 \right) \frac{X}{2} XZ L \xi G^2$$

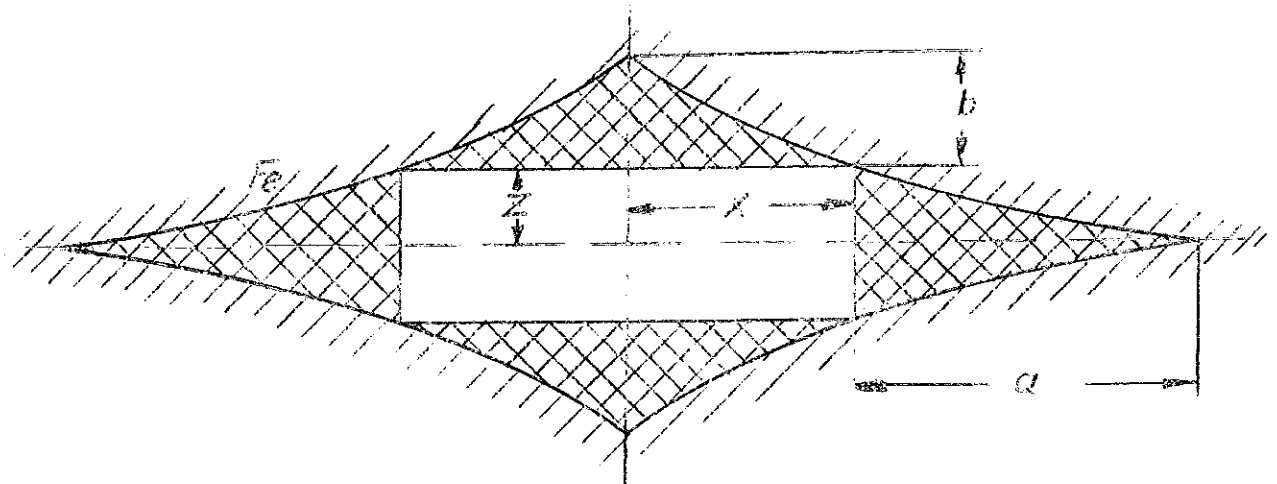
L = Linsenlage

$\xi$  = spez. Widerstand

G = Gradient

### 2.2.2 Abgeschnittene Panofsky-Linse mit rechteckigem Querschnitt

Im gleichen Rechteck läßt sich ein exaktes Quadrupolfeld unter Einsparung von Windungsfläche und damit Leistung herstellen, wenn man mit der Steigung  $\mp \frac{Z}{X}$  in den Ecken des Rechteckes beginnend Potentiallinien berechnet und bereits dort die Windungsfläche durch Eisen begrenzt.



Das Produkt aus Stromdichte und Gesamtwindungsfläche  $c = j \cdot F = 8 X Z G$  muß für alle diese

abgeschnittenen Linsen mit gleichem  $X$  und  $Z$  konstant sein, wie leicht aus dem Umlaufintegral um eine Windungsfläche folgt. Die Stromdichte ist  $j = \frac{X + a}{a} G$ . Die Leistung ergibt sich zu

$$N = 8 \frac{X + a}{a} X Z L \varrho G^2$$

Die Kurven, an denen das Kupfer abgeschnitten wird, sind für  $a = X$  (das ist der leistungsoptimale Fall der Panofsky-Linse) Geraden. Die Leistungsaufnahme der abgeschnittenen Panofsky-Linse nimmt vom Fall  $a = X$  zum Fall  $a \rightarrow \infty$  auf den halben Wert ab.

### 2.2.3 Hyperbelförmig begrenzte Linsen

Das Abschneiden kann auch an einer Stelle  $X^+$ ,  $Y$  bzw.  $X$ ,  $Y^+$  mit  $X^+ \cdot Y = X \cdot Y^+$  begonnen werden und führt (bei gleichem  $a$ ) zum gleichen Spitzenpunkt. Im ehemaligen Innenraum entstehen hyperbelförmige Fe-Begrenzungsflächen. Die Begrenzung des Innenraumes kann gerade  $s$  gewählt werden wie sie in 1.2 als ideal gefordert wurde. Für den Querschnitt des variablen Rechtecke gilt dann  $4 \bar{X} \cdot \bar{Z} = Q = 2 XZ$ . Für die Stromdichte und den Leistungsbedarf gilt:

$$j = \frac{X + a}{a} G$$

$$j\Gamma = 4 \cdot 2 \frac{\bar{X} \bar{Z}}{a} G = 4 X Z G$$

$$N = 4 \frac{X + a}{a} X Z L \varrho G^2$$

$$P = 2 \frac{X + a}{a} Q L \varrho G^2$$

### 5) Vorschläge für die DESY-Linsen

Für die DESY-Linsen werden drei abgeschnittene Panofsky-Linsen 3.1. bis 3.3. vorgeschlagen. Dabei werden geradlinig begrenzte Spulen, das heißt  $X = a$  gewählt. Die äussere Eisenform würde so bestimmt, dass die Flussdichte im Eisen bei kleinen Feldstärken überall den gleichen Wert hat (das ist der Wert an der entferntesten Ecke.)

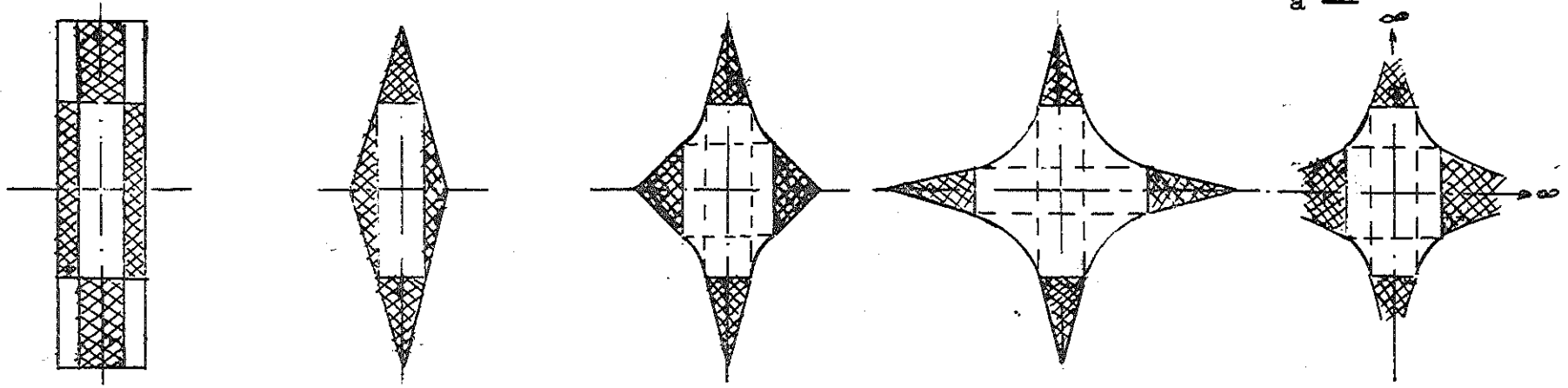
Dadurch können Sättigungserscheinungen zum Teil ausgeschaltet werden. Die Eisenstärke muss an einer Stelle gleich Null gewählt werden; an dieser Stelle wird der Fluss in zwei Richtungen aufgeteilt.

Beim Bau der Linsen wird die gezeichnete äussere Eisenkontur zweckmässig durch eine rechteckig begrenzte Näherung ersetzt. (In den am Schluss beigehefteten Zeichnungen ist die äussere Eisenkontur in der Nähe der Einschnitte fehlerhaft. Die Kontur muss rechtwinklig auf den Innenraum aufstossen).

Möglicherweise muss die eben angegebene Massnahme zur Verringerung von Sättigungserscheinungen noch durch weitere ergänzt werden, die z.B. Unterschiede in den magnetischen Weglängen ausgleichen.

Die vorgeschlagenen Linsen können auch aus der Forderung "exaktes Quadrupol-feld" im jeweiligen Innenraum berechnet werden. Der Weg über die Panofsky-Linsen wurde aus didaktischen Gründen gewählt.

3V1 Panofsky-Linse  
 3.1 Abgeschnittene Panofsky-Linse mit rechteckig. Innenraum  
 3.2 Unsymmetrisch hyperbelförmig begrenzte Panofsky-Linse  
 3.3 Symmetrisch hyperbelförmig begrenzte Pan.-Linse  
 3V2 Unsymmetrisch hyperbelförmig begrenzte Panofsky-Linse  
 a —



$Q = 4 \bar{X} \cdot \bar{Z}$

Stromdichte $j =$	$2 G$	$2 G$	$2 G$	$2 G$	$G$
Leistung $N =$	$8 Q G^2 \beta L$	$4 Q G^2 \beta L$	$4 Q G^2 \beta L$	$4 Q G^2 \beta L$	$2 Q G^2 \beta L$
Cu-Volumen	$2 Q L$	$Q L$	$Q L$	$Q L$	$2 Q L$
Fe-Menge (etwa für Querschnitt $Q = 400 \text{ cm}^2$ ) [t]		2	3	5	

Die Bauschwierigkeiten und damit Bearbeitungskosten steigen in der Reihenfolge bei 3V1, 3.1, 3.3, 3.2, 3V2. Eine entsprechende Kostenabschätzung dürfte erst nach eingehenden Konstruktionsüberlegungen und Rücksprachen mit Firmen möglich sein.



#### 4) Schlußbemerkungen

Alle vorgeschlagenen Linsen sind theoretisch im Sinne von 1.1 linear. Der Typ 3.2 entspricht bezüglich des Innenraumes genau der Forderung von 1.2. In Leistungsaufnahme und Stromdichte unterscheiden sich die Linsen bei gleicher rechteckiger Apertur nicht. Es bleibt abzuwarten, ob der Typ 3.2 nach näherer Untersuchung gegen den Typ 3.1 bezüglich der Bau- und Eisenkosten unter Aufgabe des variablen Seitenverhältnisses des Aperturrechtecks und gegen Typ 3.3 bezüglich der Baukosten unter Inkaufnahme höherer Eisenmengen standhalten kann. Eventuell hat auch eine Version des Typs 3V2, der zum Vergleich mit angegeben wurde, Aussichten auf Anwendung. Bei diesem Typ wird  $a \rightarrow \infty$ , das heißt der Wickelraum gegen  $\infty$  gezogen angesetzt. Diese Linse hat den Vorteil der halben Stromdichte und halben Leistung bei gleicher Apertur und gleichem Feldgradienten. Praktisch muß der Wickelraum im Endlichen unter Inkaufnahme von Abweichungen in der Linearität im Innenraum abgeschnitten werden. Herr Lublow in der Gruppe von Herrn Wüster ist mit den entsprechenden Rechnungen beschäftigt. Er hat ebenfalls die in 2.1 erwähnten Rechnungen für die Blewett-Linse mit ellipsenförmigem Querschnitt durchgeführt. Eine allgemeine Gegenüberstellung mit den klassischen Quadrupollinsen ist deshalb schwierig, weil diese in der Anordnung der Spulen zu viele freie Parameter enthalten; sie wird daher an dieser Stelle nicht gegeben. Ein exakter Vergleich mit den bereits gebauten Linsen ist wegen der geringen Information aus Literatur und Berichten unmöglich.

5) Anhang

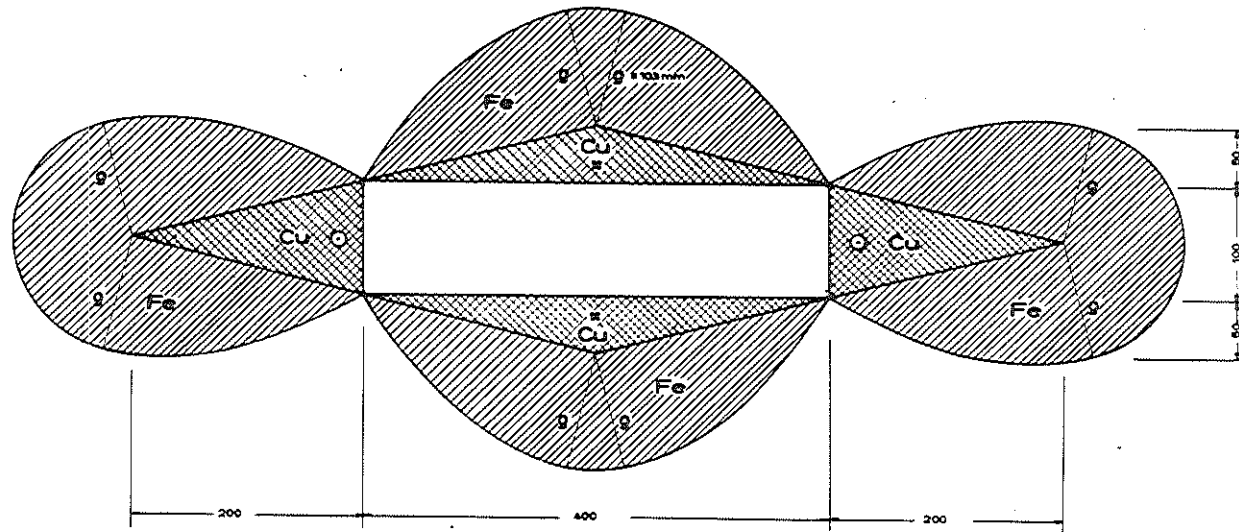
In den beiliegenden beiden Zeichnungen sind die Linsen 3.1 und 3.2 für eine rechteckige Apertur von  $Q = 400 \text{ cm}^2$  wiedergegeben. Für diese Linsen seien für einen Gradienten der magnetischen Feldstärke von  $G = 1 \frac{\text{kOe}}{\text{cm}} = 8 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$  und einer Linsenlänge von  $L = 1 \text{ m}$  auch Stromdichte und Leistung angegeben. Es ergibt sich

$$\text{Stromdichte} \quad j = 2 G \quad = 16 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

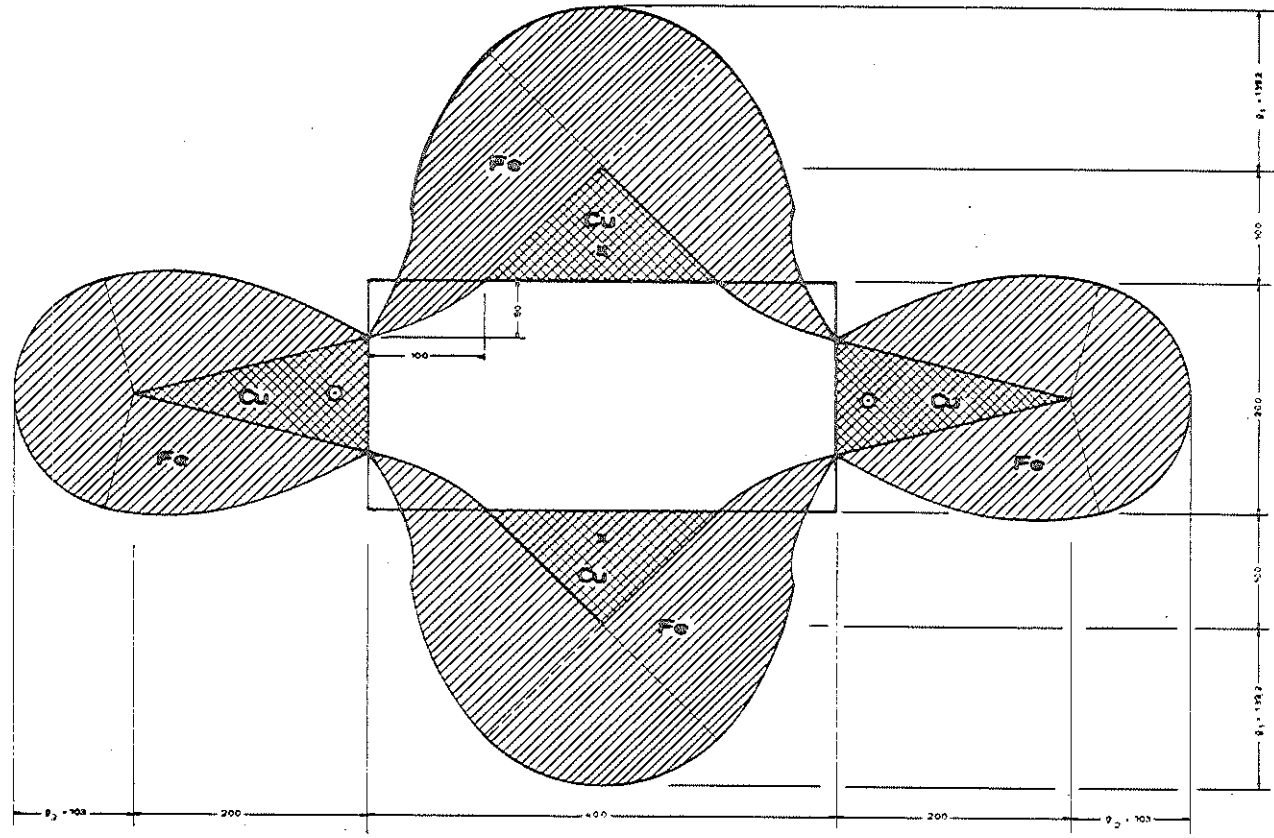
$$\text{Leistung} \quad N = 4 Q G^2 L \cdot \varrho = 165 \text{ kW}$$

Die Stromdichte bezieht sich auf die gesamte Windungsfläche. Durch Isolations- und Kühlungs-Querschnitt wird die tatsächliche Stromdichte in Kupfer etwa 50 % höher und die Leistung ebenfalls. Der Leistungsbedarf der Wicklungsköpfe ist bei der obigen Abschätzung unberücksichtigt geblieben.

*Hans Hultschig*  
(Dr. Hultschig)



DESY		100	100	100	100	100	100
1:2	Abgeschnittene Panofsky-Linse						



DESY	17.02.00	24	25
1:2	Hyperbelf. -abgechn.	Pantofsky -Linie	