

Deutsches Elektronen - Synchrotron ( DESY )

Hamburg Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

DESY-Notiz A 2.79

Hamburg, den 20. Oktober 1961

Formeln zur relativistischen Kinematik

P. Beckmann (Inst. f. theor. Physik, Heidelberg)

J. v. Behr (DESY, Hamburg)

Bezeichnungen: Wir verwenden folgende Bezeichnungen im Laborsystem (LS)

$M_1, M_2 \dots$	Massen der Teilchen
$E_1, E_2 \dots$	Energien der Teilchen
$T_1, T_2 \dots$	Kinetische Energien der Teilchen
$P_1, P_2 \dots$	Impulsbeträge der Teilchen ( $P_1 =  \vec{P}_1 $ )
$\beta_1, \beta_2 \dots$	Geschwindigkeitsbeträge der Teilchen ( $C = 1$ )
$\gamma_1, \gamma_2 \dots$	Lorentzfaktoren der Teilchen
$\Theta_1, \Theta_2 \dots$	Winkel der Teilchen mit Richtung des Gesamtimpulses im LS

$E = \sum E$	Gesamtenergie
$P =  \sum \vec{P}_i $	Betrag des Gesamtimpulses
$\bar{\beta}$	Betrag der Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}}$$

Die entsprechenden Größen im Schwerpunktsystem (CMS) erhalten einen Stern (z.B.  $E_1^*, \gamma_1^*, \Theta_3^*$ ). Auch im CMS sollen die Winkel gegen die Richtung des Gesamtimpulses im LS gemessen werden. Es ist  $\vec{P}^* = 0$ .

Die Indices in den Tabellen entsprechen dem Streuprozess  $(1) + (2) \rightarrow (3) + (4)$  (wobei (2) im LS ruht) und dem Zerfallsprozess  $(A) \rightarrow (3) + (4)$ . Hierbei besitzt der zerfallende Zustand die Masse  $E^*$ , die Energie  $E$  und den Impuls  $P$  im LS.

Literatur:

- 1) I. L. Rosenthal, Fortschr. Physik 4, 357 (1956)
- 2) B. H. Willis, C V Stableford, High Energy Particle Data, UCRL 2426 (2 Vol.)
- 3) Baldin, Goldanski u. Rosenthal, Kinematics of Nuclear Reaction, Oxford (1961) (Pergamon Press).

# 1.1 Parameter bewegter Teilchen

gegeben gesucht	T	E	P	$\gamma$	$\beta$	$\gamma\beta$
T =	T	E - M	$\sqrt{P^2 + M^2} - M$	$M(\gamma - 1)$	$M\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]$	$M[\gamma^2\beta^2 + 1 - 1]$
E =	T + M	E	$\sqrt{P^2 + M^2}$	$M\gamma$	$\frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$M\gamma^2\beta^2 + 1$
P =	$\sqrt{2MT + T^2}$	$\sqrt{E^2 - M^2}$	P	$M\gamma\beta$	$M \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$\gamma\beta M$
$\gamma =$	$\frac{T+M}{M}$	$\frac{E}{M}$	$\frac{\sqrt{P^2 + M^2}}{M}$	$\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$\sqrt{\gamma^2\beta^2 + 1}$
$\beta =$	$\frac{\sqrt{2MT + T^2}}{T+M}$	$\frac{\sqrt{E^2 - M^2}}{E}$	$\frac{P}{\sqrt{P^2 + M^2}}$	$\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$	$\beta$	$\frac{\gamma\beta}{\sqrt{\gamma^2\beta^2 + 1}}$
$\gamma\beta =$	$\frac{\sqrt{2MT + T^2}}{M}$	$\frac{\sqrt{E^2 - M^2}}{M}$	$\frac{P}{M}$	$\sqrt{\gamma^2 - 1}$	$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$\gamma\beta$

## 2.1 Parameter der Transformation ins CMS

		$P_2 = 0$				$P_2 = 0 \quad M_1 = 0$ $T_1 = E_1 = P_1 = k$
gegeben	$P, E$	$T_1$	$E_1$	$P_1$	$k$	
gesucht						
$\bar{\beta} =$	$\frac{P}{E}$	$\frac{\sqrt{T_1^2 + 2M_1 T_1}}{M_1 + M_2 + T_1}$	$\frac{\sqrt{E_1^2 - M_1^2}}{M_2 + E_1}$	$\frac{P_1}{M_2 + \sqrt{M_1^2 + P_1^2}}$	$\frac{k}{M_2 + k}$	
$E^* =$	$\sqrt{E^2 - P^2}$	$\sqrt{(M_1 + M_2)^2 + 2M_2 T_1}$	$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 E_1}$	$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 \sqrt{M_1^2 + P_1^2}}$	$\sqrt{M_2^2 + 2M_2 k}$	
$\bar{\gamma} =$	$\frac{E}{E^*}$	$\frac{M_1 + M_2 + T_1}{\sqrt{(M_1 + M_2)^2 + 2M_2 T_1}}$	$\frac{M_2 + E_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 E_1}}$	$\frac{M_2 + \sqrt{M_1^2 + P_1^2}}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 \sqrt{M_1^2 + P_1^2}}}$	$\frac{M_2 + k}{\sqrt{M_2^2 + 2M_2 k}}$	
$\bar{\gamma} \bar{\beta} =$	$\frac{P}{E^*}$	$\frac{\sqrt{T_1^2 + 2M_1 T_1}}{\sqrt{(M_1 + M_2)^2 + 2M_2 T_1}}$	$\frac{\sqrt{E_1^2 - M_1^2}}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 E_1}}$	$\frac{P_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 \sqrt{M_1^2 + P_1^2}}}$	$\frac{k}{\sqrt{M_2^2 + 2M_2 k}}$	

### 3.1 Transformation LS $\rightarrow$ CMS

$E_3^* =$	$\bar{\gamma} E_3 - \bar{\gamma} \bar{\beta} P_3 \cos. \Theta_3$
$P_3^* =$	$\sqrt{[\bar{\gamma} E_3 - \bar{\gamma} \bar{\beta} P_3 \cos. \Theta_3]^2 - M_3^2}$
$\text{tg. } \Theta_3^* =$	$\frac{1}{\bar{\gamma}} \frac{\sin. \Theta_3}{\cos. \Theta_3 - \bar{\beta}/\beta_3}$

### 3.2 Transformation CMS $\rightarrow$ LS

$E_3 =$	$\bar{\gamma} E_3^* + \bar{\gamma} \bar{\beta} P_3^* \cos. \Theta_3^*$
$P_3 =$	$\sqrt{[\bar{\gamma} E_3^* + \bar{\gamma} \bar{\beta} P_3^* \cos. \Theta_3^*]^2 - M_3^2}$
$\text{tg. } \Theta_3 =$	$\frac{1}{\bar{\gamma}} \frac{\sin \Theta_3^*}{\cos. \Theta_3^* + \bar{\beta}/\beta_3}$

### 3.3 Transformation des Wirkungsquerschnittes

Gegeben sei der differentielle Wirkungsquerschnitt im CMS

$$\frac{d^2 \sigma}{dE^* d \cos \Theta^*}$$

Dann ist der differentielle Wirkungsquerschnitt im LS

$$\frac{d^2 \sigma}{dE d \cos \Theta} = \frac{\sin \Theta^*}{\sin \Theta} \frac{d^2 \sigma}{dE^* d \cos \Theta^*}$$

wobei  $\Theta^*$  aus der Transformationsgleichung

$$\tan \Theta^* = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta - \beta/\beta}$$

zu bestimmen ist.

### Transformation eines im CMS isotropen Linienspektrums ins Laborsystem.

Dies ist ein Spezialfall der vorigen Transformation. Das isotrope Linienspektrum mit der Energie  $E_0$  werde beschrieben durch

$$d^2 N = \frac{1}{2} \delta(E^* - E_0^*) dE^* d \cos \Theta^*$$

Nach der Einführung der neuen Koordinaten  $E$  und  $\cos \Theta$ , sowie Integration über  $\cos \Theta$  ergibt sich

$$\frac{dN}{dE} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E}{\partial \cos \Theta^*} \right)_{E^* = E_0^*}^{-1} dE$$

oder

$$\frac{\partial N}{\partial E} = \frac{1}{2 \gamma \beta \{E_0^{*2} - M^2\}^{1/2}} = \text{const.}$$

Das Energiespektrum ist also ein Rechteck. Es hat die Begrenzungen

$$E_{\text{extr}} = \bar{\gamma} (E_0^* \pm \bar{\beta} \sqrt{E_0^{*2} - M^2})$$

Wird nicht über  $\cos \Theta$ , sondern über  $E$  integriert, so ergibt sich die Winkelabhängigkeit im LS

$$\frac{\partial N}{\partial \cos \Theta} = \frac{1}{2} \sum_{E^* = E_0^*} \left( \frac{\partial \cos \Theta}{\partial \cos \Theta^*} \right)^{-1}$$

wobei die Summe über alle diejenigen  $\Theta^*$  zu erstrecken ist, die mit  $\Theta$  korrespondieren. Explizit ergibt sich

$$\frac{\partial N}{\partial \cos \Theta} = - \frac{1}{2 \bar{\gamma} P_0^*} \sum \frac{P_K^2}{P_K - E_K \bar{\beta} \cos \Theta}$$

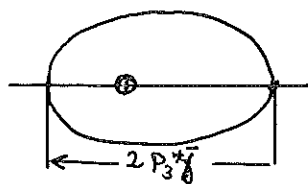
$$P_K = \frac{E_0^* \bar{\beta} \cos \Theta \pm \sqrt{E_0^{*2} - M^2 \bar{\gamma}^2 (1 - \bar{\beta}^2 \cos^2 \Theta)}}{\bar{\gamma} (1 - \bar{\beta} \cos^2 \Theta)}$$

und zwar gilt  $+$   $\sqrt{\quad}$  wenn  $\bar{\beta} < \beta^*$   
 $\pm$   $\sqrt{\quad}$  wenn  $\bar{\beta} > \beta^*$

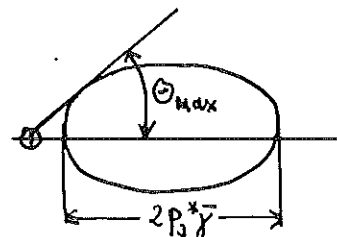
Näheres bei Rosental, Fortschr. Phys. 4, 357 (1956)

### 3.4 Allgemeine Eigenschaften der LS-Verteilung

Die Punkte  $(P_3, \Theta_3)$  liegen auf einer Ellipse mit Mittelpunkt  $\bar{\gamma} \bar{\beta} E_3^*$ , großer Achse  $2 P_3^* \bar{\gamma}$ , kleiner Achse  $2 P_3^*$ .



wenn  $\beta_3^* > \bar{\beta}$



wenn  $\beta_3^* < \bar{\beta}$

Für den Fall  $M_2 = M_3$  entsprechen

$$M_1 > M_4 \quad \beta_3^* > \bar{\beta}$$

$$M_1 = M_4 \quad \beta_3^* = \bar{\beta}$$

$$M_1 < M_4 \quad \beta_3^* < \bar{\beta}$$

Wenn  $\beta_3^* < \bar{\beta}$  ist, so tritt ein maximaler Winkel  $\Theta_{\max}$  auf mit

$$\sin \Theta_{3/\max} = \frac{\beta_3^* \gamma_3^*}{\bar{\beta} \bar{\gamma}}$$

Der zugehörige CMS-Winkel  $\Theta_{3/\max}^*$  ergibt sich aus

$$\cos \Theta_{3/\max}^* = -\frac{\beta_3^*}{\bar{\beta}}$$

### 5.1 Korrelationen im LS

gegeben gesucht	$\Theta_3 E^* \bar{\beta}$
$P_3 =$	$\frac{E^* \bar{\beta} \cos \Theta_3 \pm \sqrt{E_3^{*2} - M_3^2} \bar{\gamma} (1 - \bar{\beta}^2 \cos^2 \Theta_3)}{\bar{\gamma} (1 - \bar{\beta}^2 \cos^2 \Theta_3)}$

$$E_3^* = \frac{E^{*2} + M_3^2 - M_4^2}{2E^*}$$

### 5.1 Korrelationen im LS

gegeben gesucht	$\Theta_3 P_3 E^* \bar{\beta}$
$\text{tg } \Theta_4 =$	$\frac{\sin \Theta_3}{\cos \Theta_3 - \bar{\beta} E^* / P_3}$
$P_4 =$	$\sqrt{P_3^2 \sin^2 \Theta_3 + (\bar{\beta} E^* - P_3 \cos \Theta_3)^2}$

### 4.1 Energie-Impulsaufteilung im CMS

$\bar{\gamma}_3^* =$	$\frac{E^{*2} + M_3^2 - M_4^2}{2E^* M_3}$
$E_3^* =$	$\frac{E^{*2} + M_3^2 - M_4^2}{2E^*}$
$E_4^* =$	$\frac{E^{*2} + M_4^2 - M_3^2}{2E^*}$
$P_3^* = P_4^* =$	$\frac{\sqrt{(E^{*2} - (M_3 + M_4)^2)(E^{*2} - (M_3 - M_4)^2)}}{2E^*}$



### 6.1. Lage der Schwellen im LS

gesucht gegeben	$T_1 =$	$P_1 =$	$E_1 =$	$k =$
$E^*$	$\frac{E^{*2} - (M_1 + M_2)^2}{2M_2}$	$\frac{\sqrt{E^{*2} - (M_1 + M_2)^2} \sqrt{E^{*2} - (M_1 - M_2)^2}}{2M_2}$	$\frac{E^{*2} - M_1^2 - M_2^2}{2M_2}$	$\frac{E^{*2} - M_2^2}{2M_2}$

### 6.2. Anfangszustand im CMS

gesucht	$P_1^* = P_2^* =$	$E_1^* =$	$E_2^* =$	$\vartheta_1^* =$	$\vartheta_2^*$
	$\bar{\vartheta} \bar{\beta} M_2$	$E^* - \bar{\vartheta} M_2$	$\bar{\vartheta} M_2$	$\frac{E^* - \bar{\vartheta} M_2}{M_1}$	$\bar{\vartheta}$

### 6.3 Bestimmung der fehlenden Masse ( $M_4$ )

gegeben gesucht	$E_3^*$	$E_3 \Theta_3 (P_3 \Theta_3)$
$M_4 =$	$\sqrt{E^{*2} + M_3^2 - 2E^*E_3^*}$	$\sqrt{2\bar{\vartheta}\bar{\beta}E^*P_3 \cos\Theta_3 - 2\bar{\vartheta}E^*E_3 + E^{*2} + M_3^2}$

7.1 Parameter des CMS beim Stoß zweier Teilchen im extrem relativistischen Fall ( $E_1 \gg M_1$ )

$$\bar{\beta} = 1 - \frac{M_2}{E_1}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{E_1}{2M_2}$$

$$E^* = \sqrt{2M_2 E_1}$$

7.2 Transformation LS  $\leftrightarrow$  CMS im extrem relativistischen Fall  
( $\bar{\beta} = \beta^* = 1$ )

$$\text{tg } \Theta = \frac{1}{\bar{\gamma}} \text{tg } \frac{\Theta^*}{2}$$

$$E = 2 \bar{\gamma} E^* \cos^2 \frac{\Theta^*}{2}$$