

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON  
(DESY)

Hamburg-Gr. Flottbek 1, Flottbeker Drift 56

DESY-Bibliothek

DESY-Notiz A 2.84

Hamburg, den 19. Dez. 1961  
M 2 - Dr. Ho/Sa

Messungen an den DESY-Magnet-Modellen

Teil A

Meßverfahren mit Spule und Integrator

## Inhaltsverzeichnis Teil A

<u>I. Allgemeine Messprinzipien</u>	S. 2
1.) Die Feldstärke $B(r, z)$	3
2.) Der Feldindex $n(r)$	5
a) $G(o)$	6
b) $G(r)$	9
3.) Die B - Länge $L_B(r)$	10
4.) Die Gradientenlänge $L_a(r)$	13
<u>II. Meßspulen</u>	13 - 34
1.) Feldspulen	15
2.) Gradientenspulen	17
3.) Einfluß der Fertigungstoleranzen	19
4.) Praktische Ausführung der Spulen	25
5.) Eichung der Spulen	26
a) Eichung vor dem Zusammenbau	26
b) Nacheichung	31
<u>III. Der Integrator</u>	34 - 43
<u>IV. Meßpraxis</u>	43 - 50
1.) Einführung der Integrationsgrenzen	43
a) Korrektur für $\frac{\Delta G}{G}(r)$	46
b) Korrektur für $\frac{\Delta G}{G}(o)$	47
2.) Meßgestell und Meßplatz	48

In einem früheren Bericht (DESY Notiz A 2.20) wurden bereits verschiedene Meßverfahren kurz erläutert, die für Messungen in Magnetfeldern infrage kommen. Leider existiert kein Meßprinzip, welches es gestattet, nach einem einheitlichen Verfahren einen Wechselstrommagneten über den ganzen interessierenden Feldstärkebereich von 40 Gauss bis 8500 Gauss mit der erforderlichen Genauigkeit zu messen. Deshalb wurden bei kleinen und hohen Feldern zwei grundsätzlich verschiedene Methoden angewandt:

A Spulen und Integrator für  $B > 100$  Gauss

B Peaking-Strips für  $B < 100$  Gauss.

In der Umgebung von 100 Gauss muß eine Überlappung der beiden Bereiche möglich sein, um die Kontinuität der Messungen in den beiden Bereichen sicher zu stellen.

Die Anforderungen an die Meßgenauigkeit sind außerordentlich groß. Es werden für die Gradienten des Feldes maximale Abweichungen von  $10^{-2}$  zugelassen (vergleiche DESY Notiz A 2.50). Um auch kleinere Abweichungen vom vorgesehenen Wert erfassen zu können, sollte die Meßgenauigkeit etwa  $10^{-3}$  im Gradienten betragen. Da der Gradient selbst etwa  $2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ , bezogen auf die Feldstärke am Sollkreis, beträgt, sind also Abweichungen im Feld von einigen  $10^{-5}$  nachzuweisen. Aus diesem Grunde kommen zur Messung nur Kompensationsmethoden unter Verwendung von Präzisionsspulen, -spannungsteilern usw. infrage.

Im nachfolgenden sollen die einzelnen Meßverfahren nebst den dazugehörigen Geräten ausführlich behandelt werden.

## A Messverfahren mit Spule und Integrator

### I. Allgemeine Messprinzipien

Das Prinzip einer Feldmessung mit Spule und Integrator wurde bereits in dem eingangs zitierten DESY Bericht A 2.20 beschrieben. Es soll hier im Zusammenhang noch einmal dargestellt werden:

Bringt man eine Spule mit der Windungsfläche  $F$  in ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, so wird in ihr eine Spannung

$$\bar{u} = - \frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

induziert.

$$\phi = \int L d\mathcal{F} \quad (2)$$

ist der Fluß, der die Spule durchsetzt. Wir werden zeigen, daß es möglich ist, durch geeignete Dimensionierung der Spulen zu erreichen, daß der Mittelwert des Feldes über die Spule gleich der Feldstärke auf der Spulenachse ist. Für diesen Fall ergibt sich

$$\bar{u} = - F \frac{dB}{dt} \quad (3)$$

durch Integration über die Zeit erhält man daraus

$$B(t) - B(t_0) = - \frac{1}{F} \int_{t_0}^t \bar{u} dt \quad (4)$$

wobei die Frage der Integrationsgrenzen zunächst noch offen bleibt.

Da der DESY-Magnet mit periodischem Wechselstrom von 50 Hz erregt wird, kommen nur elektronische Integrationsverfahren in Betracht. Auch hierauf soll später näher eingegangen werden.

Es genügt an dieser Stelle, daß ein Miller-Integrator gewählt wurde, für den gilt

$$\varphi(t) = -\frac{1}{RC} \int \bar{u} dt \quad (5)$$

$\varphi(t)$  = Ausgangsspannung  
 $\bar{u}$  = Eingangsspannung

R · C = Integrationszeitkonstant

Setzt man (3) in (5) ein, so ergibt sich

$$\varphi(t) = \frac{F}{RC} \int \frac{dB}{dt} dt \quad (6)$$

$$n(t, t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \frac{F}{RC} [B(t) - B(t_0)]$$

Die wichtigsten Messungen nebst Schaltungen sind folgende:

1. Die Feldstärke B (r, y)

Für die meisten Fälle genügt es, die Feldstärke an einer Stelle r, y relativ zu einer anderen Stelle r<sub>0</sub>, y<sub>0</sub> zu messen und auf B(r<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) zu normieren (r = radiale Koordinate; r = 0 entspr. Sollkreis; y = azimutale Koordinate; y = 0 meist willkürlich). Es handelt sich im wesentlichen um radiale und azimutale Streufeldmessungen. Hierzu benötigt man 2 Messspulen beliebiger Windungsfläche, von denen die eine an beliebiger (aber während der Messung festzuhaltender) Stelle im Feld als Referenzspule aufgestellt, die andere nacheinander an die Punkte (r<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>), (r, y) gebracht wird. Die beiden Spulen sind (Abb. 1) so geschaltet,

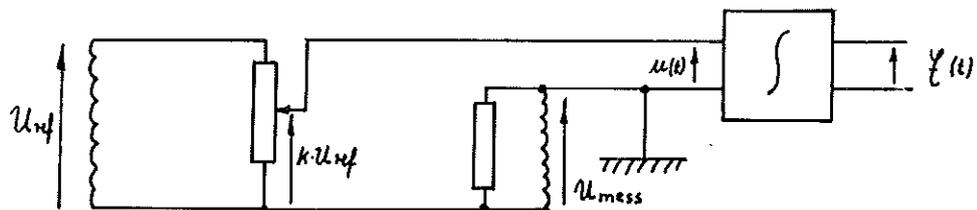


Abb.1

daß ein Bruchteil k der Spannung U<sub>ref</sub> zur Kompensation der Spannung U<sub>mess</sub> der Meßspule verwendet wird. Man kann zeigen (vergleiche Kapitel "Integrator"), daß in einem Magnetfeld ohne Oberwellen auf die Anwendung eines Integrators verzichtet werden könnte, da beide Spannungen U<sub>ref</sub> und U<sub>mess</sub> proportional ω<sub>0</sub> sind, was bei der Kompen-

sation herausfallen würde. Beim Auftreten von Oberwellen ist die Differenzspannung zu integrieren und  $k$  so einzustellen, daß die Spannungsdifferenz  $u(t, t_0)$  am Ausgang verschwindet. Es gilt

$$U_{ref} = - F_{ref} \frac{dB_{ref}}{dt} \quad (7)$$

$$U_{mess}(r, \gamma) = - F_{mess} \frac{dB(r, \gamma)}{dt} \quad (8)$$

$$\ddot{u}(r, \gamma) = k(r, \gamma) U_{ref} - U_{mess}(r, \gamma) \quad (9)$$

Setzt man (7), (8), (9) in (5) ein, so erhält man für Integratorausgangsspannung

$$\dot{f}(t) - \dot{f}(t_0) = n(t, t_0) \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t \left[ k(r, \gamma) F_{ref} \frac{dB_{ref}}{dt} - F_{mess} \frac{dB(r, \gamma)}{dt} \right] dt \quad (10)$$

Durch Verändern von  $k$  läßt sich  $n(t, t_0)$  zu Null machen. In einem Wechselstrommagneten mit idealem Zeitverhalten ist nun  $k$  unabhängig von der Zeit. Ein solches Magnetfeld läßt sich beschreiben durch

$$L(r, t) = f_1(r) f_2(t) \quad (11)$$

( $r$  = Ortsvektor)

wobei

$$\frac{df_1}{dt} = 0 \quad (12)$$

und

$$\text{grad } f_2 = 0 \quad (13)$$

ist.

Wegen des nicht linearen Verhaltens von Eisen einerseits, sowie infolge von Wirbel- und Ausgleichsströmen, besonders im Streufeld, wo sich der Einfluß der Spulen bemerkbar macht, gelten (11), (12) und (13) nur näherungsweise, die zeitlichen Koeffizienten des Feldes hängen vom Ort ab, die räumlichen von der Zeit (Näheres unter "Integrator").

Aus diesem Grund läßt sich der Abgleich  $u = 0$  nur für einen bestimmten Zeitpunkt und damit für eine bestimmte Feldstärke durchführen.

Für diese Feldstärke gilt

$$k(\tau, \gamma, t) F_{ref} [B_{ref}(t) - B_{ref}(t_0)] = F_{mess} [B(\tau, \gamma, t) - B(\tau, \gamma, t_0)] \quad (14)$$

Unter der Voraussetzung, daß das Feld überall gleichzeitig durch Null geht (dies ist nur näherungsweise der Fall, vergl. "Meßpraxis"), kann man einen Peaking-Strip ohne Vormagnetisierung an einer beliebigen Stelle ins Magnetfeld stellen (oder auch gegebenenfalls mit der Meßspule mitführen). Benutzt man das Signal dieses Peaking-Strips zur Fixierung des Zeitpunktes  $t_0$ , so wird damit  $B(t_0) = 0$  und (14) vereinfacht sich zu

$$B(\tau, \gamma, t) = \frac{F_{ref}}{F_{mess}} B_{ref}(t) k(\tau, \gamma, t) \quad (15)$$

Die relative Ortsabhängigkeit von B bei einer bestimmten Referenzfeldstärke läßt sich dann darstellen durch

$$\frac{B(\tau, \gamma)}{B(\tau_0, \gamma_0)} = \frac{k(\tau, \gamma)}{k(\tau_0, \gamma_0)} \quad (16)$$

$B(\tau_0, \gamma_0)$  kann beispielsweise die Feldstärke am Sollkreis in der Mitte eines Magnetblocks sein.

## 2. Der Feldindex $n(r)$

$$\text{Es gilt } n(r) = - \frac{P_s}{B_s} \frac{\partial B(r)}{\partial r} \quad (17)$$

Da bei vorgegebenen  $B_s$  (Feldstärke am Sollkreis)  $P_s$  auch eine Funktion des Teilchenimpulses, also keine Eigenschaft des Magnetfeldes allein ist, reduzieren sich alle n-Messungen auf die Messung des relativen Gradienten

$$G(r) = \frac{1}{B_s} \frac{\partial B(r)}{\partial r} \quad (17 a)$$

Die Messung läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn man zunächst durch eine Absolutmessung  $G(0)$  bestimmt und dann die relativen

Abweichungen

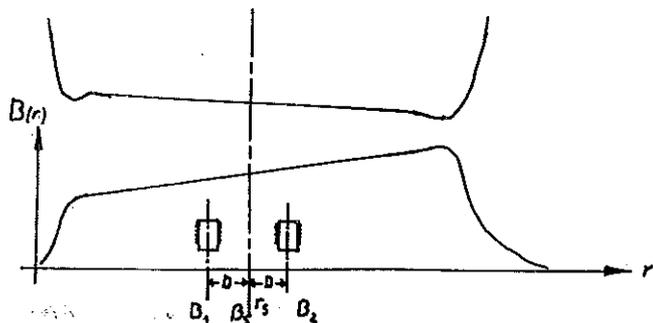
$$\frac{G(r) - G(0)}{G(0)} = \frac{\Delta n(r)}{n(0)} \quad (18)$$

ermittelt.

a)  $G(0)$

Grundsätzlich läßt sich der Gradient aus einer Reihe von Feldstärkemessungen ermitteln, wenn man z. B.  $B(r)$  an diskreten Punkten mißt, durch eine Ausgleichsrechnung den wahrscheinlichsten  $B$ -Verlauf berechnet und die so erhaltene  $B(r)$  - Kurve differenziert. Eine wesentlich höhere Messgenauigkeit läßt sich durch eine direkte Differenzmessung erzielen. Man benötigt hierzu 2 identische Meßspulen, die im Abstand  $\pm D$  vom Sollkreis aufgestellt werden. Die Schaltung ist die gleiche wie in Abb. 1 mit dem Unterschied, daß die Referenzspule durch die Meßspule an der Stelle mit höherem Feld zu ersetzen ist. Die Aufstellung der Spulen im Feld zeigt Abb. 2

Abb.2



In einem streng linearen Feld gilt

$$U_2 = F_2 \dot{B}_2 = F_2 \dot{B}_S (1 + G(0)D) \quad (19)$$

$$U_1 = F_1 \dot{B}_1 = F_1 \dot{B}_S (1 - G(0)D)$$

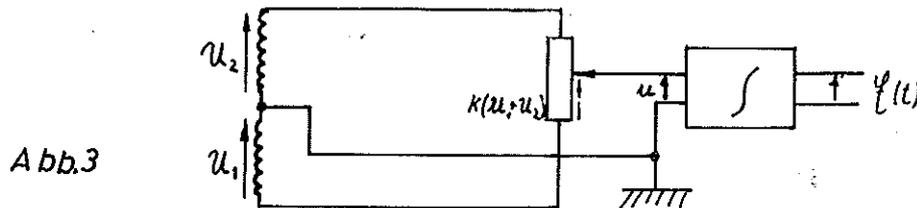
ist  $F_1 = F_2$ , und hat man  $k$  so abgeglichen, daß  $\mathcal{N}(t, t_0) = 0$  wird (vergl. das unter  $B(r, y)$  Gesagte) so ergibt sich

$$G(0) = \frac{1}{D} \frac{1 - k}{1 + k} \quad (20)$$

(Bezüglich  $D$  vergl. "Nacheichen")

In einem nicht linearen Feld stellt (20) zunächst einen Differenzen-Quotienten dar. Es wird später gezeigt, daß bei geeigneter Spulendimensionierung dieser Differenzquotient in genügender Näherung mit dem zu messenden Differentialquotienten übereinstimmt.

Eine 2. Schaltung,  $G(0)$  zu messen, zeigt Abb. 3. Sie zeichnet sich durch besonders gute Schaltungssymmetrie bezüglich des Erdpunktes aus.



Hier gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= U_1 - k(U_1 + U_2) \\ &= -F \{ \dot{B}_1 - k(\dot{B}_1 + \dot{B}_2) \} \end{aligned} \quad (21)$$

und aus  $u(t, t_0) = 0$  folgt

$$B_1 = k(B_1 + B_2)$$

Setzt man die Werte aus (19) für B ein, so erhält man

$$G(0) = \frac{1}{D}(1 - 2k) \quad (22)$$

Den Unterschied der beiden Schaltungen erhält man aus einer Fehler- und Empfindlichkeitsbilanz:

Bildet man aus (20) den relativen Fehler von G in Abhängigkeit von k, so erhält man

$$\frac{\Delta G}{G} = -\frac{2k}{1-k^2} \cdot \frac{\Delta k}{k} \quad (20 a)$$

Mit  $D = 0,5 \text{ cm}$  und einem relativen Gradienten von ungefähr  $10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  erhält man aus (20)  $k = 0,98$  und damit

$$\frac{\Delta G}{G} = -25 \frac{\Delta k}{k} \quad (20 b)$$

Die relative Meßgenauigkeit für  $k$  muß also 25 mal so groß sein wie die für  $G$  und damit auch für  $n$  geforderte. Das bedeutet unter anderem, daß der in Abb. 2 verwendete Spannungsteiler für eine Messung des  $n$  auf  $10^{-3}$  das Spannungsteilerverhältnis auf  $4 \cdot 10^{-5}$  genau liefern muß!

Weiter ist zu untersuchen eine wie große Spannungsänderung sich am Ausgang des Integrators ergibt, wenn die Dekade falsch abgeglichen wird. Dies ist ein Maß für die Empfindlichkeit der Schaltung. Es gilt nach (9), (10) und (19)

$$n(t, t_0) = \frac{F}{RC} B_s(t) [(1-GD) - k(1+GD)]$$

$$\Delta n = \frac{F}{RC} B_s(1+GD) \Delta k = -\frac{1}{25} \frac{F}{RC} B_s(1+GD) k \frac{\Delta G}{G}$$

oder näherungsweise

$$|\Delta n(t, t_0)| \approx \frac{1}{25} \frac{F}{RC} B_s(t) \frac{\Delta G}{G} \quad (20 c)$$

Stellt man die gleichen Betrachtungen für die Schaltung nach Abb. 3 an, so erhält man

$$\frac{\Delta G}{G} = -\frac{2k}{1-2k} \cdot \frac{\Delta k}{k} \quad (22 a)$$

und unter Verwendung der konkreten Zahlen

$$\frac{\Delta G}{G} = -100 \frac{\Delta k}{k} \quad (22 b)$$

Für die Empfindlichkeit erhält man aus

$$n(t, t_0) = \frac{F}{RC} B_s(t) \left\{ (1-GD) - k [(1-GD) + (1+GD)] \right\}$$

$$\Delta n(t, t_0) = -2 \frac{F}{RC} B_s(t) \Delta k = \frac{1}{50} \frac{F}{RC} B_s(t) k \frac{\Delta G}{G}$$

Berücksichtigt man noch, daß bei dieser Schaltung  $k \approx 0,5$  ist, so erhält man

$$|\Delta n(t, t_0)| = \frac{1}{100} \frac{F}{RC} B_s(t) \frac{\Delta G}{G} \quad (22 c)$$

Ein Vergleich der entsprechenden Formeln beider Schaltungen zeigt, daß die günstigen Symmetrieeigenschaften der Schaltung nach Abb. 3 durch eine Empfindlichkeitsverringering um einen Faktor 4 sowie eine erhöhte Genauigkeitsanforderung an den Spannungsteiler um den gleichen Faktor erkauft sind. Dies könnte, zumindest bei kleineren Feldstärken, kritisch werden. Man wird also bei hohen Feldstärken die Ergebnisse beider Methoden vergleichen und im Falle der Übereinstimmung bei kleinen Feldern Schaltung Abb. 2 vorziehen.

Natürlich ist  $G(0)$  noch eine Funktion der Feldstärke und damit der Zeit, da (11), (12) und (13) nicht streng gelten.

b)  $G(r)$

Die Messung der relativen Änderung von  $G(r)$  erfolgt ebenfalls mit dem Gradienten-Spulenpaar. Die Spannung  $U_2 - U_1$  wird hierbei verglichen mit dem Bruchteil  $k$  einer beliebigen Referenzspannung nach folgender Schaltung (Abb. 4):

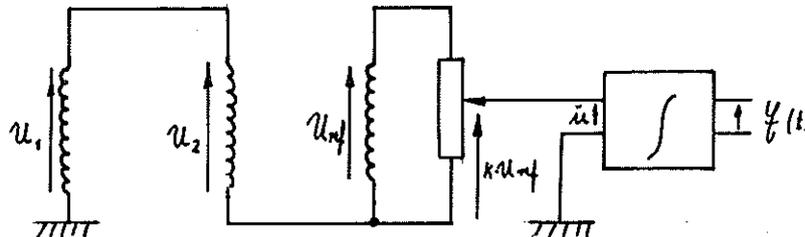


Abb.4

Die Eingangsspannung des Integrators ist hierbei

$$\ddot{u} = [U_2(r) - U_1(r)] - k(r) U_{ref} \quad (23)$$

Wiederum unter der Voraussetzung gleichzeitigen Nulldurchganges des Feldes für verschiedene  $r$  (die Abweichungen von dieser Voraussetzung werden später diskutiert) ergibt sich aus (5), (19) und (21) für  $\mathcal{N}(t, t_0) = 0$

$$G(r) = \frac{1}{2D} \frac{B_{ref}}{B_s} k(r) \quad (24)$$

Bildet man

$$\frac{G(\tau) - G(0)}{G(0)} = \frac{k(\tau) - k(0)}{k(0)} \quad (25)$$

so ist diese Funktion innerhalb der durch Nichtlinearitäten und Spulengeometrie gegebene Näherung identisch mit dem radialen n-Fehler. Wir setzen also

$$\frac{\Delta n(\tau)}{n(0)} = \frac{k(\tau) - k(0)}{k(0)} \quad (26)$$

Der Verlauf dieser Funktion kann für verschiedene Feldstärken verschieden sein und muß auf Grund der zu ermittelnden genauen Anfangsbedingungen evtl. noch korrigiert werden (vergl. "Meßpraxis").

### 3. Die B-Länge $L_B(\tau)$

$L_B(\tau)$  ist definiert durch

$$L_B(\tau) = \frac{1}{B(\tau, y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau, y) dy \quad (27)$$

$y_0$  ist dabei eine beliebige Stelle im Innern des Magnetsektors für die nur zu fordern ist, daß sie soweit vom Ende entfernt ist, daß kein Einfluß des Streufeldes mehr nachzuweisen ist. Da das Feld im Innern eines Sektors praktisch homogen ist, setzt sich (27) aus 3 Anteilen zusammen, nämlich

$$L_B(\tau) = \frac{1}{B(\tau, y_0)} \left\{ \int_{-\infty}^{y_1} B(\tau, y) dy + \int_{y_1}^{y_2} B(\tau, y) dy + \int_{y_2}^{+\infty} B(\tau, y) dy \right\} \quad (27a)$$

$y_1$  und  $y_2$  sind so zu wählen, daß für

$$\begin{aligned} y_1 < y < y_2 \\ \frac{dB_z(\tau, y)}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Dann ist der mittlere Anteil von (27 a) einfach zu ersetzen durch

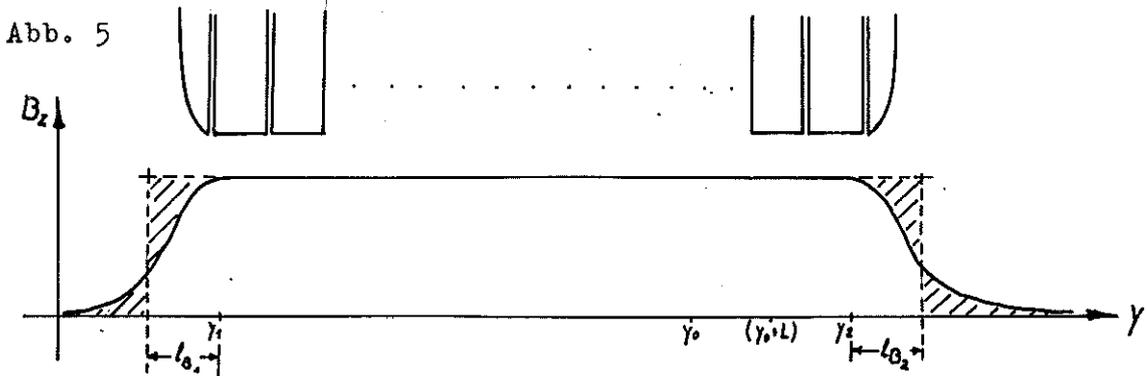
$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{B(\tau, y)}{B(\tau_0, y_0)} dy = y_2 - y_1 \quad (29)$$

und es genügt, nur die Streufeldanteile zu messen:

$$L_B(\tau) = \ell_{B_1}(\tau) + \gamma_2 - \gamma_1 + \ell_{B_2}(\tau) \quad (30)$$

$$\ell_{B_1}(\tau) = \frac{1}{B(\tau, \gamma_0)} \int_{-\infty}^{\gamma_1} B(\tau, \gamma) d\gamma \quad (31 a)$$

$$\ell_{B_2}(\tau) = \frac{1}{B(\tau, \gamma_0)} \int_{\gamma_2}^{+\infty} B(\tau, \gamma) d\gamma \quad (31 b)$$



Da infolge der Spalte zwischen den einzelnen Blocks (28) nicht streng erfüllt ist, ist für  $B(\tau, \gamma_0)$  ein geeigneter Mittelwert einzusetzen.

Man erhält ihn aus (29) zu

$$B(\tau, \gamma_0) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} B(\tau, \gamma) d\gamma \quad (29 a)$$

Da eine kleine Unsymmetrie dadurch zustande kommt, daß auf der einen Seite die Spulenanschlüsse auftreten, sind sicherheitshalber  $l_{B_1}$  und  $l_{B_2}$  zu messen.

Grundsätzlich könnte man das Feld auf einem festen Radius nach 1. messen und graphisch oder numerisch integrieren. Genauer und zugleich bequemer ist es, wenn man möglichst langgestreckte rechteckige Spulen verwendet, wodurch die Integration in  $y$ -Richtung, jedenfalls stückweise, automatisch erfolgt.

Ist  $L$  die Länge einer Spule so muß  $y_0$  soweit im Innern des Sektors liegen, daß (28) für alle  $y \leq y_0 + L$  gilt (Abb. 5).

Bezeichnet man die in einer Schaltung nach Abb. 1 erhaltenen  $k$ -Werte fortlaufend mit  $k_0(r) \dots k_r(r) \dots k_N(r)$ , so wird aus (31) (die Unterscheidung zwischen den beiden Sektorenden wird im folgenden als selbstverständlich weggelassen)

$$e_B(r) = \frac{1}{B(r, y_0)} \left\{ \int_{y_0}^{y_0+L} B(r, y) dy + \int_{y_0+L}^{y_0+2L} + \dots + \int_{y_0+NL}^{y_0+(N+1)L} \right\} \quad (31 c)$$

Ist  $b$  die Breite der Spule und erweitert man mit  $L \cdot b$ , so ergibt sich

$$e_B(r) = \frac{L}{eLB(r, y_0)} \sum_{v=0}^N e \int_{y_0+vL}^{y_0+(v+1)L} B(r, y) dy \quad (32)$$

In einem Bereich, in welchem (28) erfüllt ist, gilt, bei Verwendung einer Feldspule

$$eLB(r, y_0) = \int_{r-\frac{b}{2}}^{r+\frac{b}{2}} B(r, y_0) dr \quad (33)$$

so daß

$$eLB(r, y_0) \sim \phi(r, y_0) \sim k(r, y_0) \quad (34)$$

(Hierbei ist die Ausdehnung der Spule in der  $z$ -Richtung vernachlässigt, eine exakte Berechnung erfolgt später.)

Man kann nun zeigen ( E<sub>1</sub> ), daß (34) auch für das Integral über das Streufeld gilt, vorausgesetzt, daß sich die Integrationen über einen Bereich erstreckt, der von y<sub>0</sub> (wo (28) noch gilt) bis in ein Gebiet mit zu vernachlässigender Feldstärke reicht. Daran ändert sich nichts, wenn die Integration über Teilstücke der Länge L vorgenommen wird, es muß jedoch darauf aufmerksam gemacht werden, daß, jedenfalls in höherer Näherung, (33) nur gültig ist für die gesamte Summe (32), nicht notwendigerweise jedoch für jeden einzelnen Summanden davon. Wir können also schreiben

$$L_B(\tau) = L \sum_{v=0}^N \frac{\phi_v(\tau)}{\phi_0(\tau)} = \frac{L}{k_0(\tau)} \sum_{v=0}^N k_v(\tau) \quad (35)$$

#### 4. Gradientenlänge L<sub>G</sub> (r)

Nach dem gleichen Verfahren wie unter L<sub>B</sub> läßt sich die Gradientenlänge bilden. Es ist

$$L_G(\tau) = \frac{1}{G(\tau, y_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau, y) dy \quad (36)$$

$$= \frac{1}{\frac{dB}{d\tau}(\tau, y_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dB}{d\tau}(\tau, y) dy$$

Für die Messung und Auswertung gilt sinngemäß das gleiche wie für L<sub>B</sub>, bzw. L<sub>B</sub>, es ist nur die B-Spule durch ein Gradientenspulenpaar zu ersetzen und in Schaltung nach Abb. 4 zu messen.

## II. Meßspulen

Die Spannung, die man am Ausgang einer Spule in einem Wechselfeld erhält, ist proportional dem magnetischen Fluß durch die Spule. Mit anderen Worten, eine Spule mißt den Mittelwert des Feldes über ihre gesamte Fläche. In einem homogenen Magnetfeld erwachsen hieraus keinerlei Probleme. Wir interessieren uns jedoch in unserem homogenen Magneten in vielen Fällen für die Feldstärke an diskreten Punkten, und es ist zu überlegen, wie die Spulen zu gestalten sind, damit der Zusammenhang zwischen Feld, Fluß und Spulengeometrie möglichst einfach ist.

Aus fertigungstechnischen Gründen wurden komplizierte Spulenkonstruktionen, wie sie häufig vorgeschlagen werden ( R1 ), abgelehnt. Es sollte versucht werden, mit einlagigen, rechteckigen Spulen auszukommen. Bei solchen hat man die Möglichkeit, durch Verwendung optisch geschliffener Glaskörper als Träger ein Maximum an geometrischer Präzision zu erreichen, ohne auf zeitraubende Absoluteichungen der Windungsfläche angewiesen zu sein. Der Einfluß der endlichen Spulenausdehnung im inhomogenen Feld soll im folgenden untersucht werden:

Es wird vorausgesetzt, daß (28) erfüllt ist. Dann läßt sich ein 2 dimensionales Feld in ebenen Polarkoordinaten  $\bar{r}, \varphi$  um den Sollkreis wie folgt beschreiben (Abb. 6).

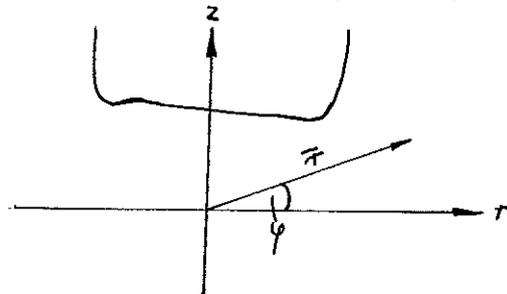


Abb. 6

$$B_z(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{r}^k \cos k\varphi + b_k \bar{r}^k \sin k\varphi \quad (37)$$

(die  $b_k$  verschwinden, da  $B_z(\varphi) = B_z(-\varphi)$  sein muß).

Führt man rechtwinkelige Koordinate  $r, z$  ein, so wird

$$r = \bar{r} \cos \varphi \quad z = \bar{r} \sin \varphi \quad (38)$$

$$\cos k\varphi = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \binom{k}{2\ell} \cos^{k-2\ell} \varphi \sin^{2\ell} \varphi \quad (39)$$

$$0 \leq \ell \leq \frac{k}{2} \quad \text{für gerade } k$$

und  $0 \leq \ell \leq \frac{k-1}{2}$  für ungerade  $k$

$$B_z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{r}^k \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \binom{k}{2\ell} \cos^{k-2\ell} \varphi \sin^{2\ell} \varphi$$

bzw. nach vollständiger Elimination von  $\bar{r}$  und  $\mathcal{Y}$

$$B_z(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{2} \frac{k-1}{2} (-1)^l \binom{k}{2l} r^{k-2l} z^{2l} \quad (40)$$

In der Mittelebene  $z = 0$  verschwinden alle Terme außer denen mit  $l = 0$ . Man erhält also für diesen Fall die einfache Potenzreihe

$$B_z(r, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \quad (40 a)$$

Man braucht also nur die Koeffizienten  $a_k$  in der Mittelebene zu messen und erhält damit die Beschreibung des gesamten zweidimensionalen Feldes.

### 1) Feldspulen

Wir betrachten eine einlagige rechteckige Spule der Länge  $L$ , der Breite  $2d$  und Höhe  $2h$ , deren Orientierung im Magnetfeld aus der Skizze (Abb. 7) hervorgeht. Die Spule soll symmetrisch zur Mittelebene angeordnet sein. Einen Schnitt in der  $z, r$ -Ebene zeigt Abb. 8.

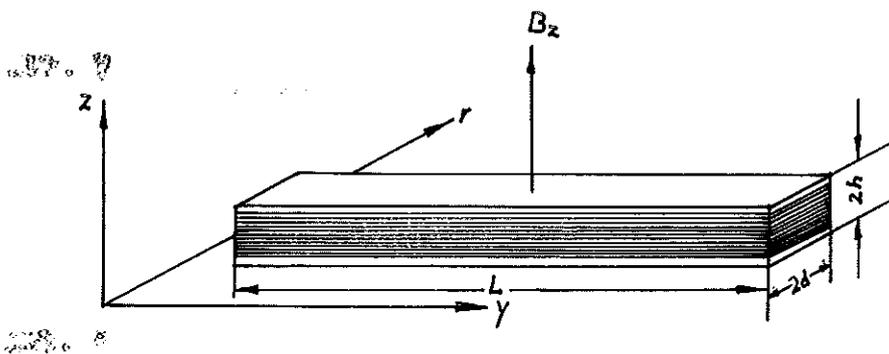


Abb. 7

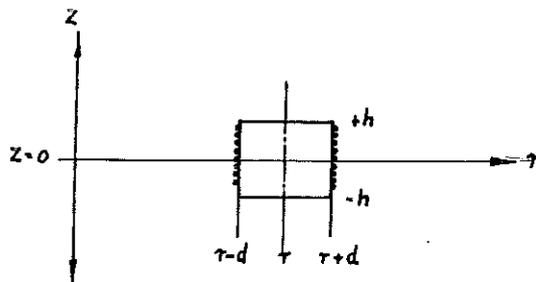


Abb. 8

Eine einzelne Windung, die sich im Abstand  $z$  von der Mittelebene befindet, umfaßt einen Fluß

$$d\phi(r, z) = L \int_{r-d}^{r+d} B(\rho, z) d\rho \quad (41)$$

Enthält die Spule  $N$  Windungen, so ist

$$n^* = \frac{N}{2h} \quad (42)$$

die Zahl der Windungen pro Längeneinheit, und auf eine Länge  $dz$  entfallen  $n^* dz$  Windungen. Der Anteil eines Höhenelementes  $dz$  wird

$$d\phi(r, z) = L n^* dz \int_{r-d}^{r+d} B_z(\rho, z) d\rho \quad (43)$$

woraus man durch Integration über die Ausdehnung der Spule in der  $z$ -Richtung von  $-h$  bis  $+h$  den Gesamtfluß an der Stelle  $r$  erhält:

$$\phi(r) = L n^* \int_{-h}^{+h} dz \int_{r-d}^{r+d} B_z(\rho, z) d\rho \quad (44)$$

Mit dem Ausdruck (40) für  $B_z(\rho, z)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi(r) &= L n^* \int_{-h}^{+h} dz \int_{r-d}^{r+d} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell \binom{k}{2\ell} \rho^{k-2\ell} z^{2\ell} d\rho \\ &= L n^* \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell \binom{k}{2\ell} \int_{-h}^{+h} z^{2\ell} dz \int_{r-d}^{r+d} \rho^{k-2\ell} d\rho \end{aligned} \quad (45)$$

und nach Ausführung der Integration

$$\phi(r) = 2h n^* L \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{\begin{cases} \frac{k}{2} \\ \frac{k-1}{2} \end{cases}} (-1)^\ell \binom{k}{2\ell} \frac{h^{2\ell}}{(2\ell+1)(k-2\ell+1)} \left[ (r+d)^{k-2\ell+1} - (r-d)^{k-2\ell+1} \right] \quad (46)$$

Die Summation über  $\ell$  läuft für gerades  $k$  bis  $\ell = \frac{k}{2}$ ,  
für ungerades  $k$  bis  $\ell = \frac{k-1}{2}$

Die Ausrechnung für die ersten Glieder ergibt, unter gleichzeitiger Anwendung von (42)

$$\phi(r) = 2dNL \left\{ a_0 + a_1 r + a_2 \left( r^2 - \frac{d^2 - l^2}{3} \right) + a_3 r \left( r^2 + \frac{d^2 - l^2}{3} \right) + a_4 \left[ r^4 + 5r^2 \left( \frac{d^2 - l^2}{3} \right) - \frac{10}{9} d^2 l^2 + \frac{1}{3} (d^4 + l^4) \right] \right\} \quad (47)$$

Der Ausdruck

$$\frac{\phi(r)}{2dNL} = \frac{\phi(r)}{F} \quad (48)$$

unterscheidet sich in den ersten Gliedern der Entwicklung nur durch die unterschlängelten Terme von dem Feld  $B_z(r, 0)$  nach (40 a). Macht man noch

$$d^2 - l^2 = 0 \quad (49)$$

so stimmt (48) bis zur 3. Potenz von  $r$  mit dem zu messenden Feld überein.

## 2. Gradientenspulen

Zur Messung des Feldgradienten benötigt man 2 Spulen gleicher Windungsfläche, die nach A I. 2. so geschaltet werden, daß die induzierten Spannungen sich subtrahieren, d.h. man mißt die Differenz der Flüsse zweier Spulen. Die Achse der einen Spule befinde sich an der Stelle  $r + D$ , die Achse der anderen Spule an der Stelle  $r - D$ . Ersetzt man  $r$  in (46) einmal durch  $(r + D)$ , einmal durch  $(r - D)$ , und subtrahiert man beide Ausdrücke von einander, so erhält man für den Differenzfluß, identische Spulen vorausgesetzt:

$$\Delta \phi(r) = LN \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{L^{2\ell}}{(2\ell+1)(k-2\ell+1)} \binom{k}{2\ell} \left[ (r+D+d)^{k-2\ell+1} - (r+D-d)^{k-2\ell+1} - (r-D+d)^{k-2\ell+1} + (r-D-d)^{k-2\ell+1} \right] \quad (50)$$

Die Auswertung der Potenzen von r in der eckigen Klammer ergibt:

$$[ ] = \sum_{m=0}^{k-2l+1} \sum_{p=0}^m \binom{k-2l+1}{m} \binom{m}{p} r^{k-2l+1-m} D^{m-p} d^p [1 + (-1)^m - (-1)^p - (-1)^{m-p}]$$

Nennen wir

$$K = 1 + (-1)^m - (-1)^p - (-1)^{m-p} \quad (51)$$

so verschwindet K identisch, außer wenn m gerade, p ungerade ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} K &= 4 \\ m &= 2s \\ p &= 2t + 1 \end{aligned} \quad m \geq p \quad (52)$$

und somit, unter Wegfall des Gliedes  $a_0$

$$\begin{aligned} \Delta \phi(r) &= 4NLd \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\frac{k}{2}; \frac{k-1}{2}} (-1)^l \frac{L^{2l}}{(2l+1)(k-2l+1)} \binom{k}{2l} \times \\ &\times \sum_{s=1}^{\leq \frac{k-2l+1}{2}} \sum_{t=0}^{\leq \frac{2s-1}{2}} \binom{k-2l+1}{2s} \binom{2s}{2t+1} r^{k-2(l+s)+1} D^{2(s-t-1)} d^{2t} \quad (53) \end{aligned}$$

Die Ausrechnung der Summen für die ersten Glieder ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \phi(r)}{4NLdD} &= a_1 + 2a_2 r + 3a_3 r^2 + a_3 (D^2 + d^2 - L^2) + 4a_4 r^3 + 4a_4 r (D^2 + d^2 - L^2) \\ &+ 5a_5 r^4 + a_5 [10r^2 (D^2 + d^2 - L^2) + D^4 + d^4 + L^4 + \frac{10}{3} d^2 D^2 \\ &\quad - \frac{10}{3} L^2 (D^2 + d^2)] \quad (54) \end{aligned}$$

Ein Vergleich zwischen (54) und der 1. Ableitung von (40 a) ergibt

$$\frac{\Delta \phi(r)}{4NLdD} = \frac{\delta B_z(r, \theta)}{\delta r} + \delta(r) \quad (55)$$

Der Fehler  $\delta(r)$ , um den sich (54) von dem gesuchten Feldgradienten unterscheidet, ist

$$\begin{aligned} \delta(r) &= a_3 (D^2 + d^2 - L^2) + 4a_4 r (D^2 + d^2 - L^2) \\ &+ a_5 [10r^2 (D^2 + d^2 - L^2) + D^4 + d^4 + L^4 + \frac{10}{3} (d^2 D^2 - L^2 D^2 - L^2 d^2)] \quad (56) \end{aligned}$$

Wählt man die Spulendimensionen so, daß

$$D^2 + d^2 - h^2 = 0 \quad (57)$$

machen sich die endlichen Spulendimensionen erst im Glied mit  $a_5$  bemerkbar.

### 3. Einfluß der Fertigungstoleranzen

Es soll für den Fall der Gradientenspulen untersucht werden, welchen Einfluß geringe Abweichungen der Spulendimensionen von den Sollmaßen haben:

Gegeben sind 2 Spulen mit den Längen  $L_1, L_2$ , den Höhen  $2h_1, 2h_2$  und den Breiten  $2d_1, 2d_2$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} L &= \frac{L_1 + L_2}{2} & h &= \frac{h_1 + h_2}{2} & d &= \frac{d_1 + d_2}{2} \\ L_1 &= L(1 + \lambda) & h_1 &= h(1 + \eta) & d_1 &= d(1 + \vartheta) \\ L_2 &= L(1 - \lambda) & h_2 &= h(1 - \eta) & d_2 &= d(1 - \vartheta) \\ \lambda &= \frac{L_1 - L_2}{2L} & \eta &= \frac{h_1 - h_2}{2h} & \vartheta &= \frac{d_1 - d_2}{2d} \end{aligned} \quad (58)$$

$L, h$  und  $d$  sind also die jeweiligen Mittelwerte,  $\lambda, \eta, \vartheta$  die halben relativen Differenzen zweier entsprechenden Dimensionen der beiden Spulen. Für den Differenzfluß erhält man

$$\Delta \phi(\tau) = \phi_1(\tau + D) - \phi_2(\tau - D) \quad (59)$$

Wiederum unter Verwendung von (46) erhält man, ähnlich dem Vorgehen der Ableitung von (50):

$$\Delta \phi(\tau) = LN \sum a_k \sum (-1)^e \binom{k}{2e} \frac{1}{(2e+1)(k-2e+1)} \left\{ (1+\lambda) h^{2e} (1+\eta)^{2e} \cdot [(\tau+D+d(1+\eta))]^{k-2e+1} - [(\tau+D-d(1+\eta))]^{k-2e+1} \right. \\ \left. - (1-\lambda) h^{2e} (1-\eta)^{2e} [(\tau-D+d(1-\eta))]^{k-2e+1} - [(\tau-D-d(1-\eta))]^{k-2e+1} \right\}$$

$$\Delta \phi(\tau) = LN \sum a_k \sum (-1)^e \binom{k}{2e} \frac{h^{2e}}{(2e+1)(k-2e+1)} \cdot A$$

$$A = \sum_{m=0}^{k-2e+1} \sum_{p=0}^m \binom{k-2e+1}{m} \binom{m}{p} \tau^{k-2e+1-m} \left\{ (1+\lambda)(1+\eta)^{2e} [D^{m-p} d^p (1+\eta)^p - D^{m-p} (-d)^p (1+\eta)^p] \right. \\ \left. - (1-\lambda)(1-\eta)^{2e} [(-D)^{m-p} d^p (1-\eta)^p - (-D)^{m-p} (-d)^p (1-\eta)^p] \right\}$$

Vernachlässigt man Potenzen und Produkte höherer Ordnung in den Fehlern, dann wird der Ausdruck in der geschweiften Klammer

$$\left\{ \right\} = (1+\lambda)(1+2e\eta) [D^{m-p} d^p (1+p\eta) - D^{m-p} (-d)^p (1+p\eta)] - \\ - (1-\lambda)(1-2e\eta) [(-D)^{m-p} d^p (1-p\eta) - (-D)^{m-p} (-d)^p (1-p\eta)] \\ = D^{m-p} d^p \left\{ (1+\lambda+2e\eta+p\eta) [1-(-1)^p] - (1-\lambda-2e\eta-p\eta) [(-1)^{m-p} - (-1)^m] \right\}$$

Zusammengefaßt:

$$\Delta \phi(\tau) = LN \sum_k a_k \sum (-1)^e \binom{k}{2e} \frac{h^{2e}}{(2e+1)(k-2e+1)} \sum_{m=0}^{k-2e+1} \sum_{p=0}^m \binom{k-2e+1}{m} \binom{m}{p} \times \\ \times \tau^{k-2e+1-m} D^{m-p} d^p \left\{ [1-(-1)^p - (-1)^{m-p} + (-1)^m] \right. \\ \left. + (\lambda+2e\eta+p\eta) [1-(-1)^p + (-1)^{m-p} - (-1)^m] \right\} \quad (60)$$

Der erste Term in  $\left\{ \right\}$  ergibt die Flußdifferenz mit ideal identischen Spulen nach (53), der zweite stellt einen zusätzlichen Fehler dar.

Man kann also schreiben:

$$\Delta \phi(\tau) = 4dDLN \left\{ \frac{dB_z(\tau, 0)}{d\tau} + \delta(\tau) + \delta'(\tau) \right\} \quad (60 a)$$

mit

$$\delta'(\tau) = \frac{1}{4dD} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{e=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^e \binom{k}{2e} \frac{h^{2e}}{(2e+1)(k-2e+1)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{k-2e+1} \sum_{p=0}^m \binom{k-2e+1}{m} \binom{m}{p} \tau^{k-2e+1-m} D^{m-p} d^p (\lambda+2e\eta+p\eta) [1-(-1)^p + (-1)^{m-p} - (-1)^m]$$

Die Summe in [ ] verschwindet, außer wenn

$$p = 2t + 1$$

$$m = 2s + 1$$

In diesem Fall wird sie gleich 4, und damit, unter Auslassung einiger Zwischenrechnungen

$$\delta'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{k}{2\ell} \frac{h^{2\ell}}{(2\ell+1)(k-2\ell+1)} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-2\ell}{2} \rfloor} \binom{k-2\ell+1}{2s+1} \times$$

$$\times \tau^{k-2(\ell+s)} \sum_{t=0}^s \binom{2s+1}{2t+1} D^{2(s-t)-1} d^{2t} [\lambda + 2\ell\eta + (2t+1)\eta] \quad (61)$$

Die ersten Terme ergeben unter Berücksichtigung von (57)

$$\delta'(\tau) = \frac{1}{3} a_0 (\lambda + \eta) + a_1 \tau (\lambda + \eta) + a_2 \left[ (\lambda + \eta) (\tau^2 + \frac{2}{3} D^2) + \frac{2}{3} (d^2 (\eta - \eta) - \eta D^2) \right]$$

$$+ a_3 \tau \left[ (\lambda + \eta) (\tau^2 + 2D^2) + 2(d^2 (\eta - \eta) - \eta D^2) \right] + a_4 \left[ (\lambda + \eta) (\tau^4 + 4\tau^2 D^2 - \frac{4}{15} (3D^4 + d^4 + d^2 D^2)) \right.$$

$$+ 4\tau^2 (d^2 (\eta - \eta) - \eta D^2) - \frac{8}{15} (6\eta D^4 + (\eta + \eta) d^4 - (5\eta - 7\eta) d^2 D^2) \left. \right]$$

$$+ a_5 \tau \left[ (\lambda + \eta) (\tau^4 + \frac{2\sigma}{3} \tau^2 D^2 - \frac{4}{3} (3D^4 + d^4 + d^2 D^2)) + \frac{2\sigma}{3} \tau^2 (d^2 (\eta - \eta) - \eta D^2) \right. \\ \left. - \frac{8}{3} (6\eta D^4 + d^4 (\eta + \eta) - d^2 D^2 (5\eta - 7\eta)) \right] \quad (61a)$$

Die Fertigungstoleranzen haben ferner zur Folge, daß (57) nicht exakt erfüllt werden kann. Setzt man

$$D^2 + d^2 - h^2 = \epsilon \quad (57 a)$$

so läßt sich nunmehr unter Zusammenfassung von (56) und (61 a) ein Gesamtfehler

$$\delta^*(\tau) = \delta(\tau) + \delta'(\tau) \quad (61 b)$$

bilden, der, wenn man die Terme nach den einzelnen Fehlern ordnet (wiederum unter Vernachlässigung quadratischer Fehlerglieder),

folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}
 d^x(r) = & \frac{\lambda + \eta}{D} \left\{ a_0 + a_1 r + a_2 \left[ r^2 + \frac{2}{3} D^2 \right] + a_3 r \left[ r^2 + 2D^2 \right] + a_4 \left[ r^4 + 4r^2 D^2 - \frac{4}{15} (3D^4 + d^4 + d^2 D^2) \right] \right. \\
 & \left. + a_5 r \left[ r^4 + \frac{20}{3} r^2 D^2 - \frac{4}{3} (3D^4 + d^4 + d^2 D^2) \right] \right\} \quad (62) \\
 & + \frac{\rho}{D} d^2 \left\{ \frac{2}{3} a_2 + 2a_3 r + 4a_4 \left[ r^2 - \frac{2}{15} d^2 + \frac{2}{3} D^2 \right] + \frac{4}{3} a_5 r \left[ 5r^2 - 2d^2 + 10D^2 \right] \right\} \\
 & - \frac{\eta}{D} (d^2 + D^2) \left\{ \frac{2}{3} a_2 + 2a_3 r + 4a_4 \left[ r^2 + \frac{2}{15} (6D^2 + d^2) \right] + \frac{4}{3} a_5 r \left[ 5r^2 + 2(6D^2 + d^2) \right] \right\} \\
 & + \varepsilon \left\{ a_3 + 4a_4 r + 2a_5 \left[ 5r^2 + \frac{2}{3} (D^2 + d^2) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{4}{3} a_5 (D^4 + d^4 + d^2 D^2) \right\}
 \end{aligned}$$

Je nach dem, ob Absolutmessungen oder Relativmessungen vorgenommen werden, kann man die folgenden Formen finden:

a) Absolutmessungen:

Hierbei gilt  $r = 0$ , es bleiben nur die absoluten Glieder stehen:

$$\begin{aligned}
 d^x(0) = & \frac{\lambda + \eta}{D} \left\{ a_0 + \frac{2}{3} a_2 D^2 - \frac{4}{15} a_4 (3D^4 + d^4 + d^2 D^2) \right\} \\
 & + \eta \frac{d^2}{D} \left\{ \frac{2}{3} a_2 + \frac{8}{3} a_4 (D^2 - \frac{1}{5} d^2) \right\} \quad (62 a) \\
 & - \eta \frac{d^2 + D^2}{D} \left\{ \frac{2}{3} a_2 + \frac{8}{15} a_4 (6D^2 + d^2) \right\} \\
 & + \varepsilon \left\{ a_3 + \frac{4}{3} a_5 (D^2 + d^2) \right\} \\
 & - \frac{4}{3} a_5 (D^4 + d^4 + d^2 D^2)
 \end{aligned}$$

b) Relativmessungen

Hierbei werden nach (18) immer Differenzen  $[k(r) - k(0)] \sim [\Delta\phi(r) - \Delta\phi(0)]$  gebildet. Es entfallen also alle Absolutglieder und es bleibt

$$\begin{aligned}
 d^x(r) - d^x(0) = & \frac{\lambda + \eta}{D} r \left\{ a_1 + a_2 r + a_3 (r^2 + 2D^2) + a_4 r (r^2 + 4D^2) + \right. \\
 & \left. + a_5 \left[ r^4 + \frac{20}{3} r^2 D^2 - \frac{4}{3} (3D^4 + d^4 + d^2 D^2) \right] \right\} \quad (62 b) \\
 & + \eta \frac{d^2}{D} \left\{ 2a_3 r + 4a_4 r^2 + \frac{4}{3} a_5 r \left[ 5r^2 - 2d^2 + 10D^2 \right] \right\} \\
 & - \eta \frac{d^2 + D^2}{D} \left\{ 2a_3 r + 4a_4 r^2 + \frac{4}{3} a_5 r \left[ 5r^2 + 2(6D^2 + d^2) \right] \right\} \\
 & + \varepsilon \left\{ 4a_4 r + 10a_5 r^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Es interessiert in unserem Zusammenhang nicht der Absolutwert dieses Fehlers, sondern das Verhältnis dieses Fehlers zum Gradienten. Wir führen zur Abschätzung des Relativfehlers folgende Näherungen ein:

$$\frac{\frac{d^x}{dB}}{\frac{d^x}{dr}} \rightarrow \frac{d^x}{a_1} \quad (63)$$

Aus der Struktur des Magneten folgt, daß für beliebig  $r$  innerhalb des interessierenden Feldbereiches der Gradient auf ca. 1 % konstant ist. Es gilt also

$$a_1 + 2a_2 r + 3a_3 r^2 + 4a_4 r^3 + 5a_5 r^4 \approx a_1 (1 + \alpha) \quad (64)$$

$$\alpha \leq 1\%$$

Da dies für beliebige  $r$  gelten soll, müssen die Summanden von  $\alpha$  selbst kleiner als 1 % sein. Es gilt also innerhalb des Feldplateaus

$$v \left| \frac{a_v}{a_1} \right| r^{v-1} \leq 10^{-2} \quad (65)$$

und zwar im F-Sektor bis  $r = 6,5$  cm, im D-Sektor bis  $r = 4,5$  cm. Es genügt für unsere Abschätzung, für beide Sektoren gemeinsam  $r = 4,5$  cm einzusetzen, wofür (65) auf jeden Fall erfüllt sein muß. Daraus erhält man  $\left| \frac{a_v}{a_1} \right| \leq \frac{10^{-2}}{v 4,5^{v-1}}$

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &\leq 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} & \frac{a_4}{a_1} &\leq 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-3} \\ \frac{a_3}{a_1} &\leq 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-2} & \frac{a_5}{a_1} &\leq 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-4} \end{aligned} \quad (66)$$

ferner kennt man das Verhältnis

$$\frac{a_0}{a_1} = x_0 \approx 50 \text{ cm} \quad (66 \text{ a})$$

Setzt man dies in die Fehlerausdrücke ein, so erhält man aus (62 a)

$$\frac{\delta^x(0)}{a_1} \leq \frac{\lambda + \eta}{D} \left\{ 50 + 0,2 \cdot 10^{-3} - 0,25 \cdot 10^{-5} \right\} + \eta \frac{d^2}{D} \left\{ 0,7 \cdot 10^{-3} + 1,6 \cdot 10^{-5} \right\} \quad (62 \text{ b})$$

$$+ (d^2 + D^2) \frac{\eta}{D} \left\{ 0,7 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-5} \right\} + \varepsilon \left( 1,6 \cdot 10^{-4} + 0,7 \cdot 10^{-6} \right) + 2,7 \cdot 10^{-4}$$

man sieht, daß für  $\eta \leq 1$  und  $\varepsilon \leq 1 \text{ cm}^2$  alle Terme zu vernachlässigen sind bis auf das Glied

$$\frac{\delta^x(0)}{a_1} \leq \frac{a_0}{a_1} \frac{\lambda + \eta}{D} \approx 50 \frac{\lambda + \eta}{D} \quad (62 \text{ c})$$

Nun ist bei den von uns verwendeten Spulenpaaren D ungefähr gleich 0,5 cm. Ferner gilt für die Windungsfläche der Spulen

$$F = 2dNL \quad (67)$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta d}{d} = 2(\lambda + \eta)$$

Somit hängt der Gradientenfehler in unserer Näherung nur von der relativen Differenz der Windungsflächen ab.

$$\frac{\delta^x(0)}{a_1} \approx \frac{50}{2D} \frac{\Delta F}{F} \quad (68)$$

Für eine Meßgenauigkeit im Gradienten von  $10^{-3}$  müssen also die Windungsflächen der beiden Spulen gleich sein auf

$$\frac{\Delta F}{F} \leq 2 \cdot 10^{-5}$$

Für den Fehler der Relativmessung erhält man an den gewählten Bezugspunkten ( $r = 4,5 \text{ cm}$ )

$$\begin{aligned} \frac{\delta^x(r) - \delta^x(0)}{a_1} &\leq \lambda + \eta \cdot \frac{4,5}{D} \left\{ 1 + \dots \dots \right\} \\ &+ \eta \frac{d^2}{D} \cdot 10^{-3} \left\{ 1,4 + 2,4 + 0,6 \right\} \\ &+ \eta \frac{d^2 + D^2}{D} \cdot 10^{-3} \left\{ 1,4 + 2,4 + 0,6 \right\} \\ &+ \varepsilon \cdot 10^{-4} \left\{ 5 + 0,2 \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\delta^x(r) - \delta^x(0)}{a_1} \leq 10(\lambda + \eta) \quad (69)$$

Dabei ist zu beachten, daß dies der Fehler der Differenz zweier Gradienten, also der Fehler des im Feld vorhandenen Fehlers (nicht des Meßfehlers) ist. Infolgedessen genügt es  $\frac{\delta^x(+)-\delta^x(0)}{a_1} < 10^{-2}$  zu machen, und die Genauigkeitsforderung für die Spulen lautet in diesem Fall

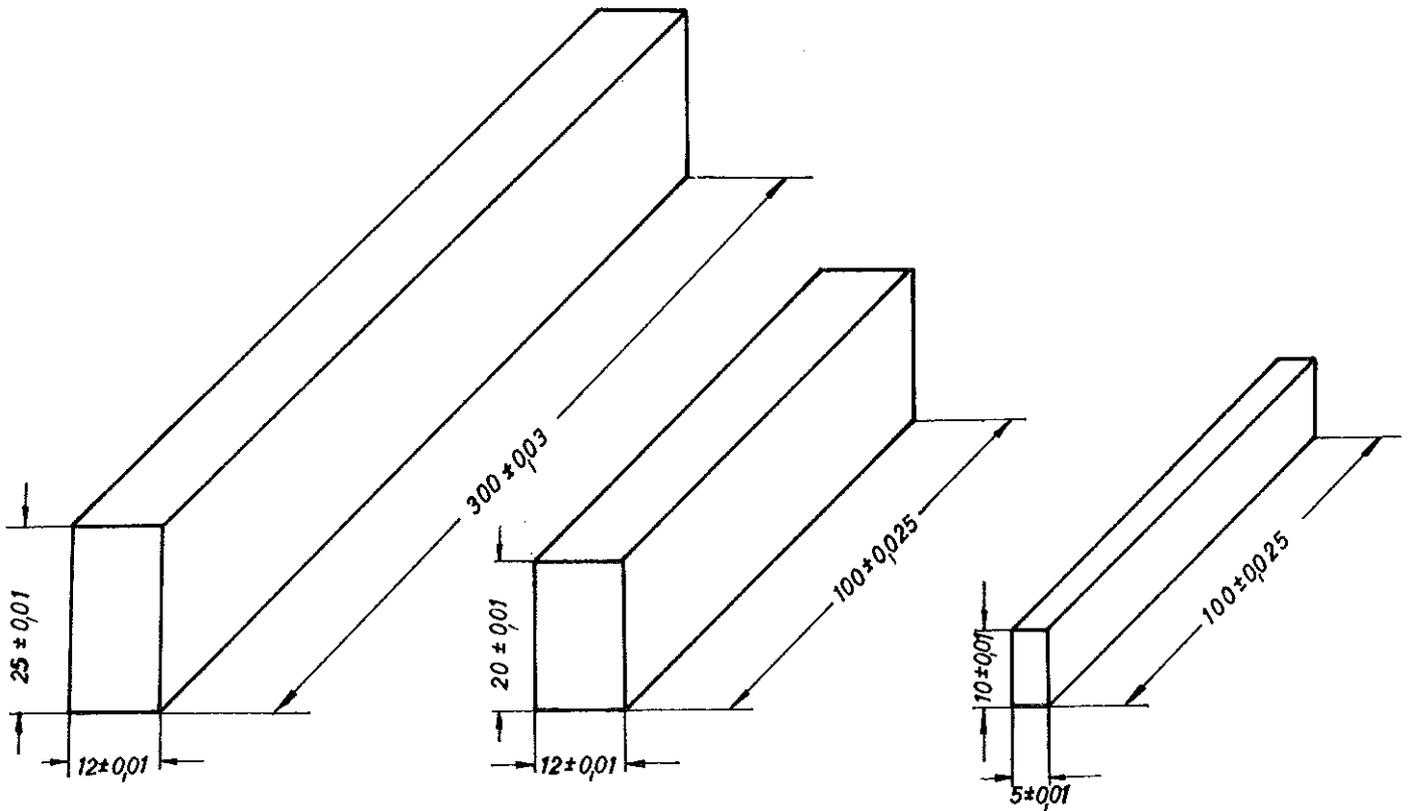
$$\frac{\Delta F}{F} \leq 2 \cdot 10^{-3} \quad (70)$$

#### 4) Praktische Ausführung der Spulen

Die Größe der Spulen wird einerseits bestimmt durch den Wunsch, aus Intensitätsgründen eine möglichst große Windungsfläche zu erreichen, andererseits sollen die Lineardimensionen möglichst klein sein. Die Länge L der Spulen richtet sich nach der Blocklänge. Es wurden 2 Typen von Spulen hergestellt, eine große Spule mit einer Länge von 30 cm, die über einen ganzen Block integriert, und eine kleine Spule von 10 cm Länge, die es gestattet, auch Unterschiede innerhalb eines Blocks zu erfassen.

Die Größen D, d und h ergeben sich aus (57). Da man mit einem Spulentyp für F- und D-Sektor auskommen möchte, ist die Wicklungshöhe h bestimmt durch die minimale Luftspalthöhe im F-Sektor von 4,4 cm. Berücksichtigt man, daß ausreichend Platz für Spulenhalterung und Justiervorrichtungen vorhanden sein muß, so ergibt sich, daß die halbe Wicklungshöhe 10 mm nicht übersteigen sollte. Da ferner stets  $D > d$  sein muß, erhält man für D und d einen Wert zwischen 0,5 und 0,7 cm.

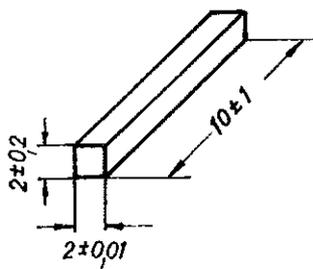
Als Spulenkörper wurden geschliffene, rechtwinklige Prismen aus Glas verwendet. Die genauen Dimensionen und Toleranzen gehen aus Abb. 9 hervor. Die Toleranzen sollen eine Genauigkeit der Lineardimensionen von 1 %o garantieren. Sie wurden für die 30 cm Spulen vom Hersteller sehr gut eingehalten, bei den 10 cm Spulen sogar weit unterschritten (die Breite zweier Spulen stimmt auf 1 bis 2  $\mu$  überein).



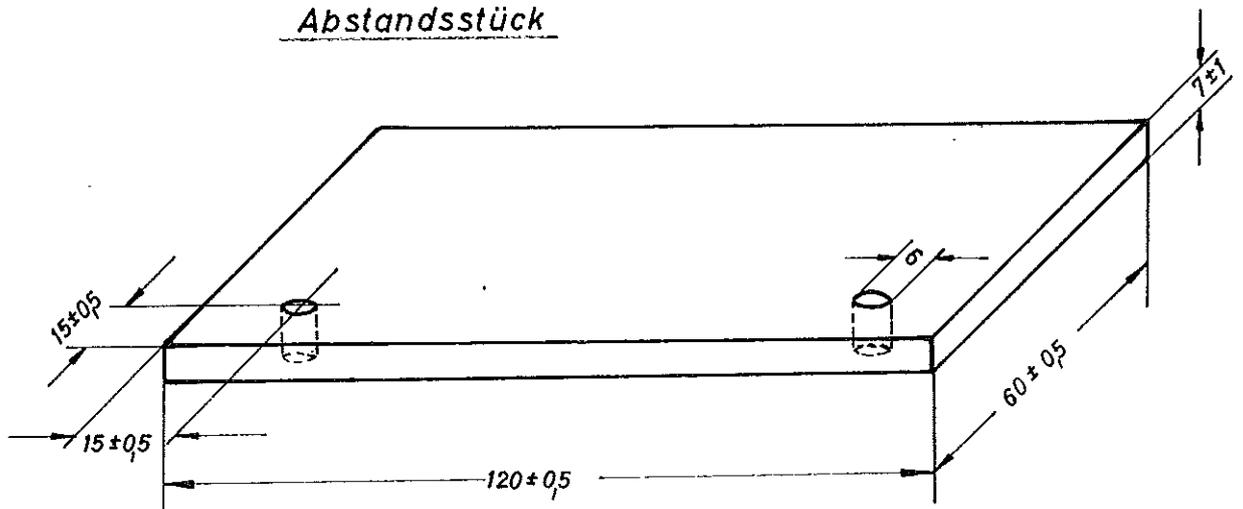
Spulenkörper I

Spulenkörper II

Spulenkörper III



Abstandsstück



Grundplatte

Abb.9 Spulenkörper

Die Spulenkörper wurden mit 0,8 mm Thermofix-Draht bewickelt (Thermofix-Draht ist von zwei Lackschichten umgeben, von denen die äußere unter dem Einfluß von Wärme oder eines Lösungsmittels als Kleber dient), wobei sich die Windungszahl aus der erforderlichen Höhe und dem Bruttodrahtdurchmesser ergab. Nachdem für die erste Spule die Windungszahl festlag, wurde diese für alle weiteren Spulen beibehalten, denn nach (62 a) geht die Windungsfläche am stärksten in den Fehler ein, wogegen ein Fehler der Höhe  $h$ , bedingt durch unvermeidliche Schwankungen der Windungsabstände, nur einen geringen Einfluß hat.

Das Bewickeln der Spulenkörper bereitete anfangs einige Schwierigkeiten. Nach umfangreichen Versuchen erwies sich folgende Methode als die brauchbarste: Die Glaskörper wurden zwischen 2 Aluminiumleisten eingespannt, in die passende Nuten eingefräst waren (Abb. 10).

Die Leisten befanden sich in einer Wickelmaschine und der Draht wurde unter mäßiger Spannung von Hand aufgewickelt. Anschließend wurde die Wicklung mit Azeton bestrichen, wodurch sich die äußere Isolierschicht teilweise auflöste und die Drähte sowohl untereinander als auch mit dem Glaskörper verkittet wurden. Während des Trocknens wurden die Spulen von beiden Seiten eben gepreßt, um eine Formänderung infolge Quellung des Lackes zu verhindern.

Die Unterschiede in den Windungsflächen bei 5 auf diese Weise hergestellten 10-cm-Spulen waren beispielsweise, ohne daß nachträgliche Korrekturen vorgenommen wurden, nicht größer als 1 bis  $2 \cdot 10^{-4}$ . Die Tabelle Abb. 11 zeigt die wesentlichen Daten der wichtigsten Spulen bzw. Spulenpaare.

## 5. Eichung der Spulen

### a. Eichung vor dem Zusammenbau

Da es bei der gewählten Spulenkonstruktion möglich ist, den Absolutwert der Windungsfläche aus den geometrischen Abmessungen mit genügender Genauigkeit (besser als  $10^{-3}$ ) zu berechnen, konnte man sich auf eine Relativeichung beschränken. Die Messung wurde in folgender Weise vorgenommen (Abb. 12):

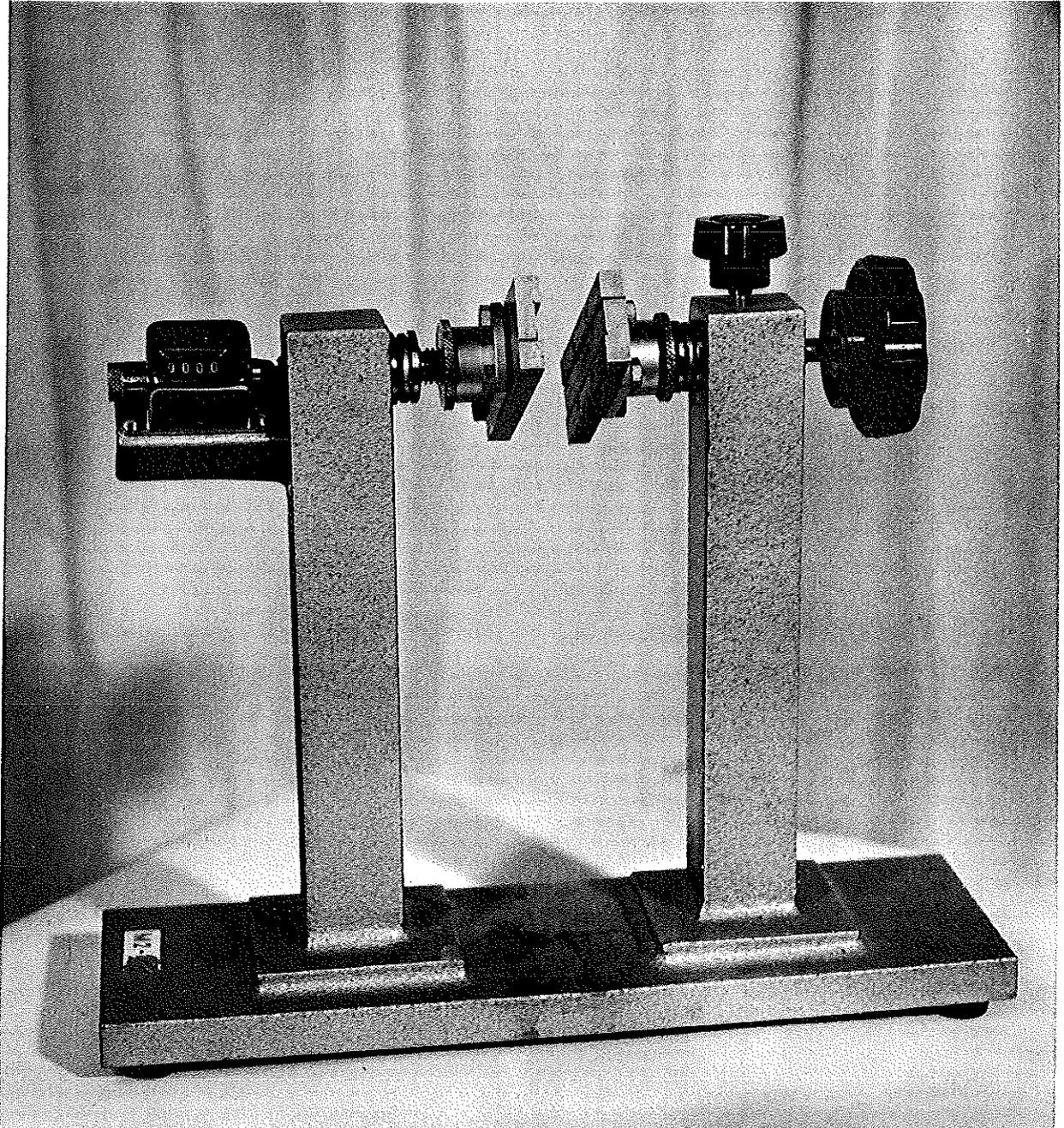
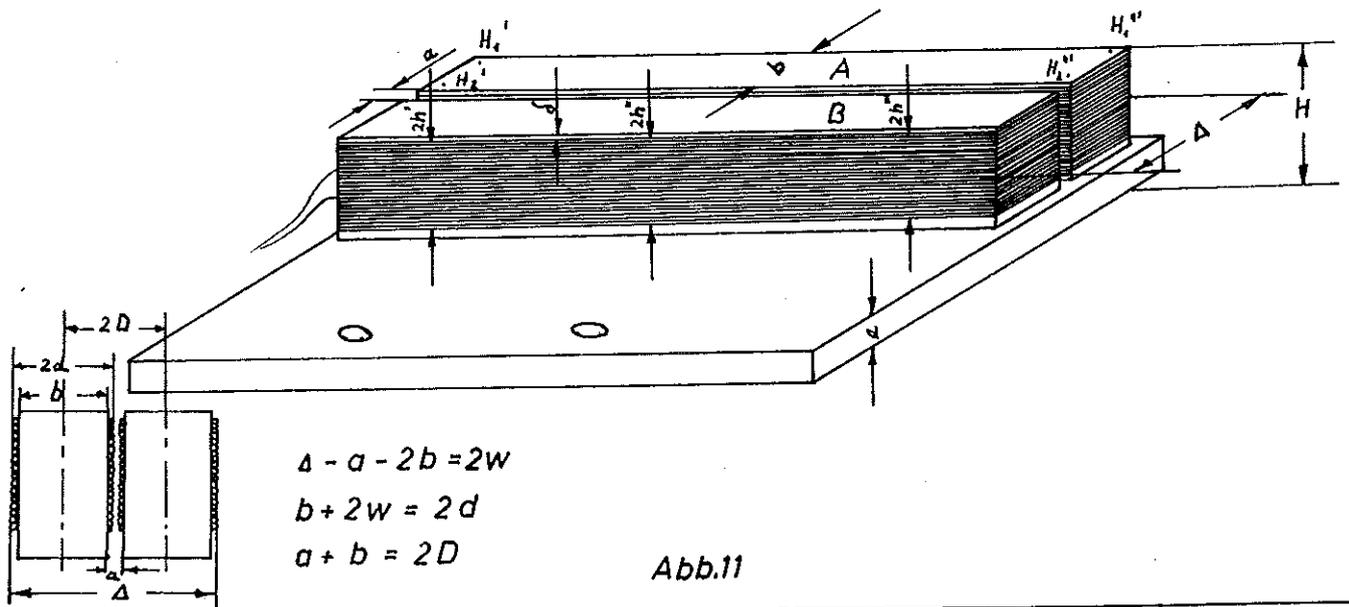


Abb.10

Spulenwickelmaschine

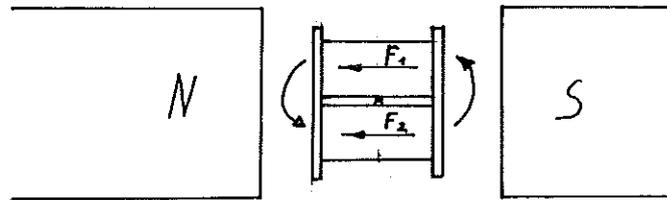
### Tabelle der Spulendaten



	10cm-Spulen		30cm-Spulen		Achsparallelität				Windgszahl. n	
	Sp.A	Sp.B	Sp.A	Sp.B	10cm-Sp.		30 cm-Sp.		10 Sp.	30 Sp.
2h'	17,888	17,950	19,583	19,227	$\Delta_o'$	25,182	a'	2,054	170	143
2h''	17,935	18,075	-	-	$\Delta_u'$	25,177	a''	2,047		
2h'''	17,775	18,125	19,370	19,569	$\overline{\Delta}'$	25,180	a'''	2,047	Spulenbreite 2d	
$\overline{2h}$	17,866	18,050	19,476	19,398	$\Delta_o''$	25,192	$\overline{a}$	2,049	12,195	12,286
$\delta'$	0,112	-	0,781	0,756	$\Delta_u''$	25,182			Achsenabsta. 2D	
$\delta''$	0,062	-	-	-	$\overline{\Delta}''$	25,187			12,990	14,049
$\delta'''$	0,225	-	0,756	0,797	$\Delta_o'''$	25,192	$\Delta_o'$	26,384	Wicklgshöhe. h	
$\overline{\delta}$	0,133	-	0,768	0,776	$\Delta_u'''$	25,186	$\Delta_u'$	26,383	17,958	19,437
H <sub>1</sub> '	26,996	27,008	32,010	32,010	$\overline{\Delta}'''$	25,189	$\overline{\Delta}'$	26,384	Windgsfläche	
H <sub>2</sub> '	26,998	27,035	32,008	32,006	$\Delta$	25,185	$\Delta_o''$	26,367	2077,19 n·cm <sup>2</sup>	5275,72 n·cm <sup>2</sup>
$\overline{H}'$	26,997	27,022	32,009	32,008	a <sub>o</sub> '	0,99	$\Delta_u''$	26,324		
H <sub>1</sub> '''	26,995	27,018	32,018	32,017	a <sub>o</sub> ''	0,99	$\overline{\Delta}''$	26,346		
H <sub>2</sub> '''	26,995	27,038	32,023	32,012	a <sub>o</sub> '''	0,99	$\Delta_o''$	26,300		
$\overline{H}'''$	26,995	27,028	32,020	32,015			$\Delta_u'''$	26,250		
b	12,000	12,000	11,998	12,002			$\overline{\Delta}'''$	26,275		
z	6,992		6,993				$\Delta$	26,335		

alle Angaben in mm / o: oben u: unten

Abb. 12



Beide Spulen werden durch eine gemeinsame Halterung starr miteinander verbunden, und zwar so, daß ihre Windungsflächenvektoren möglichst genau parallel liegen. Hierauf werden die Spulen in einem homogenen magnetischen Gleichfeld so montiert, daß sie um eine gemeinsame Achse in der aus Abb. 12 ersichtlichen Weise kommutiert werden können. Geeignete Anschläge begrenzen den Drehwinkel auf  $180^\circ$ . Werden die Spulen elektrisch so geschaltet, daß sich die in ihnen beim Drehen induzierten Spannungen subtrahieren, so gilt für die resultierende Ausgangsspannung

$$\ddot{u}(t) = \frac{d}{dt} \{ F_1 B_{p1}(t) - F_2 B_{p2}(t) \} \quad (71)$$

wobei  $F_1$  und  $F_2$  die Windungsflächen und  $B_{p1}(t)$  bzw.  $B_{p2}(t)$  die momentanen, zum Windungsflächenvektor parallelen Feldkomponenten bedeuten.

Die Integration von (71) ergibt

$$\int_a^e \ddot{u}(t) dt = F_1 (B_{p1a} - B_{p1e}) - F_2 (B_{p2a} - B_{p2e}) \quad (72)$$

a und e bezeichnen die jeweilige Anfangs- und Endlage.

Bei idealer Geometrie der Spulenhalterung haben die beiden Spulen in der Endlage gegenüber der Anfangslage lediglich ihre Plätze gegenseitig vertauscht, und sie werden vom Feld in entgegengesetzter Richtung durchsetzt. Es gilt dann

$$B_{p2a} = -B_{p1e} \quad (73)$$

und

$$B_{p2e} = -B_{p1a}$$

$$\int_a^e \ddot{u}(t) dt = (F_1 - F_2)(B_{p1a} - B_{p1e})$$

Ist ferner das Feld homogen, so ist

$$B_{p1e} = B_{p1a} = -B \quad (74)$$

und man erhält endgültig

$$\int_a^e \ddot{u}(t) dt = 2B(F_1 - F_2)$$

woraus sich die relative Differenz der Windungsflächen ergibt zu

$$\frac{AF}{F} = \frac{1}{2BF} \int_a^e \ddot{u}(t) dt \quad (75)$$

Bei einer realisierbaren Anordnung läßt sich (73) nicht exakt erfüllen. Erstens ist es aus mechanischen Gründen nicht möglich, die Spule 2 genau an den Ort der Spule 1 zu bringen, weil die Lage der Spulen relativ zur gemeinsamen Drehachse mit gewissen Toleranzen behaftet ist. Dies würde in einem streng homogenen Feld noch nichts ausmachen. Sind jedoch in dem Feld endliche Gradienten vorhanden, so wird aus (73)

$$\begin{aligned} B_{p2a} &= -B_{p1e}(1 - \epsilon_1) \\ B_{p2e} &= -B_{p1a}(1 - \epsilon_2) \end{aligned} \quad (73 a)$$

und damit aus (72)

$$\int_a^e \ddot{u}(t) dt = (F_1 - F_2)(B_{p1a} - B_{p1e} + F_2(\epsilon_1 B_{p1a} - \epsilon_2 B_{p1e}))$$

Näherungsweise kann man wieder (74) anwenden und erhält damit

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{2BF} \int_a^c \ddot{u}(t) dt = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \quad (76)$$

$\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} = \bar{\epsilon}$  ist der Mittelwert der Feldfehler an den beiden Spulenorten. Unter der Voraussetzung, daß dieser Fehler dadurch zustande kommt, daß die Spulen eine falsche Lage haben und infolge der Feldinhomogenität ein anderes Feld sehen, gilt

$$\bar{\epsilon} = \Delta x \cdot \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (77)$$

$\Delta x$  = Abweichung des Ortes der Spule 2 in der Endlage gegenüber dem Ort der Spule 1 in der Anfangslage.

$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x}$  relativer Feldgradient an diesem Ort.

Die Windungsflächendifferenzen sollen auf ca.  $10^{-5}$  genau gemessen werden. Es muß also

$$\frac{\Delta x}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \leq 10^{-5} \quad (78)$$

sein.

Die Ausmessung des Eichmagneten mittels Protonenresonanzen ergab, daß das Feld in dem interessierenden Bereich keinen größeren Gradienten als  $10^{-4} \text{ cm}^{-1}$  aufwies (vergl. Anhang). Daraus ergibt sich die zulässige Ungenauigkeit in der Spulenanbringung zu

$$\Delta x \leq \frac{10^{-5}}{10^{-4}} \text{ cm} = 0,1 \text{ cm} \quad (79)$$

was sich natürlich stets erreichen läßt.

Eine weitere Fehlerquelle ist die Nichtparallelität der beiden Spulenachsen. Sind beide Spulen gegeneinander um den Winkel  $\varphi$

geneigt, so sieht die Spule 1 das Feld B, die Spule 2 nur die Komponente  $B \cos \varphi$ . Der hierdurch entstehende relative Fehler ist

$$\frac{B_2 - B_1}{B} = 1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2} \quad (80)$$

Soll er wieder kleiner als  $10^{-5}$  sein, so muß

$$\varphi^2 < 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\varphi < 4,5 \cdot 10^{-3}$$

Ein Winkel von  $< 4$  m rad bedeutet, daß bei einer Höhe der Spulenkörper von 20 mm deren Abstände oben und unten auf 0,08 mm gleich sein müssen, eine Forderung, die sich bei der Montage mittels eines Meßmikroskops leicht nachprüfen läßt.

Die Integration der Spannung  $u(t)$  wurde mit einem Fluxmeter (Fabrikat Norma, Wien) vorgenommen. Es ist direkt in Maxwell =  $10^{-8}$  V sec geeicht und hat eine Empfindlichkeit von 500 Maxwell/Skt. Bei einer Feldstärke von 7000 Gauss und einer Windungsfläche von  $2000 \text{ cm}^2$  der 10-cm-Spulen erhält man bei Kommutierung um  $180^\circ$  einen Spannungsstoß von 0,3 V sec. Unter Ausnutzung der vollen Empfindlichkeit des Fluxmeters erhält man damit eine Nachweisempfindlichkeit für die Windungsflächen-differenz von

$$\frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ Vsec} \cdot \text{Skt}^{-1}}{3 \cdot 10^{-1} \text{ Vsec}} \approx 2 \cdot 10^{-5} / \text{skt}$$

#### b. Nacheichung

Es zeigte sich in der Praxis, daß (z.B. durch Alterung des Lacks) nach längerer Zeit kleine Änderungen der Windungsfläche eintreten. Da die Spulen nicht mehr einzeln im Eichmagneten miteinander verglichen werden können (die Glasplatte, auf der das Gradientenpaar

verkittet ist, läßt sich im Luftspalt des Magneten nicht mehr kommutieren), mußte ein anderes Eichverfahren angewandt werden: Es besteht die Möglichkeit, die Eichung im Magneten selbst vorzunehmen, und zwar auf folgende Weise (Abb. 13):

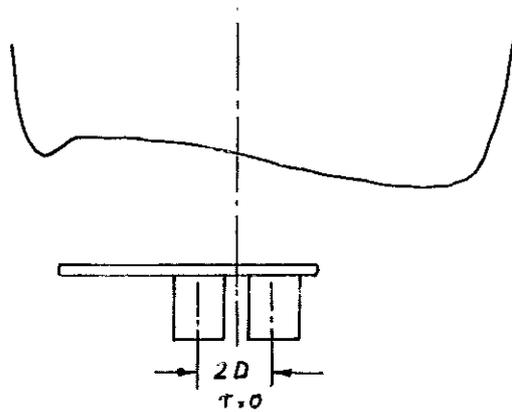


Abb.13

Das Gradientenpaar wird wie bei einer normalen Messung in den Magneten gebracht. Sodann wird zuerst die Spule 1 in einer Schaltung nach Abb. 1 (Feldmessung) gegen eine Referenzspule abgeglichen. Ohne die Potentiometerstellung zu verändern, werden nun die Anschlüsse der Spule 1 gegen die der Spule 2 ausgetauscht. Hierauf wird Spule 2 so lange in Richtung auf die Anfangsposition der Spule 1 bewegt, bis sich der Abgleich bei der gleichen Potentiometerstellung wieder einstellt, d.h. bis die Spannung und damit der Fluß in Spule 2 gleich ist dem in Spule 1. Sind beide Windungsflächen exakt gleich, so ist dabei natürlich eine Verschiebung um den geometrischen Abstand der Spulen  $2D$  erforderlich. Sind Differenzen vorhanden, so ist eine zusätzliche Verschiebung  $\Delta r$  notwendig. Es gilt dann (zur Vereinfachung der Rechnung verlegen wir die Anfangsposition der Spule 1 in den Sollkreis  $r = 0$ ):

$$\phi_1 = F_1 a_0$$

$$\phi_2 = F_2 (a_0 + a_1 \Delta r)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = 0 = a_0 (F_1 - F_2) - F_1 a_1 \Delta r$$

Daraus erhält man

$$\Delta \tau = \frac{a_0}{a_1} \frac{F_1 - F_0}{F_1} = \frac{1}{G} \frac{\Delta F}{F} \quad (81)$$

und der scheinbare Abstand der Spulen wird

$$2D' = 2D + \frac{1}{G} \frac{\Delta F}{F} \quad (82)$$

Grundsätzlich könnte man aus (82) durch eine Serie von Messungen an Feldstellen mit verschiedenen relativen Gradienten (außerhalb des Sollkreises ist  $G = \frac{1}{B_s} \frac{\partial B}{\partial r}$  zu ersetzen durch  $\bar{G} = \frac{1}{B(r)} \frac{\partial B}{\partial r}$  !) den wahren Abstand der elektrischen Spulenachsen sowie die Windungsflächendifferenz  $\frac{\Delta F}{F}$  ermitteln. Dies ist jedoch nicht einmal nötig. Untersucht man nämlich den Einfluß beider Größen, so ergibt sich folgendes:

Nach (61) und (61 b) ist die Flußdifferenz zweier Spulen

$$\Delta \phi = 4dDLN \left\{ \frac{\partial B}{\partial r} + \delta^x \right\}$$

$$\frac{\Delta \phi}{2DF} \approx \frac{\partial B}{\partial r} \left\{ 1 + \frac{\delta^x}{a_1} \right\}$$

wenn man in der Klammer für  $\frac{\partial B}{\partial r}$  die Näherung  $a_1$  einsetzt. Man erhält damit

$$\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\Delta \phi}{2FD(1 + \frac{\delta^x}{a_1})} \quad (83)$$

Für  $\frac{\delta^x}{a_1}$  erhält man nach (62 a), (62 b), (62 c) und (67)

$$\frac{\delta^x}{a_1} \approx \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{1}{2D} \frac{\Delta F}{F} = \frac{1}{G(0)} \cdot \frac{1}{2D} \cdot \frac{\Delta F}{F}$$

und

$$\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\Delta \phi}{2FD \left( 1 + \frac{1}{G(0)} \cdot \frac{1}{2D} \cdot \frac{\Delta F}{F} \right)} \quad (84)$$

Unter Verwendung von (82) ergibt dies:

$$\frac{\delta B}{\delta \nu} \approx \frac{\Delta \phi}{2F D'} \quad (85)$$

Es ist also auch bei allen Absolutmessungen nach Kap. I einfach  $D$  durch das gemessene  $D'$  zu ersetzen. Die Messung von  $D'$  wird zweckmäßigerweise unmittelbar vor oder nach der Messung von  $G(0)$  vorgenommen.

### III. Der Integrator

Es gibt eine Reihe elektronischer Integrationsverfahren, auf die hier im einzelnen nicht näher eingegangen werden soll (vergleiche z.B. K 1). Für unsere Zwecke wurde der (schon beinahe klassischen) Integrationschaltung nach Miller der Vorzug gegeben, da sie bezüglich Zuverlässigkeit und Stabilität den meisten anderen Schaltungen überlegen ist.

Obwohl das Prinzip des Miller-Integrators seit langem bekannt ist, sollen im folgenden noch einmal kurz die wesentlichen Formeln abgeleitet werden. Während in den meisten Fällen bei der Rechnung ein idealer Verstärker zugrunde gelegt wird, muß für unseren Zweck auch das Verhalten des Verstärkers bei verschiedenen Frequenzen im Hinblick auf Verstärkung und Phasendrehung berücksichtigt werden (Abb. 14 a):

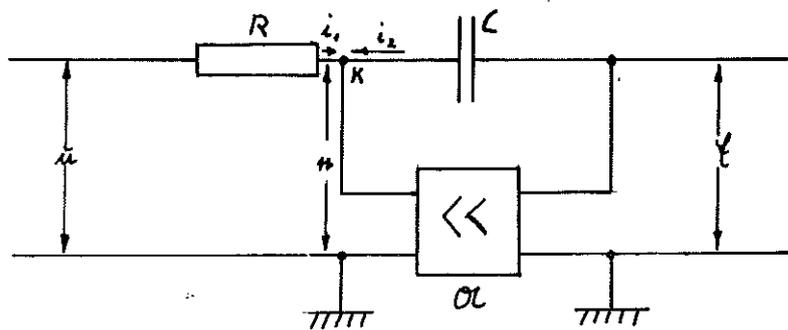


Abb.14 a

Die zu integrierende Spannung  $\ddot{u}$  treibt einen Strom durch den Widerstand R. Bei Vernachlässigung des Gitterableitwiderstandes der Verstärkereingangsstufe lädt dieser Strom im wesentlichen den Kondensator C auf. Für die einzelnen Ströme und Spannungen, sowie für die Ladung Q des Kondensators gilt:

$$i_1 = \frac{1}{R}(\ddot{u} - n) \quad Q = C(\xi - n) \quad (86)$$

$$i_2 = \frac{dQ}{dt} \quad \xi = \alpha n$$

Im Knoten K muß die Summe der Ströme Null sein, also

$$i_2 = -i_1$$

$\frac{1}{R}(\ddot{u} - n) = -C \frac{d}{dt}(\xi - n)$   
Ersetzt man noch n durch  $\frac{\xi}{\alpha}$ , so erhält man

$$\ddot{u} - \frac{\xi}{\alpha} = RC \frac{d}{dt} \left( \frac{\xi}{\alpha} - \xi \right) \quad (87)$$

$$\ddot{u} = \frac{\xi}{\alpha} + RC \frac{d}{dt} \frac{\xi}{\alpha} (1 - \alpha) \quad (88)$$

$$= \left[ 1 + RC(1 - \alpha) \frac{d}{dt} \right] \frac{\xi}{\alpha} \quad (89)$$

Das Verhältnis

$$\frac{\xi}{\ddot{u}} = \frac{\alpha}{RC(1 - \alpha) \frac{d}{dt} + 1} \quad (90)$$

bezeichnet man als die Übertragungsfunktion des Integrators.

Setzt man in (88) einmal  $\ddot{u} = 0$ , so sieht man sofort, daß

$\alpha = -A$  sein muß, da sonst ein exponentielles Anwachsen von  $\xi$  eintreten würde. Ferner ergibt sich durch Integrations von (89)

$$\int \ddot{u} dt = -\frac{1}{A} \int \xi dt - RC \frac{1+A}{A} \xi \quad (91)$$

Wenn

$$\frac{1}{A} \int \xi dt \ll \frac{1+A}{A} RC \xi \quad (92)$$

ist, gilt näherungsweise

$$\xi \approx -\frac{1}{RC} \int \ddot{u} dt \quad (93)$$

Zur Abschätzung des Fehlers gehen wir von dem für uns allein interessanten Spezialfall sinusförmiger Wechselspannungen aus. Wir setzen

$$\tilde{u} = u e^{i\omega t} \quad (94)$$

Dann wird

$$\int \tilde{u} dt = \frac{u}{i\omega} e^{i\omega t} \quad (95)$$

Setzt man dies in (93) ein, so erhält man

$$\xi \approx - \frac{1}{i\omega RC} u e^{i\omega t} \quad (96)$$

Dies ist wegen (92) nur eine Näherung. Wir führen nun einen relativen Amplitudenfehler  $\delta$  und einen Phasenfehler  $\epsilon$  ein, indem wir schreiben

$$\xi = - \frac{u}{i\omega RC} (1 + \delta) e^{i(\omega t + \epsilon)} \quad (97)$$

Hieraus erhält man das Verhältnis

$$\frac{\xi}{\tilde{u}} = - \frac{1}{i\omega RC} (1 + \delta) e^{i\epsilon} \quad (98)$$

Dies ist zu vergleichen mit der exakten Übertragungsfunktion (90), wobei der Operator  $\frac{d}{dt}$  in unserem Falle sinusförmiger Wechselspannungen die Multiplikation mit  $i\omega$  bedeutet. Durch den Ansatz

$$\alpha = -A e^{i\alpha} \quad (99)$$

ist ferner noch die Phasendrehung im Verstärker zu berücksich-

tigen. Man erhält dann durch Gleichsetzung von (90) und (98)

$$-\frac{1}{2RC\omega} (1+d) e^{iE} = -\frac{A e^{i\alpha}}{2\omega RC(1+Ae^{i\alpha})+1}$$

$$(1+d) e^{iE} = \frac{A e^{i\alpha}}{1+Ae^{i\alpha} - \frac{2}{\omega RC}} \quad (100)$$

Dies läßt sich umformen in

$$(1+d) e^{iE} = \frac{A \left\{ (A + \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\omega RC}) + i \left( \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\omega RC} \right) \right\}}{1 + 2A \cos \alpha + A^2 - \frac{1}{\omega RC} \left( 2A \sin \alpha - \frac{1}{\omega RC} \right)} \quad (101)$$

Durch Quadrieren findet man

$$(1+d)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{A} \left[ \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2} \right) + 2 \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\omega RC} \right) \right]}$$

und unter der Voraussetzung, daß

$$\frac{1}{A} \left[ \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2} \right) + 2 \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\omega RC} \right) \right] \ll 1$$

$$1+d = 1 - \frac{1}{2A} \left[ \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2} \right) + 2 \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\omega RC} \right) \right] \quad (102)$$

$$d = -\frac{1}{2A} \left[ \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2} \right) + 2 \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\omega RC} \right) \right]$$

Der Phasenfehler der Integration ergibt sich aus (101) zu

$$\operatorname{tg} E = \frac{\cos \alpha + \omega RC \sin \alpha}{\omega RC (A + \cos \alpha) - \sin \alpha} \quad (103)$$

Zur Dimensionierung des Integrators ist der ungünstigste Fall anzunehmen. Dieser liegt vor, wenn eine Absolutmessung des Gradienten bei der kleinsten, mit dem Integrator zu messenden Feldstärke, nämlich bei 100 Gauss, vorgenommen werden soll.

Da nach (93) die Ausgangsspannung des Integrators proportional  $1/RC$  ist, muß  $RC$  so gewählt werden, daß noch ein ausreichendes Signal vorhanden ist. Nach dem unter (A I 2 a) gesagten kommt für die Messung bei 100 Gauss nur die Schaltung nach Abb. 2 infrage. Die hiermit erzielbare Ausgangsspannung bei einem Fehlableich, der einem Gradientenfehler von  $10^{-3}$  entspricht, beträgt nach (20 c)

$$\Delta U = \frac{1}{25} \frac{F}{RC} \cdot 100 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-3} \approx 4 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{F}{RC} \text{ Volt} \quad (104)$$

Die 10 cm langen Spulen haben eine Windungsfläche von  $F = 2000 \text{ cm}^2$ , also wird

$$\Delta U = 8 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{RC} \text{ Volt} \quad (105)$$

Wie im Anschluß unter "Meßpraxis" gezeigt werden wird, ist vorgesehen, diese Ausgangsspannung auf das Zeitplattensystem eines Kathodenstrahloszilographen (Tektronix 545) zu geben. Dieses System hat eine maximale Ablenkempfindlichkeit von 0,165 Volt/cm. Man kann nun bei genügend scharfem Strahl eine Auslenkung von ca. 0,25 mm gerade noch unterscheiden, wofür eine Spannung von ungefähr 4 mV benötigt wird. Um ohne weitere Verstärker auskommen zu können (jeder zusätzliche Verstärker enthält auch zusätzliche Fehlerquellen), muß also  $RC$  so klein gewählt werden, daß  $\Delta U = 4 \text{ mV}$  ist.

Dies ergibt nach (105)

$$(RC)_{\min} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ sec} \quad (105 \text{ a})$$

Nach (102) kann man nunmehr den Verstärkungsfaktor  $A$  und den zulässigen Phasenwinkel  $\alpha$  des Integrationsverstärkers bestim-

men, wenn der zulässige relative Integrationsfehler  $\delta$  vorgegeben ist.

Für eine Abschätzung des  $\delta$  darf man nicht vom idealen Feld, wie es sich durch (11), (12) und (13) beschreiben läßt, ausgehen. Wie bereits dort gesagt, treten durch die Nichtlinearitäten des Eisens Abweichungen von der Sinusform des Magnetfeldes (bei sinusförmiger Erregung) auf, die von Ort zu Ort verschieden sind. Da es sich hierbei um eine Abschätzung handelt, soll im Interesse der Übersichtlichkeit der Rechnung davon ausgegangen werden, daß das "gestörte" Feld außer der Grundfrequenz  $\omega$  nur einen geringen Anteil der Frequenz  $2\omega$  enthält. Es gilt dann für die Felder am Ort der Spulen

$$B_1(t) = \frac{\hat{B}}{2} \left(1 - G \frac{d}{2}\right) \left[ 1 - (1 + \epsilon_{11}) e^{i(\omega t + \varphi_{11})} + a_2 (1 + \epsilon_{12}) e^{i(2\omega t + \varphi_{12})} \right] \quad (106)$$

$$B_2(t) = \frac{\hat{B}}{2} \left(1 + G \frac{d}{2}\right) \left[ 1 - (1 + \epsilon_{21}) e^{i(\omega t + \varphi_{21})} + a_2 (1 + \epsilon_{22}) e^{i(2\omega t + \varphi_{22})} \right]$$

$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{11}, \epsilon_{22} \\ \epsilon_{21}, \epsilon_{12} \end{array} \right\}$  = relative Amplitudenabweichungen an den Stellen  
 1 und 2 bei 50  
 und 100 Hz, bezogen auf den Wert am Sollkreis.  
 $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{22}$  = die entsprechenden Phasenabweichungen  
 $a_2$  = relative Amplitude der Harmonischen.

$\hat{B}_s$  = Scheitelwert der Sollkreisfeldstärke.

Bei unserem Magneten ist zu erwarten, daß der Sinus nur in ganz geringem Maße gestört wird, da wir nur sehr wenig in die Sättigung aussteuern. Aus diesem Grunde kann vorausgesetzt werden, daß sowohl die Phasenwinkel der Grundwelle als auch deren Amplitudenfehler in ihrer Abhängigkeit vom Radius zu vernachlässigen sind. Wir können daher  $\epsilon_{11} = \epsilon_{21} = \epsilon$  und  $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$  setzen und brauchen nur die Fehler der Oberwelle zu berücksichtigen.

Wir bilden weiter  $B_1 - k B_2$  und erhalten als Integratoreingangsspannung

$$\tilde{u} = - F \frac{d}{dt} (B_1 - k B_2) \quad (107)$$

Unter der Voraussetzung, daß man, z.B. mit Peaking-Strips, die Integrationskonstante, die bei der Differentiation verloren geht, wieder gewinnt, erhält man als Integratorausgangsspannung näherungsweise

$$f(t) \approx \frac{F}{RC} (B_1 - k B_2) \quad (108)$$

Exakt ist nun allerdings jeder Frequenzanteil von (108) mit dem Faktor  $[1 + \delta(\omega)] e^{i\gamma(\omega)}$  zu multiplizieren. Setzt man den so modifizierten Ausdruck (108) gleich Null, so ergibt sich daraus daß  $k$  zu

$$k(d_1, d_2, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{(1 - G \frac{d}{dt}) [1 - (1 + \epsilon)(1 + d_1) e^{i(\omega t + \gamma_1)} + a_1 (1 + \epsilon_{12})(1 + d_2) e^{i(2\omega t + \gamma_{12} + \gamma_2)}]}{(1 + G \frac{d}{dt}) [1 - (1 + \epsilon)(1 + d_1) e^{i(\omega t + \gamma_1)} + a_2 (1 + \epsilon_{22})(1 + d_2) e^{i(2\omega t + \gamma_{22} + \gamma_2)}]} \quad (109)$$

$d_1; \gamma_1$  = Amplituden- und Phasenfehler des Integrators für 50 Hz

$d_2; \gamma_2$  = Amplituden- und Phasenfehler des Integrators für 100 Hz

Wir vergleichen diesen Wert  $k(d_1, d_2, \gamma_1, \gamma_2)$  mit dem Wert  $k(0, 0, 0, 0)$ , den wir bei idealer Integration erhalten würden und bilden

$$\Delta k = k(d_1, d_2, \gamma_1, \gamma_2) - k(0, 0, 0, 0) \quad (110)$$

$$\Delta k = \frac{(1 - G \frac{d}{2}) [1 - (1 + \epsilon)(1 + d_1) e^{i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 (1 + \epsilon_{12})(1 + d_2) e^{i(2\omega t + \varphi_{12} + \varphi_2)}]}{1 + G \frac{d}{2} [1 - (1 + \epsilon)(1 + d_1) e^{i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 (1 + \epsilon_{22})(1 + d_2) e^{i(2\omega t + \varphi_{22} + \varphi_2)}]}$$

$$= \frac{(1 - G \frac{d}{2}) [1 - (1 + \epsilon) e^{i(\omega t)} + a_2 (1 + \epsilon_{12}) e^{i(2\omega t + \varphi_{12})}]}{(1 + G \frac{d}{2}) [1 - (1 + \epsilon) e^{i(\omega t)} + a_2 (1 + \epsilon_{22}) e^{i(2\omega t + \varphi_{22})}]}$$

$$\Delta k = \frac{Z(d)}{N(d)} - \frac{Z(\sigma)}{N(\sigma)} \quad (111)$$

$$\Delta k = \frac{Z(d)N(\sigma) - Z(\sigma)N(d)}{N(\sigma)N(d)} \quad (111 a)$$

Worauf es in diesem Zusammenhang ankommt, ist, einen näherungsweisen Wert für die Größe  $\frac{\Delta k}{k}$  zu erhalten. Da sich  $k$ ,  $N(0)$  und  $N(d)$  nur wenig von der Einheit unterscheiden, ist  $\frac{\Delta k}{k}$  ungefähr gleich der Differenz im Zähler von (111 a). Man erhält dafür

$$\frac{\Delta k}{k} \approx (1 - \frac{d}{2} G)(1 + \frac{d}{2} G) \left\{ [1 - (1 + \epsilon)(1 + d_1) e^{i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 (1 + \epsilon_{12})(1 + d_2) e^{i(2\omega t + \varphi_{12} + \varphi_2)}] \right. \\ \left. \times [1 - (1 + \epsilon) e^{i(\omega t)} + a_2 (1 + \epsilon_{22}) e^{i(2\omega t + \varphi_{22})}] \right\}$$

$$- [1 - (1 + \epsilon) e^{i\omega t} + a_2 (1 + \epsilon_{12}) e^{i(2\omega t + \varphi_{12})}] [1 - (1 + \epsilon)(1 + d_1) e^{i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 (1 + \epsilon_{22})(1 + d_2) e^{i(2\omega t + \varphi_{22} + \varphi_2)}]$$

Setzt man den Faktor vor der geschweiften Klammer ebenfalls gleich eins, so erhält man nach Durchführung aller Zwischenrechnungen unter Vernachlässigung von Produkten 3. Ordnung in den Fehlern, und indem man die e-Potenzen entwickelt:

$$\frac{\Delta k}{k} = -a_2 [(\epsilon_{22} + i\varphi_{22}) - (\epsilon_{12} + i\varphi_{12})] \left\{ (d_2 + i\varphi_2) e^{i2\omega t} + [(d_1 + i\varphi_1) - (d_2 + i\varphi_2)] e^{i3\omega t} \right\} \quad (112)$$

Der Vollständigkeit halber sei hinzugefügt (vergleiche Seite 39 unten), daß, wenn man die Veränderlichkeit des  $\epsilon$  und  $\varphi$  der Grundwelle nicht vernachlässigt, ein Glied

$$(\delta_1 + i\gamma_1)[(\varepsilon_{11} + i\gamma_{11}) - (\varepsilon_{21} + i\gamma_{21})]e^{i\omega t}$$

hinzukommt. Durch Messung am Magneten konnte nachgewiesen werden, daß die in [ ] stehende Differenz bereits kleiner als  $10^{-5}$ , also für jedes  $\delta < 1$  zu vernachlässigen ist.

Ebenso konnte durch Messung festgestellt werden, daß der Faktor

$$a_2[(\varepsilon_{22} + i\gamma_{22}) - (\varepsilon_{12} + i\gamma_{12})] < 2 \cdot 10^{-5}$$

ist. (Die Messung lag zum Zeitpunkt dieser Niederschrift nur für das D-Modell vor, es ist aber für das F-Modell kein grundsätzlich anderes Ergebnis zu erwarten.) Um auch in ungünstigen Fällen (z.B. bei höherer Aussteuerung, welche infolge Sättigung im Eisen höhere Oberwellenanteile zur Folge hätte) noch genügend Sicherheit zu haben, fordert man

$$|\frac{\Delta k}{k}| \leq 10^{-4} \{ (\delta_2 + i\gamma_2)e^{i2\omega t} + [(\delta_1 + i\gamma_1) - (\delta_2 + i\gamma_2)]e^{i3\omega t} \}$$

Geht man nunmehr bei der Auslegung des Integrators vom ungünstigsten Fall der Schaltung nach Abb. 3 aus, so ergibt sich ein zulässiger k-Fehler von  $10^{-5}$  und damit

$$(\delta_2 + i\gamma_2)e^{i2\omega t} + [(\delta_1 + i\gamma_1) - (\delta_2 + i\gamma_2)]e^{i3\omega t} < 10^{-1} \quad (113)$$

Da in dieser Rechnung höhere Oberwellen nicht berücksichtigt sind, man jedoch erwarten kann, daß noch einige, jedoch sicher nicht mit größerer Amplitude, auftreten, ist es zweckmäßig, wenn alle

$$\begin{aligned} \delta_v &< 10^{-2} \\ \gamma_v &< 10^{-2} \end{aligned} \quad (114)$$

Nach (102) und (103) verschwindet der frequenzabhängige Teil von  $\delta_V$  wie  $\frac{1}{\omega_V^2}$  und der von  $\gamma_V$  wie  $\frac{1}{\omega_V}$ . Es sind also alle Bedingungen erfüllt, wenn (114) für die Grundfrequenz gilt.

Der von uns entwickelte Integrationsverstärker (Schaltung Abb. 14) hat bei 50 Hz eine Verstärkung von  $A = 2 \cdot 10^4$  bei einem  $\text{tg} \alpha \approx 2 \cdot 10^{-1}$ . Damit wird nach (102) und (103)

$$\delta_0 \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \qquad \gamma_0 \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

Integrationsfehler können also vernachlässigt werden.

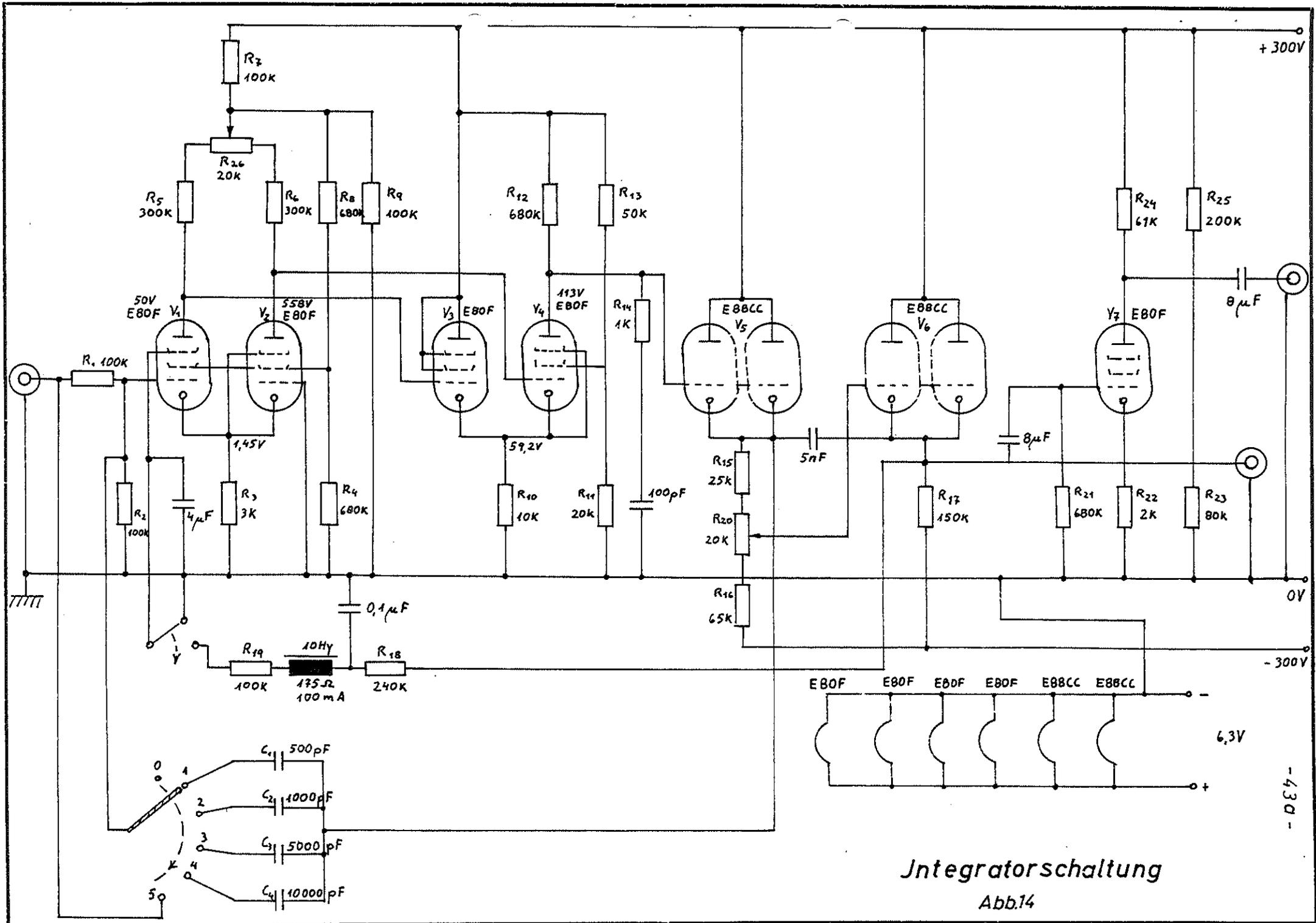
#### IV. Meßpraxis

##### 1. Einführung der Integrationsgrenzen

Der Integrator liefert grundsätzlich bei jeder Messung ein unbestimmtes Integral, welches nur den zeitlich veränderlichen Teil des Magnetfeldes bzw. irgendwelcher Magnetfelddifferenzen enthält. In Wahrheit interessiert man sich jedoch in jedem Fall für ein bestimmtes Integral, nämlich für den Wert von

$$n(t_0, t_1) = \mathcal{L}(t_1) - \mathcal{L}(t_0) = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_1} \ddot{u}(t) dt \qquad (115)$$

bei vorgegebenen Feldstärken. Als untere Integrationsgrenze ist



Integratorschaltung  
Abb.14

- 037 -

dann im allgemeinen der Zeitpunkt zu wählen, bei dem die Feldstärke am Sollkreis durch Null geht, als obere Grenze der Zeitpunkt, zu dem eine bestimmte Feldstärke zwischen Null und der maximalen Feldstärke erreicht ist. Man muß also entweder aus dem Feld selbst oder indirekt aus dem Strom ein Signal gewinnen, welches anzeigt, daß diese Feldstärke durchlaufen wird.

Im Falle  $t_0$  ist dies sehr einfach: Man bringt eine Peaking-Strip (ausführliche Beschreibung erfolgt in Kap. B) so auf dem Sollkreis an, daß seine Längsachse in die z-Richtung des Feldes zeigt. Eine kleine, um den Strip gelegte Induktionsspule gibt ein Signal, wenn das Magnetfeld H praktisch durch Null geht (man erhält einen kleinen, aber zu vernachlässigenden Fehler infolge der endlichen Koerzitiv-Feldstärke des Peaking-Strip-Materials). Gibt man diesem Peaking-Strip eine Vormagnetisierung, so kann man bis zu einigen 100 Gauss auch höhere Felder anzeigen, jedoch bei mittleren und hohen Feldstärken lassen sich die erforderlichen Kompensationsfelder nicht mehr auf einfache Weise realisieren. Um auch bei diesen Feldern ein Signal zu erhalten, kann man entweder einen Peaking-Strip ins Streufeld geben oder man läßt den Magnetstrom durch eine Luftspule fließen, in welcher sich ein Peaking-Strip mit einer Vormagnetisierungsspule befindet. Dies stellt praktisch eine Art Stromdiskriminator dar, der bei einer beliebigen, durch die Vormagnetisierung des Peaking-Strip vorherbestimmbaren Stromstärke einen Impuls geben kann. Beide Verfahren wurden angewandt.

Der Vorgang der Messung soll am Beispiel einer  $G(r)$ -Messung erläutert werden (Abb. 15):

Meßanordnung für Messungen mit Integrationsspulen.

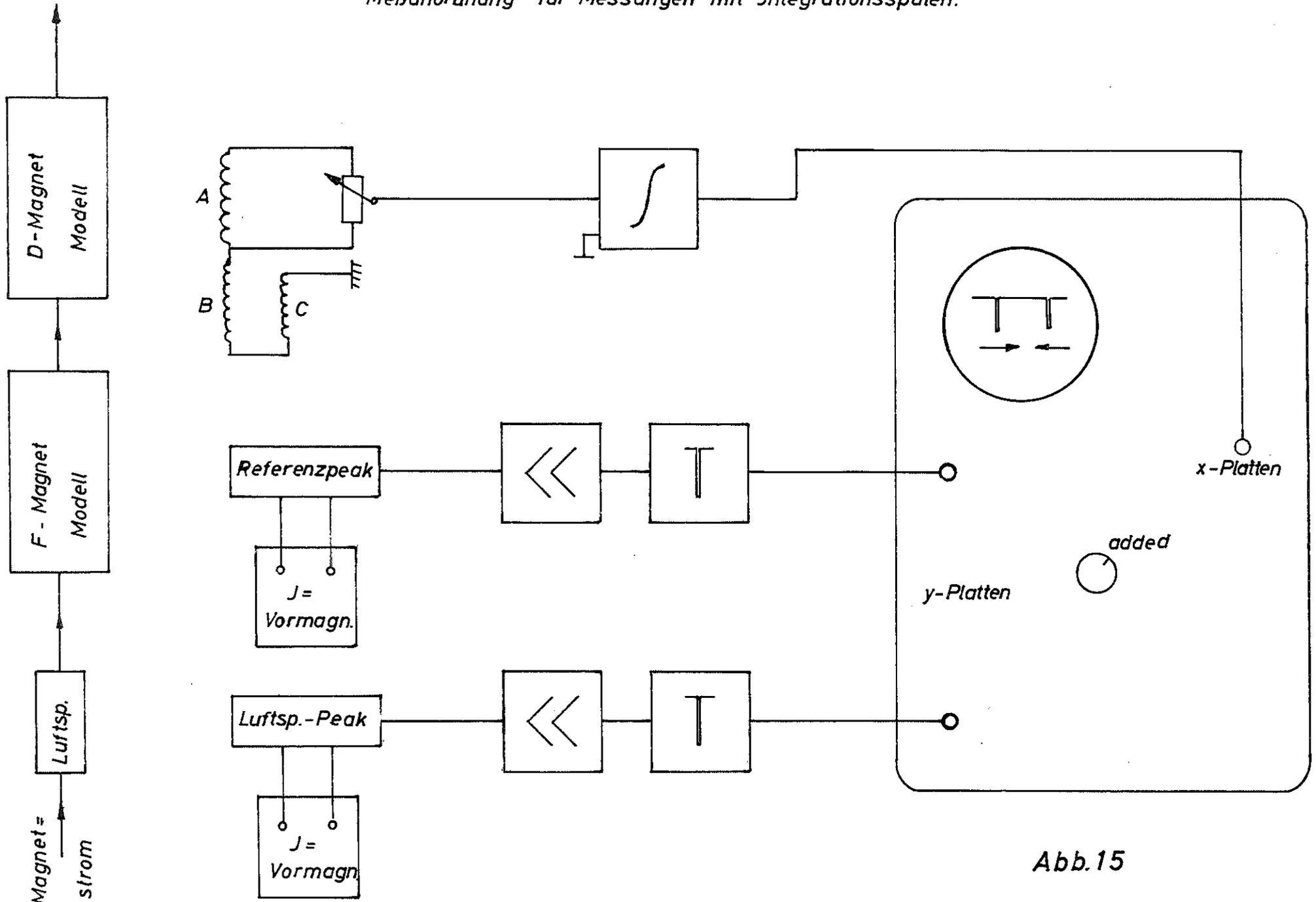


Abb.15

Abb. 15 siehe ganzseitige Abbildung.

Die beiden Meßspulen befinden sich im Magnetfeld und sind nach Abb. 4 mit dem Spannungsteiler, einer Referenzspule und dem Integrator zusammengeschaltet. Die Integrator-Ausgangsspannung  $\mathcal{L}(t)$  wird auf den Eingang für äußere Zeitablenkung eines Kathodenstrahl-Oszillographen ("External Sweep" am Tektronix 545) gegeben. Die Impulse der beiden Peaking-Strips werden getrennt verstärkt und Diskriminatoren zugeführt, welche an ihren Ausgängen Rechteckimpulse gleichmäßiger Form liefern. Diese beiden Impulse werden auf die Eingänge eines Summen- oder Zweistrahl-Einschubs des Oszillographen gegeben. Sie erscheinen im allgemeinen auf dem Schirm an zwei verschiedenen Stellen. Da die x-Platten-Ablenkung proportional der Integrator-Ausgangsspannung  $\mathcal{L}(t)$  ist, lassen sich durch Verändern des Spannungsteiler-Verhältnisses  $k$  beide Impulse zur Deckung bringen. Für diesen Fall gilt

$$\mathcal{L}(t_1) = \mathcal{L}(t_0)$$

bzw.

$$u(t_0, t_1) = \mathcal{L}(t_1) - \mathcal{L}(t_0) = 0 \quad (115 a)$$

womit also der erforderliche Abgleich erreicht ist.

Nach dem gleichen Prinzip werden auch alle übrigen Messungen durchgeführt, wobei die so gewonnenen k-Werte auf die unter A I gezeigte Weise ausgewertet werden.

Eine Schwierigkeit besteht bezüglich der unteren Integrationsgrenze: Bei der Ableitung der Formeln in Abschnitt I wurde bereits darauf hingewiesen, daß für  $B_s = 0$  nicht notwendigerweise auch der Gradient zum gleichen Zeitpunkt verschwindet. Außerdem ist unter Betriebsbedingungen das Minimumfeld meistens positiv, so daß man die untere Integrationsgrenze auf ca. 40 Gauss festlegen muß, wobei auf jeden Fall ein endlicher Gradient vorhanden ist. Ist der Feldverlauf bei 40 Gauss aus anderen Messungen bekannt, so läßt sich der hierdurch verursachte Fehler auf folgende Weise berechnen:

a) Für den radialen Gradientenverlauf  $\frac{\Delta G}{G}(r)$ :

Unter Vernachlässigung des geometrischen Fehlers gilt für die Flußdifferenz eines Gradienten-Spulenpaares nach (55)

$$\Delta \phi(r) = 2 DF \frac{dB}{dr}(r)$$

was einer Spannungsdifferenz

$$\Delta U = -2 DF \frac{d}{dt} \frac{dB}{dr}(r)$$

entspricht. Diese wird nach (A I 2 b) mit der Referenzspannung verglichen und anschließend integriert. Für die Ausgangsspannungsdifferenz des (hier idealen) Integrators gilt

$$u(r, t_0, t_1) = \frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_1} \left[ 2 DF \frac{d}{dt} \frac{dB}{dr}(r, t) - k(r, t) F_{ref} \frac{dB_{ref}}{dt} \right] dt \quad (116)$$

und mit  $u = 0$

$$2 DF \left[ \frac{dB}{dr}(r, t_1) - \frac{dB}{dr}(r, t_0) \right] = k(r) [B_{ref}(t_1) - B_{ref}(t_0)] \cdot F_{ref} \quad (117)$$

Subtrahiert man von (117) den gleichen Ausdruck mit  $r = 0$  und dividiert die Differenz durch denselben, so ergibt sich

$$\frac{\Delta k(r)}{k(0)} = \frac{\frac{dB}{dr}(r, t_1) - \frac{dB}{dr}(r, t_0) - \frac{dB}{dr}(0, t_1) + \frac{dB}{dr}(0, t_0)}{\frac{dB}{dr}(0, t_1) - \frac{dB}{dr}(0, t_0)} \quad (118)$$

Nun ist, wie man leicht nachrechnet

$$\frac{dB}{dr}(r, t_1) - \frac{dB}{dr}(0, t_1) = B(0, t_1) G(0, t_1) \frac{\Delta G}{G}(r, t_1) \quad (119)$$

$$\frac{dB}{dr}(r, t_0) - \frac{dB}{dr}(0, t_0) = B(0, t_0) G(0, t_0) \frac{\Delta G}{G}(r, t_0)$$

$$\frac{dB}{dr}(0, t_1) = B(0, t_1) G(0, t_1) \quad (120)$$

$$\frac{dB}{dr}(0, t_0) = B(0, t_0) G(0, t_0)$$

Setzt man dies in (118) ein, so wird daraus

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{B(0, t_1) G(0, t_1) \frac{\Delta G}{G}(r, t_1) - B(0, t_0) G(0, t_0) \frac{\Delta G}{G}(r, t_0)}{B(0, t_1) G(0, t_1) - B(0, t_0) G(0, t_0)}$$

und nach Auflösung nach  $\frac{\Delta G}{G}(r, t_1)$

$$\frac{\Delta G}{G}(r, t_1) = \frac{\Delta k}{k}(r, t_1) - \frac{B(0, t_0) G(0, t_0)}{B(0, t_1) G(0, t_1)} \left[ \frac{\Delta k}{k}(r, t_1) - \frac{\Delta G}{G}(r, t_0) \right] \quad (121)$$

b) Für den Absolutwert des Gradienten  $G(0)$ :

Stehen die Spulen beiderseits des Sollkreises im Abstand  $\pm D$ , so gilt

$$\begin{aligned} B_1 &= B(0) (1 - GD) \\ B_2 &= B(0) (1 + GD) \end{aligned} \quad (122)$$

Schaltet man die Spulen nach Abb. 1 zur Gradienten-Messung, so erhält man für  $n(t_0, t_1) = 0$

$$\frac{F}{RC} \int_{t_0}^{t_1} [\dot{B}_1 - k \dot{B}_2] dt = 0 \quad (123)$$

woraus folgt

$$B_1(t_1) - B_1(t_0) = k [B_2(t_1) - B_2(t_0)] \quad (124)$$

und nach Einsetzen (122)

$$B(\sigma, t_1) [1 - G(t_1) D] - B(\sigma, t_0) [1 - G(t_0) D] = k \left\{ B(\sigma, t_1) [1 + G(t_1) D] - B(\sigma, t_0) [1 + G(t_0) D] \right\}$$

woraus man durch geeignete Zusammenfassung erhält

$$G(t_1) = \frac{1}{D} \frac{1-k}{1+k} \left( 1 - \frac{B(\sigma, t_0)}{B(\sigma, t_1)} \right) + \frac{B(\sigma, t_0)}{B(\sigma, t_1)} G(t_0) \quad (125)$$

Nach (20) ist

$$\frac{1}{D} \frac{1-k}{1+k} = G'(\sigma)$$

der unkorrigierte G-Wert, so daß man endgültig erhält

$$G(\sigma, t_1) = G'(\sigma, t_1) - \frac{B(\sigma, t_0)}{B(\sigma, t_1)} [G'(\sigma, t_1) - G(\sigma, t_0)] \quad (126)$$

In dieser Form gilt die Korrektur auch für Messungen nach Abb. 3.

## 2.) Meßgestell und Meßplatz

Alle für diese Messungen erforderlichen Geräte sind in einem Meßgestell (Abb. 16 + 17) zusammengefaßt. Den Verdrahtungsplan zeigt Abb. 18. In der Stellung I des Schalters S wird eine Schaltung nach Abb. 1 realisiert. Referenz- und Feldmeßspule sind an den entsprechend bezeichneten Buchsen angeschlossen. Es kann B (r, y) gemessen werden.

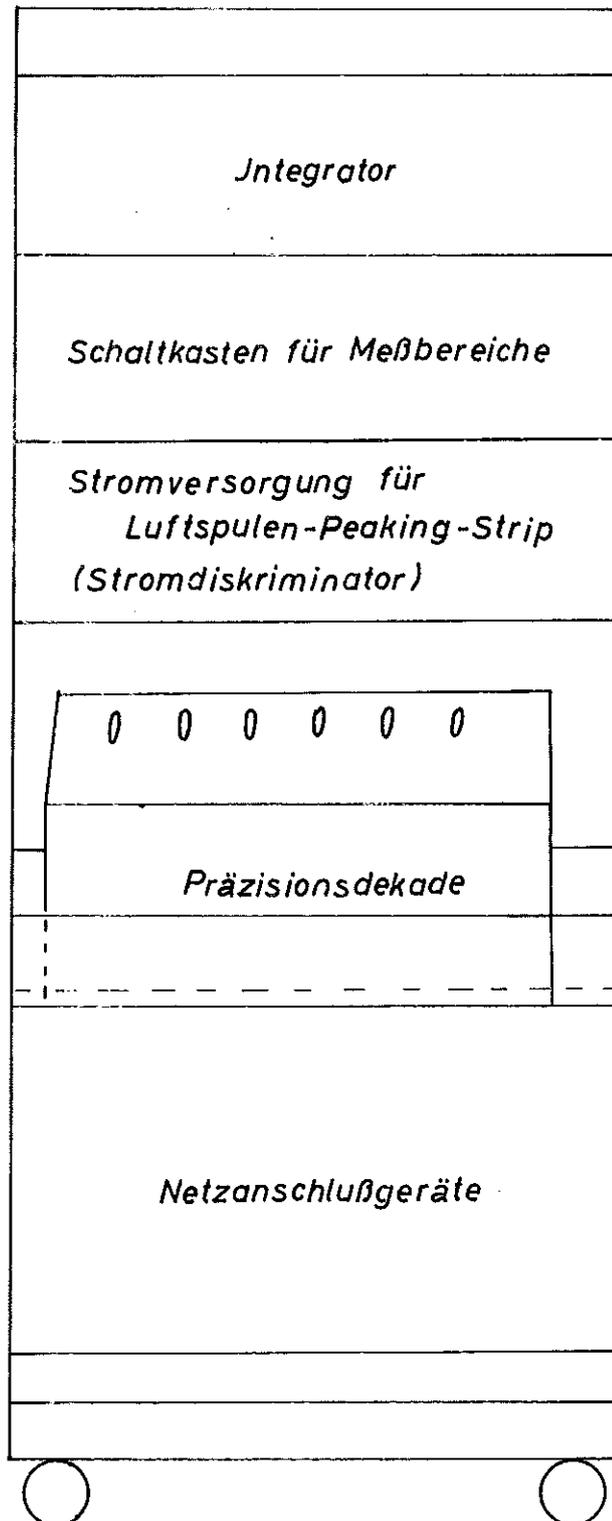


Abb.16

Meßgestell

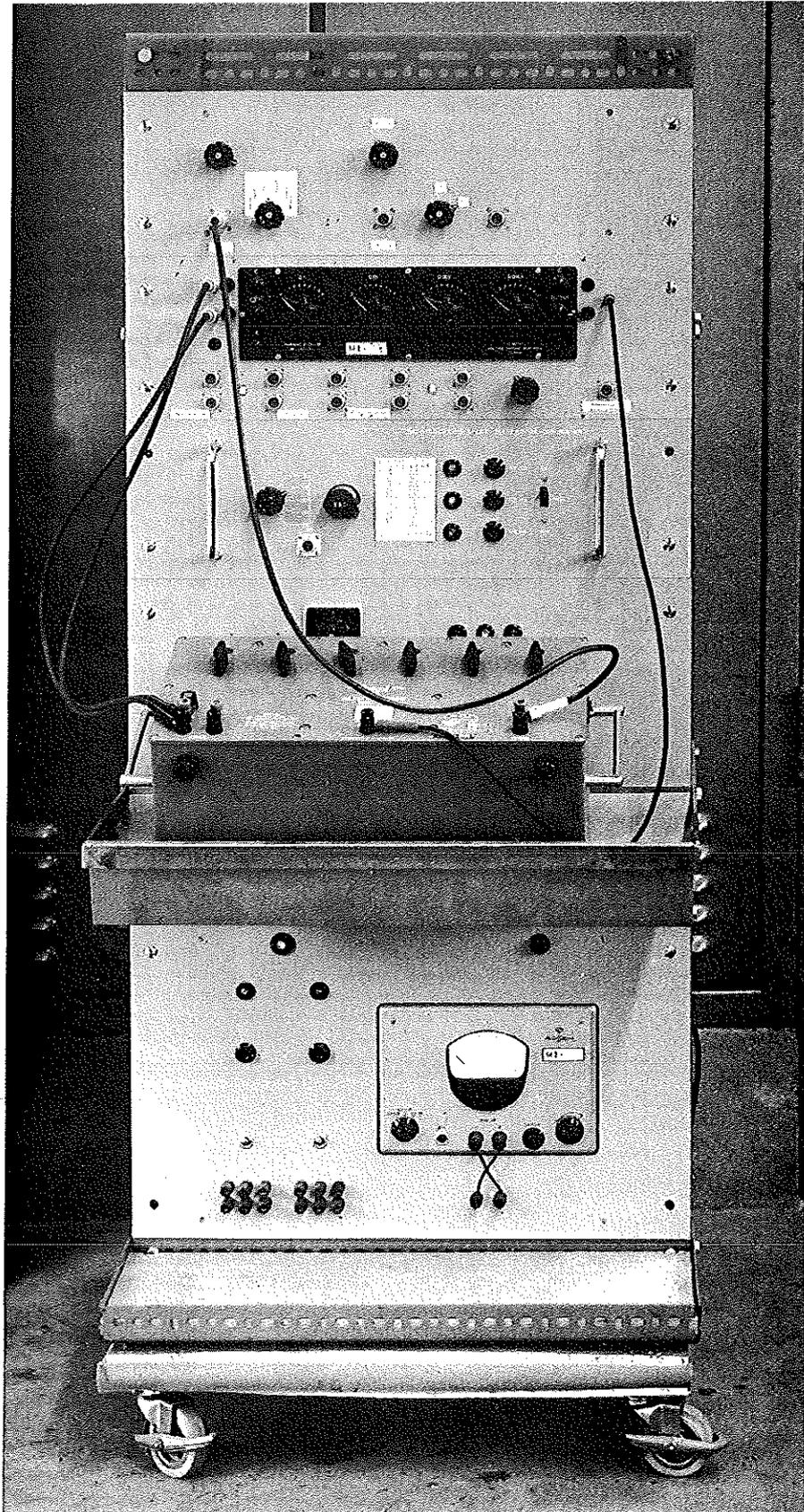
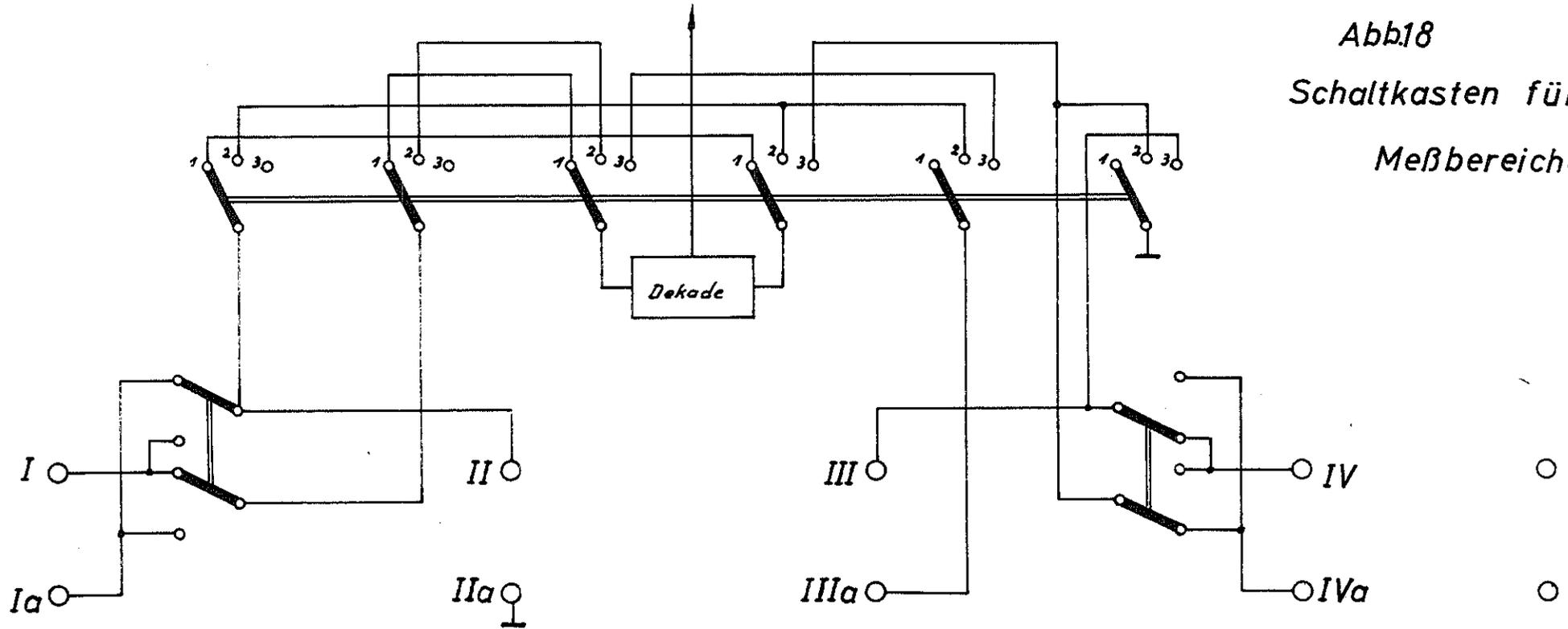


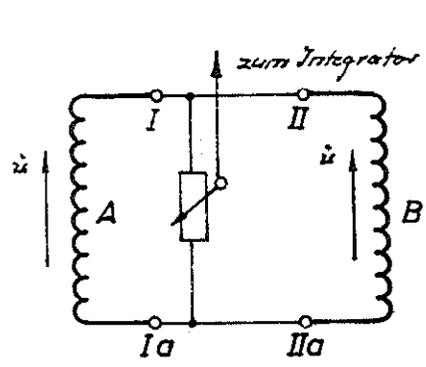
Abb17

Meßgestell

Abb18  
Schaltkasten für  
Meßbereiche



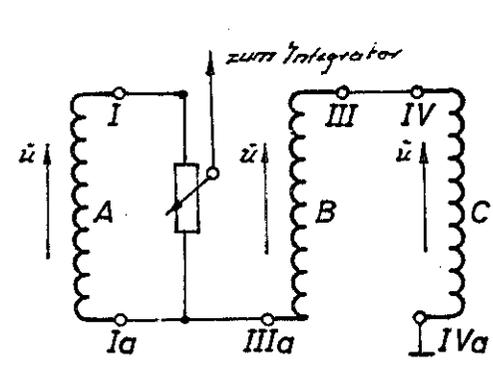
- 48 c -



Schaltstellung 1

$B(r; y)$

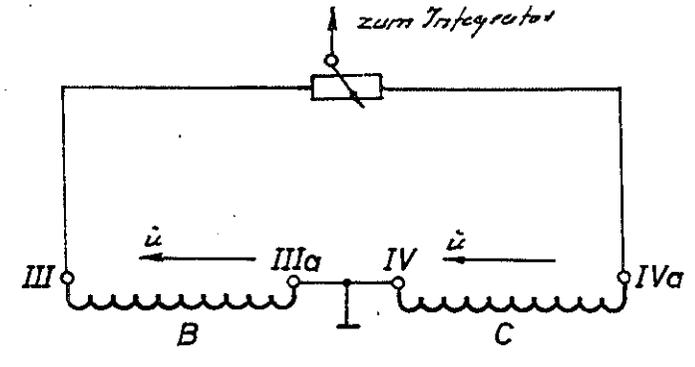
A = Referenzspule



Schaltstellung 2

$G(r)$

B = 1. Meßspule



Schaltstellung 3

$G(o)$

C = 2. Meßspule

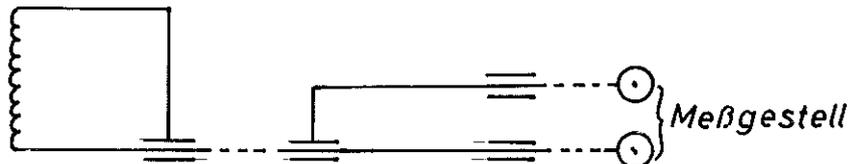
In Schaltungstellung II wird eine Schaltung nach Abb. 4 hergestellt, das Gradienten-Spulenpaar wird an den dafür vorgesehenen Buchsen angeschlossen. Es wird  $\frac{dB}{dr}(r)$  bezogen auf das Referenzfeld bestimmt.

In Schaltungstellung III liegt eine Schaltung nach Abb. 3 vor. Es wird  $G(0)$  in symmetrischer Schaltung gemessen.

Will man  $G(0)$  mit größerer Empfindlichkeit messen, so ist die Spule, welche sich im größeren Feld befindet, an der Buchse  $B_{ref}$ , die andere Spule an der Buchse  $B(r, y)$  anzuschließen. Die Messung erfolgt in diesem Falle in Schaltungstellung I.

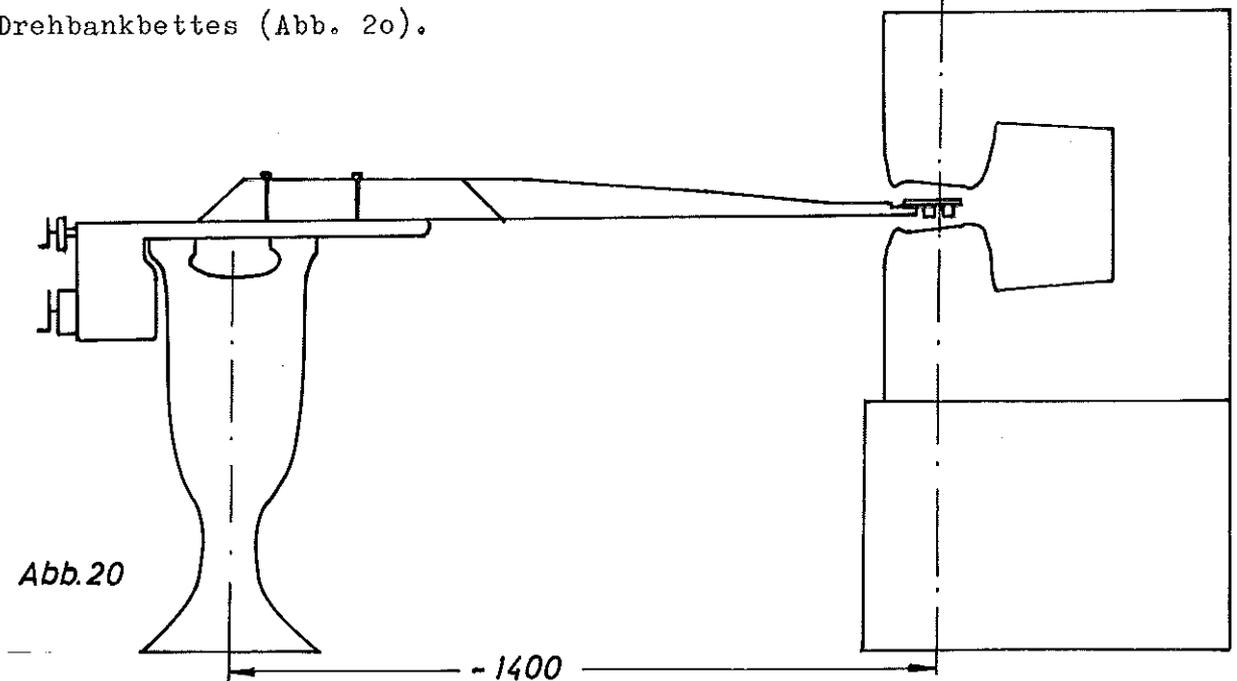
Um störende Kabelkapazitäten weitgehendst auszuschalten, werden die Spulenden nur über ein kurzes Stück durch das Streufeld coaxial herausgeführt. Anschließend erfolgt eine Aufteilung von Seele und Mantel jeweils auf die Mittelleiter getrennter Kabel (Abb. 19). Auf diese Weise ist es möglich, am Meßgestell beliebige Umpolungen und Vertauschungen der Kabel vorzunehmen, ohne daß sich die Schaltkapazitäten merklich ändern.

Abb.19



Als Spannungsteiler können wahlweise eine 4-dekadische, ohm'sche "Voltage Dividing Box" der Firma Muirhead mit einer Genauigkeit von ca.  $10^{-3}$  im Spannungsteilerverhältnis oder ein 6-dekadischer Präzisions-Spannungsteiler-Trafo (Gertsch, Modell 1004) mit einer Genauigkeit von  $\pm (2,5 + \frac{0,25}{k}) \cdot 10^{-6}$  angeschlossen werden.

Die Führung der Spulen im Magnetfeld erfolgt mit Hilfe eines Drehbankbettes (Abb. 20).



In azimuthaler Richtung wird das Meßwerkzeug mittels des Schlittens über Zahnstange und Ritzel bewegt. Die Ablesung der Position erfolgt über Meßtrommel und Nonius mit einer Genauigkeit von 0,1 mm. In radialer Richtung wird die Verschiebung mittels einer Spindel mit einer Steigungsgenauigkeit von 0,01 mm vorgenommen und kann ebenfalls auf einer Meßtrommel mit Nonius abgelesen werden. Um Störungen des Magnetfeldes durch die Eisenmassen der Bank zu vermeiden, ist ein Abstand zum Modell von mindestens 500 mm einzuhalten. Die Spulen selbst befinden sich an einem entsprechend langen Meßarm aus Isolationsmaterial (Abb. 21).

Den gesamten Meßplatz zeigt Abb. 22.

- 50 a -

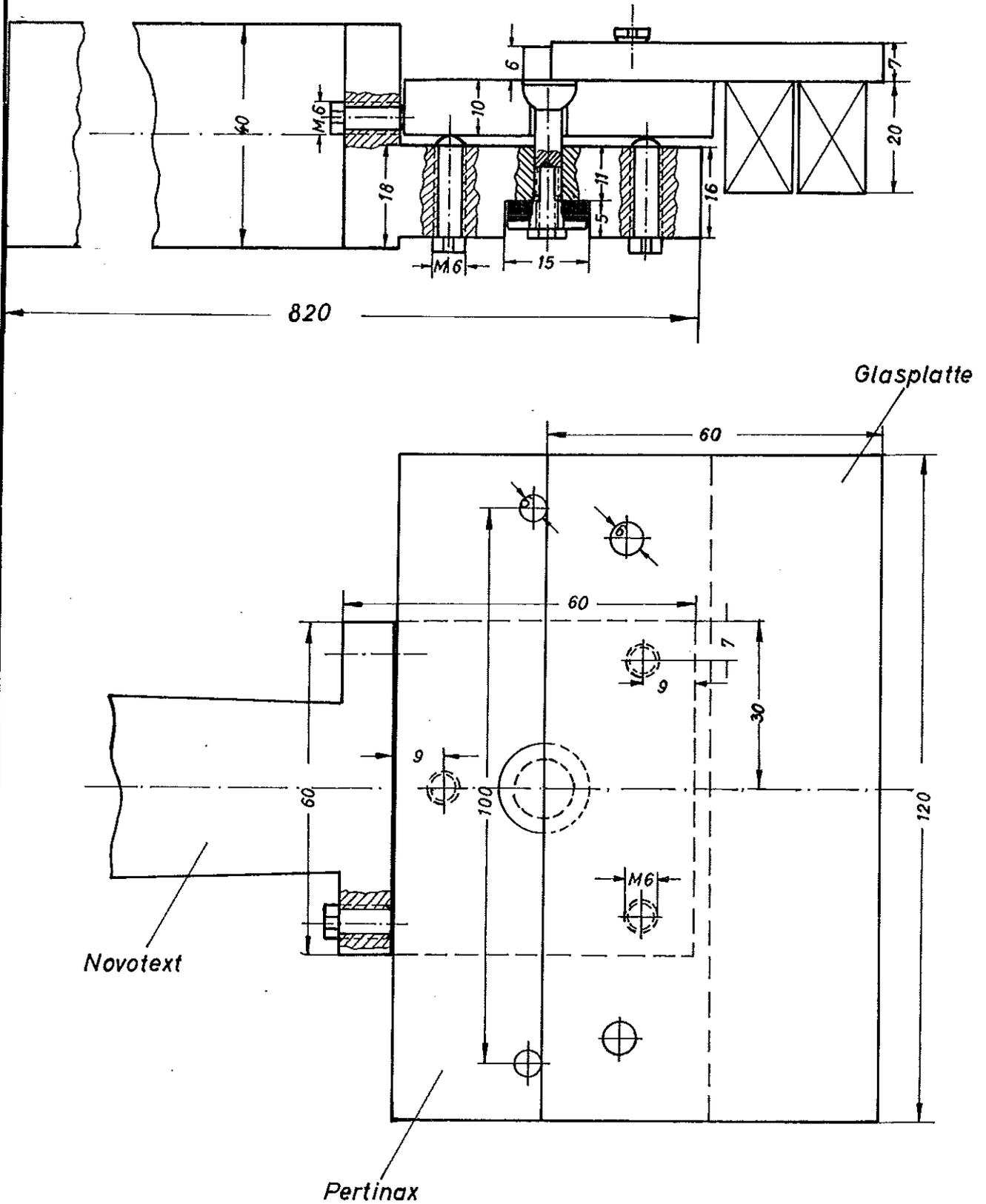


Abb. 21 Spulhalterung

Literaturverzeichnis

- E 1      W.C. Elmore and M.W. Garret  
          Rev. Sci. Instr. 25, 480 (1954)
- K 1      G.A. Korn and T.M. Korn  
          Elektronic Analog Computers.  
          2nd ed., London: McGraw-Hill (1956)
- R 1      De Raad, Bastiaan  
          Dynamic and Static Measurements  
          of strongly inhomogeneous Magnetic Fields.  
          Diss. T.H. Delft, (4.7.1958)