DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

DESY

DESY A 2.103
August 1963

ABSCHÄTZUNG DER MEHRFACHERZEUGUNG BEI EXPERIMENTEN ZUR PHOTO-EINFACH-ERZEUGUNG

von

J. von Behr
G. Ripken

2 HAMBURG-GR. FLOTTBEK 1, FLOTTBEKER DRIFT 56

ABSTRACT

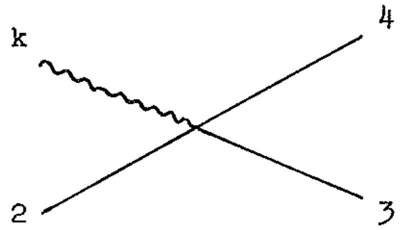
The double photoproduction of pions will increase the counting rate of protons from single photoproduction at several GeV. This increase (as a function of the peak energy of the bremsspectrum) is discussed on the basis of the available phase-space in the laboratory system. The 3-3-isobar is considered as a further channel for double production. The method is compared with experiments between 0.5 GeV and 1 GeV.

EINLEITUNG

Bei der Planung eines Experimentes zur Photoproduktion (im GeV-Bereich) von π-Mesonen

$$\gamma + p \longrightarrow \begin{array}{l} p + \pi^{o} \\ n + \pi^{+} \end{array}$$

mußte die Frage diskutiert werden, wie sich eine bei der experimentellen Anordnung mögliche Mehrfachproduktion auf die Zählrate der Rückstoßprotonen auswirkt. Zwar hat man bei vorgegebenem



3 = positiv geladene Teilchen

Fig. 1

P_3, Θ_3, ϕ_3 (des geladenenTeilchens)für die Einfachproduktion eine genau definierte Energie k_1 des produzierenden Photons. Mehrfachprozesse können dagegen erst bei einer Photonenenergie $k \geq k_2$

$$k_1 = \frac{2\ M_3\ T_3 + M_{\pi}^2}{2\ (P_3 \cos \Theta_3 - T_3)}$$

$$k_2 = k_1 + \frac{3\ M_{\pi}^2}{2\ (P_3 \cos \Theta_3 - T_3)}$$

auftreten. Wegen der Undefiniertheit der Maximalenergie des Bremsspektrums und des endlichen Auflösungsvermögens des Spektrometers wird es jedoch nicht immer möglich sein, Mehrfachprozesse absolut auszuschließen.

Daher soll im folgenden mit Hilfe des statistischen Modells der Elementarteilchenproduktion eine Abschätzung der Mehrfachzählraten gegeben werden. Eine solche Abschätzung wird, dem Wesen der statistischen Theorie entsprechend, nur für große Impulsübertragung (zentraler Stoß) eine gewisse Gültigkeit haben. Dies entspricht auch gerade dem für das Experiment in Aussicht genommenen Winkel- und Impulsbereich.

DIE BERECHNUNG DER RELATIVEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Als Form des Bremsspektrums wurde vereinfachend ein Rechteck in der Umgebung der Kante angenommen.

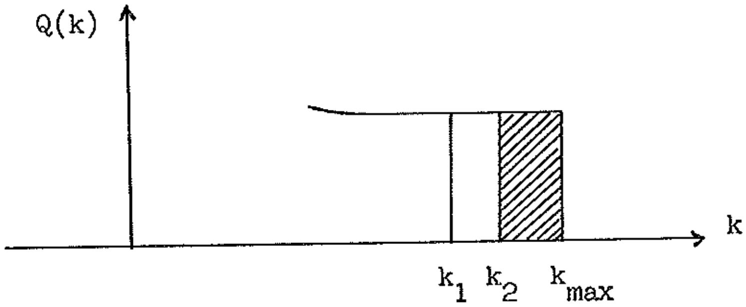


Fig. 2

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Formen des Bremsspektrums läßt sich später leicht durchführen. Der schraffierte Bereich trägt zur Zweifachproduktion bei.

Statistisches Modell. Während in der üblichen Anwendung des statistischen Modells[1] die relativen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausgangskanäle bei gleicher Gesamtenergie des Systems berechnet werden, müssen bei uns Prozesse verglichen werden, die verschiedene Gesamtenergie besitzen[+]. Dies setzt voraus, daß sich der Gesamtwirkungsquerschnitt nicht wesentlich zwischen k_1 und k_{max} ändert. Ob diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich im Augenblick noch nicht sagen. Neben der einfachen Zweifachproduktion wird auch der über das Nukleon-Isobar $N^*_{3/2\ 3/2}$ laufende Kanal zur Zweifachproduktion beitragen. Beim statistischen Modell werden diese Kanäle als voneinander unabhängig angenommen, das heißt Interferenzglieder unterdrückt.

Die relativen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich in der statistischen Theorie[1] als Produkte von Faktoren verschiedener Herkunft:

---

1) vergl. z. B. R. Hagedorn, Il Nuovo Cimento 15 (X) 246 (1960)

+) Aus diesem Grunde werden wir einfachheitshalber den Phasenraum des Laborsystems berechnen, was ebenfalls eine Modifizierung des üblichen statistischen Modells darstellt.

$$Z_1 = w_1\,(T) \cdot S_1 \cdot \varrho_1 \cdot \Omega \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$$
$$Z_2 = w_2\,(T) \cdot S_2 \cdot \varrho_2 \cdot \Omega^2 \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6$$
$$Z_r = w_r\,(T) \cdot S_r \cdot \varrho_r \cdot \Omega \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$$

Z_i = relative Zählraten
$w_i\,(T)$ = Isospinfaktoren
S_i = Faktoren infolge Spin und Statistik
ϱ_i = Verallgemeinerter Phasenraum
Ω = Wechselwirkungsvolumen. (Einheitlich wurde $\Omega = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^3$ gesetzt.

Diese Faktoren werden in den folgenden Abschnitten gesondert behandelt.

1. Isospinfaktoren

Beim statistischen Modell ist der Anfangszustand, was die Isospinverhältnisse betrifft, nur durch den Gesamtisospin T und die Ladungskomponente T_3 bestimmt. Bei vorgegebener Teilchenzahl gibt es aber im allgemeinen noch mehrere Zustände mit T, T_3, die sich durch die Quantenzahlen der intermediären Kopplung unterscheiden. Alle diese Zustände $|j_{1,2} \cdots\cdot\; j_{1,2\,\ldots,\,n-1}\rangle$ werden im Sinne der statistischen Theorie als gleichwahrscheinlich angenommen, und die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von jedem dieser Zustände in den genau vorgegebenen Ladungsendzustand $|m_1 \;\ldots\; m_n\rangle$ muß berechnet werden. Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten

$$w\,(T) = \sum \left| \langle j_{1,2} \cdots\cdot\; j_{1,2\ldots,\,n-1} \,|\, m_1 \ldots m_n \rangle \right|^2$$

ist dann der Isospinfaktor[2].

Bei der Photoproduktion tritt insofern eine Komplikation ein, als der Gesamtisospin T des Anfangszustandes sowohl die Werte $T = 1/2$ als auch $T = 3/2$ annehmen kann. Wir geben daher neben $w\,(T)$ auch den unter der Annahme gleichen Gewichtes errechneten Mittelwert $\bar{w}\,(T)$ an.

2) Cerulus, Nuovo Cimento Suppl. 15 (X), S. 402-425 (1960)

Tabelle für w (T)

Prozeß	T 1/2	T 3/2	gemittelt über T	
$\rightarrow p + \pi^0$	1/3	2/3	0,500	
$\rightarrow p + \pi^0 + \pi^0$	1/3	4/15	0,300	0,75
$\rightarrow p + \pi^- + \pi^+$	1/2	2/5	0,450	
$\rightarrow N^* + \pi^0 \rightarrow p + \pi^0 + \pi^0$	2/9	2/45	0,134	
$\rightarrow N^* + \pi^- \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-$	1/2	2/5	0,450	0,7
$\rightarrow N^* + \pi^+ \rightarrow p + \pi^- + \pi^+$	1/18	8/45	0,116	
$\rightarrow n + \pi^+$	2/3	1/3	0,5	
$\rightarrow n + \pi^+ + \pi^0$	1/3	7/15	0,4	
$p + \pi^- + \pi^+$	1/2	2/5	0,45	
$\rightarrow N^* + \pi^+ \rightarrow p + \pi^- + \pi^+$	1/18	8/45	0,114	
$N^* + \pi^+ \rightarrow n + \pi^0 + \pi^+$	1/9	16/45	0,230	
$N^* + \pi^0 \rightarrow n + \pi^+ + \pi^0$	1/9	1/45	0,065	
$N^* + \pi^- \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-$	1 2	2/5	0,450	
Diese Kanäle haben alle π^+, aber der Phasenraum ist nicht gleich für den Resonanzkanal, da π^+ unterschiedlicher Herkunft ist.				

2. Faktoren infolge Spin und Statistik

$$S = \frac{\prod (2 S_j + 1)^{\sigma_j}}{\prod N_i \, !},$$

wo σ_j die Zahl der Teilchen mit Spin S_j,
N_i die Zahl der Teilchen einer Teilchensorte angibt.

Prozeß	S
$N + \pi$	2
$N + \pi + \pi$	1
$N^{*} + \pi$	4

3. Der verallgemeinerte Phasenraum

Der Phasenraum beim Zerfall eines Systems der Energie E in den Kanal "n" ist gegeben durch[+)]

$$\rho_n = \int \cdots \int d\vec{p}_1 \cdots dp_{(n+1)} \cdot \delta(E - \Sigma E_i)\, \delta(\vec{p} - \Sigma \vec{p}_i) \, . \qquad (1a)$$

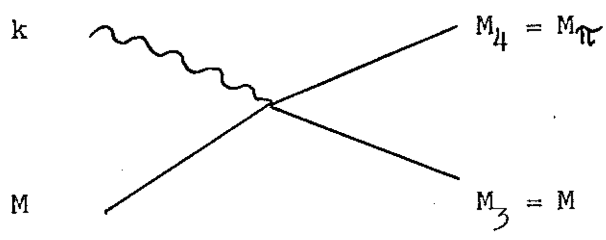
Liegt wie in unserem Falle eine Energieverteilung für den Anfangszustand vor, so setzen wir verallgemeinernd

$$\rho_n = \int Q(E)\, dE \int d\vec{p}_1 \cdots d\vec{p}_{(n+1)} \cdot \delta(E - \Sigma_i)\, \delta(\vec{p} - \Sigma \vec{p}_i) \, . \qquad (1b)$$

Dabei ist über alle mit den experimentellen Bedingungen verträglichen Bereiche zu integrieren.

Da die ρ_n zur Berechnung von relativen Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden sollen, ist ein ihnen gemeinsamer Faktor unerheblich, und es kommt daher bei der Energie-Verteilung Q (E) nur darauf an, daß sie der Form des Bremsspektrums proportional ist.

I. Einfachproduktion



$$E = k + M$$
$$dE = dk$$

+) soweit nicht anders vermerkt, beziehen sich alle Größen auf das Laborsystem.

$$\rho_1 = \int Q(k)\,dk \cdot \Delta\vec{p}_3 \cdot \int d\vec{p}_4 \cdot \delta\left(k + M - E_3 - E_4\right) \times \tag{2}$$
$$\times\, \delta\left(\vec{k} - \vec{p}_3 - \vec{p}_4\right)$$

$$\text{mit } E_3 = \sqrt{p_3^2 + M_3^2},$$
$$E_4 = \sqrt{p_4^2 + M_4^2}.$$

Die Integration über die Variable $\vec{p}_4$ kann unmittelbar ausgeführt werden auf Grund der in (1) auftretenden δ -Funktion

$$\delta\left(\vec{k} - \vec{p}_3 - \vec{p}_4\right),$$

die bewirkt, daß überall $p_4 = \vec{k} - \vec{p}_3$ zu setzen ist:

$$\rho_1 = \Delta\vec{p}_3 \cdot \int dk \cdot Q(k) \cdot \delta\left[f(k)\right],$$
$$f(k) = k + M - \sqrt{p_3^2 + M_3^2} - \sqrt{\left(\vec{k} - \vec{p}_3\right)^2 + M_4^2}.$$

Weiterhin erhalten wir unter Verwendung der Formel

$$\delta\left[f(k)\right] = \frac{\delta\left(k - k_1\right)}{\left|f'(k_1)\right|},$$

wo k_1 die Nullstelle der Funktion f(k) angibt:

$$\rho_1 = \Delta\vec{p}_3 \cdot Q(k_1) \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{k_1 - p_3 \cos\Theta_3}{\sqrt{k_1^2 - 2k_1 p_3 \cos\Theta_3 + p_3^2 + M_4^2}}} \tag{3}$$

$$\left(\Theta_3 = \measuredangle\left(\vec{k}, \vec{p}_3\right)\right).$$

Die Bestimmungsgleichung für k_1 lautet

$$k_1 + M - E_3 = \sqrt{k_1^2 - 2k_1 p_3 \cos\Theta_3 + p_3^2 + M_4^2}\ , \tag{4}$$

wobei die auf der rechten Seite stehende Wurzel, die physikalisch eine Energie darstellt, mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist. Erheben wir die linke und rechte Seite dieser Gleichung ins Quadrat, so fallen die quadratischen Glieder von k_1 weg, und wir bekommen eine lineare Gleichung für k_1 mit der Lösung ($T_3 \equiv E_3 - M = E_3 - M_3$)

$$k_1 = \frac{2ME_3 - M_3^2 - M^2 + M_4^2}{2(p_3\cos\Theta_3 - E_3 + M)} \equiv \frac{2MT_3 + M_\pi^2}{2(p_3\cos\Theta_3 - T_3)}\ . \tag{5}$$

Damit schließlich (5) neben (4) auch die Bedingung

$$\sqrt{k_1^2 - 2k_1 p_3 \cos\Theta_3 + p_3^2 + M_4^2} > 0$$

erfüllt (beim Quadrieren der Gl. (4) kann das Vorzeichen der Wurzel verloren gehen), haben wir nachträglich noch zu fordern

$$0 < k_1 + M - E_3 = \frac{\left(\sqrt{p_3^2 + M_4^2} + M - E_3\right)^2 + 2(E_3 - M)\left(\sqrt{p_3^2 + M_4^2} - p_3\cos\Theta_3\right)}{2(p_3\cos\Theta_3 + M - E_3)} \tag{6a}$$

oder, da mit $E_3 - M = E_3 - M_3 > 0$ der ganze Zähler in (6a) positiv ist:

$$p_3\cos\Theta_3 + M - E_3 > 0. \tag{6b}$$

Diese Ungleichung kann nur mit einem Winkel

$$\Theta_3 < \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

erfüllt werden.

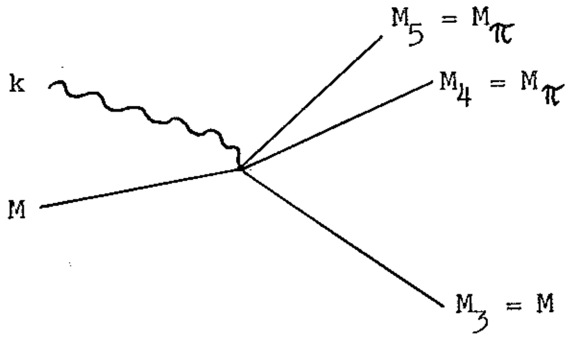
Ist

$$p_3\cos\Theta_3 + M - E_3 < 0\ , \tag{8a}$$

so besitzt (4) keine reelle positive Lösung k_1, und es folgt

$$\varsigma_1 = 0\ . \tag{8b}$$

II. Zweifachproduktion



$$\varrho_2 = \Delta \vec{p}_3 \cdot \int_{k_2}^{k_{max}} R(k)\, dk , \tag{9a}$$

$$R(k) = \iint d\vec{p}_4 \, d\vec{p}_5 \cdot \delta\Big(E - \sum_{i=3}^{5} E_i\Big)\, \delta\Big(\vec{k} - \sum_{i=3}^{5} \vec{p}_i\Big), \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \sqrt{p_3^2 + M_3^2} , \\ E_4 &= \sqrt{p_4^2 + M_4^2} , \\ E_5 &= \sqrt{p_5^2 + M_5^2} , \\ E &= k + M . \end{aligned}$$

Die in (9a, b) auftretenden Integrationen lassen sich ebenso wie bei ϱ_1 wiederum analytisch ausführen. Zu dem Zweck spalten wir nach R. Hagedorn[3] zunächst die Winkelintegrationen ab, indem wir setzen

$$\vec{p}_i = p_i \cdot n_i \; ; \quad |n_i| = 1 ,$$
$$d\vec{p}_i \equiv p_i^2 \, dp_i \, dn_i \equiv p_i^2 \sin\theta_i \, d\theta_i \, d\phi_i \, dp_i .$$

Dann wird

$$\begin{aligned} R(k) = \int_0^{(p_4)_{max}} dp_4 \int_0^{(p_5)_{max}} dp_5 \cdot p_4^2 \, p_5^2 \, \times \\ \times\, \delta\,(k + M - E_3 - E_4 - E_5) \times \\ \times\, w\,(|\vec{k} - p_3|, p_4, p_5) , \end{aligned} \tag{10a}$$

---

3) R. Hagedorn, Fortschr. d. Physik 9, 1-28 (1961)

$$w\left(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5\right) = \iint \delta\left(\vec{k}-\vec{p}_3 - p_4 n_4 - p_5 n_5\right) dn_4\, dn_5 . \tag{10b}$$

Führt man in (10b) die Fourier-Entwicklung der δ-Funktion ein:

$$\delta\left(\vec{k}-\vec{p}_3 - p_4 n_4 - p_5 n_5\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{\lambda}\, e^{i\vec{\lambda}\left(\vec{k}-\vec{p}_3 - p_4 n_4 - p_5 n_5\right)},$$

so kann w $\left(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5\right)$ auf funktionentheoretischem Wege berechnet werden, und zwar ergibt sich (siehe F. Cerulus und R. Hagedorn, Nuovo Cimento 1958, 646-677)

$$w\left(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5\right) = -\frac{\pi}{|\vec{k}-\vec{p}_3| \cdot p_4 \cdot p_5} \times \sum_{\sigma_\nu = \pm 1} \sigma_4 \sigma_5 \cdot \operatorname{sgn}\left[|\vec{k}-\vec{p}_3| + \sigma_4 p_4 + \sigma_5 p_5\right]. \tag{11}$$

Durch Einsetzen von (11) in (10a) entsteht jetzt

$$R(k) = -\frac{\pi}{|\vec{k}-\vec{p}_3|} \cdot \int dp_4 \int dp_5 \cdot p_4\, p_5 \times \delta\left(k + M - E_3 - E_4 - E_5\right) \times \sum_{\sigma_\nu = \pm 1} \sigma_4 \sigma_5 \cdot \operatorname{sgn}\left[|\vec{k}-\vec{p}_3| + \sigma_4 p_4 + \sigma_5 p_5\right], \tag{12}$$

wobei die Integration zu erstrecken ist über das Gebiet

$$0 \leqq p_4 \leqq (p_4)_{max} = \sqrt{(k + M - E_3 - M_5)^2 - M_4^2},$$
$$0 \leqq p_5 \leqq (p_5)_{max} = \sqrt{(k + M - E_3 - M_4)^2 - M_5^2} \tag{13}$$

(B e d i n g u n g : $k + M - E_3 \geqq M_4 + M_5$. Für $k + M - E_3 < M_4 + M_5$ ist das Argument der in (12) auftretenden δ-Funktion stets < 0, also R(k) und somit auch ϱ_2 gleich Null. Daher können wir uns von vornherein auf den Fall $k + M - E_3 \geqq M_4 + M_5$ beschränken. Energiesatz!)

Zur Auswertung der in (12) auftretenden Summe

$$S(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5) = \sum_{\sigma_\nu = \pm 1} \sigma_4 \sigma_5 \cdot \mathrm{sgn}\left[|\vec{k}-\vec{p}_3| + \sigma_4 p_4 + \sigma_5 p_5\right] \tag{14}$$

ist es zweckmäßig, dieses Gebiet aufzuteilen in die drei Bereiche G_1, G_2, G_3, die von der p_4- bzw. p_5-Achse und einer der Geraden

$$p_5 = -p_4 + |\vec{k}-\vec{p}_3|, \tag{15a}$$

$$p_5 = p_4 - |\vec{k}-\vec{p}_3|, \tag{15b}$$

$$p_5 = p_4 + |\vec{k}-\vec{p}_3|. \tag{15c}$$

begrenzt werden, und das Gebiet G, das von allen drei Geraden (15) umschlossen wird.

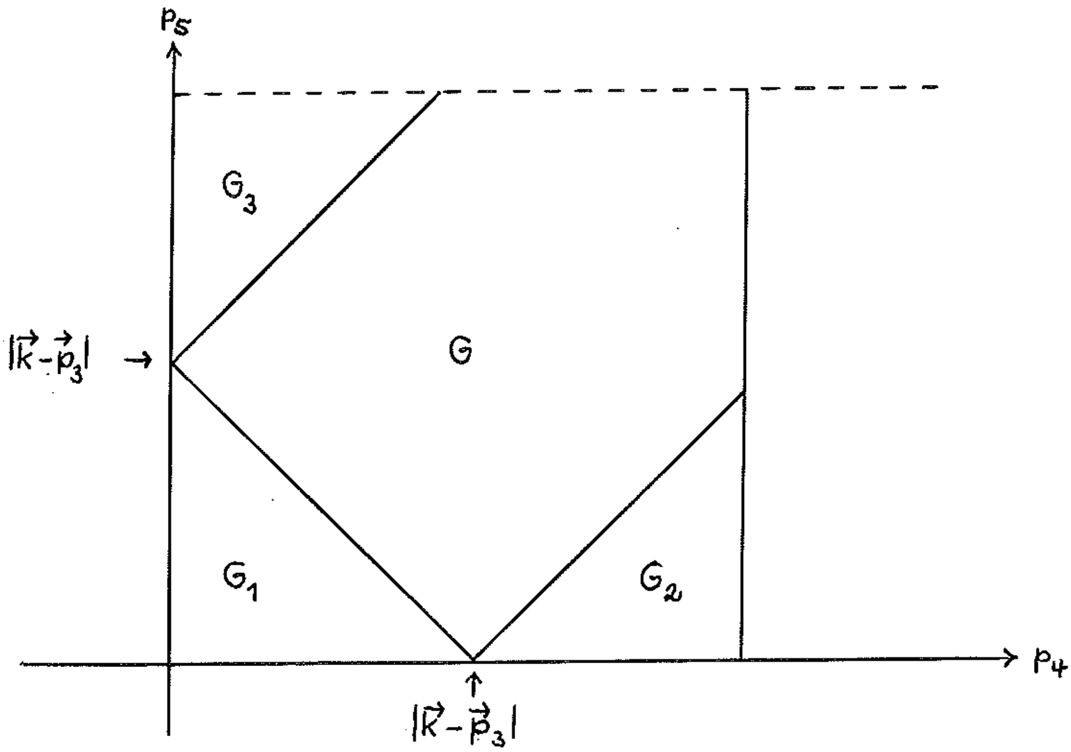


Fig. 3

Dann gilt

für $(p_4, p_5) \in G$:

$$|\vec{k}-\vec{p}_3| - p_4 - p_5 < 0$$
$$|\vec{k}-\vec{p}_3| - p_4 + p_5 > 0$$
$$|\vec{k}-\vec{p}_3| + p_4 - p_5 > 0$$
$$|\vec{k}-\vec{p}_3| + p_4 + p_5 > 0$$
$$S(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5) = -2,$$

für $(p_4, p_5) \in G_1$:

$$|\vec{k}-\vec{p}_3| - p_4 - p_5 > 0$$
$$|\vec{k}-\vec{p}_3| - p_4 + p_5 > 0$$
$$|\vec{k}-\vec{p}_3| + p_4 - p_5 > 0$$
$$|\vec{k}-\vec{p}_3| + p_4 + p_5 > 0$$
$$S(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5) = 0 .$$

Entsprechend findet man:

$$S(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5) = 0 \quad \text{für} \quad (p_4, p_5) \in G_2 \text{ und } G_3 .$$

Also ist die Funktion $S(|\vec{k}-\vec{p}_3|, p_4, p_5)$ nur in G von Null verschieden, so daß der Integrationsbereich (13) auf das Gebiet G zusammenschrumpft und Gl. (12) übergeht in

$$
\begin{aligned}
R(k) &= \frac{2\pi}{|\vec{k}-\vec{p}_3|} \int_0^{(p_4)_{max}} dp_4 \cdot p_4 \int_{(p_4,p_5)\in G} dp_5 \cdot p_5 \cdot \delta\left[f(p_5)\right] \\
&\qquad \text{mit } f(p_5) = k + M - E_3 - E_4 - \sqrt{p_5^2 + M_5^2} \\
&= \frac{2\pi}{|\vec{k}-\vec{p}_3|} \int_0^{(p_4)_{max}} dp_4 \cdot p_4 \cdot \int_{(p_4,p_5)\in G} dp_5 \cdot p_5 \cdot \frac{\delta(p_5 - \tilde{p}_5)}{|f'(\tilde{p}_5)|} \\
&\qquad \text{mit } \tilde{p}_5 = \sqrt{(k + M - E_3 - E_4)^2 - M_5^2} \\
&= \frac{2\pi}{|\vec{k}-\vec{p}_3|} \int_0^{(p_4)_{max}} dp_4 \cdot p_4 \cdot (k + M - E_3 - E_4) \times \\
&\qquad \times \int_{(p_4,p_5)\in G} dp_5 \cdot \delta(p_5 - \tilde{p}_5) .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Die in (14) im Argument der δ-Funktion auftretende Größe

$$\tilde{p}_5 = \sqrt{\left(k + M - E_3 - \sqrt{p_4^2 + M_4^2}\right)^2 - M_5^2}$$

stellt, als Funktion von p_4 betrachtet, eine im Intervall

$$0 \leqq p_4 \leqq (p_4)_{max}$$

von

$$(\tilde{p}_5)_{max} = (p_5)_{max} \quad \text{für} \quad p_4 = 0$$

bis

$$\tilde{p}_5 = 0 \text{ für } p_4 = (p_4)_{max}$$

monoton abnehmende Funktion dar.

Da nun

$$\int\limits_{(p_4, p_5) \in G} dp_5 \cdot \delta(p_5 - \tilde{p}_5) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \tilde{p}_5 \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, tritt eine weitere Reduktion des Integrationsgebietes auf, und zwar brauchen wir nicht mehr über das gesamte p_4-Intervall

$$0 \leqq p_4 \leqq (p_4)_{max}$$

zu integrieren, sondern nur noch über dasjenige Intervall, welches man durch Projektion des ganz in G verlaufenden Kurvenzuges von $\tilde{p}_5 = \tilde{p}_5(p_4)$ auf die p_4-Achse erhält. Die Endpunkte des neuen Integrationsintervalles und damit die Integrationsgrenzen für die p_4-Integration sind die p_4-Koordinaten der Schnittpunkte von $\tilde{p}_5(p_4)$ mit dem Rand von G. Zur Berechnung dieser Schnittpunkte haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist

$$p_3 \cos\Theta_3 - T_3 < 0,$$
$$(T_3 \equiv E_3 - M_3),$$

so folgt schrittweise

$$k^2 - 2kp_3 \cos\Theta_3 + p_3^2 > k^2 - 2kT_3 + p_3^2 > (k-T_3)^2,$$
$$\text{da } T_3^2 < p_3^2 ;$$

$$\sqrt{k^2 - 2kp_3\cos\Theta_3 + p_3^2} \equiv |\vec{k}-\vec{p}_3| > (k-T_3);$$

$$|\vec{k}-\vec{p}_3| - p_4 > k - T_3 - E_4, \quad \text{da } p_4 < E_4;$$

$$|\vec{k}-\vec{p}_3| - p_4 > \sqrt{(k-T_3-E_4)^2 - M_\pi^2} \equiv \tilde{p}_5$$

($M_3 = M$, also $k - T_3 - E_4 = k + M - E_3 - E_4$; $M_5 = M_\pi$), das heißt $\tilde{p}_5$ liegt ganz im Gebiet G_1, also außerhalb G, so daß R (k) verschwinden muß:

$$R(k) = 0, \text{ wenn } p_3\cos\Theta_3 - T_3 < 0. \tag{17}$$

b)

$$p_3 \cos\Theta_3 - T_3 > 0.$$

Hier haben wir zwei Unterfälle zu betrachten.

Ist $k < k_2$ mit

$$k_2 = \frac{2M_\pi^2 + MT_3}{p_3\cos\Theta_3 - T_3}, \tag{18}$$

so gibt es keine Schnittpunkte mit dem Rand von G, da $\tilde{p}_5$ (p_4) wiederum ganz unterhalb der Geraden

$$p_5 = |\vec{k} - \vec{p}_3| - p_4$$

verläuft.

Für $k > k_2$ dagegen schneidet die Kurve $\tilde{p}_5$ den Rand von G in zwei Punkten. Die Schnittpunkte selbst errechnen sich zu

$$p_4^{(1)} = \frac{1}{2} \left| |\vec{k}-\vec{p}_3| - (k-T_3) \sqrt{\frac{k-k_2}{k-k_o}} \right| ,$$

$$p_4^{(2)} = \frac{1}{2} \left| |\vec{k}-\vec{p}_3| + (k-T_3) \sqrt{\frac{k-k_2}{k-k_o}} \right|$$

mit

$$k_o = \frac{MT_3}{p_3 \cos\Theta_3 - T_3} . \tag{19}$$

Damit wird

<u>für $k \leqq k_2$:</u>

$$R(k) = 0 , \tag{20a}$$

<u>für $k > k_2$:</u>

$$R(k) = \frac{2\pi}{|\vec{k}-\vec{p}_3|} \int_{p_4^{(1)}}^{p_4^{(2)}} dp_4 \cdot p_4 \cdot (k - T_3 - E_4)$$

bzw. nach Einführung der Integrationsvariablen $E_4 = \sqrt{p_4^2 + M_4^2}$:

$$R(k) = \frac{2\pi}{|\vec{k}-\vec{p}_3|} \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} dE_4 \cdot E_4 \cdot (k - T_3 - E_4)$$

$$\text{mit } \alpha - \beta = \sqrt{(p_4^{(1)})^2 + M_\pi^2} ,$$

$$\alpha + \beta = \sqrt{(p_4^{(2)})^2 + M_\pi^2} ,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (k - T_3) , \tag{20b}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{k}-\vec{p}_3| \cdot \sqrt{\frac{k-k_2}{k-k_o}} ,$$

$$R(k) = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{k-k_2}{k-k_o}}\ \Big\{ 2k^2 + \\ + k\left[2p_3\cos\Theta_3 - 6T_3 + (k_2-k_o)\right] + \\ + \left[3T_3^2 - p_3^2 + (k_2-k_o)(k_o - 2p_3\cos\Theta_3)\right] + \\ + \frac{(k_2-k_o)\left[k_o(k_o-2p_3\cos\Theta_3) + p_3^2\right]}{(k-k_o)} \Big\} . \tag{20b}$$

Nach Gl. (9a) tritt jetzt die Funktion R (k) in ϱ_2 als Integrand auf. Auch diese Integration kann noch elementar durchgeführt werden. Unter Berücksichtigung der Formeln

$$J_1 \equiv \int_{k_2}^{k_{max}} k^2 \cdot \sqrt{\frac{k-k_2}{k-k_o}}\, dk \tag{21a}$$

$$= y \cdot \frac{(k_{max}-k_o)}{24}\left\{8k_{max}^2 + 2k_{max}(5k_o-k_2) - (3k_2^2 - 15k_o^2 + 4k_ok_2)\right\} - \frac{k_2-k_o}{16}(k_2^2 + 5k_o^2 + 2k_ok_2)\cdot \ln\frac{1+y}{1-y} ;$$

$$J_2 \equiv \int_{k_2}^{k_{max}} k \cdot \sqrt{\frac{k-k_2}{k-k_o}}\, dk \tag{21b}$$

$$= y \cdot \frac{(k_{max}-k_o)}{4}\left\{2k_{max} - (k_2 - 3k_o)\right\} - \frac{(3k_o+k_2)(k_2-k_o)}{8}\cdot \ln\frac{1+y}{1-y} ;$$

$$J_3 \equiv \int_{k_2}^{k_{max}} \sqrt{\frac{k-k_2}{k-k_o}}\, dk \tag{21c}$$

$$= y \cdot (k_{max}-k_o) - \frac{k_2-k_o}{2}\cdot \ln\frac{1+y}{1-y} ;$$

$$J_4 \equiv \int_{k_2}^{k_{max}} \frac{1}{k - k_0} \sqrt{\frac{k - k_2}{k - k_0}}\, dk \qquad (21d)$$

$$= -2y + \ln \frac{1 + y}{1 - y}$$

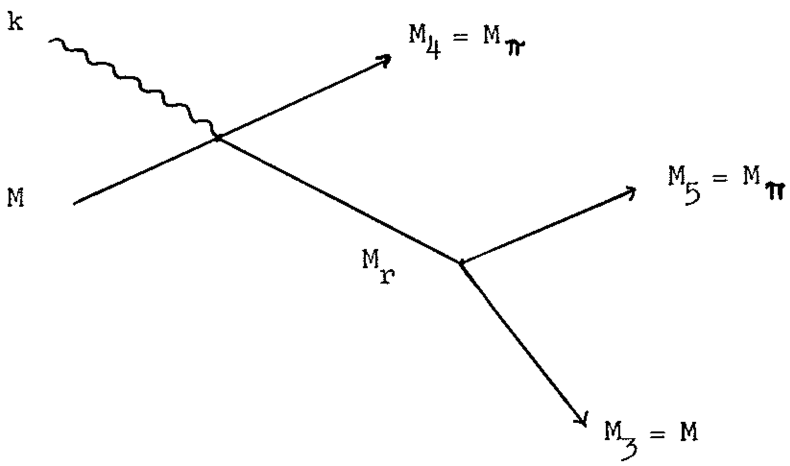
mit

$$y \equiv \sqrt{\frac{k_{max} - k_2}{k_{max} - k_0}} \qquad (22)$$

gewinnen wir schließlich

$$\begin{aligned} \rho_2 = \frac{\pi}{6} \Big\{ & 2 J_1 + \\ & + \left[2 p_3 \cos\Theta_3 - 6 T_3 + (k_2 - k_0) \right] \cdot J_2 + \qquad (23) \\ & + \left[3 T_3^2 - p_3^2 + (k_2 - k_0)(k_0 - 2 p_3 \cos\Theta_3) \right] \cdot J_3 + \\ & + (k_2 - k_0 \left[k_0 (k_0 - 2 p_3 \cos\Theta_3) + p_3^2 \right] \cdot J_4 \,. \end{aligned}$$

III. Resonanz



$$\varrho_r = \int d\vec{p}_r \cdot W_r \cdot \int dM_r \cdot f(M_r) \cdot dN_3\,(n_3) \tag{24}$$

$$\text{mit } \Delta\vec{p}_3 = p_3^2 \cdot \Delta p_3 \cdot dn_3 = p_3^2 \cdot \Delta p_3 \cdot \sin\Theta_3\, d\Theta_3\, d\phi_3,$$
$$d\vec{p}_r = p_r^2\, dp_r \cdot dn_r = p_r^2 \cdot dp_r \cdot \sin\Theta_r\, d\Theta_r\, d\phi_r,$$

$$n_3 = (\sin\Theta_3,\ 0,\ \cos\Theta_3),$$
$$n_r = (\sin\Theta_r \cos\phi_r,\ \sin\Theta_r \sin\phi_r,\ \cos\Theta_r);$$

$$\Theta_3 = \measuredangle\ (\vec{k}, \vec{p}_3),$$
$$\Theta_r = \measuredangle\ (\vec{k}, \vec{p}_r);$$

$W_r \cdot \Delta\vec{p}_r$ = Verallgemeinerter Phasenraum bei Einfachproduktion eines Resonanzteilchens N^* der Masse M_r im Impulsintervall $(\vec{p}_r, \vec{p}_r + \Delta\vec{p}_r)$ unter gleichzeitiger Emission eines Teilchens der Masse M_4;

$f(M_r)\, d\, M_r$ = Massenspektrum des Resonanzteilchens N^*;

$d\, N_3\, (n_3)$ = Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Teilchens der Masse M_3 durch N^* in das Raumwinkelelement $d\, n_3$.

Wir berechnen ϱ_r in mehreren Schritten.

1. Ermittlung des Phasenraumes $W_r \cdot \Delta\vec{p}_r$.

$$W_r \cdot \Delta\vec{p}_r = \Delta\vec{p}_r \cdot \int Q(k)\, dk \cdot \int d\vec{p}_4 \cdot \delta\,(k + M - E_r - E_4) \times \tag{25}$$
$$\times\, \delta\,(\vec{k} - \vec{p}_r - \vec{p}_4)$$

Da (25) der Form nach mit der Gl. (2) für ϱ_1 übereinstimmt, können wir alle für ϱ_1 gewonnenen Ergebnisse (Gl. (3), (5) bis (8)) unmittelbar auf den Phasenraum $W_r \cdot \Delta \vec{p}_r$ übertragen und bekommen

$$W_r \cdot \Delta \vec{p}_r = \frac{\Delta \vec{p}_r \cdot Q(k_s)}{1 - \dfrac{k_s - p_r \cos\Theta_r}{\sqrt{k_s^2 - 2k_s p_r \cos\Theta_r + p_r^2 + M_4^2}}}, \tag{26}$$

wenn $k_s + M - \sqrt{p_r^2 + M_r^2} > 0$,

bzw. $p_r \cos\Theta_r + M - E_r > 0$, da $M_r \geqq M$ ist;

(die letzte Bedingung kann wiederum nur mit einem Winkel $\Theta_r < \frac{\pi}{2}$ befriedigt werden);

$$W_r \cdot \Delta \vec{p}_r = 0 \quad \text{sonst}$$

mit

$$k_s = \frac{2M \cdot \sqrt{p_r^2 + M_r^2} + M_4^2 - M_r^2 - M^2}{2\left(p_r \cos\Theta_r + M - \sqrt{p_r^2 + M_r^2}\right)} \,. \tag{27}$$

<u>2.</u> Das Massenspektrum $f(M_r)$ des Resonanzteilchens.

Die Funktion $f(M_r)$ genügt der Breit-Wigner-Formel

$$f(M_r)\, dM_r = C \cdot \frac{\Gamma dM_r}{2\pi \left\{(M_r - M_o)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2\right\}}, \tag{28a}$$

$$M_o - \Gamma \leqq M_r \leqq M_o + \Gamma .$$

Dabei ist der Normierungsfaktor C so zu bestimmen, daß

$$\int_{M_o - \Gamma}^{M_o + \Gamma} f(M_r)\, dM_r = 1$$

wird. Mit

$$\int_{M_0-\Gamma}^{M_0+\Gamma} \frac{\frac{\Gamma}{2} \cdot dM_r}{(M_r - M_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} 2$$

folgt

$$C = \frac{\pi}{2 \cdot \operatorname{arc\,tg} 2} \quad . \tag{28b}$$

3. Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Teilchens der Masse M_3 durch N^* in das Raumwinkelelement $d\,n_3$.

Im Ruhesystem $\sum^*$ von N^*, das sich mit der Geschwindigkeit

$$\vec{\beta}_r = \frac{\vec{p}_r}{\sqrt{M_r^2 + p_r^2}} \tag{29}$$

gegenüber dem Laborsystem bewegt, ist die Richtungsverteilung der emittierten Teilchen isotrop, das heißt es gilt

$$dN_3 = F \cdot \delta(M_r - E_3^* - E_5^*)\, dn_3^*\, dE_3^* , \tag{30}$$

wo

$$E_3^* = \sqrt{M_3^2 + p_3^{*2}}$$

und

$$E_5^* = \sqrt{M_5^2 + p_5^{*2}}$$

die Energie der Teilchen M_3 und M_5 im System $\sum^*$ bezeichnen und $d\,n_3^*$ das Raumwinkelelement $d\,n_3$ in $\sum^*$ angibt. Durch den Faktor F in Gl. (30) wird die Normierungsbedingung

$$\begin{aligned} 1 &= \int dN_3 \\ &= F \int dn_3^* \int \delta\,(M_r - E_3^* - E_5^*)\, dE_3^* \\ &= F \cdot 4\pi \end{aligned}$$

berücksichtigt:

$$F = \frac{1}{4\pi} \tag{31}$$

während die im Argument der δ-Funktion auftretende Energie E_5^* durch den Energie- und Impulssatz

$$M_r - \sqrt{p_5^{*2} + M_5^2} = \sqrt{p_3^{*2} + M_3^2}\,, \tag{32a}$$

$$p_5^* = p_3^* \tag{32b}$$

festgelegt ist und sich zu

$$E_5^* = \frac{M_r^2 + M_5^2 - M_3^2}{2M_r} \tag{33}$$

errechnet.

Unsere weitere Aufgabe besteht jetzt darin, diese Richtungsverteilung auf das Laborsystem $\sum$ zu transformieren.

Zu dem Zweck bedenken wir, daß die Größe

$$p_3\, dE_3\, dn_3$$

eine relativistische Invariante darstellt:

$$p_3^*\, dE_3^*\, dn_3^* = p_3\, dE_3\, dn_3 \tag{34}$$

und somit Gl. (30) unter Berücksichtigung von (31) und (33) auch in der Form

$$dN_3 = \frac{1}{4\pi}\,\delta\left(\frac{M_r^2 + M_3^2 - M_5^2}{2M_r} - E_3^*\right)\frac{p_3}{\sqrt{E_3^{*2} - M_3^2}}\,dE_3\,dn_3$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\delta\left(\frac{M_r^2 + M_3^2 - M_5^2}{2M_r} - E_3^*\right) \times \tag{35}$$

$$\times \frac{2M_r}{\sqrt{(M_r^2+M_3^2-M_5^2)^2 - 4M_r^2M_3^2}} \cdot \frac{1}{E_3}\,\Delta\vec{p}_3$$

geschrieben werden kann.

Die in (35) auftretende Schwerpunktsenergie E_3^* muß noch durch physikalische Größen im Laborsystem ausgedrückt werden.

Zur Elimination von E_3^* benötigen wir die zwischen den beiden Inertialsystemen $\sum$ und $\sum^*$ bestehende Transformationsformel

$$A_0^* = \frac{A_0 - (\vec{A}, \vec{\beta}_r)}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} \quad , \tag{36}$$

($\vec{\beta}_r$ = Geschwindigkeit, mit der sich das System $\sum^*$ gegen $\sum$ parallel bewegt),

wo

$$A_\nu = (\vec{A}, A_0) \tag{37}$$

einen beliebigen Vierervektor bezeichnet. Tragen wir hier für A_ν insbesondere die Komponenten des Viererimpulses

$$p_\nu = (\vec{p}_3, E_3)$$

ein, so entsteht aus (36)

$$E_3^* = \frac{E_3 - (\vec{p}_3 , \vec{\beta}_r)}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}$$

oder, wenn noch

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} = \sqrt{1 + \frac{p_r^2}{M_r^2}}$$

$$\frac{\beta_r}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} = \frac{p_r}{M_r}$$

gesetzt wird $(\vec{p}_3 = p_3 \cdot n_3 , \ \vec{\beta}_r = \beta_r \cdot n_r)$:

$$E_3^* = \sqrt{1 + \frac{p_r^2}{M_r^2}} \cdot E_3 - \frac{p_r}{M_r} \cdot p_3 \cdot (n_3 , n_r) \tag{38}$$

$$(n_r , n_3) = \sin \Theta_3 \cdot \sin \Theta_r \cos \phi_r + \cos \Theta_3 \cdot \cos \Theta_r \tag{39}$$

Diese Gleichung haben wir nunmehr in (35) einzusetzen und bekommen schließlich als Ausdruck für die Richtungsverteilung im Laborsystem

$$\begin{gathered} dN_3 = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta \vec{p}_3}{E_3} \cdot \frac{2 M_r}{\sqrt{(M_r^2 + M_3^2 - M_5^2)^2 - 4 M_r^2 M_3^2}} \cdot \delta[f(p_r)] , \\ f(p_r) = \frac{M_r^2 + M_3^2 - M_5^2}{2 M_r} - \sqrt{1 + \frac{p_r^2}{M_r^2}} \cdot E_3 + \frac{p_3 \cdot p_r \cdot (n_3 , n_r)}{M_r} . \end{gathered} \tag{40}$$

Für die später durchzuführende Integration über p_r ist es noch zweckmäßig, den Faktor $\delta[f(p_r)]$ in (40) in der Form

$$\delta\left[f(p_r)\right] = \sum_{\nu} \frac{\delta(p_r - p_r^{(\nu)})}{|f'(p_r)|} \,,$$

$$f'(p_r) = -E_3 \cdot \frac{p_r}{M_r \cdot \sqrt{M_r^2 + p_r^2}} + \frac{p_3 \cdot (n_3, n_r)}{M_r} \tag{41}$$

zu schreiben. Dabei geben die Größen $p_r^{(\nu)}$ die Nullstellen der Funktion $f(p_r)$ an, sind also zu bestimmen aus der Gleichung

$$\sqrt{1 + \frac{p_r^2}{M_r^2}} \cdot E_3 = \frac{A}{M_r} + \frac{B}{M_r} \cdot p_r \,,$$

$$A = \frac{M_r^2 + M_3^2 - M_5^2}{2}, \quad B = p_3 \cdot (n_3, n_r), \tag{42}$$

wo die auf der rechten Seite von (42) stehende Wurzel mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist:

$$\sqrt{1 + \frac{p_r^2}{M_r^2}} > 0 \,. \tag{43}$$

Wird Gl. (42) auf beiden Seiten quadriert, so erhalten wir eine quadratische Gleichung für p_r mit den Wurzeln ($\nu = 1,2$)

$$p_r^{(\nu)} = \frac{AB}{E_3^2 - B^2} \pm \frac{E_3}{E_3^2 - B^2} \sqrt{A^2 - M_r^2 (E_3^2 - B^2)} \,. \tag{44}$$

Diese Lösung erfüllt außerdem die Bedingung (43), wie man durch Einsetzen von (44) in die rechte Seite von (42) bestätigen kann. Tatsächlich ergibt sich dann (falls $p_r^{(\nu)}$ reell, das heißt $A^2 - M_r^2 (E_3^2 - B^2) > 0$ ist; nur die reellen Wurzeln $p_r^{(\nu)}$ brauchen bei der p_r-Integration berücksichtigt zu werden, vgl. Gl. (41))

$$M_r E_r \sqrt{1+\frac{p_r^{(v)2}}{M_r^2}} \equiv A + B\cdot p_r^{(v)} = \frac{A E_3^2}{E_3^2-B^2} \pm \frac{B\cdot E_3}{E_3^2-B^2}\sqrt{A^2-M_r^2(E_3^2-B^2)}$$

$$> \frac{AE_3^2}{E_3^2-B^2} - \frac{E_3\cdot E_3}{E_3^2-B^2}\sqrt{A^2} > 0\,,$$

$$\text{da} \quad |B| \equiv p_3\cdot|(n_3, n_r)| < E_3 .$$

4. Berechnung von ϱ_r.

Mit Gl. (26), (27), (28), (40), (41) und (44) sind jetzt alle in Formel (24) auftretenden Größen W_r, $f(M_r)$ und dN_3 bekannt, und wir sind in der Lage, ϱ_r als Funktion von p_3 und Θ_3 anzugeben. Da der Integrand in ϕ_r symmetrisch ist, kann

$$\int_0^{2\pi} d\phi_r \ldots \quad \text{durch} \quad 2\cdot\int_0^{\pi} d\phi_r \ldots$$

ersetzt werden. Außerdem brauchen wir die Integration über Θ_r nur von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu erstrecken, weil W_r für $\Theta_r > \frac{\pi}{2}$ verschwindet. Setzen wir nunmehr (26), (27), (28), (40) und (41) in (24) ein, so erhalten wir zum Schluß

$$\varrho_r = \frac{1}{8\pi\cdot \operatorname{arc\,tg} 2}\cdot\frac{1}{E_3}\cdot\int_0^{\pi/2} d\Theta_r\cdot\sin\Theta_r\cdot\int_0^{\pi} d\phi_r \times$$
$$\times \int_{M_0-\Gamma}^{M_0+\Gamma} dM_r\cdot\left\{Q\left(k_s^{(1)}\right)\cdot F^{(1)}\cdot Q\left(k_s^{(2)}\right)\cdot F^{(2)}\right\} \tag{45}$$

mit (v = 1,2)

$$F^{(v)} = p_r^{(v)2}\cdot\frac{\Gamma}{(M_r-M_0)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2}\times \tag{46a}$$

$$\times \frac{1}{1 - \frac{k_s^{(v)} - p_r^{(v)} \cos\Theta_r}{\sqrt{k_s^{(v)2} - 2k_s^{(v)} p_r^{(v)} \cos\Theta_r + p_r^{(v)2} + M_r^2}}} \times \tag{46a}$$

$$\times \frac{2M_r}{\sqrt{(M_r^2 + M_3^2 - M_s^2)^2 - 4M_3^2 M_r^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left| E_3 \cdot \frac{p_r^{(v)}}{M_r \cdot \sqrt{M_r^2 + p_r^{(v)2}}} - \frac{p_3 \cdot (n_3, n_r)}{M_r} \right|})$$

wenn a) $A^2 - M_r^2 (E_3^2 - B^2) > 0$,

das heißt $p_r^{(v)}$ reell ist;

b) $p_r^{(v)} > 0$;

c) $p_r^{(v)} \cos\Theta_r + M - \sqrt{p_r^{(v)2} + M_r^2} > 0$;

$$F^{(v)} = 0 \quad \text{sonst}, \tag{46b}$$

$$k_s^{(v)} \equiv \frac{2M \cdot \sqrt{p_3^{(v)2} + M_r^2} + M_4^2 - M_r^2 - M^2}{2\left(p_r \cos\Theta_r + M - \sqrt{p_r^{(v)2} + M_r^2}\right)} .$$

Diese Gleichung kann als Ausgangspunkt zur numerischen Berechnung von ϱ_r dienen.

ERGEBNISSE

		Δk	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{\varrho_2 \Omega^2}{\varrho_1 \Omega}$	$\frac{\varrho_r \Omega}{\varrho_1 \Omega}$
$\Theta_3 = 15^\circ$;	$p_3 = 1{,}25$ [GeV]	0,1	0,07	0,05
		0,15	0,20	0,13
	$k_1 = 1{,}022$	0,2	0,38	0,22
	$k_2 = 1{,}073$	0,3	0,86	0,44
	$p_3 = 1{,}5$	0,1	0,09	0,035
		0,15	0,24	0,094
	$k_1 = 1{,}277$	0,2	0,43	0,18
	$k_2 = 1{,}325$	0,3	0,95	0,35
	$p_3 = 2$	0,1	0,12	0,01
		0,15	0,30	0,06
	$k_1 = 1{,}818$	0,2	0,52	0,10
	$k_2 = 1{,}862$	0,3	1,1	0,24
	$p_3 = 2{,}5$	0,1	0,150	0,003
		0,15	0,355	0,024
	$k_1 = 2{,}393$	0,2	0,60	0,07
	$k_2 = 2{,}436$	0,3	1,23	0,15
	$p_3 = 3$	0,1	0,18	-
		0,15	0,41	0,009
	$k_1 = 2{,}999$	0,2	0,69	0,025
	$k_2 = 3{,}042$	0,3	1,36	0,104

$$\Delta k = k_{max} - k_1$$

		Δk	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{\varrho_2 \Omega^2}{\varrho_1 \Omega}$	$\frac{\varrho_r \Omega}{\varrho_1 \Omega}$
$\theta = 30^\circ$;	$p_3 = 1$ [GeV]	0,1	0,03	0,02
		0,15	0,13	0,08
	$k_1 = 0{,}960$	0,2	0,26	0,16
	$k_2 = 1{,}028$	0,3	0,60	0,306
	$p_3 = 1{,}5$	0,1	0,065	0,0017
		0,15	0,210	0,0135
	$k_1 = 1{,}685$	0,2	0,389	0,05
	$k_2 = 1{,}748$	0,3	0,829	0,157
	$p_3 = 2$	0,1	0,090	-
		0,15	0,289	0,0017
	$k_1 = 2{,}604$	0,2	0,526	0,0075
	$k_2 = 2{,}668$	0,3	1,08	0,039

	Δk	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{\rho_2 \Omega^2}{\rho_1 \Omega}$	$\frac{\rho_\pi \Omega}{\rho_1 \Omega}$
$\theta_3 = 45^\circ$; $p_3 = 0,75$ [GeV]	0,1	0	0
	0,15	0,032	0,01
$k_1 = 0,958$	0,2	0,103	0,039
$k_2 = 1,068$	0,3	0,304	0,1
$p_3 = 1$	0,1	0	0
	0,15	0,050	0,001
$k_1 = 1,516$	0,2	0,149	0,004
$k_2 = 1,623$	0,3	0,409	0,048
$p_3 = 1,25$	0,1	0	0
	0,15	0,053	0
$k_1 = 2,295$	0,2	0,178	0
$k_2 = 2,408$	0,3	0,500	0,005
$p_3 = 1,5$	0,1	0	
	0,15	0,032	
$k_1 = 3,429$	0,2	0,174	
$k_2 = 3,556$	0,3	0,559	

		Δk	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{\varrho_2 \Omega^2}{\varrho_1 \Omega}$	$\frac{\varrho_r \Omega}{\varrho_1 \Omega}$
$\theta_3 = 60^\circ$;	$p_3 = 0,5$ [GeV]	0,1	0	0
		0,15	0	0
	$k_1 = 1,014$	0,2	0	0
	$k_2 = 1,248$	0,3	0,033	0,0004
		0,4	0,132	0,019
		0,5	0,268	0,051
	$p_3 = 0,55$	0,1	0	0
		0,15	0	0
	$k_1 = 1,191$	0,2	0	0
	$k_2 = 1,424$	0,3	0,038	0,001
		0,4	0,145	0,010
		0,5	0,290	0,034
	$p_3 = 0,6$	0,1	0	
		0,15	0	
	$k_1 = 1,398$	0,2	0	
	$k_2 = 1,633$	0,3	0,039	
		0,4	0,154	
		0,5	0,307	
	$p_3 = 0,65$	0,1	0	
		0,15	0	
	$k_1 = 1,641$	0,2	0	
	$k_2 = 1,882$	0,3	0,038	
		0,4	0,158	
		0,5	0,318	

Den numerischen Rechnungen wurden folgende Werte für M_p, M_π, M_o und Γ zugrunde gelegt:

$M_p = 0,94$ GeV (Protonenmasse)
$M_\pi = 0,14$ GeV (π-Mesonen-Masse)
$M_o = 1,237$ GeV (Masse von N^*)
$\Gamma = 0,118$ GeV (Halbwertsbreite des Massenspektrums von N^*)

VERGLEICH MIT DER EXPERIMENTELLEN ERFAHRUNG

Leider können bis heute nur Experimente mit einer sehr viel kleineren Primärenergie (400 - 600 MeV) zum Vergleich herangezogen werden. K. Berkelmann et al.[4] haben die Zahl von Protonen unter dem Winkel $\Theta_3 = 35{,}25^\circ$ und dem Impuls 420 MeV/c (bzw. 550 MeV/c und 638 MeV/c) als Funktion von k_{max} gemessen. Abgesehen von dem endlichen Auflösungsvermögen für Winkel ($\Delta\Theta = 0{,}95^\circ$ und $\sqrt{(\frac{\Delta p}{p})^2} = 3{,}35$ %), sowie der speziellen Form der Kante des dort verwandten Bremsspektrums, können diese Funktionen direkt mit Rechnungen nach der statistischen Theorie verglichen werden. Fig. 4a, b, c zeigt für $P_3 = 550$ MeV/c und 638 MeV/c eine befriedigende Übereinstimmung, während für $p_3 = 420$ MeV/c die Rechnungen einen 2 bis 3 mal höheren Wert liefern als die Experimente. Beim Vergleich der experimentellen Kurven unter sich fällt allerdings die Kurve mit $p_3 = 420$ MeV/c durch einen relativ flachen Anstieg auf.

In gleicher Weise wurden die experimentellen Ergebnisse von R. E. Diebold[5] mit der Theorie verglichen (Fig. 5a, b), obwohl die Meßgenauigkeit hier erheblich geringer ist. Es besteht auch hier annähernde Übereinstimmung.

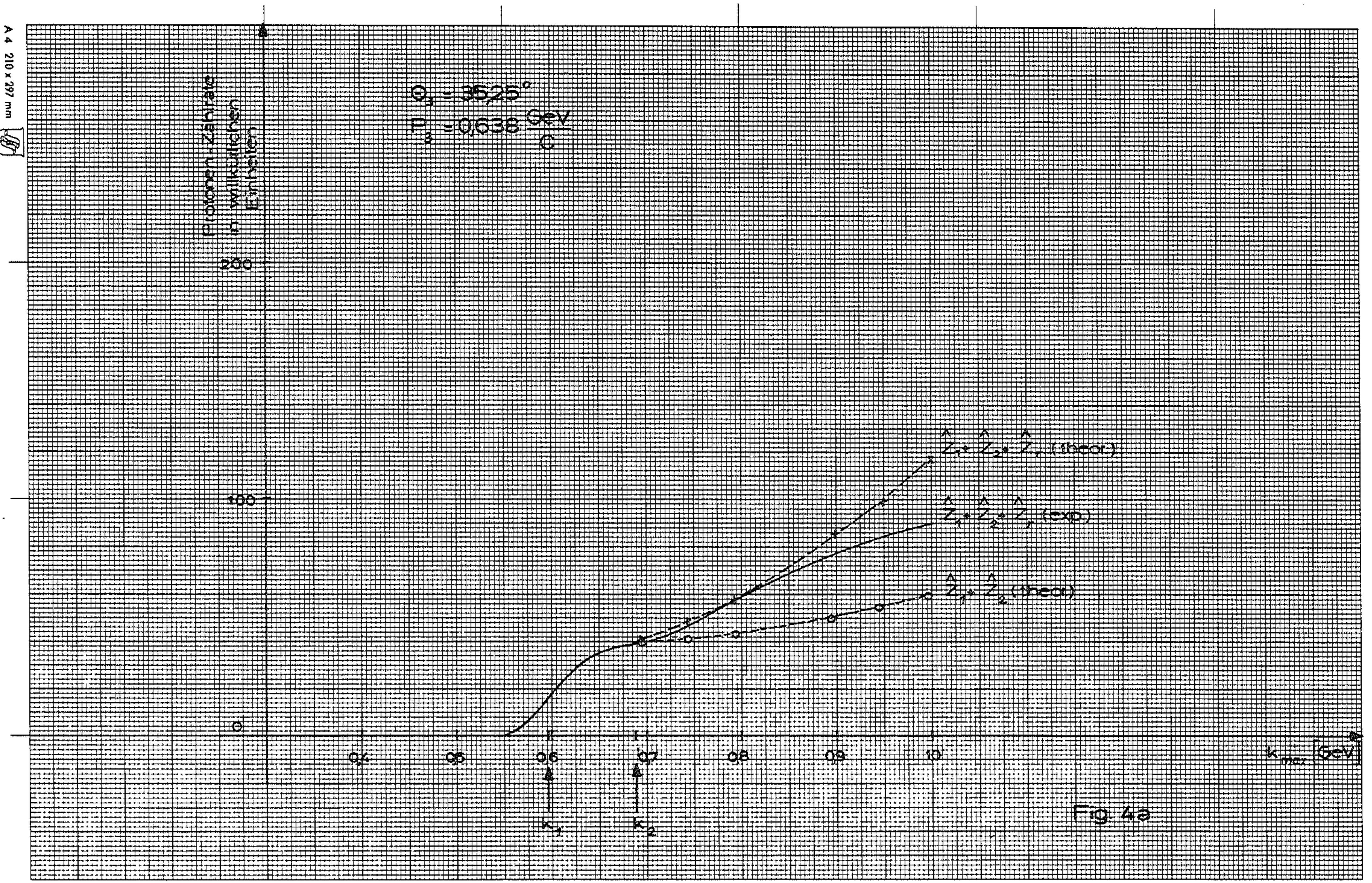
Zusammenfassend kann man sagen, daß die vorliegende experimentelle Erfahrung die Annahme bestärkt, daß die statistische Theorie mit den hier verwandten Parametern größenordnungsmäßig richtige Anhaltspunkte für den zu erwartenden Untergrund durch Mehrfachproduktion liefert.

Fräulein L. Jorjan danken wir für die Durchführung der numerischen Rechnungen auf der IBM 650.

---

4) K. Berkelmann, A. Franklin, D. McLeod, S. Richert and A. Silverman, Il Nuovo Cimento 27 497 (1963)

5) R. E. Diebold, Thesis 1963, California Institute of Technology



A 4 210 x 297 mm
$\Theta_3 = 35{,}25°$
$P_3 = 0{,}638 \frac{GeV}{c}$
Protonen-Zählrate in willkürlichen Einheiten
200
100
0
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
k_{max} [GeV]
k_1
k_2
$\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_r$ (theor.)
$\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_r$ (exp.)
$\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$ (theor.)

Fig. 4a

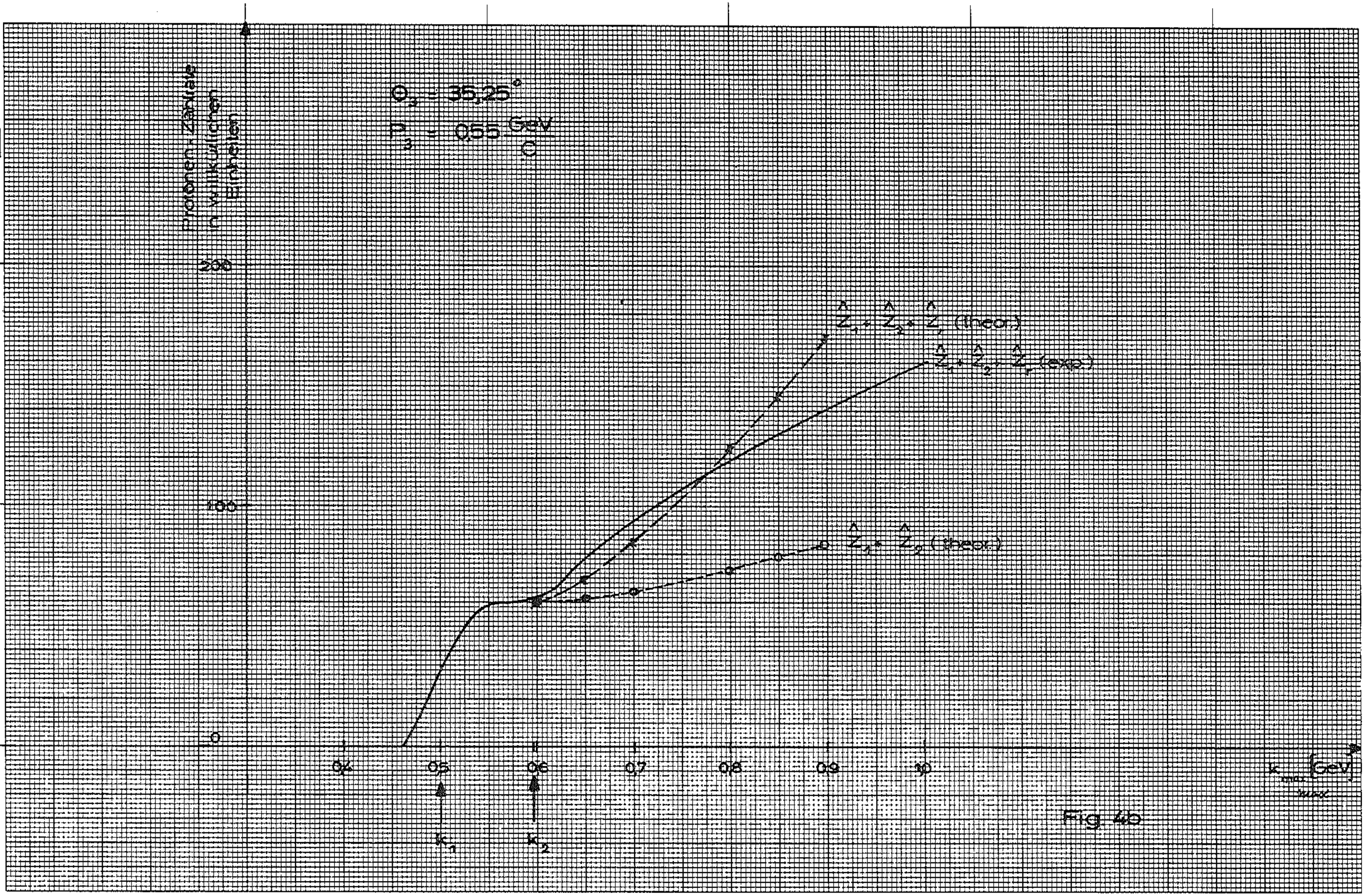
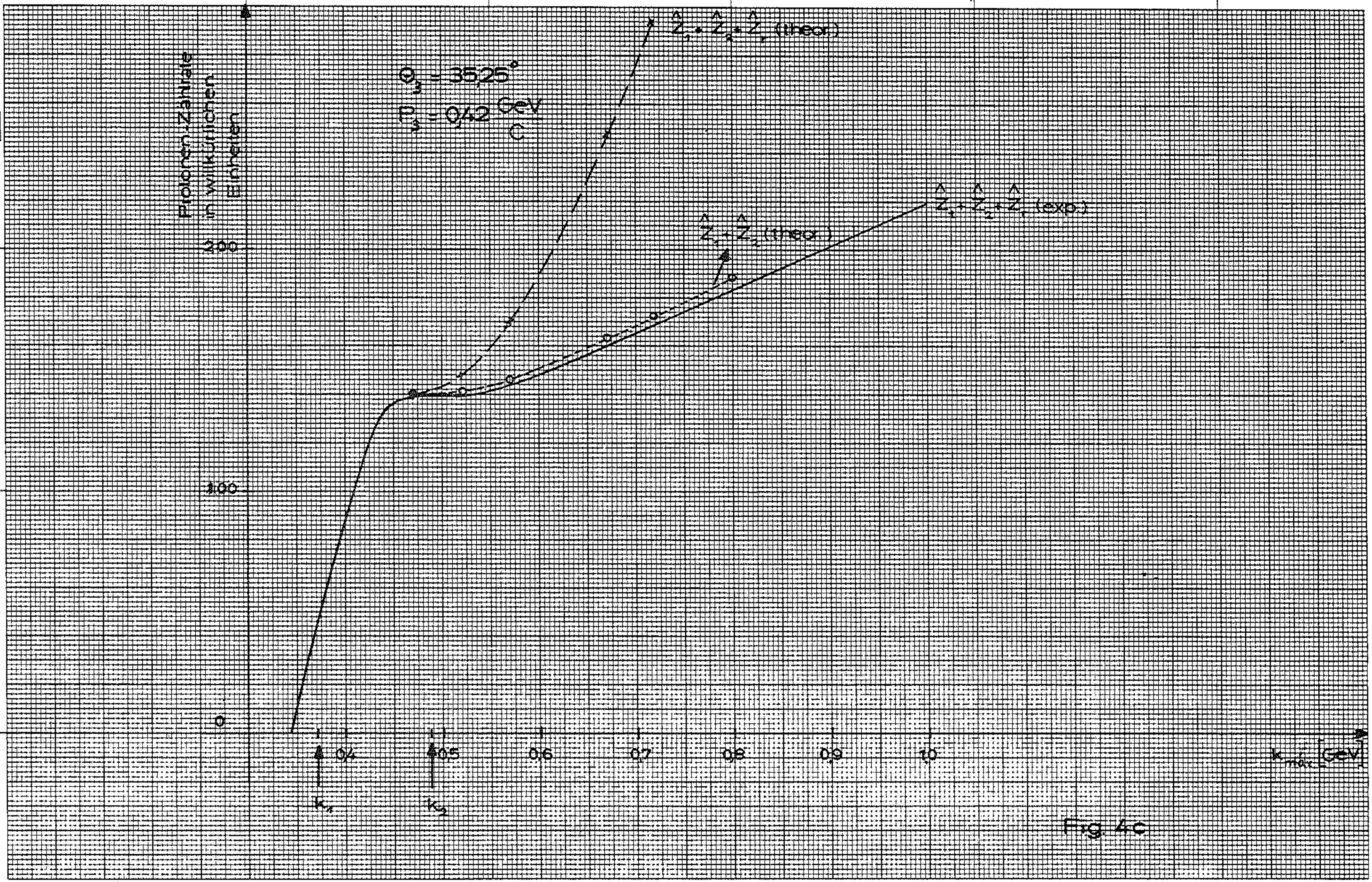

Θ3 = 35,25°
P3 = 0,55 GeV/c
Protonen-Zählrate in willkürlichen Einheiten
200
100
0
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
k_max [GeV]
k1
k2
Ẑ1 + Ẑ2 + Ẑr (theor.)
Ẑ1 + Ẑ2 + Ẑr (exp.)
Ẑ1 + Ẑ2 (theor.)

Fig. 4b



$\hat{Z}_1+\hat{Z}_2+\hat{Z}_r$ (theor.)
$\Theta_3 = 35,25°$
$P_3 = 0,42\ \frac{GeV}{c}$
Pionen Zählrate in willkürlichen Einheiten
$\hat{Z}_1+\hat{Z}_2+\hat{Z}_r$ (exp.)
$\hat{Z}_1+\hat{Z}_2$ (theor.)
200
100
0
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
k_{max} [GeV]
k_1
k_2

Fig. 4c

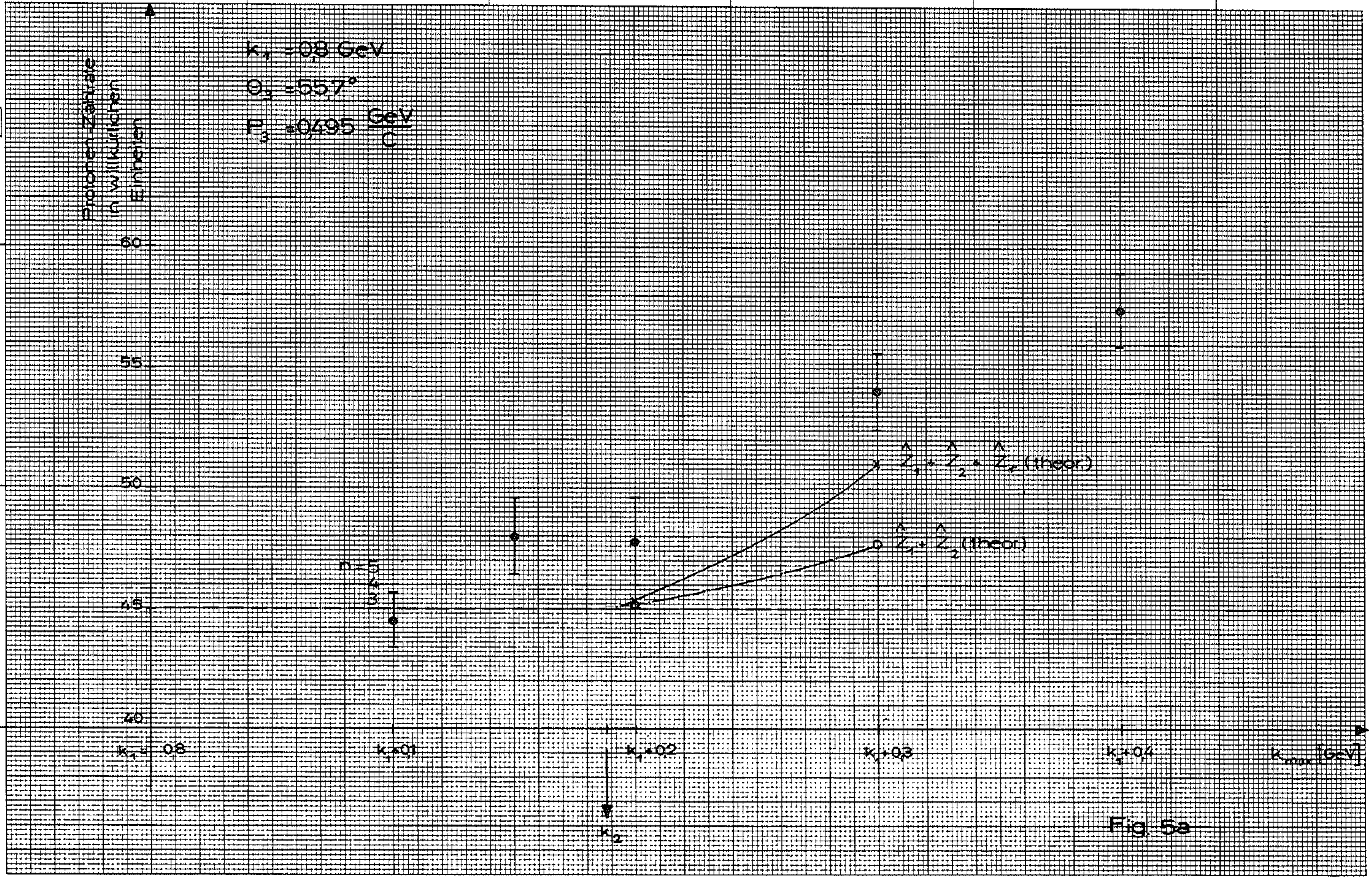

$k_1 = 0{,}8$ GeV
$\Theta_3 = 55{,}7°$
$P_3 = 0{,}495 \frac{GeV}{c}$
Protonen-Zählrate in willkürlichen Einheiten
60
55
50
45
40
$\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_r$ (theor.)
$\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$ (theor.)
n = 5
4
3
$k_1 = 0{,}8$
$k_1 + 0{,}1$
$k_1 + 0{,}2$
$k_1 + 0{,}3$
$k_1 + 0{,}4$
k_{max} [GeV]
k_2

Fig. 5a

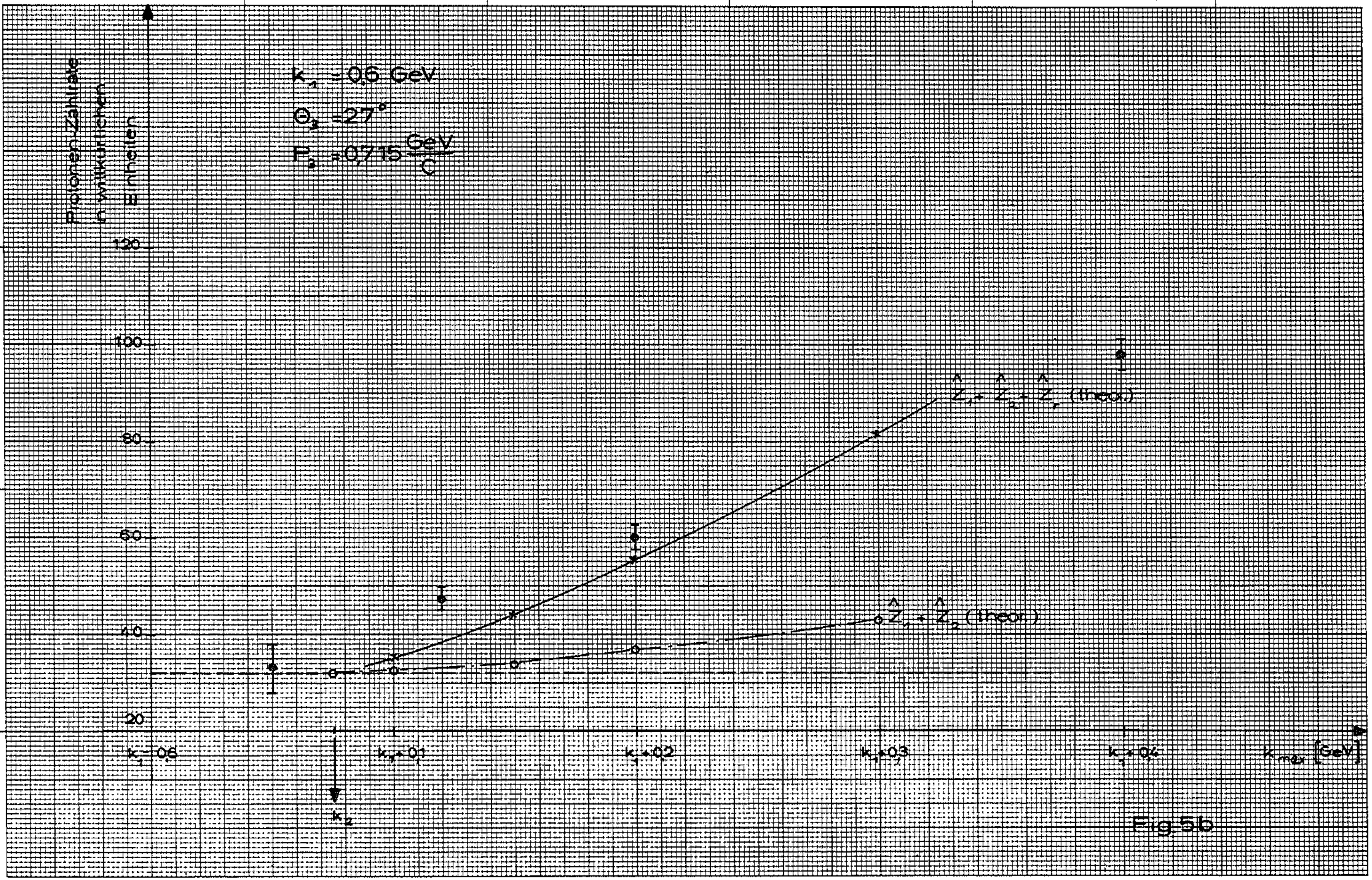

Protonen-Zählrate
in willkürlichen
Einheiten
k_1 = 0,6 GeV
Θ_3 = 27°
P_3 = 0,715 GeV/c
120
100
80
60
40
20
Ẑ_1 + Ẑ_2 + Ẑ_r (theor.)
Ẑ_1 + Ẑ_2 (theor.)
k_1 = 0,6
k_1 + 0,1
k_1 + 0,2
k_1 + 0,3
k_1 + 0,4
k_max [GeV]
k_2

Fig 5b