

Interner Bericht  
DESY E3/R1-73/1  
Juli 1973

DESY-Bibliothek  
DESY-Bibliothek  
1. AUG. 1973

Nichtlineare Störungen im Speicherring durch das longitudinale,  
rotationssymmetrische Magnetfeld einer Detektoranordnung

von

E. Freytag und G. Ripken



## Abstract

In the following work the  $\vec{r}$  non-linear effects caused by a longitudinal rotationally-symmetric detector field in a storage ring will be examined.

For the calculation of the detector field the longitudinal and radial components are expanded into a power series of  $r$  ( $r$  = distance from the rotation axis). It is shown that the field in the whole space is fully determined only by the longitudinal field component  $B_{\sigma}$  lying along the rotation axis, and the coefficients of the series expansion can be obtained by differentiation of the function  $B_{\sigma}(\sigma)$  with respect to  $\sigma$  ( $\sigma$  is the measure of length on the rotation axis).

It will be further proved that the radial field parts belonging to each expansion coefficient contain, besides of pure sextupoles, octupoles etc., additional terms which vanish exactly for a transverse field but are generally non-zero in the presence of a longitudinal component.

Moreover, it will be demonstrated that the expansion coefficients as functions of  $\sigma$  in the sections of field decrease go through oscillations, where the number of zero crossings increases in relation to the increase of the order of the powers. As a consequence of these oscillations, the deflection of the particles caused by the field parts belonging to the higher-order expansion coefficients are largely averaged out, and the higher the order of the field part the better the compensating effect becomes, because with the increasing power of  $r$  the individual maxima and minima of the expansion coefficients move closer and closer together.

The non-linear equations of motion for particles in a longitudinal rotationally-symmetric magnetic field will be derived and an approximation method described to enable numerical solution of the differential equation by introduction of non-linear thin lenses. For this purpose a rotated coordinate system with locally dependent rotational angle is needed, in which the betatron oscillations are decoupled (in linear approximation). To examine the non-linear effects, the linear lenses located between the non-linear lenses, can be neglected (apart from a small change of the amplitude function) in the first approximation, because they cause only a small phase-shift from one non-linear lens to the next. This phase-shift corresponds to a negligible displacement of the non-linear lenses.

Finally it is shown by a simulation computation that the non-linear effects caused by the PLUTO magnet (a detector solenoid with compensating coils on both sides) will not endanger the normal operation of the DESY storage ring.

### Zusammenfassung:

In der vorliegenden Arbeit werden die von einem longitudinalen, rotationssymmetrischen Detektorfeld im Speicherring hervorgerufenen nichtlinearen Störungen untersucht.

Zur Berechnung des Detektorfeldes werden die longitudinale und radiale Komponente des Magnetfeldes nach Potenzen von  $r$  ( $r$  = Abstand von der Rotationsachse) entwickelt. Es wird gezeigt, daß das Feld im ganzen Raum allein durch die longitudinale Feldkomponente  $B_{\sigma}$  auf der Rotationsachse bereits eindeutig festgelegt ist und die Entwicklungskoeffizienten für die Reihenentwicklung durch Differentiation der Funktion  $B_{\sigma}(\sigma)$  (bei  $r = 0$ ) nach  $\sigma$  gewonnen werden können ( $\sigma$  mißt die Länge auf der Rotationsachse).

Weiterhin wird bewiesen, daß die zu den einzelnen Entwicklungskoeffizienten gehörigen radialen Feldanteile neben den reinen Sextupolen, Oktupolen usw. noch Zusatzterme enthalten, die für ein transversales Feld identisch verschwinden, jedoch bei Vorhandensein einer longitudinalen Komponente im allgemeinen verschieden von Null sind.

Ferner wird erläutert, daß die Entwicklungskoeffizienten als Funktion von  $\sigma$  im Bereich des Feldabfalls Oszillationen durchführen, wobei die Zahl der Nulldurchgänge mit wachsender Potenzordnung zunimmt. Diese Oszillationen haben zur Folge, daß die Ablenkungen der Teilchen durch die zu den Entwicklungskoeffizienten höherer Ordnung gehörigen Feldanteile weitgehend weggemittelt werden. Dabei nimmt die kompensierende Wirkung zu, je höher die Ordnung des Feldanteils ausfällt, weil mit wachsender Potenz von  $r$  die einzelnen Maxima und Minima der Entwicklungskoeffizienten immer dichter zusammenrücken.

Die nichtlineare Bewegungsgleichung für Teilchen in einem longitudinalen, rotationssymmetrischen Magnetfeld wird aufgestellt und ein Näherungsverfahren beschrieben, wie diese Differentialgleichung durch Einführung punktförmiger, nichtlinearer Linsen numerisch gelöst werden kann. Zu dem Zweck wird ein gedrehtes Koordinatensystem mit ortsabhängigem Drehwinkel eingeführt, in dem die Betatronschwingungen (in linearer Näherung) entkoppelt sind. Zur Untersuchung der nicht-

linearen Effekte können dann die linearen Linsen, die zwischen den (punktförmig gedachten) nichtlinearen Linsen sitzen, in erster Näherung außer Acht gelassen werden, weil sie (abgesehen von einer geringfügigen Änderung der Amplitudenfunktion) lediglich einen kleinen Phasenvorschub von einer nichtlinearen Linse zur nächstfolgenden hervorrufen, der einer vernachlässigbar kleinen Verrückung der nichtlinearen Linsen gleichkommt.

Schließlich wird anhand einer Simulationsrechnung gezeigt, daß die nichtlinearen Störungen, die der Pluto-Magnet (ein Detektorsolenoid mit Kompensationsspulen zu beiden Seiten) im DESY-Speicherring hervorrufen, den Betrieb des Speicherringes nicht ernsthaft gefährden.

<u>Inhalt:</u>	<u>Seite</u>
1. Einführung und Problemstellung	1
2. Die nichtlinearen Bestimmungsgleichungen für die Teilchenbewegung in einem longitudinalen, rotationssymmetrischen Detektorfeld	3
2.1 Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen für ein Magnetfeld mit longitudinaler Komponente	3
2.2 Berechnung des rotationssymmetrischen Detektorfeldes	10
2.2.1 Das Feld im ortsfesten Koordinatensystem	10
2.2.1.1 Berechnung des Feldes bei Vorgabe der Longitudinalkomponente auf der Rotationsachse	10
2.2.1.2 Feldberechnung für zwei einfache Modelle	12
2.2.2 Übergang zum mitbewegten Bezugssystem bei endlichem Kreuzungswinkel	15
2.3 Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen für das rotationssymmetrische Detektorfeld	17
3. Numerische Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichungen	20
3.1 Elimination der in $x'$ und $z'$ linearen Glieder durch Übergang zu einem gedrehten Koordinatensystem mit ortsabhängigem Drehwinkel	20
3.2 Beschreibung des Lösungsverfahrens	22
4. Auswertung für "Pluto"	25

## 1. Einführung und Problemstellung

Das für den Teilchennachweis vorgesehene Detektorsolenoid wirkt in mehrfacher Hinsicht störend auf den Elektronen- und Positronenstrahl im Speicherring ein:

- I) Das Magnetfeld längs der Bewegungsrichtung der umlaufenden Teilchen verursacht über die Steigungen  $x'$  und  $z'$  eine Kopplung der Betatronschwingungen.
- II) Die durch den endlichen Kreuzungswinkel des Elektronen- und Positronenstrahls bedingte Komponente des Detektorfeldes senkrecht zur idealen Gleichgewichtsbahn ruft eine Verschiebung des closed-orbit hervor.
- III) An den beiden Enden des Solenoids treten Multipolfelder höherer Ordnung auf, die zu nichtlinearen Störungen der Teilchenbahnen Anlaß geben.

Die closed orbit-Verschiebung bewirkt, daß sich die beiden Strahlen im Kreuzungspunkt nicht mehr vollständig durchdringen, weil die Elektronen und Positronen in entgegengesetzter Richtung abgelenkt werden. Darüber hinaus stellen sich aufgrund der Kopplung außer einer Änderung der Schwingungsform noch die folgenden weiteren Störungen ein:

- A) Der Strahl wird um die s-Achse (= Bewegungsrichtung) gedreht, so daß der Strahlquerschnitt nicht mehr symmetrisch zur x- und z-Achse liegt (1). Infolgedessen tritt eine Änderung der Raumladungskräfte in den Wechselwirkungszonen auf, die eine Verschiebung der Luminositätsgrenze aufgrund des Amman-Ritson-Effektes zur Folge hat.
- B) Es ändert sich der Verlauf der Dispersionsbahnen.

Für den einwandfreien Betrieb des Storage-Ringes ist es erforderlich, diese Störungen, die die Luminositätsgrenze herabsetzen und die Stabilität der Teilchenbewegung gefährden können, durch geeignete Korrekturfelder weitgehend zu beheben.

Im Rahmen der linearen Theorie wurde nun bereits dargelegt (2, 3, 4), daß man die closed orbit-Verschiebung innerhalb der Wechselwirkungszonen durch homogene Felder senkrecht zur Bezugsbahn beheben kann, insbesondere Beam-Bump-Felder für die beiden Kreuzungspunkte. Ebenso kann man die Kopplung der Betatronschwingungen durch Solenoidfelder rückgängig machen, die dem Detektorfeld entgegengerichtet und symmetrisch zum Kreuzungspunkt angeordnet sind. Ferner wurde nachgewiesen, daß mit dieser Korrektur dann gleichzeitig die unter A) und B) aufgeführten Effekte weitgehend ausgeschaltet sind.

Dagegen wurden die unter III) genannten nichtlinearen Störungen, die durch die höheren Multipolanteile der Endfelder bedingt sind, bisher außer Acht gelassen. Einflüsse dieser Art werden durch die zusätzlichen Multipolfelder noch weiter verstärkt, die von den zur Aufhebung der Kopplung vorgesehenen Kompensationsspulen herrühren.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diese nichtlinearen Effekte zu untersuchen. Dabei wird anhand von Simulationsrechnungen gezeigt, daß durch solche Störungen der Betrieb des Storage-Ringes auch bei endlichem Kreuzungswinkel der Strahlen nicht ernsthaft gefährdet wird, sofern man bei der Einstellung des Arbeitspunktes gewisse Resonanzstellen im  $(Q_x - Q_z)$ -Diagramm meidet.

## 2. Die nichtlinearen Bestimmungsgleichungen für die Teilchenbewegung in einem longitudinalen, rotationssymmetrischen Detektorfeld

### 2.1 Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen für ein Magnetfeld mit longitudinaler Komponente

Um die nichtlinearen Bestimmungsgleichungen für die Teilchenbewegung in dem longitudinalen Detektorfeld aufzustellen, mit deren Hilfe der Einfluß der Multipolfelder höherer Ordnung auf die Stabilität der Teilchenbahnen ermittelt werden kann, führen wir zu Beginn unserer Untersuchung zwei verschiedene Koordinatensysteme ein:

- a) Ein ortsfestes ( $v - u - \sigma$ )-System, dessen Ursprung im Kreuzungspunkt der Strahlen liegt ( $\sigma =$  Rotationsachse der Solenoide;  $u =$  horizontale Achse;  $v =$  vertikale Achse).

Die Gleichung der Bezugsbahn innerhalb des Detektorbereiches lautet in diesem System

$$(2.1) \quad \begin{cases} v = \sigma \cdot \operatorname{tg} \alpha ; \\ u = 0 ; \end{cases}$$

( $\alpha =$  halber Kreuzungswinkel).

- b) Ein entlang dieser Sollbahn definiertes rechtwinkliges Koordinatensystem ( $z, x, s$ ):

$s =$  Koordinate des Ursprungs auf der Sollbahn;  
 $z =$  vertikale Achse;  
 $x =$  horizontale Achse,

welches sich mit dem zu betrachtenden Elektron bzw. Positron mitbewegt, und zwar mit solcher Geschwindigkeit

$$w = \dot{s},$$

daß das Teilchen stets in der ( $x-z$ )-Ebene verbleibt (Abb.1).

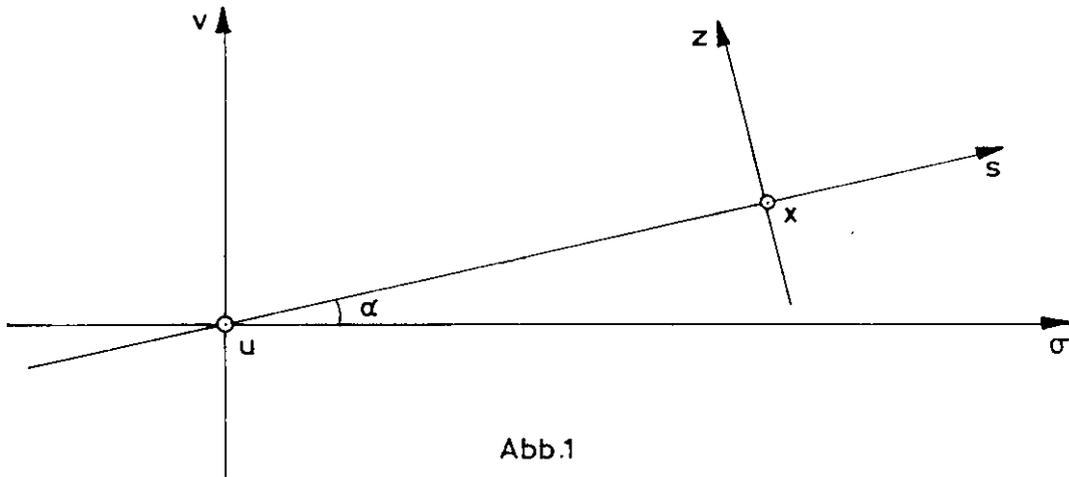


Abb.1

Das ortsfeste Koordinatensystem  $(v, u, \sigma)$  eignet sich besonders zur Bestimmung des rotationssymmetrischen, longitudinalen Feldes und des zugehörigen Streufeldes (siehe Abschnitt 2.2.1.), während man die Teilchenbewegung zweckmäßigerweise in dem mitbewegten System  $(z, x, s)$  untersucht (5).

Wir ermitteln zunächst die Bewegungsgleichung der Teilchen bei (beliebig) vorgegebenem Feld

$$\mathcal{L} = (B_z, B_x, B_s).$$

Bezeichnet  $\mathcal{R}$  den Ortsvektor des Ursprungs des  $(z, x, s)$ -Systems und

$$(2.2) \quad \mathcal{r} = \mathcal{R} + z \cdot \mathbf{n}_z + x \cdot \mathbf{n}_x$$

( $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_z$  = Einheitsvektoren längs der x- und z-Achse)

den Ortsvektor des zu betrachtenden Partikels, bezogen auf einen beliebig gewählten Aufpunkt P, so ergeben sich aus der Lorentz-Gleichung

$$m \ddot{\mathcal{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathcal{r}} \mathcal{L}]$$

unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$(2.3a) \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{z} \cdot \mathbf{n}_z + \dot{x} \cdot \mathbf{n}_x + \dot{w} \cdot \mathbf{n}_s ;$$

$$(2.3b) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{z} \cdot \mathbf{n}_z + \ddot{x} \cdot \mathbf{n}_x + \dot{w} \cdot \mathbf{n}_s$$

(die Bezugsbahn innerhalb des Detektorbereiches ist nicht gekrümmt) sowie

$$(2.4) \quad \dot{x} = w \cdot x' ; \quad \ddot{x} = w^2 \cdot x'' + \dot{w} \cdot x' ;$$

$$\dot{z} = w \cdot z' ; \quad \ddot{z} = w^2 \cdot z'' + \dot{w} \cdot z'$$

die Bewegungsgleichungen der Teilchen zu (6)

$$(2.5a) \quad x'' + \frac{\dot{w}}{w^2} \cdot x' = - \frac{e}{c \cdot p} \cdot \frac{v}{w} (z' \cdot B_s - B_z) ;$$

$$(2.5b) \quad z'' + \frac{\dot{w}}{w^2} \cdot z' = + \frac{e}{c \cdot p} \cdot \frac{v}{w} (x' \cdot B_s - B_x) ;$$

$$(2.5c) \quad \frac{\dot{w}}{w^2} = \frac{e}{c \cdot p} \cdot \frac{v}{w} (z' \cdot B_x - x' \cdot B_z) .$$

Dabei kann nach Gl. (2.3a) für den in (2.5) auftretenden Faktor  $\frac{v}{w}$

$$(2.6) \quad \frac{v}{w} = \sqrt{1+x'^2+z'^2}$$

gesetzt werden.

Weiterhin entsteht aus (2.5a) und (2.5b) durch Elimination der Größe  $\frac{\dot{w}}{w^2}$  mit Hilfe der Gl. (2.5c)

$$(2.7a) \quad x'' = - \frac{e}{c \cdot p} \sqrt{1+x'^2+z'^2} \cdot \{ z' \cdot B_s - (1+x'^2) \cdot B_z + x'z' \cdot B_x \} ;$$

$$(2.7b) \quad z'' = + \frac{e}{c \cdot p} \sqrt{1+x'^2+z'^2} \cdot \{ x' \cdot B_s - (1+z'^2) \cdot B_x + x'z' \cdot B_z \} .$$

Entwickelt man nun das Magnetfeld

$$\mathcal{L} = (B_z, B_x, B_s)$$

in der Umgebung der Sollbahn nach Potenzen der Koordinaten  $x, z$ , so folgt  
(wir berücksichtigen nur Potenzen bis zur dritten Ordnung)

$$\begin{aligned}
 B(z, x, s) &= B(0, 0, s) + x \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \cdot x^2 + 2 \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial z} \cdot xz + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \cdot z^2 \right\} \\
 &+ \frac{1}{6} \cdot \left\{ \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} \cdot x^3 + 3 \frac{\partial^3 B}{\partial x^2 \partial z} \cdot x^2 z + 3 \frac{\partial^3 B}{\partial x \partial z^2} \cdot xz^2 + \frac{\partial^3 B}{\partial z^3} \cdot z^3 \right\} \\
 &+ \dots ; \\
 &(B \equiv B_z, B_x, B_s)
 \end{aligned}$$

(sämtliche Ableitungen  $\partial^{(\nu+\mu)} B / \partial x^\nu \partial z^\mu$  sind an der Stelle  $x = z = 0$  zu nehmen)  
oder, wenn wir noch die Maxwell-Gleichungen

$$(2.8a) \quad \text{div } \mathcal{L} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_s}{\partial s} = 0 ;$$

$$(2.8b) \quad \text{rot } \mathcal{L} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z} ; \frac{\partial B_z}{\partial s} = \frac{\partial B_s}{\partial z} ; \frac{\partial B_x}{\partial s} = \frac{\partial B_s}{\partial x} ;$$

$$(2.8c) \quad 0 = \text{rot rot } \mathcal{L} \equiv \text{grad div } \mathcal{L} - \Delta \mathcal{L} = -\Delta \mathcal{L} \rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} = 0$$

beachten:

$$(2.9a) \quad \begin{pmatrix} B_x(z, x, s) \\ B_z(z, x, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x^{(0)} \\ B_z^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x^{(1)} \\ B_z^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x^{(2)} \\ B_z^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x^{(3)} \\ B_z^{(3)} \end{pmatrix} + \dots ;$$

$$(2.9b) \quad B_s(z, x, s) = B_s^{(0)} + B_s^{(1)} + B_s^{(2)} + \dots$$

mit den Definitionen

$$(2.10a) \quad B^{(0)} = B(0, 0, s) ;$$

$$(2.10b) \quad B^{(1)} = x \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \quad (\text{lineare Glieder in } x \text{ u. } z) ;$$

$$(2.10c) \quad \begin{pmatrix} B_x^{(2)} \\ B_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1x} \\ S_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{2x} \\ S_{2z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{3x} \\ S_{3z} \end{pmatrix} \equiv S_1 + S_2 + S_3$$

(quadratische Glieder)

$$(2.10d) \quad \begin{pmatrix} B_x^{(3)} \\ B_z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{1x} \\ O_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_{2x} \\ O_{2z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_{3x} \\ O_{3z} \end{pmatrix} \equiv O_1 + O_2 + O_3$$

(kubische Glieder) ;

$$(2.11a) \quad S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \cdot \left. \begin{matrix} z^2 - x^2 \\ 2xz \end{matrix} \right\} \text{Sextupole ;}$$

$$(2.11b) \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \cdot \left. \begin{matrix} 2xz \\ x^2 - z^2 \end{matrix} \right\}$$

$$(2.11c) \quad S_3 = -\frac{1}{2} \cdot \left. \begin{matrix} \frac{\partial^2 B_x}{\partial s^2} \cdot x^2 \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial s^2} \cdot z^2 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \left. \begin{matrix} \frac{\partial^2 B_s}{\partial x \partial s} \cdot x^2 \\ \frac{\partial^2 B_s}{\partial z \partial s} \cdot z^2 \end{matrix} \right\} ;$$

$$(2.12a) \quad O_1 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 B_z}{\partial x^2 \partial z} \cdot \left. \begin{matrix} x^3 - 3xz^2 \\ z^3 - 3x^2z \end{matrix} \right\} \text{Oktupole ;}$$

$$(2.12b) \quad O_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 B_x}{\partial z^3} \cdot \left. \begin{matrix} z^3 - 3x^2z \\ 3xz^2 - x^3 \end{matrix} \right\}$$

$$(2.12c) \quad O_3 = -\frac{1}{6} \cdot \left. \begin{matrix} x^3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial B_s}{\partial s} + 3x^2z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\partial B_s}{\partial s} \\ z^3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial B_s}{\partial s} + x^3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\partial B_s}{\partial s} \end{matrix} \right\} ;$$

$$(2.13) \quad B_s^{(2)} = \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \frac{\partial^2 B_s}{\partial x^2} + 2xz \cdot \frac{\partial^2 B_s}{\partial x \partial z} + z^2 \cdot \frac{\partial^2 B_s}{\partial z^2} \right) .$$

Bemerkenswert ist, daß nach Gl.(2.10), (2.11) und (2.12) das Feld

$$\begin{pmatrix} B_x(z, x, s) \\ B_z(z, x, s) \end{pmatrix}$$

neben den reinen Sextupol- und Oktupolanteilen  $S_1, S_2$  und  $O_1, O_2$  noch die Terme  $S_3$  und  $O_3$  enthält, die zwar für ein transversales Feld mit

$$\frac{\partial B_s}{\partial s} = 0$$

identisch verschwinden, jedoch bei Vorhandensein einer longitudinalen Feldkomponente im allgemeinen verschieden von Null sind.

Führen wir noch für die Koeffizienten der linearen Glieder die Bezeichnungen

$$(2.14a) \quad K = \frac{e}{c \cdot p} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{e}{c \cdot p} \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad ;$$

$$(2.14b) \quad N = \frac{1}{2} \frac{e}{c \cdot p} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \quad ;$$

$$(2.14c) \quad R = \frac{1}{2} \frac{e}{c \cdot p} \cdot B_s(0, 0, s)$$

ein, so erhält man jetzt durch Einsetzen von (2.9 - 13) in (2.7)

$$(2.15) \quad \begin{cases} x'' = A_x^{(0)} + A_x^{(1)} + A_x^{(2)} + A_x^{(3)} + \dots ; \\ z'' = A_z^{(0)} + A_z^{(1)} + A_z^{(2)} + A_z^{(3)} + \dots , \end{cases}$$

wobei die Glieder  $A^{(\nu)}$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) die Terme  $\nu$ -ter Ordnung zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 A_x^{(0)} &= \frac{e}{c \cdot p} \cdot B_z^{(0)} ; \\
 A_z^{(0)} &= - \frac{e}{c \cdot p} B_x^{(0)} ; \\
 A_x^{(1)} &= K \cdot x - (N + R') \cdot z - 2R \cdot z' ; \\
 A_z^{(1)} &= - K \cdot z - (N - R') \cdot x + 2R \cdot x' ; \\
 (2.16) \quad A_x^{(2)} &= \frac{e}{c \cdot p} \left[ - z' \cdot B_s^{(1)} + \frac{1}{2} (x'^2 + z'^2) \cdot B_z^{(0)} + B_z^{(2)} + \right. \\
 &\quad \left. + x'^2 \cdot B_z^{(0)} - x'z' \cdot B_x^{(0)} \right] ; \\
 A_z^{(2)} &= \frac{e}{c \cdot p} \left[ x' \cdot B_s^{(1)} - \frac{1}{2} (x'^2 + z'^2) \cdot B_x^{(0)} - B_x^{(2)} - \right. \\
 &\quad \left. - z'^2 \cdot B_x^{(0)} + x'z' \cdot B_z^{(0)} \right] ; \\
 A_x^{(3)} &= \frac{e}{c \cdot p} \left[ - z' \cdot B_s^{(2)} + \frac{1}{2} (x'^2 + z'^2) \cdot (B_z^{(1)} - z' \cdot B_s^{(0)}) + \right. \\
 &\quad \left. + B_z^{(3)} + x'^2 \cdot B_z^{(1)} - x'z' \cdot B_x^{(1)} \right] ; \\
 A_z^{(3)} &= \frac{e}{c \cdot p} \left[ x' \cdot B_s^{(2)} - \frac{1}{2} (x'^2 + z'^2) \cdot (B_x^{(1)} - x' \cdot B_s^{(0)}) - \right. \\
 &\quad \left. - B_x^{(3)} - z'^2 \cdot B_x^{(1)} + x'z' \cdot B_z^{(1)} \right]
 \end{aligned}$$

$$(\text{mit } R' \equiv \frac{\partial R}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{e}{p \cdot c} \frac{\partial B_s}{\partial s}).$$

Diese Gleichungen können dazu dienen, die Teilchenbewegung im Speicherring sowie die durch zusätzlich eingebaute Linsen verursachten linearen und nichtlinearen Störungen der Betatronschwingung zu berechnen, wenn das Magnetfeld  $\mathfrak{H}$  mit allen Ableitungen

$$\frac{\partial^{(\nu+\mu)} B}{\partial x^\nu \partial z^\mu} \quad (B \equiv B_z, B_x, B_s)$$

auf der Bezugsbahn  $x = z = 0$  bekannt ist. Da wir uns insbesondere für den Einfluß des longitudinalen Detektorfeldes auf den Elektronen-Positronenstrahl interessieren, besteht unsere nächste Aufgabe nunmehr darin, die in

(2.10 - 12) auftretenden Koeffizienten  $\frac{\partial^{(\nu+\mu)} B}{\partial x^\nu \partial z^\mu}$  für ein longitudinales, rotationssymmetrisches Feld zu ermitteln, und zwar unter Berücksichtigung eines endlichen Kreuzungswinkels  $2\alpha$  der Strahlen. Diese Untersuchung wird im nächsten Abschnitt durchgeführt.

## 2.2. Berechnung des rotationssymmetrischen Detektorfeldes.

### 2.2.1. Das Feld im ortsfesten Koordinatensystem

#### 2.2.1.1. Berechnung des Feldes bei Vorgabe der Longitudinalkomponente auf der Rotationsachse.

Zur Beschreibung und Berechnung des longitudinalen Detektorfeldes verwenden wir das ortsfeste Koordinatensystem  $(v, u, \sigma)$  und bezeichnen die Feldkomponenten längs der Achsen mit  $B_v, B_u, B_\sigma$ , während  $B_r$  das radiale Feld bedeuten soll (mit  $r^2 = u^2 + v^2$ ).

Wegen der Rotationssymmetrie des Feldes um die  $\sigma$ -Achse gilt in diesem Bezugssystem für das radiale Feld (Streufeld)

$$B_r(v, u, \sigma) = -B_r(-v, -u, \sigma)$$

(Antisymmetrie bei Spiegelung an der  $\sigma$ -Achse)

und für das longitudinale Feld

$$B_\sigma(v, u, \sigma) = B_\sigma(-v, -u, \sigma),$$

(Symmetrie bei Spiegelung an der  $\sigma$ -Achse)

so daß wir für  $B_r$  und  $B_\sigma$  folgende Potenzreihen in  $r$  anschreiben können:

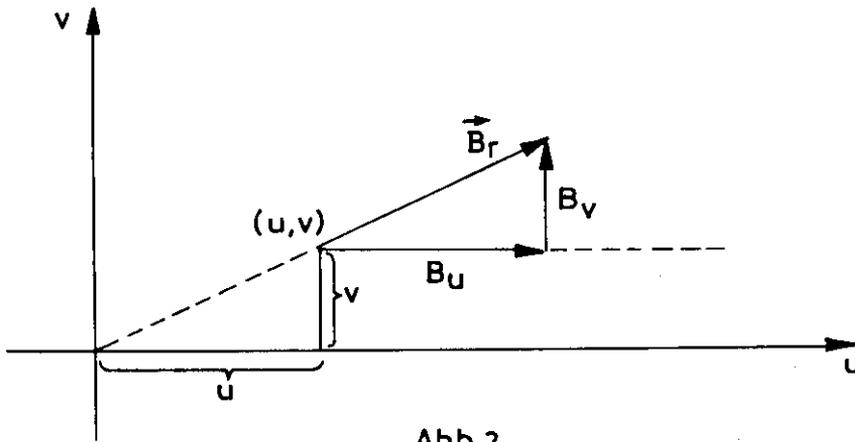
$$(2.17a) \quad B_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{(2\nu+1)}(\sigma) \cdot r^{2\nu+1};$$

$$(2.17b) \quad B_\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{(2\nu)}(\sigma) \cdot r^{2\nu}.$$

Aus Gl. (2.17) erhält man für die Komponenten  $B_u$  und  $B_v$

$$(2.18a) \quad B_u(v, u, \sigma) = \frac{u}{r} \cdot B_r = u \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{(2\nu+1)}(\sigma) \cdot (u^2 + v^2)^\nu;$$

$$(2.18b) \quad B_v(v, u, \sigma) = \frac{v}{r} \cdot B_r = v \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{(2\nu+1)}(\sigma) \cdot (u^2 + v^2)^\nu.$$



Geht man jetzt mit dem Ansatz (2.17a, b) in die Maxwell-Gleichungen

$$(2.19a) \quad \text{div } \vec{\mathcal{L}} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_r) = - \frac{\partial}{\partial \sigma} B_\sigma ;$$

$$(2.19b) \quad \text{rot } \vec{\mathcal{L}} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} B_r = \frac{\partial}{\partial r} B_\sigma$$

ein, so ergibt sich

$$\sum_{v=0}^{\infty} b_{(2v+1)} \cdot (2v+2) \cdot r^{2v} = - \sum_{v=0}^{\infty} \frac{db_{(2v)}}{d\sigma} \cdot r^{2v} ;$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{db_{(2v+1)}}{d\sigma} \cdot r^{2v+1} = \sum_{v=0}^{\infty} b_{(2v+2)} \cdot (2v+2) \cdot r^{2v+1} ,$$

woraus durch Koeffizientenvergleich nach Potenzen von  $r$  folgt:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} b_{(2v+1)}(\sigma) &= - \frac{1}{(2v+2)} \cdot b'_{2v}(\sigma) ; \\ b_{(2v+2)}(\sigma) &= + \frac{1}{(2v+2)} \cdot b'_{(2v+1)}(\sigma) ; \end{aligned}$$

( $v = 0, 1, 2, \dots$ )

Mit Hilfe dieser Gleichungen können aber die Koeffizienten

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

schrittweise bestimmt werden, wenn das longitudinale Feld auf der  $\sigma$ -Achse

$$B_{\sigma}(0, 0, \sigma) = b_0(\sigma)$$

bekannt ist. Diese Feldkomponente allein bestimmt also bereits das Magnetfeld  $\mathcal{H}$  im ganzen Raum. Insbesondere erhält man für die Entwicklungskoeffizienten bis zur dritten Ordnung

$$(2.21) \quad \begin{aligned} b_1(\sigma) &= -\frac{1}{2} b_0'(\sigma); \\ b_2(\sigma) &= \frac{1}{2} b_1'(\sigma) = -\frac{1}{4} b_0''(\sigma); \\ b_3(\sigma) &= -\frac{1}{4} b_2'(\sigma) = \frac{1}{16} b_0'''(\sigma). \end{aligned}$$

#### 2.2.1.2. Feldberechnung für zwei einfache Modelle.

Aus Gl.(2.21) ist zunächst ersichtlich, daß die Koeffizienten  $b_{\nu}(\sigma)$  für  $\nu \geq 1$  im mittleren Bereich des Solenoids, wo  $b_0(\sigma)$  praktisch konstant ist, (nahezu) verschwinden und von Null verschiedene Werte erst an den Spulen-Enden auftreten, wo das Feld abzufallen beginnt.

Um eine Vorstellung von diesen Größen zu bekommen, stellen wir den Feldabfall näherungsweise durch eine analytische Funktion dar. Eine geeignete Funktion hierfür ist der Ausdruck

$$(2.22) \quad b_0(\sigma) = \frac{B_m}{1 + e^{\frac{4\sigma}{d}}}$$

mit den Ableitungen

$$(2.23) \quad \begin{aligned} b_0'(\sigma) &= -\frac{B_m}{d} \cdot 4 \frac{b_0}{B_m} \left( 1 - \frac{b_0}{B_m} \right); \\ b_0''(\sigma) &= +\frac{B_m}{d^2} \cdot 16 \frac{b_0}{B_m} \left( 1 - \frac{b_0}{B_m} \right) \left( 1 - 2\frac{b_0}{B_m} \right); \\ b_0'''(\sigma) &= -\frac{B_m}{d^3} \cdot 64 \frac{b_0}{B_m} \left( 1 - \frac{b_0}{B_m} \right) \left( 1 - 6\frac{b_0}{B_m} + 6\frac{b_0^2}{B_m^2} \right). \end{aligned}$$

Für  $\sigma = 0$  wird

$$b_0 = \frac{1}{2} B_m ;$$

$$b'_0 = -\frac{B_m}{d} ;$$

$$b''_0 = 0 .$$

$b_0(\sigma)$  besitzt also im Wendepunkt ( $\sigma = 0$ ,  $b_0 = \frac{1}{2} B_m$ ) die Steigung  $\left(-\frac{B_m}{d}\right)$ . Die Konstante  $d$  hat somit die anschauliche Bedeutung der Streulänge (s. Abb. 3).

Unter Berücksichtigung der Gln. (2.21) und (2.23) erhält man weiterhin für die zu dem Feldverlauf (2.22) gehörigen Koeffizienten  $b_\nu (\nu \geq 1)$

$$(2.24) \quad \begin{aligned} b_1(\sigma) &= \frac{B_m}{d} \cdot 2 \frac{b_0}{B_m} \left(1 - \frac{b_0}{B_m}\right) ; \\ b_2(\sigma) &= -\frac{B_m}{d^2} \cdot 4 \frac{b_0}{B_m} \left(1 - \frac{b_0}{B_m}\right) \left(1 - 2 \frac{b_0}{B_m}\right) ; \\ b_3(\sigma) &= -\frac{B_m}{d^3} \cdot 4 \frac{b_0}{B_m} \left(1 - \frac{b_0}{B_m}\right) \left(1 - 6 \frac{b_0}{B_m} + 6 \frac{b_0^2}{B_m^2}\right), \dots \end{aligned}$$

die in Abb. 3 graphisch dargestellt sind.

Aus Gl. (2.24) können wir nun ablesen, daß die Koeffizienten  $b_\nu(\sigma)$  höherer Ordnung im Bereich des Feldabfalls zwischen positiven und negativen Werten oszillieren, wobei die Zahl der Nulldurchgänge mit wachsendem  $\nu$  ansteigt:  $b_\nu$  besitzt für  $\nu \geq 1$  dort  $(\nu-1)$  Nullstellen.

Diese Oszillationen haben aber zur Folge, daß die Wirkung der höheren Multipolanteile der Felder  $B_r$  und  $B_\sigma$  auf die Teilchenbewegung weitgehend weggemittelt wird, und zwar umso mehr, je höher die Ordnung des Multipols ausfällt. Die Kompensation der vom Feld hervorgerufenen Ablenkungen der Teilchen wird nämlich immer besser, weil mit wachsendem  $\nu$  zwei

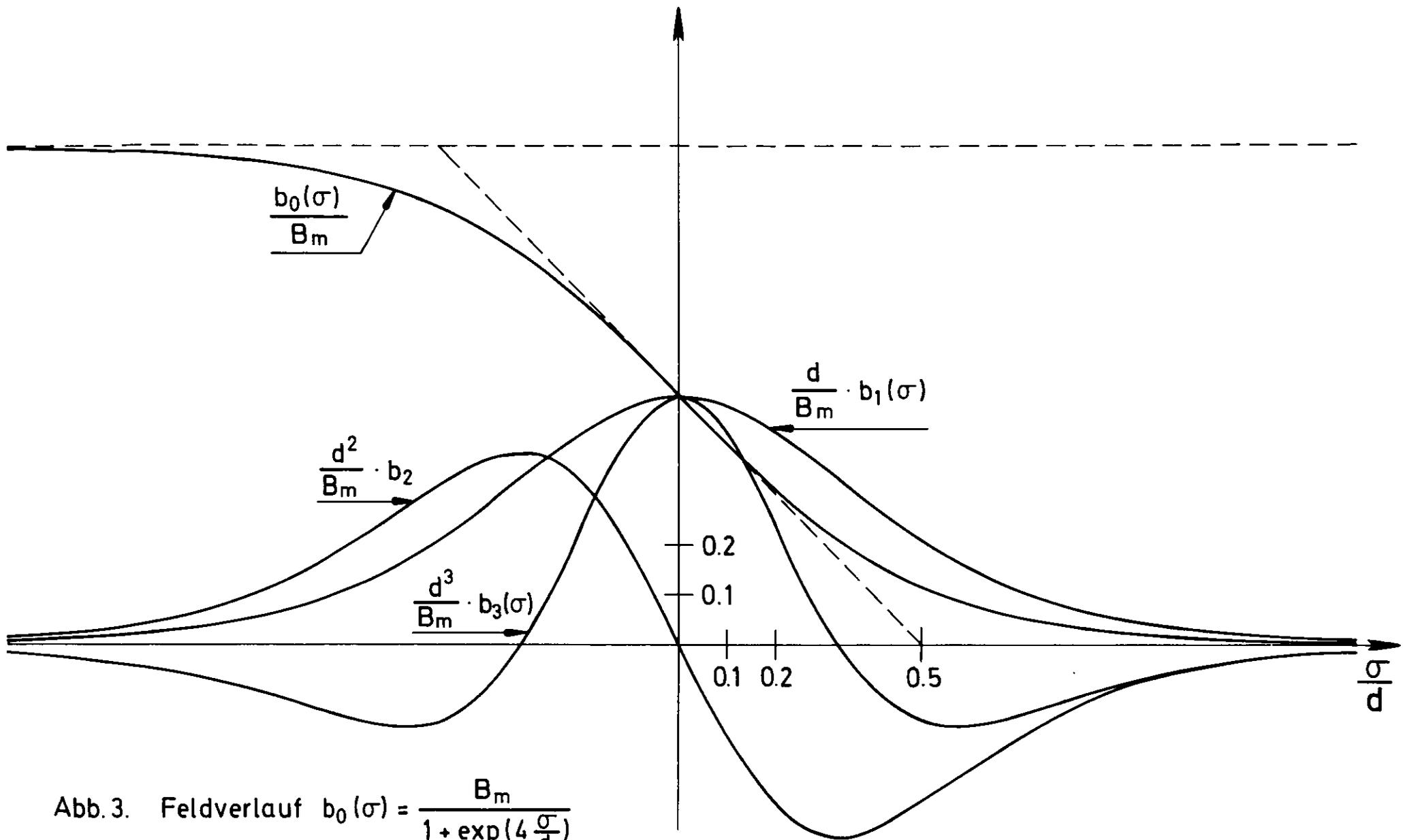


Abb.3. Feldverlauf  $b_0(\sigma) = \frac{B_m}{1 + \exp(4 \frac{\sigma}{d})}$   
mit den Entwicklungskoeffizienten  $b_1, b_2, b_3, \dots$

benachbarte Extrema (ein Maximum und ein Minimum) immer näher zusammenrücken.

An diesem Beispiel erkennt man auch die Abhängigkeit der Größen  $b_\nu$  von der Streulänge  $d$ : Mit abnehmendem  $d$  werden die  $b_\nu$  dem Betrage nach immer größer. Auch das Integral über  $b_\nu$ , genommen zwischen zwei Nullstellen, nimmt für  $\nu > 1$  bei kleiner werdendem  $d$  zu, und zwar gilt

$$\int b_\nu(\sigma) d\sigma \sim \frac{1}{d^{\nu-1}} .$$

Bei abnehmender Streulänge  $d$  wird also die Störung der Teilchenbewegung durch die einzelnen Maxima und Minima der zu den Koeffizienten  $b_\nu$  gehörigen Multipolanteile immer stärker. Da jedoch gleichzeitig für jeden einzelnen Multipolanteil der Abstand benachbarter Extrema abnimmt, wird dieser Effekt wieder wettgemacht auf Grund des wirkungsvolleren Ausgleichs der Ablenkungen.

Eine besonders einfache Darstellung des Entwicklungskoeffizienten  $b_\nu$  gewinnt man für einen trapezförmigen Feldverlauf mit dem Feldabfall

$$(2.25) \quad b_0 = -\frac{B_m}{d} \cdot s + B_m \quad (0 \leq s \leq d) .$$

In diesem Falle wird

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} \frac{B_m}{d} ; \\ (2.26) \quad b_2 &= -\frac{1}{4} \left\{ -\frac{B_m}{d} \delta(\sigma) + \frac{B_m}{d} \delta(\sigma-d) \right\} ; \\ b_3 &= \frac{1}{16} \left\{ -\frac{B_m}{d} \delta'(\sigma) + \frac{B_m}{d} \delta'(\sigma-d) \right\} ; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hierbei kann zunächst das Multipolfeld mit dem Koeffizienten  $b_2$  als Linsen-Dublett mit einer Linse bei  $\sigma = 0$  und einer gleich starken Kompensationslinse bei  $\sigma = d$  aufgefaßt werden. Für  $b_3$  ist bereits jeder Summand als Dublett mit dem Abstand 0 interpretierbar, bestehend

aus einer Linse und einer gleich starken Kompensationslinse, und die vom ersten Dublett übrigbleibende Wirkung wird durch das zweite Dublett nochmals reduziert, weil beide Dubletts untereinander entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

2.2.2. Übergang zum mitbewegten Koordinatensystem bei endlichem Kreuzungswinkel

Das Feld  $B_r, B_\sigma$  wurde im ortsfesten Koordinatensystem  $(v, u, \sigma)$  angegeben. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für Teilchen in einem longitudinalen Feld haben wir nunmehr dieses Feld ins mitbewegte System  $(v, u, \sigma,)$  zu transformieren.

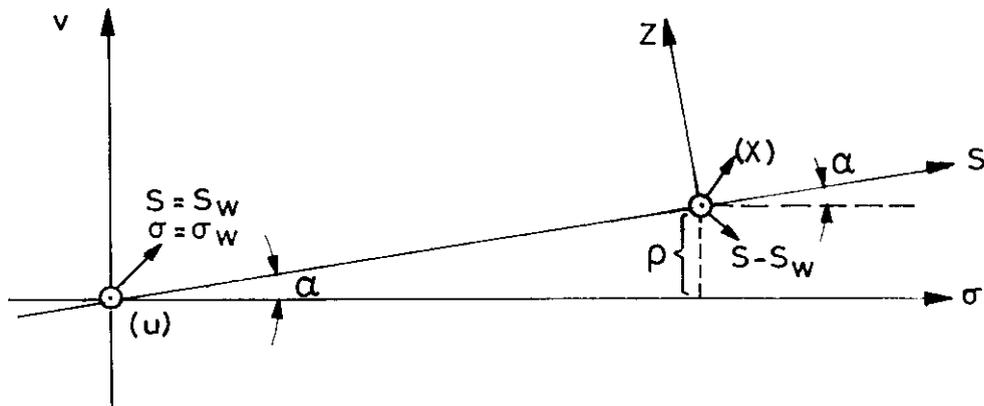


Abb.4

Bedenken wir, daß sich das Teilchen stets in der  $x - z -$  Ebene befinden soll, so ergeben sich die Transformationsgleichungen vom  $(v - u - \sigma)$ -System ins mitbewegte Bezugssystem für die Koordinaten zu

$$\begin{aligned}
 v &= \rho + z \cdot \cos \alpha \quad \text{mit } \rho = (s-s_w) \cdot \sin \alpha ; \\
 (2.27) \quad u &= x ; \\
 (\sigma - \sigma_w) &= (s-s_w) \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha
 \end{aligned}$$

und für das Feld zu

$$\begin{aligned}
 B_z &= -B_\sigma \cdot \sin \alpha + B_v \cdot \cos \alpha ; \\
 (2.28) \quad B_x &= B_u ; \\
 B_s &= B_\sigma \cdot \cos \alpha + B_v \cdot \sin \alpha .
 \end{aligned}$$

Aus den letzten Gleichungen finden wir mit Hilfe von (2.17, 18, 22) unter der Voraussetzung  $|\alpha| \ll 1$  ( $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha = \alpha$ )

$$\begin{aligned}
 B_z &= - (b_0 + b_2 \cdot (u^2 + v^2)) \cdot \alpha + \\
 &\quad + v \cdot (b_1 + b_3 \cdot (u^2 + v^2)) \\
 (2.29a) \quad &= - b_0 \cdot \alpha - b_2 \cdot (x^2 + (\rho + z)^2) \cdot \alpha + \\
 &\quad + (\rho + z) \cdot \{ b_1 + b_3 \cdot (x^2 + (\rho + z)^2) \} ;
 \end{aligned}$$

$$(2.29b) \quad B_x = x \cdot \{ b_1 + b_3 \cdot (x^2 + (\rho + z)^2) \} ;$$

$$\begin{aligned}
 (2.29c) \quad B_s &= b_0 + b_2 \cdot (x^2 + (\rho + z)^2) \\
 &\quad + (\rho + z) \cdot \{ b_1 + b_3 \cdot (x^2 + (\rho + z)^2) \} \cdot \alpha
 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 B_z^{(0)} &= - b_0 \cdot \alpha + b_1 \rho - b_2 \rho^2 \cdot \alpha + b_3 \rho^3 ; \\
 B_z^{(1)} &= z \cdot \{ - 2\rho b_2 \cdot \alpha + b_1 + 3\rho^2 b_3 \} ; \\
 B_z^{(2)} &= (x^2 + z^2) \cdot (-b_2 \cdot \alpha + b_3 \rho) + z^2 \cdot 2b_3 \rho ; \\
 (2.30) \quad B_z^{(3)} &= z(x^2 + z^2) \cdot b_3 ; \\
 B_x^{(0)} &= 0 ; \\
 B_x^{(1)} &= x (b_1 + b_3 \rho^2) ; \\
 B_x^{(2)} &= 2b_3 \rho \cdot x z ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{noch (2.30)} \quad B_x^{(3)} &= x (x^2+z^2) \cdot b_3 ; \\ B_s^{(0)} &= b_0 + \rho^2 b_2 + b_1 \rho \cdot \alpha + b_3 \rho^3 \cdot \alpha ; \\ B_s^{(1)} &= z \cdot \{ 2\rho b_2 + \alpha \cdot (b_1 + 3b_3 \rho^2) \} ; \\ B_s^{(2)} &= (x^2 + z^2) \cdot (b_2 + b_3 \rho \cdot \alpha) + z^2 \cdot 2b_3 \rho \cdot \alpha . \end{aligned}$$

Auf diese Weise können die Feldkomponenten  $B_z$ ,  $B_x$ ,  $B_s$  durch die in (2.11) angegebenen Entwicklungskoeffizienten  $b_\nu$  der Felder  $B_r$  und  $B_\sigma$  ausgedrückt werden.

### 2.3. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen für das rotationssymmetrische Detektorfeld.

Mit Gl. (2.29, 30) und (2.21) sind jetzt bei Vorgabe des longitudinalen Feldes  $b_0(\sigma)$  auf der Solenoidachse die in dem mitbewegten System  $(z, x, s)$  auftretenden Feldkomponenten  $B_z$ ,  $B_x$ ,  $B_s$  eines longitudinalen, rotationssymmetrischen Magnetfeldes vollständig festgelegt. Damit sind wir in der Lage, die Bestimmungsgleichungen für die Bewegung eines Teilchens innerhalb des Detektorbereiches zu ermitteln.

Zu dem Zweck haben wir für die in der allgemeinen Bewegungsgleichung (2.7) oder (2.15) auftretenden Felder  $B_z$ ,  $B_x$ ,  $B_s$  das spezielle Feld (2.29) bzw. (2.30) des Detektors einzusetzen.

Dann entsteht unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.14) und (2.16)

$$(2.31) \quad \begin{cases} x'' = \frac{e}{c \cdot p} \cdot B_z^{(0)} - (N + R') \cdot z - 2 R \cdot z' + A_x ; \\ z'' = \phantom{\frac{e}{c \cdot p} \cdot B_z^{(0)}} - (N - R') \cdot x + 2 R \cdot x' + A_z \end{cases}$$

mit den Definitionen ( $A$  faßt die Größen  $A^{(\nu)}$  mit  $\nu \geq 2$  zusammen)

$$(2.32) \quad A = A^{(2)} + A^{(3)} + \dots \quad (A \equiv A_x, A_z) \quad ;$$

$$(2.32a) \quad A_x^{(2)} = \frac{e}{c \cdot p} \left\{ - b_0 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{2} (3x'^2 + z'^2) \right. \\ + b_1 \cdot \left( \rho \cdot \frac{1}{2} (3x'^2 + z'^2) - z z' \cdot \alpha \right) \\ - b_2 \cdot \left( z z' \cdot 2\rho + (x^2 + z^2) \cdot \alpha + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (3 \cdot x'^2 + z'^2) \cdot \rho^2 \cdot \alpha \right) \\ \left. + b_3 \cdot \left( \rho \cdot (x^2 + 3z^2) - z z' \cdot 3\rho^2 \cdot \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (3x'^2 + z'^2) \cdot \rho^3 \right) \right\} ;$$

$$(2.32b) \quad A_z^{(2)} = \frac{e}{c \cdot p} \left\{ - b_0 \cdot \alpha \cdot x' z' \right. \\ + b_1 \cdot \left( x' z' \cdot \rho + x' z \cdot \alpha \right) \\ + b_2 \cdot \left( x' z \cdot 2\rho - x' z' \cdot \rho^2 \cdot \alpha \right) \\ + b_3 \cdot \left( - 2\rho \cdot x z + x' z \cdot 3\rho^2 \cdot \alpha + \right. \\ \left. + x' z' \cdot \rho^3 \right) \left. \right\} ;$$

$$(2.32c) \quad A_x^{(3)} = \frac{e}{c \cdot p} \left\{ - b_0 \cdot \frac{1}{2} z' (x'^2 + z'^2) \right. \\ + b_1 \cdot \left[ \frac{1}{2} (3x'^2 + z'^2) \cdot z - \frac{1}{2} (x'^2 + z'^2) \cdot \right. \\ \left. \cdot z' \cdot \rho \alpha - x' z' x \right] \\ + b_2 \cdot \left( - z' \cdot (x^2 + z^2) - \alpha \cdot \rho z \cdot (3x'^2 + z'^2) - \right. \\ \left. - \rho^2 \cdot \frac{1}{2} z' (x'^2 + z'^2) \right) \\ + b_3 \cdot \left( - \rho \cdot \alpha \cdot z' (x^2 + 3z^2) + z (x^2 + z^2) + \right. \\ + \frac{3}{2} \rho^2 \cdot z (3x'^2 + z'^2) - \\ - \frac{1}{2} \rho^3 \cdot \alpha \cdot z' (x'^2 + z'^2) - \\ \left. - \rho^2 \cdot x \cdot x' z' \right) \left. \right\} ;$$

$$\begin{aligned}
 A_z^{(3)} = \frac{e}{c \cdot p} \{ & b_0 \cdot \frac{1}{2} x' (x'^2 + z'^2) - \\
 & - b_1 \cdot \left( \frac{1}{2} (x'^2 + 3z'^2) \cdot x - \frac{1}{2} (x'^2 + z'^2) x' \cdot \rho \alpha - x' z' \cdot z \right) \\
 & + b_2 \cdot \left( x' \cdot (x^2 + z^2) + \rho^2 \cdot \frac{1}{2} x' (x'^2 + z'^2) - \right. \\
 (2.32d) \quad & \left. - 2\rho \cdot \alpha \cdot z \cdot x' z' \right) \\
 & + b_3 \cdot \left( + \rho \cdot \alpha \cdot x' (x^2 + 3z^2) - x(x^2 + z^2) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \rho^2 \cdot x (x'^2 + 3z'^2) + \\
 & + \frac{1}{2} \rho^3 \cdot \alpha \cdot x' (x'^2 + z'^2) + \\
 & \left. + 3\rho^2 \cdot z \cdot x' z' \right) \} ;
 \end{aligned}$$

$$(2.33) \quad N = \frac{e}{p \cdot c} \cdot \rho (b_2 \cdot \alpha - b_3 \cdot \rho) ;$$

$$(2.34) \quad R = \frac{1}{2} \frac{e}{p \cdot c} \cdot (b_0 + b_1 \rho \alpha + b_2 \cdot \rho^2 + b_3 \cdot \rho^3 \cdot \alpha) ,$$

wobei die Größen  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  aus Gl. (2.21) zu entnehmen sind.

Durch Gl. (2.31-34) ist nunmehr die Teilchenbewegung in einem rotations-symmetrischen, longitudinalen Detektorfeld eindeutig bestimmt, und zwar unter Berücksichtigung eines endlichen Kreuzungswinkels  $2\alpha$  der Strahlen, der sich im Auftreten quadratischer Glieder ( $A_x^{(2)}$  und  $A_z^{(2)}$ ) in der Bewegungsgleichung äußert (für  $\alpha = 0$  verschwinden  $A_x^{(2)}$  und  $A_z^{(2)}$ ). Vorausgesetzt wird dabei lediglich die Kenntnis der Longitudinalkomponente des Magnetfeldes auf der Rotationsachse, also der Größe  $b_0$  (siehe Gl.(2.17b), die allein bereits alle drei Feldkomponenten  $B_z$ ,  $B_x$ ,  $B_s$  im ganzen Raum festlegt.

Diese Gleichungen können als Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen dienen.

### 3. Numerische Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichungen

3.1 Elimination der in  $x'$  und  $z'$  linearen Glieder durch Übergang zu einem gedrehten Koordinatensystem mit ortsabhängigem Drehwinkel

Nach Gl.(2.31) und (2.34) äußert sich der Einfluß einer longitudinalen Feldkomponente  $B_s$  auf die Teilchenbewegung im wesentlichen in einer Kopplung der Betatronschwingungen über die Steigungen  $x'$  und  $z'$ .

Für die Berechnung der nichtlinearen Störungen der Betatronschwingungen ist es nun bedeutungsvoll, daß die linearen Kopplungsglieder mit den Faktoren  $x'$  und  $z'$  durch Einführung eines um die  $s$ -Achse gedrehten Koordinatensystems  $(\eta, \xi, s)$

$$(3.1a) \quad (x + iz) = (\xi + i\eta) \cdot e^{i \cdot \Theta(s)}$$

mit ortsabhängigen Drehwinkel

$$(3.1b) \quad \Theta(s) = \int_{s_0}^s R(\tau) d\tau$$

$(s_0 \leq s \leq s_1 : \text{Detektorbereich})$

eliminiert werden können.

Außerhalb des Detektorbereiches fällt dieses Bezugssystem mit dem  $(z-x-s)$ -System zusammen, da

$$\int_{s_0}^{s_1} B_s ds = 0 \rightarrow \int_{s_0}^{s_1} R(\tau) d\tau = 0$$

gewählt wird (3).

Setzt man die Transformation (3.1a) in die Bewegungsgleichung (2.31) ein, so ergeben sich unter Berücksichtigung der Beziehung (3.1b) die Gleichungen

$$(3.2) \quad \begin{cases} \xi'' = \frac{e}{c \cdot p} B_z^{(0)} \cdot \cos\theta - \xi \cdot (R^2 + N \cdot \sin 2\theta) - \eta \cdot N \cos 2\theta + A_\xi ; \\ \eta'' = -\frac{e}{c \cdot p} B_z^{(0)} \cdot \sin\theta - \eta \cdot (R^2 - N \cdot \sin 2\theta) - \xi \cdot N \cos 2\theta + A_\eta \end{cases}$$

mit

$$(3.3) \quad \begin{cases} A_\xi = A_x \cdot \cos\theta + A_z \cdot \sin\theta ; \\ A_\eta = -A_x \cdot \sin\theta + A_z \cdot \cos\theta , \end{cases}$$

in denen die linearen Glieder in  $\xi'$  und  $\eta'$  verschwunden sind. Dabei können die Faktoren  $A_x$  und  $A_z$  aus Gl. (2.32) entnommen werden, und die Größen  $A_\xi$  und  $A_\eta$  sind mit Hilfe der aus (3.1) folgenden Beziehungen

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cdot \cos\theta - \eta \cdot \sin\theta ; \\ z &= \xi \cdot \sin\theta + \eta \cdot \cos\theta ; \\ x' &= (\xi' \cdot \cos\theta - \eta' \cdot \sin\theta) - (\xi \cdot \sin\theta + \eta \cdot \cos\theta) \cdot R ; \\ z' &= (\xi' \cdot \sin\theta + \eta' \cdot \cos\theta) + (\xi \cdot \cos\theta - \eta \cdot \sin\theta) \cdot R \end{aligned}$$

als Funktion von  $\xi$ ,  $\xi'$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$  auszudrücken.

Im folgenden denken wir uns noch die konstanten Glieder

$$\frac{e}{c \cdot p} B_z^{(0)} \cdot \cos\theta \quad \text{und} \quad \frac{e}{c \cdot p} B_z^{(0)} \cdot \sin\theta$$

in Gl.(3.2), die eine Verschiebung des closed orbit hervorrufen, durch Einführung dieser neuen Bezugsbahn zum Verschwinden gebracht (2, 3), so daß (3.2) übergeht in

$$(3.5) \quad \begin{cases} \xi'' = -\xi \cdot (R^2 + N \cdot \sin 2\theta) - \eta \cdot N \cos 2\theta + A_\xi ; \\ \eta'' = -\eta \cdot (R^2 - N \cdot \sin 2\theta) - \xi \cdot N \cos 2\theta + A_\eta . \end{cases}$$

### 3.2 Beschreibung des Lösungsverfahrens

Zur Integration der Bewegungsgleichungen (3.5) vernachlässigen wir jetzt zunächst die nichtlinearen Glieder, betrachten also die lineare Näherung

$$(3.6) \quad \begin{cases} \xi'' = - \xi \cdot (R^2 + N \cdot \sin 2\theta) - \eta \cdot N \cos 2\theta ; \\ \eta'' = - \eta \cdot (R^2 - N \cdot \sin 2\theta) - \xi \cdot N \cos 2\theta \end{cases}$$

allein.

Während das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung der Wirkung eines umgedrehten Quadrupols entspricht, der sich in einer Verschiebung des Arbeitspunktes äußert, kann der zweite Term, welcher eine Kopplung der Betatronschwingungen über die Amplituden  $\xi$  und  $\eta$  beschreibt, gedeutet werden als herrührend von einem um  $45^\circ$  gedrehten Quadrupol.

Solche gedrehten Quadrupole treten jeweils an den Enden der Solenoide auf, wo die Funktionen  $b_2$  und  $b_3$ , die nach (2.33) die "Kopplungskonstante"  $N$  bestimmen, gerade von Null verschieden sind, während sie im Innern des Solenoids verschwinden (siehe Abb.3).

Die Größen  $b_2$  und  $b_3$  stellen nun bereits höhere Entwicklungskoeffizienten der Felder  $B_r$  und  $B_\sigma$  dar, für welche die von den zugehörigen Multipolfeldern herrührenden Wirkungen sich aufgrund der in Abschnitt 2.2.1.2 beschriebenen Oszillationen weitgehend aufheben. Daher kann die Größe  $N$  im allgemeinen gleich Null gesetzt werden. Eine geringe, noch verbleibende Kopplung wirkt nicht mehr in merklicher Weise auf den Elektronen-Positronenstrahl ein, wenn nur eine genügend hohe Q-Verstimmung  $\delta$

$$|Q_x - Q_z| = n + \delta ;$$

$$n = \text{ganze Zahl} ;$$

$$0 \leq \delta \leq \frac{1}{2} ,$$

eingestellt wird (7).

Mit

$$(3.7) \quad N = 0$$

erhält man damit aus (3.6) die Beziehungen

$$(3.8) \quad \begin{cases} \xi'' = - R^2 \cdot \xi ; \\ \eta'' = - R^2 \cdot \eta , \end{cases}$$

die eine Fokussierung der Teilchen in beiden Richtungen ( $\xi$  und  $\eta$ ) beschreiben (3).

Zur Behandlung der vollständigen (nichtlinearen) Bewegungsgleichungen (3.2) zerlegt man jetzt zweckmäßigerweise den gesamten Detektorbereich in mehrere Teilintervalle und löst die Differentialgleichung (3.2) in jedem Teilabschnitt näherungsweise durch Einführung punktförmiger Linsen (thin-lens approximation).

Um endlich den Einfluß der vom Detektorfeld hervorgerufenen nichtlinearen Störungen abzuschätzen, die hier ausschließlich untersucht werden sollen (die linearen Effekte wurden in (2), (3) und (4) behandelt), können wir uns sodann auf die nichtlinearen Terme in (3.2) allein beschränken, so daß sich die Bestimmungsgleichung der Betatronschwingungen vereinfacht zu

$$(3.9) \quad \begin{cases} \xi'' = A_{\xi} ; \\ \eta'' = A_{\eta} . \end{cases}$$

Die zwischen den einzelnen (punktförmig gedachten) nichtlinearen Linsen noch befindlichen linearen Linsen mit der Bewegungsgleichung (3.8) sind in erster Näherung durch Driftstrecken ersetzbar, weil sie lediglich einen vernachlässigbar kleinen Phasenvorschub von einer nichtlinearen Linse zur nächstfolgenden hervorrufen (abgesehen von einer geringfügigen Änderung der Amplitudenfunktion (4)). Ein solcher Phasenvorschub, der einem Auseinander-

rücken der einzelnen Linsen gleichkommt, kann nur im  $(\eta-\xi-s)$ -System definiert werden, wo die Betatronschwingungen nach Gl.(3.8) entkoppelt sind. Hierin ist gerade der Zweck für den Übergang zu diesem Bezugssystem zu sehen. Für die linearisierten Bewegungsgleichungen in  $x$  und  $z$  (siehe Gl.(2.31)) sind aufgrund der Kopplung die von Courant und Snyder eingeführten Phasenfunktionen  $\phi_x, \phi_z$  nicht mehr erklärt.

Die Gleichungen (3.9) liefern uns schließlich eine Handhabe, durch eine Simulationsrechnung zu überprüfen, ob im einzelnen die vom Detektorfeld herrührenden nichtlinearen Störungen der Betatronschwingung die Stabilität der Teilchenbewegung gefährden können, und damit die in der Einleitung unter III) genannten Effekte zu untersuchen.

Zu dem Zweck haben wir ein Teilchen, das mit vorgegebenen Anfangsbedingungen startet, über viele Umläufe den Detektorbereich mit der Störung (3.9) durchlaufen zu lassen. Durch Wahl verschiedener, extremer Anfangsbedingungen gelingt es dann, die vom Detektor hervorgerufene Aufweitung des Strahls abzuschätzen.

Nach diesem Verfahren sollen im folgenden Kapitel die vom PLUTO-Detektor im DESY-Speicherring verursachten nichtlinearen Effekte der Teilchenbewegung ermittelt werden.

#### 4. Auswertung für "Pluto"

Um die vom Pluto-Magneten im DESY-Speicherring hervorgerufenen nichtlinearen Störungen zu untersuchen, ist im Prinzip lediglich die Kenntnis der longitudinalen Feldkomponente  $b_o(\sigma)$  erforderlich. Durch diese Komponente allein sind bereits alle Entwicklungskoeffizienten für eine Potenzreihenentwicklung des longitudinalen und radialen Feldes  $B_o(\sigma, r)$  und  $B_r(\sigma, r)$  nach Potenzen von  $r$  eindeutig festgelegt, welche zur Aufstellung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen benötigt werden (s. Abschnitt 2.3).

Eine graphische Darstellung der Funktion  $b_o(\sigma)$  für zwei mögliche Ausführungen mit Kompensationsspulen zeigt Abb.5:

Version a): Große Magnetöffnung an den äußersten Enden der Detektoranordnung  
→ große Streulänge der von den Kompensationsspulen herrührenden Felder;

Version b): Kleine Magnetöffnung an den äußersten Enden der Detektoranordnung  
→ kleine Streulänge der von den Kompensationsspulen herrührenden Felder.

Für die Bestimmung der Koeffizienten  $b_v(\sigma)$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) selbst kann man verschiedene Wege einschlagen:

- a) Nach Gl.(2.21) sind die Größen  $b_v(\sigma)$  durch Differentiation der Funktion  $b_o(\sigma)$  zu gewinnen. Da jedoch ein analytischer Ausdruck für die Longitudinalkomponente  $b_o(\sigma)$  nicht vorliegt, kann  $b_o(\sigma)$  nur auf graphischem Wege differenziert werden.
- b) Nähert man die in Abb.5 dargestellte Funktion  $b_o(\sigma)$  durch einen trapezförmigen Verlauf an, so liefert Gl.(2.26) eine Darstellung der Entwicklungskoeffizienten  $b_v$ .
- c) Schließlich können die Koeffizienten  $b_v$  direkt mit Hilfe des Potenzreihenansatzes (2.17) für  $B_r$  und  $B_o$  ermittelt werden, wenn die Komponenten  $B_r$  und  $B_o$  an einer festen Stelle  $\sigma$  für mehrere Abstände

$$r = r_1, r_2, r_3, \dots$$

bekannt sind. Eine Berechnung der Felder  $B_r$  und  $B_\sigma$  kann z.B. bei Vorgabe der Spulen- und Eisenkonfiguration und der Stromdichte nach dem Nutcracker-Programm(8) durchgeführt werden. Die Potenzreihen-Entwicklungen schreibt man dann zweckmäßigerweise in der Form

$$\begin{aligned} B_\sigma(r) &= c_0 + c_2 \cdot (r^2 - r_1^2) + c_4 \cdot (r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) + \dots \\ &= (c_0 - c_2 \cdot r_1^2 + c_4 \cdot r_1^2 r_2^2 \pm \dots) \\ (4.1) \quad &+ (c_2 - c_4 \cdot (r_1^2 + r_2^2) \pm \dots) \cdot r^2 \\ &+ (c_4 \pm \dots) \cdot r^4 + \dots \\ &\equiv b_0 + b_2 \cdot r^2 + b_4 \cdot r^4 + \dots ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_r(r) &= c_1 \cdot r + c_3 \cdot r (r^2 - r_1^2) + c_5 \cdot r (r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) + \dots \\ &= (c_1 - c_3 \cdot r_1^2 + c_5 \cdot r_1^2 r_2^2 \pm \dots) \cdot r \\ (4.2) \quad &+ (c_3 - c_5 \cdot (r_1^2 + r_2^2) \pm \dots) \cdot r^3 \\ &+ (c_5 \pm \dots) \cdot r^5 + \dots \\ &\equiv b_1 \cdot r + b_3 \cdot r^3 + b_5 \cdot r^5 + \dots , \end{aligned}$$

aus welcher durch Einsetzen der Werte

$$B_\sigma(r_v), B_r(r_v) \text{ für } r = r_v$$

die Größen  $c_v$  und anschließend die Entwicklungskoeffizienten  $b_v$  schrittweise zu bestimmen sind.

In der vorliegenden Arbeit wurde die dritte Methode angewandt.

Die nach diesem Verfahren ermittelten Größen  $b_1(\sigma)$ ,  $b_2(\sigma)$  und  $b_3(\sigma)$  für die gewählte Konfiguration sind in Abb.6, 7 und 8 graphisch dargestellt.

(Aus Abb.7 und 8 ist deutlich erkennbar, daß für die Feldanteile höherer Ordnung mit abnehmender Streulänge des Feldes die Amplituden der  $b_\nu$  - Oszillationen anwachsen und gleichzeitig benachbarte Maxima und Minima dichter zusammenrücken; vgl. Abschnitt 2.2.1.2).

Schätzt man nun unter Zugrundelegung der im Detektorbereich gültigen Größenordnungen für die Amplituden  $x$  und  $z$  und die Steigungen  $x'$  und  $z'$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \text{Max } |x| &\approx 2 \text{ cm} ; \\ \text{Max } |z| &\approx 0,5 \text{ cm} ; \\ \text{Max } |x'| &\approx 2 \cdot 10^{-2} ; \\ \text{Max } |z'| &\approx 4 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

bei Berücksichtigung der in Abb.5 - 8 angegebenen Funktionen  $b_\nu(\sigma)$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ) die Größenordnung der einzelnen Summanden ab, die in der Gleichung (2.32) und (2.33) für die Ausdrücke  $A_{x,z}^{(1)}$  und  $R$  auftreten, so ergibt sich, daß man in diesem Fall näherungsweise schreiben kann

$$(4.4) \quad A = A^{(2)} + A^{(3)} \quad (A \equiv A_x, A_z) ;$$

$$(4.4a) \quad \begin{aligned} A_x^{(2)} = \frac{e}{c \cdot p} \{ & -b_0 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{2} (3x'^2 + z'^2) \\ & + b_1 \cdot (\rho \cdot \frac{1}{2} (3x'^2 + z'^2) - zz' \cdot \alpha) \\ & - b_2 \cdot (zz' \cdot 2\rho + (x^2 + z^2) \cdot \alpha) \\ & + b_3 \cdot \rho (x^2 + z^2) \} ; \end{aligned}$$

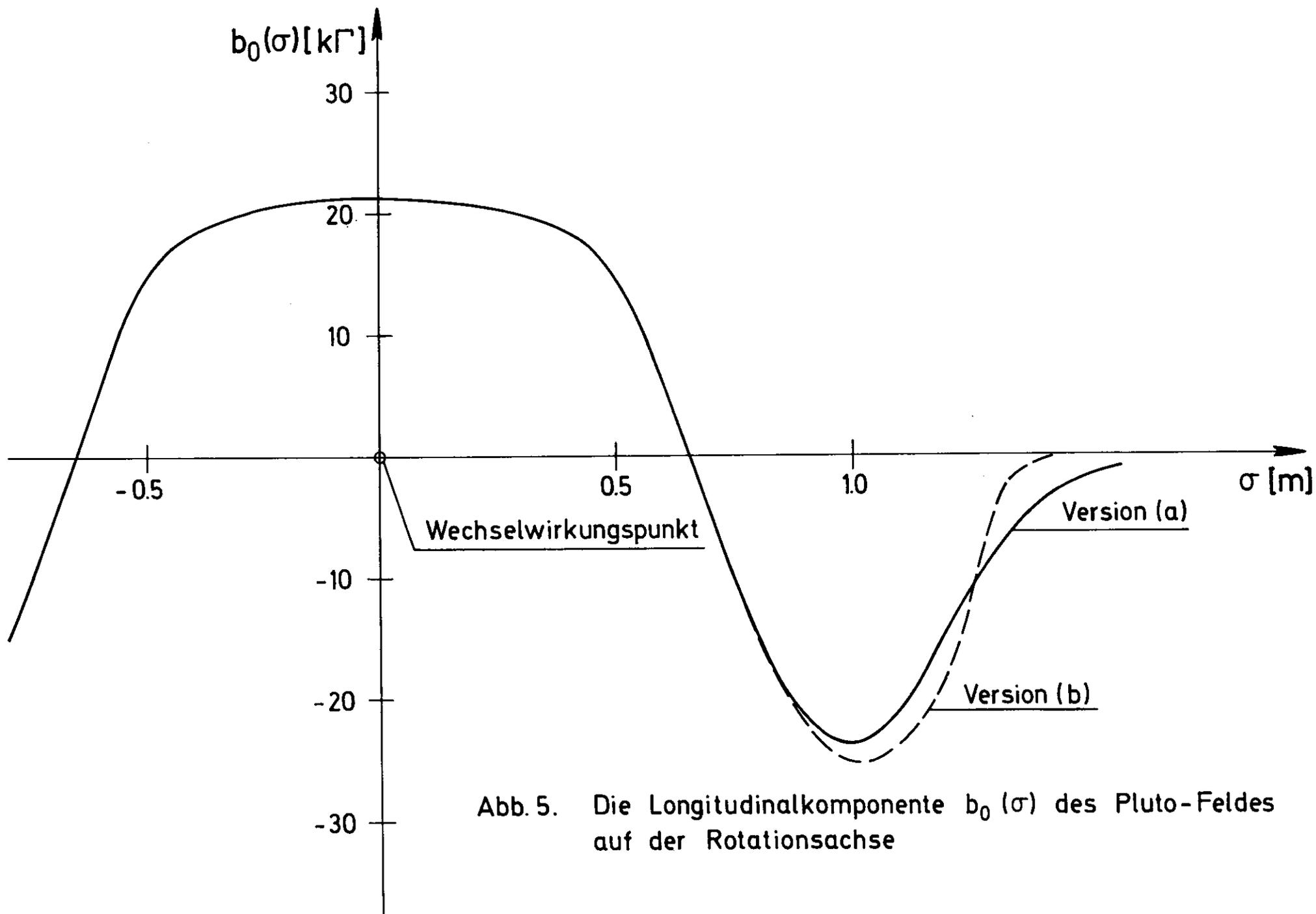


Abb. 5. Die Longitudinalkomponente  $b_0(\sigma)$  des Pluto-Feldes auf der Rotationsachse

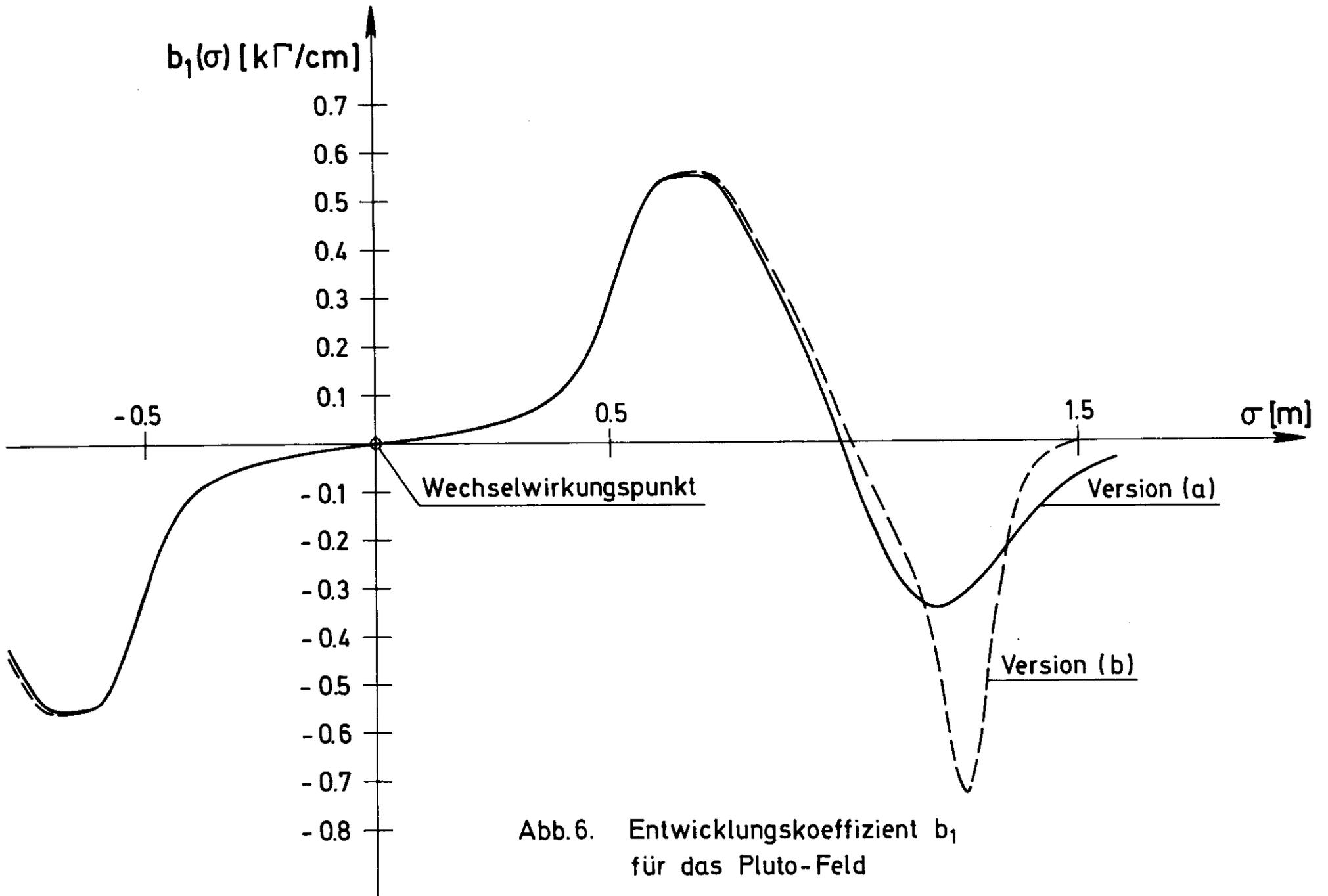


Abb.6. Entwicklungskoeffizient  $b_1$   
für das Pluto-Feld

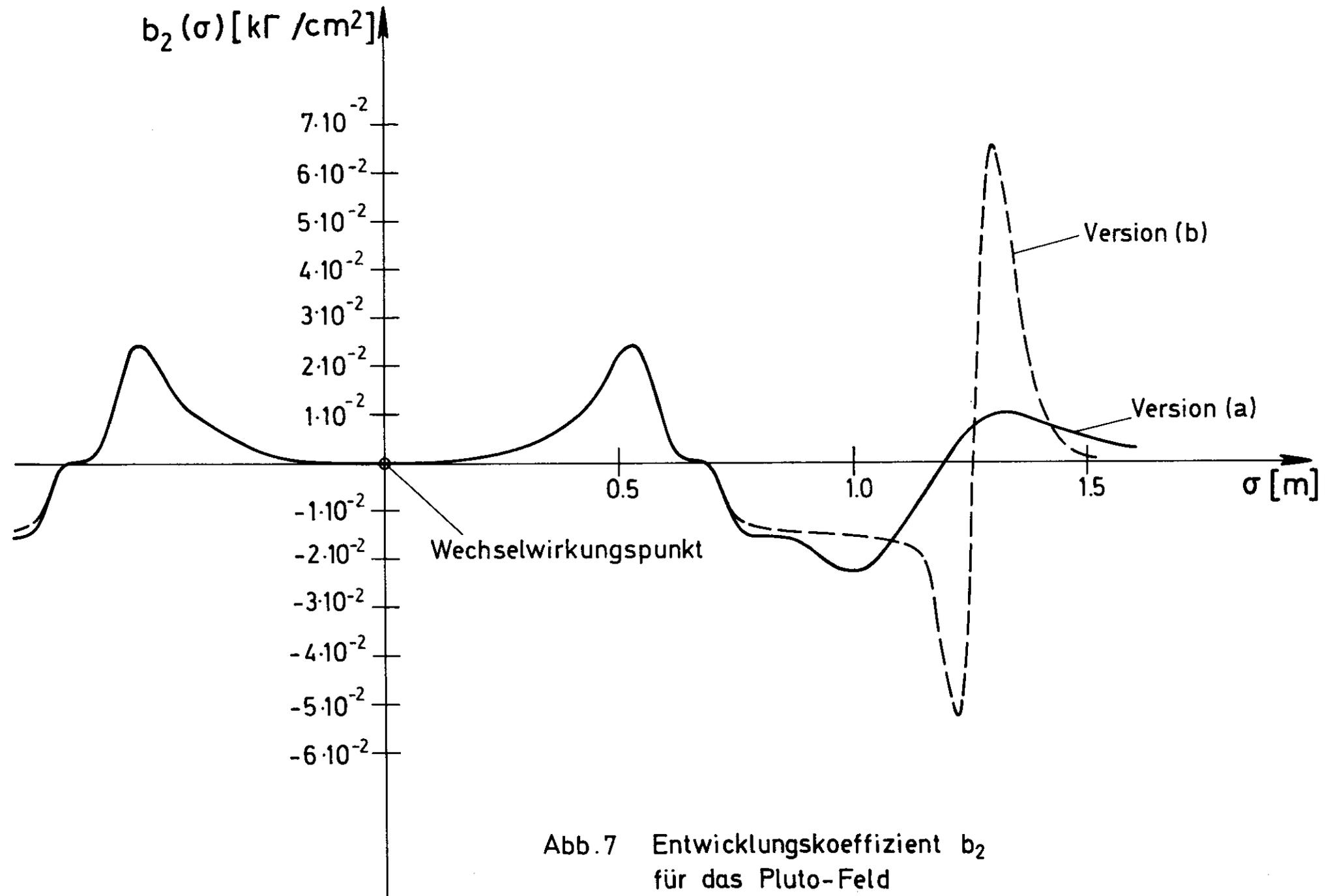


Abb. 7 Entwicklungskoeffizient  $b_2$   
 für das Pluto-Feld

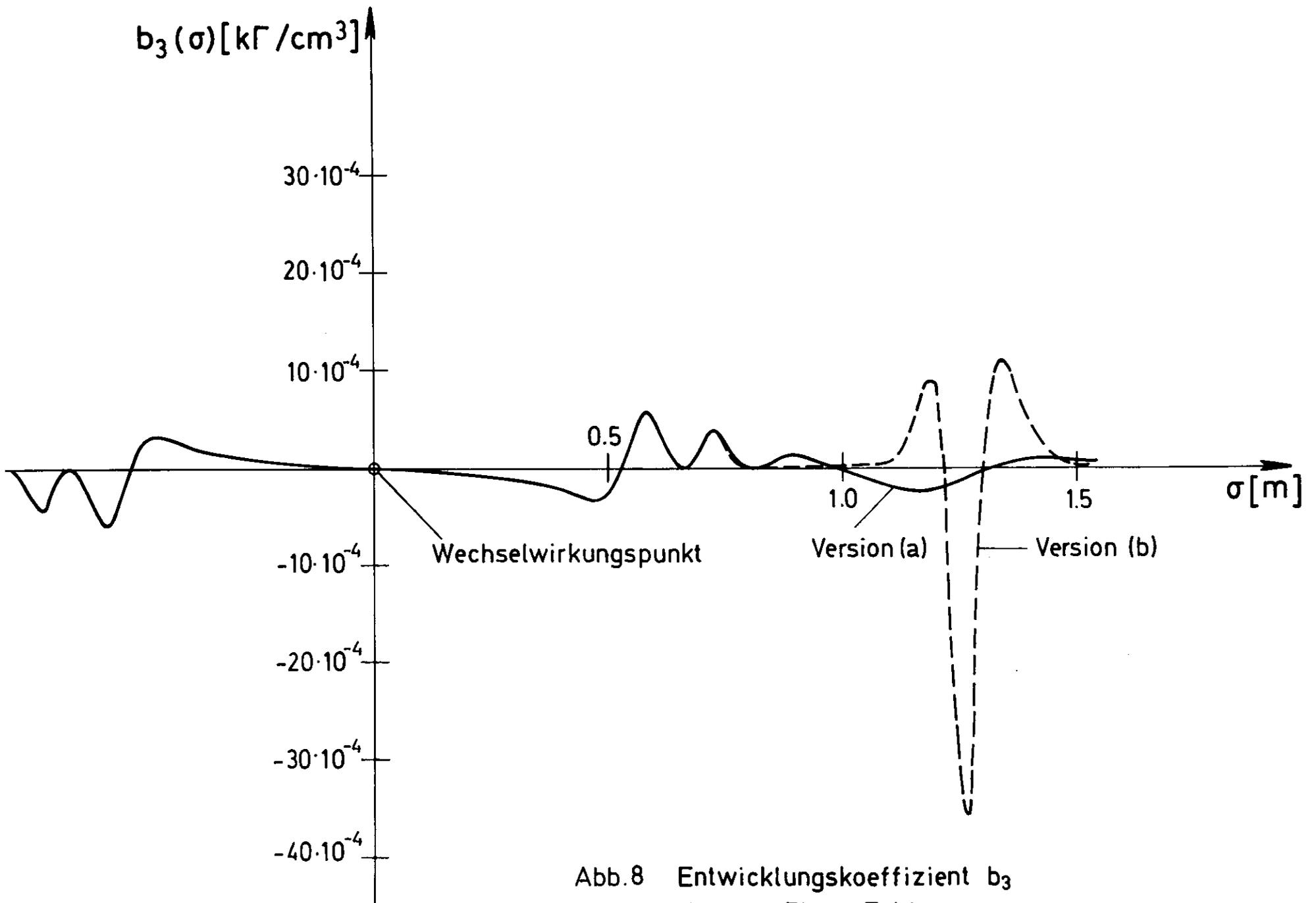


Abb.8 Entwicklungskoeffizient  $b_3$   
für das Pluto-Feld

$$(4.4b) \quad A_z^{(2)} = \frac{e}{c \cdot p} \left\{ -b_0 \cdot \alpha \cdot x'z' \right. \\ \left. + b_1 \cdot (x'z' \cdot \rho + x'z \cdot \alpha) \right. \\ \left. + b_2 \cdot x'z \cdot 2\rho \right. \\ \left. - b_3 \cdot 2\rho \cdot xz \right\} ;$$

$$(4.4c) \quad A_x^{(3)} = \frac{e}{c \cdot p} \left\{ b_0 \cdot \frac{1}{2} z' (x'^2 + z'^2) \right. \\ \left. + b_1 \cdot \left( \frac{1}{2} (3x'^2 + z'^2) \cdot z - x'z' \cdot x \right) \right. \\ \left. - b_2 \cdot z' (x^2 + z^2) \right. \\ \left. + b_3 \cdot z (x^2 + z^2) \right\} ;$$

$$(4.4d) \quad A_z^{(3)} = \frac{e}{c \cdot p} \left\{ b_0 \cdot \frac{1}{2} x' (x'^2 + z'^2) \right. \\ \left. - b_1 \cdot \left( \frac{1}{2} (x'^2 + 3z'^2) \cdot x - x'z' \cdot z \right) \right. \\ \left. + b_2 \cdot x' (x^2 + z^2) \right. \\ \left. - b_3 \cdot x (x^2 + z^2) \right\} ;$$

$$(4.5) \quad R = \frac{1}{2} \frac{e}{c \cdot p} \cdot b_0 \quad .$$

Weiterhin ist aus Abb.9 und 10 ersichtlich, daß wir in Gl.(3.3) und (3.4) für den Drehwinkel des (n-ξ-s)-Systems durchweg

$$\theta \equiv 0$$

setzen können, weil

- 1)  $|\Theta| \ll 1$  gilt (siehe Abb.9);
- 2) an den Enden des Detektorbereichs, wo die Amplitudenfunktionen  $\beta_x$  und  $\beta_z$  große Werte annehmen (siehe Abb.10), der Winkel  $\Theta$  sogar fast verschwindet (Abb.9);
- 3) in der Umgebung der Extrema von  $\Theta(s)$  die Amplitudenfunktionen  $\beta_x$  und  $\beta_z$  bereits recht klein ausfallen (Abb.9 und 10).

Damit entsteht aus Gl.(3.3) und (3.4)

$$(4.6) \quad \begin{cases} A_\xi = A_x ; \\ A_\eta = A_z ; \end{cases}$$

$$(4.7) \quad \begin{cases} x = \xi ; \\ z = \eta ; \\ x' = \xi' - \eta \cdot R ; \\ z' = \eta' + \xi \cdot R . \end{cases}$$

Zur Integration der Bewegungsgleichungen (3.9)

$$\begin{cases} \xi'' = A_\xi \\ \eta'' = A_\eta \end{cases}$$

ersetzen wir nunmehr den tatsächlichen Verlauf der "Linsenfunktionen"  $b_\nu(\sigma)$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) durch punktförmige Linsen, die jeweils in den Schwerpunkten der Maxima und Minima lokalisiert sind. Dabei wird die Linsenstärke in jedem Teilabschnitt, wo eine solche Linse untergebracht ist, so bemessen, daß

$$\int b_\nu(\sigma) d\sigma$$

erhalten bleibt.

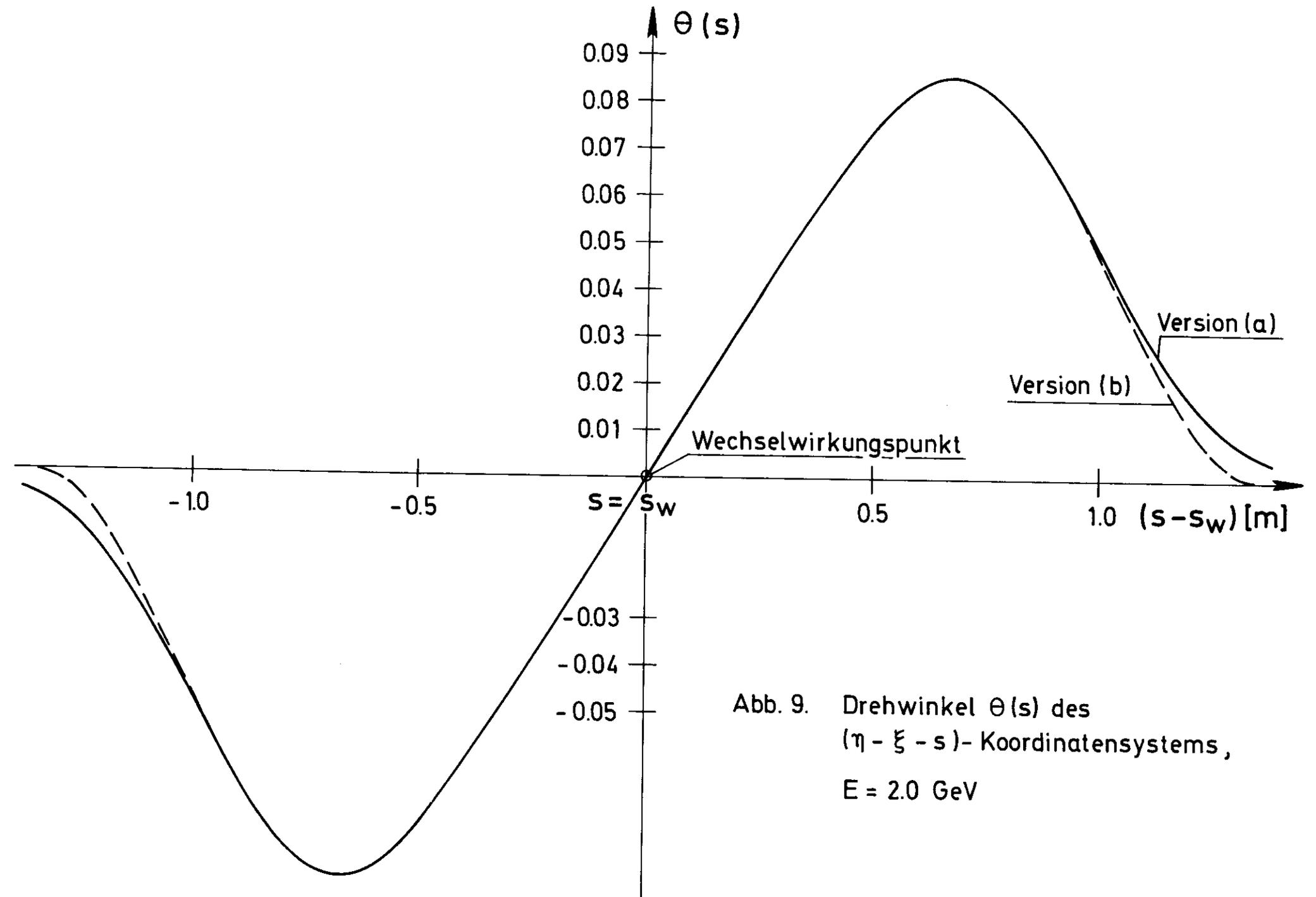


Abb. 9. Drehwinkel  $\theta(s)$  des  
 $(\eta - \xi - s)$ - Koordinatensystems,  
 $E = 2.0 \text{ GeV}$

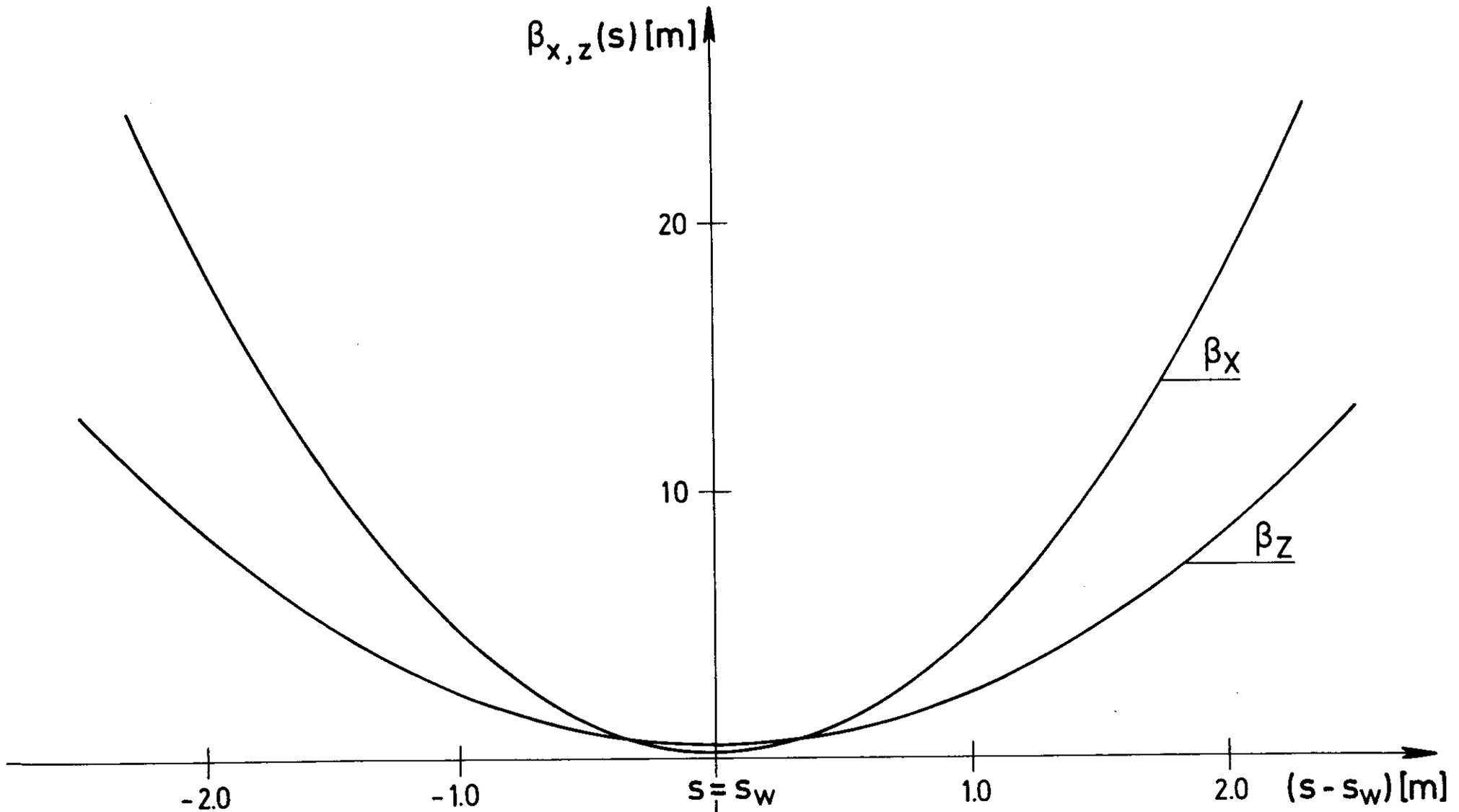


Abb.10. Amplitudenfunktion für die x - und z - Richtung im Detektorbereich;  
 $\beta(s) = \beta(s_w) + \frac{s^2}{\beta(s_w)}$  mit  $\beta_x(s_w) = 0.22 \text{ m}$ ;  $\beta_z(s_w) = 0.5 \text{ m}$ ;  
 $s = s_w = \text{Wechselwirkungspunkt}$

Aus Abb.5 - 8 ist ersichtlich, daß für den Pluto-Magneten die Funktionen  $b_{\nu}(\sigma)$  durch folgende Darstellung angepaßt werden können:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \sum_{\nu=1}^2 C_{0\nu} \cdot \{ \delta(s-(s_w + s_{0\nu})) + \delta(s-(s_w - s_{0\nu})) \} ; \\
 b_1 &= \sum_{\nu=1}^2 C_{1\nu} \cdot \{ \delta(s-(s_w + s_{1\nu})) - \delta(s-(s_w - s_{1\nu})) \} ; \\
 (4.8) \\
 b_2 &= \sum_{\nu=1}^4 C_{2\nu} \cdot \{ \delta(s-(s_w + s_{2\nu})) + \delta(s-(s_w - s_{2\nu})) \} ; \\
 b_3 &= \sum_{\nu=1}^6 C_{3\nu} \cdot \{ \delta(s-(s_w + s_{3\nu})) - \delta(s-(s_w - s_{3\nu})) \}
 \end{aligned}$$

Für die auf Seite 25 genannten Versionen a) und b) wurden bei  $p = 2 \text{ GeV}/c$  folgende Werte ermittelt;

$\mu\nu$	Version a)		Version b)	
	$s_{\mu\nu} \text{ (m)}$	$C_{\mu\nu} \text{ (k}\Gamma/\text{cm}^{\mu-1}\text{)}$	$s_{\mu\nu} \text{ (m)}$	$C_{\mu\nu} \text{ (k}\Gamma/\text{cm}^{\mu-1}\text{)}$
01	0,28	1161	0,28	1161
02	1,06	-1190	1,06	-1190
11	0,66	22	0,66	22
12	1,26	- 11,6	1,23	- 11,6
21	0,49	0,41	0,49	0,41
22	0,83	- 0,20	0,94	- 0,735
23	1,00	- 0,44	1,20	- 0,264
24	1,43	0,26	1,32	0,65
31	0,37	- 0,0043	0,37	- 0,0043
32	0,57	0,0034	0,57	0,0034
33	0,71	0,0030	0,71	0,0030
34	0,91	0,0006	1,16	0,00475
35	1,15	- 0,0044	1,24	- 0,0174
36	1,43	0,0009	1,37	0,011

wobei die Größen  $C_{\mu\nu}$  der jeweiligen Fläche unter den Kurven der Abb.5 - 8 entsprechen.

Mit Gl.(4.8) nehmen dann die Bestimmungsgleichungen (3.9) für die Teilchenbewegung die Gestalt an

$$(4.9) \quad \xi'' = \sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(\xi, \xi', \eta, \eta', s) \cdot \delta(s - s_{\nu}),$$

und ihre Lösung kann unmittelbar angegeben werden in der Form

$$(4.10) \quad \xi'(s_{\mu} + \epsilon) - \xi'(s_{\mu} - \epsilon) = f_{\mu}(\xi(s_{\mu}), \xi'(s_{\mu}), \eta(s_{\mu}), \eta'(s_{\mu}), s_{\mu}) ;$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n) .$$

Ferner haben wir noch zur Abschätzung der vom Detektorfeld hervorgerufenen nichtlinearen Effekte die Anfangsbedingungen der zu berechnenden Teilchenbahnen vorzugeben, für die man zweckmäßigerweise mehrere äußere Punkte der Phasenellipse (an einer festen Stelle  $s$  im Ring) auswählt und verschiedene solche Punkte in  $x$  und  $z$  miteinander kombiniert.

In unserem Falle wurde entsprechend den Einschubbedingungen beim DESY-Speicherring ( $\epsilon_x = 8.0 \text{ cm} \cdot \text{mrad}$ ,  $\epsilon_z = 0.8 \text{ cm} \cdot \text{mrad}$ ;  $\beta_x(s_w) = 0.22 \text{ m}$ ,  $\beta_z(s_w) = 0.5 \text{ m}$ ;  $s = s_w = \text{Wechselwirkungspunkt}$ ) gesetzt

$x(s_w)$ (cm)	$x'(s_w)$ (mrad)	$z(s_w)$ (cm)	$z'(s_w)$ (mrad)
0.42	0.	0.20	0.
0.	19.07	0.	4.0
0.42	0.	0.	4.0
0.	19.07	0.2	0.

und die Teilchen selbst über viele (5000) Umläufe verfolgt, so daß man aus der Gesamtheit der nach jedem Durchgang auftretenden Werte für die Amplitude und Steigung der Teilchenbahnen (genommen an einer festen Stelle  $s$  des Ringes) auf die von den nichtlinearen Störungen hervorgerufene Ausdehnung des Strahls schließen kann. Diese Strahlaufweitung stellt ein Maß dar für den Einfluß, den die Multipolfelder höherer Ordnung des Detektors auf die umlaufenden Elektronen und Positronen ausüben.

Die Ergebnisse der Simulationsrechnung sind in Tabelle 1a (für Version a)) und 1b (für Version b)) wiedergegeben.

Tabelle 1a:

$Q_x$	$Q_z$	Aufweitungsfaktor						
		in der $xx'$ -Ebene			in der $zz'$ -Ebene			
		$\alpha = 0$	$\alpha = 12\text{mrad}$	$\alpha = 60\text{mrad}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 12\text{mrad}$	$\alpha = 60\text{mrad}$	
.105	.095	1.	1.	1.	1.	1.	1.	
.252	.245	1.20	1.20	1.20	2.89	2.89	2.86	Viertel-Resonanz
.334	.327	1.0	1.01	1.12	1.	1.	1.	Drittel-Resonanz

$$\text{Aufweitungsfaktor} = \frac{\text{größte Phasenfläche mit Detektorfeld}}{\text{Phasenfläche ohne Detektorfeld}} \text{ innerhalb von 5000 Umläufen}$$

Tabelle 1b:

$Q_x$	$Q_z$	Aufweitungsfaktor						
		in der $xx'$ -Ebene			in der $zz'$ -Ebene			
		$\alpha = 0$	$\alpha = 12\text{mrad}$	$\alpha = 60\text{mrad}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 12\text{mrad}$	$\alpha = 60\text{mrad}$	
.105	.095	1.	1.	1.	1.05	1.05	1.05	
.252	.245	1.98	1.97	1.58	11.4	10.6	7.3	Viertel-Resonanz
.334	.327	1.	1.01	1.04	1.07	1.07	1.06	Drittel-Resonanz

$$\text{Aufweitungsfaktor} = \frac{\text{größte Phasenfläche mit Detektorfeld}}{\text{Phasenfläche ohne Detektorfeld}} \text{ innerhalb von 5000 Umläufen}$$

Aus der Zusammenstellung der Werte für die Strahlaufweitung bei verschiedenen Q-Einstellungen können nun folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Außerhalb der Drittel- und Viertel-Resonanz macht sich ein Einfluß der höheren Multipolfelder des Detektors auf die Teilchenbewegung kaum bemerkbar (erste Zeile in Tab. 1a, b).
2. Bei einer Viertel-Resonanz (zweite Zeile in Tab. 1a, b) tritt eine Aufweitung des Strahls in x- und besonders z-Richtung auf. Diese Änderungen des Strahlquerschnitts sind praktisch unabhängig vom Kreuzungswinkel  $2\alpha$ .
3. Bei einer Drittel-Resonanz stellt sich eine schwache Strahlaufweitung in x-Richtung ein, die für  $\alpha = 0$  verschwindet und mit zunehmendem Kreuzungswinkel anwächst (dritte Zeile in Tab. 1a, b). Bei Version b) beträgt die maximale Aufweitung selbst bei  $\alpha = 60$  mrad nur 4 %. Verringert man jedoch die Stärke der Linse mit  $\mu = 3$ ,  $\nu = 5$  nur um etwa 5 %, so nimmt die Aufweitung den gleichen Wert (12 %) an wie bei Version a), während sich außerhalb der Resonanzen die Werte praktisch nicht ändern. Eine solche Änderung der Linsenstärke liegt innerhalb der Auswertegenauigkeit für die Koeffizienten  $C_{\mu\nu}$  bei normaler Benutzung des Nutcracker-Programms (Rasterweite 2 cm).

Daß der Strahlquerschnitt sich bei einer Drittel- und Viertel-Resonanz merklich ändert, wird verständlich, wenn man bedenkt, daß ein rotationssymmetrisches, longitudinales Feld einen "oktupolähnlichen" Anteil enthält (siehe Gl.(2.12) und (2.30)), dessen Symmetrie-Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt, und einen "sextupolähnlichen" Term bei von Null verschiedenem Kreuzungswinkel (siehe Gl.(2.11) und (2.30)). Sextupole bzw. Oktupole werden aber für die Stabilität der Betatronschwingung gefährlich, wenn der Arbeitspunkt gerade in unmittelbarer Umgebung einer Drittel- bzw. Viertel-Resonanz liegt.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß die nichtlinearen Feldanteile des Pluto-Detektors den Betrieb des Speicherringes nicht beeinträchtigen. Darüber hinaus deuten die Ergebnisse der Simulationsrechnung darauf hin, daß der Strahl bei eingeschaltetem Detektorfeld durch Annäherung an eine Viertelresonanz in z-Richtung aufgeweitet werden kann (wenn  $\epsilon_z \ll \epsilon_x$  gilt). Dabei wird vorausgesetzt, daß die Oktupolanteile von Pluto groß sind gegen die

Oktupole, die auf dem Umfang des Speicherrings verteilt sind. Da jedoch in den Rechnungen weder eine Q-Verschmierung noch eine Dämpfung der Betatronschwingungen berücksichtigt wurden, wird der experimentelle Aufweitungsfaktor von dem hier berechneten abweichen. Zur Diskussion der linearen Störungen und des Amman-Ritson-Effektes verweisen wir auf die Berichte (2), (3) und (4).

Für Diskussionen und Anregungen danken wir Fräulein I. Borchardt,  
Herrn Dr. H. Hultschig, Herrn Dr. G. Mülhaupt, Herrn Dr. G.A. Voss und  
Herrn Dr. S. Wolff.

L i t e r a t u r

- (1) G. Ripken:  
Untersuchungen zur Strahlführung und Stabilität der Teilchenbewegung in Beschleunigern und Storage-Ringen unter strenger Berücksichtigung einer Kopplung der Betatronschwingungen  
DESY R1-70/4
- (2) G. Ripken:  
Untersuchung der vom Detektorfeld im Storage-Ring verursachten Störungen und ihre Korrektur  
DESY R1-70/5
- (3) G. Ripken:  
Über die Kopplung und Entkopplung der Betatronschwingungen durch longitudinale Magnetfelder mit Anwendungen auf das longitudinale Detektorfeld im Storage-Ring  
DESY R1-71/1  
  
oder  
  
Coupling and decoupling of betatron-oscillations by longitudinal magnetic fields, with applications to the longitudinal detector field in a storage ring  
SLAC Trans - /3/ (1971)
- (4) G. Ripken:  
Zur Berechnung der Strahl- und Winkelenveloppen für die Fokussierung geladener Teilchen durch ein longitudinales, rotationssymmetrisches Magnetfeld mit Anwendungen auf das longitudinale Detektorfeld im Storage-Ring  
DESY R1-71/7
- (5) E. D. Courant and H.S. Snyder:  
Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron  
Annals of Physics, Vol.3-5 (1958)
- (6) K. G. Steffen:  
High Energy Beam Optics (1956)
- (7) G. Ripken:  
Strahlaufweitung und Erhöhung der Luminositätsgrenze des Amman-Ritson-Effektes durch Kopplung und Entdämpfung der Betatronschwingungen  
DESY H5-70/7

- (8) Herrn Dr. S. Wolff danken wir für die Durchführung der Magnetfeld-Berechnungen nach dem Nutcracker-Programm.