

Interner Bericht
DESY F-81/01
Mai 1981

| | | |
|-----------------------------|---------------|-----------------------|
| Eigentum der Property of | DESY | Bibliothek library |
| Zugang: Accessions: | 19. JUNI 1981 | |
| Leihfrist: Loan period: | 7 | Tage days |

SU(2) - SU(3) - CHARME

von

E. Lohrmann

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of apply for or grant of patents.

"DIE VERANTWORTUNG FOR DEN INHALT
DIESES INTERNEN BERICHTES LIEGT
AUSSCHLIESSLICH BEIM VERFASSER."

SU(2) - SU(3) - Charme

E. Lohrmann^{x)}

Inhalt

1. SU(2)
 - 1.1 Drehimpulsformalismus
 - 1.2 Drehungen
 - 1.3 Definition der Gruppe SU(2)
 - 1.4 Addition von Drehimpulsen
 - 1.5 Isospin
 - 1.6 C-Parität
 - 1.7 G-Parität
 - 1.8 Antiteilchen
2. SU(3)
 - 2.1 Definition der Gruppe SU(3)
 - 2.2 Quarkmodell der Mesonen
 - 2.3 Quarkmodell der Baryonen
 - 2.4 Farbe
3. Charme-Mesonen
 - 3.1 Übersicht
 - 3.2 Eigenschaften der D-Mesonen
 - 3.3 Charmonium

^{x)} Vorlesung, gehalten im WS 1980

1. SU(2)

1.1 Drehimpulsformalismus

Die Operatoren J_x, J_y, J_z der x-, y- und z-Komponente des Drehimpulses sind definiert durch die Vertauschungsrelationen

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = i \hbar J_z \quad (1.1)$$

und zyklisch weiter

Der Operator des Quadrats des Drehimpulses ist J^2 :

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (1.2)$$

Er kommutiert mit allen drei Komponenten

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0 \quad (1.3)$$

J^2 und eine der drei Komponenten J_x, J_y, J_z können also simultane Eigenwerte haben. Traditionsgemäß wählt man hierzu J_z . Es sei $|j, m\rangle$ eine zugehörige simultane Eigenfunktion von J^2 und J_z . Dann gilt:

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) \cdot |j, m\rangle \quad (1.4)$$

j kann die folgenden Werte annehmen:

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

Für einen bestimmten Wert von j ist die Eigenfunktion $2j + 1$ -fach entartet, da zu jedem j :

$$J_z |j, m\rangle = \hbar \cdot m \cdot |j, m\rangle \quad (1.5)$$

$m = j, j-1, \dots, 0, \dots, -j$

Eine Darstellung der Drehimpulsoperatoren kann durch Differentialoperatoren erfolgen:

$$J_x = [\vec{r} \times \vec{p}]_x = y p_z - z p_y = -i \hbar (y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}) \quad (1.6)$$

und zyklisch weiter

Die Eigenfunktionen sind die Kugelflächenfunktionen $Y_{jm}(\theta, \phi)$. In dieser Darstellung sind nur ganzzahlige Werte von j und m möglich. Im folgenden wird sehr häufig von der Darstellung durch Matrizen Gebrauch gemacht.

Die Eigenfunktionen sind Spaltenmatrizen, z.B.:

$$j = \frac{1}{2} \begin{cases} |1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$j = 1 \begin{cases} |1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.8)$$

u.s.w.

Die Drehimpulsoperatoren sind $(2j + 1) \times (2j + 1)$ Matrizen.

Man wählt J_z diagonal und hat

$$J_z = \hbar \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & \dots \\ 0 & j-1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & j-2 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \\ & & & & -j \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_j & 0 & \dots \\ b_j & 0 & b_{j-1} & \dots \\ 0 & b_{j-1} & 0 & b_{j-2} \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ib_j & 0 & \dots \\ ib_j & 0 & -ib_{j-1} & \dots \\ 0 & ib_{j-1} & 0 & -ib_{j-2} \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$b_j = \sqrt{1 \cdot 2j}$$

$$b_{j-1} = \sqrt{(1+1)(2j-1)}$$

$$b_{j-2} = \sqrt{(1+2)(2j-2)}$$

$$\vdots$$

Diese Matrizen sind hermitesch¹⁾ und haben Spur 0.

Beispiele:

Spin $\frac{1}{2}$ ($j = \frac{1}{2}$):

$$J_x = \frac{1}{2} \hbar \sigma_x \quad J_y = \frac{1}{2} \hbar \sigma_y \quad J_z = \frac{1}{2} \hbar \sigma_z$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \quad (1.10)$$

wobei die $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Paulischen Spinmatrizen sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

¹⁾ Ist A eine Matrix mit den Elementen a_{ik} , so ist die adjungierte Matrix A^* mit den Elementen $(a^*)_{ik} = (a_{ki})^*$. Eine Matrix ist hermitisch, falls $A = A^*$, sie ist unitär, falls $A \cdot A^* = \mathbb{1}$

$$J^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln der Paulimatrizen:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad (1.12)$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

u.s.w. zyklisch

$$\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$$

u.s.w. zyklisch

Die allgemeinste Eigenfunktion zu Spin $\frac{1}{2}$ ist

$$\psi_{\frac{1}{2}} = a \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + b \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Spin 1 ($j = 1$):

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$J^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spin 3/2 ($j = 3/2$):

$$J_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Schiebeoperatoren:

Sie sind manchmal nützlich. Ihre Definition ist

$$J_{\pm} = J_x \pm i J_y \quad (1.16)$$

Eine wichtige Eigenschaft ist

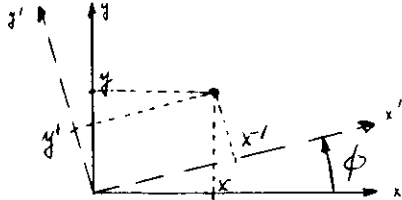
$$J_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \cdot |j, m+1\rangle$$

$$J_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \cdot |j, m-1\rangle \quad (1.17)$$

1.2 Drehungen

Zusammenhang mit dem Drehimpuls:

Man dreht das Koordinatensystem (x, y, z) um den Winkel ϕ um die z-Achse und erhält das gedrehte Koordinatensystem (x', y', z')



Der Punkt (x, y, z) des alten Koordinatensystems hat in dem gedrehten Koordinatensystem die Koordinaten (x', y', z') . Für einen infinitesimal kleinen Wert von ϕ , der mit $\Delta\phi$ bezeichnet sein soll, gilt unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$x' = x + \Delta\phi \cdot y$$

$$y' = y - \Delta\phi \cdot x$$

$$z' = z \quad (1.18)$$

Es sei nun $\psi(x, y, z)$ eine (Wellen-)Funktion von x, y, z . Der Drehoperator der Drehung um den kleinen Winkel $\Delta\phi$ um die z-Achse ist definiert durch

$$R_z(\Delta\phi) \psi(x, y, z) = \psi(x', y', z') \quad (1.19)$$

Die neue Wellenfunktion $\psi(x', y', z')$ hat dieselbe Form wie $\psi(x, y, z)$, aber in einem um $\Delta\phi$ gedrehten Raum. Da Drehung des Koordinatensystems und Drehung der Gegenstände in einem festen Koordinatensystem bis auf das Vorzeichen des Drehwinkels äquivalent sind, kann man auch sagen, daß $R_z(\Delta\phi) \psi(x, y, z) = \psi(x'(x, y, z), y'(x, y, z), z'(x, y, z))$ die Änderung der Wellenfunktion beschreibt, wenn man in einem festen Koordinatensystem das ganze Zeug um den Winkel $\Delta\phi$ dreht.

Nach Gl. (1.16) ist:

$$\psi(x', y', z') = \psi(x + \Delta\phi y, y - \Delta\phi x, z) = \quad (1.20)$$

$$= \psi(x, y, z) + \Delta\phi y \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Delta\phi x \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= \left[1 + \Delta\phi \cdot \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \psi(x, y, z)$$

Setzt man Gl. (1.20) in Gl. (1.19) ein und beachtet Gl. (1.6),
so folgt

$$R_z(\Delta\phi) = 1 + \Delta\phi \cdot \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) = 1 + \Delta\phi \cdot \frac{J_z}{i\hbar} \quad (1.21)$$

Man betrachtet nun eine Hamiltonfunktion, die invariant gegen Drehung ist, d.h. die in einem gedrehten Koordinatensystem dieselbe mathematische Form hat. Dies ist z.B. für die Hamiltonfunktion eines freien Teilchens oder für ein kugelsymmetrisches Problem der Fall. Eine solche Hamiltonfunktion kommutiert offensichtlich mit $R_z(\Delta\phi)$, also kommutiert sie nach Gl. (1.21) auch mit J_z . Sie hat folglich simultane Eigenwerte mit denen von J_z , und die letzteren sind folglich zeitlich konstant, d.h. Eigenwert des Anfangszustandes = Eigenwert des Endzustandes. Dies ist der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses (hier für die z-Komponente vorgeführt). Der Erhaltungssatz des Drehimpulses ist also auf Invarianz der Hamiltonfunktion gegen Drehung zurückgeführt. Dieser wichtige Begriff der Invarianz wird nun näher ausgeführt.

Falls die Hamiltonfunktion gegen Drehung invariant ist, dann sind die gedrehten Systeme äquivalent, d.h. sie beschreiben dieselbe Physik. Das heißt z.B., daß die Energieeigenwerte gleich sind, und daß sich die Wellenfunktion in derselben Weise zeitlich entwickelt. Für die Wellenfunktion bedeutet dies folgendes:

Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, 0) = \Psi(0)$, die Wellenfunktion im gedrehten System $\Psi(x', y', z', 0) = \Psi'(0)$ ist nach

Gl. (1.19):

$$\Psi'(0) = R_z(\Delta\phi) \cdot \Psi(0) \quad (1.22)$$

Hat sich zum späteren Zeitpunkt Δt die Funktion $\Psi'(0)$ zu $\Psi'(\Delta t)$ weiter entwickelt und $\Psi(0)$ zu $\Psi(\Delta t)$, so muß bei Invarianz unter Drehung sein

$$\Psi'(\Delta t) = R_z(\Delta\phi) \cdot \Psi(\Delta t) \quad (1.23)$$

Wie leiten die Bedingung hierfür her, wobei wir bemerken, daß die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängen soll^{x)}. Die Wellenfunktion gehorche der Schrödinger-Gleichung:

$$\Psi(\Delta t) = U(\Delta t, 0) \Psi(0) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H \cdot \Delta t \right) \Psi(0) \quad (1.24)$$

$$\Psi'(\Delta t) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H \Delta t \right) \Psi'(0) \quad (1.25)$$

Man multipliziert Gl. (1.24) von links mit $R_z(\Delta\phi)$ und setzt in Gl. (1.25) $\Psi'(0)$ nach Gl. (1.22):

$$\begin{aligned} R_z(\Delta\phi) \Psi(\Delta t) &= R U \Psi(0) \\ \Psi'(\Delta t) &= U R \Psi(0) \end{aligned}$$

Gl. (1.23) ist offensichtlich erfüllt, falls

$$UR - RU = 0 \quad \text{oder} \quad (1.26)$$

$$UR - UR = 0 \quad (1.27)$$

$R_z(\Delta\phi)$ ist unitär.

Beweis: Die Normierung der Wellenfunktion bleibt bei einer Drehung erhalten.

Beziehung zwischen $\Psi(\vec{r})$ und $\Psi(\vec{r}')$

Man betrachtet eine nicht degenerierte Eigenfunktion der Energie: Ψ_E . Für sie gilt nach Definition

$$H \Psi_E = E \Psi_E$$

Multiplikation von links mit $R_z(\Delta\phi)$ und Anwendung von Gl. (1.27):

$$R_z(\Delta\phi) \cdot H \Psi_E = H(R_z(\Delta\phi) \Psi_E) = R_z(\Delta\phi) \cdot E \Psi_E = E(R_z(\Delta\phi) \Psi_E)$$

x) Beispiel: $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)$

Durch Vergleich des zweiten und vierten Terms sieht man, daß $(R \psi_E) = \psi'_E$ ebenfalls eine Eigenfunktion ist, und da es nur eine einzige gibt, muß sein:

$$\psi'_E = e^{i\delta} \psi_E, \quad \delta \text{ reell} \quad (1.28)$$

Die Phase δ ist eine Konstante der Bewegung (Beweisführung ähnlich wie bei Gl. (1.23) - (1.27)).

Man kann ferner durch explizite Berechnung zeigen, daß

$$\delta = -m \Delta \phi$$

also

$$R_z(\Delta\phi) |j, m\rangle = e^{-im\Delta\phi} |j, m\rangle \quad (1.29)$$

Die Phase $(m\Delta\phi)$ ist eine Konstante der Bewegung, also ist auch die z-Komponente $m \frac{\hbar}{\hbar}$ des Drehimpulses eine Konstante der Bewegung.

Allgemeine Drehung:

Man baut eine endliche Drehung durch unendlich viele, unendlich kleine Drehungen auf:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\phi}{n} = \lim_{\substack{\Delta\phi \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} n \cdot \Delta\phi$$

Drehung um den endlichen Winkel ϕ :

$$R_z(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{J_z}{i\hbar} \cdot \frac{\phi}{n} \right)^n = e^{-iJ_z\phi/\hbar}$$

Die Exponentialfunktion ist durch ihre Potenzreihenentwicklung definiert:

$$\exp\left(\frac{J_z \phi}{i\hbar}\right) = 1 + \left(\frac{\phi}{i\hbar}\right) \cdot J_z + \frac{1}{2!} \left(\frac{\phi}{i\hbar}\right)^2 \cdot J_z^2 + \dots$$

Die allgemeinste Drehung ist

$$R(\phi_x, \phi_y, \phi_z) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\phi_x J_x + \phi_y J_y + \phi_z J_z)} \quad (1.30)$$

Sie bedeutet nacheinander Drehung um die z-Achse um den Winkel ϕ_z , dann Drehung um die y-Achse um den Winkel ϕ_y , dann um die x-Achse um den Winkel ϕ_x . Die Drehungen sind nicht kommutativ.

Beispiel: Spin 1/2

Zur Vereinfachung ist \hbar, π^2, \dots weggelassen.

Man muß es sich in den folgenden Formeln ergänzt denken:

$$\begin{aligned} R_x^{1/2}(\phi_x) &= e^{-\frac{i\sigma_x \phi_x}{2}} && \text{(nach Gl. (1.10, 1.30))} \\ &= 1 + \sum_{\substack{n=\text{gerade} \\ n!}} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\frac{\phi_x}{2}\right)^n \cdot 1 + \sum_{\substack{n=\text{ungerade} \\ n!}} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\frac{\phi_x}{2}\right)^n \cdot \sigma_x \end{aligned}$$

wegen $\sigma_x^2 = 1$.

In den Σ steht die Potenzreihenentwicklung für \cos bzw. \sin .

Damit:

$$\begin{aligned} R_x^{1/2}(\phi_x) &= 1 \cdot \cos\left(\frac{\phi_x}{2}\right) - i \sigma_x \sin\left(\frac{\phi_x}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi_x/2) & -i \sin(\phi_x/2) \\ -i \sin(\phi_x/2) & \cos(\phi_x/2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.31)$$

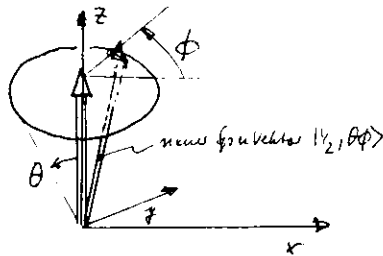
Ebenso findet man

$$R_y^{\frac{1}{2}}(\phi_y) = \begin{pmatrix} \cos(\phi_y/2) & -\sin(\phi_y/2) \\ \sin(\phi_y/2) & \cos(\phi_y/2) \end{pmatrix}$$

$$R_z^{\frac{1}{2}}(\phi_z) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_z/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_z/2} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Anwendungen:

1) Gegeben ist ein Spinzustand $|1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, der Spin zeigt also in Richtung der z-Achse. Man konstruiere einen neuen Spinzustand, der um den Winkel θ , ϕ (ϕ = Azimut) gegen die z-Achse gedreht ist.



Lösung: Der neue gedrehte Zustand ist

$$|1/2, \theta, \phi\rangle = R_z(\phi) R_y(\theta) |1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos\theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin\theta/2 \end{pmatrix} = e^{-i\phi/2} \cos\theta/2 \cdot |1/2, 1/2\rangle + e^{i\phi/2} \sin\theta/2 \cdot |1/2, -1/2\rangle$$

2) Drehung um 360° : $|1/2, 2\pi\rangle = R_y(2\pi) |1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -|1/2, 1/2\rangle$
 D.h. bei Drehung um 360° geht die Wellenfunktion nicht in sich selbst über, sondern erwirbt ein Vorzeichen -1.

3) Definition des Polarisationsvektors:

$$\vec{p} = \frac{\langle \psi | \vec{J} | \psi \rangle}{j}$$

Für Spin 1/2 ist der allgemeinste Spin-Zustand

$$\psi = a |1/2, 1/2\rangle + b |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dann ist der Polarisationsvektor:

$$P_x = 2\text{Re}(a^*b) \quad , \quad P_y = i(ab^* - a^*b) \quad , \quad P_z = |a|^2 - |b|^2$$

4) Beweis, daß zirkular polarisiertes Licht $m = \pm 1$ hat:

Die Wellenfunktion des Photons ist:

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \epsilon_\mu(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\vec{x} - p_0t)}$$

$\epsilon_\mu =$ Polarisationsvierervektor: $\vec{\epsilon}, \epsilon_4$

Die elektrische Feldstärke \vec{E} ist

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + i \nabla A_4$$

Für $t = 0$ ist $A_4 = 0$ und \vec{E} parallel \vec{e}

Man wählt nun den Impuls \vec{p} in z-Richtung, dann ist $A_z = 0$ und

$$A_x = \frac{\epsilon_x}{\sqrt{2p_0}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - p_0t)} \quad , \quad A_y = \frac{\epsilon_y}{\sqrt{2p_0}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - p_0t)}$$

Drehung um den Winkel $\Delta\phi$ (nach Gl 1.18)

$$\begin{aligned}
R_z(\Delta\phi)\vec{A} &= (A'_x, A'_y, 0) = (A_x + \Delta\phi \cdot A_y, A_y - \Delta\phi \cdot A_x, 0) \\
&= \vec{A} + \Delta\phi \cdot (A_y, -A_x, 0) \\
&= \vec{A} + \Delta\phi \cdot \frac{J_z}{i\hbar} \cdot \vec{A} \quad (\text{nach Gl. 1.21})
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der zwei letzten Zeilen:

$$\frac{J_z A_x}{i\hbar} = A_y \quad \frac{J_z A_y}{i\hbar} = -A_x$$

Damit das Feld Eigenzustand zu J_z ist, muß sein:

$$J_z A_x = \hbar m A_x, \quad J_z A_y = \hbar m A_y$$

Dies eingesetzt gibt:

$$\frac{\hbar m A_x}{i\hbar} = A_y \quad \frac{\hbar m A_y}{i\hbar} = -A_x$$

Durch Multiplikation der Gleichungen folgt:

$$m = \pm 1$$

$$\text{Bedingung: } A_x = \pm i A_y, \quad \epsilon_x = \pm i \epsilon_y$$

- zirkulare Polarisation

1.3 Definition der Gruppe SU(2)

Es besteht ein Zusammenhang zwischen den unitären 2 x 2 Matrizen der Determinante 1 und den Drehungen im Raum. Dies zeigen wir nun.

Die allgemeinste unitäre 2 x 2 Matrix sei gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Unitaritätsbedingung:

$$U U^\dagger = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ac^* + bd^* \\ ca^* + db^* & cc^* + dd^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

U ist durch die 4 komplexen Zahlen a, b, c, d gegeben, entsprechend 8 reellen Parametern. Zwischen diesen bestehen nach Gl. (1.34) 4 reelle Gleichungen (2 reelle Gleichungen wegen der beiden Diagonalelemente, eine Komplex, also 2 reelle Gleichungen für das eine Neben-Diagonalelement, das andere ist dann automatisch erfüllt). U ist also durch 8 - 4 = 4 reelle Parameter festgelegt^{x)}.

Nennt man sie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so schreibt sich

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot e^{i\beta} & -\sin\alpha \cdot e^{i\delta} \\ \sin\alpha \cdot e^{i(\beta+\delta)} & \cos\alpha \cdot e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

und mit der Substitution

$$\epsilon = \frac{\beta+\delta}{2}, \quad \eta = \frac{\beta-\delta}{2}, \quad \theta = \frac{\gamma+\delta-\epsilon}{2}, \quad \phi = \frac{\eta-\delta+\epsilon}{2}$$

^{x)} Ebenso sieht man, daß die allgemeinste unitäre n x n Matrix durch $2n^2 - n^2 = n^2$ reelle Parameter bestimmt ist.

wird

$$U = e^{i\epsilon} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

$$= e^{i\epsilon} R_z^{\frac{1}{2}}(-2\theta) \cdot R_y^{\frac{1}{2}}(2\alpha) \cdot R_z^{\frac{1}{2}}(-2\phi)$$

(s. Gl. (1.31), (1.32)).

U entspricht also fast einer Drehung - bis auf den Phasenfaktor $e^{i\epsilon}$. Man betrachtet nun die speziellen Matrizen U, deren Determinante = 1 ist. Die Forderung

$$\det U = 1$$

$$\text{macht } e^{i\epsilon} = 1$$

Die allgemeinste unitäre 2 x 2 Matrix U_S mit Determinante +1 ist also durch 2 x 2 - 1 = 3 reelle Parameter festgelegt, z.B. durch die drei Drehwinkel θ, α, ϕ :

$$U_S = R_z^{\frac{1}{2}}(-2\theta) \cdot R_y^{\frac{1}{2}}(2\alpha) \cdot R_z^{\frac{1}{2}}(-2\phi) \quad (1.35)$$

Die unitären 2 x 2 Matrizen mit Determinante + 1 bilden eine Gruppe, die Gruppe SU(2) (S steht für "speziell").

Beachtet man noch, daß

$$R_x(2\alpha) = R_z(-\pi/2) \cdot R_y(2\alpha) \cdot R_z(\pi/2) \quad (1.36)$$

so sieht man, daß jeder beliebigen Drehung, ausgedrückt z.B. durch die drei Drehwinkel der Gl. (1.30), eine bestimmte unitäre (2 x 2)-Matrix mit Det = 1 entspricht, die wir mit Hilfe von Gl. (1.35) und (1.36) bestimmen können.

Das heißt:

Die Gruppe SU(2) ist eine Repräsentation der Drehgruppe in drei Dimensionen.

Man kann die Gruppe SU(2) natürlich auch durch Matrizen repräsentieren, die größer sind als 2 x 2. Diese müssen natürlich ebenfalls unitär sein und Determinante 1 haben. Da man beliebige Drehungen aus infinitesimalen Drehungen aufbauen kann, wollen wir diese Eigenschaften für die Matrix-Repräsentation von $R_z(\Delta\phi) = 1 + \frac{J_z}{i\hbar} \Delta\phi$ explizit zeigen:

$$(i) \quad R_z(\Delta\phi) = 1 + \frac{J_z}{i\hbar} \Delta\phi$$

ist unitär, falls

$$\left(1 + \frac{J_z}{i\hbar} \Delta\phi\right) \left(1 - \frac{J_z^*}{i\hbar} \Delta\phi\right) = 1$$

hieraus (Entwicklung bis zur ersten Ordnung in $\Delta\phi$):

$$J_z = J_z^*$$

also: Die Operatoren J_x, J_y, J_z müssen hermitesch sein

(ii) $R_z(\Delta\phi)$ hat die Determinante 1, falls

$$1 = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\Delta\phi}{i\hbar} J_{11} & \frac{\Delta\phi}{i\hbar} J_{12} & \dots \\ \frac{\Delta\phi}{i\hbar} J_{21} & 1 + \frac{\Delta\phi}{i\hbar} J_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 1 + \frac{\Delta\phi}{i\hbar} (J_{11} + J_{22} + \dots) + \text{Glieder } O((\Delta\phi)^2)$$

Hieraus folgt: Spur $J_{x,y,z} = 0$

Die Bedingungen (i) und (ii) sind natürlich erfüllt, siehe Gl. (1.9).

Die allgemeinste Drehung ist also ein Element der Gruppe SU(2). Gehen wir also von Gl. (1.30) aus, lassen \hbar weg und machen die

Umdefinition - $\phi_x + \phi_x$ u.s.w. so kann man ein Element der Gruppe SU(2) schreiben:

$$U_S = e^{i(\phi_x J_x + \phi_y J_y + \phi_z J_z)} \quad (1.36)$$

Die drei Operatoren J_x, J_y, J_z heißen Generatoren der Gruppe. SU(2) hat drei Generatoren, entsprechend den drei reellen Parametern, welche die allgemeinste unitäre 2 x 2 Matrix der Determinante 1 bestimmen. Diese drei reellen Parameter sind in Gl. (1.36) als ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z gewählt. Die Struktur der Gruppe ist durch die Vertauschungsrelationen der Generatoren festgelegt. Es sind dies für SU(2) natürlich die Gl. (1.1), die ohne das \hbar so aussehen:

$$[J_x, J_y] = i \cdot J_z \text{ u. zyklisch weiter}$$

Die Gruppe SU(2) läßt sich wie oben erwähnt in Matrizen verschiedener Dimensionen repräsentieren. Die einfachste nicht-triviale Repräsentation ist in 2 x 2 Matrizen. Die Generatoren sind $\sigma_x/2, \sigma_y/2, \sigma_z/2$. Sie wirken auf Spin 1/2 Teilchen. Für Teilchen mit Spin j benötigt man eine Repräsentation mit $(2j + 1) \times (2j + 1)$ Matrizen, z.B. für Spin 1 3×3 Matrizen^{x)}.

x) Die unitären 3 x 3 Matrizen der Determinante 1 bilden eine größere Gruppe als die oben erwähnten 3 x 3 Spinmatrizen, nämlich die Gruppe SU(3). Diese hat $3 \times 3 - 1 = 8$ Generatoren. In Eichtheorien entsprechen die Zahl der Generatoren Feldern von Vektorpartikeln, z. B. gibt es in SU₂ die drei Vektorbosonen W^+, W^-, W^0 , in SU(3) die acht Gluonen. In SU(5) gibt es $5 \times 5 - 1 = 24$ Vektorfelder, nämlich das Photon, die 3 Vektorbosonen, die 8 Gluonen und die 12 Felder der überschweren X-Bosonen.

3.2 Addition von Drehimpulsen

Man betrachtet zwei Teilchen mit Spin 1/2.

Die Basisvektoren im Spinraum sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \quad \text{Teilchen 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \quad \text{Teilchen 2}$$

Das Zweiteilchensystem hat $2 \otimes 2$ Basiszustände:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2$$

Dies ist keine irreduzible Repräsentation, d.h. diese Zustände transformieren sich unter einer Drehung (d.h. unter einer SU(2)-Transformation) i.a. nicht ineinander.

Man sucht nun irreduzible Repräsentationen durch passende Linearkombinationen dieser vier Basiszustände. Dies sind die Eigenfunktionen zum Drehimpuls

$$|j_1 + j_2|, |j_1 + j_2 - 1|, \dots, |j_1 - j_2|. \text{ In diesem Beispiel sind es die Eigenfunktionen zu } j = 0 \text{ und } j = 1.$$

Dazu gehören jeweils 1 (j = 0) und 3 (j = 1) Zustände:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3$$

Man konstruiert zuerst die Zustände mit j = 1

Es ist evident, daß

$$|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \uparrow \uparrow$$

Durch Anwendung des Schiebeoperators Gl. (1.17) erhält man

$$J_- |1, 1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)} |1, 0\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle$$

$$= (J_-(1) + J_-(2)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \right]$$

(hierbei wirkt $J_-(1)$ nur auf Teilchen 1, etc.).

Also

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$$

ebenso erhält man

$$|1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \downarrow\downarrow$$

Nun kommt der Zustand mit $j = 0$. Er hat

$$m = m_1 + m_2 = 0 \text{ also}$$

$$|0, 0\rangle = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten a, b.

Wie vorher macht man

$$J_- |0, 0\rangle = 0 = (J_-(1) + J_-(2)) |0, 0\rangle$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2$$

hieraus folgt $a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Normierung)

und

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

Das hätte man auch dadurch herleiten können, daß man den zu $|1, 0\rangle$ orthogonalen Zustand konstruiert.

Zusammenfassung:

| m | $j = 1$ | $j = 0$ |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1 | $\uparrow\uparrow$ | |
| 0 | $\frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$ |
| -1 | $\downarrow\downarrow$ | |
| | symmetrisch | antisymmetrisch |

(1.37)

Wichtig:

Die Spinwellenfunktion für Spin 1(0) ist symmetrisch (antisymmetrisch) gegenüber Vertauschung der beiden Spin 1/2-Teilchen.

1.5 Isospin

Es fällt auf, daß sich die Hadronen in Teilchenfamilien gruppieren lassen. Die Teilchen innerhalb einer Familie sind sehr ähnlich. Sie haben dieselben Quantenzahlen Spin, Parität, Baryonzahl, Seltsamkeit, Charme. Ihre Massen unterscheiden sich nur um ein paar %. Das einzige Unterscheidungsmerkmal ist die elektrische Ladung, die sich jeweils von Teilchen zu Teilchen einer Familie um eine Einheit von e ändert.

Man faßt die Teilchen innerhalb einer Familie in der formalen Beschreibung zu einem Zustandsvektor zusammen. Falls die Familie ℓ Mitglieder hat, ist dies ein ℓ -Vektor.

Beispiele:

Proton, Neutron: $|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pion: $|\pi^+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\pi^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\pi^-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kaon: $|K^+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|K^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diese Schreibweise hat große Ähnlichkeit mit dem Spinformalismus.

Um die Anzahl der Zustände ℓ innerhalb einer Teilchenfamilie zu charakterisieren, benötigt man einen Vektor der Größe ℓ . Die Zahl der Teilchen-Zustände ℓ entspricht der Zahl der Spin-Zustände $(2j + 1)$ eines Teilchens mit Spin j . Setzt man

$$\ell = 2I + 1$$

so kann man sagen, daß das Teilchen den Isospin I hat, wenn es zu einer Familie mit ℓ Mitgliedern gehört. Analog kann man wieder eine 2-Komponente (hier: 3-Komponente m_3) des Isospins einführen.

Beispiele: ($I = \text{Isospin}$)

| m_3 | $I = \frac{1}{2}$ | $I = 1$ | m_3 | $I = \frac{3}{2}$ |
|----------------|---------------------------|---------------------------------|----------------|-------------------|
| $\frac{1}{2}$ | $p \quad K^+ \quad \Xi^0$ | $1 \quad \pi^+ \quad \Sigma^+$ | $\frac{3}{2}$ | Δ^{++} |
| $-\frac{1}{2}$ | $n \quad K^0 \quad \Xi^-$ | $0 \quad \pi^0 \quad \Sigma^0$ | $\frac{1}{2}$ | Δ^+ |
| | | $-1 \quad \pi^- \quad \Sigma^-$ | $-\frac{1}{2}$ | Δ^0 |
| | | | $-\frac{3}{2}$ | Δ^- |

Verknüpfung mit der elektrischen Ladung Q :

$$Q = m_3 + \frac{B + S + C}{2} \quad (1.38)$$

($B = \text{Baryonzahl}$, $S = \text{Seltsamkeit}$, $C = \text{Charme}$)

Dies ist die erweiterte Gell-Mann-Nishijimaformel.

Erklärung: Zwei Teilchen in einer Isospinfamilie unterscheiden sich in ihrer Ladung um jeweils eine Einheit in e , folglich muß die Gl. (1.38) a priori die Form haben

$$Q = m_3 + \text{Konstante}$$

da $\Delta Q = \Delta m = \pm 1$

Die Form der Konstanten $(B + S + C)/2$ wurde historisch durch Inspektion der Teilchenfamilien und durch die Eingebung (Einführung der additiven Konstanten S für die seltsamen Teilchen) von Gell-Mann ermittelt (damals ohne C).

Die Kombination

$$Y = B + S \quad (1.39)$$

heißt Hyperladung.

Bis hierher ist das ganze nur eine mathematische Beschreibung, ohne physikalischen Inhalt. Man wählt die Beschreibung aber so, weil man nun den empirisch erwiesenen Satz von der Ladungsabhängigkeit der starken Wechselwirkung sehr elegant formulieren kann:

Die starke Wechselwirkung ist invariant unter einer SU(2)-Transformation der Isospin-Vektoren. Nach dem in Abschnitt (1.2) gesagten entspricht der Invarianz unter einer Drehung der Erhaltungssatz des Drehimpulses - hier entspricht der Invarianz unter der oben erwähnten SU(2)-Transformation der Erhaltungssatz des Isospins. Man kann den Satz von der Ladungsunabhängigkeit der starken Wechselwirkung also auch so formulieren:

Bei der starken Wechselwirkung ist der Isospin erhalten.

Diese Symmetrie ist nicht ganz exakt. Sie wird von der elektromagnetischen Wechselwirkung verletzt. Man erwartet also Abweichungen von der Größenordnung α .

Beispiele:

(1) Man betrachtet das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte

$$R = \frac{\sigma(p+d \rightarrow \pi^+ + H^3)}{\sigma(p+d \rightarrow \pi^0 + He^3)}$$

Deuterium (d) hat Isospin 0, also hat der Anfangszustand Isospin $I = 1/2$. Der Endzustand hat zwei Teilchen, eines hat $I = 1$ (π^+, π^0), eines hat $I = 1/2$ (H^3, He^3). Der Isospinzustand $|1/2, 1/2\rangle$ des Anfangszustandes muß auch der des Endzustandes sein, der letztere setzt sich wie folgt als Linearkombination von $|\pi^+ H^3\rangle$ und $|\pi^0 He^3\rangle$

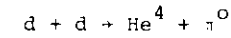
(Clebsch-Gordan-Koeffizienten) zusammen:

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+ H^3\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^0 He^3\rangle \end{aligned}$$

Die Amplitude $|\pi^+ H^3\rangle$ hat das Gewicht $\sqrt{2}$ verglichen zur Amplitude $|\pi^0 He^3\rangle$, folglich ist $R = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Gemessen ist $R = 1.91 \pm 0.25$ (Crewe et al.)
 $\approx 2.26 \pm 0.11$ (Harting et al.)

(2) Die Reaktion



sollte verboten sein, da der Anfangszustand $I = 0$ hat, der Endzustand hat $I = 0 + 1 = 1$.

Tatsächlich ist auch der Wirkungsquerschnitt $< 1.6 \cdot 10^{-32} \text{ cm}^2$ - zum Vergleich: $\sigma(d + d \rightarrow He^4 + \gamma) \approx 0.8 \cdot 10^{-32} \text{ cm}^2$.

1.6 C-Parität

Der Operator \tilde{C} der Ladungskonjugation verwandelt Teilchen in Antiteilchen. Teilchen mit (Ladung, Baryonzahl, Fermionzahl, Seltsamkeit, Charme) = 0 können Eigenzustände zu C sein mit Eigenwert ± 1 . Dieser heißt C-Parität. Das Photon hat $C = -1$, da sich unter \tilde{C} das Vorzeichen der Ladungen und damit der Felder umdreht. Teilchen, die in zwei Photonen zerfallen, haben $C = +1$

| Teilchen | γ | π^0 | η | η' | A_2^0 | f | ρ^0 | ω | ϕ | J/ψ |
|----------|----------|---------|--------|---------|---------|-----|----------|----------|--------|----------|
| C | -1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

Ein Zustand aus Fermion-Antifermion hat (L = Bahndrehimpuls,

S = Spin)

$$C = (-1)^{\ell + S} \quad (1.40)$$

Erklärung:

Die Operation \tilde{C} hat dieselbe Wirkung wie die Vertauschung der zwei Teilchen, also dieselbe Wirkung wie die Paritätsoperation - dies gibt den Faktor $(-1)^\ell \cdot (-1)$. Der zusätzliche Faktor -1 kommt von der ungeraden Teilchen-Antiteilchen Eigenparität. Von der Spinwellenfunktion kommt ein weiterer Faktor $(-1)^S + 1$ (siehe Gl.1.37).

1.7 G-Parität

Die G-Parität ist der Eigenwert des Operators

$$\tilde{G} = \tilde{C} e^{i\pi I_1} \quad (1.41)$$

Teilchen mit B = S = C = 0 können Eigenzustände zu \tilde{G} sein. Weil \tilde{G} auf dem Isospin beruht, erwartet man eine Erhaltung von G nur mit der Genauigkeit der Isospinerhaltung, also ein paar %.

G-Parität des Pions: Dieses hat I = 1, also ist (vgl. Gl.(1.14))

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_1 |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+\rangle + |\pi^-\rangle)$$

$$I_1^2 |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (I_1 |\pi^+\rangle + I_1 |\pi^-\rangle) = |\pi^0\rangle$$

$$\begin{aligned} e^{i\pi I_1} |\pi^0\rangle &= \left(\sum_{n=\text{gerade}} \frac{(-i)^n \pi^n I_1^n}{n!} + \sum_{n=\text{ungerade}} \frac{(i)^n \pi^n I_1^n}{n!} \right) \cdot |\pi^0\rangle \\ &= \cos \pi \cdot |\pi^0\rangle + i \sin \pi \cdot \frac{|\pi^+\rangle + |\pi^-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= -|\pi^0\rangle \end{aligned}$$

ebenso

$$e^{i\pi I_1} |\pi^+\rangle = -|\pi^-\rangle, \quad e^{i\pi I_1} |\pi^-\rangle = -|\pi^+\rangle$$

$$\tilde{G} \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} = \tilde{C} e^{i\pi I_1} \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} = -\tilde{C} \begin{pmatrix} \pi^- \\ \pi^0 \\ \pi^+ \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$$

Das Pion ist also Eigenzustand von \tilde{G} mit Eigenwert G = -1. Daraus folgt, daß ein bestimmter Zustand vermöge der starken Wechselwirkung stets nur in eine gerade oder in eine ungerade Zahl von Pionen zerfallen kann, je nach dem dieser Zustand G = +1 oder G = -1 hat.

$$G = C \cdot (-1)^I$$

| Teilchen | π | η | η' | A_2 | f | φ | ω | ϕ | $\pi\psi$ |
|----------|-------|--------|---------|-------|----|-----------|----------|--------|-----------|
| G | -1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 |

Der 2π -Zerfall des η ist aus Gründen der Paritätserhaltung verboten.

1.8 Antiteilchen

Antiteilchen werden im Isospinformalismus durch die zu den Teilchen konjugiert komplexe Wellenfunktion dargestellt, als Beispiel:

Teilchen: $|I, m_3 \rangle, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Antiteilchen: $\langle I, m_3 |, (a^* \ b^*)$

Zweiteilchenzustand aus Teilchen und Antiteilchen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (10) = \uparrow\uparrow, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (01) = \uparrow\downarrow \quad \text{etc.}$$

Der Zustand

$$\psi_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (10) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (01) = \uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow$$

geht unter jeder unitären Transformation in sich selbst über. Er gehört also zu Isospin $I = 0$, und folglich

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow) \quad (1.42)$$

vgl. Gl. (1.37)!

Beweis - allgemein für Eigenvektoren der Dimension $2j + 1 = \ell$

Man nennt den i -ten Eigenvektor $\phi^{(i)}$

$$\phi^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}, \quad \phi^{(i)*} = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0)$$

U sei eine unitäre Matrix mit den Elementen U_{mn} .

Dann ist (leicht zu zeigen)

$$U \phi^{(i)} = \sum_{k=1}^{\ell} U_{ki} \phi^{(k)} \quad (1.43)$$

Die verallgemeinerte invariante Form zu Gl. (1.42) ist nun

$$\psi_S = \sum_{i=1}^{\ell} \phi^{(i)} \phi^{(i)*} \quad (1.44)$$

Die transformierte Form ist

$$\begin{aligned} \psi_S' &= \sum_{i=1}^{\ell} \phi^{(i)'} (\phi^{(i)*'})' = \sum_{i=1}^{\ell} (U \phi^{(i)}) \cdot (U \phi^{(i)})^* \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} U \phi^{(i)} \phi^{(i)*} U^* \stackrel{\text{Gl. 1.43}}{=} \sum_{i,m,n=1}^{\ell} U_{mi} \phi^{(m)} \phi^{(n)*} U_{in}^* \\ &= \sum_{m,n=1}^{\ell} \phi^{(m)} \phi^{(n)*} \sum_{i=1}^{\ell} U_{mi} U_{in}^* = \sum_{m,n=1}^{\ell} \phi^{(m)} \phi^{(n)*} \delta_{mn} \quad (\text{Unitarität von } U) \end{aligned}$$

also

$$\sum_{i=1}^{\ell} \phi^{(i)'} (\phi^{(i)*'})' = \sum_{i=1}^{\ell} \phi^{(i)} \phi^{(i)*} \quad (1.45)$$

Die Form Gl. (1.44) bzw. (1.45) ist also unter einer unitären Transformation invariant. Gl. (1.42) ist hiervon ein Spezialfall.

Anwendung auf das Nukleon-Antinukleonssystem:

Die Gl. (1.38) lautet für Antinukleonen ($B = -1$):

$$Q = m_3 - 1/2$$

Daraus folgt, daß das Antiproton (\bar{p}) $m_3 = -1/2$, das Antineutron (\bar{n}) $m_3 = +1/2$ hat.

In Gl. (1.42) hat die Kombination $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die 3-Komponente des Isospins $m_3 = 0$, folglich ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Antiteilchen mit $m_3 = -1/2$ also

$$\begin{aligned} |\bar{p}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\uparrow} \\ |\bar{n}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{\downarrow} \end{aligned}$$

und die Isospin 0-Kombination:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle |\bar{p}\rangle + |n\rangle |\bar{n}\rangle) \quad (1.46)$$

Die dazu orthogonale Kombination mit Isospin 1 ist

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle |\bar{p}\rangle - |n\rangle |\bar{n}\rangle) \quad (1.47)$$

Durch Anwendung der Schiebeoperatoren erhält man

$$\begin{aligned} |1,1\rangle &= |p\rangle \cdot |\bar{n}\rangle \\ |1,-1\rangle &= -|n\rangle \cdot |\bar{p}\rangle \end{aligned} \quad (1.48)$$

2. SU(3)

2.1 Definition der Gruppe SU(3)

Die unitären 3×3 Matrizen, deren Determinante +1 ist, bilden eine Gruppe, die Gruppe SU(3). Die Matrizen wirken auf Zustände, die aus den 3 Basisvektoren

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

aufgebaut sind

$$\chi' = U \cdot \chi \quad (2.2)$$

wobei U eine solche Matrix (Gruppenelement von SU(3)) ist. Die Matrix U ist durch $3 \cdot 3 - 1 = 8$ reelle Konstanten α_n bestimmt (siehe Ausführungen zwischen Gl. (1.34) u. (1.35):

$$U = e^{i \sum_{n=1}^8 \alpha_n \cdot \frac{\lambda_n}{2}} \quad (2.3)$$

Die acht Operatoren $(\frac{\lambda_n}{2})$ heißen Generatoren der Gruppe. Sie sind durch ihre Vertauschungsrelationen definiert:

$$\left[\frac{1}{2} \lambda_i, \frac{1}{2} \lambda_k \right] = i f_{ik\ell} \cdot \frac{1}{2} \lambda_\ell$$

Die Strukturkonstanten f_{ikl} von SU(3) sind:

| | | | | | | | | | |
|-----------------------|-----|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------------|----------------------|
| $\lambda \ \ k \ \ l$ | 123 | 147 | 156 | 246 | 257 | 345 | 367 | 458 | 678 |
| f_{ikl} | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Die Standardform der Repräsentation der λ 's ist

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sie sind hermitesch und haben Spur 0. Die Matrizen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entsprechen den Paulimatrizen, λ_3 und λ_8 sind diagonal.

Die Herleitung der Form der λ 's Gl. (2.5) und Gl. (2.4) geht so ähnlich wie bei SU(2), ist aber komplizierter und wird nicht vorgeführt.

| Einige wichtige Begriffe | SU(2) | SU(3) | SU(n) |
|-------------------------------------------------------|-------|-------|-----------|
| Ordnung der Gruppe = Zahl der Generatoren | 3 | 8 | $n^2 - 1$ |
| Rang der Gruppe = Zahl der kommutierenden Generatoren | 1 | 2 | $n - 1$ |

Unter den $n \times n$ Matrizen gibt es n linear unabhängige (n = Zahl der Diagonalelemente), die gleichzeitig in Diagonalf orm sein können. Wegen der Bedingung Spur = 0 ist der Rang gleich $n-1$.

H_i sei einer der kommutierenden Generatoren. Dazu gibt es eine Eigenwertsgleichung:

$$H_i |\psi\rangle = m_i |\psi\rangle$$

Die Werte m_i heißen die Gewichte.

In SU(3) hat man als Diagonalmatrizen λ_3 und λ_8 .

Identifiziert man Teilchen mit Zustandsvektoren, so kann man jedem zwei simultane Eigenwerte von λ_3 und λ_8 zuweisen, also zwei erhaltene Quantenzahlen.

Im SU(2) des Isospins gab es nur eine Diagonalmatrix, eine erhaltene Quantenzahl, diese ist m_3 bzw. über Gl. (1.38) die Ladung Q. Eine Klassifizierung der Teilchen in SU(3) gestattet es, den Teilchen eine weitere Quantenzahl zu geben, die simultan mit der Ladung erhalten ist. Man wählt hierfür die Hyperladung^{x)} Y (Gl. (1.39)), um die seltsamen Teilchen in Super-Teilchenfamilien einbeziehen zu können.

^{x)} Dies ist bis auf eine Konstante dasselbe wie die Seltsamkeit S, da die Baryonzahl B absolut erhalten ist.

Analog zu dem fundamentalen Isospindublett in SU(2), aus dem man alle anderen Teilchen zusammenbauen kann, hat man im SU(3) ein fundamentales Triplet mit den folgenden Eigenwerten von λ_3 und λ_8 :

| | Eigenwert von: | |
|----------|----------------|---------------|
| | λ_3 | λ_8 |
| χ_1 | 1 | $1/\sqrt{3}$ |
| χ_2 | -1 | $1/\sqrt{3}$ |
| χ_3 | 0 | $-2/\sqrt{3}$ |

(2.6)

Ein Versuch, das fundamentale Triplet mit irgendwelchen bekannten Teilchen zu identifizieren, mißlingt, so z.B. die Identifikation mit Proton, Neutron, Λ (Sakatamodell), welches auf in der Natur nicht beobachtete Teilchenzustände führt.

Dagegen führt die Identifikation der drei Basiszustände mit den drei Quarks u, d, s zu einem - bis jetzt - widerspruchsfreien Gebäude, und ist in Übereinstimmung mit zahlreichen experimentellen Tatsachen.

Die drei Quarks, als Mitglieder des fundamentalen Triplets, müssen alle drei dieselben Quantenzahlen von Spin und Baryonzahl haben. Da der Bahndrehimpuls nur ganzzahlige Werte von \hbar annehmen kann, müssen die Quarks Spin 1/2 haben, damit man Teilchen mit halbzahligem Spin

aus ihnen zusammenbauen kann.

Das Nukleon muß deshalb eine ungerade Zahl von Quarks enthalten. Die kleinste Zahl, die geht, ist drei^{x)}. Die Kombination Quark-Quark-Antiquark geht nicht, aus denselben Gründen wie beim Sakata-Modell (z.B. Vorhersage von experimentell nicht gefundenen Baryonen mit S = +1). Also hat das Nukleon die Kombination qqq. Hieraus folgt für die Baryonzahl der Quarks

$$B = 1/3$$

Dennt man die Eigenwerte von λ_3 und λ_8 : $\bar{\lambda}_3$ und $\bar{\lambda}_8$, so hat man die folgende Zuordnung zwischen m_3 und $\bar{\lambda}_3$:

$$m_3 = 1/2 \cdot \bar{\lambda}_3$$

Dies ist so, damit die beiden Quarks mit $\bar{\lambda}_8 = 1/\sqrt{3}$ einen Ladungsunterschied von $\Delta Q = 1$ haben (s. Gl. (1.38)) ;

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{\lambda}_3(\chi_1) - \frac{1}{2} \cdot \bar{\lambda}_3(\chi_2) = \Delta m_3 = \Delta Q = 1$$

Damit ist auch gewährleistet, daß Kombinationen der Form Quark-Antiquark ganzzahlige Ladung haben.

Die andere Quantenzahl, $\bar{\lambda}_8$, muß der Seltsamkeit S zugeordnet werden. Die Formeln werden einfach, wenn man statt S die Hyperladung Y

x) Die Zahl 3 ist durch Neutrino-Nukleonstreuung bestätigt.

nimmt (ist egal, da B streng erhalten ist), also allgemeiner Ansatz:

$$Y = \frac{\bar{\lambda}_8}{\sqrt{3}} + \text{const.}$$

Dies erfüllt die Forderung, daß $\Delta Y = \frac{\Delta \bar{\lambda}_8}{\sqrt{3}}$ eine ganze Zahl sein muß. Um die Konstante zu ermitteln, muß man beachten, daß die Gell-Mann-Nishijimagleichung (1.38) für die Quarks gelten muß, hier ohne Charme-Teilchen lautet sie:

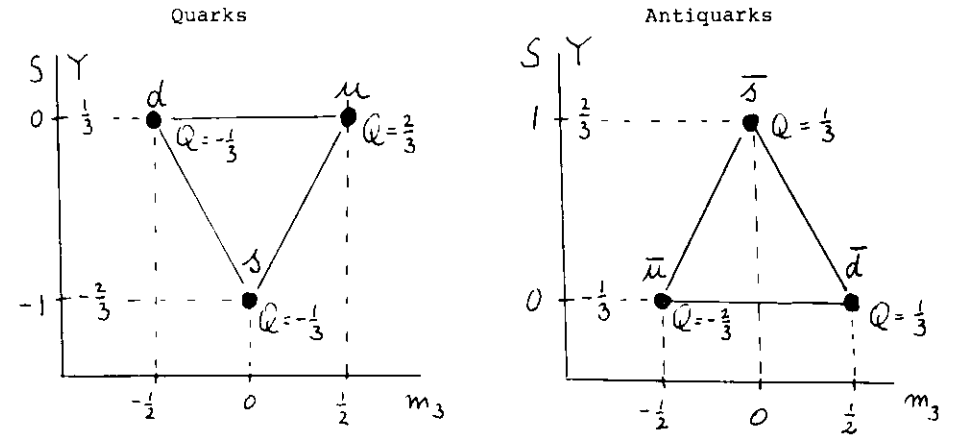
$$Q = m_3 + Y/2$$

$$Y = B + S$$

Da die Quantenzahlen Q, m_3, B, S additiv sind, erfüllen alle aus Quarks zusammengesetzten Teilchen automatisch diese Gleichung, falls die Quarks dies tun. Nun gilt für die $x_1 (=u)$ und $x_2 (=d)$ -Quarks in (2.6) $Y = 1/3 + \text{const} = B + S = 1/3$ (da für Quarks $B = 1/3$ und für u, d -Quarks $S = 0$), also $\text{const} = 0$ und folglich

$$Y = \bar{\lambda}_8 / \sqrt{3} \quad (2.7)$$

Damit erhält man die folgenden Werte der Quantenzahlen für die Quarks:



2.2 Quarkmodell der Mesonen

Mesonen sind die Kombination Quark-Antiquark $q\bar{q}$.

Die Mesonen müssen die Quantenzahlen haben (s.Gl. (1.40))

$$P = (-1)^{\ell+1}$$

$$C = (-1)^{\ell+S}$$

ℓ = Bahndrehimpuls, S = Gesamtspin der beiden Quarks. Man hat keine Mesonen gefunden, deren Parität/C-Paritäts-Quantenzahlen diesen Relationen nicht genügen.

Es gibt $3 \otimes \bar{3} = 9$ Kombinationen $q\bar{q}$ (Nonet)

Davon ist eine Singulett-Kombination

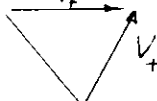
$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \quad (2.8)$$

vgl. Gl. (1.45)

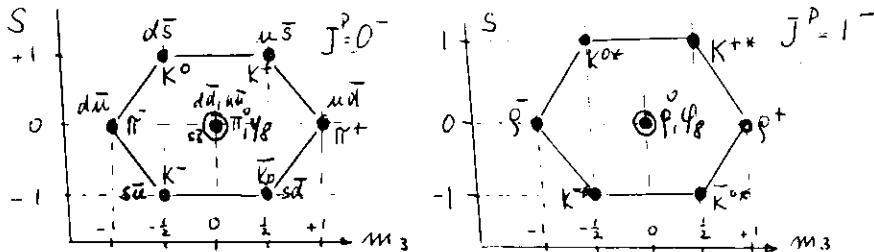
Die übrigen Kombinationen bilden ein Oktett.

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 8$$

Man kann formal die Mitglieder des Oktetts erhalten, indem man, von einem evidentem Mitglied ausgehend die zwei Schiebeoperatoren $T_{\pm} = \frac{1}{2} (\lambda_1 \pm i \lambda_2)$ und $V_{\pm} = \frac{1}{2} (\lambda_4 \pm i \lambda_5)$ anwendet.



Als einfachste Nonetts (Oktetts) erhält man die, wo die Quarks Bahndrehimpuls $\ell = 0$ haben, und die Quarkspins sich zu Spin 0 bzw. 1 kombinieren, mit Parität -1 (wegen der negativen Fermion-Antifermionparität).



Die Zustände in der Mitte sind doppelt besetzt. Einer ist der Isospin 1-Partner des $(\pi^+ \pi^-)$ bzw. $(\rho^+ \rho^-)$ (s. Gl. 1.47):

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}) \Big|_{S=0, \text{ s. Gl. 1.37}}$$

$$|\rho^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}) \Big|_{S=1}$$

(2.9)

Der andere Zustand ist Isospin 0 und orthogonal zu dem ψ_8 der Gl. (2.8). Nach Gl. (1.46) hat ein $I = 0$ Zustand die Form

$$u\bar{u} + d\bar{d} + a s\bar{s}$$

Der Koeffizient a ergibt sich aus der Orthogonalität zu Gl. (4.8) und man erhält für das Oktett-Isospin 0-Mitglied

$$|\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \Big|_{S=0}$$

$$|\phi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \Big|_{S=1}$$

(2.10)

Die SU(3) Singulett-Isospin 0-Kombination ist (Gl. (2.0)):

$$|\eta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \Big|_{S=0}$$

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \Big|_{S=1}$$

(2.11)

Es gibt also je zwei Zustände mit allen Quantenzahlen gleich, nämlich (η_1, η_8) sowie (ϕ_1, ϕ_8) . Die physikalischen Teilchen können eine Mischung aus den beiden Oktett-Singulett-Zuständen sein:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_8 \cos \theta_V - \varphi_1 \sin \theta_V \\ \omega &= \varphi_8 \sin \theta_V + \varphi_1 \cos \theta_V \\ \eta &= \eta_8 \cos \theta_S - \eta_1 \sin \theta_S \\ \eta' &= \eta_8 \sin \theta_S + \eta_1 \cos \theta_S \end{aligned}$$

(2.12)

θ_V, θ_S sind die Mischungswinkel, $\phi, \omega, \eta', \eta$ sind die physikalischen Teilchen.

Die Mischungswinkel müssen empirisch bestimmt werden.

Pseudoskalar-Nonett $\bar{0}$: Hier stimmt die Gell-Mann-Okubo-Massenformel^{x)} für das Oktett ganz gut.

$$m_K^2 = \frac{3m_\eta^2 + m_\pi^2}{4} \quad (2.13)$$

Also ist $\eta \approx \eta_8$, $\eta' \approx \eta_1$

also ist θ_S klein

$$\theta_S \approx 0.05$$

(2.14)

Vektor-Nonett $\bar{1}$: Hier stimmt die Gell-Mann-Okubo-Massenformel für das Oktett nicht, also ist θ_V groß. Für den Mischungswinkel $\sin\theta_V \approx \sqrt{1/3}$ hat man (man setze ϕ_8 und ϕ_1 in Gl. (4.12) aus Gl. (2.10) und (2.11) ein):

$$\begin{aligned} \phi &= -s\bar{s} \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

x) Diese Formel basiert auf gewissen Annahmen über die SU(3)-Brechung (S. Okubo, Progr. Theor. Phys. 27, 949 (1962); M. Gell-Mann u. Y. Ne'eman, The Eight-fold Way, Benjamin 1964).

Diese ganz spezielle Quark-Zusammensetzung "erklärt" z.B. warum das ϕ fast nicht in drei Pionen, sondern bevorzugt in $K\bar{K}$ zerfällt^{x)}. Die Quarkzusammensetzung der Gl. (2.15) erfährt ihre Stütze durch die Messung der Zerfallsbreite der Vektormesonen ρ, ω, ϕ in e^+e^- bzw. $\mu^+\mu^-$: Faßt man ρ, ω, ϕ als $q\bar{q}$ -Zustände auf, so ist die Kopplung g_γ ans Photon proportional der Ladung der Quarks, also

$$g_{\gamma\phi} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overset{\uparrow Q_u}{\frac{2}{3}} - \overset{\uparrow Q_d}{\left(-\frac{1}{3}\right)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

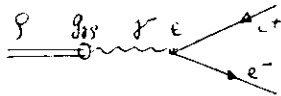
$$g_{\gamma\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$g_{\gamma\phi} \sim -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

(s. Gl. 2.9 u. 2.15)

x) Die Zweigregel sagt, daß beim starken Zerfall eines Hadrons die ursprünglichen Quarks in die Zerfallprodukte übergehen müssen. Als Erklärung vermutet man, daß zwei schwere Quarks nur mit geringer Wahrscheinlichkeit annihilieren können (qualitative Erklärung in der QCD), so daß sie sich in den Zerfallsprodukten wiederfinden müssen.
Lit.: S. Okubo, Phys.Lett 5, 163 (1965)
G. Zweig, CERN report TH 412 (1964)
J. Iizaka, Progr.Theor. Phys. Suppl. 37-38, 21 (1966)
T. Appelquist u. H.-D. Politzer, Phys.Rev. Lett. 34, 43 (1975)

und die Zerfallsbreite der Vektormesonen ist

$$\Gamma_{ee}(\rho \rightarrow e^+e^-) = \frac{\alpha}{12} g_{\rho e}^2 \cdot m_\rho$$


analoge Gleichungen für ω, ϕ und damit ($m_\rho \approx m_\omega \approx m_\phi$):

$$\Gamma_{ee}(\rho \rightarrow e^+e^-) : \Gamma_{ee}(\omega \rightarrow e^+e^-) : \Gamma_{ee}(\phi \rightarrow e^+e^-) = g_{\rho e}^2 : g_{\omega e}^2 : g_{\phi e}^2 = 9 : 1 : 2$$

gemessen:

| | Γ_{ee} (keV) | normiert auf 9 |
|----------|---------------------|----------------|
| ρ | 6.8 | 9 |
| ω | 0.8 | 1.1 |
| ϕ | 1.3 | 1.7 |

Die Relation hat kein Recht, besser zu stimmen, wegen des $\rho | \omega | \phi$ Massenunterschieds.

Wie mißt man Γ_{ee} ?

(i) Direkt

(ii) Durch Messung des Wirkungsquerschnitts

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Vektormeson} \rightarrow \text{Zerfall in irgendwas}) = \sigma_T(e^+e^-)$$

Für $\sigma_T(e^+e^-)$ gilt eine Breit-Wignerformel:

$$\sigma_T(e^+e^-) = \pi \cdot \frac{2J+1}{W^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee} \Gamma_T}{(W - m_V)^2 + \Gamma^2/4} \quad (2.16)$$

$W = e^+e^-$ -Schwerpunktenergie, $m_V = \rho, \omega, \phi$ - Masse, $\Gamma_T =$ totale Breite,

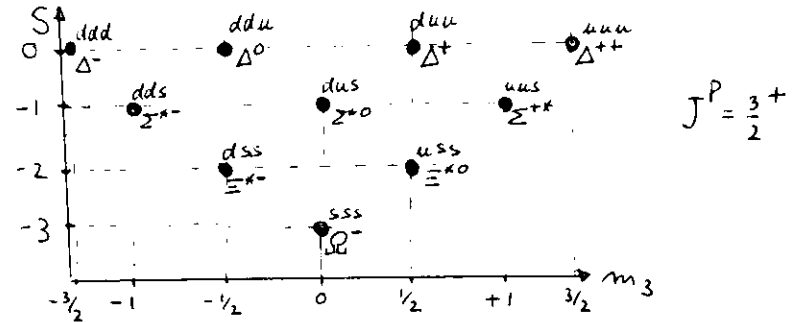
$$J = 1$$

Aus Gl. (2.16) kann man Γ_{ee} aus Breite und Höhe der Resonanz gewinnen oder, falls die Breite der Resonanz kleiner ist als die experimentelle Auflösung:

$$\int_{\text{Resonanz}} \sigma_T(e^+e^-) dW = \frac{6\pi^2}{m_V^2} \cdot \Gamma_{ee} \quad (2.17)$$

2.3 Quarkmodell der Baryonen

(i) Das Dekuplett: Aus 3 Quarks kann man 10 verschiedene 3-Quark-Zustände machen:



Die Massenunterschiede der einzelnen Isospinfamilien sind konstant. Das führte zur Voraussage des Ω^- mit allen Quantenzahlen, einschließlich der Masse. Es wurde bekanntlich daraufhin in Brookhaven gefunden und ist eine überzeugende Demonstration des SU(3)-Schemas.

Der Quark-Bahndrehimpuls im Dekuplett ist $\ell = 0$, da es der tiefstliegende Zustand ist. Also sind die Spins der drei Quarks parallel. Die

Spin-Wellenfunktion ist also symmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier Quarks. Aus den Bildungen ddd, uuu, sss sieht man, daß auch die SU(3)-Quark-Wellenfunktion symmetrisch ist bezüglich der Vertauschung zweier Quarks. Also ist die Gesamtwellenfunktion von Δ^{++} symmetrisch bezüglich Vertauschung zwei ident. Quarks. Da Quarks Spin 1/2 haben, widerspricht dies dem Pauliprinzip. Diese Schwierigkeit wird in Abschn. (2.4) besprochen.

Die oben erwähnte Symmetrie ist klar für Zustände wie

$$|\Delta^{++} (J_z = \frac{3}{2})\rangle = f(r_1, r_2, r_3) \cdot u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow$$

wobei u^\uparrow = u-Quark mit Spinwellenfunktion $J_z = +1/2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für $J_z = 1/2$ wird die Spinwellenfunktion symmetrisiert:

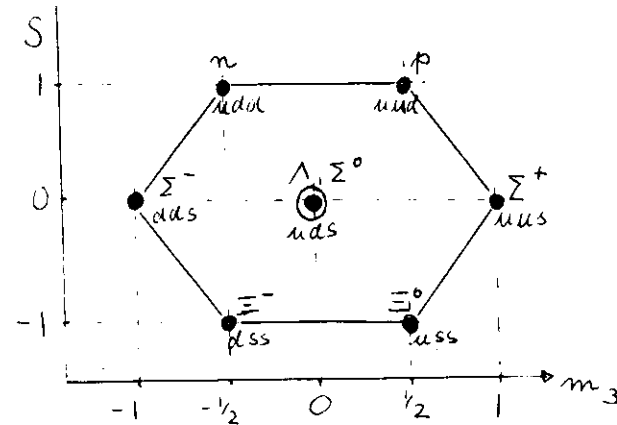
$$|\Delta^{++} (J_z = \frac{1}{2})\rangle = f(r_1, r_2, r_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (u^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow + u^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow + u^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow)$$

analog

$$|\Delta^+ (J_z = \frac{3}{2})\rangle = f(r_1, r_2, r_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (u^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow)$$

$$|\Delta^+ (J_z = \frac{1}{2})\rangle = \dots \quad 9 \text{ Terme}$$

(ii) Das Oktett: Es hat $J^P = 1/2^+$



Die Gesamt (Spin + Quark)-Wellenfunktion soll ebenso wie beim Dekuplett symmetrisch bei Vertauschung zweier Quarks sein. Da man ($\mathcal{L} = 0$) aus drei Spin 1/2-Wellenfunktionen keine symmetrische Gesamtspin 1/2-Wellenfunktion machen kann (s. z.B. Schiff, Lehrbuch der Quantenmechanik), muß man verlangen, daß die Wellenfunktion symmetrisch ist bei gleichzeitiger Vertauschung der Spin- und SU(3)-Wellenfunktionen.

Beispiel Proton. Seine Wellenfunktion ist "in Wirklichkeit":

$$|p, J_z = +\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \left\{ \begin{aligned} &2 u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + 2 u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + 2 d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow \\ &- u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow - u^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow - d^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow \\ &- u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow - u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow - d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow \end{aligned} \right\}$$

Die drei Zustände uuu, sss, ddd fehlen im Oktett, da sie symmetrisch in den SU(3) Wellenfunktionen sind, und da man zu $J = 1/2$

nicht aus drei Spin 1/2 eine symmetrische Spinwellenfunktion machen kann, kann man auch keine symmetrische Gesamtwellenfunktion machen, diese Zustände kann es also nicht geben.

Dagegen kann man aus uds zwei verschiedene orthogonale Wellenfunktionen bilden, eine mit Isospin 0 und eine mit Isospin 1^x). Der Zustand in der Mitte ist deshalb doppelt besetzt mit Λ ($I = 0$) und Σ^0 ($I = 1$).

Die Zahl der Zustände im Oktett ist also $10 - 3 + 1 = 8$

2.4 Farbe

Die Tatsache, daß die drei Quark-Zustände der Baryonen symmetrische Wellenfunktionen bei der Vertauschung der Spin- und SU(3)-Koordinaten der Quarks haben, verstößt gegen das Pauliprinzip. Man löst diese Schwierigkeit, indem man den Quarks einen weiteren Freiheitsgrad gibt: Farbe. Diese kann drei verschiedene Werte annehmen: rot (r), grün (g), blau (b). Die Quarks haben also zusätzlich zu ihrer Spin-Koordinate (\uparrow, \downarrow) und ihrer SU(3)-Koordinate (u,d,s) noch eine Farb-Koordinate (r,g,b). Mit Hilfe der letzteren kann man nun eine insgesamt in Spin-SU(3)-Farbe asymmetrische Drei-Quark-Wellenfunktion bilden:

x) Eine Erklärung führt zu weit.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} q_{1r} & q_{1g} & q_{1b} \\ q_{2r} & q_{2g} & q_{2b} \\ q_{3r} & q_{3g} & q_{3b} \end{vmatrix}$$

Unabhängige Evidenz für die Existenz von Farbe kommt aus der Messung des totalen Querschnitts $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ bei hoher Energie.

Die Farbe erhält in der Quantenchromodynamik (QCD) eine Bedeutung als "Ladung" der starken Wechselwirkung.

Die zwei folgenden Postulate würden es erklären, warum man Quarks nie als freie Teilchen beobachten kann:

(i) Es besteht eine vollständige Symmetrie unter $SU(3)_c$.

Die Gruppe $SU(3)_c$ wirkt auf die Farb-Indizes (r,g,b) der Quarks. Sie ist wohl unterschieden von der SU(3) der Abschnitte (2.1 - 2.3), die auf die Quark-Art (Flavor-) Indizes u,d,s wirkt. Die Flavor-SU(3) Symmetrie ist im Gegensatz zu $SU(3)_c$ nicht exakt - dies sieht man schon an den teilweise erheblichen Massenunterschieden in den SU(3) Multipletts.

(ii) Normale Hadronen sind Singulets unter $SU(3)_c$.

Beispiel:

$$|K^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{s}_r u_r + \bar{s}_g u_g + \bar{s}_b u_b)$$

Satz (i) und (ii) erklären, warum man keine freien Quarks sehen kann, da diese Farb-Tripletts sind. Es erklärt auch, warum man keine Zustände aus 2 Quarks oder 4 Quarks sieht: Man kann aus 2 bzw. 4 SU(3)-Tripletts kein Singulett machen.

Die Sätze (i) und (ii) sind bisher (1980) unbewiesen.

3. Charme-Mesonen

3.1 Übersicht

Hinweise auf die Existenz eines 4. Quarks, genannt c (wie Charme) kamen aus dem $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ -Zerfall (s.z.B. mein Buch). Sie sagten eine Ladung des c-Quarks zu 2/3 voraus.

Das c-Quark ist wesentlich schwerer als die u,d,s-Quarks. Es hat eine neue Quantenzahl C (Charme), die bei der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten ist. Es macht keinen praktischen Sinn, dieses Quark zusammen mit u,d,s einer SU(4)-Symmetrie zu unterwerfen, da man erwarten muß, daß eine solche Symmetrie bereits wegen der Massenunterschiede schwer gebrochen wäre. Davon unabhängig bleibt die Voraussage von Mesonen aus $c\bar{q}$ und $\bar{c}q$ ($q = u,d,s$). Dies zeigt die Übersicht:

| | u | d | s | c | Spin Parität J ^P |
|-----------|------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| \bar{u} | π^0, η, η' ρ^0, ω | π^- ρ^- | K^- K^{*-} | D^0 (1863) D^{*0} (2006) | $(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$ 0^- $\uparrow\uparrow$ 1^- |
| \bar{d} | π^+ ρ^+ | π^0, η, η' ρ^0, ω | \bar{K}^0 \bar{K}^{*0} | D^+ (1868) D^{*+} (2009) | 0^- 1^- |
| \bar{s} | K^+ K^{*+} | K^0 K^{*0} | η, η' ϕ | F^+ (2030) F^{*+} (2140) | 0^- 1^- |
| \bar{c} | \bar{D}^0 \bar{D}^{*0} | D^- D^{*-} | F^- F^{*-} | η_c (2980) ? J/ψ (3097) | 0^- 1^- |

Massenwerte in MeV in ().

Aus der Übersicht liest man die folgenden Quantenzahlen ab:

| | Charme | Seltsamkeit | Isospin |
|------------|--------|-------------|---------|
| D^+, D^0 | 1 | 0 | 1/2 |
| F^+ | 1 | 1 | 0 |
| J/ψ | 0 | 0 | 0 |

3.2 Eigenschaften der D-Mesonen

(i) Spin $J = 0$ - aus der Winkelverteilung von Ψ'' (3770) $\rightarrow D \bar{D}$
 s. J. Kirkby, FNAL Conf. 1979, S. 107
 Voraussage aus Quarkmodell: $J = 0$

(ii) Parität: Paritätsverletzung beim Zerfall ist nachgewiesen durch Vergleich der Zerfälle
 $D \rightarrow K \pi$
 $D \rightarrow K \pi \pi$
 s. SLAC-LBL Coll. Phys.Rev.Lett. 37, 153f (1976)

(iii) Isospin $I = 1/2$ durch Beobachtung der Paare
 D^+, D^0 mit $C = +1$
 \bar{D}^0, D^- mit $C = -1$
 Voraussage aus Quarkmodell: $I = 1/2$

(iv) Mischung D^0, \bar{D}^0 : bisher nur obere Grenzen, keine Mischung beobachtet.
 Ohne Mischung erwartet man:

$$\Psi'' (3770) \rightarrow D^0 + \bar{D}^0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\bar{K}l^+ + Kl^- + \dots \quad (l = e \text{ oder } \mu)$$

Falls eine $D^0 - \bar{D}^0$ -Mischung da ist, würde man statt $\bar{K} K$ bzw. $e^+ e^-$ im Endzustand $K\bar{K}, \bar{K}\bar{K}, e^+ e^+, e^- e^-$ beobachten. Man findet keine K -Paare

mit derselben Seltsamkeit (Phys.Lett. 69B, 503 (1977)) und keine $\nu^+ \mu^+, e^+ e^+, \mu^- \mu^-, e^- e^-$ -Paare (j. Kirkby, zitiert von K. Winter, 1979 FNAL Conf., S. 258).

(v) Zerfall. Ist er, wie vorausgesagt, $V - A$?

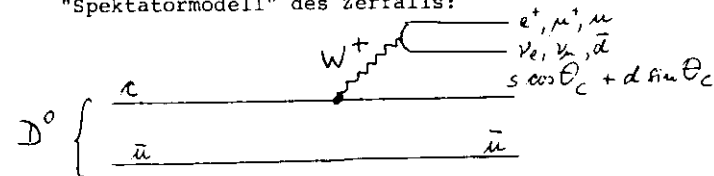
$D \rightarrow K^* e \nu$
 $\rightarrow K^* \mu \nu$ } Die Impulsverteilung des e, μ würde eine Aussage über $V - A$ machen, aber man hat (noch) nicht genug Daten.

$D \rightarrow K e \nu$
 $\rightarrow K \mu \nu$ Dies ist ein reiner V -Übergang, also unbrauchbar.

$D \rightarrow e \nu$ Dieser Zerfall ist verboten unter $V - A$ (aus denselben Gründen wie der $\pi \rightarrow e \nu$ Zerfall). Er wird in der Tat nicht beobachtet.

$\nu d \rightarrow \mu^- c$
 $\nu s \rightarrow \mu^- c$ Die flache y -Verteilung in 2-Lepton-Ereignissen ist in Übereinstimmung mit einer $V - A$ Wechselwirkung.

"Spektatormodell" des Zerfalls:



Hieraus liest man ab (Vernachlässigung der Amplitude mit $d \cdot \sin\theta_c$):

$$\Delta S = \Delta C \quad \text{für nicht leptonische Zerfälle}$$

$$\Delta S = \Delta C = \Delta Q \quad \text{für leptonische Zerfälle}$$

- ist experimentell bestätigt.

Man liest weiterhin ab:

$$\Gamma(D \rightarrow K^{(*)} e \nu) : \Gamma(D \rightarrow K^{(*)} \mu \nu) : \Gamma(D \rightarrow \text{Hadronen}) \cong 1 : 1 : 3$$

(Der Faktor 3 ist der Farbfaktor von u & \bar{d}).

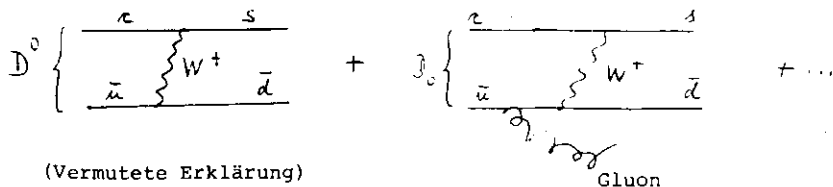
Ferner

$$\frac{\text{Rate } D \rightarrow K e \nu}{\text{Rate } K_L^0 \rightarrow \pi e \nu} \approx \left[\frac{M(D)}{M(K^0)} \right]^5 / \tan^2 \theta_c$$

Diese Beziehungen sind ungefähr mit den Messungen o.k. für das D^+ .

Die gemessene Lebensdauer des D^+ ist $\sim 0.7 \cdot 10^{-12} \text{ s}$, theoretisch erwartet wird $\sim 10^{-12} \text{ s}$.

Dagegen ist die Lebensdauer des D^0 wesentlich (\approx Faktor 3) kürzer als die des D^+ . Das Spektatormodell kann also allein so noch nicht stimmen. Für den D^0 -Zerfall können wesentlich die folgenden Diagramme beitragen (die es für D^+ nicht gibt):

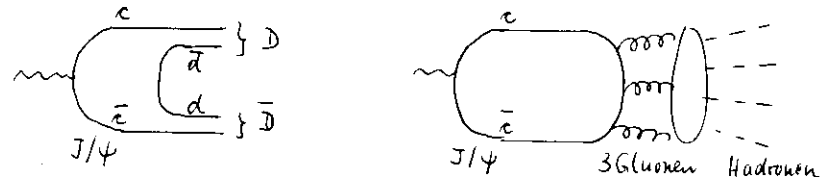


3.3 Charmonium

Im Gegensatz zu den D- und F-Mesonen haben die $c \bar{c}$ -Zustände J/ψ und η_c die Quantenzahlen $C = S = 0$ und können demnach vermöge der starken Wechselwirkung zerfallen. Trotzdem ist ihre Breite sehr klein (z.B. ist $\Gamma(J/\psi) = 70 \text{ KeV}$ - etwa 10^4 mal kleiner als man naiverweise glauben sollte). Der Grund ist wohl die Okubo-Zweig Regel (s. Bemerkungen im Anschluß an Gl. 2.15). Da die Masse des J/ψ unterhalb der Schwelle der $D \bar{D}$ -Paarerzeugung liegt, können die c-Quarks nicht im Endzustand auftreten, sondern müssen annihilieren, was ihnen aus Gründen schwer fällt, die man in der QCD qualitativ verstehen kann:

Wie das J/ψ zerfallen möchte, aber nicht kann

Wie das J/ψ zerfallen muß (ungern)



Das η_c ($J^P = 0^-$) ist vermutlich der bei der Masse 2980 MeV gefundene Zustand.

Das J/ψ ist der $J^P = 1^-$ -Zustand, in Farb-Wellenfunktion explizit geschrieben:

$$|J/\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_r^\dagger \bar{c}_r^\dagger + c_b^\dagger \bar{c}_b^\dagger + c_g^\dagger \bar{c}_g^\dagger)$$

Eigenschaften (s. G. Abrams, Proc. 1975 Stanford Conf. S. 25):

(i) Spin / Parität $J^P = 1^-$ - erwartet nach Quarkmodell - bestätigt durch Messung der Interferenz der Amplitude $A(e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-)$ mit der Amplitude des QED-Prozesses $A'(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$

(ii) Isospin $I = 0$ - erwartet nach Quarkmodell, da das c-Quark $I = 0$ hat.

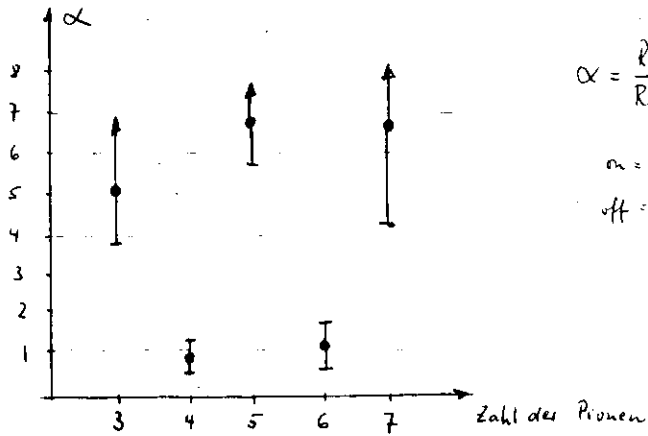
Bestätigt durch Nachweis des Zerfalls



der wegen $I(\Lambda) = 0$ sonst verboten wäre. Hieraus folgt nach Abschn. (1.6) u. (1.7) für die G-Parität

$$G(J/\psi) = -1$$

d.h. das J/ψ darf nur in eine ungerade Zahl von Pionen zerfallen:



$$\alpha = \frac{R_{on}}{R_{off}} = \frac{\sigma_{on}^{\mu\mu} / \sigma_{on}^{\mu\mu}}{\sigma_{off}^{\mu\mu} / \sigma_{off}^{\mu\mu}}$$

$on =$ auf J/ψ Res.

$off =$ ausserhalb J/ψ

(nach SLAC-LBL Koll., s. G. Abrams)