

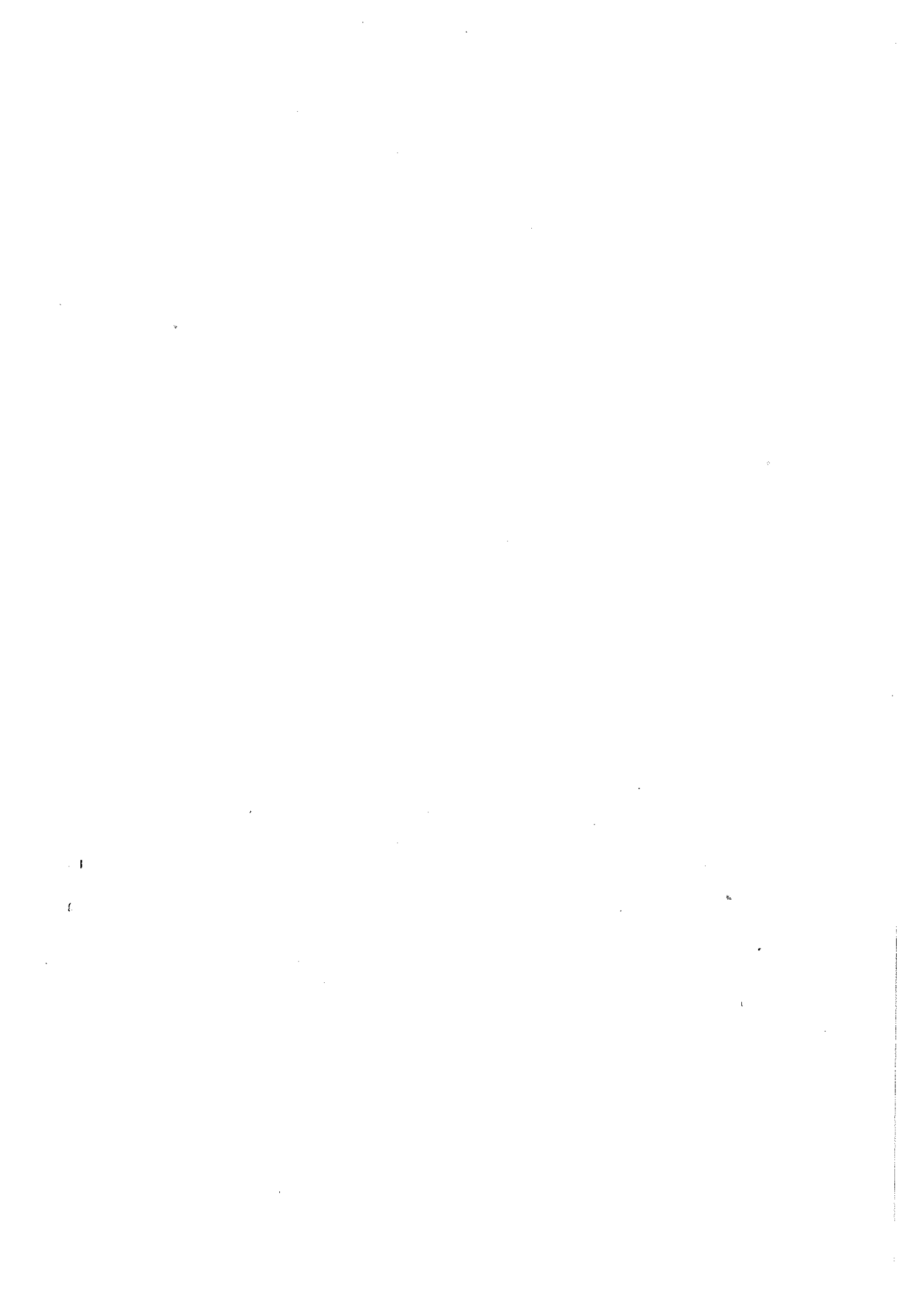
Interner Bericht  
DESY F1-71/1  
April 1971

Bestimmung von Spin und Parität des  $\pi(1640)$

von

Hartmut Neumann

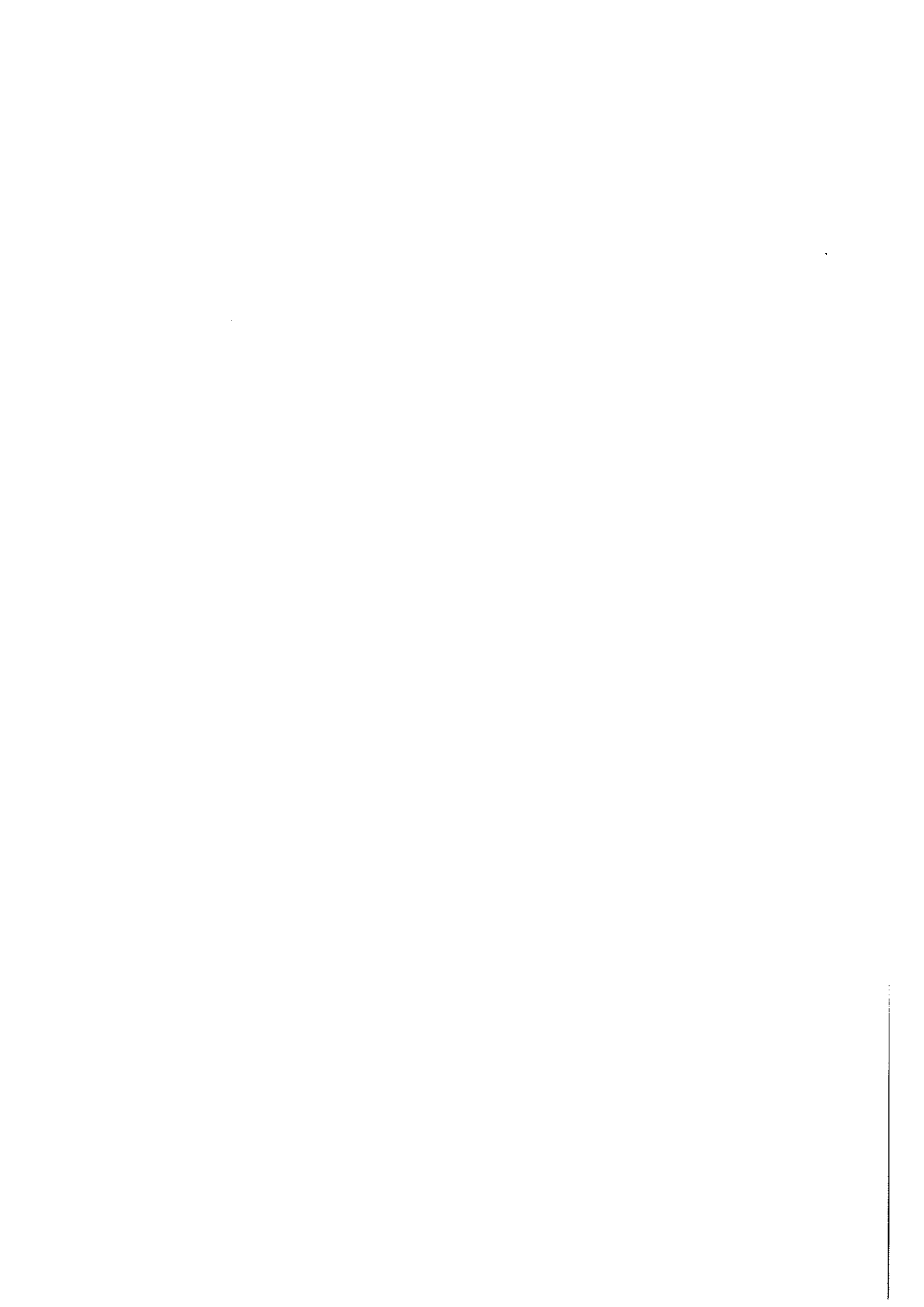
DESY-Bibliothek  
- 7. MAI 1971



Bestimmung von Spin und Parität  
des  $\pi(1640)$

Experimentelle physikalische Diplomarbeit  
des  
Fachbereichs Physik  
der  
Universität Hamburg

vorgelegt  
von  
Hartmut Neumann  
aus  
Berlin  
1971



## Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
I. Zusammenfassung	1
II. Einleitung	3
III. Übersicht über die experimentellen Verteilungen für das $\pi(1640)$ in diesem Experiment	5
IV. Übersicht über bisherige Analysen des $\pi(1640)$	8
a) Wirkungsquerschnitte	8
b) Verzweigungsverhältnisse	9
c) Spin und Parität	9
V. Berechnung der Dalitz-Diagramm-Dichte für Zerfälle in drei spinlose Teilchen	10
a) Zweiteilchen-Zerfälle	11
b) Zerfälle in drei spinlose Teilchen	13
VI. Durchführung der Spin-Paritäts-Analyse	19
a) Das Maximum-Likelihood-Verfahren	19
b) Angepaßte Funktionen	21
VII. Ergebnisse	27
a) Fest angenommene Parameter	28
b) Bestimmung der freien Parameter unter der Annahme $J^P=2^-$	28
c) Wirkungsquerschnitt des $\pi(1640)$	31
d) Vergleich mit anderen Spin-Paritäts- Hypothesen und Verzweigungsverhältnisse	31
e) Isospin und G-Parität	34

	<u>Seite</u>
VIII. Anhang A: Experimentelles Vorgehen	35
a) Überblick	35
b) Strahlimpuls und Wirkungsquerschnitte	35
IX. Anhang B: Erweiterungen und Änderungen im Maximum-Likelihood-Programm MURTLBERT	37
a) Allgemeines	
b) Allgemeine SUBROUTINE PROC(I,JS,P)	38
c) Winkelverteilungen	38
d) Kaskadenzerfälle	38
e) Bewichtung mit nur von den Ereignissen abhängigen Gewichten	39
f) Bewichtung mit vom Benutzer zu programmierenden Funktionen der Massenquadrate	39
g) Dalitz-Diagramm-Analyse durch Inter- polation in einer vorgegebenen Tabelle	41
h) Zusätzliche Datenkarten	43
i) Aufsummierung mehrerer Verteilungen in einer Darstellung	45
j) Änderung der BOUT-Zellen-Indizierung	46
k) Beispiel eines Datenkartensatzes	47
X. Literaturverzeichnis	48
XI. Danksagungen	50
XII. Verzeichnis der Abbildungen	52
XIII. Abbildungen	56

## I. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die  $\pi(1640)$  oder  $A_3$  genannte Resonanz untersucht. Es werden Methode und Ergebnisse einer Bestimmung des Wirkungsquerschnittes, des Spins und der Parität und der Verzweigungsverhältnisse beschrieben. In dieser Untersuchung wurden 5325 Ereignisse der Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$  bei 11.7 GeV/c Laborimpuls des einlaufenden Pions benutzt.

Zunächst wird eine qualitative Betrachtung der Zerfallskanäle des  $\pi(1640)$  an Hand des Dalitz-Diagramms  $M_{\pi_1^+ \pi^-}^2$  gegen  $M_{\pi_2^+ \pi^-}^2$  für Ereignisse mit  $3\pi$ -Massen im Bereich des  $\pi(1640)$  vorgenommen. Ebenso wird die  $3\pi$ -Massenverteilung unter verschiedenen Einschränkungen in den  $\pi^+ \pi^-$ -Massen betrachtet. Diese Untersuchungen weisen darauf hin, daß das  $\pi(1640)$  überwiegend über den Kanal  $\rho^0 \pi^+$  und  $f\pi^+$  und möglicherweise auch mit einem geringen Anteil über den 'direkten'  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Kanal zerfällt. Es zeigt sich, daß genauere Angaben über die Zerfallsverhältnisse mit dieser Methode nicht möglich sind.

Es wird ein Überblick über die bisher zur quantitativen Analyse des  $\pi(1640)$  benutzten Verfahren gegeben.

Sodann wird das bei dieser Untersuchung verwendete Verfahren beschrieben. Dazu wird zunächst eine auf dem Formalismus von Jacob und Wick beruhende Beschreibung der Dichte des Dalitz-Diagramms für eine feste Spin-Paritäts-Hypothese entwickelt. Freie Parameter sind die Anteile der einzelnen Zerfallskanäle. Interferenzen zwischen den Zerfallskanälen werden berücksichtigt.

Ein Hauptproblem bei der Analyse ist die Bestimmung des Untergrundes, zu dem etwa 2/3 der Ereignisse im  $\pi(1640)$ -Massenbereich gehören. Hier wird ein rein phänomenologischer Ansatz durchgeführt.

Alle freien Parameter zur Beschreibung sowohl des  $\pi(1640)$  als auch des Untergrundes werden in einer gemeinsamen mehrdimensionalen Maximum-Likelihood-Anpassung bestimmt. Die Anpassung wird für verschiedene Spin-Paritäts-Hypothesen durchgeführt. Zum Schluß werden die erhaltenen Werte der Likelihood-Funktion verglichen.

Als Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow p\pi(1640)$ ,

$$\pi(1640) \begin{array}{l} \nearrow \rho^0 \pi^+ \\ \longrightarrow \\ \searrow f \pi^+ \end{array} \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad \text{ergibt sich} \quad (68 \pm 14) \text{ } \mu\text{b.}$$

Untersucht werden Spin-Paritäts-Hypothesen, für die die drei berücksichtigten Kanäle mit weniger als vier Einheiten des Drehimpulses beschrieben werden können.  $J^P = 1^-$  wird nicht untersucht, da Bartsch et al. (BAR68) mit dieser Annahme äußerst schlechte Anpassungen erreicht haben. Das heißt, die folgenden Spin-Paritäts-Hypothesen werden getestet:

$J^P = 1^+, 2^-, 3^+$  der 'unnatürlichen Serie' und  $J^P = 2^+$  der 'natürlichen Serie'. Der beste Wert der Likelihood-Funktion ergibt sich mit  $J^P = 2^-$ , dernächst beste mit  $J^P = 1^+$ . Deutlich schlechtere Anpassungen ergeben sich mit  $J^P = 3^+$  und besonders mit  $J^P = 2^+$ .

Für alle Hypothesen ergibt sich ein Überwiegen des  $\rho^0 \pi^+$ -Zerfalls-Kanals (für  $J^P = 2^-$ :  $(64 \pm 5)\%$ ), während sich der Beitrag des 'direkten'  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Kanals als klein herausstellt.



## II. Einleitung

Eine Anhäufung von Ereignissen bei einer effektiven Masse des  $\pi^{\pm}\pi^+\pi^-$ -Systems in dem Gebiet von 1,66 GeV wurde in verschiedenen Experimenten beobachtet (ROS70). Dieses Signal verschwand nicht, wenn man nur Ereignisse mit  $\pi^+\pi^-$ -Massen im  $\rho^0$ - oder f-Bereich zuließ, wobei allerdings ein Überwiegen des f-Anteils festgestellt wurde. Eine Trennung der beiden Beiträge ist jedoch auf diese Weise nicht möglich; denn für einen großen Teil der Ereignisse, bei denen eine der beiden möglichen  $\pi^+\pi^-$ -Massen im f-Bereich liegt, liegt die andere  $\pi^+\pi^-$ -Masse im  $\rho^0$ -Bereich. Damit läßt man durch Einschränkung auf den f-Bereich stets einen Teil des  $\rho^0$ -Bereichs zu und umgekehrt. Darüber hinaus konnte die Anhäufung bei  $\pi^{\pm}\pi^+\pi^-$ -Massen um 1.66 GeV nicht vollständig durch Ereignisse im  $\rho^0$ - und f-Bereich erklärt werden. Das deutet darauf hin, daß neben  $\rho^0\pi^+$ - und  $f\pi^+$ -Beiträgen auch ein direkter  $\pi^{\pm}\pi^+\pi^-$ -Kanal berücksichtigt werden muß.

Mehrere Autoren (IOF68, BAR68, CAS68) haben gezeigt, daß die Anhäufung von Ereignissen bei  $3\pi$ -Massen um 1.66 GeV nicht allein durch ein 'Deck-Effekt'-artiges Verhalten des f erklärt werden kann. Daher haben die meisten Autoren 'Deck-Effekt'-artiges Verhalten des f und ggf. auch des  $\rho^0$  als Untergrund angenommen und die Anhäufung als eine 'Resonanz' durch eine Breit-Wigner-Funktion zu beschreiben versucht. Diese Resonanz wird im allgemeinen als  $\pi(1640)$  oder  $A_3$  bezeichnet.

Eine weitere Zerfallsart ist möglicherweise die in  $\omega\rho^0$  oder  $\omega\pi^+\pi^-$  (DAN67, BARN69).

Einige Veröffentlichungen zur Analyse des Wirkungsquerschnittes, der Verzweigungsverhältnisse und des Spins und der Parität des  $\pi(1640)$  werden im IV. Kapitel angegeben. In Tabelle 1 sind Werte für Masse, Breite und Wirkungsquerschnitt des  $\pi(1640)$  zusammengestellt, die in Blasenkammerexperi-

Tabelle 1 Masse, Breite und Wirkungsquerschnitt des  $\pi(1640)$  in verschiedenen Blasenkammerexperimenten

Autor	Reaktion	Strahlimpuls [GeV/c]	Masse [GeV]	Breite [GeV]	Wirkungsquerschnitt [ $\mu\text{b}$ ]
Vetlitsky et al.	$\pi^- \bar{p} \rightarrow p^+ \pi^- \pi^-$	4.7	1.63 $\pm$ 0.03	$\approx$ 0.1	$\approx$ 100
Danyasz et al.	$\bar{p} \rightarrow \omega^0 \pi^+ \pi^-$ $\rightarrow \omega^0 \pi^0$	3.0, 3.6	1.89 $\pm$ 0.01	.038 $\pm$ 0.018	
Baltay et al.	$\pi^+ \bar{p} \rightarrow p^+ \pi^+ \pi^-$	6.95 8.5	1.63 $\pm$ 0.01	.07 $\pm$ 0.04	$\approx$ 50
Partsch et al.	$\pi^+ \bar{p} \rightarrow p^+ \pi^+ \pi^-$	8.04	1.66 $\pm$ 0.016	.115 $\pm$ 0.045	41 $\pm$ 13
Ioffredo et al.	$\pi^- \bar{p} \rightarrow p^+ \pi^- \pi^-$	13. 20.			41 $\pm$ 6 28 $\pm$ 4
Lamsa et al.	$\pi^- \bar{p} \rightarrow p^+ \pi^- \pi^-$	8.05	1.61 $\pm$ 0.019	.10 +.05 -.03	
Yost et al.	$k^- \bar{p} \rightarrow \Lambda \omega \pi^+ \pi^-$	4.25	1.67 $\pm$ 0.018	.05 $\pm$ 0.015	25
Barnes et al.	$k^- \bar{p} \rightarrow \Lambda \omega \pi^+ \pi^-$	4.6	1.695 $\pm$ 0.02	.09 $\pm$ 0.02	16 $\pm$ 4
Caso et al.	$\pi^- \bar{p} \rightarrow p^+ \pi^- \pi^-$	11.	1.68 $\pm$ 0.02	.13	58 $\pm$ 15
diese Untersuchung	$\pi^+ \bar{p} \rightarrow p^+ \pi^+ \pi^-$	11.7			68 $\pm$ 14

menten bei verschiedenen Reaktionen und Energien gefunden wurden. Die Spin-Paritäts-Analysen ergaben bessere Anpassungen für Hypothesen innerhalb der 'unnatürlichen Serie', d. h.  $J^P = 1^+, 2^-, 3^+, \dots$ . Die beste Anpassung ergab sich stets für  $J^P = 2^-$ , ohne daß jedoch die anderen Hypothesen ausgeschlossen werden konnten.

Diese Arbeit soll die Methode und die ersten Ergebnisse einer weiteren Untersuchung beschreiben. Sie wurde durchgeführt mit Blasenkammerdaten der Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$ . Der Impuls des einlaufenden  $\pi^+$  betrug dabei im Laborsystem 11.7 GeV/c. Untersuchungen über das  $\pi(1640)$  liegen bei dieser Reaktion nur für niedrigere Strahlimpulse vor. Es wurde versucht, den Wirkungsquerschnitt, die Zerfalls-Verzweigungsverhältnisse und die Spin-Paritäts-Zuordnung durch eine mehrdimensionale Maximum-Likelihood-Anpassung gleichzeitig zu bestimmen.

Angaben über die Auswertung des Experiments finden sich im Anhang A.

### III. Übersicht über die experimentellen Verteilungen für das $\pi(1640)$ in diesem Experiment

In diesem Kapitel sollen einige experimentelle Verteilungen der in dieser Arbeit untersuchten Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$  bei 11.7 GeV/c Laborimpuls des einlaufenden  $\pi^+$  gezeigt werden.

Abb. 1 (Gesamtverteilung) zeigt die Verteilung der effektiven Masse  $M_{3\pi}$  des  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Systems. Im Gebiet der  $A_1$ - und  $A_2$ -Resonanzen etwa von 0.96 bis 1.36 GeV findet man eine deutliche Anhäufung von Ereignissen. Beide Resonanzen sind nicht voneinander getrennt. Davon deutlich getrennt findet man das  $\pi(1640)$  etwa im Bereich von 1.56 bis 1.76 GeV.

Abb. 2 (Gesamtverteilung) zeigt die Verteilung der  $p\pi_{\ell}^+$ -Masse ( $\pi_{\ell}^+$  bezeichnet das im Laborsystem langsamere  $\pi^+$ ). Offensichtlich leistet das  $\Delta^{++}(1236)$

einen großen Beitrag zur untersuchten Gesamtreaktion. Um den Untergrund unter dem  $\pi(1640)$  zu verringern, wurde versucht, das  $\Delta^{++}$  auszuschließen. Abb. 3 zeigt die effektive Masse  $M_{p\pi^+}$ , aufgetragen gegen  $\cos\theta$ . Dabei ist  $\theta$  der Erzeugungswinkel, d. h. der Winkel zwischen dem einlaufenden Proton und dem auslaufenden  $p\pi^+$ -System im Gesamt-Schwerpunktsystem. Es zeigt sich, daß die Anhäufung im  $\Delta^{++}$ -Massenbereich bei kleinen Erzeugungswinkeln liegt. Der Grund dafür ist, daß die Reaktion stark peripher verläuft und daß wegen des niedrigen Q-Wertes beim  $\Delta^{++}$ -Zerfall der Relativimpuls zwischen dem Proton und dem  $\pi^+$  klein ist.

Zum Ausschluß des  $\Delta^{++}$  wurden alle Ereignisse verworfen, für die gilt:

$$\begin{aligned} 1.1 \text{ GeV} < M_{p\pi^+} < 1.45 \text{ GeV} \\ \cos\theta > 0.97 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Die Parameter des Schnittes wurden so gewählt, daß die  $\Delta^{++}$ -Anhäufung möglichst verschwand, ohne den Phasenraum allzusehr einzuschränken. Ihre Festlegung wurde an Hand der zu Anfang der Untersuchung zur Verfügung stehenden ca. 2000 Ereignisse durchgeführt. Am Schluß der Untersuchung zeigte sich, daß sich bei Verwendung aller zur Verfügung stehenden Ereignisse deutlich eine verbleibende Struktur abzeichnet (s. Abb. 4, schraffierte Verteilung). Der größte Teil dieser verbleibenden Häufung von Ereignissen im  $\Delta^{++}$ -Bereich verschwindet, wenn man nur die Ereignisse betrachtet, die für die Maximum-Likelihood-Analyse (siehe Kap. VI.b) verwendet wurden, d. h. Ereignisse mit  $1.3 \text{ GeV} < M_{3\pi} < 2.1 \text{ GeV}$ .

Die schraffierte Verteilung in Abb. 1 zeigt die  $3\pi$ -Massenverteilung nach Ausschluß des  $\Delta^{++}$ . Durch die Einschränkung verschwindet besonders die breit verteilte Häufung von Ereignissen bei hohen  $3\pi$ -Massen.

Abb. 4 zeigt die Verteilung der effektiven Massen der beiden  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen für alle Ereignisse mit  $1.52 \text{ GeV} < M_{3\pi} < 1.8 \text{ GeV}$  (Gesamtverteilung) und für Ereignisse im gleichen  $3\pi$ -Massenbereich, aber ohne  $\Delta^{++}$  (schraffiert).

Bei allen folgenden Abbildungen sind alle Ereignisse, für die Bedingung

(III.1) gilt, verworfen worden.

Abb. 5 zeigt das symmetrisierte Dalitz-Diagramm  $M_{\pi_a^+ \pi_b^-}^2$  gegen  $M_{\pi_b^+ \pi_a^-}^2$  für  $1.52 \text{ GeV} < M_{3\pi} < 1.8 \text{ GeV}$ . In den  $\rho^0$ - und  $f$ -Bändern ist eine Anhäufung von Ereignissen zu beobachten. In Abb. 6a ist die  $3\pi$ -Masse für Ereignisse aufgetragen, für die mindestens eine der  $\pi^+ \pi^-$ -Massen im  $\rho^0$ -Band liegt; dabei ist das  $\rho^0$ -Band definiert durch  $0.64 \text{ GeV} < M_{\pi^+ \pi^-} < 0.98 \text{ GeV}$ . Die eingezeichneten Kurven zeigen bei allen Abbildungen das Ergebnis der Anpassung (siehe Kapitel VII). Abb. 6b zeigt die  $3\pi$ -Massenverteilung für die  $f$ -Bänder;  $f$  ist definiert durch  $1.12 \text{ GeV} < M_{\pi^+ \pi^-} < 1.40 \text{ GeV}$ . Beide zeigen im  $\pi(1640)$ -Gebiet eine Anhäufung von Ereignissen.

Wie das Dalitz-Diagramm (Abb. 5) zeigt, liegt ein großer Teil der Ereignisse im Überlappungsbereich der  $\rho^0$ - und  $f$ -Bänder. Da die Zuordnung dieser Ereignisse nicht eindeutig ist, ist in Abb. 7a die  $3\pi$ -Massenverteilung für Ereignisse aufgetragen, für die eine der beiden  $\pi^+ \pi^-$ -Massen im  $\rho^0$ -Band, aber keine im  $f$ -Band liegt. In Abb. 7b ist die  $3\pi$ -Massenverteilung aufgetragen für Ereignisse, für die eine der  $\pi^+ \pi^-$ -Massen im  $f$ -Band, aber keine im  $\rho^0$ -Band liegt. Die Anzahl der verbleibenden Ereignisse ist äußerst klein, aber auch diese Abbildungen deuten darauf hin, daß die Zerfallskanäle  $\rho^0 \pi^+$  und  $f \pi^+$  vorhanden sind. Genauere Aussagen sind ohne spezielle Annahmen über den Untergrund nicht möglich. Zum Beispiel würde die Annahme einer 'Deck-Effekt'-artigen Verteilung der  $f \pi^+$ -Masse schon einen Teil der Anhäufung im  $\pi(1640)$ -Gebiet erklären (siehe z. B. BAR68). Das hieße, daß der  $\rho^0 \pi^+$ -Zerfall bevorzugt wäre.

Abb. 7c zeigt die Verteilung der  $3\pi$ -Massen, wenn sowohl Ereignisse aus den  $\rho^0$ - wie aus den  $f$ -Bändern verworfen werden. Im  $\pi(1640)$ -Gebiet läßt sich keine Anhäufung von Ereignissen feststellen.

Quantitative Schlüsse können aus diesen Darstellungen also nicht gezogen werden, da die Abschätzungen des Untergrundes zu ungenau sind und die Bestimmung der

$\pi^+\pi^-$ -Resonanzen durch 'Bänder' zu willkürlich ist. Darüber hinaus wird die Untersuchung durch die geringe Anzahl der im  $\pi(1640)$ -Bereich zur Verfügung stehenden Ereignisse erschwert. Quantitative Schlüsse sollen erst aus einer mehrdimensionalen Maximum-Likelihood-Analyse gezogen werden.

Die Reaktion  $\pi^+p \rightarrow p\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$  wurde auf ein neutrales  $\pi(1640)$  untersucht. Es konnte in der  $\pi^+\pi^-\pi^0$ -Massenverteilung auch nach verschiedenen Einschränkungen keine signifikante Anhäufung von Ereignissen in dem Gebiet um 1.66 GeV beobachtet werden.

#### IV. Übersicht über bisherige Analysen des $\pi(1640)$

Hier sollen einige Verfahren beschrieben werden, die zur Untersuchung des  $\pi(1640)$  angewendet worden sind.

##### a) Wirkungsquerschnitte

Für die Bestimmung des Wirkungsquerschnitts müssen Annahmen über den Untergrund gemacht werden. Eine Möglichkeit ist die Annahme spezieller theoretischer Verteilungen in dem  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Massenspektrum, wie z. B. 'p-Deck-Effekt', 'f-Deck-Effekt', Ausläufer der  $A_1$ - und  $A_2$ -Breit-Wigner-Resonanz-Verteilungen oder Reflexionen von Resonanzen in anderen Massenkombinationen. Ein Beispiel dafür gibt Caso (CAS68). Eine Berücksichtigung aller Massenverteilungen in einer mehrdimensionalen Annäherung führt zu erheblichen Schwierigkeiten (PAN69). Von anderen Autoren (z. B. BAL69) wurde der Untergrund unter dem  $\pi(1640)$  phänomenologisch durch Vergleich mit den Randbereichen um das  $\pi(1640)$  bestimmt. Die Reflexion der  $\Delta^{++}(1236)$ -Resonanz in die  $3\pi$ -Massenverteilung ist in den meisten Untersuchungen durch Ausschluß des gesamten  $\Delta^{++}$ -Bereichs in der  $n\pi^+$ -Massenverteilung beseitigt worden.

b) Verzweigungsverhältnisse

Um Verzweigungsverhältnisse angeben zu können, haben Baltay et al. (BAL68) und Caso et al. (CAS69) die Dichte des Dalitz-Diagramms der beiden  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen aus dem  $\pi(1640)$ -Bereich analysiert. Sie haben dazu eine mehrdimensionale Maximum-Likelihood Methode verwendet. Der Untergrund wurde dabei stets durch lineare Interpolation zwischen den Randbereichen abgeschätzt. Die Anhäufung in den Überlappungsbereichen wird allein durch inkohärente Überlagerung der Breit-Wigner-Funktionen beschrieben. Interferenz-Effekte und der Einfluß des Spins und der Parität des  $\pi(1640)$  auf die Dalitz-Diagramm-Dichte wurden dabei vernachlässigt. Auch diese Autoren geben ein Überwiegen des  $f\pi^\pm$ -Kanals an.

c) Spin und Parität

Spin-Paritäts-Analysen sind bisher von Bartsch et al. (BAR68) und Caso et al. (CAS69) veröffentlicht worden. Bei diesen Analysen hat die Beschreibung des Untergrundes wesentlichen Einfluß auf das Ergebnis der Anpassung.

Bartsch et al. untersuchen einen Bereich der effektiven  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Masse von 1,45 bis 2,0 GeV. Den Untergrund in dem  $(3\pi)^+$ -Massenspektrum beschreiben sie durch eine analytische Funktion, die einer OPE-Verteilung angenähert ist. Innerhalb der  $\rho^0$ - und  $f$ -Bänder wurde für den Untergrund Gleichverteilung angenommen, d. h. Unabhängigkeit vom Helizitätswinkel  $\theta$  (Definition siehe Kap. VI., Abschnitt b 1). Die theoretische Dalitz-Diagramm-Verteilung wurde nach der von Zemach (ZEM64) angegebenen Verfahren berechnet. Freie Parameter waren dabei die Verzweigungsverhältnisse des  $\pi(1640)$ , und zwar zwischen  $\rho^0\pi^+$ -,  $f\pi^+$ - und 'direktem'  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Kanal. Die Rechnungen wurden für bestimmte Spin-Paritäts-Hypothesen durchgeführt und die Werte der Likelihood-Funktion verglichen.

Die beste Anpassung ergab sich für die Spin-Paritäts-Hypothese  $J^P = 2^-$ , ohne daß aber die anderen Hypothesen innerhalb der 'unnatürlichen Serie', d. h.  $J^P = 1^+, 2^-, 3^+$ , ausgeschlossen werden konnten. Für die Spin-Paritäts-Annahmen mit den größten Werten der Likelihood-Funktion ergab sich, daß der Anteil des  $\rho^0 \pi^+$ -Kanals verträglich mit Null ist, während der Anteil des  $f\pi^+$ -Kanals etwa von der gleichen Größenordnung ist wie der des 'direkten'  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Kanals.

Caso et al. nehmen auf Grund einer Analyse der  $\pi^+ \pi^- \pi^-$ -Massenverteilung an, daß der  $f\pi^-$ -Zerfallskanal stark überwiegt, und untersuchen mit einer ein-dimensionalen  $\chi^2$ -Methode nur das f-Band des symmetrisierten Dalitz-Diagramms. Der Untergrund wird dabei durch eine OPE-Verteilung und die Reflexion des  $\rho^0$  aus der jeweils anderen  $\pi^+ \pi^-$ -Kombination beschrieben. Untersucht wurde das Verhalten des  $\chi^2$  unter verschiedenen Spin-Paritäts-Hypothesen, für verschiedene Zusammensetzungen des Untergrundes aus den beiden genannten Komponenten und für verschiedene Annahmen über den gesamten  $\pi(1640)$ -Anteil. Berücksichtigt wurden dabei die Ereignisse im  $3\pi$ -Massenband von 1.58 bis 1.84 GeV. Interferenz-Effekte wurden vernachlässigt.

Auch bei dieser Analyse ergaben die Spin-Paritäts-Annahmen in der 'unnatürlichen Serie' bessere Anpassungen.

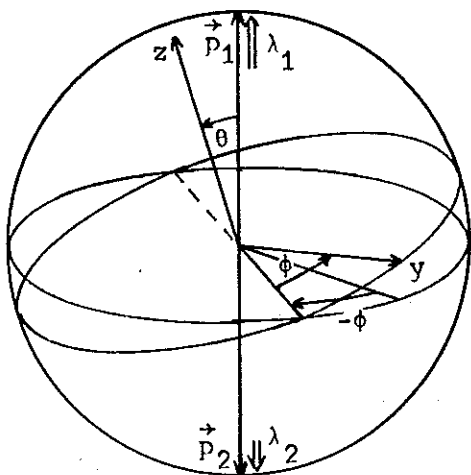
#### V. Berechnung der Dalitzdiagramm-Dichte für Zerfälle in drei spinlose Teilchen

In diesem Kapitel soll der zur Spin-Paritäts-Analyse verwendete Formalismus beschrieben werden. Er beruht auf dem Formalismus, der von Jacob und Wick (JAC59), (WIC62) entwickelt wurde.



a) Zweiteilchen-Zerfälle

Zunächst soll die Winkelverteilung eines Zweiteilchen-Zerfalls im Schwerpunktsystem dieser beiden Teilchen angegeben werden. Das zerfallende Teilchen habe den Spin  $j$  mit einer z-Komponente  $m$ . Die beiden Zerfallsprodukte bezeichnen wir mit ((1)) und ((2)). Die Helizität, d. h. die



Komponente des Spins in Impulsrichtung, von Teilchen ((1)) sei  $\lambda_1$ , von Teilchen ((2)) sei  $\lambda_2$ . Die Beschreibung durch die Helizitäten hat den Vorteil, daß diese invariant unter Rotationen des Koordinatensystems sind. Der Zerfall kann dann beschrieben werden durch die Zustände  $|\theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle$  oder durch  $|j, m; \lambda_1, \lambda_2\rangle$ . Zwischen beiden besteht der Zusammenhang:

$$|j, m; \lambda_1, \lambda_2\rangle = \int d\Omega |\theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle \langle \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2 | j, m; \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

wobei  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  das Raumwinkelelement ist.

$|\langle \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2 | j, m; \lambda_1, \lambda_2 \rangle|^2$  ist dann für festes  $j, m$  die Zerfallswinkelverteilung  $W(\cos\theta, \phi)$ .

Der Zustand  $|\theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2\rangle$  kann durch Drehung um die drei Euler'schen Winkel  $\phi, \theta, -\phi$  aus dem Zustand  $|\theta = 0, \phi = 0; \lambda_1, \lambda_2\rangle$  erzeugt werden. Die erste Drehung um  $-\phi$  ist physikalisch bedeutungslos und nur eine Konvention, die manche Formeln vereinfacht.  $j, \lambda_1, \lambda_2$  sind invariant gegen Drehungen. Da für  $\theta = 0$  gilt  $m = \lambda_1 - \lambda_2$ , hat man den Zustand auf  $|j, m = \lambda_1 - \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2\rangle$  zurückgeführt.

$$\begin{aligned}
 \langle j, m; \lambda_1, \lambda_2 | \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2 \rangle^* &= \langle j, m; \lambda_1, \lambda_2 | R(\phi, \theta, -\phi) | \theta=0, \phi=0; \lambda_1, \lambda_2 \rangle^* \\
 &= N \langle j, m; \lambda_1, \lambda_2 | R(\phi, \theta, -\phi) | j, m = \lambda_1 - \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2 \rangle^* \\
 &= N D_{m, \lambda_1 - \lambda_2}^{j*}(\phi, \theta, -\phi)
 \end{aligned}$$

N ist eine Normierungskonstante (siehe unten),  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  der Operator der Drehung um die drei Euler'schen Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Das Matrixelement dieser Drehung ist  $D_{M', M}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$\begin{aligned}
 D_{M', M}^J(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle J, M' | R(\alpha, \beta, \gamma) | J, M \rangle \\
 &= \langle J, M' | e^{i\frac{\alpha}{\hbar} J_z} e^{i\frac{\beta}{\hbar} J_y} e^{i\frac{\gamma}{\hbar} J_z} | J, M \rangle
 \end{aligned}$$

Weil die Matrix für  $J_z$  hier als diagonal angenommen ist, sind die Operatoren der Drehung um  $\gamma$  und  $\alpha$  einfach  $e^{iM\gamma}$  und  $e^{iM'\alpha}$ . Der Operator der Drehung um die y-Achse ist komplizierter, da die Matrix von  $J_y$  nicht diagonal ist. Dieser rein reelle Operator wird mit  $d_{M', M}^J(\beta)$  bezeichnet. Ableitung und Rechenregeln findet man z. B. bei EDM64, tabelliert sind sie bei BER65.

Man fordert als Normierung:

$$\int d\Omega |\langle \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2 | j, m; \lambda_1, \lambda_2 \rangle|^2 = N^2 \int d\Omega |d_{m, \lambda_1 - \lambda_2}^j(\theta)|^2 = 1$$

Nach KAH65 folgt daraus:

$$N = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}$$

Diese Normierung erfüllt zugleich:

$$\sum_{j, m} \langle \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2 | j, m; \lambda_1, \lambda_2 \rangle \langle \theta', \phi'; \lambda_1, \lambda_2 | j, m; \lambda_1, \lambda_2 \rangle^* = \delta^2(\theta, \phi; \theta', \phi')$$

Als endgültigen Ausdruck für die Zerfallsamplitude erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
 \langle j, m, \lambda_1, \lambda_2 | \theta, \phi; \lambda_1, \lambda_2 \rangle^* &= \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{m, \lambda_1 - \lambda_2}^{j*}(\phi, \theta, -\phi) \\
 &= \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} e^{im\phi} d_{m, \lambda_1 - \lambda_2}^j(\theta) e^{-i(\lambda_1 - \lambda_2)\phi}
 \end{aligned}
 \tag{V.1}$$

b) Zerfälle in drei spinlose Teilchen

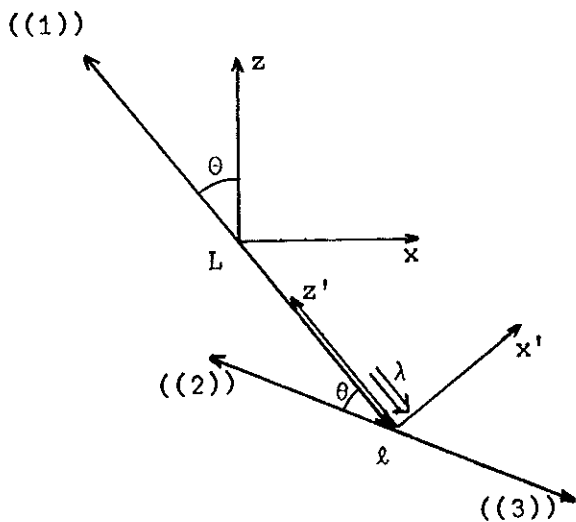
Diese Überlegungen sollen nun auf Drei-Teilchen-Zerfälle erweitert werden. Dabei soll von Anfang an der Spezialfall eines Zerfalls in drei Pionen, d. h. Teilchen mit dem Spin Null, angenommen werden.

Dieser Prozeß kann als Kaskadenzerfall des zerfallenden Teilchens ((123)) aufgefaßt werden:

$$((123)) \rightarrow ((1)) + ((23)) \quad (\text{I})$$

$$((23)) \rightarrow ((2)) + ((3)) \quad (\text{II})$$

Der Spin des Teilchens ((123)) setzt sich aus dem Bahndrehimpuls  $L$  des Systems ((1)), ((23)) und  $\ell$  des Systems ((2)), ((3)) zusammen. Als Bezugssystem für den Zerfall (I) wählen wir das Gesamtschwerpunktsystem der drei Teilchen, als  $x$ - $z$ -Ebene die Zerfallsebene. Der Azimutwinkel  $\Phi$  ist dann Null. Die Helizität von ((23)) sei  $\lambda$ . Den Zerfall (II) beschreiben wir im Schwerpunktsystem von ((23)).  $x'$  und  $z'$  sollen in derselben Ebene wie im Prozeß (I) liegen, aber die



$z'$ -Achse soll in Richtung des Impulses des Teilchens ((1)) im Ruhesystem von ((2)), ((3)) verlaufen.

Die Zerfalls-Amplitude für den Prozeß (I) läßt sich durch die Beziehung (V.1) angeben:

$$\langle 0, \Phi=0; \lambda_1=0, \lambda | J, M; \lambda_1=0, \lambda \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{M, -\lambda}^{J*}(0, \theta, 0) \quad (V.2)$$

Dabei ist  $J$  der Spin von ((123)),  $M$  seine  $z$ -Komponente. Analog erhält man für den Zerfall (II):

$$\langle 0, \phi=0; \lambda_2=0, \lambda_3=0 | j=\ell, m=-\lambda, \lambda_2=0, \lambda_3=0 \rangle = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} D_{-\lambda, 0}^{\ell*}(0, \theta, 0) \quad (V.3)$$

Im folgenden werden alle Größen, die Null sind, in den Zustandsvektoren nicht mehr mitgeschrieben.

Gesucht ist die Winkelverteilung für feste Bahndrehimpulse  $L$  des Systems ((1)), ((23)) und  $\ell$  des Systems ((2)), ((3)), d. h. wir suchen die Amplitude:

$$\langle 0, \theta, L, \ell | J, M, L, \ell \rangle$$

Diese läßt sich folgendermaßen entwickeln:

$$\langle 0, \theta, L, \ell | J, M, L, \ell \rangle = \sum_{\lambda=-\ell}^{+\ell} \langle 0, \theta, L, \ell | \ell, m=-\lambda, \theta, L \rangle \langle 0, \lambda, L, \ell | J, M, \lambda, L, \ell \rangle \langle J, M, \lambda, L, \ell | J, M, L, \ell \rangle$$

Offensichtlich unterscheidet sich die erste Amplitude nur formal durch Erweiterung der Argumentliste von (V.3); die zweite geht analog aus (V.2) hervor.

Für die letzte Amplitude findet man bei JAC59 Gleichung B5 die Beziehung:

$$\langle J, M, \lambda | J, M, L, \ell \rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} C_{O-\lambda-\lambda}^{L\ell J}$$

$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$  ist dabei ein Clebsch-Gordan-Koeffizient.

Damit erhält man:

$$\langle \theta, \theta, L, \ell | J, M, L, \ell \rangle = \sum_{\lambda=-\ell}^{+\ell} \frac{1}{4\pi} \sqrt{(2L+1)(2\ell+1)} C_{O-\lambda-\lambda}^{L\ell J} D_{M, -\lambda}^{J*}(0, \theta, 0) D_{-\lambda, 0}^{\ell*}(0, \theta, 0)$$

Da der Summationsindex symmetrisch zum Nullpunkt verläuft, können die Indizes  $-\lambda$  durch  $+\lambda$  ersetzt werden.

Innerhalb der Zerfallsebene ist für den Prozeß (I) keine Richtung ausgezeichnet. Man kann daher entweder  $M = 0$  wählen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Zerfall über alle  $\theta$  integrieren oder  $\theta = 0$  wählen und über alle möglichen  $M$  summieren. Hier soll die zweite Möglichkeit durchgeführt werden.

Wegen  $D_{M, M}^{J*}(0, 0, 0) = \langle J, M | J, M \rangle^* = \delta_{MM}$

und  $D_{m, m}^{J*}(0, \theta, 0) = d_{m, m}^j(\theta)$

erhält man:

$$\langle \theta, L, \ell | J, M, L, \ell \rangle = \frac{1}{4\pi} \sqrt{(2L+1)(2\ell+1)} C_{OMM}^{L\ell J} d_{MO}^{\ell} \quad (V.4)$$

Bilden die Teilchen ((2)) und ((3)) eine Resonanz, so ist diese Amplitude noch mit einer Breit-Wigner-Amplitude zu multiplizieren. Zum Beispiel für das  $\rho$  lautet sie:

$$A_{\rho}^{(1)}(M) = \langle \theta, L, 1 | J, M, L, 1 \rangle \frac{m_{\rho} \Gamma_{\rho}(m_{23})}{m_{\rho}^2 - m_{23}^2 - i m_{\rho} \Gamma_{\rho}(m_{23})} \quad (V.5)$$

Verwendet wird eine energieabhängige Breit-Wigner-Funktion nach JACK64.  $m_{\rho}$  ist dabei die Masse,  $\Gamma_{\rho}(m_{23})$  die Breite der  $\rho$ -Resonanz.

Durch den Winkel  $\theta$  ist bei fester effektiver Masse  $m_{123}$  des Systems ((123)) und  $m_{23}$  des Systems ((23)) auch die effektive Masse  $m_{12}$  der beiden Teilchen ((1)) und ((2)) festgelegt. Damit geben (V.4) und (V.5) die Amplitude der Dalitz-Diagramm-Dichte  $W(m_{123}^2, m_{12}^2, m_{23}^2)$  an.

Die folgenden Betrachtungen sollen spezialisiert werden auf den Fall, daß Teilchen ((1)) und ((2)) positiv geladene Pionen sind und Teilchen ((3)) ein negatives Pion ist.

Durch Vertauschen der beiden  $\pi^+$  erhält man wegen der Bose-Statistik aus (V.5) die analoge Amplitude  $A_{\rho}^{(2)}(M)$ . Für die  $f$ -Resonanz erhält man analog  $A_f^{(1)}(M)$ ,  $A_f^{(2)}(M)$ . Unter der Annahme, daß alle Zerfälle mit  $\ell = 1$  und  $\ell = 2$  über diese beiden Resonanzen verlaufen und höhere Bahndrehimpulse vernachlässigt werden können, kann der nichtresonante Anteil durch Amplituden  $A_s^{(1)}(M)$ ,  $A_s^{(2)}(M)$  mit  $\ell = 0$  beschrieben werden.

Die unnormierte Wahrscheinlichkeitsverteilung lautet damit:

$$W_{\text{unnorm.}}(m_{123}^2, m_{12}^2, m_{23}^2) = \sum_M \left| \alpha_{\rho} A_{\rho}^{(1)}(M) + \alpha_{\rho} A_{\rho}^{(2)}(M) + \alpha_f A_f^{(1)}(M) + \alpha_f A_f^{(2)}(M) + \alpha_s A_s^{(1)}(M) + \alpha_s A_s^{(2)}(M) \right|^2 \quad (V.6)$$

Die  $\alpha_{\rho}$ ,  $\alpha_f$ ,  $\alpha_s$  sind zusätzliche Gewichtungsfaktoren, die von den Anteilen der einzelnen Amplituden abhängen.

Wir definieren jetzt:

$$g_{\rho} = \sum_M \left[ |A^{(1)}(M)|^2 + |A_S^{(2)}(M)|^2 + 2 \operatorname{Re} A^{(1)*} A_S^{(2)}(M) \right]$$

$$g_{\rho f} = 2 \operatorname{Re} \sum_M \left[ A_{\rho}^{(1)*}(M) A_f^{(1)}(M) + A_{\rho}^{(2)*}(M) A_f^{(2)}(M) \right. \\ \left. + A_{\rho}^{(1)*}(M) A_f^{(2)}(M) + A_{\rho}^{(2)*}(M) A_f^{(1)}(M) \right]$$

und analoge Ausdrücke für die übrigen Amplituden.

Damit erhalten wir:

$$W_{\text{unnorm.}}(m_{123}^2, m_{12}^2, m_{23}^2) = \alpha_{\rho}^2 g_{\rho} + \alpha_f^2 g_f + \alpha_s^2 g_s + \alpha_{\rho} \alpha_f g_{\rho f} + \alpha_{\rho} \alpha_s g_{\rho s} + \alpha_f \alpha_s g_{fs}$$

Aus den unnormierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $g$  erhalten wir die normierten  $h$  durch:

$$h_{\rho} = \frac{g_{\rho}}{G_{\rho}} \quad h_f = \frac{g_f}{G_f} \quad h_s = \frac{g_s}{G_s}$$

$$\text{und} \quad h_{\rho f} = \frac{g_{\rho f}}{\sqrt{G_{\rho} G_f}} \quad h_{\rho s} = \frac{g_{\rho s}}{\sqrt{G_{\rho} G_s}} \quad h_{fs} = \frac{g_{fs}}{\sqrt{G_f G_s}}$$

$$\text{mit } G_{\rho} = \int \text{BW}(m_{123}) \left[ \int g_{\rho} dm_{12}^2 dm_{23}^2 \right] dm_{123}$$

und analogen Definitionen für  $G_f, G_s$ ; BW bezeichnet dabei einen Breit-Wigner-Faktor:

$$\text{BW}(m_{123}) = \frac{\Gamma}{(M^2 - m_{123}^2)^2 + M^2 \Gamma^2}$$

Dabei sind  $M$  und  $\Gamma$  die Masse und die Breite des  $\pi(1640)$ .

Die  $h_{\rho}, h_f, h_s$  sind damit auf dieselbe über  $\text{BW}(m_{123})$  gemittelte Größe normiert.

Wir definieren jetzt:  $a_\rho = \sqrt{G_\rho} \alpha_\rho$ ,  $a_f = \sqrt{G_f} \alpha_f$ ,  $a_s = \sqrt{G_s} \alpha_s$

und normieren die Gesamtwahrscheinlichkeit:

(V.7)

$$W(m_{123}^2, m_{23}^2, m_{12}^2) = \frac{a_\rho^2 h_\rho + a_f^2 h_f + a_s^2 h_s + a_\rho a_f h_{\rho f} + a_\rho a_s h_{\rho s} + a_f a_s h_{fs}}{N(m_{123})}$$

mit

$$\begin{aligned} N(m_{123}) &= \int (a_\rho^2 h_\rho + a_f^2 h_f + a_s^2 h_s + a_\rho a_f h_{\rho f} + a_\rho a_s h_{\rho s} + a_f a_s h_{fs}) dm_{12}^2 dm_{23}^2 \\ &= a_\rho^2 N_\rho(m_{123}) + a_f^2 N_f(m_{123}) + \dots + a_\rho a_s N_{\rho s}(m_{123}) \end{aligned}$$

$$N_\rho = \int h_\rho dm_{12}^2 dm_{23}^2 \quad \text{und analoge Definitionen für die übrigen Normierungs-} \\ \text{integrale}$$

Dabei wird gefordert:

$$a_\rho^2 + a_f^2 + a_s^2 = 1 \quad (V.8)$$

Damit haben die  $a_\rho^2$ ,  $a_f^2$ ,  $a_s^2$  eine ähnliche Bedeutung wie die Verzweigungsverhältnisse. Jedoch ist zu beachten, daß der Gesamtbeitrag der Interferenzterme  $h_{\rho f}$ ,  $h_{\rho s}$ ,  $h_{fs}$  nicht notwendig verschwindet, d.h. daß die  $N_{\rho f}$ ,  $N_{\rho s}$ ,  $N_{fs}$  nicht notwendig Null sind; denn für die sich überkreuzenden Resonanzbänder werden verschiedene vollständige Entwicklungen verwendet, d. h. die Funktionen sind nicht orthogonal.

Nach Gleichung (V.7) ist offensichtlich das Vorzeichen von einem der Faktoren  $a$  frei zu wählen.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $h$  wurden mit einem Monte-Carlo-Verfahren berechnet. In Abbildungen 8 bis 11 werden geglättete Darstellungen der durch die Verteilungen  $h$  gegebenen Dalitzdiagramm-Dichten



für eine  $3\pi$ -Masse von 1.7 GeV gegeben. Abb. 8 gibt die Verteilungen unter der Spin-Paritäts-Hypothese  $J^P = 1^+$  für das  $\pi(1640)$ , die folgenden Abbildungen die Verteilungen unter den Annahmen  $J^P = 2^-, 3^+, 2^+$ . Für  $L$  ist stets der niedrigste durch Drehimpuls- und Paritätserhaltung erlaubte Wert angenommen. Die ersten sechs Verteilungen (a bis f) geben die  $h_\rho$ ,  $h_f$ ,  $h_s$ ,  $h_{\rho f}$ ,  $h_{\rho s}$ ,  $h_{fs}$  wieder. Eine Ausnahme bildet  $J^P = 2^+$ . Der direkte  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Kanal mit  $\ell = 0$  ist für Hypothesen der 'natürlichen Serie' durch Drehimpuls- und Paritätserhaltung verboten. Dargestellt sind die Verteilungen für die Kanäle  $\rho^0\pi^+(L=2)$ ,  $f\pi^+(L=1)$ ,  $f\pi^+(L=3)$ . (Vergleiche auch Tabelle 4 in Kap. VII.). Die siebente Verteilung g gibt die Verteilung  $W((1.7 \text{ GeV})^2, m_{12}^2, m_{23}^2)$  mit den durch die Anpassung bestimmten Parametern  $a_\rho$ ,  $a_f$ ,  $a_s$  (vgl. Kap. VII.) wieder. Die Verteilungen sind dabei mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert worden, die jedoch für alle sechs Verteilungen  $h$  einer Spin-Paritäts-Hypothese gleich gewählt worden ist.

## VI. Durchführung der Spin-Paritäts-Analyse

### a) Das Maximum-Likelihood-Verfahren

Die Analyse der Daten wurde mit einer Maximum-Likelihood-Methode durchgeführt.

Bei dieser wird zunächst für jedes Ereignis eine Wahrscheinlichkeit  $P(\vec{a}, \vec{x})$  berechnet. Dabei bezeichnet  $\vec{a}$  den Vektor der anzupassenden Parameter,  $\vec{x}$  den der gemessenen Größen. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(\vec{a}, \vec{x})$  fordert man zunächst als Normierung, daß das Integral über den gesamten physikalisch möglichen Bereich der Meßwerte  $\vec{x}$  gleich eins ist, d. h.:

$$\int P(\vec{a}, \vec{x}) d\vec{x} = 1$$

Die Normierung sichert die Erhaltung des Gesamtwirkungsquerschnittes für die betrachtete Reaktion. Will man auch diesen anpassen, so hat man die

'Extended Maximum-Likelihood'-Methode anzuwenden. Hierauf wurde jedoch verzichtet, da der Gesamtwirkungsquerschnitt bei diesem Experiment eine relativ gut bekannte Größe ist.

Da man annimmt, daß die  $N$  Ereignisse eines Experiments von einander unabhängig sind, erhält man als Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = \prod_{n=1}^N P(\vec{a}, \vec{x}_n)$$

Die beste Schätzung für die Parameter  $\vec{a}$  liegt dann vor, wenn die Likelihood-Funktion  $\mathcal{L}(\vec{a})$  ihr Maximum annimmt. Da multiplikative Konstanten zu  $\mathcal{L}(\vec{a})$  nicht berücksichtigt zu werden brauchen, darf  $P(\vec{a}, \vec{x})$  auch auf jede von 1 verschiedene endliche Konstante normiert werden. Aus rechentechnischen Gründen maximalisiert man nicht  $\mathcal{L}(\vec{a})$ , sondern:

$$L(\vec{a}) = \ln \mathcal{L}(\vec{a}) = \sum_{n=1}^N \ln P(\vec{a}, \vec{x}_n)$$

In der Literatur (siehe z. B. BRA68) wird gezeigt, daß unter sehr schwachen Voraussetzungen die Maximum-Likelihood-Schätzung konsistent ist, d. h. für hinreichend große  $N$  gibt sie die Parameter beliebig genau an. Für große  $N$  ist  $\mathcal{L}$  normalverteilt und liefert die beste Schätzung überhaupt.

Die Lösung durch Minimalisierung des  $\chi^2$  hat im Grenzfall unendlich vieler Ereignisse dieselben Eigenschaften. Für endlich viele Ereignisse verliert man durch den Zwang zur Einteilung in 'Klassen' jedoch stets an Information. Besonders wichtig wird dieses Problem, wenn man die Parameter einer Funktion von mehreren Variablen anpassen will. Macht man eine mehrdimensionale Klasseneinteilung, so muß man in jeder Dimension die Grenzen für eine Klasse sehr weit wählen, damit in jeder Klasse noch genügend viele Ereignisse liegen. (Ein Richtsatz ist ein Minimum von 4 Ereignissen.)

Ein anderer Weg ist eine Klasseneinteilung in jeweils nur einer Dimension, wobei die Korrelationen zwischen den einzelnen Variablen nur durch die Reflexionen berücksichtigt werden, die z. B. mit einem Monte-Carlo-Verfahren berechnet werden können. Dieses Verfahren ist nicht sehr empfindlich gegen falsche Zuordnung der Reflexionen zu den verschiedenen Resonanzen.

Ein weiterer - mehr anwendungstechnischer - Vorteil des Maximum-Likelihood-Verfahrens ist, daß es möglich ist, die einzelnen Beiträge zur Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in verschiedenen, aber eindeutig zusammenhängenden Variablen auszudrücken.

Der Nachteil einer Likelihood- gegenüber einer  $\chi^2$ -Analyse ist, daß die Likelihood-Funktion kein absolutes Maß für die Güte der Anpassung liefert.

Ein weiterer Nachteil des Maximum-Likelihood-Verfahrens ist der im allgemeinen größere Aufwand an Rechenzeit.

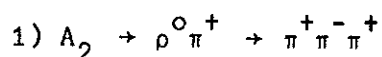
#### b) Angepaßte Funktionen

In diesem Abschnitt soll beschrieben werden, welche Funktionen für die einzelnen Prozesse angepaßt wurden. Einige programmtechnische Details und die Bedienung der für dieses Problem erweiterten Version des Maximum-Likelihood-Programms MURTLBERT werden im Anhang B erläutert. Die Ergebnisse der Anpassung werden in Kapitel VII. wiedergegeben.

Für die Anpassung wurden nur Ereignisse verwendet, die eine  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Masse zwischen 1,3 GeV und 2,1 GeV haben. Der Schnitt bei niedrigen  $3\pi$ -Massen geschah vor allem, weil in diesem Experiment das  $A_1$  - dessen Existenz hier nicht diskutiert werden soll - nicht vom  $A_2$  getrennt erscheint (vgl. Kapitel III.) und damit die Anpassung erschwert. Weiterhin werden alle Ereignisse ausgeschlossen, die über die  $\Delta^{++}$ -Resonanz verlaufen. Als solche werden alle Ereignisse angesehen, die der Bedingung (III.1) genügen.

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse wurden in Abhängigkeit von den effektiven Massen des  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Systems und der Lage im Dalitz-Diagramm der beiden  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen berechnet. Die Anpassung wurde für verschiedene Spin-Paritäts-Hypothesen durchgeführt. Zum Schluß wurden die Werte der Likelihood-Funktion für die einzelnen Hypothesen verglichen. Um durch den Auswerteprozess entstandene systematische Unterschiede in den kinematischen Verteilungen der beiden  $\pi^+$  zu beseitigen, wurde die Reihenfolge der beiden  $\pi^+$  für jedes Ereignis nach einem Zufallsverfahren festgelegt. Für die beiden  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen konnten dann wegen der Bose-Statistik dieselben Parameter angepaßt werden.

Die folgenden Prozesse wurden dabei berücksichtigt:



Die Wahrscheinlichkeitsdichte für diesen Prozeß hat folgende Form:

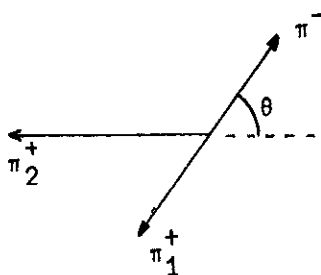
$$p(M_{3\pi}, M_{\pi^+\pi^-}, \cos\theta) = \frac{BW_{A_2}(M_{3\pi}) BW_{\rho}(M_{\pi^+\pi^-}) GEW(M_{3\pi})}{\int BW_{A_2}(M_{3\pi}) BW_{\rho}(M_{\pi^+\pi^-}) GEW(M_{3\pi}) d^2 R_4(M_{3\pi}, M_{\pi^+\pi^-})} W(\cos\theta) \quad (\text{VI.1})$$

BW bezeichnet dabei einen Breit-Wigner-Faktor. Für Breit-Wigner-Faktoren, die von der  $3\pi$ -Masse abhängen, ist bei allen Prozessen eine energieunabhängige Breite angenommen. Für Breit-Wigner-Faktoren, die von der  $\pi^+\pi^-$ -Masse abhängen, ist die relativistische Form von Jackson (JACK64) verwendet worden. Das  $A_2$  ist bei dieser Analyse als nicht gespalten angenommen worden.

In allen Prozessen tritt als zusätzlicher Faktor das Gewicht des statistischen Phasenraums auf. Dieses ist daher eine Konstante der Likelihood-Analyse und ist für alle Prozesse im Zähler willkürlich gleich eins gesetzt worden.

Um den Verlauf der  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Verteilung besser dem Experiment anpassen zu können, ist statt des statistischen Phasenraums der Verlauf eines mit dem Impulsübertrag bewichteten Phasenraums verwendet worden. Für die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes ist dabei  $e^{-8t}$  angenommen worden. Dabei ist  $t$  der Betrag des Quadrats des Impulsübertrages vom einlaufenden  $\pi^+$  auf das auslaufende  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -System. Die Projektion der so bewichteten Phasenraumverteilung in die  $3\pi$ -Massenverteilung wurde in einem Monte-Carlo-Verfahren berechnet (Programm PHYSIK, Beschreibung bei LÜK68). Sie wird durch den zusätzlichen Faktor  $GEW(M_{3\pi})$  berücksichtigt.

$W(\cos\theta)$  beschreibt die Verteilung des Helizitätswinkels  $\theta$ . Dieser gibt



die Richtung des  $\pi_2^+$  im Ruhesystem des  $\pi_1^+$  und des  $\pi^-$  an. Dabei ist angenommen, daß das  $\pi_1^+$  und das  $\pi^-$  die  $\rho^0$ -Resonanz bilden, d. h. daß  $M_{\pi_1^+\pi^-}$  durch eine Breit-Wigner-Funktion beschrieben werden kann.

$W(\cos\theta)$  gibt dann die Struktur innerhalb des Resonanz-'Bandes' wieder.

Im Programm wird  $W(\cos\theta)$  durch Kugelflächenfunktionen beschrieben:

$$W(\cos\theta) = 1 + 4\pi \sum_{i \geq 1} C_i Y_i^0$$

Der  $\cos\theta$  ist unabhängig von  $M_{3\pi}$  und  $M_{\pi^+\pi^-}$ . In der oben angegebenen Entwicklung ist seine Wahrscheinlichkeitsdichte bereits richtig normiert und braucht daher im Normierungsintegral nicht berücksichtigt zu werden.

Bei dieser Analyse ist angenommen worden, daß das  $A_2$  Spin und Parität  $2^+$  hat und über den niedrigsten möglichen Bahndrehimpuls  $L = 2$  zwischen dem  $\rho^0$  und dem nicht zum  $\rho^0$  gehörigen  $\pi^+$  zerfällt. Dann ergibt sich nach Jacob und Wick (JAC59), daß  $C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  ist. Die übrigen  $C_i$  sind Null. Diese Werte sind bei der Anpassung fest eingesetzt worden.

Dieser Prozeß tritt im Programm zweimal auf, um die beiden möglichen  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen symmetrisch zu behandeln.

2)  $A_2 \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$

$$p(M_{3\pi}) = \frac{BW_{A_2}(M_{3\pi}) \text{GEW}(M_{3\pi})}{\int BW_{A_2}(M_{3\pi}) \text{GEW}(M_{3\pi}) dR_4(M_{3\pi})} \quad (\text{VI.2})$$

Dieser Term, der den direkten Zerfall des  $A_2$  in  $\pi^+\pi^+\pi^-$  beschreibt, leistet nur einen geringen Beitrag zur Gesamtwahrscheinlichkeit (vgl. Kapitel VII.). Die einzelnen Faktoren haben dieselbe Bedeutung wie im Prozeß (VI.1). Auf eine Berücksichtigung der Winkelverteilung  $W(\cos\theta)$  wurde verzichtet. Da dieser Prozeß nur von der  $3\pi$ -Masse abhängt, tritt er nur einmal auf.

3)  $f\pi^+$ -Untergrund

Um den mit der  $f$ -Erzeugung korrelierten Untergrund unter dem  $\pi(1640)$  wiedergeben zu können, wurde zunächst eine 'Deck-Effekt'-artige Verteilung angenommen. Da mit dieser Annahme keine gute Anpassung erzielt werden

konnte, wurde später statt des 'Deck-Effekts' ein phänomenologischer Untergrund verwendet.

Um die  $3\pi$ -Massenverteilung wiedergeben zu können, wurde ein Polynom in  $M_{3\pi}$  angepaßt:

$$P(M_{3\pi}, M_{\pi^+\pi^-}, \cos\theta) = \frac{\text{Pol}(M_{3\pi}) BW_F(M_{\pi^+\pi^-})}{\int \text{Pol}(M_{3\pi}) BW_F(M_{\pi^+\pi^-}) d^2 R_4(M_{3\pi}, M_{\pi^+\pi^-})} W(\cos\theta) \quad (\text{VI.3})$$

$\text{Pol}(M_{3\pi})$  bezeichnet ein Polynom 2. Grades.

Für  $W(\cos\theta)$  wurden die Koeffizienten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  angepaßt. Auch dieser Prozeß tritt - entsprechend den beiden möglichen  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen - zweimal auf.

#### 4) $\rho^0\pi^+$ -Untergrund

Für den mit  $\rho^0$ -Erzeugung korrelierten Untergrund unter dem  $\pi(1640)$ , der nicht durch den Zerfall des  $A_2$  beschrieben werden kann, gelten dieselben Überlegungen wie für den f-Untergrund.

$$P(M_{3\pi}, M_{\pi^+\pi^-}, \cos\theta) = \frac{\text{LP}(X(M_{3\pi})) BW_\rho(M_{\pi^+\pi^-})}{\int \text{LP}(X(M_{3\pi})) BW_\rho(M_{\pi^+\pi^-}) d^2 R_4(M_{3\pi}, M_{\pi^+\pi^-})} W(\cos\theta) \quad (\text{VI.4})$$

LP bezeichnet ein Legendre-Polynom 3. Grades.  $X(M_{3\pi})$  erhält man durch Umnormierung der  $3\pi$ -Massenskala, so daß  $X(M_{3\pi}) = -1$  an der unteren Grenze des  $3\pi$ -Phasenraums,  $X(M_{3\pi}) = +1$  an der oberen Grenze des  $3\pi$ -Phasenraums ist. Für  $W(\cos\theta)$  wurden die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  angepaßt.

#### 5) $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Untergrund

Dieser sogenannte 'direkte' Kanal setzt sich zum großen Teil aus den Reflexionen vieler Resonanzen zusammen. Auch er wird daher rein phänomeno-

logisch durch ein Polynom in der  $3\pi$ -Masse und die Helizitätswinkelverteilung beschrieben.

$$p(M_{3\pi}, \cos\theta) = \frac{\text{Pol}(M_{3\pi})}{\int \text{Pol}(M_{3\pi}) dR_4(M_{3\pi})} W(\cos\theta) \quad (\text{VI.5})$$

Pol bezeichnet ein Polynom 2. Grades.  $W(\cos\theta)$  wurde durch die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  angepaßt. Auch dieser Term tritt zweimal auf, um die Winkelverteilung  $W(\cos\theta)$  symmetrisch für die beiden  $\pi^+$  zu behandeln.

6)  $\pi(1640)$

$$p(M_{3\pi}, M_{\pi_1^+\pi^-}, M_{\pi_2^+\pi^-}) = \frac{BW_{\pi(1640)}(M_{3\pi}) \text{GEW}(M_{3\pi}) D(a_\rho, a_f, a_s; M_{3\pi}, M_{\pi_1^+\pi^-}, M_{\pi_2^+\pi^-})}{BW_{\pi(1640)}(M_{3\pi}) \text{GEW}(M_{3\pi}) D(a_\rho, a_f, a_s; M_{3\pi}, M_{\pi_1^+\pi^-}, M_{\pi_2^+\pi^-}) d^3R_4(M_{3\pi}, M_{\pi_1^+\pi^-}, M_{\pi_2^+\pi^-})} \quad (\text{VI.6})$$

Die Faktoren BW und GEW sind unter 1) beschrieben worden. Für GEW ist dieselbe Abhängigkeit vom Quadrat des Impulsübertrags  $t$  angenommen wie beim  $A_2$ .  $D(a_\rho, a_f, a_s; M_{3\pi}, M_{\pi_1^+\pi^-}, M_{\pi_2^+\pi^-})$  ist die in (V.7) angegebene Dalitzdiagramm-Dichte. Freie Parameter dieses Prozesses sind  $a_\rho, a_f, a_s$ . Da dieser Prozeß symmetrisch ist in den beiden  $\pi^+\pi^-$ -Massen, tritt er nur einmal im Programm auf.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß einige Prozesse doppelt auftreten, hat man insgesamt 10 Prozesse.

Für die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Ereignisses setzen wir an:



$$P = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i p_i(\vec{\beta}_i, \vec{x}_n)$$

mit 
$$\sum_{i=1}^{10} \alpha_i = 1$$

Die  $p_i$  geben die zuvor beschriebenen Wahrscheinlichkeitsdichten für die einzelnen Prozesse wieder. Die  $\alpha_i$  geben die relativen Anteile der einzelnen Prozesse an. Die  $\vec{\beta}_i$  bezeichnen die freien Parameter eines Prozesses, die  $\vec{x}_n$  die Massen und Winkel eines Ereignisses, die in den Prozessen berücksichtigt werden.

Damit lautet der Logarithmus der Likelihoodfunktion:

$$L = \sum_{n=1}^N \ln \sum_{i=1}^{10} \alpha_i p_i(\vec{\beta}_i, \vec{x}_n)$$

$N$  ist die Anzahl der Ereignisse.

Vernachlässigt sind bei dieser Methode die möglichen Interferenzen des  $\pi(1640)$  mit dem Anteil des Untergrundes, der gleichen Spin und gleiche Parität wie das  $\pi(1640)$  hat. Interferenzen zwischen den Zerfallskanälen des  $\pi(1640)$  sind dagegen durch (V.7) berücksichtigt.

## VII. Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen die Werte der fest angenommenen Parameter und die Ergebnisse der Anpassung wiedergegeben werden.

Insgesamt standen 5325  $4C$ -Ereignisse (vgl. Anhang A) zur Verfügung. Nach den in Kapitel VI.b) angegebenen kinematischen Schnitten - Beschränkung auf  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Massen zwischen 1,3 und 2,1 GeV und Ausschluß der über die  $\Delta^{++}$ -Resonanz verlaufenden Ereignisse - blieben für die Anpassung 1139 Ereignisse.

a) Fest angenommene Parameter

Die Massen und Breiten der Resonanzen wurden zum Teil ROS70 entnommen, zum Teil sind sie Abschätzungen aus den experimentellen Daten. In den Breiten ist die endliche experimentelle Massenauflösung enthalten.

Tabelle 2

	<u>Masse [GeV]</u>	<u>Breite [GeV]</u>
$\rho^0$	0.75	0.16
f	1.264	0.15
$A_2$	1.305	0.13
$\pi(1640)$	1.65	0.15

b) Bestimmung der freien Parameter unter der Annahme  $J^P = 2^-$

Zunächst wurde die Annahme gemacht, daß das  $\pi(1640)$  Spin und Parität  $J^P = 2^-$  hat. Mit dieser Hypothese erreichten Bartsch et al. (BAR68) und Caso et al. (CAS69) die besten Anpassungen (vgl. Kapitel IV).

Weiterhin wurde für jeden Zerfallskanal der niedrigste durch Drehimpuls- und Paritäts-Erhaltung erlaubte Bahndrehimpuls  $L$  angenommen.

Mit den Bezeichnungen von Kapitel V erhalten wir damit folgende drei Kanäle:

	<u><math>\ell</math></u>	<u><math>L</math></u>
$\pi(1640) \rightarrow \rho^0 \pi^+$	1	1
$\rightarrow f \pi^+$	2	0
$\rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$	0	2

Unter diesen Annahmen wurden die in Kapitel VI.b) beschriebenen 28 freien Parameter angepaßt. Eine gleichzeitige Variation aller freien Parameter war wegen des zu hohen Aufwandes an Rechenzeit nicht möglich. Das Maximum

der Likelihood-Funktion wurde iterativ durch Festhalten und Freilassen wechselnder Gruppen von Parametern gesucht. Die so erhaltenen Werte aller Parameter sind in Tabelle 3 angegeben.

Um die angepaßten Massenverteilungen mit den experimentellen vergleichen zu können, wurde die theoretische Wahrscheinlichkeitsdichte durch Monte-Carlo-Ereignisse integriert.

Abb. 12 zeigt die experimentelle und die angepaßte Verteilung der  $3\pi$ -Masse im untersuchten  $3\pi$ -Massenbereich. Weiterhin sind der Gesamtbeitrag des Untergrundes sowie die Beiträge der einzelnen Prozesse des Untergrundes eingezeichnet. Die Nummerierung der Prozesse ist dieselbe wie in Kapitel VI.b) und Tabelle 3.

Weiterhin wurden die Monte-Carlo-Ereignisse denselben Einschränkungen in den  $\pi^+\pi^-$ -Massen unterworfen, die in Kapitel III bei der Untersuchung der experimentellen Verteilungen angewandt worden sind. Die sich ergebenden  $3\pi$ -Massenverteilungen sind in die entsprechenden experimentellen Verteilungen Abb. 6 und 7 eingezeichnet worden.

Abbildung 13a zeigt die  $\pi^+\pi^-$ -Massenverteilung für Ereignisse mit  $3\pi$ -Massen im untersuchten Bereich von 1.3 bis 2.1 GeV. Für jedes Ereignis sind beide  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen eingetragen. Abbildung 13b zeigt die  $\pi^+\pi^-$ -Massenverteilung für das  $\pi(1640)$ -Band, d. h.  $1.52 \text{ GeV} < M_{3\pi} < 1.8 \text{ GeV}$ , Abbildung 13c die  $\pi^+\pi^-$ -Massenverteilung für den 'linken' Randbereich ( $1.3 \text{ GeV} < M_{3\pi} \leq 1.52 \text{ GeV}$ ), Abbildung 13d für den 'rechten' Randbereich ( $1.8 \text{ GeV} \leq M_{3\pi} < 2.1 \text{ GeV}$ ).

Tabelle 3 Werte der unter der Hypothese  $J^P = 2^-$  angepaßten Parameter

Proz. Nr. +	Prozeß	rel. Anteil ++	Polynom in der $3\pi$ -Masse +++	Helizitätswinkel-Verteilung
1	$A_2 \rightarrow \rho^0 \pi^+$	19.1 %		$1 - .447 Y_2^0$ (fest)
2	$A_2 \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$	4.6 %		1 (fest)
3	$f\pi^+$ -Untergrund	10.4 %	$30.8 + 145.4 M_{3\pi} + 56.3 M_{3\pi}^2 + 112.9 M_{3\pi}^3$	$1 - .223 Y_1^0 + .047 Y_2^0 - .329 Y_3^0 + .239 Y_4^0$
4	$\rho^0 \pi^+$ -Untergr.	13.6 %	$-15.6 P_0 - 182.8 P_1 - 231.6 P_2 + 52.3 P_3$	$1 - .420 Y_1^0 + .322 Y_2^0$
5	$\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Untergr.	32.0 %	$29.3 - 25.3 M_{3\pi} + 5.51 M_{3\pi}^2$	$1 + .230 Y_1^0 + .270 Y_2^0$
6	$\pi(1640)$	20.3 %	++++ $a_p = .802$ $a_f = -.579$ $a_s = -.156$	

Bemerkungen:

+ Die Prozeß-Nummern beziehen sich auf die in Kapitel VI.b gegebene Beschreibung der einzelnen Prozesse.

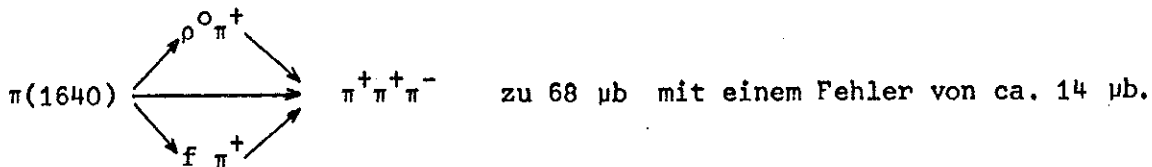
++ Für Prozesse, die wegen der beiden  $\pi^+ \pi^-$ -Kombinationen doppelt auftreten, ist als relativer Anteil die Summe aus beiden Prozessen angegeben.

+++ Nur für  $\rho^0 \pi^+$ ,  $f\pi^+$ ,  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Untergrund.

++++ Nähere Angaben in Abschnitt d und Tabelle 4.

c) Wirkungsquerschnitt des  $\pi(1640)$

Die Anpassung ergab für das  $\pi(1640)$  einen Anteil von 20 % der untersuchten Ereignisse. Der Fehler beträgt etwa 4 %. Dieser Anteil entspricht 228 Ereignissen oder 62  $\mu\text{b}$ . Monte-Carlo-Rechnungen ergaben, daß für die Breit-Wigner-'Schwänze' außerhalb des untersuchten  $3\pi$ -Massenintervalls eine Korrektur von +8 % vorgenommen werden muß. Weiterhin ergibt sich durch die Verkleinerung des Phasenraums, die die Schnitte zum Ausschluß der  $\Delta^{++}$ -Resonanz bewirkt haben, eine weitere Korrektur um etwa +1 %. Damit ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow p\pi(1640)$ :



d) Vergleich mit anderen Spin-Paritäts-Hypothesen  
und Verzweigungsverhältnisse

Untersucht und verglichen wurden Spin-Paritäts-Hypothesen, für die die drei berücksichtigten Kanäle mit weniger als vier Einheiten des Drehimpulses beschrieben werden können.  $J^P = 1^-$  wurde nicht getestet, da Bartsch et al. (BAR68) für diese Annahme wesentlich kleinere Likelihood-Werte als für die anderen Hypothesen erhalten hatten. D. h., untersucht wurden die Hypothesen  $J^P = 1^+, 2^-, 3^+$  der 'unnatürlichen Serie' und  $J^P = 2^+$  der 'natürlichen Serie'. Für die Hypothesen der 'unnatürlichen Serie' wurde stets der kleinste mögliche Bahndrehimpuls  $L$  angenommen. Für die 'natürliche Serie' ist der direkte  $3\pi$ -Zerfall mit  $\ell = 0$  durch Drehimpuls- und Paritäts-Erhaltung verboten. Daher war es mit dem vorliegenden Programm möglich, als dritten Kanal den Prozeß  $\pi(1640) \rightarrow f\pi^+$  mit dem höheren Bahndrehimpuls  $L = 3$  zu untersuchen.

Es wurde angenommen, daß die Beschreibung des Untergrundes und der Anteil des  $\pi(1640)$  an dieser Reaktion nur schwach von der angenommenen Spin-Paritäts-Hypothese abhängt. Freie Parameter sind dann nur die Verzweigungsverhältnisse.

Die Ergebnisse der Anpassungen sind in Tabelle 4 zusammengefaßt.

Den besten Wert der Likelihood-Funktion ergab die Annahme  $J^P = 2^-$ , den nächst besten  $J^P = 1^+$ . Erheblich schlechtere Anpassungen ergaben sich mit der Hypothese  $3^+$  und besonders mit der einzigen getesteten Hypothese der 'natürlichen Serie'  $J^P = 2^+$ .

Für alle Spin-Paritäts-Annahmen ergab sich ein Überwiegen des  $\rho^0 \pi^+$ -Kanals. (Die Anteile liegen - außer für  $J^P = 1^+$  - stets um 65 %). Der Anteil des 'direkten'  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Kanals ist für alle Hypothesen gering und fast immer mit Null verträglich. Ebenso ist für die Hypothese  $J^P = 2^+$  der Anteil des Zerfalls in  $f \pi^+$  mit dem höheren Bahndrehimpuls  $L = 3$  verträglich mit Null.

Wie für  $J^P = 2^-$  wurden auch für die übrigen Hypothesen die sich aus der Anpassung ergebenden  $\pi^+ \pi^-$ - und  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Massenverteilungen mit Hilfe von Monte-Carlo-Rechnungen dargestellt. Da sich jedoch keine deutlich sichtbaren Unterschiede ergaben, wird hier auf eine Wiedergabe verzichtet.

Die Abbildungen 8g, 9g, 10g, 11g zeigen für die einzelnen Hypothesen die sich aus der Anpassung ergebenden Dichteverteilungen im Dalitz-Diagramm

$M_{\pi_1^+ \pi^-}^2$  gegen  $M_{\pi_2^+ \pi^-}^2$ . Die Verteilungen sind für  $\pi(1640)$ -Ereignisse (d. h. ohne Untergrund) mit einer  $3\pi$ -Masse von 1.7 GeV berechnet worden. Die Normierung der Verteilung ist willkürlich gewählt.

Tabelle 4 Likelihood-Wert und Verzweigungsverhältnisse für verschiedene  $J^P$ -Hypothesen

$J^P$	natürl. Log. des Likelihood Wertes	Kanal	Bahndrehimpuls L	angepaßter Parameterwert	Verzweigungsverhältnis
$1^+$	- 2426.44	$\rho^+ \pi^+$	0	$a_\rho = 0.853$	$a_\rho^2 = 0.728$
		$f\pi^+$	1	$a_f = -0.420$	$a_f^2 = 0.177$
		$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	1	$a_s = 0.308$	$a_s^2 = 0.095$
$2^-$	- 2410.01	$\rho^+ \pi^+$	1	$a_\rho = 0.801$	$a_\rho^2 = 0.641$
		$f\pi^+$	0	$a_f = -0.579$	$a_f^2 = 0.334$
		$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	2	$a_s = -0.156$	$a_s^2 = 0.025$
$3^+$	- 2531.49	$\rho^+ \pi^+$	2	$a_\rho = 0.810$	$a_\rho^2 = 0.655$
		$f\pi^+$	1	$a_f = -0.575$	$a_f^2 = 0.331$
		$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	3	$a_s = -0.119$	$a_s^2 = 0.014$
$2^+$	- 2658.11	$\rho^+ \pi^+$	2	$a_\rho = 0.811$	$a_\rho^2 = 0.657$
		$f\pi^+$	1	$a_{f1} = -0.574$	$a_{f1}^2 = 0.329$
		$f\pi^+$	3	$a_{f3} = -0.120$	$a_{f3}^2 = 0.014$

Die rein statistischen Fehler der Verzweigungsverhältnisse liegen in der Größenordnung von 5 %. Sie sind durch die Wurzel der Diagonal-Elemente der Fehlermatrix gegeben, die aus der Breite des Likelihood-Maximums bestimmt wird.

e) Isospin und G-Parität

Da der Kanal  $f\pi^+$  einen wesentlichen Beitrag zum Zerfall des  $\pi(1640)$  leistet, ist der Isospin 1. Da das  $\pi(1640)$  in Endzuständen mit ungerader Pionenzahl beobachtet wird, folgt, daß die G-Parität ungerade ist.



### VIII. Anhang A: Experimentelles Vorgehen

#### a) Überblick

Dieses Experiment wurde in einer Kollaboration der folgenden fünf Institute durchgeführt:

Department of Physics, Durham

Istituto de Fisica e Sezione INFN, Genua

II. Institut für Experimentalphysik, Hamburg

Istituto de Fisica e Sezione INFN, Mailand

Centre d'Etudes Nucléaires, Saclay

Im Juli 1967 und im Februar 1968 wurde die 2 m-CERN-Wasserstoff-Blasen-kammer einem positiven Pionenstrahl von 11.7 GeV/c Laborimpuls ausgesetzt. Eine Beschreibung der Blasen-kammer und der Strahlseparation findet man bei DRE67, DIT67.

In jedem der beiden Läufe wurden etwa 100 000 Aufnahmen gemacht. Die Auswertung erfolgte in der üblichen Weise. Sie ist bei E. Bassler (BAS70) beschrieben. Für diese Arbeit standen etwa 2/3 der zu erwartenden Ereignisse mit vier geladenen Teilchen im Endzustand (4-Stern-Ereignisse) zur Verfügung.

#### b) Strahlimpuls und Wirkungsquerschnitte

Für die in dieser Arbeit beschriebenen Untersuchungen wurde nur der Kanal

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$$

verwendet. Er ist kinematisch vierfach überbestimmt (4C-Anpassung). Im folgenden wird dieser als 4C-Kanal bezeichnet.

Während der Auswertung wurde festgestellt, daß mit dem ursprünglich angenommenen Strahlimpuls von  $(11.72 \pm 0.03)$  GeV/c (LAZ67) 1.) die Verteilung des Quadrats der fehlenden Masse im 4C-Kanal eine relativ große Breite

hat ( $\approx 0.06 \text{ GeV}^2$ ), 2.) der Erwartungswert der fehlenden Energie im 4C-Kanal etwa bei  $0.1 \text{ GeV}$  liegt, 3.) Im Kanal  $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$  fast kein  $\omega$ -Signal in der Massenkombination  $M_{\pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0}$  gesehen wurde. Durch Messungen von Strahlspuren mit einer Länge von mehr als  $1 \text{ m}$  zeigte sich, daß die Erwartungswerte des Strahlimpulses für einige Filme bis zu  $150 \text{ MeV}/c$  von dem theoretischen Wert  $11.72 \text{ GeV}/c$  abwichen. Für die einzelnen Filme betrug die Streuung zwischen  $80$  und  $200 \text{ MeV}/c$ . Dabei ließen sich stets Gruppen von unmittelbar nacheinander belichteten Filmen bilden, innerhalb derer der Erwartungswert des Strahlimpulses nur wenig variiert.

Es wurden 4-Stern-Ereignisse mit festem Eingangsimpuls durch das Monte-Carlo-Programm FAKE (RAU69) simuliert. Es zeigte sich, daß man etwa  $10 \%$  aller 4C-Ereignisse verliert, wenn man diese Ereignisse im Programm GRIND mit einem um  $300 \text{ MeV}/c$  verschobenen Strahlimpuls kinematisch rekonstruiert. Im FAKE wurden dabei die Ereignisse mit einem Strahlimpuls erzeugt, der normalverteilt ist mit der Breite  $\Gamma_s = 100 \text{ MeV}/c$ . Für die Rekonstruktion im GRIND wurde ebenfalls eine Normalverteilung mit der Breite  $\Gamma_s = 100 \text{ MeV}/c$  angenommen. Werden dagegen die Ereignisse im FAKE mit  $\Gamma_s = 200 \text{ MeV}/c$  erzeugt und im GRIND mit  $\Gamma_s = 100 \text{ MeV}/c$  gerechnet, so verliert man bis zu  $20 \%$ . Dagegen zeigte sich, daß die Verseuchung des 4C-Kanals durch die Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- + N \pi^0$  ( $N \geq 1$ ) unter den obigen Annahmen nicht vergrößert wurde.

Diese Ergebnisse zeigen die Notwendigkeit, den Strahlimpuls für verschiedene Filmgruppen einzeln zu bestimmen.

Der Wirkungsquerschnitt für den 4C-Kanal ergab sich im Mittel über alle beteiligten Labors zu  $\sigma = (1.45 \pm 0.15) \text{ mb}$ . Die Methode zu seiner Bestimmung ist bei BAS70 beschrieben. Der Fehler ist nicht nur statistisch, sondern schließt auch systematische Unsicherheiten ein.

Für die vorliegende Untersuchung wurden alle 4C-Ereignisse mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 1 % verworfen. Waren dann für ein Ereignis noch mehrere 4C-Anpassungen möglich, so wurde die Hypothese mit der größten Wahrscheinlichkeit akzeptiert. Das ergab 5325 Ereignisse. Die Massenauflösung für das  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -System wurde in dem Gebiet des  $\pi(1640)$  zu  $\pm 13$  MeV berechnet (SCHL70).

#### IX. Anhang B: Erweiterungen und Änderungen im

##### Maximum-Likelihood-Programm MURTLBERT

###### a) Allgemeines

Im Anhang B soll eine Bedienungsanleitung für die für diese Anpassung modifizierte MURTLBERT-Version gegeben werden. Vorausgesetzt wird die Kenntnis der MURTLBERT-Beschreibung von J.H. Friedmann (FRI66). Hier sollen alle Erweiterungen und Änderungen gegenüber dieser Grundversion beschrieben werden; dabei sollen sowohl Änderungen in der allgemeinen DESY-Version als auch spezielle Erweiterungen durch den Verfasser berücksichtigt werden.

Das Programm bietet in dieser Version gegenüber der Grundversion einige weitere Möglichkeiten. Es kann jedoch auch wie die Grundversion benutzt werden. Zu beachten sind dann lediglich die geänderte Eingabe der Zerfallswinkel (Abschnitt c), die geänderte Anordnung der BOUT-Zellen (Abschnitt j), der zusätzliche Gewichtungsfaktor zu den einzelnen Prozessen (Abschnitt e) und zusätzliche Datenkarten (Abschnitt h).

Zunächst werden alle Ergänzungen beschrieben, die mit einer neuen SUBROUTINE PROC zusammenhängen und nur mit dieser zu benutzen sind (Abschnitte b bis g), danach werden Erweiterungen beschrieben, die unabhängig von dieser benutzt werden können. Ein Beispiel am Ende des Abschnittes zeigt die Anordnung der Datenkarten.

b) Allgemeine SUBROUTINE PROC(I,JS,P)

Anstelle der einzelnen PROC1(JS,P), ..., PROC27(JS,P) steht eine allgemeine SUBROUTINE PROC(I,JS,P) mit  $I = 1, \dots, 27$  zur Verfügung. Sie ist mit einer leicht geänderten SUBROUTINE CALPRC zu rufen. Diese allgemeine Routine PROC bietet eine Reihe von Vorteilen. Unter anderem benötigt sie weniger Speicherplatz als mehrere "Einzel-PROC's", da jede FORTRAN-Anweisung für alle  $I$  nur einmal vorhanden ist. Winkelverteilungen können daher für alle  $I$  angepaßt werden, ohne daß durch diese Erweiterung der Speicherplatzbedarf der allgemeinen SUBROUTINE PROC wesentlich vergrößert wird.

c) Winkelverteilungen

Die Beschränkung auf Jackson-Winkel entfällt. Es können beliebige Zerfallswinkel-Verteilungen angepaßt werden. Statt der 4-Impulse müssen in der Zelle BOUT(413+I)cos $\theta$ , in BOUT(414+I) der Winkel  $\phi$  der ersten Resonanz und in BOUT(415+I)cos $\theta$ , in BOUT(416+I) der Winkel  $\phi$  der zweiten Resonanz gespeichert werden.

d) Kaskadenzerfälle

Durch eine geänderte FUNCTION FOURD ist es möglich, auch Kaskadenzerfälle der Art  $((123)) \rightarrow ((12)) + ((3)) \rightarrow ((1)) + ((2)) + ((3))$  anzupassen. (Definition der Systeme  $((123))$  usw. wie in Kapitel V). In der 'resonance data card' hat in LOC1 angegeben zu werden, in welcher BOUT-Zelle das Quadrat der effektiven Masse des Systems  $((123))$  steht. LOC2 hat dieselbe Bedeutung für das System  $((12))$ . Weiterhin müssen die Größen  $N(1)$ ,  $N(2)$ ,  $N(3)$  angegeben werden. Dabei bezeichnet  $M(N(K)), K=1,2,3$  auf der 'run card' die Masse des K-ten Teilchens. Es ist dabei angenommen, daß die Teilchen  $((1))$ ,  $((2))$  einen Zwischenzustand bilden, der durch  $L2$ ,  $E2$ ,  $G2$  beschrieben wird.

e) Bewichtung mit nur von den Ereignissen abhängigen Gewichten

Die Wahrscheinlichkeit  $P_I(\vec{\beta}, \vec{x})$ , die die PROC(I,JS,P) berechnet, kann mit einem zusätzlichen Gewichtungsfaktor multipliziert werden, der nur von den kinematischen Variablen, nicht aber von den anzupassenden Parametern  $\vec{\beta}$  abhängt. Dieses Gewicht ist in der FUNCTION SELEC und in der FUNCTION USERWT in die Zelle BOUT(370+I) zu bringen. (Wird von dieser Möglichkeit nicht Gebrauch gemacht, so sind in diesen beiden Routinen die entsprechenden BOUT-Zellen gleich 1,0 zu setzen.) Zum Beispiel kann eine Bewichtung mit dem Quadrat des 4-Impulsübertrages  $t$  durch

$$BOUT(370+I) = N_I e^{a_I t_I}$$
$$N_I = \frac{\int P_I(\vec{\beta}, \vec{x}) d\vec{x}}{\int e^{a_I t_I} P_I(\vec{\beta}, \vec{x}) d\vec{x}}$$

vorgenommen werden. Der Normierungsfaktor  $N_I$  ist nur dann exakt gültig, wenn man die Parameter  $\vec{\beta}$  nicht variiert, und ist näherungsweise gültig, wenn die Integrale nur schwach von den Parametern  $\vec{\beta}$  abhängen und  $\vec{\beta}$  sich bereits in der Nähe der Lösung befindet.

f) Bewichtung mit vom Benutzer zu programmierenden

Funktionen der Massenquadrate

Die Resonanz-Indizes L1 und L2 in der 'resonance data card' sind erweitert worden. In Verbindung mit einer geänderten FUNCTION RESON sind jetzt auch mehrstellige Indizes L, L = L1 oder L2 zugelassen. Die letzte Stelle bezeichnet zusammen mit dem Vorzeichen von L die Resonanzform wie bisher. Zusätzlich bedeutet der Index 9, daß RESON den Wert 1 annimmt, d. h. daß Phasenraumverteilung angepaßt wird.

Ist  $|L|$  größer als 9, so wird das von RESON berechnete Gewicht mit dem Wert einer vom Benutzer zu schreibenden

FUNCTION USRSHP(LSHP,ER,GAMA,ESQ)

multipliziert. LSHP ist der Betrag von  $L \pmod{10}$ , ER und GAMA werden auf der 'resonance info card' durch die Größen E1 und G1 bzw. E2 und G2 definiert und geben Grenzen für die Intervalle an, in denen die Normierungsintegrale berechnet werden::

- 1) von der unteren kinematischen Grenze bis zu ER-GAMA
- 2) von ER-GAMA bis ER+GAMA
- 3) von ER+GAMA bis zur oberen kinematischen Grenze

ESQ ist das für jedes Ereignis an der Stelle LOC1 bzw. LOC2 stehende Quadrat einer effektiven Masse.

In der FUNCTION USRSHP können beliebige Funktionen von ESQ und LSHP programmiert werden. Weiterhin können für jeden Prozeß bis zu vier Parameter angepaßt werden. Dafür ist  $L$  größer als 99, d. h. LSHP größer als 9 zu wählen. Die SUBROUTINE PROC liest dann eine weitere Datenkarte ein, die unmittelbar auf die 'resonance info card' zu folgen hat. Sie wird im FORMAT(8F10.5) gelesen und die Daten werden in DATA(I,9...16) gespeichert. (I bezeichnet die in der 'process card' angegebene PROC-Nummer.) Im

COMMON/USSHAP/I,DATA(27,16)

stehen die Daten in der FUNCTION USRSHP zur Verfügung. Die ersten vier zusätzlich eingelesenen Daten, d. h. DATA(I,8+J), J=1,...,4 geben dabei an, welche Parameter angepaßt und welche fest eingesetzt werden sollen, die weiteren vier geben ggf. die Werte der festen Parameter an. Das heißt: Ist DATA(I,8+J), J=1,...,4 größer oder gleich Null, so wird DATA(I,12+J)

als fester Wert für diesen Parameter angenommen. Ist  $DATA(I,8+J), J=1, \dots, 4$  kleiner als Null, so bezeichnet  $IABS(INT(DATA(I,8+J)))$  die Nummer des anzupassenden Parameters. Von der MURTLBERT-Konvention, Parameter-Nummer anzupassender Parameter und Werte fester Parameter durch den gleichen Speicherplatz anzugeben, wurde abgewichen, um auch negative Parameter-Werte fest einsetzen zu können. Der Wert der anzupassenden Parameter beim Eintritt in die FUNCTION USRSHP muß vom Benutzer selbst aus dem COMMON (C,D,E for fit) durch folgende Anweisungen bestimmt werden:

$$IPAR=ABS(DATA(I,J))$$
$$WERT=PAR(IPAR)$$

In der SUBROUTINE PROC werden die vier Parameter analog zu den Zentralwerten und Breiten der Breit-Wigner-Funktionen behandelt, d. h. die richtige Normierung wird sichergestellt, und bei jedem  $JS = 2,3,4$  Eintritt wird geprüft, ob sich die Parameter-Werte geändert haben.

g) Dalitz-Diagramm-Analyse durch Inter-  
polation in einer vorgegebenen Tabelle

Für die Dalitz-Diagramm-Analyse der Zerfälle  $\pi(1640) \rightarrow \rho^0 \pi^+, f \pi^+, \pi^+ \pi^+ \pi^-$  steht eine spezielle Version der SUBROUTINE PROC zur Verfügung. Diese kann jedoch leicht für andere Kaskadenzerfälle umgeschrieben werden. Soll von der Möglichkeit der Dalitz-Diagramm-Analyse kein Gebrauch gemacht werden, so kann diese spezielle Version wie die allgemeine SUBROUTINE PROC verwendet werden. Für die Dalitz-Diagramm-Analyse wird für jeden  $JS=0,1,2,3,4$  Eintritt die SUBROUTINE DALITZ gerufen. Diese berechnet die Gewichte nach Formel (V.7) durch lineare Interpolation in einer dreidimensionalen Tabelle. Für die Abhängigkeit von  $M_{123}$  sind 8 Stützstellen, für die Abhängigkeit von  $M_{12}^2$  und  $M_{23}^2$  jeweils 20 Stützstellen vorgegeben.

Bei den verschiedenen JS-Eintritten werden folgende Operationen vorgenommen:

- JS = 0 Die Interpolationstabelle wird eingelesen und Konstanten werden gesetzt.
- JS = 1 Die sechs Größen  $h$  aus Formel (V.7) und die entsprechenden Größen  $n$  werden durch Interpolation berechnet und in der SUBROUTINE PROC auf das 'scratch file' geschrieben.
- JS = 2,3,4 Die Größen  $h$  und  $n$  werden vom 'scratch file' gelesen. Die SUBROUTINE DALITZ berechnet die Dalitz-Diagramm-Gewichte in Abhängigkeit von den Parametern  $a$  in (V.7).

Um von der Möglichkeit der Dalitz-Diagramm-Analyse Gebrauch zu machen, müssen in den 'resonance process cards' folgende Werte abweichend von der Originalbeschreibung gesetzt werden: Für die Größen LOC2, E2, G2 ist Null einzusetzen. NH1 muß kleiner als Null sein. Der Wert IABS(NH1) steht in der SUBROUTINE DALITZ an der ersten Stelle der Argumentliste zur Verfügung. Nach den 'resonance process cards' wird eine zusätzliche Daten-Karte eingelesen mit den Größen:

DLOC1, DLOC2, IRES(1), ACOEFF(1), IRES(2), ACOEFF(2), AFIT(1), AFIT(2)

Das FORMAT ist:

2F10.5, 2(A1, F9.5), 2F10.5

DLOC1 und DLOC2 geben die BOUT-Zellen an, in denen  $M_{12}^2$  und  $M_{23}^2$  stehen. Für IRES(K), K=1,2 können die Buchstaben F, R oder S eingesetzt werden. Ist IRES(K) gleich F, so beziehen sich ACOEFF(K) und AFIT(K)



auf den Parameter  $a_f$ ; analog dazu bezeichnet  $R$  den Parameter  $a_0$ ,  $S$  den Parameter  $a_s$ . Ist  $AFIT(K)$  kleiner als Null, so gibt  $PAR(INT(ABS(AFIT(K))))$  im MURTLBERT 'C.D.E. for fit' den Parameter an, der für den betreffenden Koeffizienten anzupassen ist. Wenn  $AFIT(K)$  größer oder gleich Null ist, so wird die in  $ACOEFF(K)$  stehende Zahl als fester Wert für den entsprechenden Koeffizienten  $a$  eingesetzt. Der dritte Koeffizient  $a$  ergibt sich dann aus der Bedingung (V.8). Er wird stets als positiv angenommen, da das Vorzeichen von einem der drei Koeffizienten beliebig zu wählen ist.

Wenn die Koeffizienten angepaßt werden, sollte als letzter nicht der kleinste gewählt werden. Sonst könnte der Fall eintreten, daß zwar die Parameterwerte selbst im mathematisch und physikalisch sinnvollen Bereich liegen, daß aber bei der Variation der Parameter zur Berechnung der partiellen Ableitungen (Eintritte mit  $KDER \neq 0$ ) die Summe der Quadrate der ersten beiden Parameter größer als 1 wird, d. h. der dritte Parameter gleich der Wurzel aus einer negativen Zahl wird. Das Programm würde in diesem Fall die Änderung aller Parameter reduzieren.

#### h) Zusätzliche Datenkarten

Die SUBROUTINE MURT liest einige weitere Karten ein. Für Vierteilchen-Endzustände hat auf die beiden Karten, die die Einleseformate für die Datenkarten angeben, zunächst eine Leerkarte zu folgen. Die von dieser Karte einzulesenden Daten haben nur Sinn, wenn bestimmte Unterprogramme aus der MURTLBERT-Version von P. Schilling (SCH70) verwendet werden, die erweiterte Anpassungsmöglichkeiten für Dreiteilchen-Endzustände bietet. Im Anschluß an diese Leerkarte wird ein weiterer Datensatz eingelesen. Dieser muß mit einer END-Karte abgeschlossen werden; alle übrigen Karten können in beliebiger Reihenfolge angeordnet werden oder auch fehlen.

Die folgenden Karten sind dabei zulässig:

Kartentyp	einzu-lesende Größen	Bedeutung
NFAKE FORMAT(A7,3X,I10)	NF	Maximale Anzahl der zu erzeugenden Monte-Carlo-Ereignisse. Reicht die Zeit nicht aus oder fehlt diese Karte, so erfolgt Zeitabbruch 10 sec vor Ende der Rechenzeit.
IRN FORMAT(A7,3X,I10)	IR	Erste Zufallszahl. Fehlt diese Karte, so wird IR=1 gesetzt. Die letzte Zufallszahl wird am Ende des Programms ausgedruckt.
FITCUT FORMAT(A7/4F10.5)	CUT1,CUT2, RCUT1,RCUT2	Mit diesen beiden Karten können für Viertelchen-Endzustände die Grenzen der Normierungsintegrale eingeschränkt werden. Für Prozesse, die über einen Dreiteilchen-Zwischenzustand verlaufen (ggf. mit Kaskadenzerfall) wird die Begrenzung in der effektiven Masse dieser drei Teilchen vorgenommen. (Bis auf Doppelresonanzproduktion kann jeder Prozeß formal durch Verwendung des Resonanzindex 9 - siehe Abschnitt f - als solcher behandelt werden.) Für Prozesse, die über Zweiteilchenzustände verlaufen, wird der Schnitt in der entsprechenden Zweiteilchen-Masse vorgenommen (bei Doppelresonanzproduktion in der ersten Resonanz). Phasenraumverteilung muß formal als Resonanz mit Index 9 behandelt werden.

Kartentyp	einzulesende Größe	Bedeutung
		<p>Integriert wird von CUT1 bis RCUT1 und RCUT2 bis CUT2. Fehlen die beiden Karten, so wird über den ganzen kinematisch erlaubten Bereich integriert. Sind RCUT1=RCUT2=0., so wird von CUT1 bis CUT2 integriert. Ist CUT1 kleiner oder CUT2 größer als die kinematisch mögliche effektive Masse, so werden die entsprechenden kinematischen Grenzen eingesetzt.</p> <p>Um dieselben Schnitte in den experimentellen Daten vornehmen zu können, stehen die Größen im</p> <p>COMMON/MASCUT/CUT1,CUT2,RCUT1,RCUT2,PLTCUT(8) zur Verfügung.</p>
PLOT CUT FORMAT(A7/8F10.5)	PLTCUT(1)..(8)	<p>Die Größen PLTCUT(1)..(8) stehen wie die Daten der Karte FITCUT im COMMON/MASCUT/ zur Verfügung. Sie können benutzt werden, um z. B. Verteilungen in eingeschränkten Bereichen ausdrucken zu lassen.</p>
END FORMAT(A7)		<p>Abschlusskarte des Datensatzes</p>

i) Aufsummierung mehrerer Verteilungen in einer Darstellung

Bisher konnte in jeder Darstellung nur die Verteilung der Größe, die in einer BOUT-Zelle gespeichert war, ausgedruckt werden. Durch eine Änderung der Unterprogramme, die die experimentelle und theoretische Verteilung ausdrucken, ist es jetzt möglich, zwei oder mehr Verteilungen in einer Dar-

stellung aufzusummieren, z. B. die der beiden  $\pi^+ \pi^-$ -Kombinationen in dem hier beschriebenen Experiment. PROC28 liest für jede der aufzusummierenden Verteilungen eine Datenkarte ein. Steht in Spalte 61 bis 70 (FORMAT F10.5) eine von Null verschiedene Zahl, so wird die in dieser Karte angegebene Verteilung zu der in der vorhergehenden addiert. Alle Informationen über das zu zeichnende Diagramm - bis auf die Nummer der BOUT-Zelle, in der die darzustellende Größe steht - werden dabei nur aus der letzten Karte eines Diagramms entnommen. In der 'number of histograms card' gibt NHIST jetzt die Anzahl der einzulesenden Histogramm-Karten an.

j) Änderung der BOUT-Zellen-Indizierung

Die SUBROUTINE FXTN, die bei der Berechnung der theoretischen Verteilungen durchlaufen wird, überschreibt in der bisherigen Version nach jedem Aufruf einer PROC-Routine mit JS=1 die ersten BOUT-Zellen mit den Zellen WORD(1,...,NWRD). Daher sollten die ersten BOUT-Zellen nicht zur Speicherung von Information benutzt werden, die für mehrere Prozesse benötigt wird. Eine geänderte SUBROUTINE TAPE speichert die auf dem Eingabeband in der K-ten-Zelle stehenden Werte in die Zelle BOUT(100+K). Es ist also bei allen Datenkarten als Speicherplatz für die zu verwendenden Größen 100+K anzugeben.

K) BEISPIEL EINES MÜRTLERERT DATENKARTENSATZES :

(RF10.5)  
(1X,8F16.5)

```

NFAKE      1000000
IRN        1177271297
FITOUT
1.3        2.1
PLOTOUT
1.3        1.52      1.8      2.1      2.4
END
PI(1640) ANPASSUNG
12.        50.        1.
.03        .17        5.        2.        3.        0.        0.
0.         0.         -.8      -.1
.01        .01        .5      .5      .5      .1      .1
.1         .1         .1      .05
MÜRTLERERT
0.         4.7468      .938      .1396      .1396      .1396      16.      2.
STUMAC     0.
START PROC -.05
PROC 1     .0957
103.       105.       2.        4.        3.        -11.       1.        -.05
1.305     .13        .75      .16      1.
RF20-.4472
PROC 2     .0957
103.       107.       3.        4.        2.        -11.       1.        -.05
1.305     .13        .75      .16      1.
RF20-.4472
PROC 3     .0462
103.       0.         2.        3.        4.        -11.       0.        -.05
1.305     .13
PROC 4     -1.
103.       105.       2.        4.        3.        109.      2.        -.05
1.7       .2         1.264    .15      4.
-3.       -4.       -5.      -6.
RE10 -7. RF20 -8. RF30 -9. RF40 -10.
PROC 5     -1.
103.       107.       3.        4.        2.        109.      2.        -.05
1.7       .2         1.264    .15      4.
-3.       -4.       -5.      -6.
RE10 -7. RF20 -8. RF30 -9. RF40 -10.
PROC 6     .0697
103.       105.       2.        4.        3.        209.      1.        -.05
1.7       .2         .75      .16      2.
-15.577  -182.794 -231.641 52.2792
RE10-.4198 RF20.3221
PROC 7     .0697
103.       107.       3.        4.        2.        209.      1.        -.05
1.7       .2         .75      .16      2.
-15.577  -182.794 -231.641 52.2792
RF10-.4198 RF20.3221
PROC 8     -2.
103.       0.         2.        3.        4.        109.      0.        -.05
1.7       .2
29.3471  -25.3027 5.5131
RF10 .23 RF20 .27
PROC 9     -2.
103.       0.         2.        3.        4.        109.      0.        -.05
1.7       .2
29.3471  -25.3027 5.5131
RF10 .23 RF20 .27
PROC 28
22.
1.         .02        60.       192.      0.        3.
1.         .02        60.       210.      0.        3.
1.         .02        60.       211.      0.        3.
1.         .02        60.       212.      0.        3.
.2         .03        60.       104.
.2         .03        60.       106.      0.        3.        1.
.2         .03        60.       181.      0.        3.
.2         .03        60.       182.      0.        3.        1.
.2         .03        60.       183.
.2         .03        60.       184.      0.        3.        1.
.2         .03        60.       185.      0.        3.
.2         .03        60.       186.      0.        3.        1.
.2         .03        60.       187.
.2         .03        60.       188.      0.        3.        1.
-1.        .04        60.       193.
-1.        .04        60.       194.
1.         .02        60.       205.      0.        3.
-1.        .04        60.       201.
-1.        .04        60.       202.
1.         .02        60.       206.      0.        3.
-1.        .04        60.       203.
-1.        .04        60.       204.
PROC 10
103.       0.         2.        3.        4.        -11.       0.        -.05
1.65     .15
105.      107. F      5      -11.      -12.
END
    
```

X. Literaturverzeichnis

- Abkürzungen:    ANP    Annals of Physics  
                  NC    Nuovo Cimento  
                  NP    Nuclear Physics  
                  PL    Physics Letters  
                  PR    Physical Review  
                  PRL   Physical Review Letters
- BAL68            C. Baltay et al., Columbia-Rochester-Rutgers-Yale Kollabo-  
                  ration, PRL 20, 887 (1968)
- BAR68            J. Bartsch et al., Aachen-Berlin-Cern Kollaboration,  
                  NP B7, 345 (1968)
- BARN69           V.E. Barnes et al., PRL 23, 142 (1969)
- BER65            S.M. Berman und M. Jacob, PR 139, B 1023 (1965)
- BRA68            S. Brandt, Statistische Methoden der Datenanalyse,  
                  BI-Taschenbuch (1968)
- BAS70            E. Bassler, Diplomarbeit Hamburg (1970)
- CAS68            C. Caso et al., Genova-Hamburg-Milano-Saclay Kollaboration,  
                  NC 54 A, 983 (1968)
- CAS69            C. Caso et al., Genua-Milano-Saclay,  
                  Lett. Nuovo Cimento 2, 437 (1969)
- DAN67            J.A. Danysz et al., NC 51 A, 801 (1967)
- DIT67            P. Dittmann, Diplomarbeit Hamburg (1967)
- DRE67            G. Drews, Diplomarbeit Hamburg (1967)

- EDM64 A.R. Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik,  
BI-Taschenbuch (1964)
- FRI66 J.H. Friedman, Berkeley Note P-156 (1966)
- HAN69 P. von Handel, Dissertation Harburg (1969)
- IOF68 M.L. Ioffredo et al., PRL 21, 1212 (1968)
- JAC59 M. Jacob und G.C. Wick, ANP 7, 404 (1959)
- JACK64 J.D. Jackson, NC 34, 1644 (1964)
- KAH65 T. Kahan, Theory of Groups in Classical and Quantum  
Physics, Oliver & Boyd (1965)
- LAM68 J.W. Lamsa et al., PR 166, 1395 (1968)
- LAZ67 P. Lazeyras, private Mitteilung (1967)
- LÜK68 D. Lüke, PHYSIK-Beschreibung, DESY F1/3-68,  
Interner Bericht (1968)
- RAU69 E. Raubold, FAKE-Beschreibung, nicht veröffentlicht
- ROS70 A. Rosenfeld et al., UCRL 8030-Pt.1, Berkeley (19670)
- SCH70 P.K. Schilling, private Mitteilung (1970)
- SCHL70 W.D. Schlatter, private Mitteilung (1970)
- VET66 I.A. Vetlitsky et al., PL 21, 579 (1966)
- WIC62 G.C. Wick, ANP 18, 65 (1962)
- YOS68 G.P. Yost et al., University of Maryland,  
T. Report 849 (1968)
- ZEM64 C. Zemach, PR 133, B 1201 (1964)

## XI. Danksagungen

Diese Arbeit wurde innerhalb der Blasenkammergruppe des II. Instituts für Experimentalphysik angefertigt. Den Leitern, Herrn Prof. M.W. Teucher und Herrn Prof. E. Lohrmann, gilt mein Dank für ihr fortwährendes Interesse an diesem Experiment.

Herrn Privatdozent Dr. P. Söding danke ich besonders für sein ständiges Interesse am Fortgang dieser Arbeit und für viele Vorschläge und klärende Gespräche.

Für die gründliche Einführung in die Blasenkammerphysik und für zahlreiche Diskussionen bin ich Herrn Dr. P. von Handel und Herrn H. Nagel zu großem Dank verpflichtet.

Herrn E. Bassler und Herrn Dr. P. Schilling schulde ich besonderen Dank für ihre Mitarbeit.

Meinen Studienkollegen Herrn H. Fesefeldt und Herrn W.D. Schlatter danke ich für viele interessante Diskussionen.

Mein Dank gilt Frau von Handel, Frau Schmidt und Herrn Hildebrandt für ihre Hilfe bei der Auswertung der Ereignisse.

Frau H. Siegner danke ich besonders für die sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen und Fräulein Schöning für das mühevollen Schreiben der Arbeit.

Dem DESY-Rechenzentrum danke ich für die Bereitstellung der notwendigen Rechenzeit.

Besonders verpflichtet bin ich den Operateuren der IBM 360/75 und IBM 360/65 für ihr stets hilfsbereites Entgegenkommen.

Gleichfalls danke ich den Blasenkammergruppen der Physikalischen Institute in Durham, Genua, Mailand und Saclay für die Zusammenarbeit und die Möglichkeit, ihre Messungen für diese Arbeit verwenden zu dürfen.



Schließlich danke ich den Arbeitsgruppen des CERN-Protonen-Synchrotrons,  
der Strahlführung und der Blasenkammer.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig unter ausschließlicher  
Benutzung der angegebenen Literatur angefertigt zu haben.

## XII. Verzeichnis der Abbildungen

Im folgenden gelten die Abkürzungen:

$\rho^0$ -Band:	$0.64 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^-} < 0.88 \text{ GeV}$
f-Band:	$1.12 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^-} < 1.40 \text{ GeV}$
$\pi(1640)$ -Band:	$1.52 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^+\pi^-} < 1.80 \text{ GeV}$
' $\Delta^{++}$ -Ereignisse':	Ereignisse mit $1.1 \text{ GeV} < M_{p\pi_\ell^+} < 1.45 \text{ GeV}$ und $\cos\theta > 0.97$

Dabei ist:

- $\pi_\ell^+$  das im Laborsystem langsamere  $\pi^+$ ;
- $\theta$  der Erzeugungswinkel, d. h. der Winkel zwischen dem einlaufenden Proton und dem auslaufenden  $p\pi_\ell^+$ -System im Gesamt-Schwerpunktsystem

Von Abb. 5 an sind ' $\Delta^{++}$ -Ereignisse' ausgeschlossen.

Die eingezeichneten Kurven in Abb. 6, 7, 12, 13 geben das Ergebnis der Anpassung unter der Annahme wieder, daß das  $\pi(1640)$  Spin und Parität  $2^-$  hat. Mit den anderen getesteten Hypothesen ergab die Anpassung keine deutlich unterscheidbaren Verteilungen.

Abb. 1)  $M_{\pi^+\pi^+\pi^-}$

Schraffiert ist die Verteilung nach Ausschluß der oben definierten ' $\Delta^{++}$ -Ereignisse' eingezeichnet.

Abb. 2)  $M_{p\pi_\ell^+}$

Schraffiert: Verteilung nach Ausschluß der ' $\Delta^{++}$ -Ereignisse'.

Abb. 3) Zweidimensionale Verteilung  $M_{p\pi^+}$  gegen  $\cos\theta$   
Eingezeichnet ist der kinematische Schnitt zur Definition der  
' $\Delta^{++}$ -Ereignisse'.

Abb. 4)  $M_{\pi^+\pi^-}$  für Ereignisse im  $\pi(1640)$ -Band.  
Für jedes Ereignis sind die beiden möglichen  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen  
eingetragen.  
Schraffiert: Dieselbe Verteilung ohne ' $\Delta^{++}$ -Ereignisse'

Für alle folgenden Verteilungen sind ' $\Delta^{++}$ -Ereignisse' ausgeschlossen.

Abb. 5) Dalitz-Diagramm  $M_{\pi_a^+\pi_b^-}$  gegen  $M_{\pi_b^+\pi_a^-}$  für das  $\pi(1640)$ -Band.  
Jedes Ereignis ist zweimal eingetragen.  
Eingezeichnet sind die kinematischen Grenzen für  $M_{\pi^+\pi^+\pi^-} = 1.52$  GeV  
und 1.8 GeV, weiterhin die  $\rho^0$ - und f-Bänder.

Abb. 6)  $M_{\pi^+\pi^+\pi^-}$   
a) Ereignisse, bei denen mindestens eine  $\pi^+\pi^-$ -Masse im  
 $\rho^0$ -Band liegt.  
b) Ereignisse, bei denen mindestens eine  $\pi^+\pi^-$ -Masse im f-Band  
liegt.

Abb. 7)  $M_{\pi^+\pi^+\pi^-}$   
a) Ereignisse, bei denen mindestens eine  $\pi^+\pi^-$ -Masse im  $\rho^0$ -Band,  
aber keine im f-Band liegt.  
b) Ereignisse, bei denen mindestens eine  $\pi^+\pi^-$ -Masse im f-Band,  
aber keine im  $\rho^0$ -Band liegt.  
c) Ereignisse, bei denen keine  $\pi^+\pi^-$ -Masse im  $\rho^0$ - oder  
f-Band liegt.

Abb. 8) Dichte des Dalitzdiagramms  $M_{\pi_1^+\pi^-}^2$  gegen  $M_{\pi_2^+\pi^-}^2$  für Spin-Parität  $J^P = 1^+$ . Die Verteilungen sind für  $M_{\pi^+\pi^+\pi^-} = 1.7 \text{ GeV}$  dargestellt.

a) ... f)

Es sind die Verteilungen der Größen  $h$  in Gleichung (V.7) für den jeweils kleinsten durch Drehimpuls- und Paritäts-erhaltung erlaubten Bahndrehimpuls  $L$  dargestellt. Die Verteilungen sind mit einem willkürlichen Faktor multipliziert, der jedoch für die sechs Abbildungen a ... f gleich gewählt worden ist.

g)  $W((1.7 \text{ GeV})^2, M_{\pi_1^+\pi^-}^2, M_{\pi_2^+\pi^-}^2)$  aus Gleichung (V.7) mit den durch Anpassung bestimmten Parametern  $a_p, a_f, a_s$  (vgl. Tabelle 4 in Kapitel VII), d. h. angepaßte Verteilung für  $\pi(1640)$ -Ereignisse (ohne Untergrund) mit einer  $3\pi$ -Masse von 1.7 GeV. Die Normierung von  $W$  ist in der Abbildung willkürlich.

Es bedeuten:	Symbol	Gewicht $g$
	-	$g \leq -10$
	I	$-10 < g \leq -9$
	II	$-9 < g \leq -8$
	G	$-8 < g \leq -7$
	F	$-7 < g \leq -6$
	E	$-6 < g \leq -5$
	D	$-5 < g \leq -4$
	C	$-4 < g \leq -3$
	B	$-3 < g \leq -2$
	A	$-2 < g \leq -1$
	*	$-1 < g < 0$
	.	$0 \leq g < 1$
	1	$1 \leq g < 2$
	.	.
	.	.
	9	$9 \leq g < 10$
	+	$10 \leq g$

Abb. 9) Verteilungen wie in Abbildung 8) für  $J^P = 2^-$ .

Abb.10) Verteilungen wie in Abbildung 8) für  $J^P = 3^+$ .

Abb.11) Verteilungen wie in Abbildung 8) für  $J^P = 2^+$ .

Statt des 'direkten'  $\pi^+\pi^+\pi^-$ -Kanals ist der Kanal  $\pi(1640) \rightarrow f\pi^+$  mit dem höheren Bahndrehimpuls  $L = 3$  dargestellt. Die Indizes  $f_1, f_3$  stehen für den  $f\pi^+$ -Kanal mit  $L = 1$  bzw.  $L = 3$ .

Abb.12)  $M_{\pi^+\pi^+\pi^-}$  für  $1.3 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^+\pi^-} < 2.1 \text{ GeV}$

Die durchgezeichnete Kurve gibt das Ergebnis der Anpassung wieder. Die weiteren Kurven geben den Gesamtbeitrag des Untergrundes sowie die Anteile der einzelnen Untergrundprozesse. Die Numerierung ist die gleiche wie in Kapitel VI.b) sowie in der Tabelle 3 in Kapitel VII.

Es bedeuten:

Prozeß 1:	$A_2 \rightarrow \rho^0 \pi^+$
2:	$A_2 \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$
3:	$f\pi^+$ -Untergrund
4:	$\rho^0 \pi^+$ -Untergrund
5:	$\pi^+\pi^+\pi^-$ -Untergrund

Abb.13)  $M_{\pi^+\pi^-}$

Für jedes Ereignis sind beide  $\pi^+\pi^-$ -Kombinationen eingetragen.

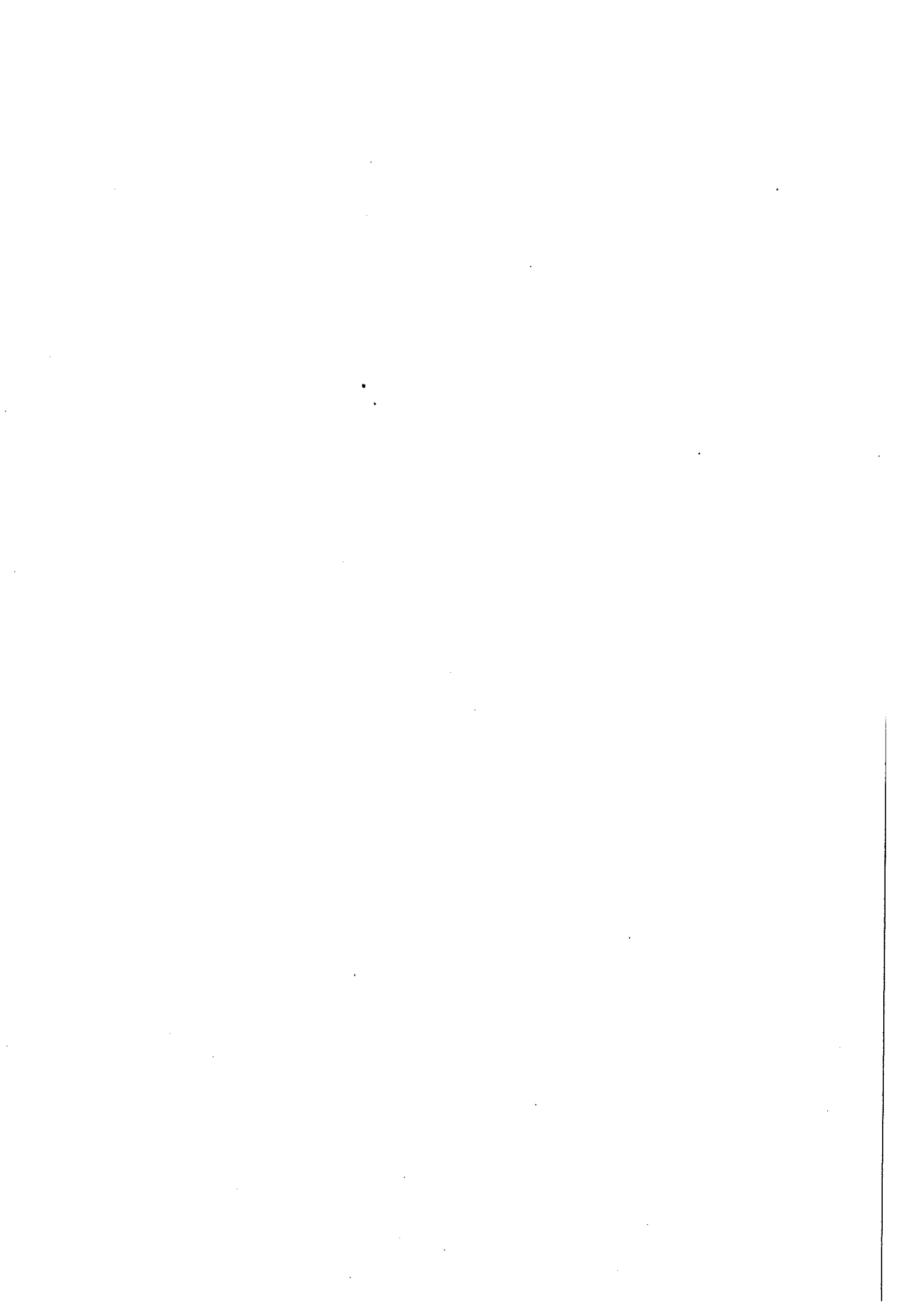
a) Ereignisse mit  $1.3 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^+\pi^-} < 2.1 \text{ GeV}$

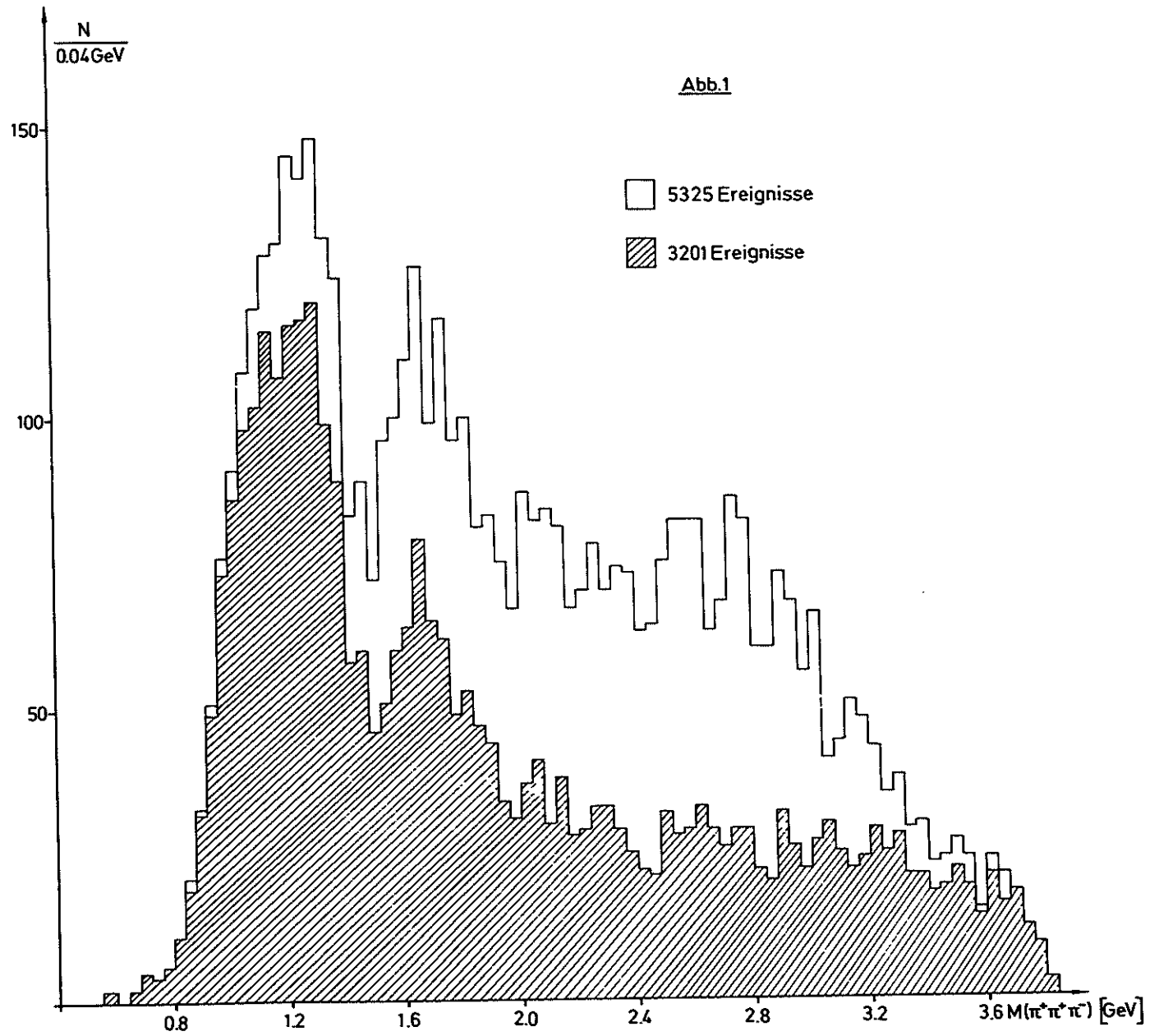
(d. h. alle für die Anpassung verwendeten Ereignisse)

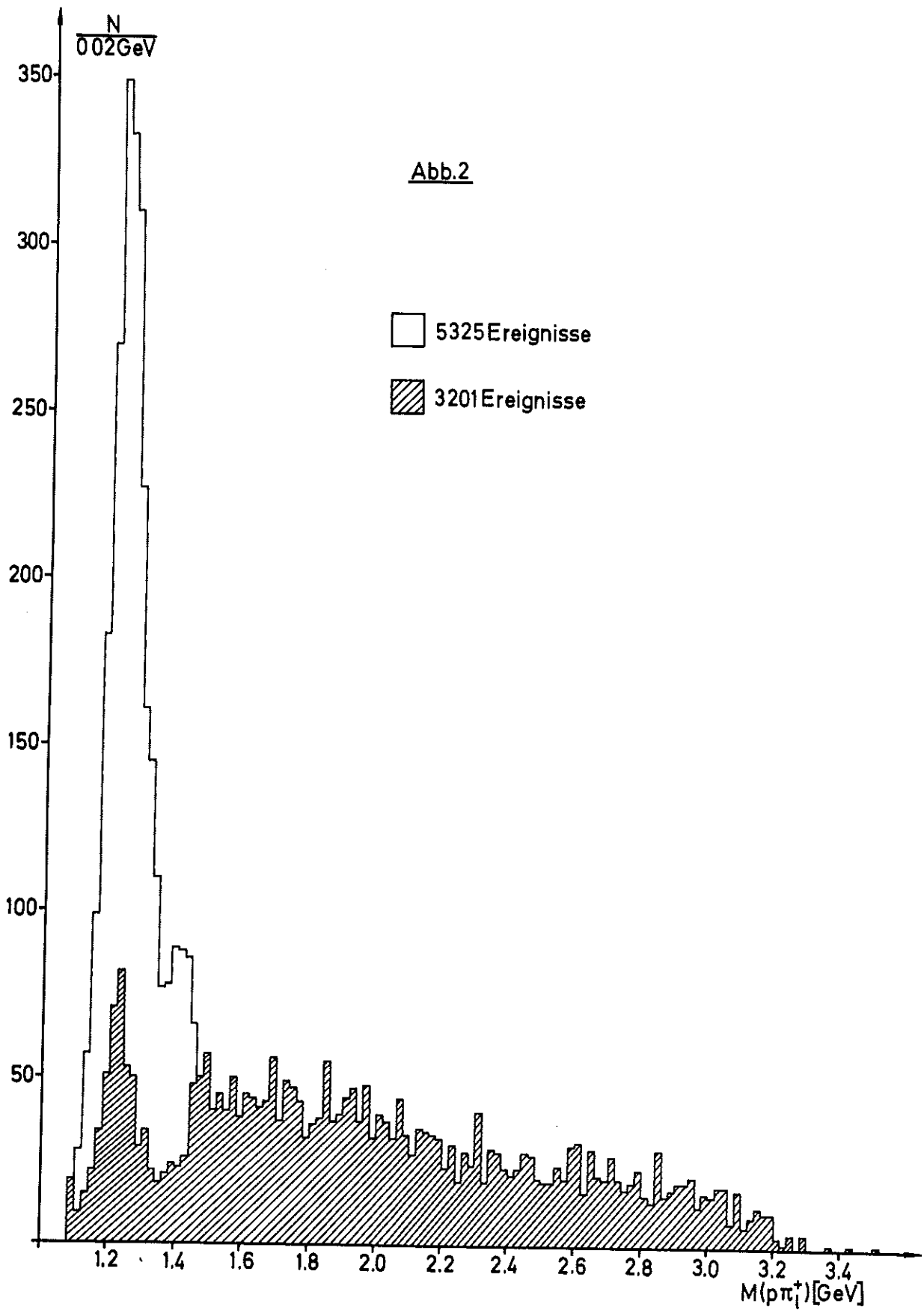
b) Ereignisse mit  $1.52 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^+\pi^-} < 1.8 \text{ GeV}$  ( $\pi(1640)$ -Band)

c) Ereignisse mit  $1.3 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^+\pi^-} < 1.52 \text{ GeV}$

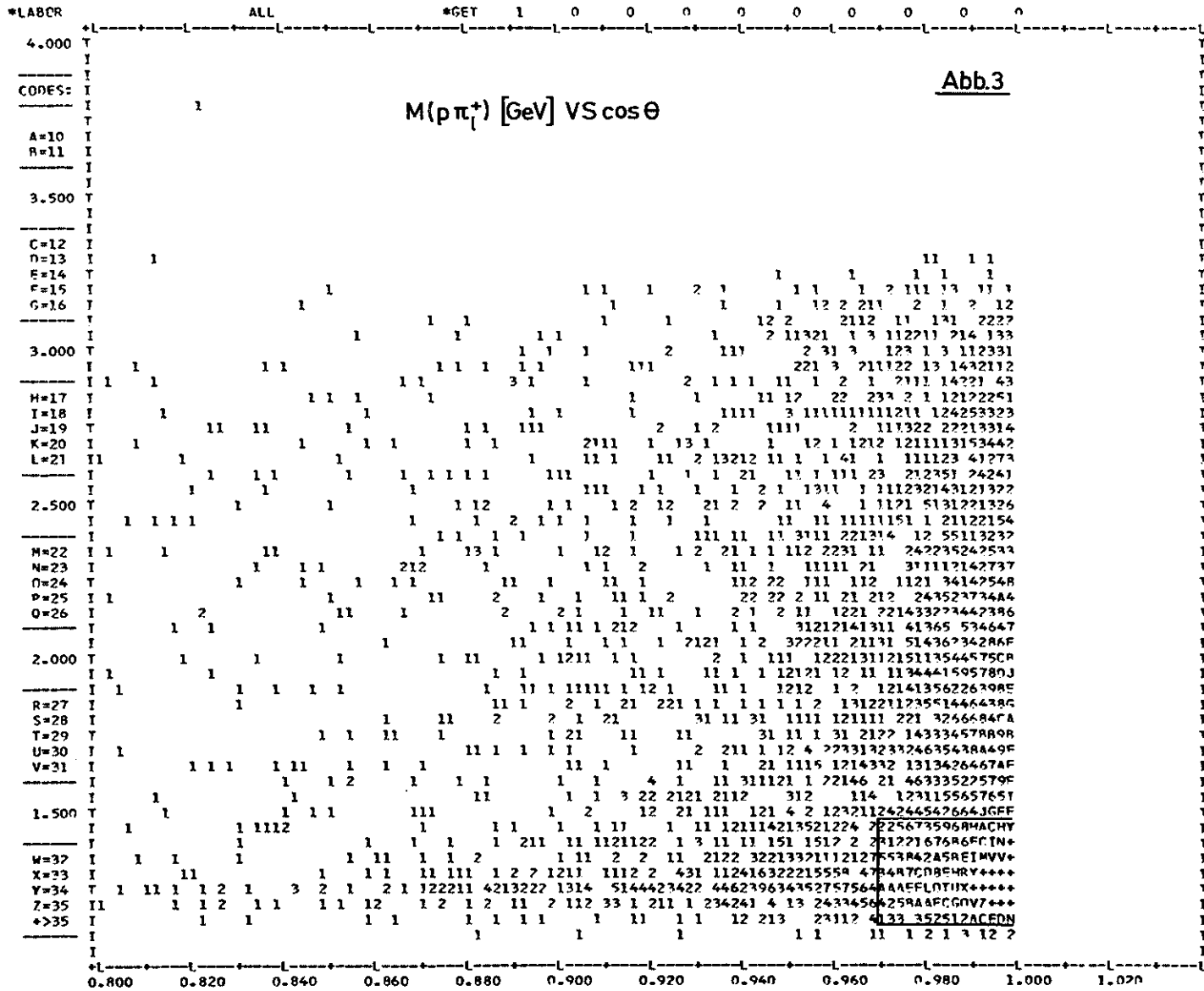
d) Ereignisse mit  $1.8 \text{ GeV} < M_{\pi^+\pi^+\pi^-} < 2.1 \text{ GeV}$





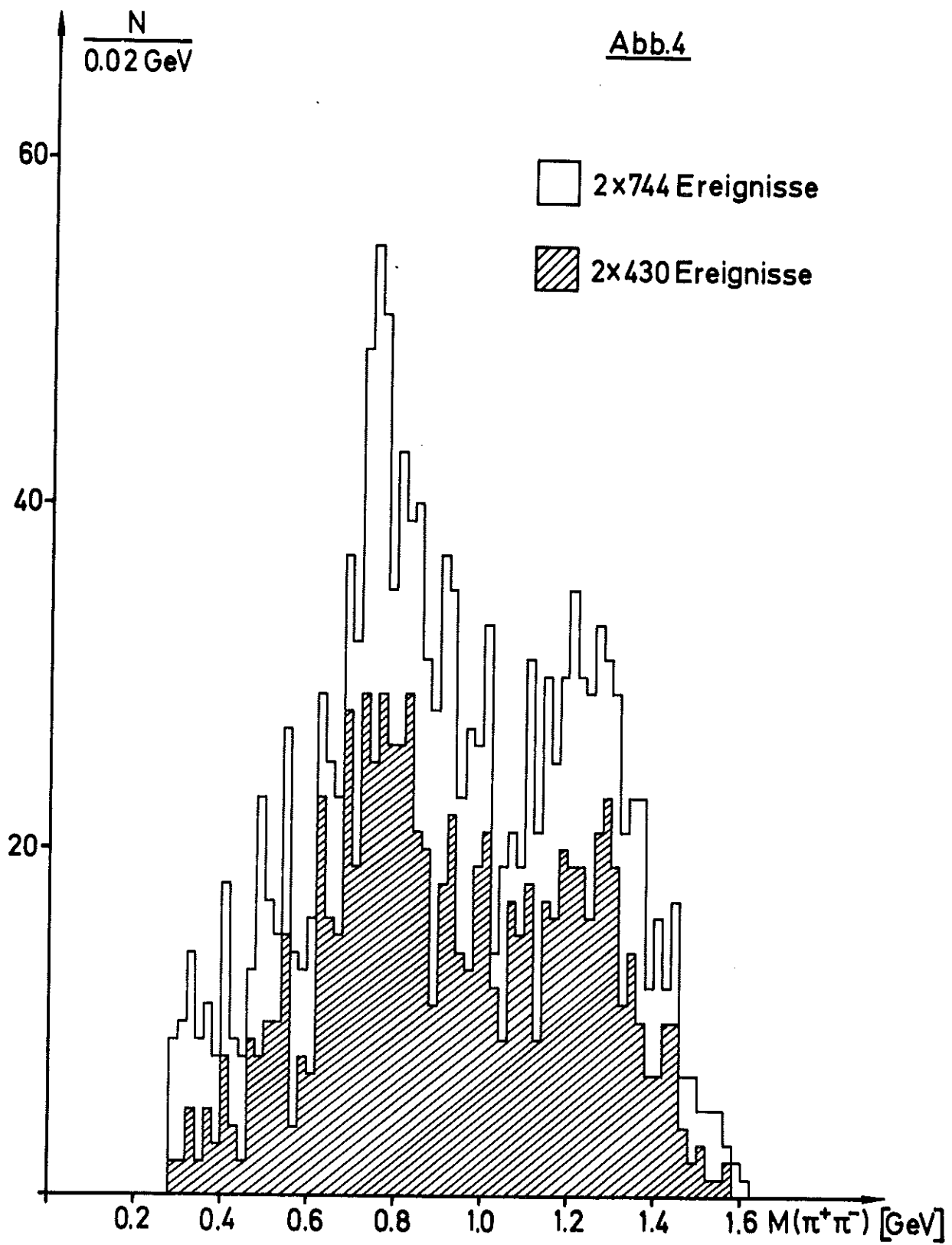


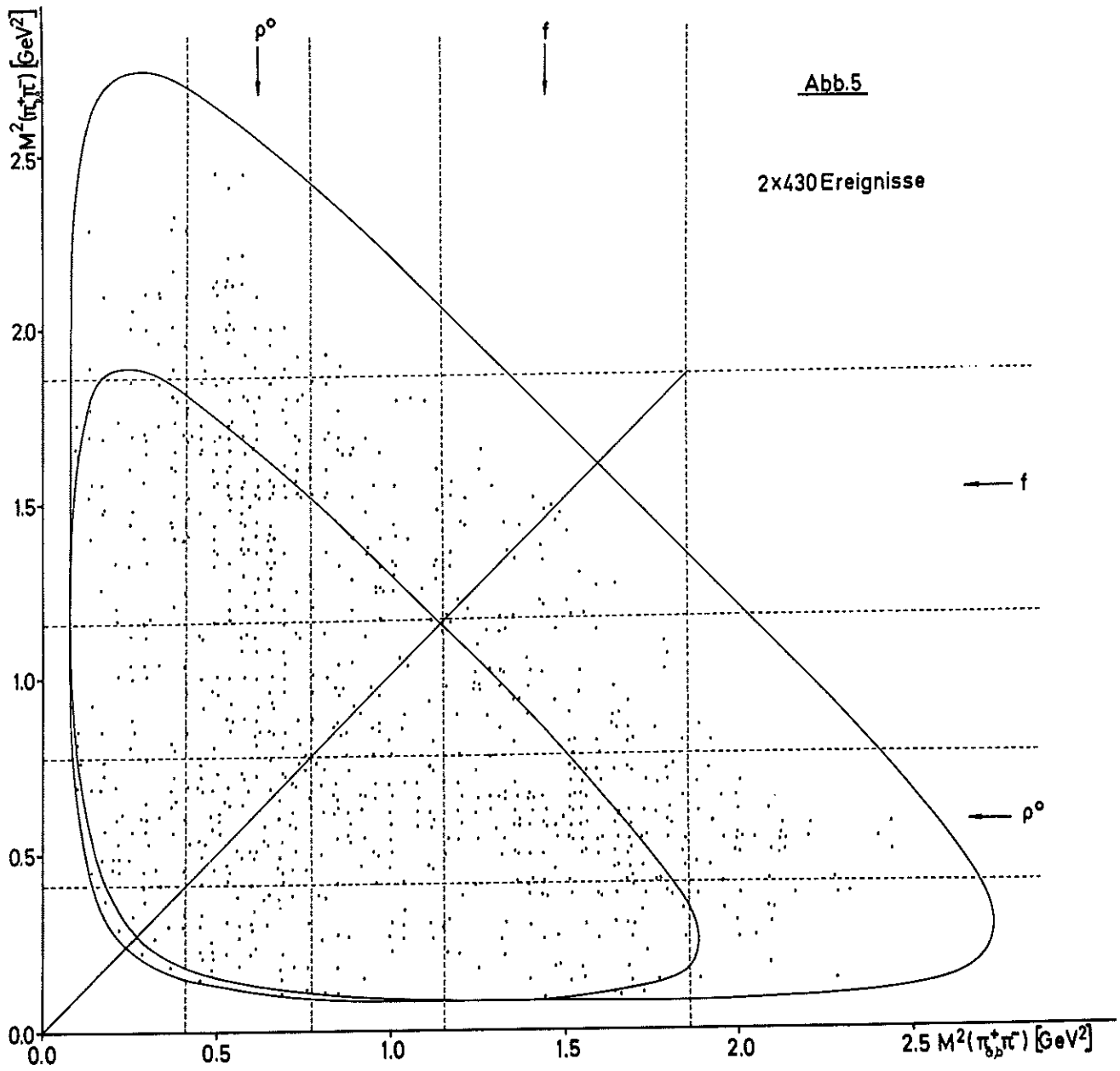


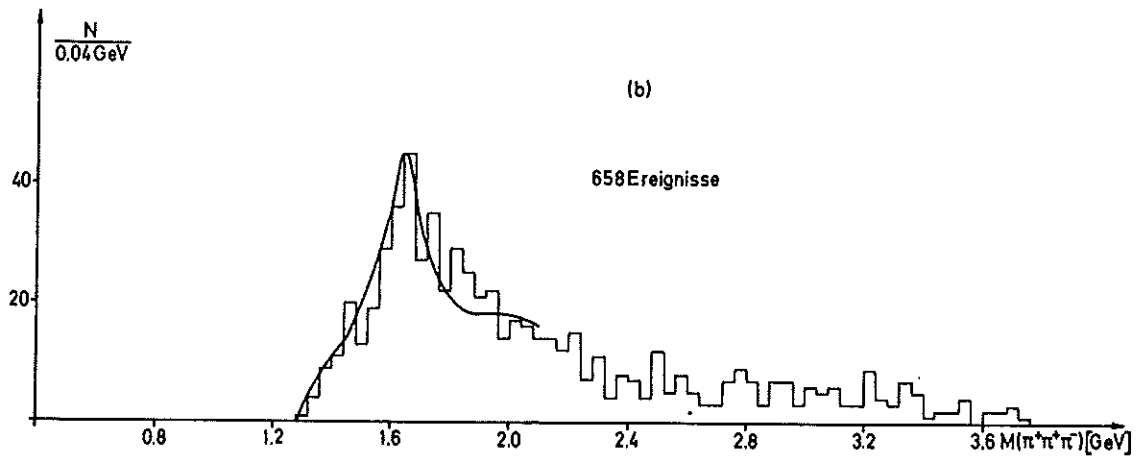
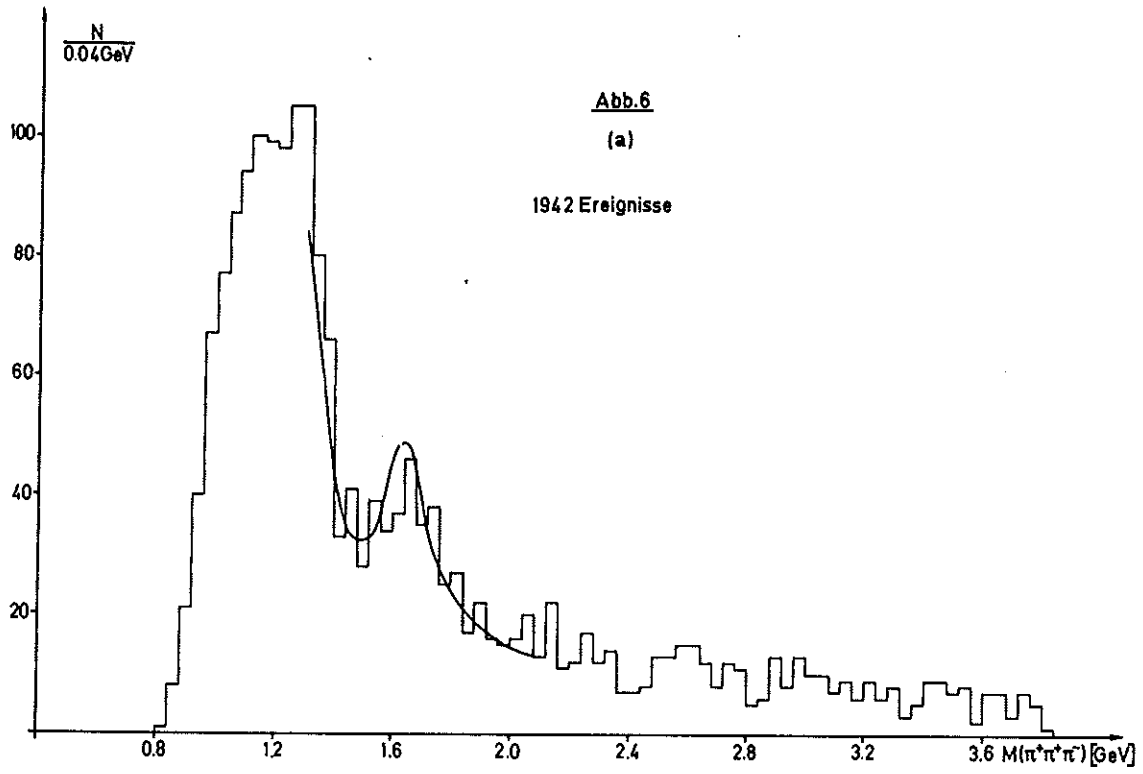


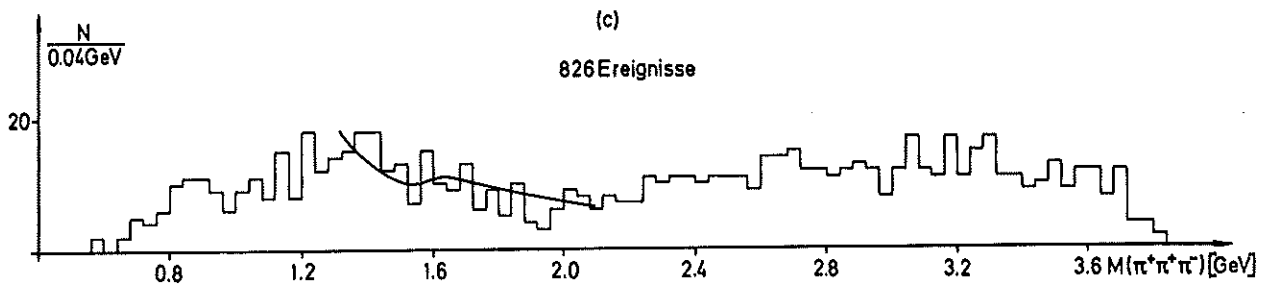
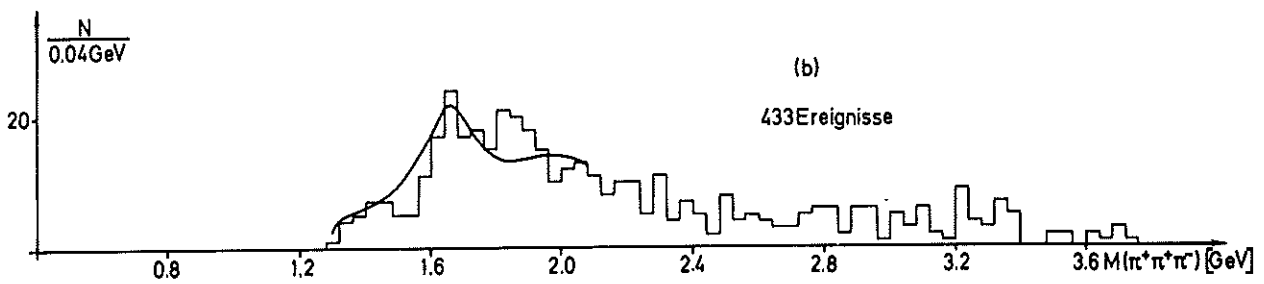
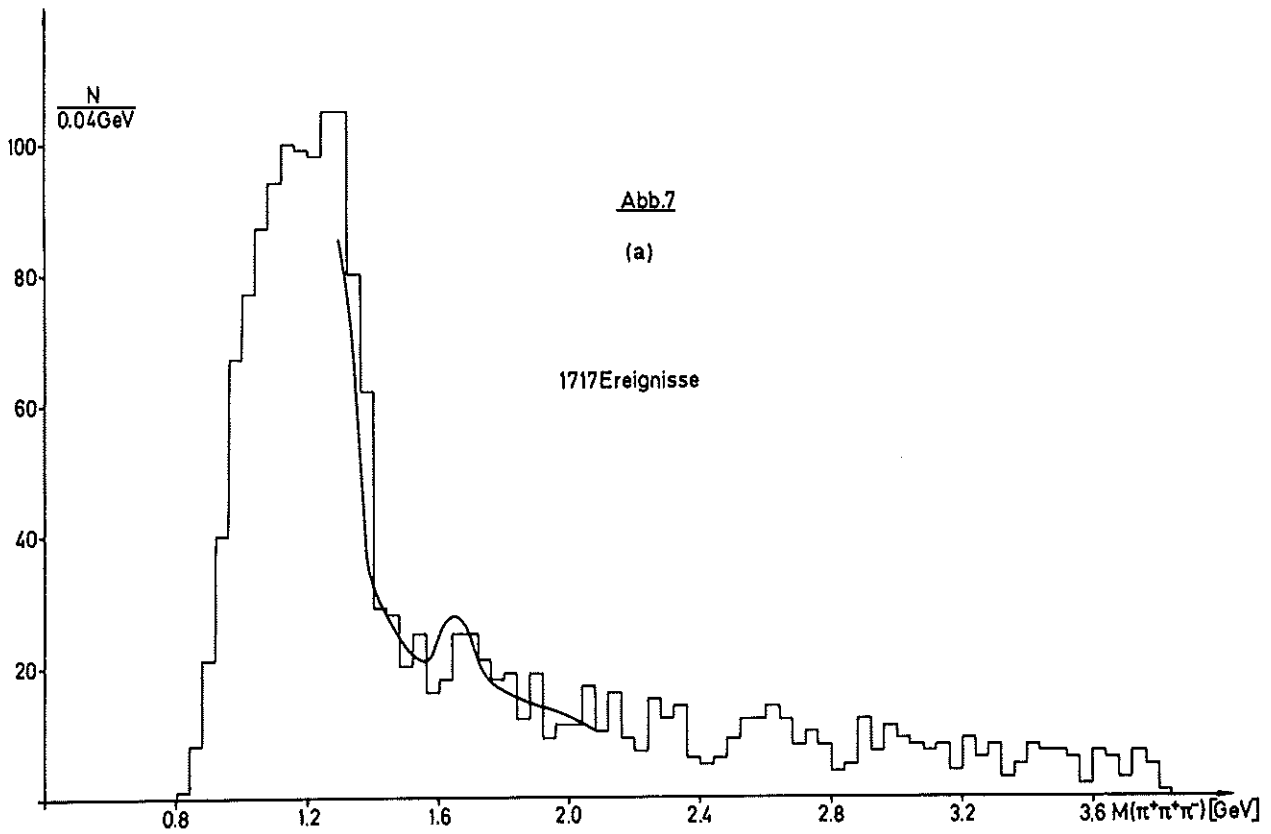
MASSE VS ERZEUGUNGSW P.PI+L

Abb.4



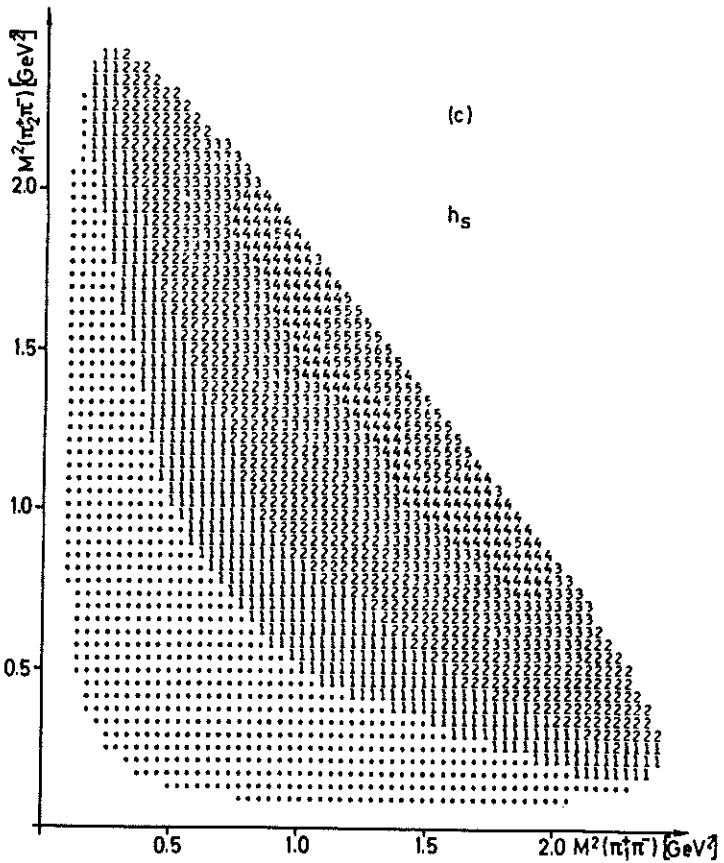
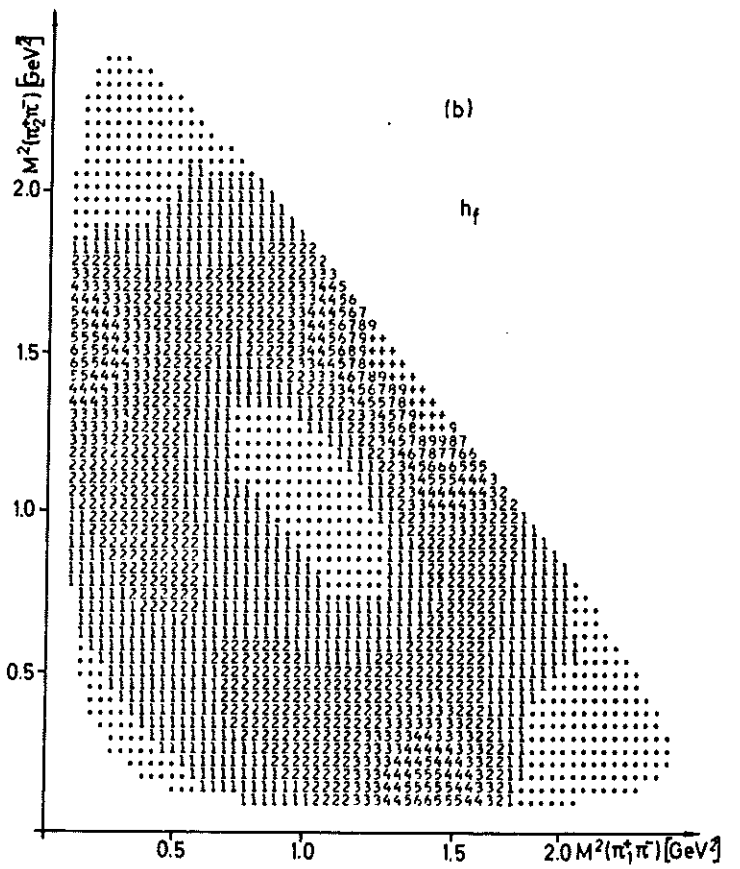
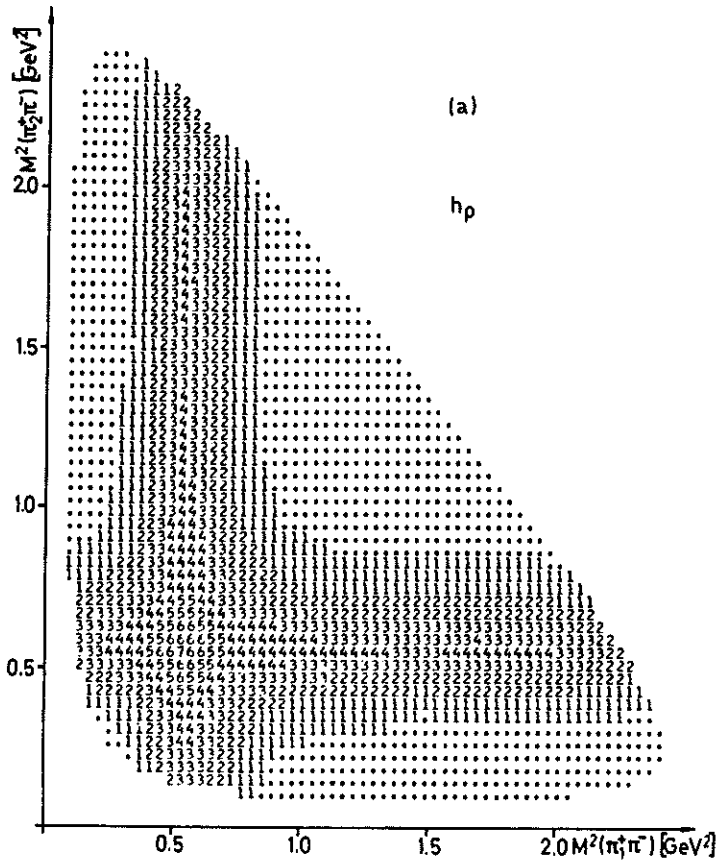






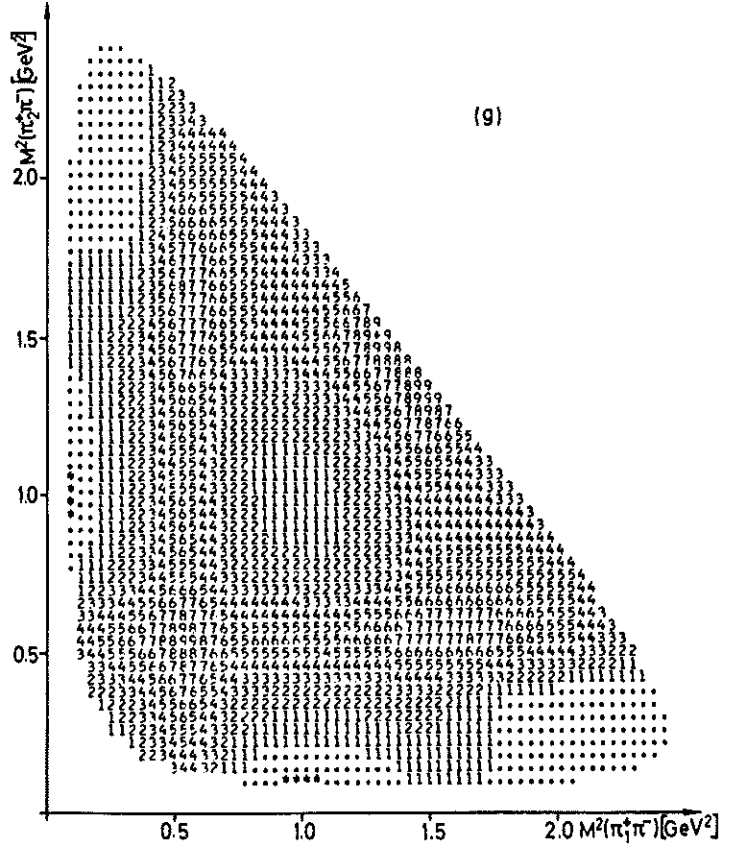
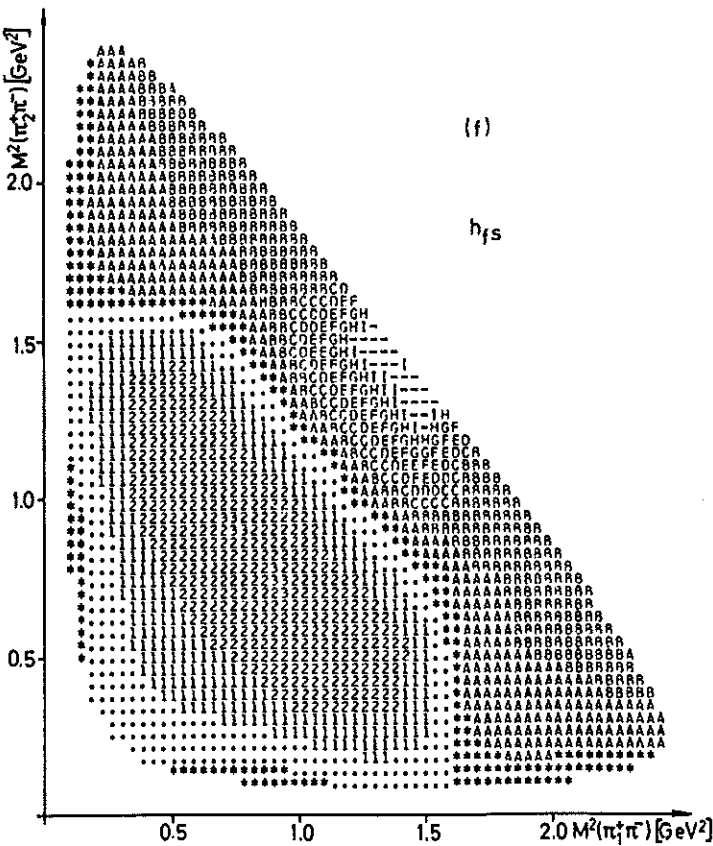
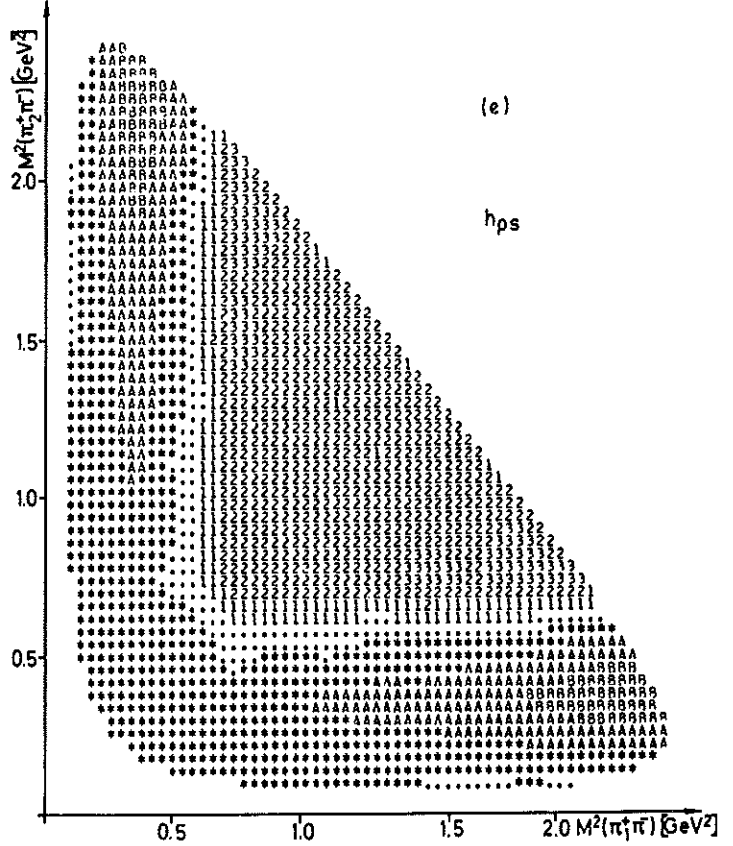
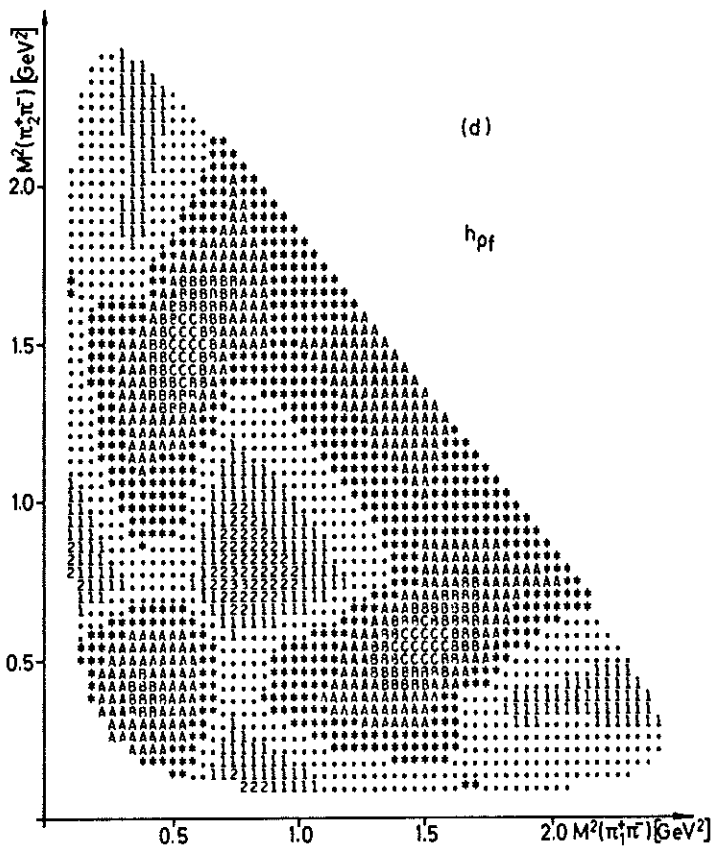
$J^P = 1^+$

Abb. 8



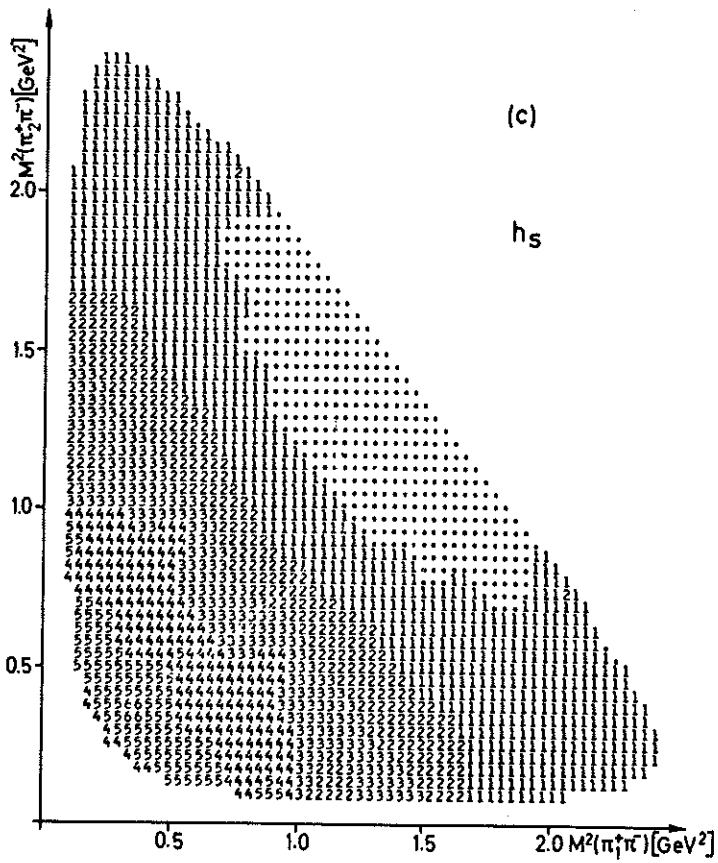
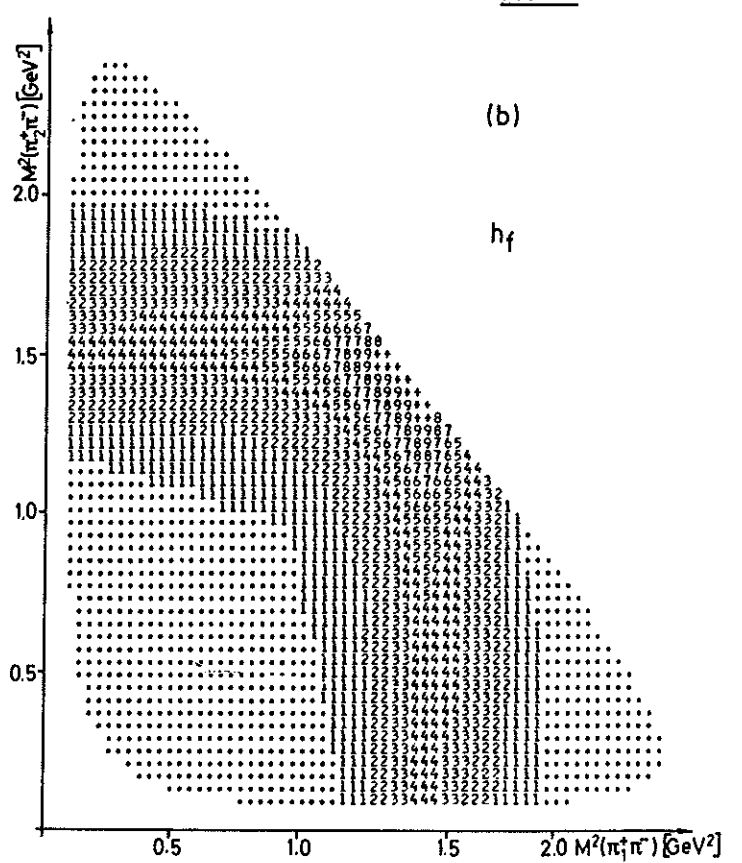
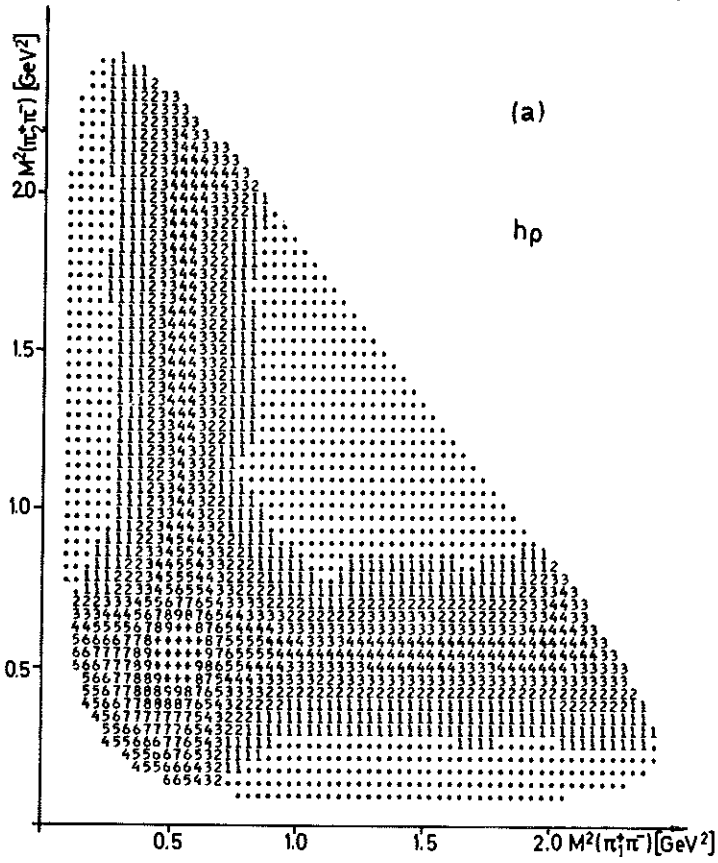
$J^P = 1^+$

Abb.8



$J^P = 2^-$

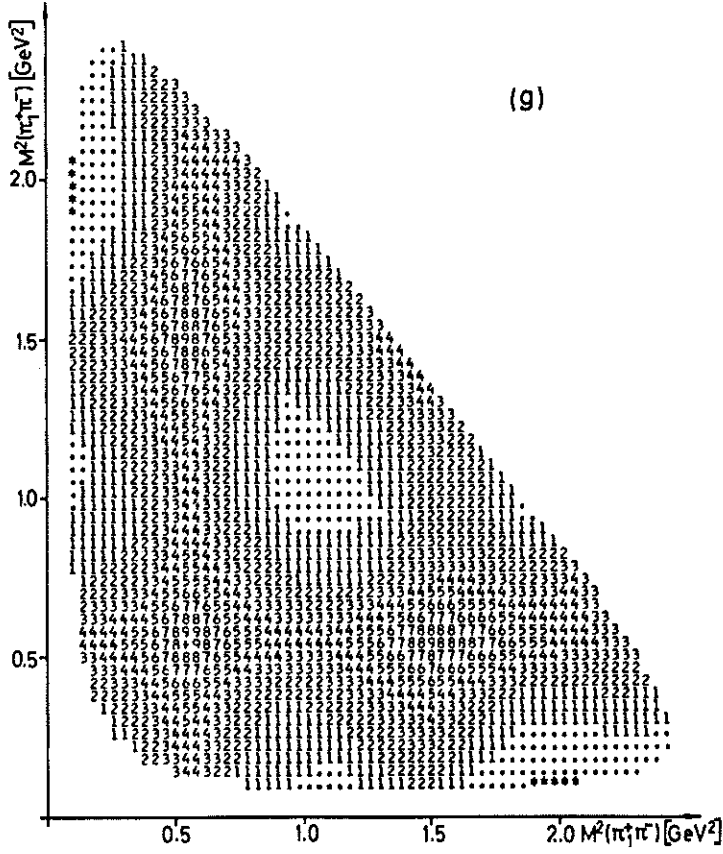
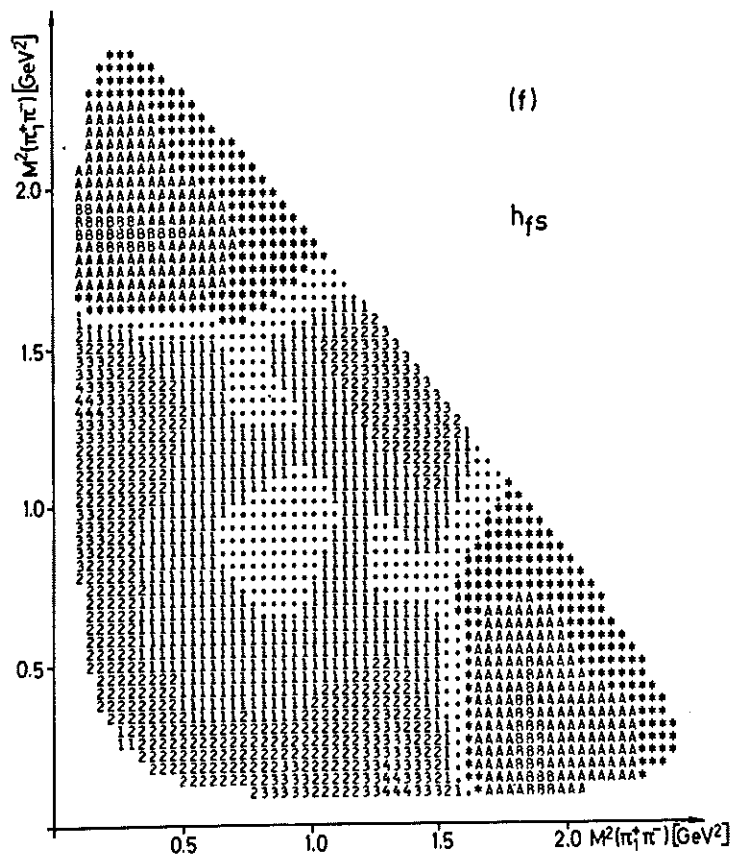
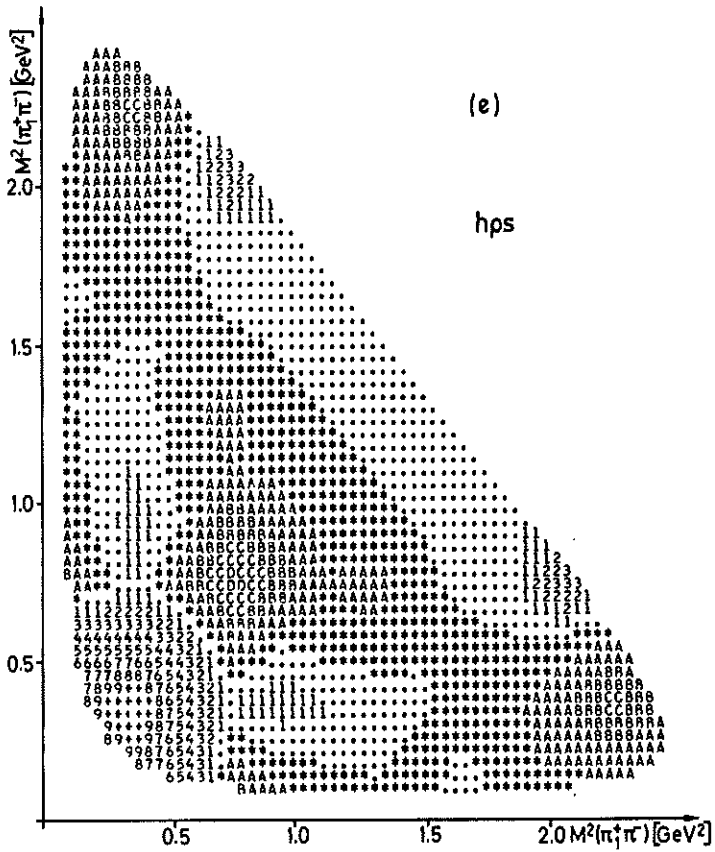
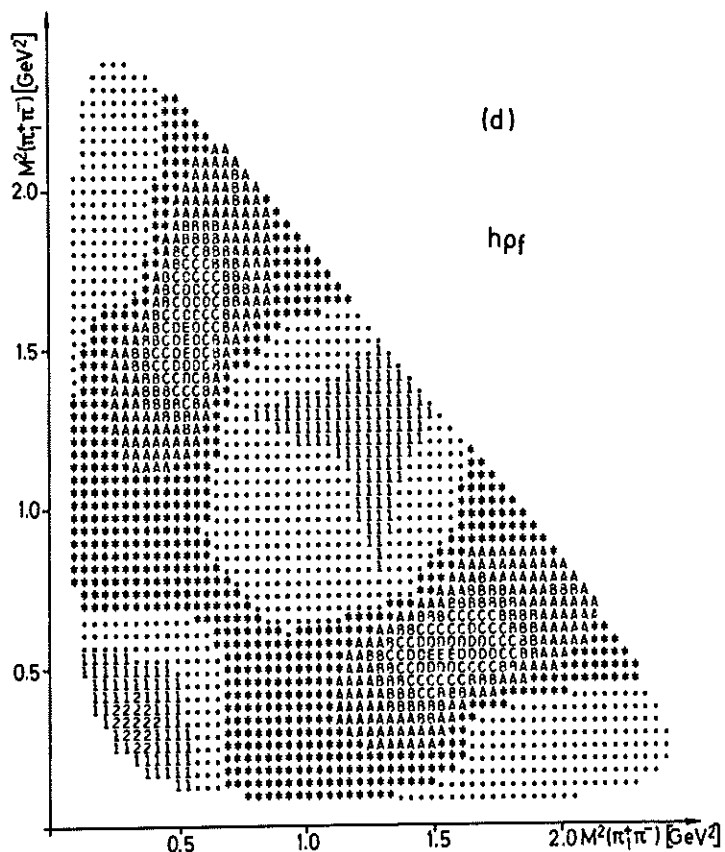
Abb.9





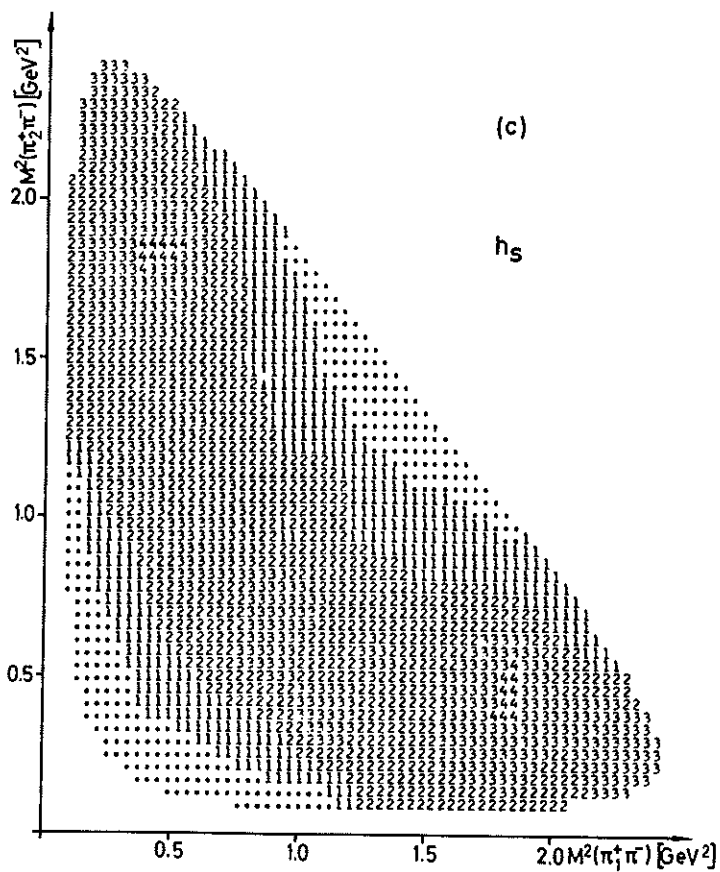
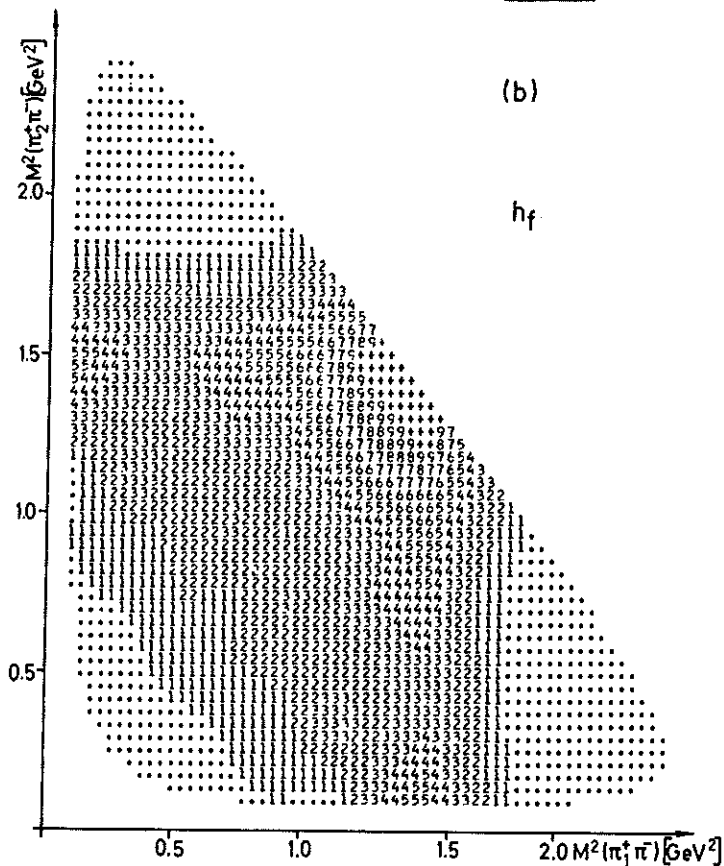
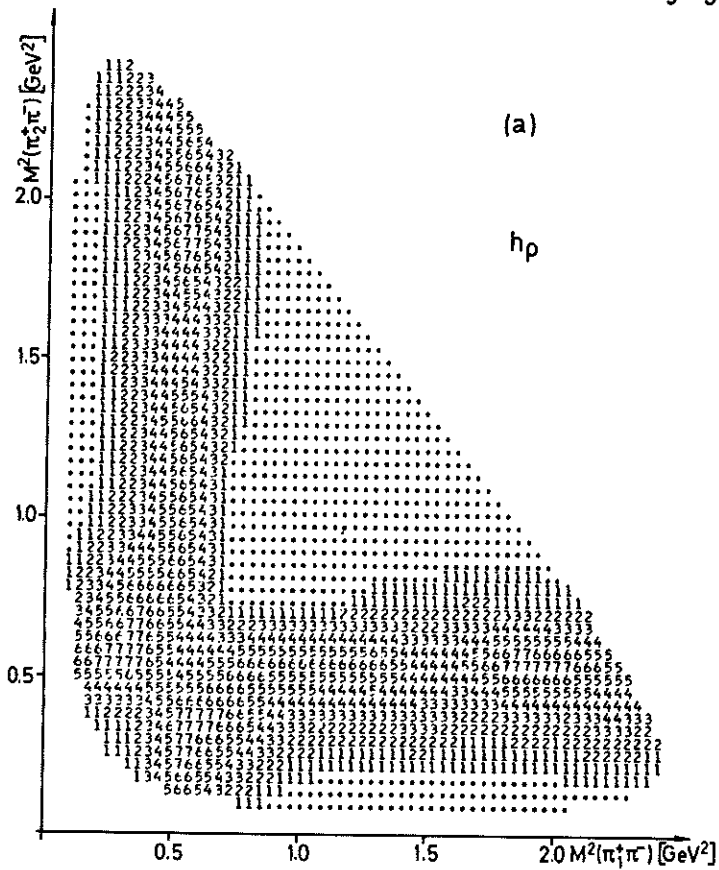
$J^P = 2^-$

Abb.9



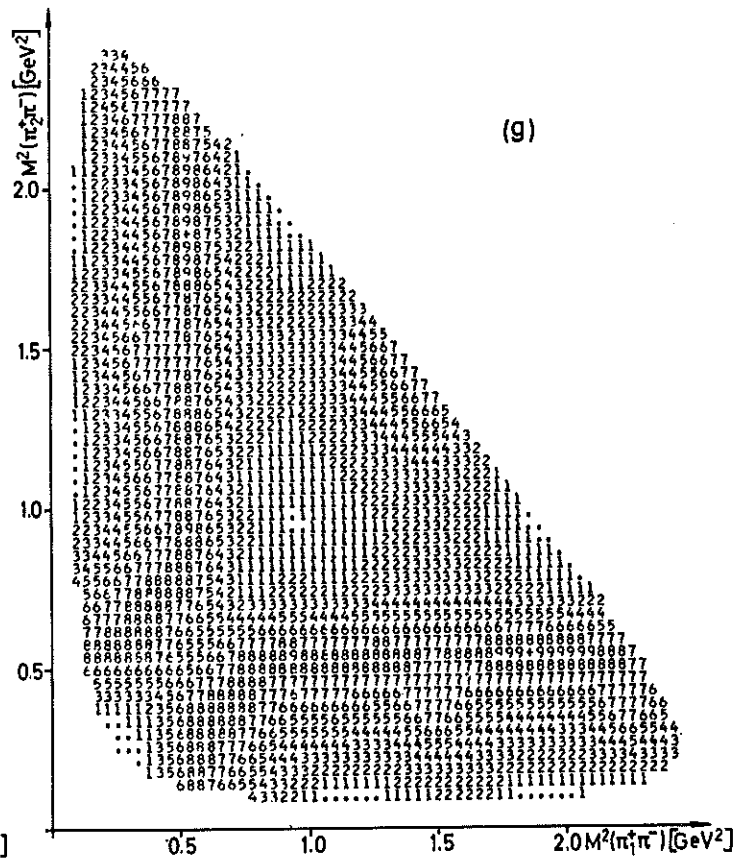
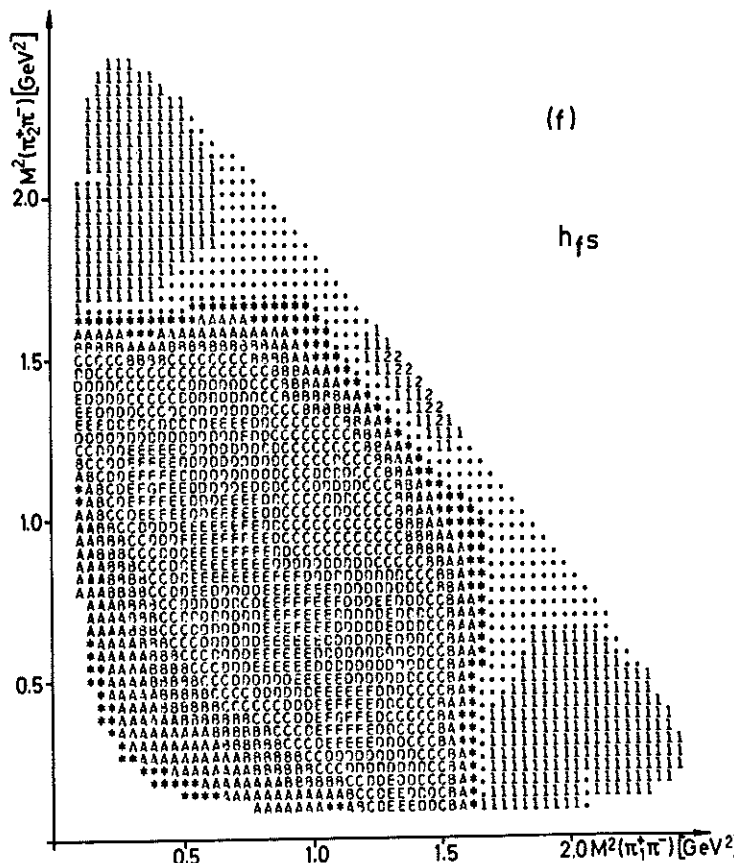
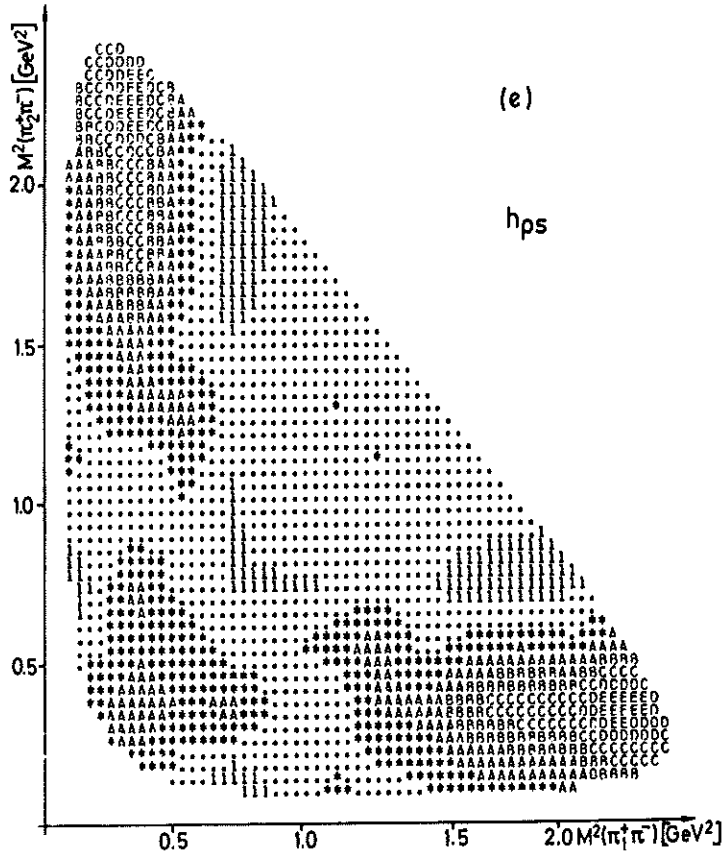
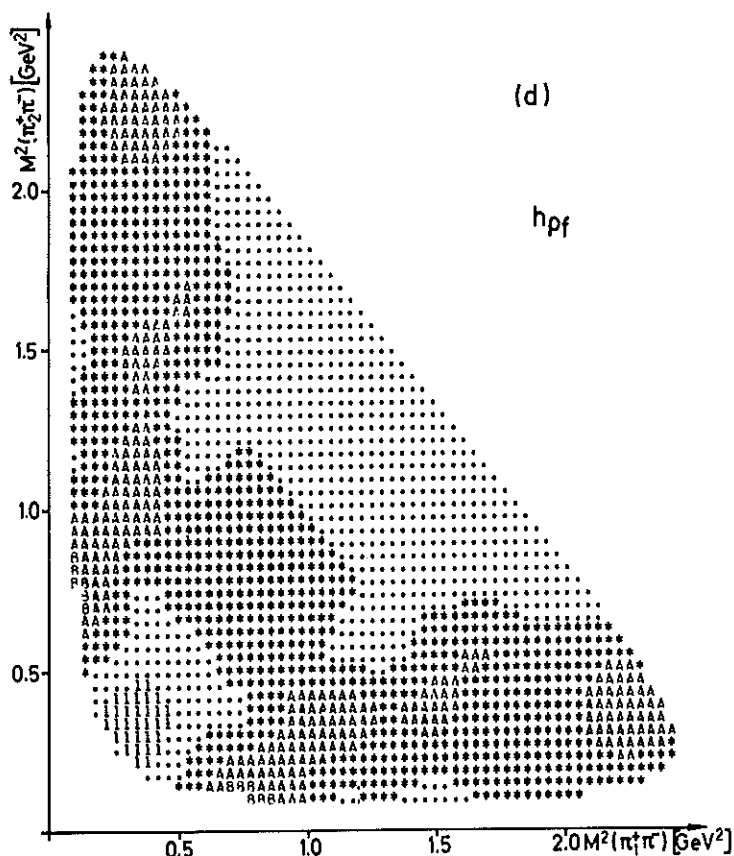
$J^P = 3^+$

Abb.10



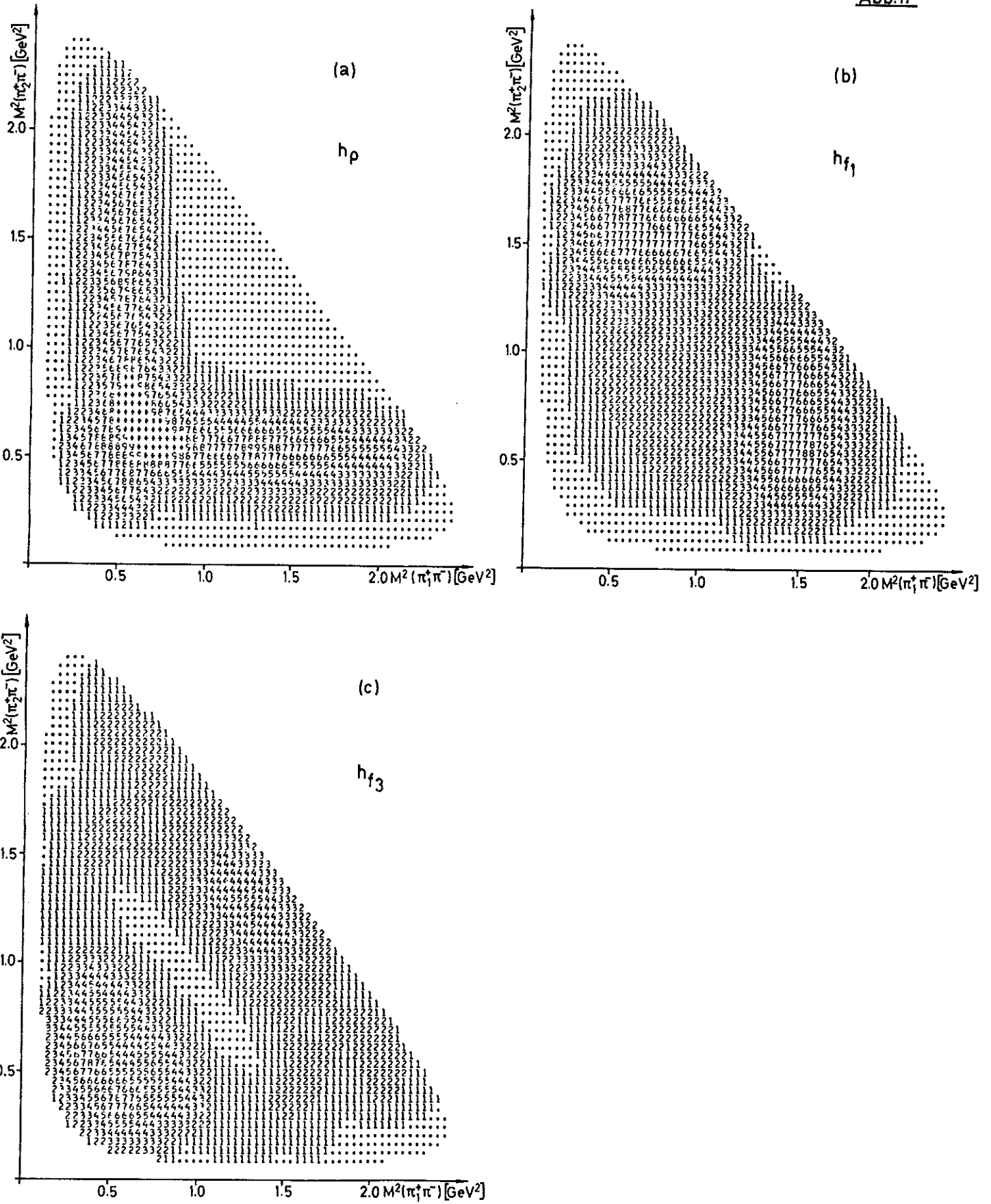
$J^P=3^+$

Abb.10



$J^P = 2^+$

Abb. 11



$J^P = 2^+$

Abb.11

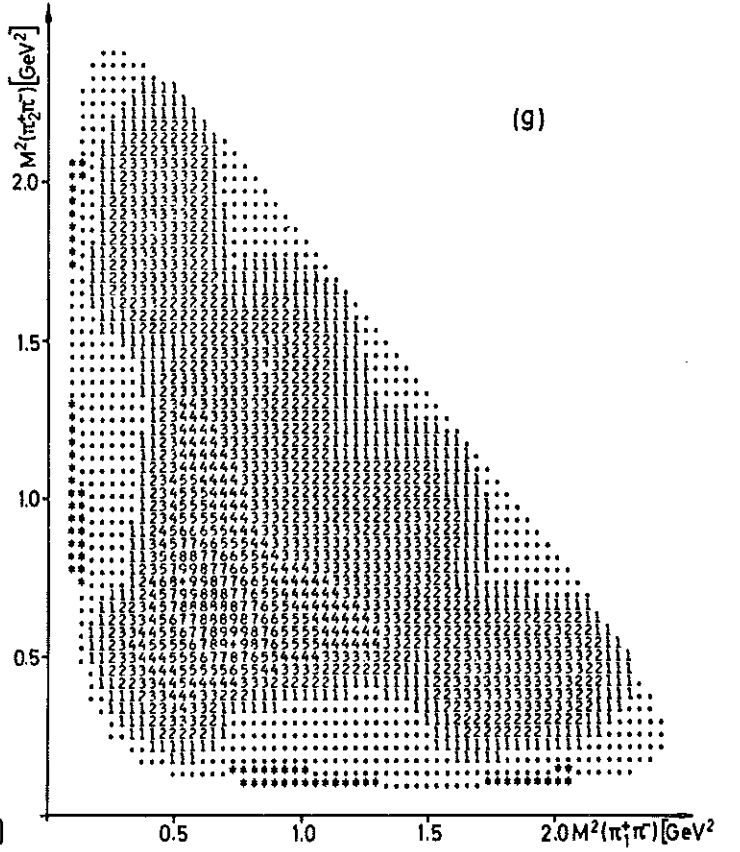
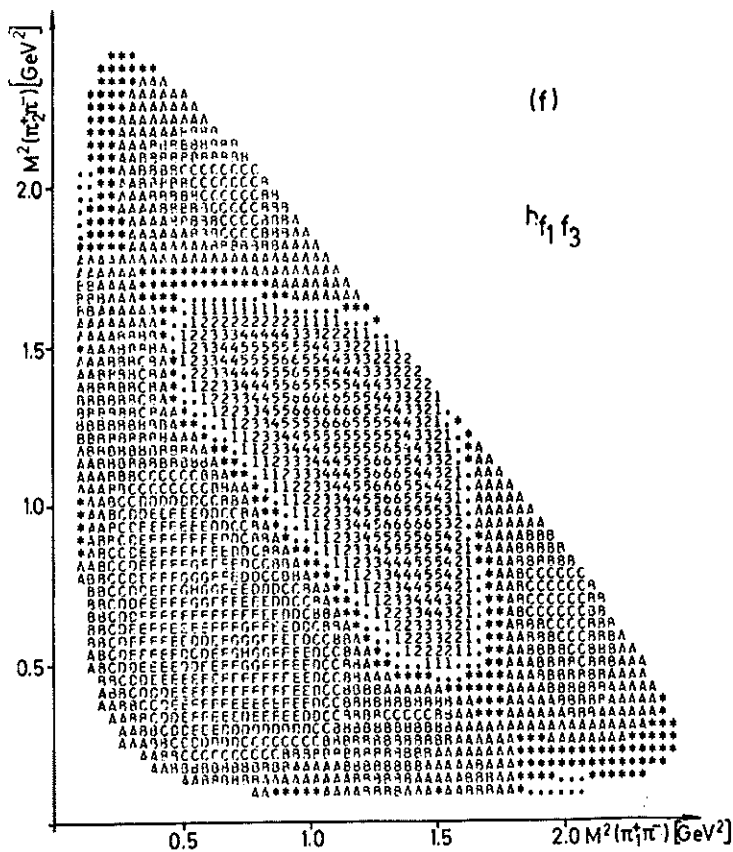
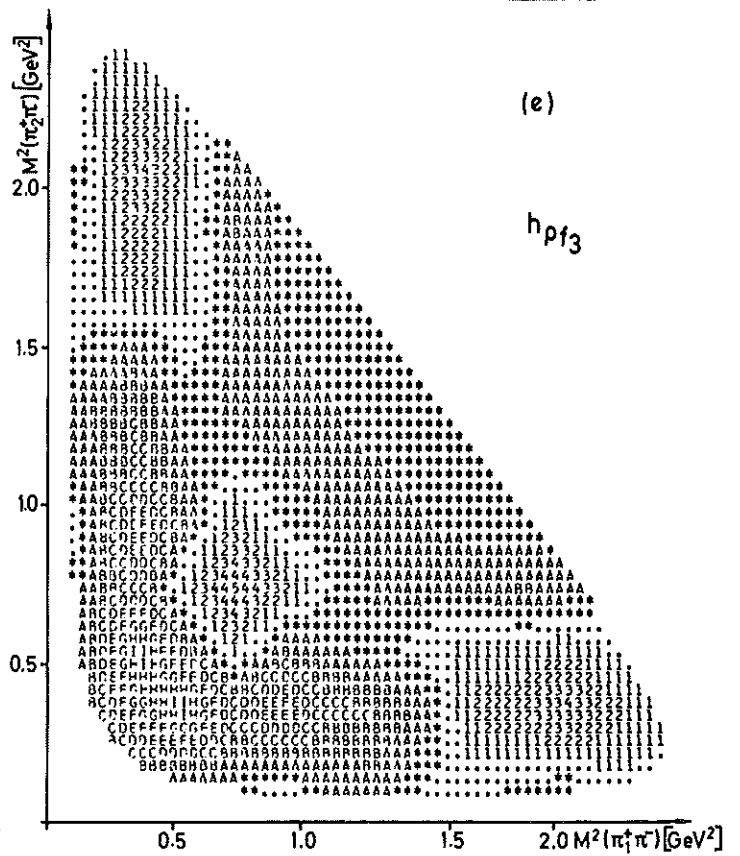
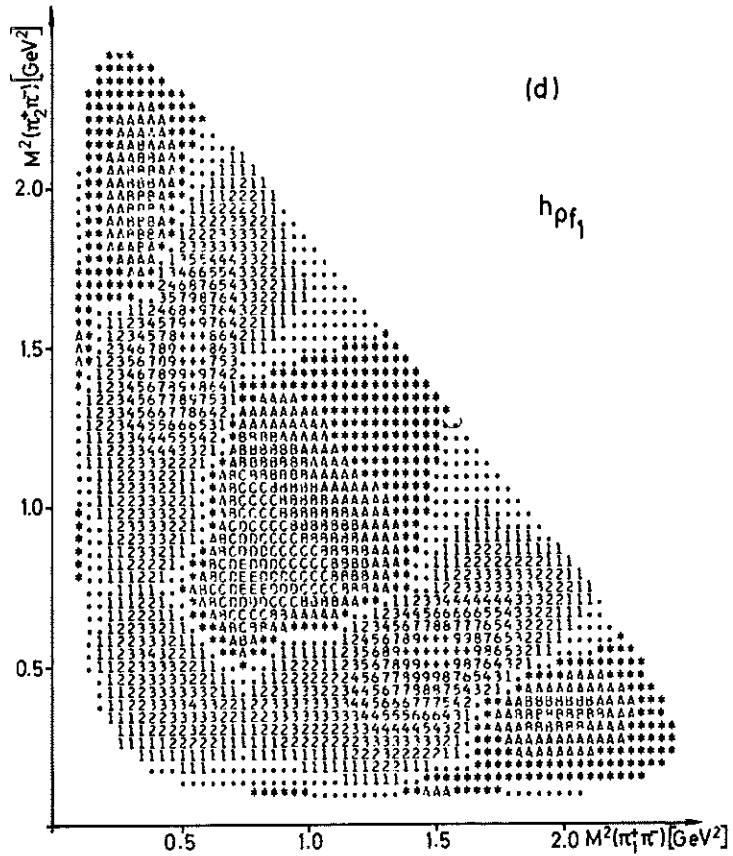
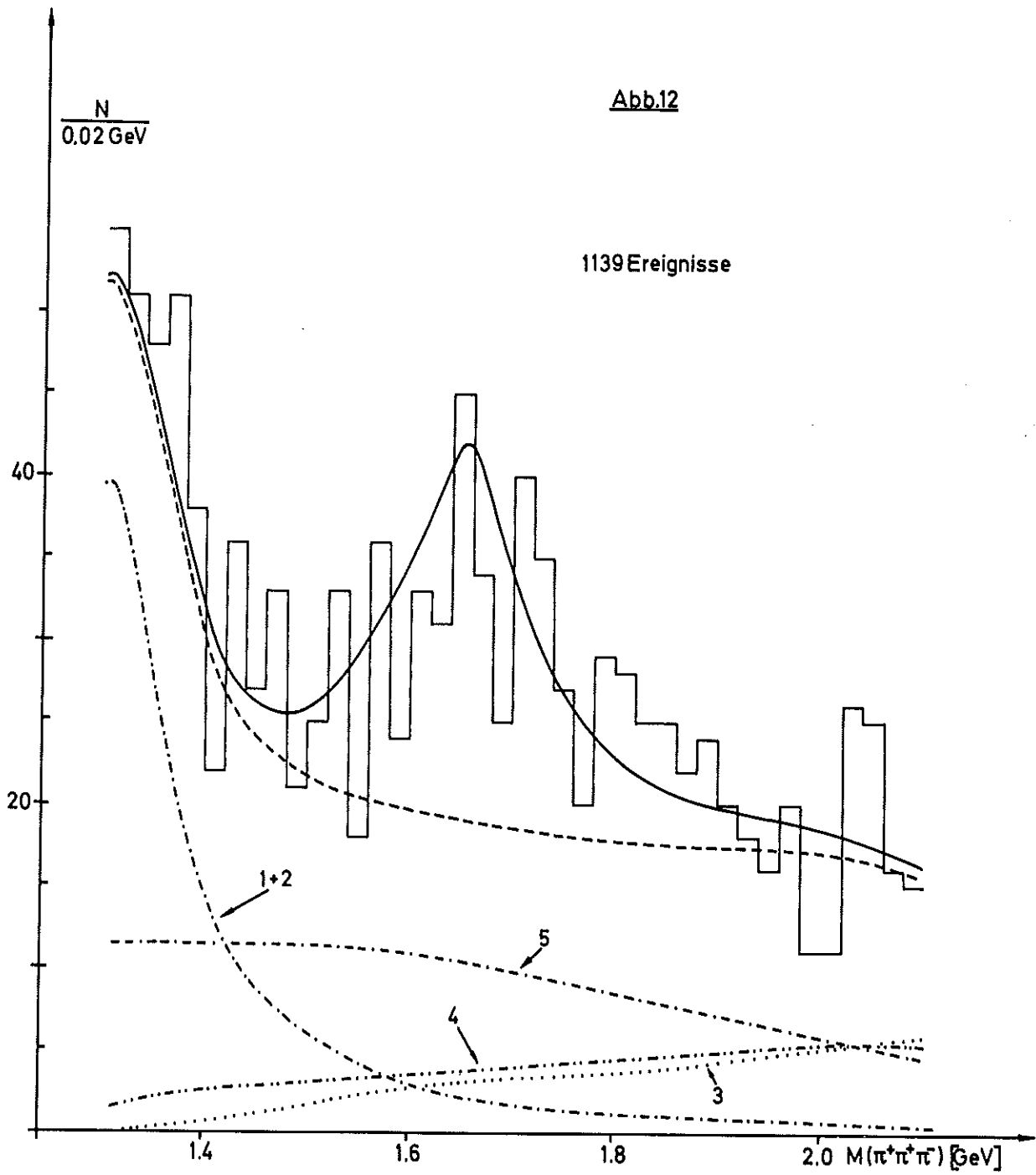


Abb.12



-----Summe der Untergrundprozesse 1...5

Prozess 1+2 .....  $A_2 \rightarrow \begin{cases} \rho^0 \pi^+ \\ \pi^+ \pi^+ \pi^- \end{cases}$   
 Prozess 3 .....  $f \pi^+$ - Untergrund  
 Prozess 4 .....  $\rho^0 \pi^+$ -Untergrund  
 Prozess 5 .....  $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ -Untergrund

