

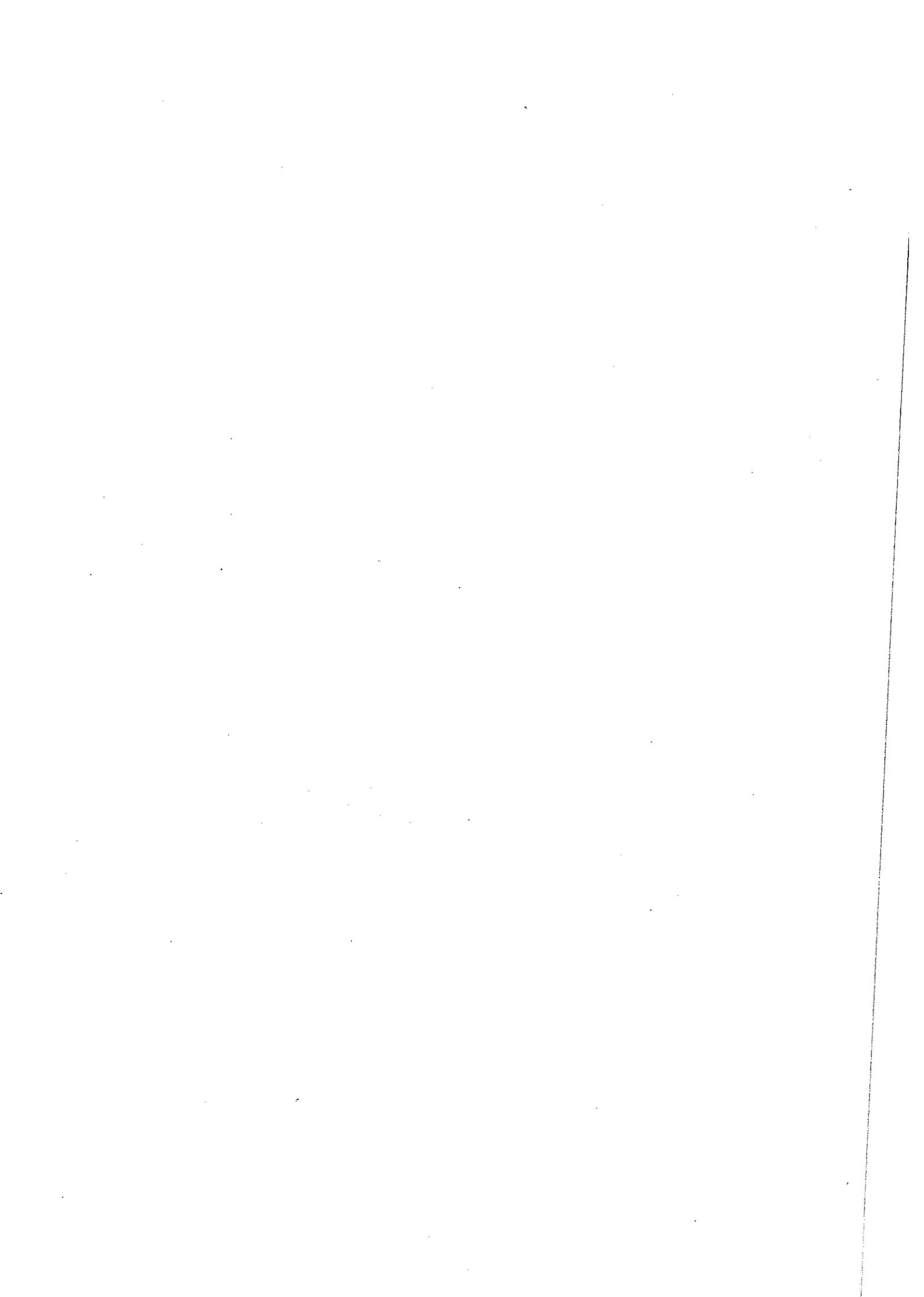
Interner Bericht  
DESY F1-72/5  
September 1972

SPIN-PARITÄTSUNTERSUCHUNG DES 3-PION-SPEKTRUMS IM A3-BEREICH

von

DESY Bibliothek  
1972

Erich Bassler  
II. Institut für Experimentalphysik der Universität Hamburg



Spin-Paritätsuntersuchung des 3-Pion-Spektrums  
im A3-Bereich<sup>+</sup>

von

Erich Bassler

II. Institut für Experimentalphysik der Universität Hamburg

<sup>+</sup> Die vorliegende Arbeit entstand als Dissertation im Rahmen eines Experimentes der Durham - Genua - Hamburg - Mailand - Saclay - Kollaboration am CERN-Protonen Synchrotron in Genf. Die Mitglieder der Kollaboration sind:

R.O. Maddock, G.F. Pinter und D. Evans  
(Department of Physics, The University, Durham)

C. Caso, F. Conte, D. Teodoro und G. Tomasini  
(Istituto di Scienze Fisiche and Sezione INFN, Genova)

E. Bassler, H. Fesefeldt, P. v. Handel, H. Nagel, N. Neumann,  
M. Sahini, P.K. Schilling, W.D. Schlatter und K. Wacker  
(DESY und II. Institut für Experimentalphysik, Hamburg)

C. Cecchet, L. Liotta, L. Mandelli, S. Ratti und L. Tallone  
Lombardi  
(Istituto di Fisica and Sezione INFN, Milano)

M. Chaumet, A. Daudin, M. Faccini, M.A. Jabiol, J.F. Lefur,  
C. Lewin und J. Mallet  
(D. Ph. P.E. - C.E.N. Saclay)

## Abstract

From an experiment on the reaction  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- p$  at 11.7 GeV/c incident momentum we present a spin and parity analysis of the charged  $3\pi$  system in the mass range of 1400-1900 MeV. We find a broad ( $\Gamma = 200$ -400 MeV) enhancement in the  $J^P = 2^-$ ,  $f\pi$  (S wave) state, centered at about 1650 MeV, and no structure in the other  $f\pi$  partial waves. We thus determine the  $J^P$  quantum numbers of  $A_3 \rightarrow f\pi$  to be  $J^P = 2^-$ .

## Inhaltsverzeichnis

### Teil A: Experimenteller Teil

1. Einleitung	1
2. Experimentelle Daten	3
3. Variable für die Spin-Paritätsanalyse	10
3.1 Produktionsvariable	11
3.2 Zerfallsvariable	13
3.2.1 Eulerwinkel $\phi, \theta, \psi$	13
3.2.2 Analyse des Dalitz-Diagramms	16
3.2.3 Analyse des Eulerwinkels $\theta$	23
4. Zusammenfassung und Überblick	27

### Teil B: Theoretischer Teil

1. Spin-Paritätsanalyse für 3-Pion-Zustände	28
1.1 Variable der Spin-Paritätsanalyse	28
1.2 Produktionsamplitude	31
1.3 Zerfallsamplitude	33
1.3.a Transformation der Zerfallskonfiguration in ein Bezugssystem	33
1.3.b Projektion des 3-Pion-Zustandes $ Jm\rangle$ auf einen Helizitätszustand des 3-Teilchensystems ((a)(bc))	35
1.3.c Projektion des 2-Pion-Zustandes $ \ell_a, \lambda_a\rangle$ auf einen Helizitätszustand des 2-Teilchensystems ((b)(c))	36
1.3.d Berücksichtigung des (a)(bc)-Bahndrehimpulses $L_a$	37
1.3.e Berücksichtigung des Isospins $I_a$ des (bc)-Systems	38
1.3.f Berechnung des reduzierten T-Matrixelementes	38

2. Spezielle Spin-Paritätsanalysen	40
2.1 allgemeine Dichtematrix	40
2.2 Analyse der Eulerwinkel $\phi, \theta, \psi$	42
2.3 Analyse des Dalitz-Diagramms	50
Anhang: Einige Beziehungen zwischen den Dichtematrixelementen	54
Literaturverzeichnis	
Beschreibung der Abbildungen	
Abbildungen	
Danksagungen	

Teil A: Experimenteller Teil

1. Einleitung

Das  $A_3$  oder  $\pi(1640)$  ist ein ungefähr 200 MeV breites Signal, welches man im 3-Pion-Spektrum in vielen überwiegend von Pionen induzierten Reaktionen bei einer Masse von 1640 MeV beobachtet hat (CHI70).

Es ist möglich, daß das  $A_3$  ein kinematischer Effekt ist, denn man kann das Signal, das nur 240 MeV oberhalb der  $f\pi$ -Schwelle liegt, vollständig reproduzieren, wenn man im 2-Pion-Spektrum zusätzlich auf das  $f$ -Meson einschränkt. Diesbezügliche Versuche, das  $A_3$ -Signal als einen  $f\pi$ -Deck-Effekt (DEC64) zu erklären, hatten jedoch keinen Erfolg (BAR68, CAS68). Mit einem reggeisierten  $f\pi$ -Deck-Effekt dagegen konnten J.A. Gaidos (GAI71) und G.W. Brandenburg (BRA70) die Kinematik im  $A_3$ -Bereich vollständig beschreiben. Daraus kann man aber nicht schließen, daß das  $A_3$  keine Resonanz ist, weil Regge-Amplituden im Mittel niederenergetisches Resonanz-Verhalten beschreiben ("Dualität" (DOL68)). Bis heute ist die Frage nicht geklärt, ob das  $A_3$  ein kinematischer Effekt oder eine Resonanz ist. Hierfür sind umfassendere Untersuchungen von möglichst vielen Eigenschaften des  $A_3$  notwendig.

Einige Eigenschaften (Quantenzahlen) des  $A_3$  kennt man bereits, wie Isospin  $I = 1$ , G-Parität  $G = -$ , C-Parität  $C = +$ . Der Spin  $J$  und die Parität  $P$  des  $A_3$  waren bis vor kurzem aber noch nicht endgültig bestimmt (PDG72), obwohl es schon frühere Spin-Paritätsanalysen gab (BAR68), (CAS69), (NEU71). Übereinstimmend konnte man die Verteilung der Zerfallsvariablen besser beschreiben, wenn man dem  $A_3$  eine Spin-Paritätskombination aus der unnatürlichen Spin-Paritätsreihe  $J^P = 0^-, 1^+, 2^-, 3^+ \dots$  zuordnete. Das beste Ergebnis erhielt man stets für  $J^P = 2^-$ , man konnte aber andere  $J^P$ -Werte

nicht ausschließen. Da bei den benutzten Methoden stets Annahmen über den nicht-resonanten Untergrund im 3-Pion-Spektrum gemacht wurden, ist es prinzipiell nicht auszuschließen, daß das Ergebnis der Untersuchung von diesen Annahmen über den Untergrund abhängt. Wir haben uns daher in einer allgemeinen modellunabhängigen Analyse nicht nur auf die Bestimmung des Spins und der Parität des  $A_3$  beschränkt, sondern haben in einer Partialwellenanalyse das gesamte 3-Pion-Spektrum (einschließlich Untergrund) im  $A_3$ -Bereich untersucht. Über Methode und Ergebnis soll diese Arbeit berichten.

## 2. Experimentelle Daten

Für die Spin-Paritätsanalyse im A3-Bereich wurden die Daten der Durham-Genua-Hamburg-Mailand-Saclay Kollaboration verwendet. Sie stammen von einem 11.7 GeV/c  $\pi^+$ p-Experiment ( $\sim 200000$  Bilder) mit der 2 m-CERN-Wasserstoff-Blasen-kammer. Einzelheiten über dieses Experiment sind in der Dissertation von H. Nagel (NAG71) und der eigenen Diplomarbeit (BAS70) ausführlich beschrieben. Es wird daher hier nur ein kurzer Überblick über das experimentelle Vorgehen gegeben. Die Auswertung der Aufnahmen erfolgte in mehreren Schritten. Nach einer Musterung der Filme wurden die Spuren der gefundenen 4-Stern-Ereignisse auf halbautomatischen Meßmaschinen ausgemessen. Für die räumliche Rekonstruktion der Ereignisse wurde das Geometrieprogramm WELAGA (WOL63) benutzt. Mit dem Programm GRIND (GRI68) wurden die folgenden Reaktionshypothesen angepaßt:

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad (\text{A.1})$$

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad (\text{A.2})$$

$$\pi^+ p \rightarrow n \pi^+ \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad (\text{A.3}).$$

Auf Grund des Energie-Impulserhaltungssatzes erhält man ein überbestimmtes Gleichungssystem, aus dem man für die Hypothesen (A.2) und (A.3) den Impuls des neutralen Teilchens bestimmen kann. Die Anpassung nach (A.1) hat vier Zwangsbedingungen, die nach (A.2) und (A.3) nur eine. Für die Hypothesen (A.1) und (A.2) gibt es drei verschiedene Kombinationen, die sich in der Zuordnung des Protons zu den Spuren der positiv geladenen Teilchen unterscheiden. Anhand der Stärke der Ionisation wurde versucht, eine Entscheidung zwischen der Pion- und Protonhypothese zu treffen. Im folgenden betrachten wir nur den Reaktionskanal (A.1), weil man nur in ihm ein signifikantes A3-Signal beobachtet. In diesem Kanal kann man fast alle Ereignisse (99 %) eindeutig rekonstruieren. Bei den wenigen bezüglich

der Reaktionshypothese (A.1) mehrdeutigen Ereignissen wurde die Massenhypothese mit der größten Anpassungswahrscheinlichkeit ausgewählt. Man erhielt aus der Analyse von 200 000 Blasenkammeraufnahmen 9471 Ereignisse der Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$ . Sie entsprechen einem Wirkungsquerschnitt von  $\sigma = 1.47 \pm 0.15$  mb.

Einen groben Überblick über diese Reaktion liefert eine v. Hove-Analyse (TOM72). 96 % der Ereignisse können vier kinematischen Bereichen zugeordnet werden, die sich durch die Richtung des Longitudinalimpulses  $p_{\ell}^*$  der auslaufenden Teilchen im Gesamtschwerpunktsystem (CMS) unterscheiden. Die meisten Ereignisse findet man in den Bereichen, wo die Quasi-2-Teilchenreaktionen dominieren. Im Bereich

(a) ( $p_{\ell\pi_1}^* > 0$ ,  $p_{\ell\pi_2}^* > 0$ ,  $p_{\ell\pi^-}^* > 0$ ,  $p_{\ell p}^* < 0$ ) findet man

überwiegend die Produktion von 3-Pion-Systemen:  $\pi^+ p \rightarrow (\pi\pi\pi)^+ p$ . Der Anteil am Gesamtwirkungsquerschnitt beträgt 33 %. Nur wenig größer (37 %) ist der Anteil des kinematischen Bereichs

(b) ( $p_{\ell\pi_1}^* > 0$ ,  $p_{\ell\pi_2}^* < 0$ ,  $p_{\ell\pi^-}^* > 0$ ,  $p_{\ell p}^* < 0$ ), in dem die Doppelresonanzproduktion  $\pi^+ p \rightarrow (\pi\pi)^0 (p\pi)^{++}$  vorherrscht. Von dem kinematischen Bereich

(c) ( $p_{\ell\pi_1}^* > 0$ ,  $p_{\ell\pi_2}^* < 0$ ,  $p_{\ell\pi^-}^* < 0$ ,  $p_{\ell p}^* < 0$ ), in dem die Produktion der höheren Isobare  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ (p\pi\pi)^+$  dominiert, und dem Bereich

(d) ( $p_{\ell\pi_1}^* > 0$ ,  $p_{\ell\pi_2}^* > 0$ ,  $p_{\ell\pi^-}^* < 0$ ,  $p_{\ell p}^* < 0$ ) mit vorherrschender Quasi-3-Teilchenreaktion  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ (p\pi)^0$  sind die Beiträge zum Gesamtwirkungsquerschnitt relativ gering (18 % bzw. 8 %).

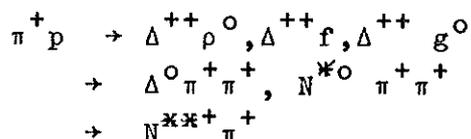
Dieser grobe Überblick zeigt, daß in der Reaktion (A.1) nur etwa ein Drittel der Ereignisse zur Produktion von 3-Pion-Systemen mit kleiner Masse beiträgt. Dies steht in Konkurrenz zur starken Produktion von  $\Delta^{++}$ -Ereignissen (etwa 50 %, wenn man den Kaskadenzerfall aus den höheren Isobaren mit berücksichtigt).

Für alle 9471 Ereignisse zeigt Abb. 1 die Verteilung der invarianten 3-Pion-Masse. Man beobachtet eine starke Anhäufung im A1- und A2-Bereich und ein deutliches Signal um 1650 MeV, das A3. Man kann jedoch nicht alle Ereignisse für eine Partialwellenanalyse im A3-Bereich benutzen, da man die Reflexionen der verschiedenen Reaktionskanäle (insbesondere die, welche  $\Delta^{++}$ -Ereignisse produzieren) in die 3-Pion-Verteilung nicht vollständig kennt. Man benötigt daher möglichst ein solches 3-Pion-Spektrum, das keine Reflexionen aus anderen Reaktionskanälen enthält. Das Auswahlkriterium darf aber die Verteilung der zu untersuchenden Variablen nicht verfälschen, weil eine Korrektur nur mit Hilfe von Annahmen über Spin und Parität des 3-Pion-Systems möglich ist.

Für unsere Analyse haben wir zunächst alle Ereignisse verworfen, die für das auslaufende Proton einen Laborimpuls größer als 1.5 GeV/c haben, um sicher zu stellen, daß die Protonspur auf den Blaskammeraufnahmen richtig identifiziert wurde. Dieser Schnitt bedeutet eine Beschränkung auf Ereignisse mit einem Viererimpulsübertrag  $t = -(p_{\text{ein}} - p_{\text{aus}})^2$  kleiner als  $1.55 \text{ (GeV/c)}^2$ . Er hat keinen Einfluß auf die Verteilung der Zerfallsvariablen im 3-Pion-System.

Eine positive Auswahl der Ereignisse im A3-Bereich durch Einschränkung auf den kinematischen Bereich (a) ist wegen der zu geringen Schwerpunktsenergie  $E_{\text{CMS}} = 4.76 \text{ GeV}$  gegenüber dem hohen Q-Wert des A3 ( $Q = 1.22 \text{ GeV}$ ) nicht möglich. Selbst bei einem maximalen Longitudinalimpuls  $p_{\perp A3}^*$  von  $p_{\perp A3}^* = 1.97 \text{ GeV}$  können Pionen aus dem A3-Zerfall im Gesamtschwerpunktsystem nach hinten gehen ( $-0.46 \text{ GeV} < p_{\perp \pi}^* < 2.32 \text{ GeV}$ ). Wie Abb. 1 zeigt, erfüllen nur wenige Ereignisse im A3-Bereich die kinematische Bedingung (a). Zudem wird die Verteilung der Zerfallsvariablen durch diese Auswahl verfälscht.

Bei einer negativen Auswahl werden die Ereignisse aus anderen Reaktionskanälen



verworfen. Diese Kanäle und insbesondere ihre Reflexionen ins 3-Pion-Spektrum müssen studiert werden. Wichtig ist die Untersuchung der baryonischen Resonanzen deshalb, weil sie nicht gleichzeitig mit einem resonanten 3-Pion-System erzeugt werden können. Abb. 2 zeigt die Verteilung der invarianten  $p\pi_\ell^+$ -Masse ( $\pi_\ell^+$  ist das  $\pi^+$  mit dem höheren (niedrigeren) Viererimpulsübertrag  $\hat{t} = -(\pi_{\text{ein}}^+ - \pi_{\text{aus}}^+)^2$  vom ein- auf das auslaufende  $\pi^+$ .) Man sieht eine starke Produktion des  $\Delta^{++}(1236)^*$ , was auch dem großen Beitrag des kinematischen Bereichs (b) zum totalen Wirkungsquerschnitt entspricht. Außerdem findet man eine schwache Andeutung von  $\Delta^{++}(1900)$ . Für unsere Spin-Paritätsanalyse verwerfen wir alle  $\Delta^{++}(1236)$ -Ereignisse [ $\Delta^{++}(1236)$ :  $M(p\pi_\ell^+) < 1.45 \text{ GeV}$  und  $\cos(\vec{p}_{\text{ein}}^+, (\overline{p\pi_\ell^+})_{\text{aus}})_{\text{CMS}} > 0.97$ ]. Dieses Auswahlkriterium wurde so gewählt, daß die Anzahl der verworfenen  $\Delta^{++}$ -Ereignisse (3666 Ereignisse mit  $t < 1.55 \text{ GeV}^2 \hat{=} 0.57 \text{ mb}$ ) dem von K. Wacker (WAC72) gemessenen  $\Delta^{++}$ -Wirkungsquerschnitt von  $\sigma_{\Delta^{++}} = 0.61 \pm 0.08 \text{ mb}$  entspricht und die Verteilung der zu untersuchenden Zerfallsvariablen möglichst wenig verfälscht wird. Die verworfenen  $\Delta^{++}$ -Ereignisse zeigen in der Verteilung der invarianten 3-Pion-Masse keine signifikante Anhäufung im A3-Bereich (nur 1.5 Standardabweichungen über einen handgezogenen Untergrund). Das gereinigte 3-Pion-Spektrum enthält 5291 Ereignisse (Abb. 1). Bei eindimensionalen Anpassungen einer Breit-Wigner-Funktion (JAC64) an diese Verteilung wurde der Untergrund von 3-Pion-Ereignissen unter dem A3 durch handgezeichnete Kurven abgeschätzt. Wir erhielten für das A3-Signal die folgenden Werte, wobei die Unsicherheit

\* In der Verteilung der  $(p\pi_\ell^+)$ -Masse beobachtet man nur eine geringe Andeutung einer  $\Delta^{++}(1236)$ -Produktion.

bezüglich des Untergrundes berücksichtigt wurde:

$$\begin{aligned} M_{A3} &= 1660 \pm 25 \text{ MeV} \\ \Gamma_{A3} &= 190 \pm 100 \text{ MeV} \\ \sigma_{A3} &= 50^{+20}_{-15} \text{ } \mu\text{b.} \end{aligned}$$

Einen groben Überblick über den A3-Zerfall erhält man (unter Vernachlässigung von Interferenzbeiträgen), wenn man auf diejenigen Ereignisse im 3-Pion-Spektrum einschränkt, von denen mindestens eine 2-Pion-Kombination im  $\rho$ - bzw. f-Band liegt oder gerade diese Ereignisse ausschließt. Man findet in Abb. 3 bei den 3-Pion-Ereignissen, die im  $\rho$ -Band liegen, eine Anhäufung im A3-Bereich. Sie ist etwas stärker in der Verteilung, bei der die Ereignisse verworfen wurden, die im  $\rho$ -Band liegen. Viel ausgeprägter sieht man das A3, wenn man auf das f-Band einschränkt (Abb. 4). Dagegen beobachtet man keine Struktur mehr, wenn man die Ereignisse ausschließt, die im f-Band liegen. Dies spricht für eine Interpretation des A3 als  $f\pi$ -Effekt.

Für die Spin-Paritätsanalyse im A3-Bereich wird ein Band von 1400-1900 MeV aus dem gereinigten 3-Pion-Spektrum herausgeschnitten. Es enthält 1283 Ereignisse. In der Verteilung der invarianten  $p\pi^+$ -Masse (Abb. 2) dieser Ereignisse sind das starke  $\Delta^{++}(1236)$ -Signal und die Andeutung von  $\Delta^{++}(1900)$  verschwunden. Sie zeigt eine Verteilung ohne Struktur, wenn man von dem "Loch" bei 1300 MeV absieht, in dem etwa 100 Ereignisse fehlen. Genauere Untersuchungen mit künstlichen Ereignissen (Monte-Carlo-Ereignissen) zeigen, daß durch den  $\Delta^{++}$ -Schnitt der Phasenraum für das 3-Pion-System nur um etwa 1 % verkleinert wird, andererseits aber die verbleibende 3-Pion-Verteilung von den  $\Delta^{++}$ -Ereignissen verseucht ist, die nicht vom Auswahlkriterium erfaßt werden. Das sind insbesondere die Ereignisse, die

sich im hochenergetischen Ausläufer der Breit-Wigner-Verteilung befinden. Um ihren Anteil am gereinigten 3-Pion-Spektrum zu bestimmen, muß man einige Annahmen machen:

1. über den Produktionswirkungsquerschnitt  $\Delta^{++}(1236)$ ,
2. über die Ausläufer seiner Breit-Wigner-Verteilung,
3. über die Abhängigkeit der  $\Delta^{++}$ -Produktion vom Viererimpulsübertrag  $\tilde{t}$  des einlaufenden Protons auf das auslaufende Proton-Pion-System und
4. über die Polarisation des  $\Delta^{++}$ .

Für unsere Abschätzungen legen wir den  $\Delta^{++}$ -Wirkungsquerschnitt von  $\sigma_{\Delta^{++}} = 0.61 \pm 0.08$  (WAC72) zugrunde und berücksichtigen den Ausläufer der Breit-Wigner-Verteilung nur bis zu einer Proton-Pion-Masse von 1.6 GeV. Wir nehmen an, daß sich die  $\tilde{t}$ -Abhängigkeit der  $\Delta^{++}$ -Produktion durch den Pion-Propagator  $\frac{1}{(\tilde{t} + m_{\pi}^2)^2}$  beschreiben läßt und daß das  $\Delta^{++}$  nicht polarisiert ist. Mit Hilfe von entsprechend gewichteten Monte-Carlo-Ereignissen kann man dann die verbleibende Verseuchung im 3-Pion-Spektrum zu  $4 \pm 3\%$  abschätzen. Ihr Einfluß auf die Verteilung der Zerfallsvariablen wird in Abschnitt 3.2.2 untersucht.

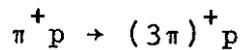
Die  $p\pi^-$ -Massenverteilung (Abb. 5) zeigt nur eine Andeutung der neutralen baryonischen Resonanzen  $\Delta^0$  und  $N^{*0}$ , was dem relativ geringen Anteil des kinematischen Bereichs (d) am Gesamtwirkungsquerschnitt entspricht. Die starke Anhäufung bei kleinen  $p\pi^-$ -Massen wird reduziert, wenn man die  $\Delta^{++}$ -Ereignisse verwirft. In den Daten, für die die Spin-Paritätsanalyse benutzt werden, findet man dagegen in der  $p\pi^-$ -Massenkombination nur noch eine ganz schwache Andeutung des  $\Delta^0(1236)$ .

In der  $p\pi^+\pi^-$ -Massenverteilung aller Ereignisse beobachtet man die Produktion der höheren Isobare (Abb. 6). Dagegen zeigen die für die Spin-Paritätsanalyse ausgewählten Ereignisse in der  $p\pi^+\pi^-$ -Massenkombination keine Resonanzproduktion.

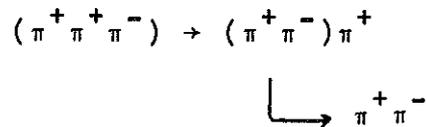
Zusammenfassend kann man sagen, daß man durch das Auswahlkriterium für die  $\Delta^{++}$ -Ereignisse ein 3-Pion-Spektrum mit nur geringen Beiträgen (ca. 5 %) aus anderen Reaktionskanälen erhält.

### 3. Variable für die Spin-Paritätsanalyse

Für eine vollständige Beschreibung der Reaktion (1) benötigt man 8 kinematische Variable, wenn die Polarisation des einlaufenden und des auslaufenden Protons nicht gemessen wird. Wir wählen die Variablen so aus, daß wir die Produktion und den Zerfall eines 3-Pion-Systems beschreiben können (Abb. 7), und faktorisieren die Reaktionsamplitude dementsprechend. Die Produktion des 3-Pion-Systems in einer Quasi-2-Teilchen-Reaktion



hängt nur von 3 Variablen ab: der Schwerpunktsenergie  $E_{\text{CMS}}$  ( $E_{\text{CMS}}^2 = s = (\pi_{\text{ein}}^+ + p_{\text{ein}})^2$ ), dem Viererimpulsübertrag  $t$  ( $t = -(p_{\text{ein}} - p_{\text{aus}})^2$ ) und der invarianten Masse des 3-Pion-Systems  $m_{3\pi}$  ( $m_{3\pi}^2 = (\pi_{\text{ein}}^+ + p_{\text{ein}} - p_{\text{aus}})^2$ ). Der Zerfall eines 3-Pion-Systems wird mit 5 (6) Variablen beschrieben bei fester (variabler) 3-Pion-Masse  $m_{3\pi}$ . Wir wählen als Variable die drei Eulerwinkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$ . Durch sie ist die räumliche Orientierung der Zerfallskonfiguration (aus  $\pi_a^+$ ,  $\pi_b^+$  und  $\pi^-$ ) gegenüber der Produktionskonfiguration (aus  $\pi_{\text{ein}}^+$ ,  $p_{\text{ein}}$  und  $p_{\text{aus}}$ ) im 3-Pion-Ruhsystem festgelegt. Der Kaskadenzerfall



des 3-Pion-Systems über ein intermediäres 2-Pion-System wird mit den beiden Variablen des Dalitz-Diagramms  $s_a = (\pi_b^+ + \pi^-)^2$  und  $s_b = (\pi_a^+ + \pi^-)^2$  beschrieben. Abb. 8 zeigt ihre Verteilung für die Ereignisse mit einer 3-Pion-Masse zwischen 1.55 und 1.75 GeV. Man sieht, daß ein großer Teil der Ereignisse in den  $\rho$ - und  $f$ -Bändern einschließlich der  $\rho$ - $f$ -Überlappungsbereiche liegt, wo eine Zuordnung von  $\rho$  und  $f$  erst nach einer vollständigen Analyse des Dalitz-

Diagramms möglich ist.

### 3.1 Produktionsvariable

Wenn man das 3-Pion-Spektrum nicht in Partialwellen entwickelt, ist die Untersuchung der Produktions- und Zerfallsvariablen i.a. mit einem systematischen Fehler behaftet, weil man durch einfache Schnitte das Signal nicht vom Untergrund trennen kann. So ist die Bestimmung des Produktionswirkungsquerschnittes von der Annahme über die Gestalt des Untergrundes und von den Ausläufern des Signals abhängig. Dies ist bei einem Vergleich mit dem bei anderen Energien gemessenen Wirkungsquerschnitt zu berücksichtigen. Wenn man das A3-Signal mit einer Breit-Wigner-Funktion über einen von Hand gezeichneten Untergrund beschreibt, erhält man einen Wirkungsquerschnitt von

$$\sigma = 50 \begin{matrix} +20 \\ -15 \end{matrix} \mu\text{b.}$$

Vergleicht man diesen Wert mit den bei anderen Energien gemessenen Werten (Abb. 10), so beobachtet man keine starke Energieabhängigkeit in der Produktion des A3. Sie läßt sich durch eine Funktion

$$\sigma \sim p_{\text{Lab}}^{-n}$$

mit  $n = 0.2 \pm 0.2$  beschreiben. Dies weist auf eine diffraktive Produktion des A3 (MOR70) hin und schließt eine Produktion über Mesonaustausch ( $n = 2$ ) aus.

Untersucht man die Produktion des A3 in Abhängigkeit vom Viererimpulsübertrag, so tritt bei der Auswahl der Daten wieder die Schwierigkeit auf, das Signal vom Untergrund zu trennen. Wenn man nur das 3-Pion-Spektrum im A3-Bereich auswählt oder zusätzlich auf das  $f\pi$ -Spektrum einschränkt, erhält man gering voneinander abweichende Ergebnisse. Paßt man die  $t$ -Verteilung einer Funktion

$$\frac{d\sigma}{dt} = A e^{-at}$$

an, so beträgt die Steigung  $a = 5.0 \pm 0.3 \text{ GeV}^{-2}$  für den Fall des 3-Pion-Spektrums. Dies Ergebnis ist nur richtig, wenn der Untergrund dasselbe  $t$ -Verhalten wie das A3 zeigt. Das ist aber nur annähernd der Fall. Wenn man nämlich auf das  $f_{\pi}$ -Spektrum einschränkt, ergibt sich ein günstigeres Signal-zu-Untergrund-Verhältnis, und man erhält einen nicht signifikant größeren Wert für die Steigung  $a = 5.5 \pm 0.5 \text{ GeV}^{-2}$ . Aber auch dieser Wert hat wegen des Untergrundes einen systematischen Fehler, denn man kann nicht durch einen Schnitt im 2-Pion-Spektrum ein reines  $f$ -Band auswählen. Zudem überlappen sich die  $f$ -Bänder mit den  $\rho$ -Bändern, wie das Dalitz-Diagramm (Abb. 8) zeigt. Diese systematischen Fehler treten nur dann nicht auf, wenn man in mehreren Bereichen des Viererimpulsübertrages die Zerfallsvariablen so analysiert, daß man das A3-Signal abtrennen kann und dessen Wirkungsquerschnitt bestimmt.

Im allgemeinen wird angenommen, daß sich das A3-Signal in der 3-Pion-Massenverteilung durch eine Breit-Wigner-Kurve beschreiben läßt. Mit eindimensionalen Anpassungen an die 3-Pion-Massen-Verteilung erhalten wir für das A3-Signal einen Zentralwert von  $M=1660 \pm 25 \text{ MeV}$  für die Masse und  $\Gamma = 190 \pm 100 \text{ MeV}$  für die Breite. Diese Werte gelten jedoch nur bei einer Resonanzinterpretation des A3. D.R.O. Morrison (MOR70) weist darauf hin, daß die 3-Pion-Massenverteilung im A3-Bereich nicht notwendig die Gestalt einer Breit-Wigner-Kurve haben muß. Er ordnet das A3 zusammen mit dem A1 der Klasse der "D-Resonanzen" zu, die über Diffraktions-Dissoziation mit energieunabhängigem Wirkungsquerschnitt produziert werden. Bei ihnen ist die klassische Resonanzinterpretation fragwürdig.

### 3.2. Zerfallsvariable

#### 3.2.1 Eulerwinkel $\phi$ , $\theta$ , $\psi$

Die fünf Zerfallsvariablen, die bei fester Energie eines 3-Pion-Systems dessen Zerfall beschreiben, kann man in zwei Gruppen einteilen. Die beiden Variablen  $s_a$  und  $s_b$  des Dalitz-Diagramms beschreiben den Kaskadenzerfall des 3-Pion-Systems, und durch die drei Eulerwinkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  ist die Orientierung des zerfallenden 3-Pion-Systems (Koordinatensystem  $\hat{S}$ ) gegenüber einem Bezugssystem (Koordinatensystem  $S$ ) festgelegt (Abb. 9). Die beiden Koordinatensysteme sind durch die Impulse der ein- und auslaufenden Teilchen im 3-Pion-Ruhsystem definiert.

$$\vec{X} = \vec{Y} \times \vec{Z} \quad \vec{Y} = \frac{\vec{p}_{\pi\text{ein}} \times \vec{p}_{\pi\text{aus}}}{|\vec{p}_{\pi\text{ein}} \times \vec{p}_{\pi\text{aus}}|} \quad \vec{Z} = \frac{\vec{p}_{\pi\text{ein}}}{|\vec{p}_{\pi\text{ein}}|}$$

$$\vec{X} = \vec{Y} \times \vec{Z} \quad \vec{Y} = \frac{\vec{p}_{\pi c} \times \vec{p}_{\pi b}}{|\vec{p}_{\pi c} \times \vec{p}_{\pi b}|} \quad \vec{Z} = \frac{\vec{p}_{\pi a}}{|\vec{p}_{\pi a}|}$$

Die drei Eulerwinkel  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  erhält man aus den folgenden Beziehungen,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{Z} \cdot \vec{Z}}{|\vec{Z}|} & \text{stets} & \quad \sin\theta \geq 0 \\ \cos\phi &= \frac{\vec{X} \cdot \vec{Z}}{\sin\theta} & \sin\phi &= \frac{\vec{Y} \cdot \vec{Z}}{\sin\theta} \\ \cos\psi &= \frac{-\vec{Z} \cdot \vec{X}}{\sin\theta} & \sin\psi &= \frac{\vec{Z} \cdot \vec{Y}}{\sin\theta} \end{aligned}$$

$\phi$  und  $\psi$  sind Azimutwinkel um die  $Z$ - bzw.  $\vec{Z}$ -Achse,  $\theta$  der Polarwinkel zwischen diesen beiden Achsen.

Aus der Verteilung dieser fünf Variablen ( $s_a$ ,  $s_b$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) kann man bei fester 3-Pion-Masse eindeutig den Spin  $J$ , seine Projektion  $M$  auf die Quantisierungsachse  $\vec{Z}$ , die Parität  $P$  sowie den Bahndrehimpuls  $L$  und den Spin  $\ell$

des intermediären 2-Pion-Systems bestimmen, wenn man von den Komplikationen durch Endzustandswechselwirkungen absieht. In unserer Analyse beschränken wir uns auf die 3 resonanten 2-Pion-Systeme  $\epsilon$ ,  $\rho^0$  und  $f$  (entsprechend  $\ell = 0, 1, 2$ ). Der Bahndrehimpuls  $L$  und der Spin  $\ell$  können bei festem Spin  $J$  wegen

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{\ell}$$

nicht beliebige Werte annehmen. Die Parität berechnet man aus

$$P = (-1)^{L+\ell+1}.$$

Im Teil B wird gezeigt, daß sich die Zerfallsamplitude  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  in der folgenden Form entwickeln läßt:

$$B_{KM}(\vec{x}_z) = \sum_m D_{Mm}^J(\phi, \theta, \psi) G_{Km}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$$

mit der Normierung  $\int B_{KM}(\vec{x}_z) B_{KM}(\vec{x}_z) d\phi d\cos\theta d\psi ds_a ds_b = 1$ . Dabei ist  $\vec{x}_z$  der Satz der Zerfallsvariablen  $\vec{x}_z = (m_{3\pi}, \phi, \theta, \psi, s_a, s_b)$  und  $K$  der Satz von Quantenzahlen  $K = \{J, L_a, \ell_a, I, I_a\}$  mit  $I =$  Isospin des 3-Pion-Systems und  $I_a =$  Isospin des 2-Pion-Systems (bc). Die Verteilung der Zerfallsvariablen  $\sigma(\vec{x}_z)$  erhält man aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt nach Integration über die Produktionsvariablen

$$\frac{d^6\sigma(\vec{x}_z)}{d\vec{x}} = \hat{\sigma}(\vec{x}_z) = \sum_{\substack{KK' \\ MM'}} \rho_{KK'} \ B_{KM}(\vec{x}_z) \ B_{K'M'}^*(\vec{x}_z),$$

wobei  $\rho_{KK'}$  die Produktionsdichtematrix ist.

Die Summation  $\sum_{MM'}$  wird über alle Quantenzahlen  $K, K', M, M'$  für die beiden intermediären 2-Pion-Systeme ((bc)a) und ((ca)b) ausgeführt.

Wenn man alle Zerfallsvariablen gleichzeitig untersuchen will \* und sich nur auf die Spin-Paritätszustände beschränkt, für die  $L+l \leq 3$  gilt, so muß man mehr als 1000 Dichtematrixelemente bestimmen. Durch Integration über geeignete Zerfallsvariable kann man aber diese große Anzahl reduzieren. Es ist jedoch nicht sehr effektiv, nur über die beiden Variablen  $s_a$  und  $s_b$  zu integrieren, weil - wie im Teil B gezeigt wird - die Anzahl der zu bestimmenden Dichtematrixelemente nur wenig verringert wird, Information über den Kaskadenzerfall des 3-Pion-Systems aber verloren geht. Wir haben daher zur Bestimmung von Spin und Parität des  $A_3$  weder die Momente  $\langle D_{mn}^j \rangle$  der drei Eulerwinkel

$$\langle D_{mn}^j \rangle = \sum_{\text{Ereignisse}} D_{mn}^j(\phi, \theta, \psi)$$

noch die Winkelverteilung

$$\frac{d^3\sigma}{d\phi d\cos\theta d\psi}$$

ausführlich studiert. Für die Winkelverteilung gilt:

$$\frac{d^3\sigma}{d\phi d\cos\theta d\psi} = \sum_{\substack{JJ' \\ PP' \\ MM' \\ mm'}} \rho_{JJ'} \sum_{\substack{mM \\ m'M'}} D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) D_{m'M'}^{J'*}(\phi, \theta, \psi) F_{JJ'}(m_{3\pi})$$

mit der Zerfallsdichtematrix  $F_{JJ'}(m_{3\pi})$  ( $P =$  Parität des  $PP'$   
 $mm'$

3-Pion-Zustandes).

Integriert man die Eulerwinkelverteilung noch zusätzlich über die beiden Azimutwinkel  $\phi$  und  $\psi$ , so müssen bei der Analyse der Polarwinkelverteilung  $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$  nur noch die

\* G. Ascoli hat eine derartige Analyse an rund 4500 Ereignissen im  $A_3$ -Bereich gemacht (ASC72). Er reduzierte die große Anzahl der zu bestimmenden Dichtematrixelemente, indem er kohärente Produktion für die 3-Pion-Zustände annahm und bei ihnen nur bestimmte Polarisationszustände zuließ.

Diagonalelemente der Produktions- und Zerfallsdichtematrix sowie wenige Interferenzterme ermittelt werden. Im Abschnitt A.3.2.3 haben wir die Polarwinkelverteilung für diejenigen Spin-Paritätszustände untersucht, die nach unserer Analyse des Dalitz-Diagramms das 3-Pion-Spektrum beschreiben, um die Polarisierung des A3 abzuschätzen.

### 3.2.2 Analyse des Dalitz-Diagramms

Integriert man den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\hat{\sigma}(\vec{x}_z)$  über die drei Eulerwinkel  $\phi, \theta, \psi$ , so kann man zwar die Polarisierung des 3-Pion-Systems nicht mehr messen, man kann aber noch den Spin, die Parität und die Zerfallskanäle ermitteln. Dazu studiert man die Verteilung  $\tilde{\sigma}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$  im Dalitz-Diagramm.

$$\tilde{\sigma}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \int \hat{\sigma}(\vec{x}_z) d\phi d\cos\theta d\psi = \sum_{\substack{KK' \\ J=J' \\ M}} \rho_{KK'} \overset{\sim}{F}_{KK'}^{MM}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$$

Dabei ist  $\overset{\sim}{F}_{KK'}^{MM}$  die Zerfallsdichtematrix

$$\overset{\sim}{F}_{KK'}^{MM}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \int d\phi d\cos\theta d\psi B_{KM}(\vec{x}_z) B_{K'M'}^*(\vec{x}_z).$$

Wie in Teil B gezeigt wird, gibt es keine Interferenzbeiträge zur Verteilung im Dalitz-Diagramm zwischen den verschiedenen Spin-Paritätszuständen des 3-Pion-Systems. Es verbleiben somit nur noch relativ wenige Dichtematrixelemente, die zu bestimmen sind. Beschränkt man sich auf die Partialwellen mit  $l+l' \leq 3$ ,  $l \leq 2$  sowie die  $J^P = 0^-$  ( $f_\pi$ )-Welle, so sind es 48 reelle Größen.

Für unsere Analyse des gesamten Dalitz-Diagramms haben wir zunächst angenommen, daß sich die Produktionsdichtematrix faktorisieren läßt.

$$\rho_{\substack{KK' \\ MM'}} = r_K \cdot r_{K'}^*$$

Man erhält dann für die Verteilung im Dalitz-Diagramm

$$\tilde{\sigma}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \sum_{\substack{KK' \\ J=J'}} \tilde{F}_{KK'}^{\sim}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$$

mit

$$\tilde{F}_{KK'}^{\sim}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \sum_M \int r_{KM} B_{KM}(\vec{x}_z) r_{K'M}^* B_{K'M}^*(\vec{x}_z) d\phi d\cos\theta d\psi$$

und der Normierung  $\int \tilde{\sigma}(m_{3\pi}, s_a, s_b) dm_{3\pi} ds_a ds_b = \text{Anzahl der Ereignisse}$ .

Weil die Zerfallsamplituden  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  auf 1 normiert sind, müssen in der Analyse nur noch 26 reelle Größen (Real- und Imaginärteil  $\sum_M r_{KM}$ ) bestimmt werden. Sie geben die Beträge und die relativen Phasen zwischen den einzelnen Partialwellen mit gleichem Spin  $J$  und gleicher Parität  $P$  an. Die Faktorisierung der Produktionsdichtematrix ist gleichbedeutend mit der Annahme einer vollständigen Kohärenz bei der Produktion von 3-Pion-Systemen mit gleichen Spin-Paritätsquantenzahlen, aber verschiedenem Bahndrehimpuls  $L$  und Spin  $l$  des intermediären 2-Pion-Systems.

Bevor die einzelnen Untersuchungsergebnisse diskutiert werden, soll auf die mögliche Verfälschung der Analyse durch die Datenauswahl eingegangen werden. Mit Hilfe von Monte-Carlo-Ereignissen kann die Reflexion des  $\Delta(1236)$  ins 3-Pion-Spektrum simuliert werden. Man sieht in Abb. 11, daß die Verteilung der Variablen  $s_a$  und  $s_b$  durch die negative Datenauswahl nicht zu sehr verfälscht wird. Abb. 11 zeigt die Verteilung der  $(\pi_{\Delta}\pi)$ -Massenkombination ( $\pi_{\Delta}$  ist das Pion aus dem  $\Delta(1236)$ ) und die Verteilung der Polarkoordinaten  $r$  und  $\delta$  des Dalitz-Diagramms. Der Radius ist so normiert, daß  $r = 0$  in der Mitte und  $r = 1$  am Rand des Dalitz-Diagramms ist. Der Polarwinkel  $\delta$  be-

trägt bei der kleinsten Energie des  $\pi_{\Delta}$   $\delta = 0$  und ist bezüglich der anderen beiden Pionen gefaltet. Für einen besseren Vergleich sind die Verteilungen der nach dem Phasenraumerzeugten Ereignisse und die Verteilungen derjenigen  $\Delta(1236)$  Ereignisse, die bei der Datenauswahl nicht verworfen werden, auf die gleiche Fläche normiert. Vergleicht man die entsprechenden Kurven miteinander, so sieht man, daß die wenigen  $\Delta^{++}$ -Ereignisse, die zu etwa 4 % das 3-Pion-Spektrum verseuchen, nur eine geringe Verzerrung im Dalitz-Diagramm verursachen. Da wir für die Verteilung im Dalitz-Diagramm die beiden positiven Pionen nicht gegeneinander ausgezeichnet haben, wird die Verzerrung auf die beiden den positiven Pionen zugehörenden Ecken verteilt und somit weiter abgeschwächt. Zudem ist die Verteilung auch in der Ecke verzerrt, die zum negativ geladenen Pion gehört, und zwar durch die wenigen  $\Delta^0$ -Ereignisse (etwa 2 %), die ebenfalls das 3-Pion-Spektrum verseuchen. Da die gesamte Verseuchung der 3-Pion-Verteilung durch andere Reaktionskanäle aber nur gering ist (etwa 5 %), kann ihr Einfluß auf unsere Analyse nicht sehr groß sein, zumal die hervorgerufenen Verzerrungen alle Bereiche des Dalitz-Diagramms erfassen, so daß sie sich zum Teil wechselseitig aufheben. Wir haben daher auf eine spezielle Korrektur in unserer Analyse verzichtet.

Bei unserer Untersuchung des gesamten Dalitz-Diagramms haben wir alle die Partialwellen mit Spin  $J$  und Parität  $P$  berücksichtigt, für die  $L+\ell \leq 3, \ell \leq 2$  gilt, sowie die  $J^P = 0^-(f_{\pi})$ -Welle, weil das  $A_3$  einen dominanten  $f_{\pi}$ -Zerfallskanal hat. Da wir nicht von vornherein eine Annahme über die Abhängigkeit der Partialwellen von der 3-Pion-Masse  $m_{3\pi}$  machen wollten, haben wir unsere Untersuchung in fünf 100 MeV breiten Bereichen des 3-Pion-Spektrums von 1400 bis 1900 MeV durchgeführt in der Annahme, daß sich innerhalb dieser 100 MeV breiten Bereiche die Amplituden nicht zu sehr ändern. Wir haben in diesen fünf

$m_{3\pi}$ -Bereichen die Beiträge der einzelnen Partialwellen zum Dalitz-Diagramm mit Hilfe eines Maximum-Likelihood-Verfahrens gemessen, indem wir den Real- und Imaginärteil der Produktionsamplitude  $a_K = \sum_M r_{KM}$  bestimmt haben.

Für jedes Ereignis  $n$  wird die Wahrscheinlichkeitsdichte für die experimentellen Werte  $m_{3\pi}^n$ ,  $s_a^n$  und  $s_b^n$  berechnet.

$$p(\vec{a}, m_{3\pi}^n, s_a^n, s_b^n) = \frac{\sum_{KK'} a_K a_{K'} F_{KK'}^N(m_{3\pi}^n, s_a^n, s_b^n)}{\int \sum_{KK'} a_K a_{K'} F_{KK'}^N(m_{3\pi}, s_a, s_b) dm_{3\pi} ds_a ds_b}$$

Dabei ist  $\vec{a} = (a_K, a_{K'}, a_{K''}, \dots)$  der Vektor für die anzupassenden Parameter (d.h. für die Produktionsamplituden). Die beste Abschätzung für ihn erhält man im Maximum der Likelihoodfunktion  $\mathcal{L}(\vec{a})$ , die das Produkt aus der Wahrscheinlichkeitsdichte für alle Ereignisse  $N$  ist.

$$\mathcal{L}(\vec{a}) = \prod_{n=1}^N p(\vec{a}, m_{3\pi}^n, s_a^n, s_b^n)$$

Entsprechend der Normierung der Zerfallsamplitude  $B_{KM}$  ( $x_z^{\vec{a}}$ ) erhält man aus dem Anpassungsparameter  $\vec{a}$  den Betrag und die relative Phase der einzelnen Partialwellen.

Unsere Untersuchung ergibt, daß viele angepaßte Größen mit Null verträglich sind. Wir beobachten keine Beiträge der Partialwellen aus der natürlichen Spin-Paritäts-Serie  $J^P = 1^-$  \* und  $J^P = 2^+$  zur Verteilung im Dalitz-Diagramm. Auch die Beiträge der  $1^+(\rho\pi L=2)$ -Welle sowie der Partialwellen mit  $J^P = 3^+$  können vernachlässigt werden. Bei einer Wiederholung unserer Analyse ohne diese Partialwellen erhielten wir die gleichen Ergebnisse. (Bei diesem reduzierten Satz von Partialwellen waren 16 reelle Größen zu bestimmen.) Um die Eindeutigkeit zu überprüfen, wählten

---

\* Man beachte, daß der Spin-Paritätszustand  $J^P = 1^-$  wegen <sup>der</sup> C-Parität  $C = +$  nach dem Quarkmodell exotisch ist.

wir verschiedene Sätze von Startwerten für unser Maximum-Likelihood-Verfahren. Wir erhielten stets die gleichen Ergebnisse bei unseren Anpassungen.

Da es bei der Maximum-Likelihood-Methode keine besondere Testgröße für die Güte der Anpassung gibt, zeigen wir in einigen Projektionen des Dalitz-Diagramms, wie gut die Anpassung mit der Verteilung der experimentellen Daten in den fünf 100 MeV breiten Bereichen unserer Analyse übereinstimmt. Abb. 12 zeigt die beiden 2-Pion-Massenspektren, Abb. 13 die Verteilung des Helizitätswinkels  $\theta$  in den  $\rho$ - und  $f$ -Bändern des Dalitz-Diagramms und Abb. 14 die Polarkoordinaten  $R$  und  $\delta$  für die Verteilung im Dalitz-Diagramm. Der Radius  $R$  ist wie in Abb. 11b so normiert, daß  $R = 0$  in der Mitte und  $R = 1$  am Rand ist. Der Polariswinkel  $\delta$  wurde wegen der Bose-Symmetrie gefaltet. Es ist  $\delta = 0$  bei maximaler Energie des negativen Pions. In allen Projektionen stimmen die Verteilungen, die aus den Ergebnissen der Maximum-Likelihood-Anpassung berechnet wurden, mit den experimentellen Verteilungen gut überein.

Abb. 15 zeigt die Beträge der einzelnen Partialwellen als Funktion von der 3-Pion-Masse, wie sie mit dem Maximum-Likelihood-Verfahren gemessen wurden. Die einzelnen Beiträge addieren sich nicht zu der gesamten Anzahl aller Ereignisse im entsprechenden 3-Pion-Massenstreifen auf, weil die Partialwellen mit gleichen Spin-Paritätsquantenzahlen  $J^P$ , aber verschiedenem Bahndrehimpuls  $L$  und Spin  $\ell$  des intermediären 2-Pion-Systems miteinander interferieren. Man beobachtet große Beiträge nur von den  $s$ -Wellen mit den Spin-Paritätsquantenzahlen  $J^P = 0^- (\epsilon\pi)$ ,  $J^P = 1^+ (\rho\pi)$  und  $J^P = 2^- (f\pi)$ . Von ihnen hat nur die  $J^P = 1^+ (\rho\pi)$ -Welle keine Struktur bei 1650 MeV. Da das  $A_3$  eine  $f\pi$ -Resonanz oder  $f\pi$ -Schwelleneffekt ist, von den  $f$ -Wellen aber nur die  $J^P = 2^- (f\pi)$ -Welle ein deutliches 200-300 MeV breites Signal bei 1650 MeV hat, ordnen wir dem  $A_3$

die Spin-Paritätsquantenzahlen  $J^P = 2^-$  zu in der Annahme, daß man höhere Spinzustände  $J \geq 4$  ausschließen kann. In den anderen  $J^P = 2^-$ -Wellen sieht man keine signifikante Struktur, die auf einen weiteren Zerfallskanal des  $A_3$  schließen läßt.

Im  $J^P = 0^- \epsilon\pi$ -Beitrag finden wir im Bereich von 1600-1700 MeV eine Anhäufung von Ereignissen, die wir nicht vollständig interpretieren können. In einem Blasenkammerexperiment beobachtet W.C. Harrison (HAR72) in der Reaktion  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^- p$  bei 13 GeV/c und 20 GeV/c ebenfalls eine Anhäufung von Ereignissen im  $\epsilon\pi$ -Beitrag. Es ist jedoch durchaus möglich, daß diese Anhäufung nur durch einen "Rausch"-Beitrag vorgetäuscht wird, der proportional zum Produktionswirkungsquerschnitt des 3-Pion-Systems ist. Dieser "Rausch"-Beitrag kann durch Addition vieler kleiner systematischer Fehler entstehen. Wir haben für unsere Analyse angenommen, daß die Partialwellenamplitude im Bereich von 100 MeV konstant ist und daß keine weiteren Endzustandswechselwirkungen, wie Mehrfachstreuungen, auftreten. Außerdem haben wir die Beiträge von den anderen Reaktionskanälen und von höheren Spin-Paritätszuständen vernachlässigt. Diese Fehler verschmieren die charakteristische Struktur im Dalitz-Diagramm und täuschen einen größeren Beitrag der  $J^P = 0^- (\epsilon\pi)$ -Welle vor. Das  $J^P = 0^- (\epsilon\pi)$  Matrixelement zeichnet sich nämlich gegenüber den Matrixelementen mit anderen Spin-Paritätsquantenzahlen in der Weise aus, daß es keinerlei Struktur hat, weder Minima noch Maxima.

Wir haben die Analyse in zehn 50 MeV breiten Streifen mit dem reduzierten Satz von Partialwellen wiederholt, um die Fehler abzuschätzen. Wegen der geringeren Statistik wählten wir die Ergebnisse aus den 100-MeV-Streifen-Analysen als Startwerte für unser Maximum-Likelihood-Verfahren und erhielten ebenso gute Anpassungen. In Abb. 16 sieht man das Ergebnis dieser Analyse. Man beobachtet keine sig-

nifikante Struktur im  $J^P = 0^- (\epsilon\pi)$ -Anteil. Die Verteilung des  $J^P = 1^+ (\rho\pi)$ -Anteils zeigt einen glatteren Verlauf und im  $J^P = 2^- (f\pi)$ -Anteil ist das Signal noch etwas ausgeprägter. Vergleicht man die Ergebnisse beider Untersuchungen, so kann man den Fehler der Analyse abschätzen. Er beträgt etwa 20-30 Ereignisse pro 100 MeV-Bereich und Partialwelle.

Bei den bisherigen Analysen hatten wir die Produktionsdichtematrix faktorisiert. Das bedeutet physikalisch vollständige Kohärenz bei der Produktion des 3-Pion-Systems. Wir haben diese Annahme überprüft, indem wir bei der Analyse zusätzlich zu dem reduzierten Satz von Partialwellen noch die Kohärenz-Parameter  $\alpha_{ik} = \rho_{ik} / \sqrt{\rho_{ii} \rho_{kk}}$  einführten, die den kohärenten Anteil messen:  $\alpha_{ik} = 1$  bei vollständiger Kohärenz,  $\alpha_{ik} = 0$  bei vollständiger Inkohärenz. Als Startwerte für das Maximum-Likelihood-Verfahren wählten wir die Ergebnisse von den Anpassungen mit der Kohärenzannahme und die Kohärenzparameter  $\alpha_{ik} = 1$ . Es zeigt sich, daß die Anpassung nur unwesentlich verbessert werden kann, wenn man alle Parameter frei läßt. Man stellt fest, daß alle Werte für die Kohärenzparameter  $\alpha_{ik}$  innerhalb ihrer Fehler mit 1 verträglich sind. Das Ergebnis ist naheliegend, wenn für jeden Spin-Paritätszustand nur ein stark ausgeprägter Zerfallskanal existiert. Dann sind die Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{ik}$  mit  $i \neq k$  klein, so daß ihr Beitrag zu der Verteilung im Dalitz-Diagramm relativ gering ist. Die Kohärenz-Parameter lassen sich dann nicht mehr sehr genau bestimmen.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Hauptbeiträge zum 3-Pion-Spektrum von den s-Wellen mit den Quantenzahlen  $J^P = 0^- (\epsilon\pi)$ ,  $J^P = 1^+ (\rho\pi)$  und  $J^P = 2^- (f\pi)$  stammen. Da das A3 ein  $f\pi$ -Signal ist, kann man die Spin-Paritätsquantenzahl  $J^P = 2^-$  dem A3 zuordnen, wenn man Spinzustände mit  $J \geq 4$  ausschließt.

### 3.2.3 Analyse des Eulerwinkels $\theta$

Für die Analyse des Polarwinkels  $\theta$  haben wir die differentielle Verteilung der Zerfallsvariablen über die beiden Variablen  $s_a$  und  $s_b$  und über die Azimutwinkel  $\phi$  und  $\psi$  integriert. Die Winkelverteilung  $\frac{d\sigma}{d \cos\theta}$  hängt dann nur noch ab von den Diagonalelementen der Produktions- und Zerfallsdichtematrix  $\rho_{JJ}$  und  $F_{JJ}$  sowie von wenigen Interferenztermen. Wählt man die Quantisierungsachse für das Zerfallskoordinatensystem  $\hat{S}$  senkrecht zur Zerfallsebene, so folgt aus den Ausführungen über die Zerfallsdichtematrix  $F_{KK}$ , im Teil B, daß für die drei Spin-Paritätszustände  $J^P = 0^-, J^P = 1^+$  und  $J^P = 2^-$  nur die folgenden Zerfallsdichtematrixelemente von Null verschieden sind:

für  $J^P = 0^-$   $F_{00}^{00}$ , für  $J^P = 1^+$   $F_{11}^{11}$  und  $F_{11}^{-1-1}$   
 für  $J^P = 2^-$   $F_{22}^{22}$ ,  $F_{22}^{00}$  und  $F_{22}^{-2-2}$  und der  
 Interferenzterm  $F_{02}^{00}$  zwischen dem  $J^P = 0^-$  und  $J^P = 2^-$ -  
 Zustand. Wenn man die beiden positiven auslaufenden Pionen nicht voneinander auszeichnet, ist das Vorzeichen der Zerfallsnormale unbestimmt, und es gilt für die Zerfallsdichtematrixelemente  $F_{11}^{11} = F_{11}^{-1-1}$  und  $F_{22}^{22} = F_{22}^{-2-2}$ .  
 Man erhält dann die folgende Beziehung für die Winkelverteilung  $\frac{d\sigma}{d \cos\theta}$ , wenn die Quantisierungsachse  $\vec{z}$  für das Produktionssystem ein polarer Vektor ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos\theta} = & F_{00}^{00} g_{00}^{00} + F_{11}^{11} [g_{11}^{11} (1 + \cos^2\theta) + g_{11}^{00} (1 - \cos^2\theta)] \\ & + F_{22}^{22} [g_{22}^{22} (\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cos^2\theta + \frac{1}{3} \cos^4\theta) + g_{22}^{11} (1 - \cos^4\theta) + g_{22}^{00} (\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \cos^2\theta + \frac{3}{4} \cos^4\theta)] \\ & + F_{22}^{00} [g_{22}^{22} (\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \cos^2\theta + \frac{3}{4} \cos^4\theta) + g_{22}^{11} (3 \cos^2\theta - 3 \cos^4\theta) + g_{22}^{00} (\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \cos^2\theta + \frac{9}{4} \cos^4\theta)] \\ & + \text{Re}(F_{02}^{00} g_{02}^{00}) (-1 + 3 \cos^2\theta) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Analyse des Dalitz-Diagramms sind in diesem Fall die Produktionsdichtematrixelemente auf 1 normiert ( $\sum_{J,J} \rho_{JJ} = 1$  für jeden Spin  $J$ ) und die Zerfallsdichtematrixelemente  $\rho_{MM}$  in der Weise, daß das Integral  $\int \frac{d\sigma}{d\cos\theta}$  die Anzahl der Ereignisse angibt.

Durch eine Analyse dieser Winkelverteilung kann man jedoch nicht alle Dichtematrixelemente bestimmen. Entwickelt man die Winkelverteilung  $\frac{dN}{d\cos\theta}$  nach den Legendre-Polynomen  $P_\ell(\cos\theta)$

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P^\ell(\cos\theta),$$

so stellt man fest, daß nur die Koeffizienten  $a_0, a_2$  und  $a_4$  von Null verschieden sind:

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{J,m} \frac{1}{2J+1} F_{JJ}^{mm}$$

$$a_2 = F_{11}^{11} \left( \frac{1}{3} - \rho_{11}^{00} \right) + \frac{2}{7} \left( F_{22}^{00} - 2 F_{22}^{22} \right) \left( -1 + 2\rho_{22}^{00} + 3\rho_{22}^{11} \right) + 2 \operatorname{Re} \left( \rho_{02}^{00} F_{02}^{00} \right)$$

$$a_4 = \frac{1}{35} \left( 3 F_{22}^{00} + F_{22}^{22} \right) \left( 1 + 5\rho_{22}^{00} - 10\rho_{22}^{11} \right)$$

Wichtig ist der Koeffizient  $a_4$ . Durch ihn kann man eine Abschätzung für die Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{22}^{MM}$  machen, weil alle Diagonalelemente der Dichtematrizen positiv sind. Da der Spin-Paritätsanteil  $J^P = 2^-$  überwiegend aus der ( $f\pi$ )-s-Welle, d.h. dem A3 (Abb. 15 und Abb. 16), besteht, kann man mit den Produktionsdichtematrixelementen  $\rho_{22}^{MM}$  die Polarisation des A3 abschätzen.

Man erhält die Werte für die Legendre-Koeffizienten  $a_\ell$  aus den Momenten  $\langle P^\ell \rangle = \langle D_{00}^\ell \rangle = \frac{2}{2\ell+1} a_\ell$ . Wir haben sie für zwei verschiedene Bezugssysteme, dem Gottfried-Jackson-System und dem

Helizitätssystem, untersucht. Im Gottfried-Jackson-System ist die Quantisierungsachse durch den Impuls des 3-Pion-Systems im Gesamtschwerpunktsystem definiert. Vor unserer Untersuchung haben wir uns anhand von Monte-Carlo-Ereignissen überzeugt, daß die Winkelverteilung durch die Auswahl der Daten nicht verfälscht wird. Es zeigt sich, daß die Datenauswahl nur eine ganz schwache Asymmetrie verursacht, die vernachlässigt werden kann. Abb. 17 zeigt die Verteilung der  $\langle P^\ell \rangle$ -Momente für das Gottfried-Jackson- und das Helizitätssystem. Man beobachtet, daß in beiden Systemen die gemessenen Werte für die  $\langle P^\ell \rangle$ -Momente mit  $\ell = 1, 3, 5$  und  $6$  mit Null verträglich sind.\* In der Verteilung für das  $\langle P^2 \rangle$ -Moment sieht man eine Struktur im A1- und A3-Bereich für beide Bezugssysteme. Beim  $\langle P^4 \rangle$ -Moment ist sie nicht so stark ausgeprägt. Wichtig ist jedoch, daß das  $\langle P^4 \rangle$ -Moment in den beiden Systemen ein verschiedenes Vorzeichen hat. Aus den  $\langle P^4 \rangle$ -Momenten erhält man die Legendre-Koeffizienten  $a_4$  für die beiden Bezugssysteme:

$$a_4^{G.J} = 85,3 \pm 24,2 \quad a_4^H = -44,8 \pm 24,2$$

Da der Faktor  $\frac{1}{35}(3 F_{22}^{00} + F_{22}^{22})$  stets positiv ist, kann man den Wertebereich für die Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{22}^{MM}$  einschränken. Man könnte ihn weiter einschränken, wenn man die Größe der Zerfallsdichtematrixelemente kennen würde. In der Analyse des Dalitz-Diagramms wird aber nur ihre Summe  $\frac{1}{5} \sum_m F_{22}^{mm}$  gemessen, die auf die Anzahl der 3-Pion-Ereignisse mit  $J^P = 2^-$  normiert ist. Daraus kann man jedoch eine obere und untere Schranke für den Faktor bestimmen. In Abb. 18 wird das Verfahren graphisch dargestellt. Der zunächst physikalisch mögliche Wertebereich für die Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{22}^{MM}$  wird durch das Dreieck ABC beschrieben, das durch die Gerade  $a_4 = 0$  in einen Bereich für positive und einen für negative

\* Man kann nicht daraus schließen, daß es keine Beiträge von Zuständen mit Spin  $J = 3$  gibt, weil in der Gleichung für das  $\langle P^6 \rangle$ -Moment eine Differenz enthalten ist, so daß sich von Null verschiedene Terme gegenseitig aufheben können. Die Tatsache, daß wir Spin-Zustände mit  $J = 3$  nicht zu berücksichtigen brauchen, schließen wir aus der Analyse des Dalitz-Diagramms.

Legendre-Koeffizienten  $a_4$  eingeteilt wird. Benutzt man die gemessene Anzahl von 3-Pion-Ereignissen mit  $J^P = 2^-$ , so erhält man ein breites Band möglicher Werte (in Abb. 18 schraffiert), das durch die Annahmen  $F_{22}^{00} = 0$  und  $F_{22}^{22} = 0$  begrenzt wird. Nur im Überlappungsbereich des Bandes mit dem Dreieck ABC liegen die Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{22}^{MM}$ , die mit dem gemessenen  $J^P = 2^-$ -Wirkungsquerschnitt und dem  $\langle P^4 \rangle$ -Moment übereinstimmen. Es wurde vergeblich versucht, diesen Bereich weiter einzuschränken, indem man den gemessenen Wert des  $\langle P^2 \rangle$ -Moments auswertet mit Annahmen über das Produktionsdichtematrixelement  $\rho_{11}^{00}$  und den Zerfallsdichtematrixelementen  $F_{00}^{00}$  und  $F_{11}^{11}$ , die aus dem gemessenen Wirkungsquerschnitt für die Zustände mit  $J^P = 0^-$  und  $J^P = 1^+$  berechnet wurden. Man erhielt stets keine weiteren Einschränkungen für den Wertebereich der Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{22}^{MM}$ .

Die Analyse liefert die folgenden Schranken für das Gottfried-Jackson-System:

$$\rho_{22}^{00} > 0.47 \quad \rho_{22}^{11} < 0.13 \quad \rho_{22}^{22} < 0.27$$

für das Helizitätssystem:

$$\rho_{22}^{00} < 0.23 \quad \rho_{22}^{11} > 0.27 \quad \rho_{22}^{22} < 0.23$$

Für die Helizitätserhaltung beim Streuprozeß erwartet man  $\rho_{22}^{00} = 1$ . Mit diesen Schranken kann man die Helizitätserhaltung im s-Kanal wegen  $\rho_{22}^{00} < 0.23$  im Helizitätssystem ausschließen. Bei dieser Untersuchung wurden die Meßfehler des  $J^P = 2^-$ -Wirkungsquerschnitts und des  $\langle P^4 \rangle$ -Momentes nicht berücksichtigt. Wie Abb. 18 jedoch zeigt, genügt es für die Nicht-Erhaltung der s-Kanal-Helizität, daß der Legendre-Koeffizient  $a_4^H$  negativ ist. Nur die obere Schranke für  $\rho_{22}^{00}$  liegt höher ( $\rho_{22}^{00} < 0.4$ ). Mit dem Wertebereich für die Produktionsdichtematrixelemente im Gottfried-Jackson-System kann man die Helizitätserhaltung im t-Kanal (der die gekreuzte Reaktion  $p\bar{p} \rightarrow \pi^- A_3^+$  beschreibt) nicht

ausschließen. J.T. Donohue (DON71) weist darauf hin, daß die Helizitätserhaltung im t-Kanal mit dem Deck-Effekt erklärt werden kann, was mit der Interpretation des A3 als einem kinematischen Effekt verträglich wäre.

#### 4. Zusammenfassung und Überblick

Die Analyse des Dalitz-Diagramms zeigt, daß man dem A3 die Spin-Paritäts-Quantenzahlen  $J^P = 2^-$  zuordnen kann, wenn man Spin-Zustände mit  $J \geq 4$  ausschließt. Mit diesen Quantenzahlen ist das A3 nach der Regge-Theorie die erste Regge-Rekurrenz des Pions auf der Pion-Trajektorie. Nach dem Quarkmodell kann man das A3 in ein C-Parität  $(C=+1)$ -Oktett mit dem Quarkbahndrehimpuls  $\mathcal{L} = 2$  und dem Quarkspin  $\mathcal{S} = 0$  einordnen. In der Analyse wurden keine Effekte gefunden, die eindeutig auf eine Resonanzinterpretation schließen lassen. Mit einer Interpretation des A3 als kinematischen Effekt sind die folgenden Tatsachen verträglich: das A3 ist ein sehr breites Signal 240 MeV oberhalb der  $f\pi$ -Schwelle, das nur in diffraktiven Produktionsprozessen beobachtet wird und nur den einen Zerfallskanal in  $f\pi$  hat. Der Spin J und die Parität stimmen mit der empirischen Gribov-Morrison-Regel (MOR70) für Diffraktions-Dissoziations-Prozesse überein:

$$P_{A3} = P_{\pi} (-1)^J.$$

Will man das A3-Signal mit einem reggesierten  $f\pi$ -Deck-Modell beschreiben, so erwartet man Helizitätserhaltung im t-Kanal bei einer Partialwellenentwicklung der Regge-Amplitude mit dominantem Anteil einer  $J^P = 2^-$  ( $f\pi$ )-s-Welle.

## Teil B: Theoretischer Teil

Der theoretische Teil gliedert sich in zwei Teile, wovon der erste den Formalismus für die Spin-Paritätsanalyse eines 3-Pion-Systems beschreibt. Dabei wird nicht, wie sonst üblich, der Endzustand in Resonanz und Untergrund aufgeteilt; stattdessen werden die Anteile der verschiedenen Partialwellen in Abhängigkeit von der 3-Pion-Masse bestimmt. Im zweiten Teil werden zwei aus dem Formalismus resultierende Methoden diskutiert: die Analysen der Eulerwinkel  $\phi, \theta, \psi$ , die die Orientierung der Zerfallskonfiguration gegenüber der Produktionskonfiguration wiedergeben, und die Analyse des Dalitz-Diagramms, das den Kaskadenzerfall des 3-Pion-Systems beschreibt.

### 1. Spin-Paritätsanalyse für 3-Pion-Zustände

Für die Herleitung des Formalismus wird angenommen, daß das 3-Pion-System in einer Reaktion mit 4 auslaufenden Teilchen erzeugt wird

$$\pi p \rightarrow \pi \pi \pi p .$$

Diese Annahme bedeutete jedoch keine Einschränkung des allgemeinen Formalismus, wenn über die Variablen integriert wird, die den Produktionsprozeß beschreiben.

#### 1.1 Die Variablen für die Spin-Paritätsanalyse

Will man eine Reaktion mit 2 einlaufenden und 4 auslaufenden (spinlosen) Teilchen beschreiben, so braucht man 24 Variable (6x4 Viererimpulskomponenten), von denen jedoch 6 Variable physikalisch uninteressant sind, weil sie die Orientierung (Drehung und Impuls) des Gesamtsystems beschreiben. 10 weitere Variable sind durch die Massen der 6 Teilchen und den Energie-Impulserhaltungssatz festgelegt. Von den verbleibenden 8 Variablen beschreiben 3

Variable in der Quasi-2-Teilchenreaktion  $\pi p \rightarrow (3\pi)p$  die Produktion des zu untersuchenden 3-Pion-Systems. Man wählt als Variable i.a. die Gesamtenergie  $\sqrt{s}$ , den Viererimpulsübertrag  $\sqrt{t}$  sowie die 3-Pion-Masse  $m_{3\pi}$ .

$$s = (\pi_{\text{ein}}^+ + p_{\text{ein}})^2$$

$$-t = (p_{\text{ein}} - p_{\text{aus}})^2$$

$$m_{3\pi}^2 = (\pi_{\text{ein}} + p_{\text{ein}} - p_{\text{aus}})^2 \quad (\text{Mit } p \text{ bzw. } \pi \text{ werden die Viererimpulse des Protons bzw. Pions bezeichnet})$$

Mit den restlichen 5 Variablen wird der Zerfall des 3-Pion-Systems bei fester Masse  $m_{3\pi}$  eindeutig beschrieben. Wir wählen als unabhängige Variable die drei Eulerwinkel  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  (sie geben die räumliche Orientierung des zerfallenden 3-Pion-Systems an gegenüber der Produktionskonfiguration aus  $\pi_{\text{ein}}$ ,  $p_{\text{ein}}$  und  $p_{\text{aus}}$ ) und die beiden \*) Variablen  $s_a$  und  $s_b$  des Dalitz-Diagramms. Sie beschreiben die Kinematik der 3 Pionen im 3-Pion-Ruhsystem.

$$s_a = (\pi_b + \pi_c)^2 = ((3\pi) - \pi_a)^2.$$

Zu diesen 8 Variablen kommen noch weitere, diskrete Variable, wenn man den Spin und Isospin der Teilchen berücksichtigt, wie z.B. die Helizität  $\Lambda = \{\lambda_{p_{\text{ein}}}, \lambda_{p_{\text{aus}}}\}$  des ein- und auslaufenden Nukleons in der Reaktion  $\pi N \rightarrow (3\pi)N$ .

Unbekannt sind die Quantenzahlen  $K = \{J, L_a, l_a, I, I_a\}$ ,

\*) Die dritte Variable  $s_c$  erhält man aus der Beziehung  $m_{3\pi}^2 + 3m_\pi^2 = s_a + s_b + s_c$ .

die einen 3-Pion-Zustand eindeutig beschreiben.  
 $\vec{J} = (J_x, J_y, M = J_z)$  ist sein Gesamtdrehimpuls und  
 $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$  sein Isospin, der für die Reaktion  
 $\pi^+ p \rightarrow (3\pi)^+ p$  mit  $I = 1, I_3 = 1$  bei der Partialwellenanalyse  
festgesetzt wurde. Der Zerfall des 3-Pion-Systems wird als  
Kaskadenzerfall (Abb. 7) über ein intermediäres 2-Pion-  
System (bc) mit dem Spin  $\vec{\lambda}_a = \{\lambda_{ax}, \lambda_{ay}, \lambda_a = \lambda_{az}\}$  und Isospin  
 $\vec{I}_a = \{I_{a1}, I_{a2}, I_{a3}\}$  beschrieben. Der Isospin des Pions (a)  
wird mit  $\vec{i}_a = \{i_{a1}, i_{a2}, i_{a3}\}$  bezeichnet.  $\vec{L}_a$  ist der Bahn-  
drehimpuls des Pions (a) bezüglich des intermediären  
2-Pion-Systems (bc). Er kann wegen

$$\vec{J} = \vec{L}_a + \vec{\lambda}_a$$

nicht beliebige Werte annehmen. Der Isospin  $I_a$  des 2-Pion-  
Systems (bc) ist wegen der Bose-Statistik für 2-Pion-  
Zustände mit dem Spin  $\lambda_a$  (= Bahndrehimpuls der beiden  
Pionen b und c) verknüpft. Der Isospinzustand ist bezüglich  
einer Vertauschung von zwei Pionen für  $I_a = 0$  und  $I_a = 2$   
symmetrisch, für  $I_a = 1$  antisymmetrisch. Der Term, der die  
Impulsabhängigkeit beschreibt, liefert den Faktor  $(-1)^{\lambda_a}$ ,  
weil die Vertauschung der beiden Pionen äquivalent mit  
einer Spiegelung um die Mitte ihrer Verbindungslinie ist.  
Da der gesamte 2-Pion-Zustand wegen der Bose-Statistik  
symmetrisch ist, erhält man:

$$(-1)^{\lambda_a + I_a} = +1.$$

Die unbekannt Parität P des 3-Pion-Zustandes wird aus  
dem Bahndrehimpuls  $L_a$ , dem Spin  $\lambda_a$  und den Paritäten  $P_i$   
der 3 Pionen berechnet.

$$P = P_a \cdot P_b \cdot P_c (-1)^{L_a + \lambda_a} = (-1)^{L_a + \lambda_a + 1}.$$

## 1.2 Die Produktionsamplitude

Für die Spin-Paritätsanalyse faktorisiert man die Reaktionsamplitude, entsprechend Abb. 7, in einen Term, der die Produktion, und einen anderen, der den Zerfall des 3-Pion-Systems beschreibt.

$$\text{Amp} \sim \sum_{K,M,\Lambda} A_{KMA}(\vec{x}_p) B_{KM}(\vec{x}_z) \quad (\text{B.1})$$

$\vec{x}_p = \{s, t, m_{3\pi}\}$  ist eine Abkürzung für die drei kinematischen Variablen der Produktionsamplitude  $A_{KMA}$ . Wenn man das Helizitätssystem nicht als Bezugssystem wählt, erhält man die Produktionsamplitude  $A_{KMA}$  aus der Helizitätsamplitude  $\tilde{A}_{K\Lambda\lambda_{3\pi}}(\vec{x}_p)$  anhand der folgenden Beziehung:

$$A_{KMA}(\vec{x}_p) = \sum_{\lambda_{3\pi}} d_{M\lambda_{3\pi}}^J(\beta) \tilde{A}_{K\Lambda\lambda_{3\pi}}(\vec{x}_p).$$

Dabei ist  $\lambda_{3\pi}$  die Helizität des 3-Pion-Zustandes und  $\beta(\vec{x}_p)$  der Winkel zwischen der 3-Pion-Helizitätsachse und der Quantisierungsachse  $\vec{z}$ .

$\vec{x}_z = \{m_{3\pi}, \phi, \theta, \psi, s_a, s_b\}$  ist die Abkürzung für die 6 kinematischen Variablen der Zerfallsamplitude  $B_{KM}$ , welche auf 1 normiert ist:

$$\int B_{KM}(\vec{x}_z) B_{KM}^*(\vec{x}_z) d\phi d\cos\theta d\psi ds_a ds_b = 1.$$

Die Summation in (B.1) erfolgt unter Berücksichtigung der Bosesymmetrie über alle Quantenzahlen  $K$  für das System  $(a(bc))$ , wobei  $a, b, c$  eine gerade Permutation der Pionen  $\pi_1^+, \pi_2^+, \pi^-$  ist.

Die Abhängigkeit der Reaktionsamplitude von den Produktionsvariablen  $\vec{x}_p$  wird für die Spin-Paritätsanalyse nicht im Detail untersucht. Sie ist zum Teil unbekannt, und man müßte für sie modellabhängige Annahmen machen. Für die Analyse der Zerfallsvariablen ist es nur wichtig, daß bei

einer Quasi-2-Teilchenreaktion 3-Pion-Zustände mit festen Quantenzahlen K und M erzeugt werden. Man integriert daher die Reaktionsamplitude über die Produktionsvariable  $\vec{x}_p$  und erhält die differentielle Verteilung  $\hat{\sigma}(\vec{x}_z)$  der Zerfallsvariablen  $\vec{x}_z$ :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\vec{x}_z) &= \frac{d\sigma(\vec{x}_z)}{d\vec{x}_z} = \sum_{\Lambda} \int d\vec{x}_p \left| \sum_{KM} A_{KMA}(\vec{x}_p) B_{KM}(\vec{x}_z) \right|^2 \\ &= \sum_{\substack{KK' \\ MM' \\ \Lambda\Lambda'}} \hat{\rho}_{KK'} B_{KM}(\vec{x}_z) B_{K'M'}^*(\vec{x}_z) \end{aligned} \quad (B.2)$$

Dabei ist die Produktionsdichtematrix

$$\hat{\rho}_{\substack{KK' \\ MM' \\ \Lambda\Lambda'}} = \int d\vec{x}_p A_{KMA}(\vec{x}_p) A_{K'M'\Lambda'}^*(\vec{x}_p)$$

so normiert, daß das Integral  $\int \hat{\sigma}(\vec{x}_z) d\vec{x}_z = N_{\text{Ereignisse}}$  die Anzahl der experimentellen Ereignisse angibt. Weil man die  $m_{3\pi}$ -Abhängigkeit der Produktions- und Zerfallsamplitude nicht kennt, wird in unserer Analyse die Integration in mehreren 100 MeV breiten Bereichen ausgeführt in der Annahme, daß sich die Reaktionsamplitude innerhalb eines solchen Bereichs nicht zu sehr ändert.

In unserem Experiment ist das einlaufende Nukleon nicht polarisiert, und die Polarisation des auslaufenden Nukleons wird nicht gemessen. Man braucht dann für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten nur die Dichtematrixelemente  $\hat{\rho}_{\substack{KK' \\ MM' \\ \Lambda\Lambda'}}$  berücksichtigen, die bezüglich der Helizität  $\Lambda$  dia-

gonal sind, und es gilt für die von der Nukleonpolarisation unabhängige Produktionsdichtematrix  $\rho_{\substack{KK' \\ MM'}}$

$$\rho_{\substack{KK' \\ MM'}} = \sum_{\Lambda} \hat{\rho}_{\substack{KK' \\ MM' \\ \Lambda\Lambda}}$$

### 1.3 Die Zerfallsamplitude

Im Mittelpunkt der Spin-Paritätsanalyse steht die Untersuchung der Zerfallsamplitude

$$B_{KM}(\vec{x}_z) = \langle p_a i_{a3}, p_b i_{b3}, p_c i_{c3} | T | K, M, I_3 \rangle,$$

die sich relativ einfach beschreiben läßt, wenn man den Helizitätsformalismus von M. Jacob und G.C. Wick (JAC69), (WIC62) benutzt. Die Entwicklung der Amplitude erfolgt in mehreren Schritten:

- a) Transformation der Zerfallskonfiguration in ein Bezugssystem.
- b) Projektion des 3-Pion-Zustandes  $\langle J, m \rangle$  auf einen Helizitätszustand des 3-Teilchen-Systems ((a)(bc)).
- c) Projektion des 2-Pion-Zustandes  $|\ell_a, \lambda_a\rangle$  auf einen Helizitätszustand des 2-Teilchen-Systems ((b)(c)).
- d) Berücksichtigung des (a)(bc) Bahndrehimpulses  $L_a$ .
- e) Berücksichtigung des Isospins  $I_a$  des (bc)-Systems.
- f) Berechnung des reduzierten T-Matrixelements.

#### 1.3.a Transformation der Zerfallskonfiguration in ein Bezugssystem

Für die Spin-Paritätsanalyse eines Teilchensystems wird ein festes Bezugssystem so ausgewählt, daß die Dichtematrix  $\rho_{\substack{KK' \\ MM'}}$  eine relativ einfache Struktur hat (wie z.B.

im Gottfried-Jackson-System). Dieses Bezugssystem wird durch ein rechtshändiges cartesisches Koordinatensystem (S) beschrieben, dessen Achsen X, Y, Z durch die Impulsrichtung des einlaufenden Pions und ein- und auslaufenden Protons im 3-Pion-Ruhesystem definiert sind.

$$\vec{X} = \vec{Y} \times \vec{Z} \quad \vec{Y} = \frac{\vec{p}_{\pi\text{ein}} \times \vec{p}_{\pi\text{aus}}}{|\vec{p}_{\pi\text{ein}} \times \vec{p}_{\pi\text{aus}}|} \quad \vec{Z} = \frac{\vec{p}_{\pi\text{ein}}}{|\vec{p}_{\pi\text{ein}}|}$$

Entsprechend wird durch die Impulsrichtungen der 3 zerfallenden Pionen im 3-Pion-Ruhesystem das Zerfallskoordinatensystem ( $\hat{S}$ ) festgelegt.

$$\vec{X} = \vec{Y} \times \vec{Z} \quad \vec{Y} = \frac{\vec{p}_{\pi a} \times \vec{p}_{\pi b}}{|\vec{p}_{\pi a} \times \vec{p}_{\pi b}|} \quad \vec{Z} = \frac{\vec{p}_{\pi c}}{|\vec{p}_{\pi c}|}$$

In unserer Analyse werden bei der Festlegung des Zerfallskoordinatensystems ( $\hat{S}$ ) die beiden gleichgeladenen Pionen nicht voneinander unterschieden, so daß die Zerfallsamplitude symmetrisch bezüglich eines Austausches von beiden sein muß. Würde man dagegen eine Auswahl treffen, etwa nach der kinetischen Energie im 3-Pion-Ruhesystem, so müßte man für die Spin-Paritätsanalyse die Anzahl der verschiedenen Amplituden verdoppeln.

Man transformiert nun das Zerfallskoordinatensystem ( $\hat{S}$ ) in das Bezugssystem, indem man um die 3 Eulerwinkel  $\phi, \theta$  und  $\psi$  dreht, die die Orientierung der Zerfallskonfiguration im  $\vec{x}_z$ -Raum beschreiben. Entsprechend der Abb.9 gilt:

$$\cos \theta = \vec{Z} \cdot \vec{Z} \quad \text{stets } \sin \theta \geq 0$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Z}}{\sin \theta} \quad \sin \phi = \frac{\vec{Y} \cdot \vec{Z}}{\sin \theta} \quad (\text{Azimut um } \hat{Z}\text{-Achse})$$

$$\cos \psi = \frac{-\vec{Z} \cdot \vec{X}}{\sin \theta} \quad \sin \psi = \frac{\vec{Z} \cdot \vec{Y}}{\sin \theta} \quad (\text{Azimut um } Z\text{-Achse})$$

Für die Zerfallsamplitude  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  erhält man

$$B_{KM}(\vec{x}_z) = \sum_m D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) G_{K,m}(m_{3\pi}, s_a, s_b) \quad (B.3)$$

wobei  $G_{K,m}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$  den Zerfall für eine spezielle Orientierung im  $\vec{x}_z$ -Raum (nämlich für  $\phi=0$ ,  $\theta=0$  und  $\psi=0$ ) beschreibt und  $D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi)$  die bekannten Drehmatrixelemente sind (z.B. JAC 59).

### 1.3.b Projektion des $|J, m\rangle$ -Zustandes auf einen Helizitätszustand des Quasi-2-Teilchensystems ((a) (bc))

Folgt man dem Formalismus von G.C.Wick (WIC 62), so erhält man für die Projektion eines  $|J, m\rangle$ -Zustandes auf einen Helizitätszustand des ((a)(bc))-Systems:

$$G_{Km}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \sum_{\lambda_a} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{m, -\lambda_a}^{J*}(\phi_a, \theta_a, -\phi_a) H_{\kappa, \lambda_a}(m_{3\pi}, s_a, s_b) \quad (B.4)$$

wobei über alle Helizitäten  $\lambda_a$  des 2-Pion-Systems (bc) summiert wird.  $\phi_a$  und  $\theta_a$  sind die Polarwinkel des Impulsvektors  $\vec{p}_a$  im Zerfallskoordinatensystem  $\hat{S}$ . Es ist stets  $\phi_a = 0$  oder  $\pi$ , da alle Impulsvektoren in der Zerfallsebene  $\vec{Y}=0$  liegen. Mit den Polarwinkeln  $\phi_a$  und  $\theta_a$  werden keine neuen unabhängigen Variablen eingeführt, denn wie die folgende Überlegung zeigt, lassen sie sich aus den Variablen  $m_{3\pi}, s_a$  und  $s_b$  berechnen.

Die Zerfallskonfiguration und damit auch die Winkel  $\phi_a$  und  $\theta_a$  sind durch 12 Variable (entsprechend  $3 \times 4$  Vierervektorkomponenten) eindeutig festgelegt. Von diesen entfallen 3 auf die drei Pionmassen, 3 auf den Schwerpunktsimpuls ( $\vec{p}_{3\pi} = 0$ ) des 3-Pionsystems und 3 auf dessen räumliche Orientierung, die durch die 3 Eulerwinkel ( $\phi=0$ ,  $\theta=0$  und  $\psi=0$ ) beschrieben wird. Für die verbleibenden 3

\*Hätte das Teilchen a den Spin  $s_a$  mit der Helizität  $\kappa_a$ , dann müßte in der Gleichung (B.4)  $\lambda_a$  durch  $\tilde{\lambda}_a = \kappa_a - \lambda_a$  ersetzt werden.

Variablen kann man z.B. die gegen Lorentz-Transformationen invarianten Skalarprodukte aus den Vierervektoren wählen: das Quadrat der 3-Pion-Masse  $m_{3\pi}^2 = (\pi_a + \pi_b + \pi_c)^2$  und die beiden Variablen des Dalitz-Diagramms  $s_a = (\pi_b + \pi_c)^2$  und  $s_b = (\pi_c + \pi_a)^2$ .

1.3.c Projektion des  $|\ell_a, \lambda_a\rangle$ -Zustandes auf einen Helizitätszustand des 2-Teilchensystems ((b)(c))

Es gibt keinen formalen Unterschied zwischen der Projektion des 3-Pion-Zustandes  $|J, m\rangle$  auf einen ((a)(bc))-Helizitätszustand und der eines 2-Pion-Zustandes  $|\ell_a, \lambda_a\rangle$  auf einen ((b)(c))-Helizitätszustand. Man kann also nach G.C.Wick (WIC62) die Gleichung (B.4.) benutzen, wenn man alle das 3-Pion-System betreffenden Größen durch die dem 2-Pion-System entsprechenden ersetzt:  $J \rightarrow \ell_a, m \rightarrow -\lambda_a, -\lambda_a \rightarrow 0,$

$$\phi_a \rightarrow \varphi_a, \theta_a \rightarrow \vartheta_a$$

$$\sqrt{\frac{2\ell_a + 1}{4\pi}} D_{-\lambda_a 0}^{\ell_a} (\varphi_a, \vartheta_a, -\varphi_a)$$

Wenn die Teilchen b und c Pionen sind, entfällt die Summation über die Helizitätszustände, da es nur einen gibt, der Null beträgt\*.  $\varphi_a$  und  $\vartheta_a$  sind die Polarkoordinaten des Impulsvektors  $\vec{p}_b$  im 2-Pion-Ruhsystem (bc), wenn man  $\vec{p}_a$  als z'-Achse wählt. (Es ist stets  $\varphi_a = 0$  oder  $\pi$ ). Die Polarwinkel  $\varphi_a$  und  $\vartheta_a$  sind ebenfalls keine neuen

---

\* Hätten die Teilchen b und c einen von Null verschiedenen Spin und die Helizitäten  $\kappa_b$  und  $\kappa_c$ , so müßte man 0 durch  $\kappa_b - \kappa_c$  ersetzen. Diese Helizitäten  $\kappa_b$  und  $\kappa_c$  sind im 2-Pion-Ruhsystem definiert. Sie müssen daher ins 3-Pion-Ruhsystem ( $\hat{S}$ ) transformiert werden, in welchem  $\kappa_a$  definiert ist. Die dazu notwendige Lorentz-Transformation läßt sich durch eine Rotation um die Wigner-Winkel (STA57) beschreiben.

unabhängigen Variablen. Sie sind wie die Winkel  $\phi_a$  und  $\theta_a$  von den Variablen  $m_{3\pi}$ ,  $s_a$  und  $s_b$  abhängig. Der Zustand  $|\ell_a, \lambda_a\rangle$  ist im 2-Pion-Ruhsystem definiert und muß für die weitere Analyse ins 3-Pion-Ruhsystem transformiert werden. Die dazu notwendige Lorentz-Transformation erfolgt in Richtung der Quantisierungsachse für die Helizität  $\lambda_a$  (Impulsrichtung  $\vec{p}_a$ ), so daß sich die Helizität  $\lambda_a$  bei der Transformation nicht ändert.

1.3.d Berücksichtigung des (a)(b)-Bahndrehimpulses  $L_a$

Da man bei einer Partialwellenanalyse nicht an der Projektion  $\lambda_a$  des Gesamtdrehimpulses  $J$  interessiert ist, sondern an dem Bahndrehimpuls  $L_a$  und dem Spin  $\ell_a$  des 2-Teilchensystems (bc), muß man den  $|J, L_a, \ell_a\rangle$ -Zustand aus dem Helizitätszustand  $|J, 0, \lambda_a\rangle$  herausprojizieren. Man folgt wieder dem Formalismus von M.Jacob und G.C.Wick (JAC59) und erhält für die Kopplung der beiden Zustände:

$$\langle J, L_a, \ell_a | J, 0, \lambda_a \rangle = \sqrt{\frac{2L_a + 1}{2J + 1}} \begin{matrix} L_a & \ell_a & J \\ C_0 & -\lambda_a & -\lambda_a \end{matrix}$$

wobei  $C_{m_1 m_2}^{j_1 j_2 J}$  der entsprechende Clebsch-Gordan-Koeffizient ist.\*

\* Hätte das Teilchen a den Spin  $s_a$  und die Helizität  $\kappa_a$ , so müßte dies durch einen weiteren Clebsch-Gordan-Koeffizienten berücksichtigt werden.

$$\langle J, L_a, \ell_a | J, \kappa_a, \ell_a \rangle = \sqrt{\frac{2L_a + 1}{2J + 1}} \begin{matrix} L_a & \ell_a & J & s_a & \ell_a & |s_a + \ell_a| \\ C_0 & \kappa_a - \lambda_a & \kappa_a - \lambda_a & C_{\kappa_a - \lambda_a} & \kappa_a - \lambda_a & \kappa_a - \lambda_a \end{matrix}$$

1.3.e Berücksichtigung des Isospins  $I_a$

Bisher wurde außer acht gelassen, daß das intermediäre 2-Pion-System verschiedene Isospinzustände haben kann. Man berücksichtigt dies durch Multiplikation der Zerfallsamplitude mit den entsprechenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

$$\langle i_a=1, i_{a3}=1; i_b=1, i_{b3}=1; i_c=1, i_{c3}=1 | I=1, I_3=1 \rangle =$$

$$C_{i_b3 i_c3 I_{a3}}^{1 1 I_a} \times C_{I_{a3} i_{a3} 1}^{I_a I_a 1}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten koppeln die Isospinzustände zweier Pionen zum Isospinzustand des intermediären 2-Pion-Systems und diesen mit dem Isospinzustand des dritten Pions zum Isospinzustand des 3-Pion-Systems.

1.3.f Reduziertes T-Matrixelement

Faßt man die Ergebnisse der vorigen Abschnitte zusammen, so erhält man für die Zerfallsamplitude  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  mit der Normierung  $\int B_{KM}(\vec{x}_z) B_{KM}^*(\vec{x}_z) d\phi d\cos\theta d\psi ds_a ds_b = 1$

die folgende Beziehung:

$$B_{KM}(\vec{x}_z) = 4 \sqrt{\frac{m_{3\pi} s_a^{1/2}}{p_a q_a}} \sqrt{(2\ell_a + 1)(2L_a + 1)} C_{i_b3 i_c3 I_{a3}}^{1 1 I_a} C_{I_{a3} i_{a3} 1}^{I_a I_a 1} \times$$

$$\times \left[ \sum_{\lambda_a} C_{\lambda_a 0}^{L_a \ell_a J} D_{\lambda_a 0}^{\ell_a^*}(\varphi_a, \vartheta_a, -\varphi_a) \left[ \sum_m D_{m-\lambda_a}^{J^*}(\phi_a, \theta_a, -\phi_a) \right] \right] \times \quad (B.5)$$

$$\times \left. D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) \right\} T_K(m_{3\pi}, s_a, s_b)$$

$T_K(m_{3\pi}, s_a, s_b)$  ist das reduzierte T-Matrixelement, das die dynamische Abhängigkeit der Partialwellenamplitude

$T_K |K, M, I_3\rangle$  beschreibt. Man führt die dynamische Abhängigkeit in den Formalismus ein, wenn man sich auf eine end-

liche Summe der Partialwellenamplituden beschränkt und Modellvorstellungen der Analyse zugrunde legt, bei denen Relationen zwischen der Größe und der Phase einiger Amplituden bei resonanten 2- und 3-Pion-Systemen bestehen (wie z.B. bei der  $2^+_{\rho\pi}$ -Welle im A2-Bereich). Für unsere Analyse nehmen wir an, daß diese dynamische Abhängigkeit nur durch einen Watson-Endzustandsfaktor (GOL64) für das intermediäre 2-Pion-System bestimmt ist sowie durch einen Durchdringungsfaktor für die Zentrifugalbarriere (BLA52). Eine explizite  $m_{3\pi}$ -Abhängigkeit wird nicht angenommen.

$$T_K(m_{3\pi}, s_a, s_b) = p_a^{L_a + \frac{1}{2}} q_a^{-L_a - \frac{1}{2}} \exp(i\delta_a) \sin \delta_a$$

$p_a$  ist der Impuls des Pions a im 3-Pion-Ruhsystem,  $q_a$  der des Pions b im 2-Pion-Ruhsystem (bc) und  $\delta_a$  die elastische bc-Strauphasenverschiebung. In unserer Analyse beschränken wir uns auf die 3 resonanten 2-Pion-Partialwellen  $\delta_0^0, \delta_1^1, \delta_2^0$ , die im betrachteten 3-Pion-Massenbereich möglich sind. Sie wurden als  $\ell$ -Wellen-Breit-Wigner-Resonanzen  $\epsilon, \rho^0, f$  parametrisiert und mit  $m_\epsilon = 700$  MeV,  $\Gamma_\epsilon = 450$  MeV;  $m_\rho = 765$  MeV,  $\Gamma_\rho = 130$  MeV und  $m_f = 1265$  MeV,  $\Gamma_f = 150$  MeV

$$\exp(i\delta_a) \sin \delta_a = \frac{m_{bc} \gamma_{bc}(W_{bc})}{(m_{bc}^2 - W_{bc}^2) - i m_{bc} \gamma_{bc}(W_{bc})}$$

Dabei ist  $W_{bc} = s_a^{1/2}$  die invariante Masse des 2-Pion-Systems (bc),  $m_{bc}$  der entsprechende Zentralwert für das 2-Pion-System (bc). Die massenabhängige Zerfallsbreite  $\gamma_{bc}(W_{bc})$  wurde nach J.M. Blatt und V.F. Weisskopf (BLA52) berechnet.

$$\gamma_{bc}(W_{bc}) = \Gamma_0 \left(\frac{q_a}{q_0}\right)^{2\ell_a + 1} \frac{v_{\ell_a}(x_a)}{v_{\ell_a}(x_0)}$$

mit  $v_0(x) = 1$ ,  $v_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $v_2(x) = \frac{1}{9+3x^2+x^4}$   
 $x_i = q_i \cdot R$  ( $i = 0, a$ )

$\Gamma_0$  ist die oben angegebene Zerfallsbreite,  $q_0$  ist der Im-

puls des Pions für den Zentralwert des zerfallenden 2-Pion-Systems,  $R$  ist der Wechselwirkungsradius, für den  $R = 5,07 \text{ GeV}^{-1} = 1 \text{ fm}$  nach R.D. Tripp (TRI68) angenommen wurde.

## 2. Spezielle Spin-Paritätsanalysen

### 2.1 Die allgemeine Dichtematrix

Das Hauptproblem bei einer allgemeinen Partialwellenanalyse ist die große Anzahl der zu messenden Größen. In unserer Analyse haben wir uns auf die Beiträge von Amplituden mit  $L+l \leq 3$ ,  $l \leq 2$  beschränkt in der Annahme, daß Beiträge mit höheren Bahndrehimpulsen durch den Zentrifugal-barrierrefaktor unterdrückt werden. Da das  $A_3$  überwiegend in  $f\pi$  zerfällt, haben wir die  $J^P = 0^-(f\pi)$ -Amplitude zum Satz von Partialwellen hinzugefügt. Dann müssen insgesamt 16 verschiedene Kombinationen für die Quantenzahlen  $K$  berücksichtigt werden. Beachtet man noch die verschiedenen Spinprojektionen  $M$  des Gesamtdrehimpulses  $J$ , so erhält man 64 verschiedene Amplituden.<sup>+</sup> Das bedeutet: die auf S.32 f definierte Dichtematrix  $\rho_{KK'}$  ist eine  $64 \times 64$  Matrix mit 4096 komplexen Elementen, die jedoch nicht alle unabhängig voneinander sind, in einer vollständigen Analyse aber bestimmt werden müssen.

Die Anzahl der zu messenden Größen wird auf die Hälfte reduziert, wenn man die Hermitezität der Dichtematrix  $\rho_{KK'}$   $\rho_{MM'}$

$$\begin{array}{l} \rho_{KK'} = \rho_{K'K}^* \\ \rho_{MM'} = \rho_{M'M}^* \end{array}$$

berücksichtigt.

---

<sup>+</sup> Unterscheidet man die beiden positiven Pionen in der Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- p$ , etwa nach ihrer kinetischen Energie im 3-Pion-Ruhsystem, so verdoppelt sich die Anzahl der Amplituden.

Es sind dann nur noch 4096 reelle Größen zu bestimmen. Wegen der Paritätserhaltung beim Produktionsprozeß  $\pi p \rightarrow (3\pi) p$  gibt es eine weitere Beziehung zwischen den Dichtematrixelementen, die im Anhang hergeleitet wird. Man muß dabei auf die Definition der Quantisierungsachse  $\vec{Z}$  im Produktionskoordinatensystem S achten. Für den Fall, daß die  $\vec{Z}$ -Achse ein polarer Vektor ist (wie auf Seite 26 definiert wurde), erhält man für die Dichtematrixelemente die Relation:

$$\rho_{\substack{KK' \\ MM'}} = (-1)^{L_a + \ell_a + L_{a'} + \ell_{a'} + J + J' + M - M'} \begin{matrix} \rho_{KK'} \\ -M - M' \end{matrix} \quad (\text{B.6})$$

Ist dagegen die  $\vec{Z}$ -Achse ein axialer Vektor, d.h. sie ist die Normale auf der Produktionsebene  $(\vec{Z} = \frac{\vec{p}_{\pi\text{ein}} \times \vec{p}_{\text{paus}}}{|\vec{p}_{\pi\text{ein}} \times \vec{p}_{\text{paus}}|})$ ,

$$\vec{X} = \vec{Y} \times \vec{Z}, \quad \vec{Y} = \frac{\vec{p}_{\pi\text{ein}}}{|\vec{p}_{\pi\text{ein}}|}, \quad \text{so gilt:}$$

$$\rho_{\substack{KK' \\ MM'}} = 0 \quad \text{für } L_a + \ell_a + L_{a'} + \ell_{a'} + M - M' = \text{ungerade} \quad (\text{B.7})$$

Es sind dann nur noch 2098 reelle Größen zu messen. Die Normierung der Dichtematrix  $\rho_{\substack{KK' \\ MM'}}$  reduziert die Anzahl um 1.

Es ist nicht sehr sinnvoll, bei einer Spin-Paritätsanalyse alle rund 2000 Größen zu messen, einmal wegen der damit verbundenen mathematischen Schwierigkeiten, zum anderen, weil die in der Methode gewonnene Genauigkeit in keinem Verhältnis steht zu der experimentell bedingten Unsicherheit bei der Auswahl der Daten. Um die Anzahl der zu messenden Größen zu verkleinern, gibt es drei Möglichkeiten:

- a) Wenn man sehr viele experimentelle Daten hat, kann man die Spin-Paritätsanalyse in genügend kleinen Volumenelementen des durch die Produktionsvariable  $\vec{x}_p$  aufgespannten Raumes durchführen, so daß man die Produktionsamplitude durch konstante Werte approximieren kann. Man erhält dann für die Dichtematrix

$$\frac{d\rho_{KK'}}{d\vec{x}_p} = \sum_{\Lambda} A_{K\Lambda} A_{K'M'\Lambda}^*$$

und kann die  $A_{K\Lambda}$  als komplexe Parameter wählen, die zu bestimmen sind. Insgesamt sind es 256 komplexe Zahlen (das sind  $64 \times 4$  wegen der Helizität  $\Lambda$ ). Berücksichtigt man die Paritätserhaltung und beschränkt sich auf die Messung der relativen Phase der Produktionsamplituden, so bleiben nach der Normierung (B.2) nur noch  $254$  reelle Parameter übrig.

- b) Man kann einige Dichtematrixelemente festlegen, wenn man Annahmen über die Produktionsamplitude  $A_{K\Lambda}(\vec{x}_p)$  macht.
- c) Die dritte Möglichkeit haben wir für unsere Analyse gewählt. Integriert man den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\sigma(\vec{x}_z)$  (B2) über geeignete Zerfallsvariable, so verschwinden die Beiträge von einigen der Produkte  $B_{KM}(\vec{x}_z) B_{K'M'}^*(\vec{x}_z)$ , und die Bestimmung der entsprechenden Dichtematrixelemente erübrigt sich.

## 2.2 Analyse der Eulerwinkel $\phi, \theta, \psi$

Wenn man den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\hat{\sigma}(\vec{x}_z)$  über die beiden Variablen des Dalitz-Diagramms  $s_a$  und  $s_b$  integriert, so kann man nach S.M. Berman und M. Jacob (BER65) aus den unten definierten Momenten  $\langle D_{nN}^j \rangle$  den Spin  $J$  und die Parität  $P$  des 3-Pion-Zustandes ermitteln. In

diesem Abschnitt wird gezeigt, daß mit der Momentenmethode eine vollständige Bestimmung von mehreren Spin-Paritätsanteilen im 3-Pion-Spektrum ohne zusätzliche Annahmen nicht möglich ist.

Die Momente  $\langle D_{nN}^j \rangle$  der drei Eulerwinkel sind definiert als

$$\begin{aligned} \langle D_{nN}^j \rangle &= \sum_{\text{Ereignisse}} D_{nN}^j(\phi, \theta, \psi) \\ &= \int dN_o D_{nN}^j(\phi, \theta, \psi) \\ &= \int d\Omega_3 \frac{dN_o}{d\Omega_3} D_{nN}^j(\phi, \theta, \psi), \end{aligned}$$

wobei  $\frac{dN_o}{d\Omega_3} = \frac{d^3N_o}{d\phi d\cos\theta d\psi}$  die Winkelverteilung der drei Eulerwinkel ist. Man erhält sie aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\hat{\sigma}(\vec{x}_z)$  (B.2) nach Integration über die beiden Variablen  $s_a$  und  $s_b$ . Da bei dieser Integration Information über den intermediären 2-Pion-Zustand verloren geht, kann man nur noch die Parität  $P = (-1)^{L+\ell+1}$  des 3-Pion-Zustandes, aber nicht mehr die Quantenzahlen  $L$  und  $\ell$  bestimmen. <sup>+</sup>

$$\frac{dN_o(m_{3\pi})}{d\Omega_3} = \sum_{\substack{JJ' \\ PP' \\ MM' \\ mm'}} \rho_{JJ'} D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) D_{m'M'}^{J'}(\phi, \theta, \psi) F_{JJ'}^{PP', mm'}(m_{3\pi})$$

(B.8)

mit  $F_{JJ'}^{PP', mm'}(m_{3\pi}) = \int ds_a ds_b f_{JPM}(m_{3\pi}, s_a, s_b) f_{J'P'm'}^{*}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$

$f_{JPM}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$  sind phänomenologische Zerfallsampli-

<sup>+</sup> Bei der Integration über nur eine Variable des Dalitz-Diagramms wird in der Analyse von S.U. Chung (CHU71) der Spin  $\ell$  des intermediären 2-Pion-Systems gemessen. Sein Formalismus kann aber für die Untersuchung eines geladenen 3-Pion-Systems nicht benutzt werden, weil in ihm die Interferenz zwischen den Resonanzbändern nicht vollständig berücksichtigt wird.

tuden, die weder von den Eulerwinkeln noch von der Spinprojektion M abhängen. Folgt man den in Abschnitt B.1.3 besprochenen Modellvorstellungen, so kann man die Zerfallsamplituden  $f_{JPM}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$  mit den dort definierten Amplituden  $G_{Km}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$  beschreiben.

$$f_{JPM}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \sum_{\substack{L_a \ell_a \\ L_b \ell_b}} G_{Km}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$$

Für die Analyse der Eulerwinkel ist es günstig, die Normierung der Produktions- und Zerfallsamplituden so zu ändern, daß für die Produktionsdichtematrixelemente der einzelnen Spin-Paritätszustände gilt:

$$\sum_{\substack{J \\ M}} \rho_{JJ} = 1.$$

Die Zerfallsdichtematrixelemente sind dann so zu normieren, daß das Integral  $\int (dN_0/d\cos\theta) d\cos\theta$  die Anzahl der beobachteten Ereignisse angibt.

Für die Berechnung der  $\langle D_{nN}^j \rangle$ -Momente setzt man in ihre Definitionsgleichung die Winkelverteilung  $dN_0/d\Omega_3$  ein und benutzt das Additionstheorem, die Orthogonalitäts- und Symmetrierelation der  $D_{nN}^j$ -Funktionen:

$$D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) D_{m'M'}^{J'}(\phi, \theta, \psi) = \sum_{j=|J-J'|}^{J+J'} \sum_{n, N=-j}^j D_{nN}^j(\phi, \theta, \psi) C_{MM'N}^{JJ'j}$$

$$C_{mm'n}^{JJ'j} \int d\Omega_3 D_{nN}^j(\phi, \theta, \psi) D_{n'N'}^{j'}(\phi, \theta, \psi) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{nn'} \delta_{NN'}$$

( $\delta_{ik}$  ist das bekannte Kronecker-Symbol  $\delta_{ik} = 1$  für  $i=k$ , sonst  $\delta_{ik} = 0$ ).

(B.9)

$$D_{m',M'}^J(\phi, \theta, \psi) = (-1)^{M'-m'} D_{-m',-M'}^J(\phi, \theta, \psi)$$

Man erhält ein nichtlineares Gleichungssystem für die Elemente der Produktionsdichtematrix  $\rho_{JJ'}$  und Zerfallsdichtematrix  $F_{JJ'}$

$$\langle D_{nN}^j \rangle = \frac{8\pi^2}{2j+1} \sum_{\substack{JJ' \\ PP' \\ MM' \\ mm'}} (-1)^{M'} C_{M'-M'}^{J J' j} \rho_{JJ'} (-1)^{-m'} \langle \dots \rangle$$

$$C_{m-m' n}^{J J' j} F_{JJ'} \quad (B.10)$$

Da es wiederum Relationen zwischen den Dichtematrixelementen gibt, braucht man nicht alle Matrixelemente zu bestimmen.

a) Die Dichtematrizen sind hermitesch.

$$\begin{matrix} \rho_{JJ'} = \rho_{J'J}^* \\ PP' & P'P \\ MM' & M'M \end{matrix} \quad \begin{matrix} F_{JJ'} = F_{J'J}^* \\ PP' & P'P \\ mm' & m'm \end{matrix}$$

b) Aus der Paritätserhaltung beim Streuprozeß folgt entsprechend (4) und (5) für die Produktionsdichtematrixelemente je nach Definition der Quantisierungsachse  $\vec{Z}$  im Produktionskoordinatensystem S: für den Fall, daß die  $\vec{Z}$ -Achse ein polarer Vektor ist

$$\rho_{JJ'} = (-1)^{J+J'+M-M'} \rho_{JJ'} \quad \begin{matrix} PP' \\ MM' \end{matrix} \quad \begin{matrix} PP' \\ -M-M' \end{matrix} \quad (B.6')$$

bzw. für den Fall, daß die  $\vec{Z}$ -Achse ein axialer Vektor ist:

$$\rho_{\substack{JJ' \\ PP' \\ MM'}} = 0 \quad \text{für } PP'(-1)^{M-M'} = -1 \quad (\text{B.7'})$$

Die Beziehung zwischen den Zerfallsdichtematrizen berechnet man aus den Amplituden  $G_{K,m}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$ , indem man die Relationen aus dem Anhang benutzt. Man erhält unabhängig von der Definition der  $\hat{Z}$ -Achse im Produktionssystem S für den Fall, daß die  $\hat{Z}$ -Achse im Zerfallssystem ( $\hat{S}$ ) als polarer Vektor gewählt ist:

$$f_{J P m}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = (-1)^{J+m+1} P \cdot f_{J P -m}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$$

Daraus folgt:

$$F_{\substack{JJ' \\ PP' \\ mm'}} = (-1)^{J+J'+m-m'} PP' F_{\substack{JJ' \\ PP' \\ -m-m'}} \quad (\text{B.6''})$$

Analog zur Produktionsdichtematrix hat die Zerfallsdichtematrix eine einfachere Paritätsrelation zwischen den einzelnen Matrixelementen, wenn man die  $\hat{Z}$ -Achse (Quantisierungsachse) im Zerfallssystem ( $\hat{S}$ ) als axialen Vektor wählt. Man erhält nach S.M. Berman und Jacob

$$f_{J P m}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = (-1)^{m+1} P \cdot f_{J P m}(m_{3\pi}, s_a, s_b).$$

Das bedeutet, daß nur die Zerfallsamplituden mit gerader (ungerader) Parität und ungeradem (geradem) m von Null verschieden sind. Für die Zerfallsdichtematrix folgt daraus:

$$F_{\substack{JJ' \\ PP' \\ mm'}} = 0 \quad \text{für } P \cdot (-1)^m = +1 \quad \text{oder } P' \cdot (-1)^{m'} = +1 \quad (\text{B.7''})$$

c) Eine weitere Relation zwischen den Zerfallsamplituden  $f_{JPm}$  erhält man, wenn man die beiden gleichgeladenen Pionen nicht voneinander unterscheidet (wie etwa nach ihrer kinetischen Energie), da dann im Koordinatensystem ( $\hat{S}$ ) für die 3-Teilchenzerfallskonfiguration die Richtung der Zerfallsnormalen nicht festgelegt ist. Bezüglich des Austausches zweier identischer Teilchen ist die phänomenologische Zerfallsamplitude  $f_{JPm}(m_{3\pi}, s_a, s_b)$  symmetrisch, und man erhält nach S.M. Berman und M. Jacob für den Fall, daß die Zerfallsnormale als Quantisierungsachse gewählt wurde,

$$f_{JPm}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = (-1)^J f_{JP-m}(m_{3\pi}, s_b, s_c)$$

bzw.

$$\begin{array}{l} F_{JJ'} = (-1)^{J+J'} \\ PP' \\ mm' \end{array} \quad \begin{array}{l} F_{JJ'} \\ PP' \\ -m-m' \end{array}$$

Beachtet man alle Relationen zwischen den Dichtematrixelementen, so stellt man trotzdem fest: bei einer vollständigen und modellunabhängigen Spin-Paritätsanalyse des 3-Pion-Systems mit der Momentenmethode muß man stets mehr unbekannte Dichtematrixelemente  $\rho_{JJ'}$  und  $F_{JJ'}$  bestimmen,

$$\begin{array}{ll} PP' & PP' \\ MM' & mm' \end{array}$$

als man Gleichungen mit den  $\langle D_{nN}^J \rangle$ -Momenten zur Verfügung hat.

Beschränkt man sich auf den gleichen Satz von Partialwellen ( $J^P = 0^-, 1^+, 1^-, 2^+, 2^-, 3^+$ ) + wie im Abschnitt B.2.1 über die allgemeine Dichtematrix, so hat man aus 192  $\langle D_{nN}^J \rangle$ -Momenten 368 reelle Größen zu bestimmen (284 für die Produktionsdichtematrix und 85 für die Zerfallsdichtematrix), wenn

+ Man beachte, daß  $J^P = 3^-$  ausgeschlossen ist und damit alle zugehörigen Dichtematrixelemente.

man die Produktions- und die Zerfallsnormale als Quantisierungsachse wählt. Wegen der großen Anzahl der zu ermittelnden Matrixelemente haben wir das nicht-lineare Gleichungssystem (B.10) nicht weiter untersucht.

Die Momentenanalyse wird nicht einfacher, wenn man die Anzahl der Matrixelemente verringert, indem man über die Eulerwinkel  $\phi$  und  $\psi$  integriert. Bei dieser Integration verschwinden die Matrixelemente mit verschiedenem  $m$  ( $M$ ), weil der Beitrag zu den  $D_{mM}^j$ -Funktionen nur ein Phasenfaktor  $e^{-im\phi}$  bzw.  $e^{-iM\psi}$  ist. Es sind dann nur noch 18 reelle Größen für die Zerfallsdichtematrix, bzw. 50 reelle Größen für die Produktionsdichtematrix zu bestimmen. Für deren Berechnung stehen aber nur noch 28  $\langle D_{no}^j \rangle$  - bzw.  $\langle D_{oN}^j \rangle$ -Momente zur Verfügung, bei einer Integration über  $\phi$  und  $\psi$  sogar nur noch 7  $\langle D_{oo}^j \rangle$ -Momente.

Für eine direkte Untersuchung der Verteilung (B.8) der drei Eulerwinkel gelten dieselben Überlegungen wie bei der Momentenanalyse bezüglich der Anzahl der zu bestimmenden Dichtematrixelemente. Wenn man die Winkelverteilung über die beiden Azimutwinkel  $\phi$  und  $\psi$  integriert, bleiben wegen der Orthogonalität der  $D_{mn}^j$ -Funktionen (B.9) nur noch die Diagonalelemente und wenige Interferenzterme übrig. Beschränkt man sich auf die drei Spin-Paritätszustände, die nach unserer Analyse des Dalitz-Diagramms das 3-Pion-Spektrum beschreiben,  $J^P = 0^-$ ,  $J^P = 1^+$  und  $J^P = 2^-$ , und wählt die Zerfallsnormale als Quantisierungsachse  $\hat{Z}$ , so erhält man wegen (B.7''):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = & F_{00} g_{00} + F_{11} [g_{11}(1+\cos^2\theta) + g_{01}(1-\cos^2\theta)] \\ & + F_{22} [g_{22}(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{8}\cos^4\theta) + g_{11}(1-\cos^4\theta) + g_{00}(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{3}{4}\cos^4\theta)] \\ & + F_{00} [g_{22}(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{3}{4}\cos^4\theta) + g_{11}(3\cos^2\theta - 3\cos^4\theta) + g_{00}(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{9}{4}\cos^4\theta)] \\ & + \text{Re}(F_{02} g_{02})(-1+3\cos^2\theta) \end{aligned}$$

Ist die Quantisierungsachse  $\hat{z}$  für das Produktionssystem ein polarer Vektor, so gilt (wie im Anhang gezeigt wird):

$$\rho_{-1-1}^{11} = \rho_{11}^{11}, \quad \rho_{-2-2}^{22} = \rho_{22}^{22} \quad \text{und} \quad \rho_{-1-1}^{22} = \rho_{11}^{22} .$$

Zeichnet man die beiden positiven Pionen nicht voneinander aus, so ist das Vorzeichen der Zerfallsnormalen unbestimmt und es gilt  $F_{-1-1}^{11} = F_{11}^{11}$  und  $F_{-2-2}^{22} = F_{22}^{22}$ . Wenn man die Produktionsdichtematrixelemente so normiert, daß für alle Spins  $J$   $\sum_M \rho_{MM}^{JJ} = 1$  gilt, und außerdem die Zerfallsdichtematrixelemente auf die Anzahl der Ereignisse  $N_{\text{Ereignis}}$  ( $\int \frac{dN}{d\cos\theta} d\cos\theta = N_{\text{Ereignis}}$ ) normiert, dann sind nur noch 3 Produktionsdichtematrixelemente, 4 Zerfallsdichtematrixelemente und ein gemeinsamer Interferenzterm zu bestimmen. Entwickelt man diese Winkelverteilung nach Legendre-Polynomen  $\frac{dN}{d\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} P^{\ell}(\cos\theta)$ , so stellt man fest, daß nur drei Legendre-Koeffizienten  $a_{\ell}$  von Null verschieden sind:

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{J,m} \frac{1}{2J+1} F_{mm}^{JJ}$$

$$a_2 = F_{11}^{11} \left( \frac{1}{3} - \rho_{00}^{11} \right) + \frac{2}{7} (F_{00}^{22} - 2F_{22}^{22}) (-1 + 2\rho_{00}^{22} + 3\rho_{11}^{22}) + 2 \operatorname{Re}(\rho_{00}^{02} F_{00}^{02})$$

$$a_4 = \frac{1}{35} (3F_{00}^{22} + F_{22}^{22}) (1 + 5\rho_{00}^{22} - 10\rho_{11}^{22})$$

Trotz der Nebenbedingung, daß alle Diagonalelemente positiv sind, kann man kein Dichtematrixelement exakt bestimmen.

Die Werte der Legendre-Koeffizienten  $a_{\ell}$  erhält man aus den Momenten  $\langle P^{\ell} \rangle = \langle D_{00}^{\ell} \rangle$

$$a_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2^{\ell-1}} \langle P^{\ell} \rangle .$$

Wichtig ist der Koeffizient  $a_4$ . Weil der Faktor  $\frac{1}{35}(3 F_{22}^{00} + F_{22}^{22})$  stets positiv ist, wird das Vorzeichen von  $a_4$  durch den Faktor  $(1 + 5 \rho_{22}^{00} - 10 \rho_{22}^{11})$  bestimmt. Erhält man in der Analyse einen signifikant negativen Wert für den Koeffizienten  $a_4$ , so muß stets  $\rho_{22}^{00} < 0.4$  gelten, und man kann die Helizitätserhaltung im gewählten Bezugssystem beim Streuprozess ausschließen. Dieser Schluß ist nur möglich, wenn man Beiträge von Spin-Paritätszuständen mit  $J^P = 2^+$  und  $J \geq 3$  vernachlässigen kann.

### 2.3 Analyse des Dalitz-Diagramms

Bei der Analyse des Dalitz-Diagramms integriert man den differentiellen Wirkungsquerschnitt über die drei Eulerwinkel  $\phi$ ,  $\theta$  und  $\psi$  und studiert die Abhängigkeit von den Massenquadraten  $s_a$  und  $s_b$  der beiden 2-Pion-Systeme (bc) und (ca).

Im Vergleich zu der Momentenmethode ist die Analyse des Dalitz-Diagramms einfacher, weil keine Interferenzterme zwischen verschiedenen Spin-Paritätszuständen des 3-Pionspektrums auftreten können. Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß man bei ihr die Anteile der einzelnen Partialwellen direkt mißt. Dagegen enthalten die  $\langle D_{nN}^j \rangle$ -Momente Beiträge von allen Spin-Paritätszuständen mit  $J \geq \frac{j}{2}$  (bzw.  $J \geq \frac{j}{2} - \frac{1}{2}$  für Interferenzterme).

Um die Dichte des Dalitz-Diagramms zu berechnen, setzt man in den differentiellen Wirkungsquerschnitt (B.2) den expliziten Ausdruck (B.3) für die Zerfallsamplitude  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  ein und integriert über die drei Eulerwinkel  $\phi, \theta, \psi$ .

$$\hat{\sigma}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \sum_{\substack{KK' \\ J=J' \\ M}} \rho_{KK'} \hat{F}_{KK'}^M(m_{3\pi}, s_a, s_b) \quad (B.11)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \hat{F}_{KK'}^M(m_{3\pi}, s_a, s_b) &= \int d\phi d\cos\theta d\psi B_{KM}(\vec{x}_z) B_{K'M'}(\vec{x}_z) \\ &= \sum_{\substack{mm' \\ MM'}} \int d\phi d\cos\theta d\psi D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) D_{m'M'}^{J'}(\phi, \theta, \psi) \\ &G_{K,m}(m_{3\pi}, s_a, s_b) G_{K',m'}^*(m_{3\pi}, s_a, s_b). \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität (B.9) der  $D_{mM}^J$ -Funktionen verschwinden alle Beiträge mit ungleichem Spin  $J$  und ungleichen Projektionen  $M$  (und  $m$ ). Benutzt man noch die Invarianz gegenüber Raumspiegelung, so verschwinden auch die Zerfallsdichtematrixelemente  $F_{KK'}$  mit gleichem Spin  $J$  aber unterschiedlicher Parität  $P$ . Man kann sich daher auf die Bestimmung der bezüglich  $J$  und  $M$  diagonalen Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{KK'}$  beschränken und die Summation über  $M$  unmittelbar ausführen, da die Zerfallsdichtematrix  $\hat{F}_{KK'}$  von  $M$  unabhängig ist.

Wählt man wieder den Satz von Partialwellen, den wir für unsere Analyse benutzen, so sind 48 reelle Größen für die Produktionsdichtematrix zu ermitteln und 26 reelle Größen für die Zerfallsdichtematrix, die sich nach (B.11) faktorisieren läßt. Da aber beide Dichtematrizen nur von denselben Summationsindizes  $K$  und  $K'$  abhängen, genügt es, 48 reelle Größen zu bestimmen.

In unserer Analyse haben wir zunächst angenommen, daß sich auch die Produktionsdichtematrix faktorisieren läßt.

$$\rho_{KK'} = r_{KM}(m_{3\pi}) r_{K'M'}^*(m_{3\pi})$$

Es ist dann

$$\hat{\sigma}(m_{3\pi}, s_a, s_b) = \sum_{KK'} \tilde{P}_{KK'}^J(m_{3\pi}, s_a, s_b)$$

für  $J=J'$

mit der Normierung

$$N_{\text{Ereignisse}} = \int \hat{\sigma}(m_{3\pi}, s_a, s_b) dm_{3\pi} ds_a ds_b$$

$$\text{und } \tilde{P}_{KK'}^J = \sum_{MM'} \int r_{KM}(m_{3\pi}) B_{KM}(\vec{x}_z) r_{K'M'}^*(m_{3\pi}) B_{K'M'}^*(\vec{x}_z)$$

$$d\phi d\cos\theta d\psi.$$

Da der absolute Betrag der Zerfallsamplitude  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  auf 1 normiert ist (B.5), sind in einer vollständigen Analyse des Dalitz-Diagramms nur noch der Real- und Imaginärteil der  $\sum_M r_{KM}$  zu bestimmen. Man braucht dann nur noch 26 reelle Größen zu ermitteln. Sie geben Betrag und relative Phase der Partialwellen an.

Die Faktorisierung der Produktionsdichtematrix bedeutet, daß man vollständige Kohärenz zwischen den 3-Pion-Partialwellen mit denselben Spin-Paritätsquantenzahlen  $J$  und  $P$ , aber verschiedenem  $L$  und  $\ell$  annimmt. Man kann diese Kohärenzannahme leicht überprüfen, indem man einen Kohärenzfaktor

$$\alpha_{KK'}^{MM} = \frac{\rho_{KK'}^{MM}}{\sqrt{\rho_{KK}^{MM} \rho_{K'K'}^{MM}}}$$

in die Analyse einführt. Es ist  $\alpha_{KK'}^{MM} = 1$  bei vollständiger Kohärenz und  $\alpha_{KK'}^{MM} = 0$  bei Inkohärenz.

Zusammenfassend kann man sagen, daß man bei einer vollständigen Partialwellenanalyse wegen der Interferenzterme sehr viele Größen bestimmen muß, wenn man alle Zerfallsvariablen gleichzeitig untersuchen will. Ohne zusätzliche modellabhängige Annahmen kann man die große Anzahl der zu bestimmenden Größen nur reduzieren, indem man den differentiellen Wirkungsquerschnitt über geeignete Zerfallsvariable integriert. Es ist nicht sehr günstig, über die Variablen des Dalitz-Diagramms zu integrieren und die Verteilung der 3 Eulerwinkel  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  mit Hilfe der Momentenmethode zu untersuchen. Besser ist es, über die 3 Eulerwinkel zu integrieren und die Verteilung im Dalitz-Diagramm zu studieren. Weil es keine Interferenzterme zwischen den verschiedenen Spin-Paritätszuständen gibt, sind nur noch relativ wenige Größen zu bestimmen. Mit dieser Methode (Analyse des Dalitz-Diagramms) haben wir den Spin und die Parität des  $A_3$  bestimmt.

A n h a n g

Einige Beziehungen zwischen den Dichtematrixelementen

In diesem Anhang werden Relationen zwischen Dichtematrixelementen hergeleitet, die man wegen der Paritätserhaltung beim Streuprozess erhält. Man geht dabei von der Tatsache aus, daß bei einer Paritätsoperation nur die pseudoskalaren (Helizitäten) und vektoriellen (polare Vektoren) Größen ihr Vorzeichen, bzw. ihre Richtung, umkehren. Skalare und pseudovektorielle (axiale Vektoren) Größen bleiben dagegen unverändert. Es ist daher wichtig zu unterscheiden, ob die Quantisierungsachse  $\vec{z}$  für die Spinprojektion ein axialer oder ein polarer Vektor ist.

Wenn die Quantisierungsachsen  $\vec{z}$  und  $\vec{z}'$  polare Vektoren sind, ändert sich bei einer Paritätsoperation folgendes:

$$\begin{aligned} \vec{X} \rightarrow -\vec{X}, \vec{Y} \rightarrow -\vec{Y}, \vec{Z} \rightarrow -\vec{Z}, \vec{X} \rightarrow -\vec{X}, \vec{Y} \rightarrow \vec{Y}, \vec{Z} \rightarrow -\vec{Z}, \Phi \rightarrow -\Phi, \Theta \rightarrow \Theta, \Psi \rightarrow -\Psi \\ \Lambda \rightarrow -\Lambda, M \rightarrow -M, m \rightarrow -m, \lambda_a \rightarrow -\lambda_a, \Phi_a \rightarrow -\Phi_a, \Theta_a \rightarrow \Theta_a, \Psi_a \rightarrow -\Psi_a, \mathcal{J}_a \rightarrow -\mathcal{J}_a \end{aligned}$$

Für die Reaktionsamplitude (B.1) folgt daraus:

$$\sum_{KM} A_{KM\Lambda}(\vec{x}_p) B_{KM}(\phi, \theta, \psi, m_{3\pi}, s_a, s_b) = \sum_{KM} A_{K-M-\Lambda}(\vec{x}_p) B_{K-M}(-\phi, \theta, -\psi, m_{3\pi}, s_a, s_b).$$

In diese Gleichung setzt man den expliziten Ausdruck für die Zerfallsamplitude  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  (B.3) ein und berücksichtigt die folgenden Relationen (EDM64)

$$D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) = (-1)^{m-M} D_{-m-M}^J(-\phi, \theta, -\psi) \quad (R.1)$$

$$D_{m-\lambda_a}^{J*}(\phi_a, \theta_a, -\phi_a) = (-1)^{m+\lambda_a} D_{-m\lambda_a}^{J*}(-\phi_a, \theta_a, \phi_a) \quad (R.2)$$

$$D_{-\lambda_a 0}^{\ell_a}(\varphi_a, \vartheta_a, -\varphi_a) = (-1)^{\lambda_a} D_{\lambda_a 0}^{\ell_a}(-\varphi_a, \vartheta_a, \varphi_a) \quad (R.3)$$

$$C_{0 -\lambda_a -\lambda_a}^{L_a \ell_a J} = (-1)^{L_a + \ell_a - J} C_{0 \lambda_a \lambda_a}^{L_a \ell_a J}$$

Damit sich der absolute Betrag der Reaktionsamplitude (B.1) nicht ändert, muß für jeden Summanden gelten:

$$A_{K M \Lambda}(\vec{x}_p) = (-1)^{L_a + \ell_a + M - J} c A_{K - M - \Lambda}(\vec{x}_p)$$

wobei der Phasenfaktor  $c$  ( $|c| = 1$ ) nur von den Helizitäten des ein- und auslaufenden Protons abhängt, welche aber nicht gemessen werden.

Man kann daher  $c = 1$  annehmen und erhält dann für die Dichtematrix:

$$\begin{aligned} \rho_{\substack{K K' \\ M M'}} &= \sum_{\Lambda} \int d\vec{x}_p (A_{K M \Lambda}(\vec{x}_p) A_{K' M' \Lambda}(\vec{x}_p)) \\ &= \sum_{\Lambda} \int d\vec{x}_p (-1)^{L_a + \ell_a + M - J + L_a' + \ell_a' + M' - J'} A_{K - M - \Lambda}(\vec{x}_p) A_{K' - M' - \Lambda}(\vec{x}_p) \\ &= (-1)^{L_a + \ell_a + L_a' + \ell_a' + M + M' - J - J'} \rho_{\substack{K K' \\ -M - M'}} \\ &= (-1)^{L_a + \ell_a + L_a' + \ell_a' + J + J' + M - M'} \rho_{\substack{K K' \\ -M - M'}} \end{aligned}$$

$$\text{wegen } 1 = (-1)^{-2M'} = (-1)^{-2J} = (-1)^{-2J'}$$

Für den Fall, daß die Quantisierungsachse  $\vec{z}$  ein axialer Vektor,  $\vec{z}$  ein polarer Vektor ist, ändert sich bei der Paritätsoperation folgendes:

$$\vec{X} \rightarrow -\vec{X}, \vec{Y} \rightarrow -\vec{Y}, \vec{Z} \rightarrow \vec{Z}, \vec{\hat{X}} \rightarrow -\vec{\hat{X}}, \vec{\hat{Y}} \rightarrow -\vec{\hat{Y}}, \vec{\hat{Z}} \rightarrow -\vec{\hat{Z}}, \vec{\Phi} \rightarrow \pi - \vec{\Phi}, \Theta \rightarrow \pi - \Theta, \Psi \rightarrow \Psi$$

$$\Lambda \rightarrow \Lambda, M \rightarrow M, m \rightarrow -m, \lambda_a \rightarrow -\lambda_a, \Phi_a \rightarrow -\Phi_a, \Theta_a \rightarrow \Theta_a, \Psi_a \rightarrow -\Psi_a, \mathcal{D}_a \rightarrow \mathcal{D}_a$$

Analog zum vorigen Fall wird der explizite Ausdruck für die Zerfallsamplitude  $B_{KM}(\vec{x}_z)$  (B.3) in die Reaktionsamplitude (B.1) eingesetzt. Nach den obigen Überlegungen erhält man:

$$A_{KMA}(\vec{x}_p) = (-1)^{L_a + \ell_a - M} K_{KM-\Lambda}(\vec{x}_p)$$

wenn man die Relation (R.1) durch

$$D_{mM}^J(\phi, \theta, \psi) = (-1)^{J+M-m} D_{-mM}^J(\pi - \phi, \pi - \theta, \psi) \quad (R.1')$$

ersetzt.

Daraus folgt für die Dichtematrix  $\rho_{\substack{KK' \\ MM'}}$

$$\rho_{\substack{KK' \\ MM'}} = (-1)^{L_a + \ell_a + L_{a'} + \ell_{a'} - M - M'} \rho_{\substack{KK' \\ MM'}}$$

$$= (-1)^{L_a + \ell_a + L_{a'} + \ell_{a'} + M - M'} \rho_{\substack{KK' \\ MM'}} \quad \text{wegen } 1 = (-1)^{2M}$$

bzw.

$$\rho_{KK'} = 0 \quad \text{für } L_a + \ell_a + L_{a'} + \ell_{a'} + M - M' = \text{ungerade}$$

## Literaturverzeichnis

- ASC72 G. Ascoli, COO-1195-233, University of Illinois
- BAR68 J. Bartsch, Nucl. Phys. B7, 345 (1968)
- BAS70 E. Bassler, Diplomarbeit, Hamburg (1970)
- BER65 S.M. Berman, Phys. Rev. 139B, 1023 (1965)
- BLA52 J.M. Blatt und V.F. Weisskopf: Theoretical Nuclear Physics John Wiley and Sons, New York, 1952 Kap.VIII
- BRA70 G.W. Brandenburg, Nucl. Phys. B16, 287 (1970)
- CAS68 C. Caso, Nuovo Cimento 54A, 983 (1968)
- CAS69 C. Caso, Lett. al Nuovo Cimento 2, 501 (1969)
- CHI70 C.Y. Chien: The L and A3 Regions of  $K\pi\pi$  and  $3\pi$  Masses in Experimental Meson Spectroscopy. Herausgeber C. Baltay und A.H. Rosenfeld, Columbia University Press: New York und London, 1970
- CHU71 S.U. Chung, CERN 71-8 Seite 39 ff
- DEC64 R.T.Deck, Phys. Rev. Lett.13,169 (1964)
- DOL68 R. Dolen, D. Horn, C. Schmid, Phys. Rev. 166,1768 (1968)  
C.R. Chew und A. Pignotti, Phys. Rev. Lett. 20, 1078 (1968)
- DON71 J.T. Donohue, Nucl. Phys. B35, 213 (1971)
- EDM64 A.R. Edmonds: Drehimpulse in der Quantenmechanik BI Hochschultaschenbuch Nr. 53/53a, Mannheim 1964
- GAI71 J.A. Gaidos, COO-1428-245, Purdue University, Lafayette, Indiana

- GOL64 M.L. Goldberger und K.M. Watson: Collision Theory  
John Wiley and Sons, New York, 1964, Seite 540 ff
- GRI68 GRIND-Programm zur Anpassung von Massenhypothesen  
CERN-1968
- HAR72 W.C. Harrison, Phys. Rev. Lett. 28,775 (1972)
- JAC59 M. Jacob und C.G. Wick, Annals of Physics 7,404 (1959)
- JAC64 J.D. Jackson, Nuovo Cimento 34, 1644 (1964)
- MOR70 D.R.O. Morrison CERN/D.Ph.II/PHYS 70-64
- NAG71 H. Nagel, Desy F1-71/8 Interner Bericht, Dissertation
- NEU71 H. Neumann, Desy F1-71/1 Interner Bericht, Diplomarbeit
- PDG72 Particle Data Group: Review of Particle Properties,  
Physics Letters 39B (1972)
- STA57 siehe z.B. H.P. Stapp Phys. Rev. 103,425 (1957)
- TOM72 G. Tomasini, Nuovo Cimento 7A, 651 (1972)
- TRI68 R.D. Tripp: Proceedings of the 14th International  
Conference on High Energy Physics, Vienna 1968,  
Seite 173
- WAC72 K. Wacker, Diplomarbeit 1972
- WIC62 G.G. Wick, Annals of Physics 18, 65 (1962)
- WOL63 G. Wolf, WELAGA-Programmbeschreibung

## Abbildungsverzeichnis

- Abb. 1:  3-Pion-Masse von allen 9471 Ereignissen
-  3-Pion-Masse von 5291 Ereignissen ( $\Delta^{++}$  verworfen)
-  3-Pion-Masse von 3069 Ereignissen (kinematischer Bereich (a))
- Abb. 2:   $p\pi_k^+$ -Masse von allen 9471 Ereignissen
-   $p\pi_k^+$ -Masse von 1283 Ereignissen ( $\Delta^{++}$  verworfen und  $1.4 < M_{3\pi} < 1.9$  GeV)
- Abb. 3:  3-Pion-Masse für alle Ereignisse
-  3-Pion-Masse ( $\Delta^{++}$  verworfen)
- a) für  $M_{\pi^+\pi^-}$  im  $\rho$ -Band
- b) für  $M_{\pi^+\pi^-}$  nicht im  $\rho$ -Band
- $\rho: 0.665 < M_{\pi^+\pi^-} < 0.865$  GeV
- Abb. 4:  3-Pion-Masse für alle Ereignisse
-  3-Pion-Masse ( $\Delta^{++}$  verworfen)
- a) für  $M_{\pi^+\pi^-}$  im f-Band
- b) für  $M_{\pi^+\pi^-}$  nicht im f-Band
- f:  $1.14 < M_{\pi^+\pi^-} < 1.39$  GeV
- Abb. 5:   $p\pi^-$ -Masse von allen 9471 Ereignissen
-   $p\pi^-$ -Masse von 1283 Ereignissen ( $\Delta^{++}$  verworfen und  $1.4 < M_{3\pi} < 1.9$  GeV)

- Abb. 6:   $p\pi^+\pi^-$  - Masse von allen 9471 Ereignissen  
  $p\pi^+\pi^-$  - Masse von 1283 Ereignissen ( $\Delta^{++}$  verworfen und  $1.4 < M_{3\pi} < 1.9$  GeV)
- Abb. 7: Faktorisierung der Reaktionsamplitude in einen Produktions- und in einen Zerfallsteil
- Abb. 8: Dalitz-Diagramm für Ereignisse mit  $1.55 < m_{3\pi} < 1.75$  GeV.  
 Eingezeichnet sind die  $\rho$ - und  $f$ -Bänder und die kinematischen Grenzen für  $m_{3\pi} = 1.55$  und  $1.75$  GeV.
- Abb. 9: Definition der Eulerwinkel  $\phi, \theta, \psi$
- Abb. 10: A3-Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit vom Laborimpuls des einlaufenden Pions  
 Die Werte sind (MOR70) entnommen.
- Abb. 11: Projektion des Dalitz-Diagramms  
 ——— Phasenraum  
 - - -  $\Delta^{++}$ -Ereignisse, die nicht verworfen werden  
 Die Kurven sind auf die gleichen Flächen normiert.
- Abb. 11a:  $M(\pi\pi_{\Delta})$   $\pi_{\Delta}$  ist das Pion aus dem  $\Delta(1236)$
- Abb. 11b: Radius des Dalitz-Diagramms  $r = 0$  in der Mitte,  $r = 1$  am Rand
- Abb. 11c: Polarwinkel  $\delta$  im Dalitz-Diagramm.  $\delta = 0$  bei minimaler Energie des  $\pi_{\Delta}$
- Abb. 12:  $M_{\pi^+\pi^+}$  und  $M_{\pi^+\pi^-}$  in Abhängigkeit von der 3-Pion-Masse (ohne  $\Delta^{++}$ ). Die Kurve ist das Ergebnis vom Maximum-Likelihood-Fit mit dem reduzierten Satz von Partialwellen, deren Anteil in Abb. 15 gezeigt werden.

- Abb. 13: Verteilung des Helizitätswinkels  $\vartheta$  des  $\pi^+\pi^-$ -Zerfalls für die  $\rho^-$ - und  $f$ -Bänder des Dalitzdiagramms (ohne  $\Delta^{++}$ ). Die Kurven sind von denselben Anpassungen wie in Abb. 12.
- Abb. 14: Verteilung der Polarkoordinaten  $R$  und  $\delta$  des Dalitz-Diagramms (ohne  $\Delta^{++}$ ). Der Radius  $R$  ist so normiert, daß  $R = 1$  am Rand des Dalitz-Diagramms ist. Der Polarwinkel  $\delta$  ist entsprechend der Bose-Symmetrie gefaltet worden. Es ist  $\delta = 0$  bei maximaler Energie des  $\pi^-$ . Die Kurven sind von denselben Anpassungen wie Abb. 12 und Abb. 13.
- Abb. 15: Beiträge der einzelnen Partialwellen als Funktion von der 3-Pion-Masse. Die Kurven in Abb. 12, 13 und 14 sind mit diesen Partialwellen berechnet worden.
- Abb. 16: Beiträge der einzelnen Partialwellen als Funktion von der 3-Pion-Masse in 50 MeV-Intervallen.
- Abb. 17: Verteilung der  $\langle P^{\ell} \rangle$ -Momente (für  $\ell = 1$  bis 6) im Gottfried-Jackson- und Helizitätssystem.
- Abb. 18: Wertebereich für die Produktionsdichtematrixelemente  $\rho_{22}^{MM}$  im Gottfried-Jackson- und Helizitätssystem. Im Dreieck ABC liegen die physikalisch möglichen Werte für die Produktionsdichtematrixelemente. Den schraffierten Wertebereich erhält man aus den Legendre-Koeffizienten  $a_4$  unter Berücksichtigung des gemessenen  $J^P = 2^-$  - Wirkungsquerschnittes.

### Danksagungen

Herrn Prof. M.W. Teucher möchte ich herzlich dafür danken, daß ich in seiner Blasenkammergruppe arbeiten durfte. Herrn Privatdozent Dr. P. Söding bin ich besonders dankbar für sein ständiges Interesse an dieser Arbeit, für die vielen Diskussionen und Ratschläge.

Meinen Freunden, die in Hamburg an diesem Experiment gearbeitet haben, danke ich für die gute Zusammenarbeit in vielen klärenden Gesprächen.

Für die Überlassung ihrer Daten danke ich den Physikalischen Instituten in Durham, Genua, Mailand und Saclay.

In meinen Dank möchte ich auch die Gruppen des CERN-Synchrotrons einschließen, die den Strahl gebaut und die Blasenkammer betrieben haben, und das technische Personal in allen Labors unserer Kollaboration, das bei der Auswertung der Filme geholfen hat. Ohne die großzügige Gewährung von Rechenzeit durch das DESY-Rechenzentrum und die stets hilfsbereiten Operateuren der IBM 360/65 und IBM 360/75 wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Frau Schmöger danke ich für die mühevollen Schreibarbeit und Frau Siegner für die sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen.

Diese Arbeit wurde vom Bundesministerium für Bildung und Wissenschaften unterstützt.

reignisse  
004 GeV

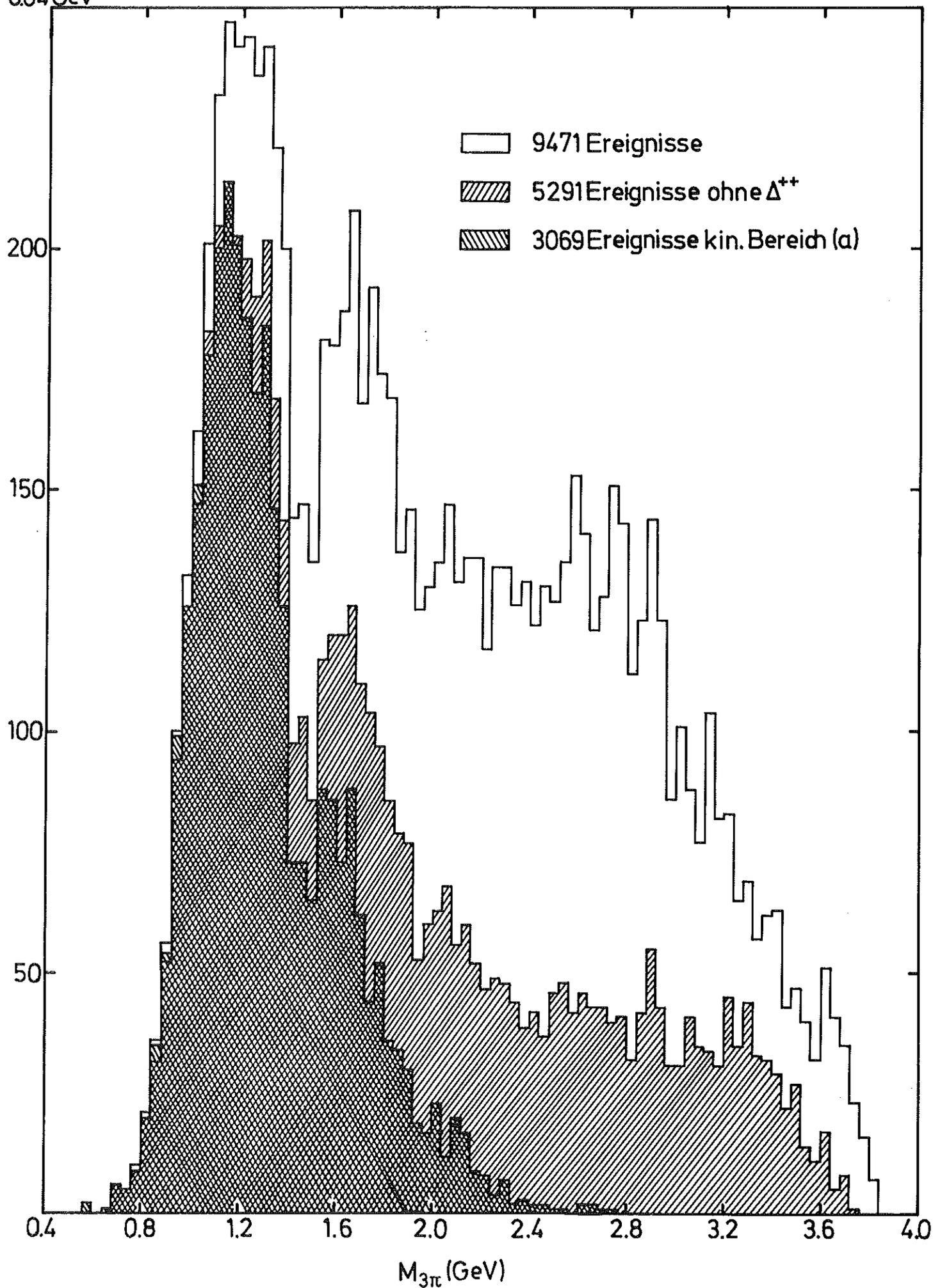


Abb.1

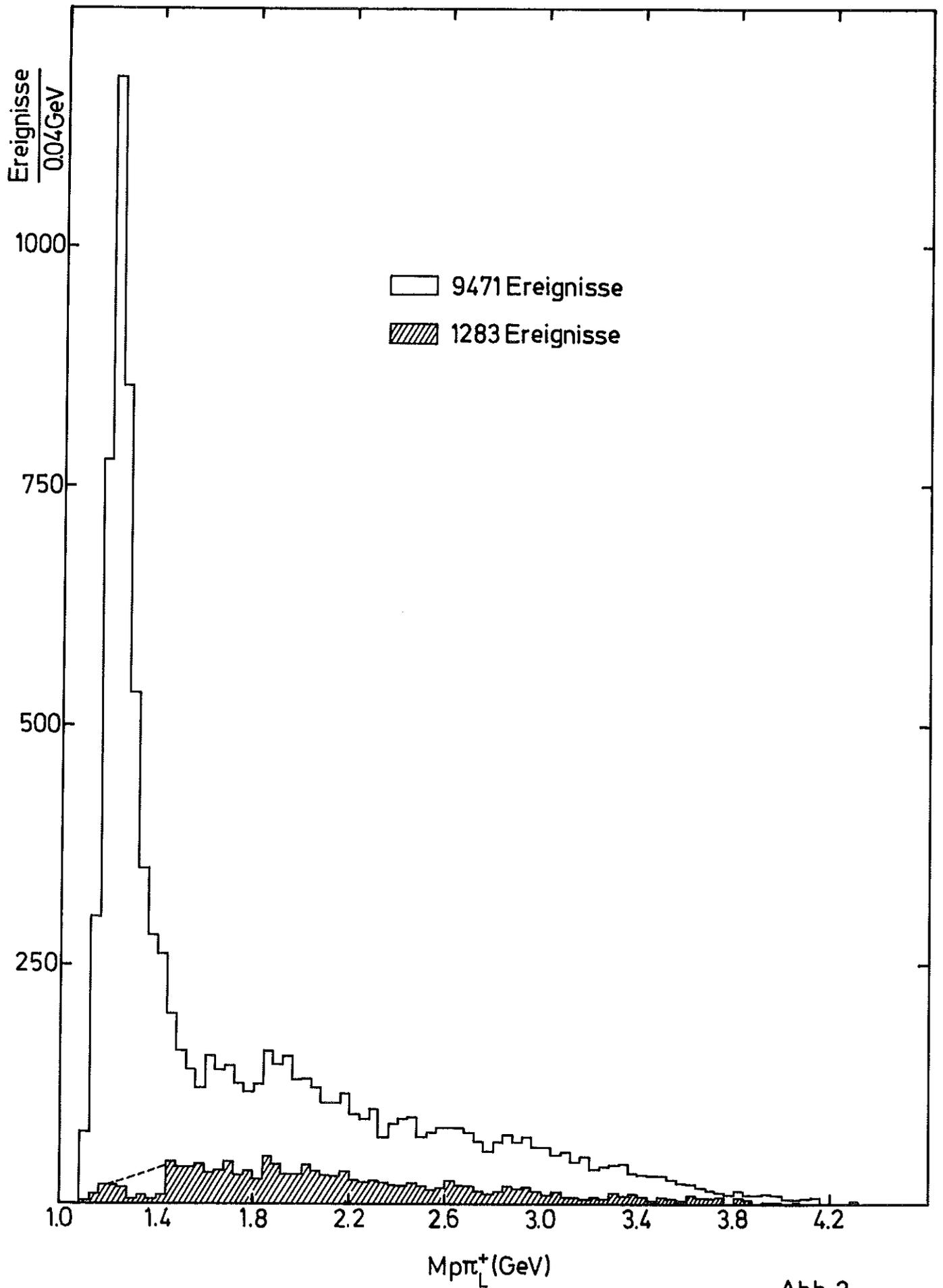


Abb. 2

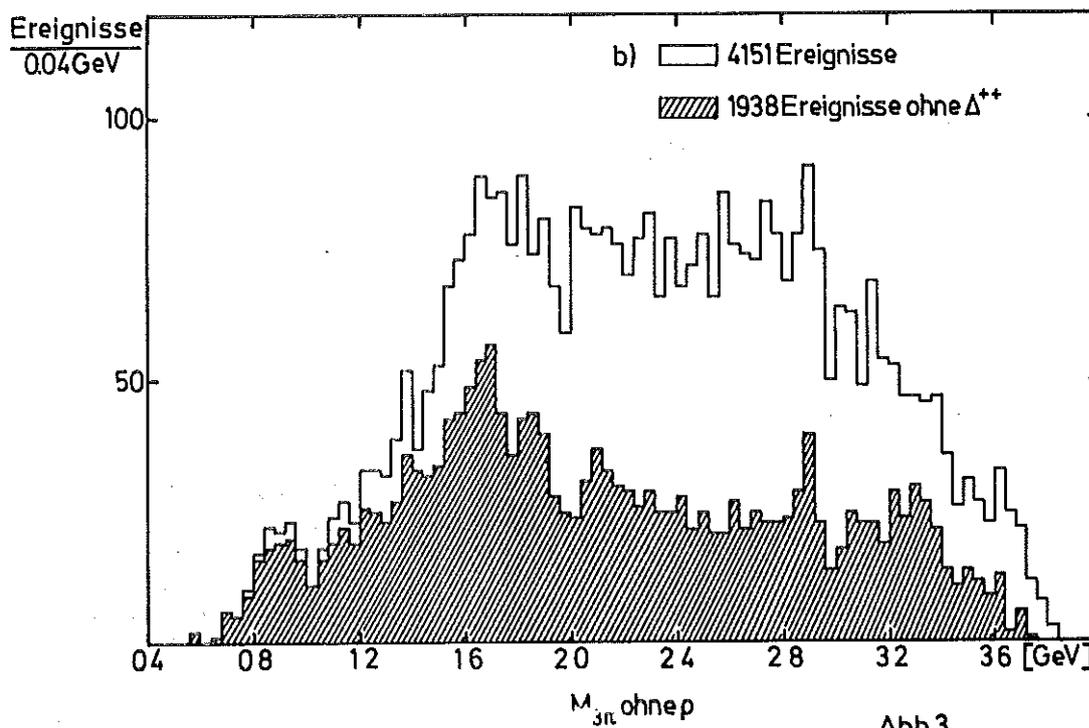
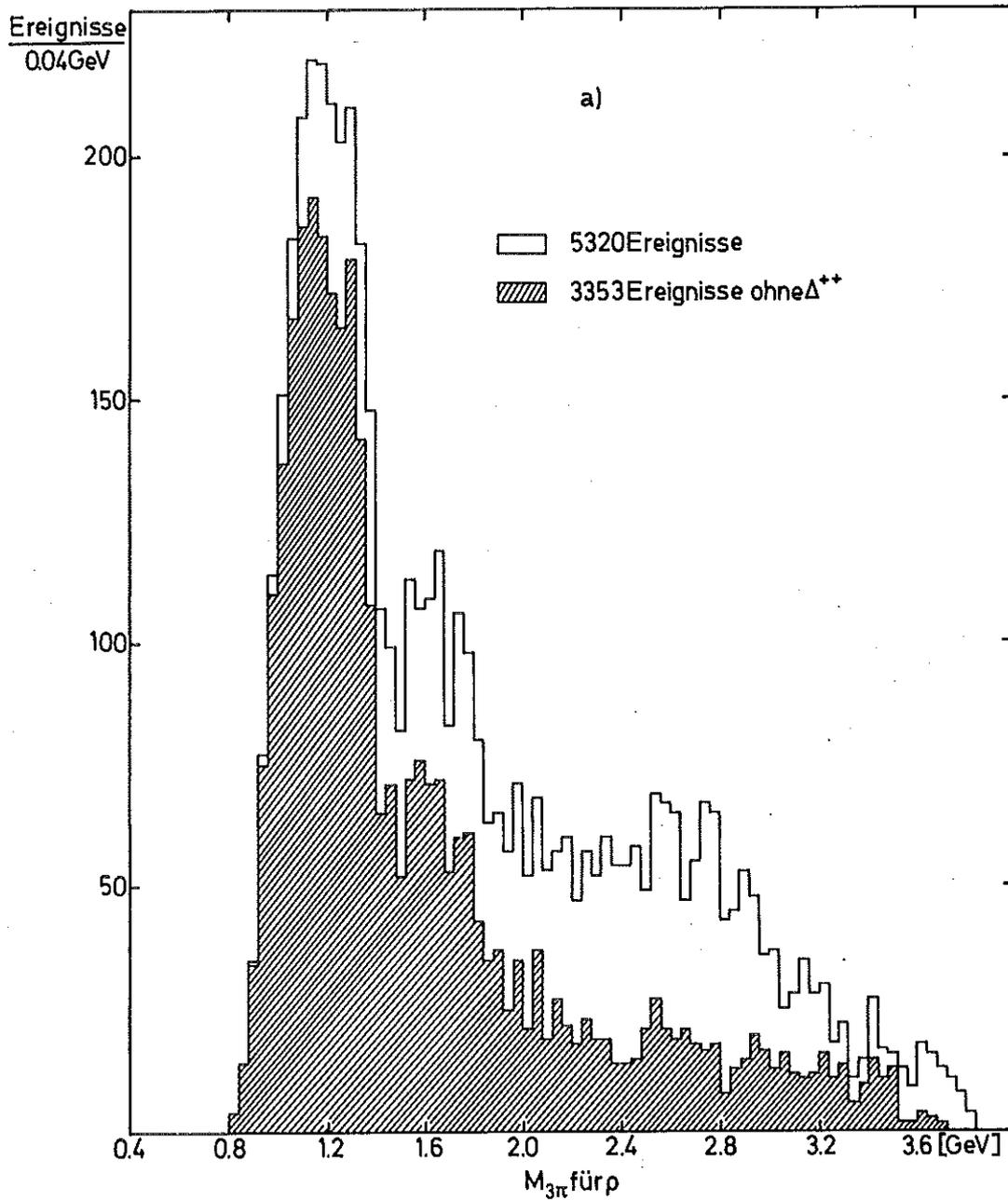


Abb.3

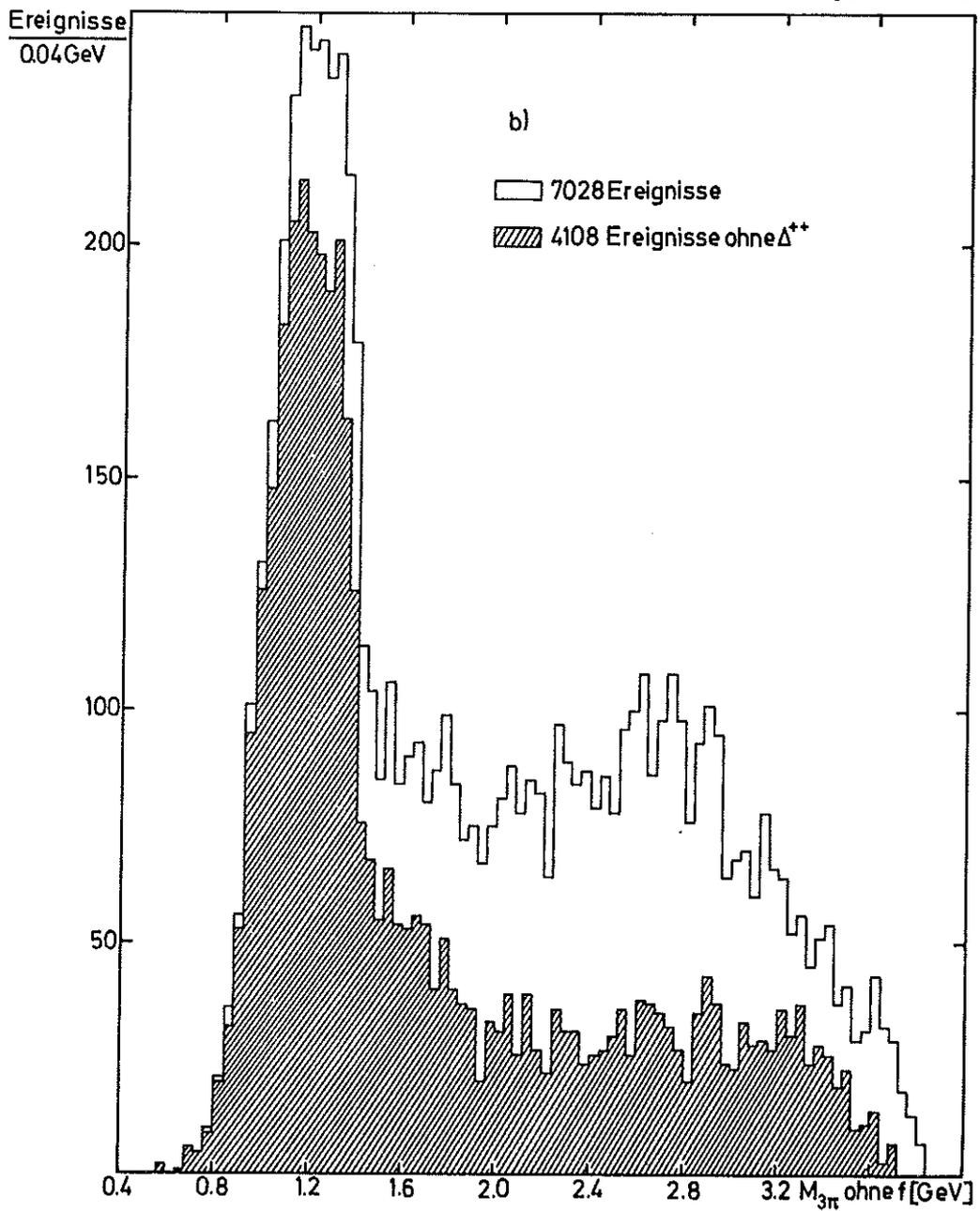
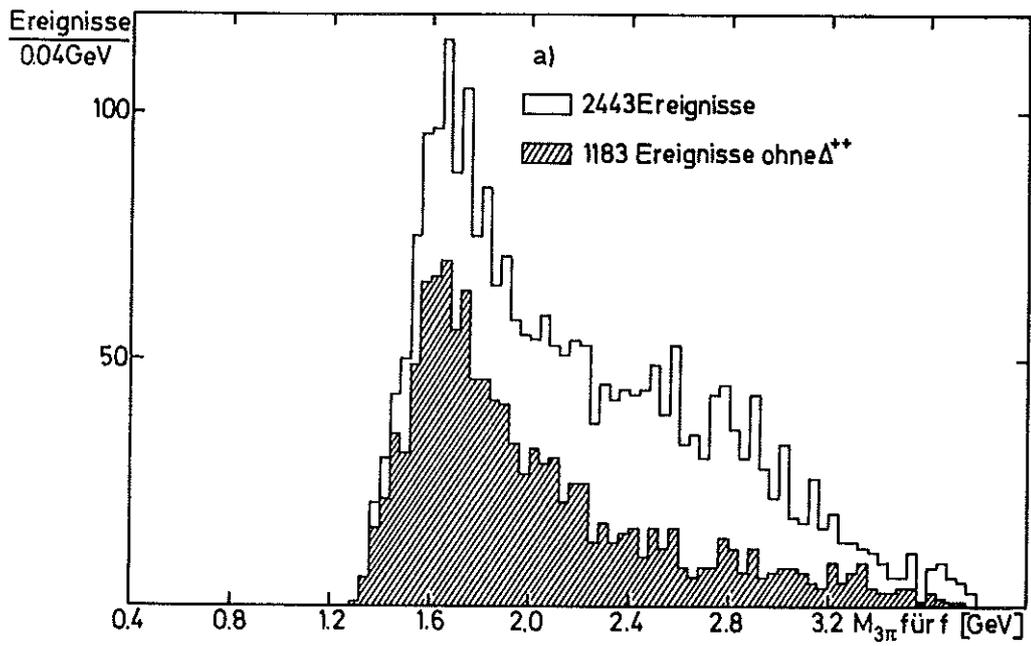
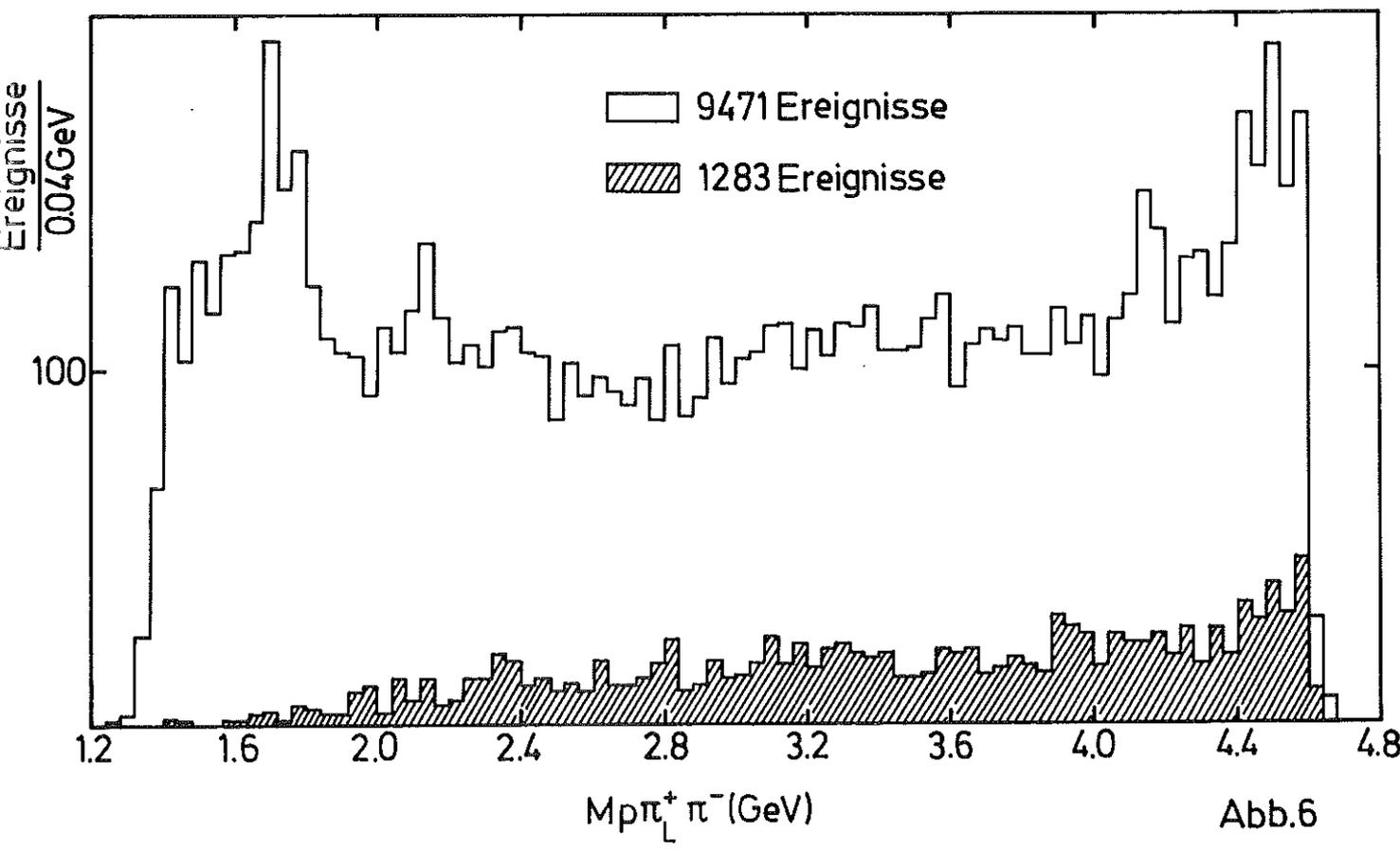
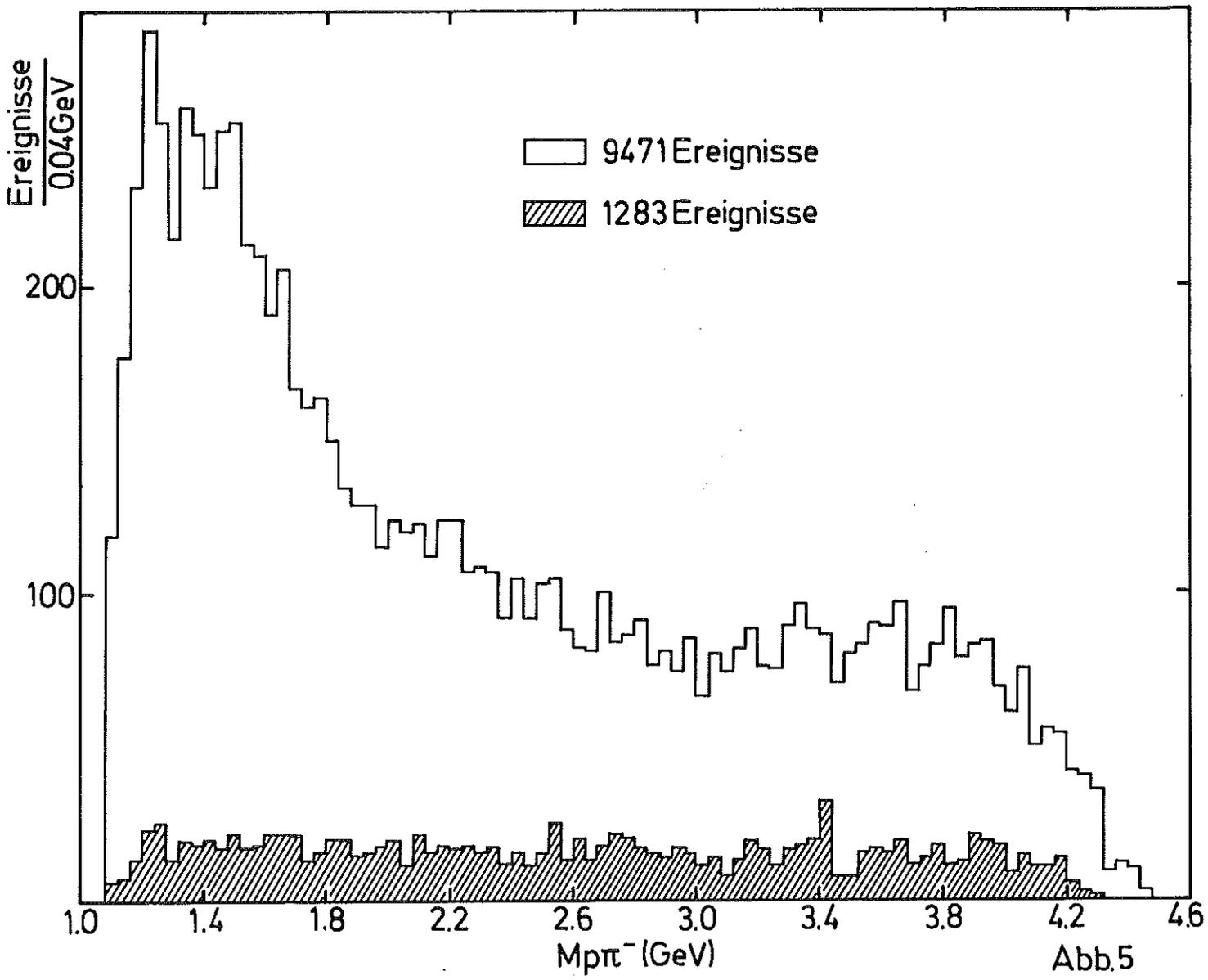


Abb.4



3-Pionenzustand mit den Quantenzahlen  $J, M, I, I_a, L_a, l_a$

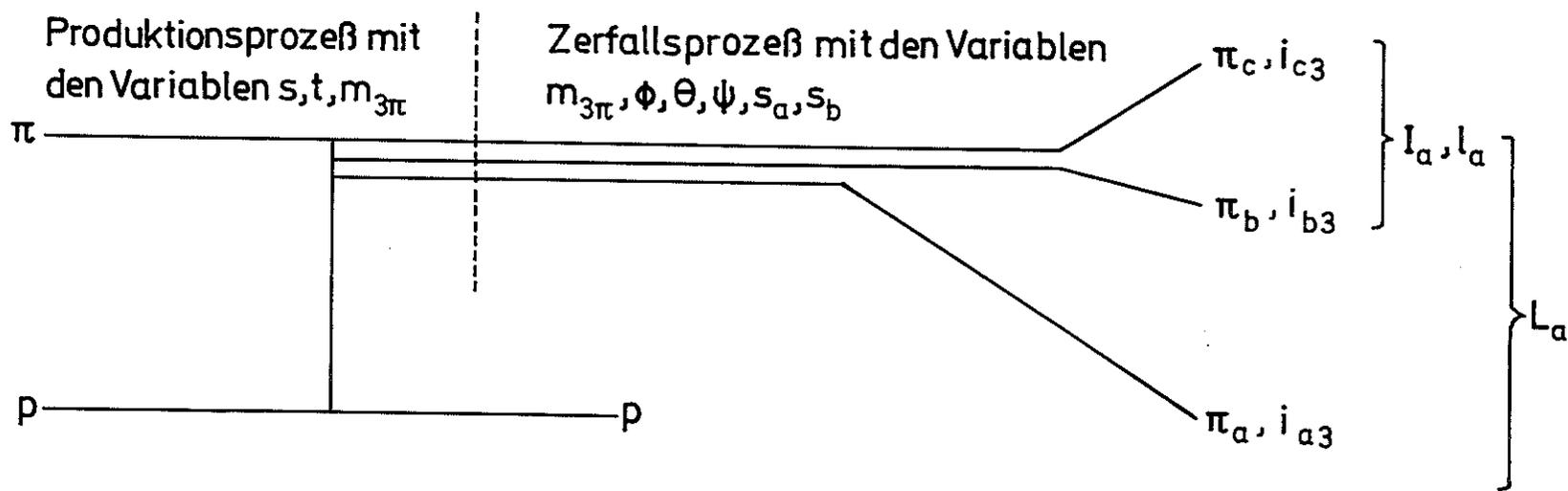


Abb.7

$$M^2(\pi_{b,a}^+ \pi^-) [\text{GeV}^2]$$

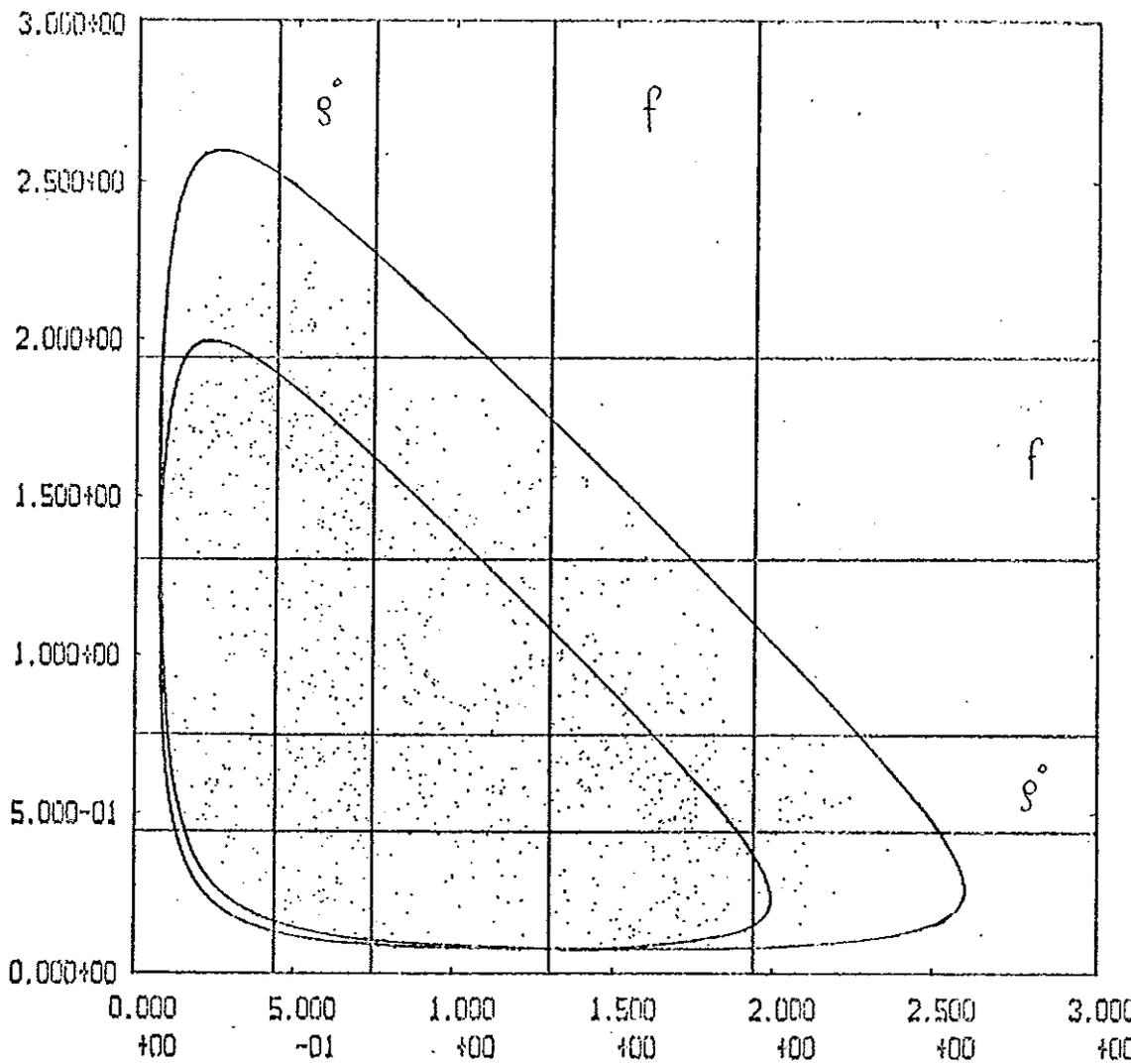
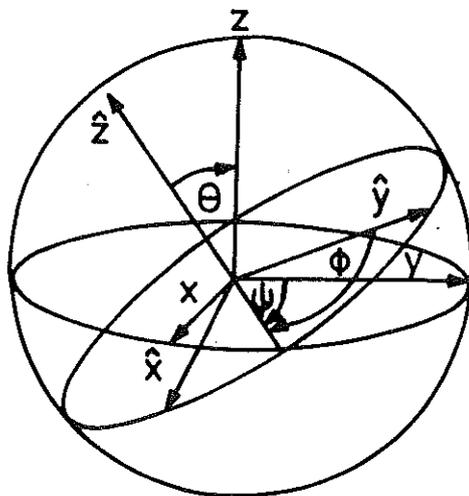


Abb.8

$$M^2(\pi_{a,b}^+ \pi^-) [\text{GeV}^2]$$



Definition der 3 Eulerwinkel

Abb.9

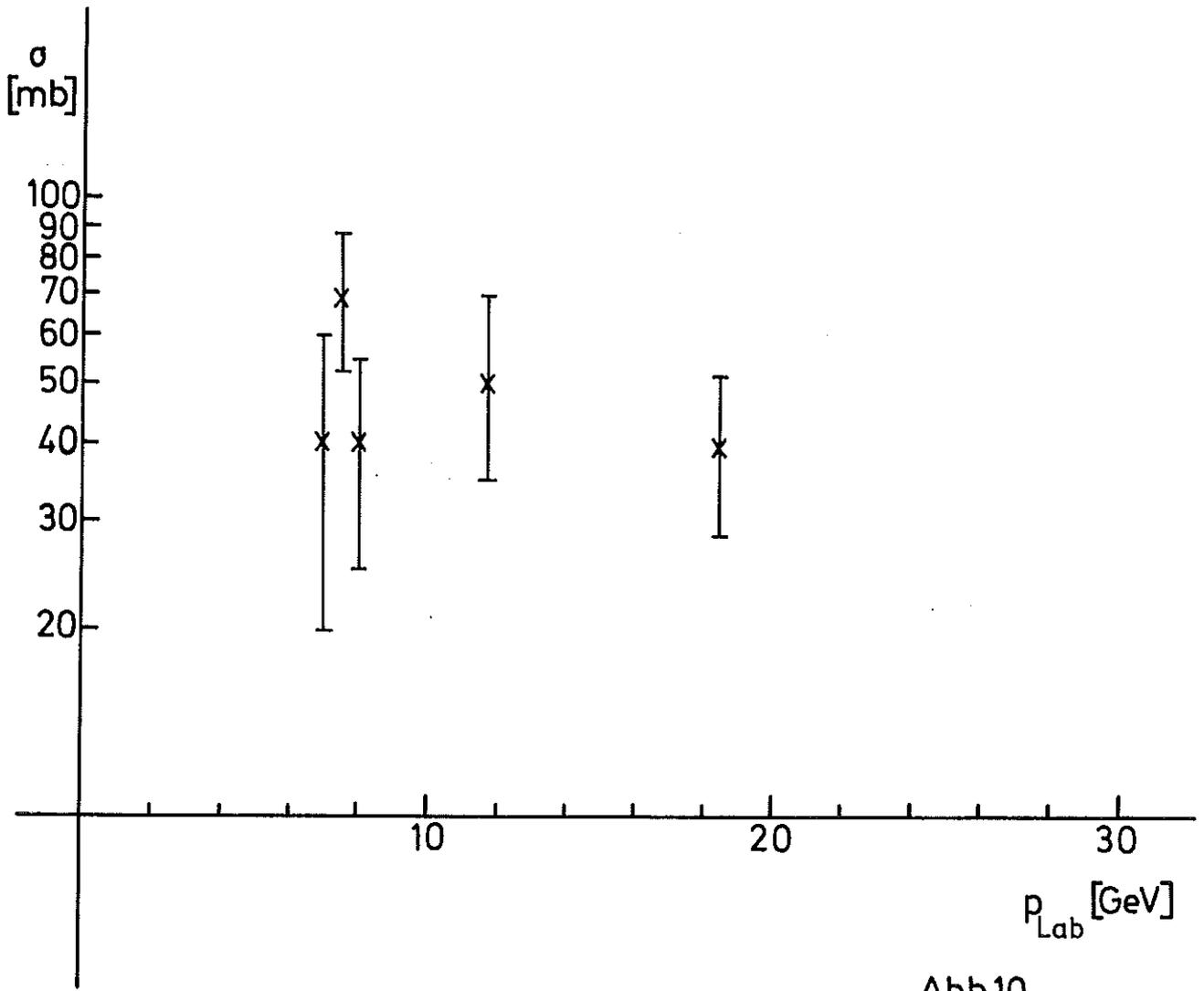


Abb.10

— Phasenraum  
- - - nicht verworfene  $\Delta(1236)$ -Ereignisse

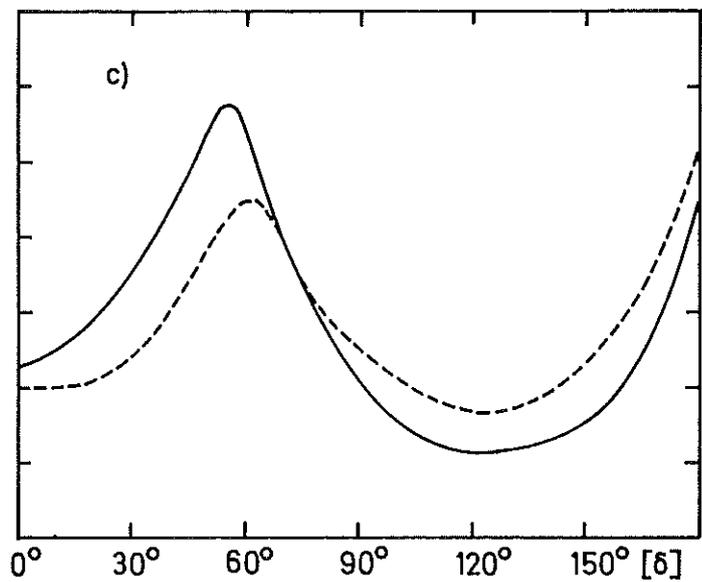
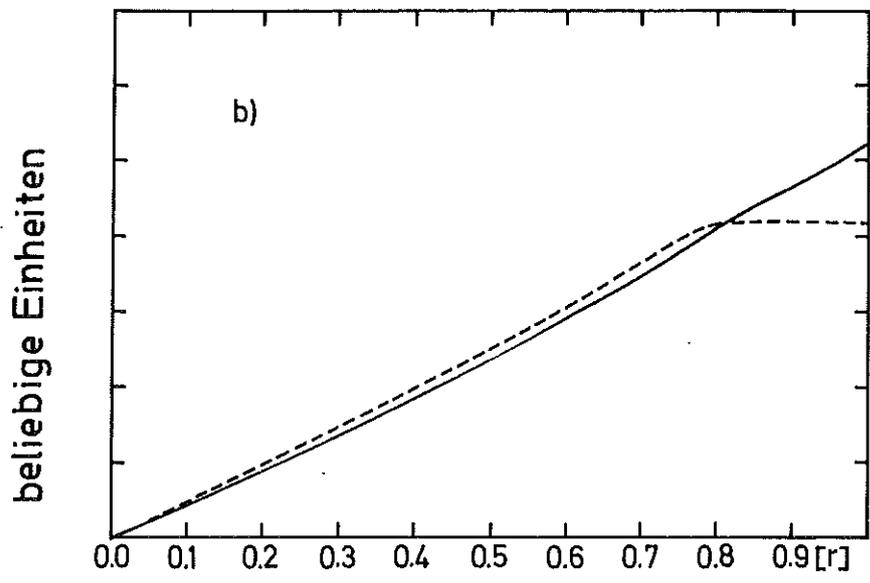
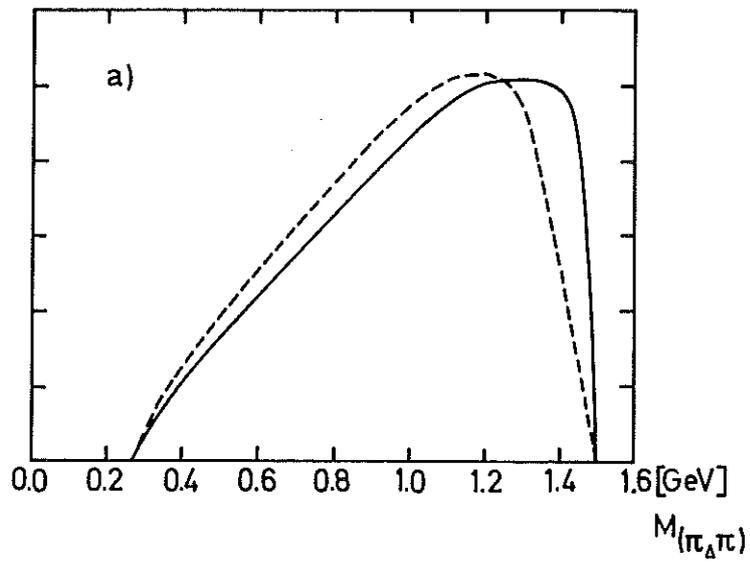


Abb.11

Ereignisse

Kombinationen

0.04 GeV

0.04 GeV

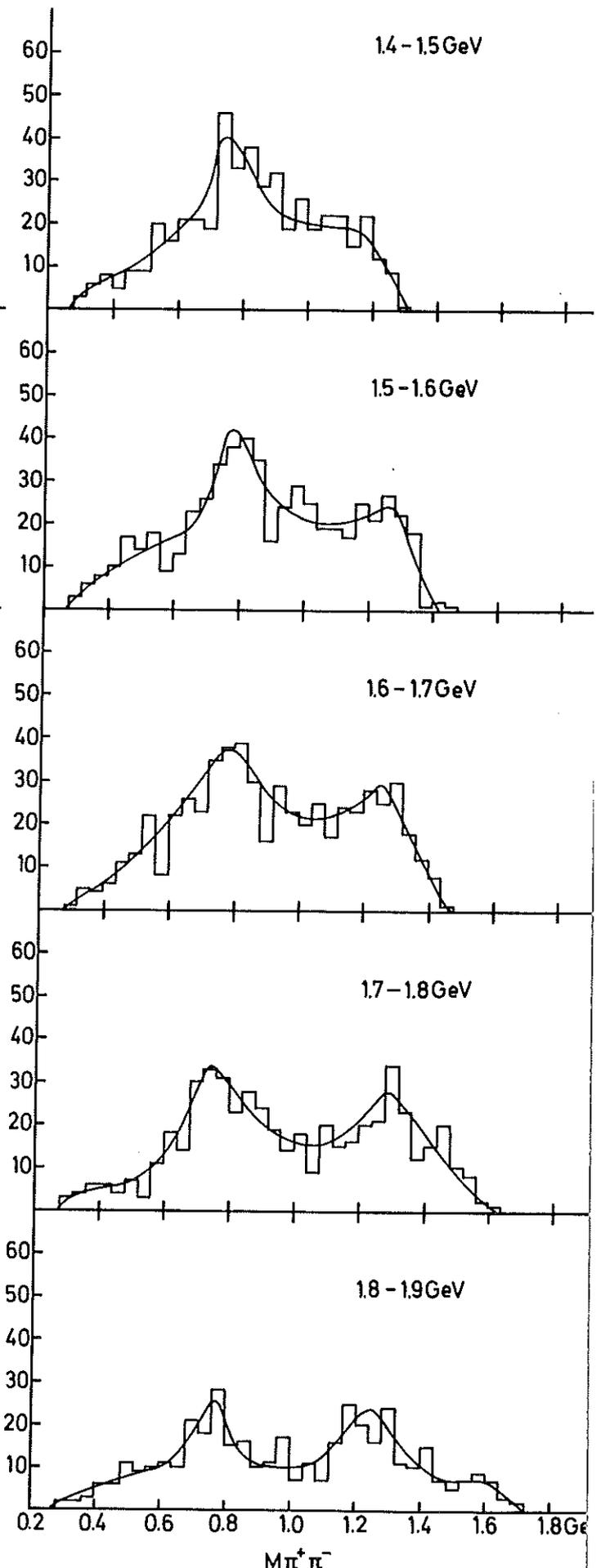
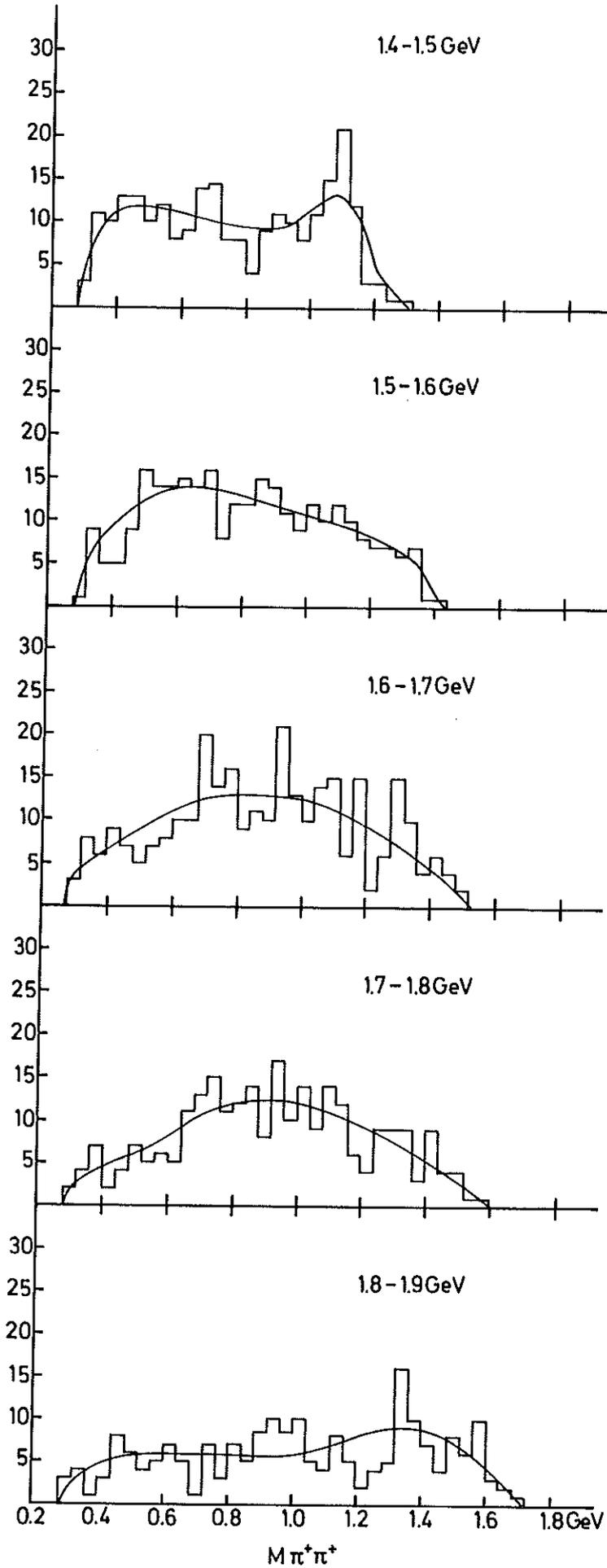


Abb.12

$\rho$ -Band

f-Band

Kombinationen

Kombinationen

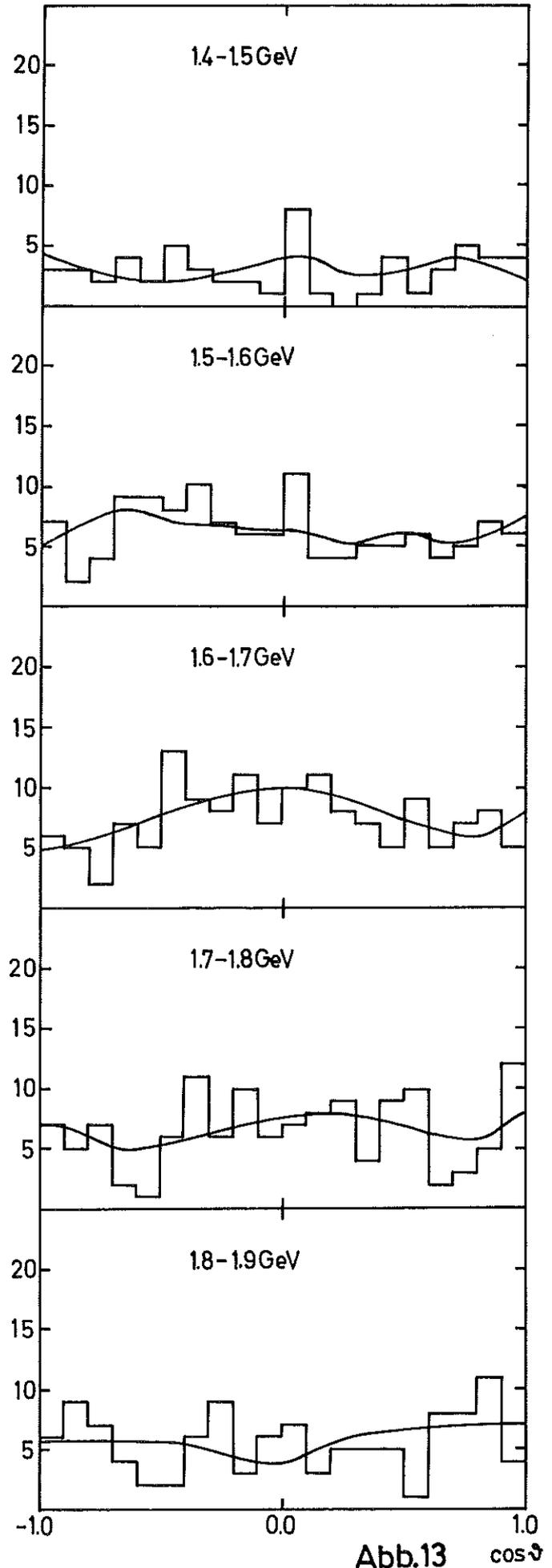
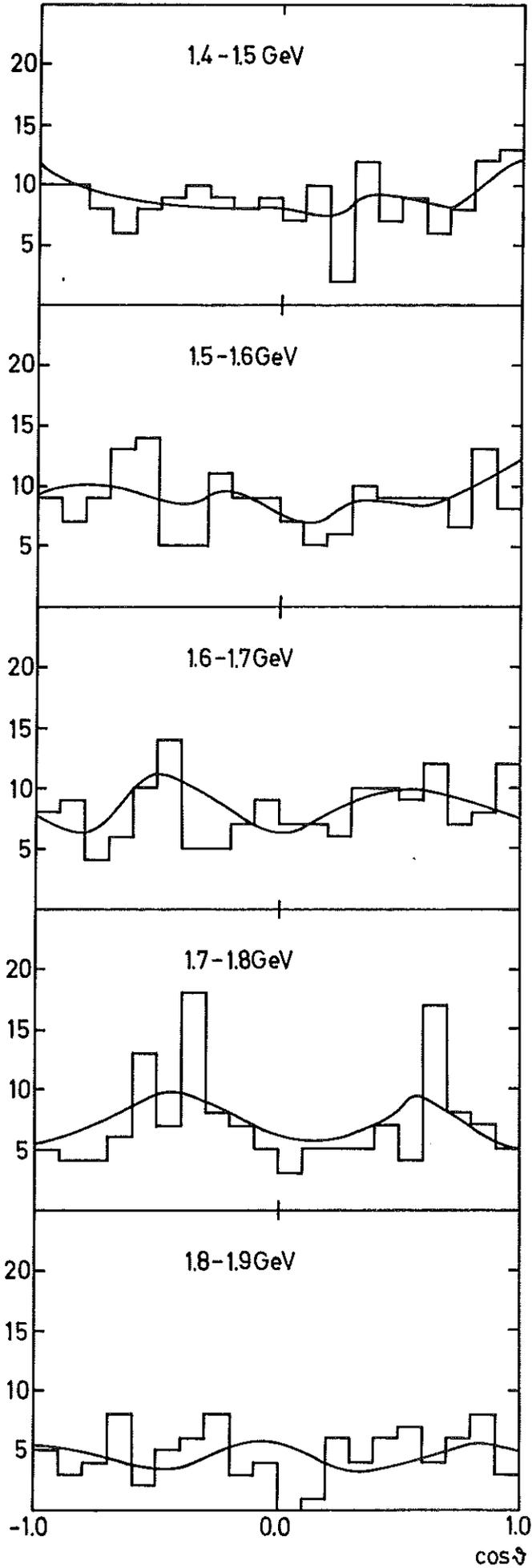
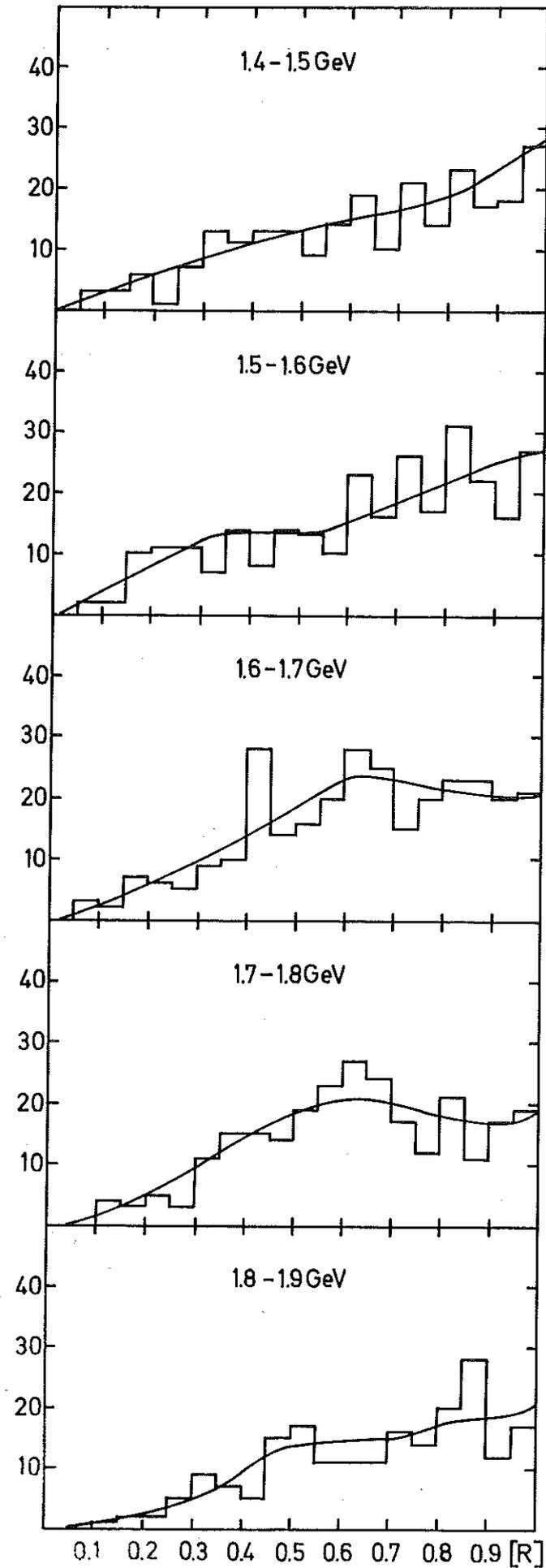


Abb.13  $\cos\vartheta$

Ereignisse

R



Ereignisse

$\delta$

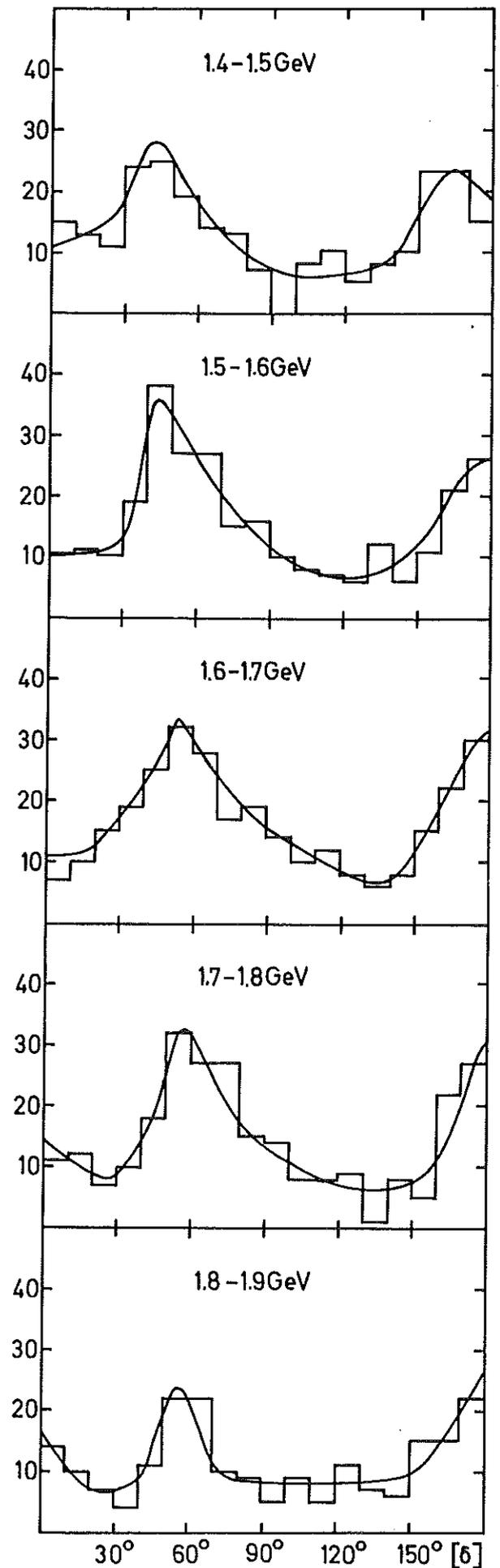


Abb.14

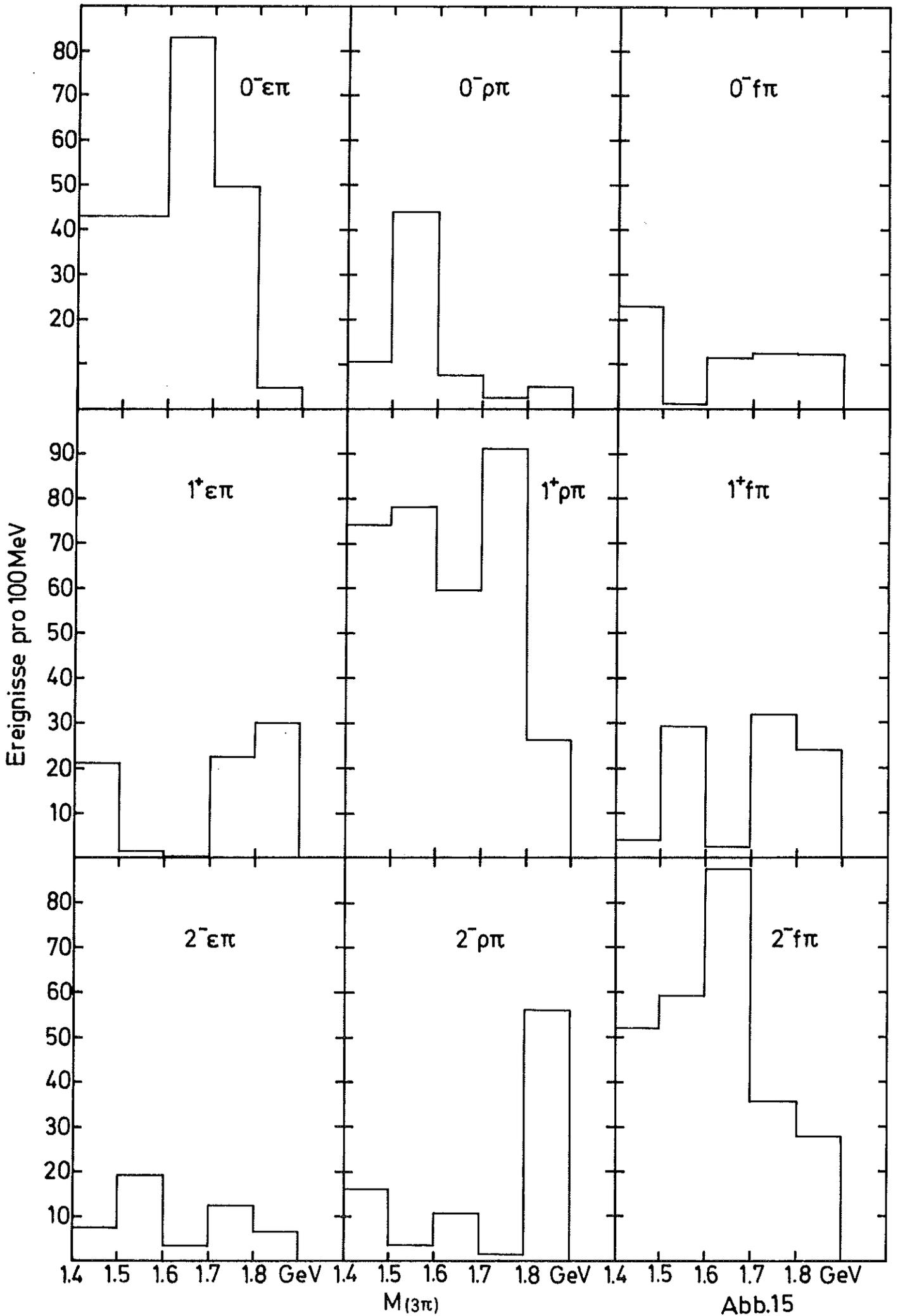


Abb.15

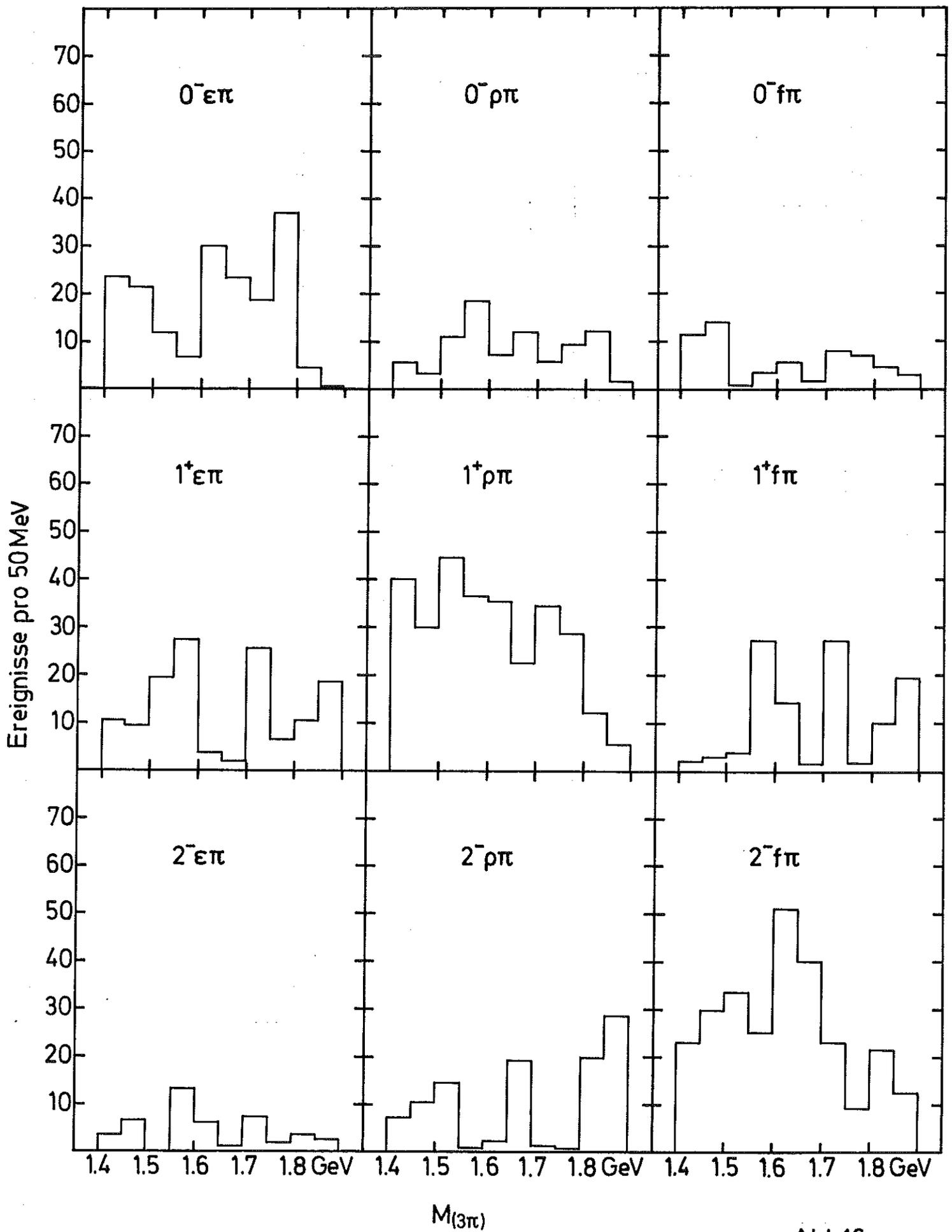


Abb.16

GOTTFRIED-JACKSON-SYSTEM

HELIZITÄTS-SYSTEM

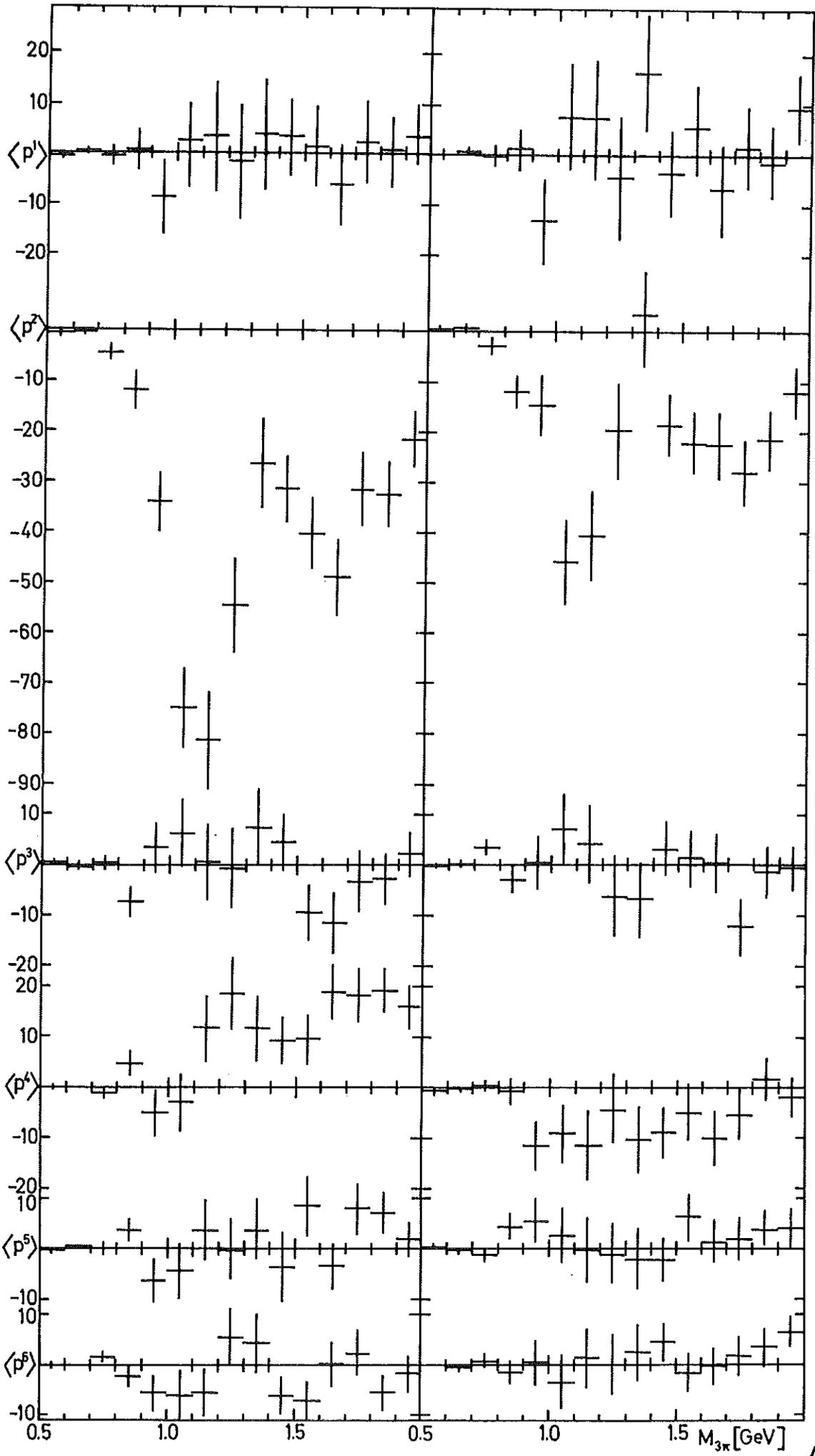
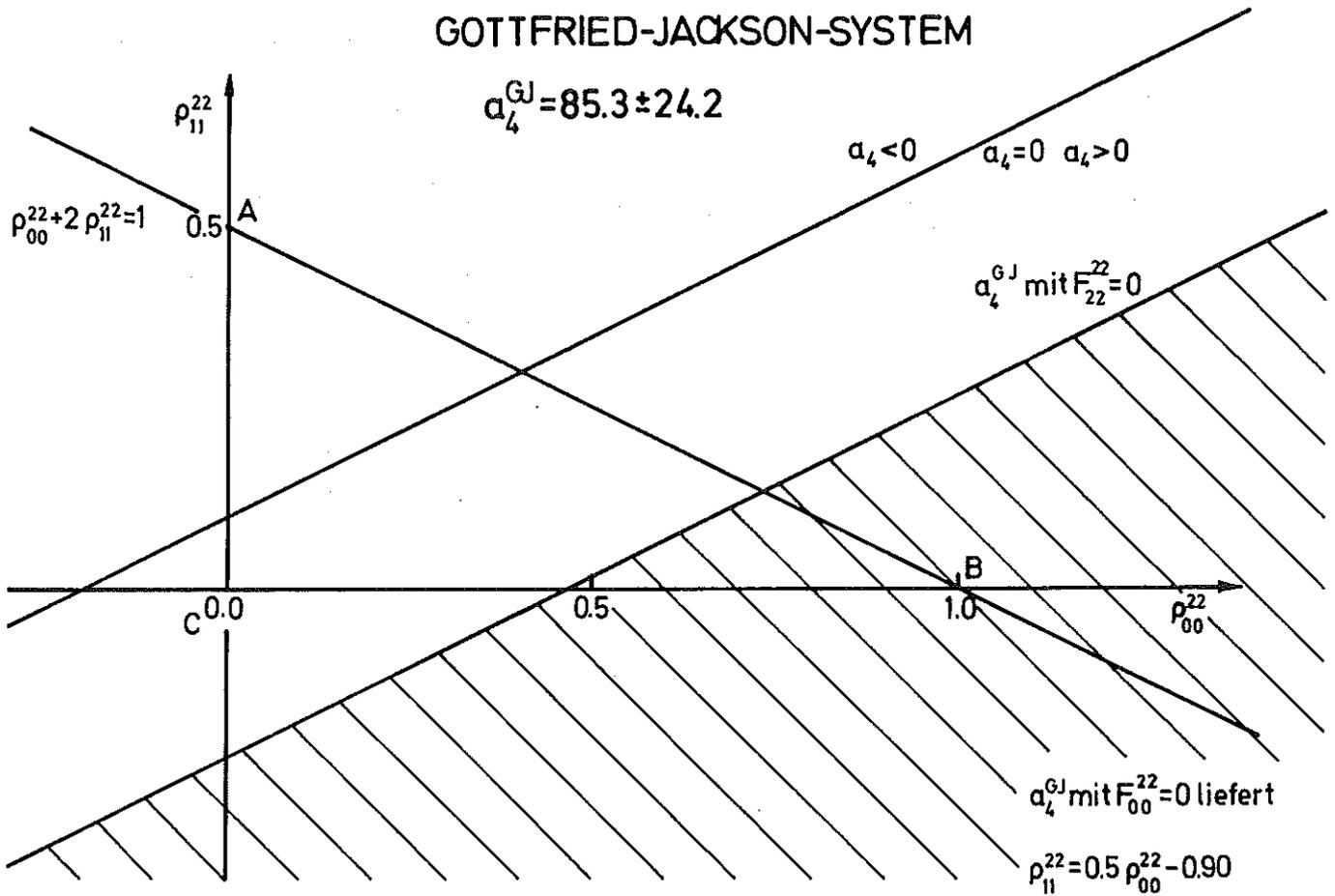


Abb.17

# GOTTFRIED-JACKSON-SYSTEM

$$a_4^{GJ} = 85.3 \pm 24.2$$



# HELIZITÄTS-SYSTEM

$$a_4^H = -44.8 \pm 24.2$$

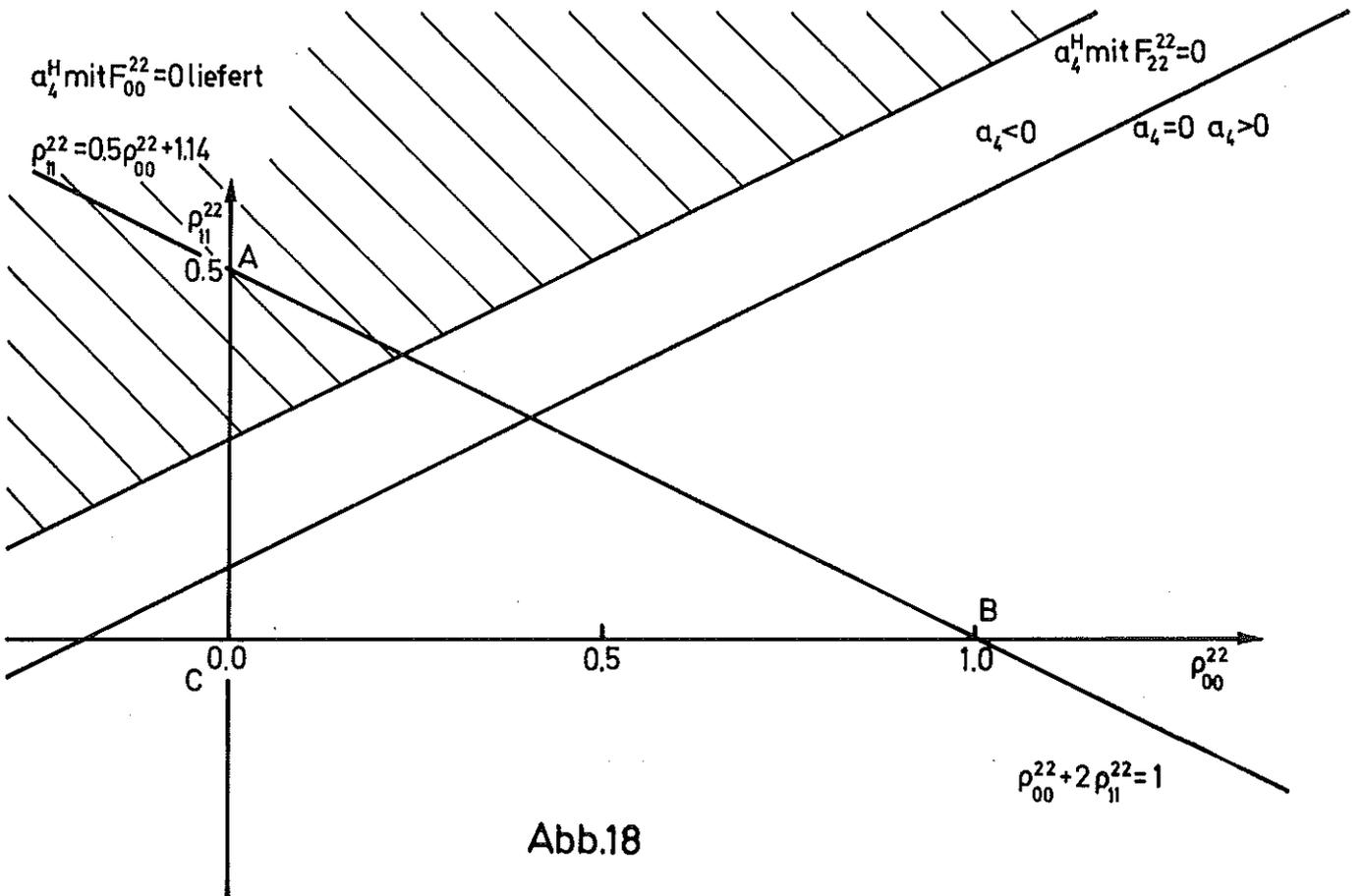


Abb.18

