

Interner Bericht  
DESY F33-77/02  
Juli 1977

**DESY-Bibliothek**  
28. JULI 1977

Untersuchungen zur Impulsauflösung des magnetischen Detektors PLUTO

von

Jürgen Burmester



Untersuchungen zur Impulsauflösung

des magnetischen Detektors PLUTO

Experimentelle Diplomarbeit von

Jürgen Burmester

Fachbereich Physik der Universität Hamburg

1977

# I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

0	Einleitung	1
1	Das PLUTO-Experiment	2
1. 1.	Der Speicherring DDRIS	2
1. 2.	Der Aufbau des Detektors	2
1. 2. 1	Das Magnetfeld	4
1. 2. 2	Die Zylinderkammern	5
1. 2. 3	Die Bleizylinder	6
1. 2. 4	Die My-Kammern	7
1. 3.	Die Aufbereitung der Signale	7
1. 3. 1	Verstärker	7
1. 3. 2	Der Trigger	7
1. 3. 3	Der Kleinrechner PDP 11/45	8
1. 3. 4	Das Online-Programm	8
2	Das Spurensuchprogramm PLUPAT	9
2. 1.	Allgemeines	9
2. 2.	Spurensuche in der x-y-Projektion	9
2. 3.	Spurensuche in der r-z-Projektion	10
2. 4.	Spurenparameter	10
2. 5.	Das Fitverfahren und die Berechnung der Fehlermatrix	11
2. 5. 1	Residuen	12
2. 5. 2	Theoretische Messfehler	12
2. 5. 3	Fehlermatrizen	13
2. 5. 4	Änderung der Parameter	14
3	Die Daten der 2. Generation	15
3. 1.	Allgemeines	15
3. 2.	Der Mittelpunktswinkel PHIMIF	15
3. 3.	Die Achsenabstände RMIN und Z0	17
3. 4.	Die Freiheitsgrade NDPHI und NDZ	17
3. 5.	Die Krümmung KAPPA	18
3. 6.	Die Diagonalelemente der Covarianzmatrix C	19
4	Das Fitverfahren	21
4. 1.	Definitionen	21
4. 2.	Berechnung der Mittelwerte	22
5	Ergebnisse	24
5. 1.	Einzelergebnisse	24
5. 2.	Gesamtwahrscheinlichkeit	25
5. 3.	Zusammenfassung	25
6	Korrekte Berücksichtigung der Vielfachstreuung	28
6. 1.	Veränderungen am Spurenfit (PLUPAT)	28
6. 1. 1	Vielfachstreuung	28
6. 1. 2	Ortsauflösung	29
6. 2.	Die Ergebnisse mit geändertem Spurenfitprogramm	30
6. 3.	Zusammenfassung	35
	Literaturverzeichnis	36
	Danksagung	36
	Anhang	37
	Herleitung von Gleichung (2.7)	37
	Herleitung der Gleichung (6.2)	37

0 Einleitung  
\*\*\*\*\*

In den Jahren 1975/76 wurden am Speicherring DORIS des Deutschen Elektronensynchrotrons Zerfälle der Resonanz  $J/\psi(3100)$  mit dem magnetischen Detektor PLUTO untersucht. Der Detektor besteht im wesentlichen aus einer supraleitenden Spule, die ein in 1. Näherung homogenes Magnetfeld erzeugt, und konzentrischen zylindrischen Proportionaldrahtkammern, die den Innenraum der Spule ausfüllen.

Geladene Teilchen, die den Detektor passieren, beschreiben im Magnetfeld eine Schraubenlinie. Von dieser Schraubenlinie lassen sich mit Hilfe der Messkammern maximal dreizehn Punkte bestimmen.

Ein von G. Franke entwickeltes EDV-Programm (PLUPAT) hat die Aufgabe, aus den Messpunkten, deren Koordinaten in codierter Form vorliegen, die Spur geometrisch zu rekonstruieren. Das Programm beschreibt die Spuren durch fünf Parameter und berechnet die dazugehörigen Fehler. Für die weitere Auswertung der Messdaten ist es von grosser Wichtigkeit, dass die angegebenen Fehler realistisch sind.

In dieser Arbeit wird die Richtigkeit der angegebenen Fehler an Hand von M $\mu$ neastrahlen überprüft. Dazu dient die folgende Methode:

Das PLUPAT-Programm behandelt den Durchgang eines kosmischen Teilchens wie ein Zwei-Teilchen-Ereignis (Zweipton) und berechnet zwei Teilspuren, die jeweils vom Zentrum des Detektors nach aussen führen. Auf Grund ihrer Herkunft von nur einem Teilchen müssen bei unendlicher Messgenauigkeit die Spurparameter beider Teilspuren übereinstimmen. Aus der Abweichung der Parameter voneinander kann der statistische Messfehler bestimmt und mit dem berechneten verglichen werden.

In den beiden ersten Kapiteln werden das Experiment und das PLUPAT-Programm beschrieben, und zwar nur die für diese Arbeit wichtigen Teile.

Das 3. Kapitel beschreibt die von PLUPAT ausgegebenen Daten (die sogenannte 2. Generation).

Das 4. Kapitel beschreibt das angewandte Fitverfahren, dessen Ergebnisse im 5. Kapitel beschrieben sind.

Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse wurde es notwendig, eine Spezialversion des Spurenfitprogramms herzustellen, die die Vielstreuung genauer berücksichtigt. Da diese Spezialversion langsamer arbeitet, wird sie nur auf ausgewählte hadronische Ereignisse angewandt. Darüber und über die damit gewonnenen Ergebnisse berichtet das 6. Kapitel.

1 Das PLUTO-Experiment  
\*\*\*\*\*

1. 1. Der Speicherring DORIS  
=====

DORIS (Doppel-Ring-Speicher) besteht aus zwei übereinander gelegenen Ringsystemen, die sich an zwei Stellen, den Wechselwirkungspunkten, kreuzen. In die Ringe werden vom Synchrotron aus Elektronen bzw. Positronen (Impuls 0.5 bis 3 GeV) gegenläufig eingeschossen. Sie laufen dann mehrere Stunden um. Während dieser Zeit kommt es in den beiden Wechselwirkungspunkten zu Zusammenstößen unter einem Winkel von fast  $180^\circ$ . Dabei können sich Elektron und Positron gegenseitig vernichten, wobei sich die gesamte Energie der Teilchen einschliesslich der Ruheenergie in ein virtuelles Photon umwandelt, aus dessen Zerfall neue Teilchen entstehen. Da der Stoss fast frontal erfolgt und die Energien und Impulse der Stosspartner gleich sind, fallen Labor- und Schwerpunktsystem in 1. Näherung zusammen. Das bedeutet, dass die gesamte Energie der Stosspartner im Schwerpunktsystem zur Verfügung steht.

Aus der Kinematik lässt sich keine Vorzugsrichtung für die Flugbahnen der Sekundärteilchen ableiten. Aus dem Spin 1 des virtuellen Photons folgt aber, dass, solange beide Elektronenstrahlen unpolarisiert sind, die Winkelverteilung die Form  $(1+a \cdot \cos^2 \theta)$  haben muss, dabei ist  $\theta$  der Winkel zwischen Teilchenbahn und Positronenstrahl und  $a$  ein Parameter, der von der Art der Reaktion abhängt ( $-1 \leq a \leq +1$ ).

Wegen der anisotropen Verteilung, ist es wichtig, einen möglichst grossen Teil des gesamten Raumwinkels zu beobachten.

Für weitere Informationen über DORIS siehe z.B. STE73.

1. 2. Der Aufbau des Detektors  
=====

Der PLUTO-Detektor ist in PLU74 ausführlich beschrieben. Die wichtigsten Eigenschaften sind:

- a) Nachweis von Teilchen in einem sehr grossen Teil des gesamten Raumwinkels
- b) Magnetische Impulsauflösung
- c) Die Auswertung der genommenen Daten lässt sich mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitung automatisieren
- d) Ein schneller Trigger, der auch Spuren erkennt

Diese Eigenschaften sind auf folgende Art und Weise realisiert (siehe auch Abb. 1 a):

Eine supraleitende Spule erzeugt ein in 1. Näherung homogenes Magnetfeld. In ihm befinden sich konzentrische zylindrische Proportionaldrahtkammern. Die gemeinsame Achse der Kammern

(z-Achse) liegt parallel zum Magnetfeld und füllt in etwa mit den Elektron- bzw. Positronstrahlen des Speicherrings zusammen.

Um die Magnetspule herum ist das Eisenjoch gebaut; es hat einen hexagonalen Querschnitt. Ausserhalb befinden sich 25 ebene Proportionalrohrpakete von etwa 2 m<sup>2</sup> Fläche je Stück, die zum Nachweis von My-Mesonen dienen.

Teilchen, deren Bahnen mit der Detektorachse einen Winkel  $\leq 20^\circ$  einschliessen, verlassen den Detektor an den Stirnseiten, ohne nachgewiesen zu werden. Es ergibt sich aus der Geometrie, dass PLUTO in 90,2% des Raumwinkels geladene Teilchen nachweisen kann, falls man verlangt, dass eine Spur durch mindestens vier Kammern geht.

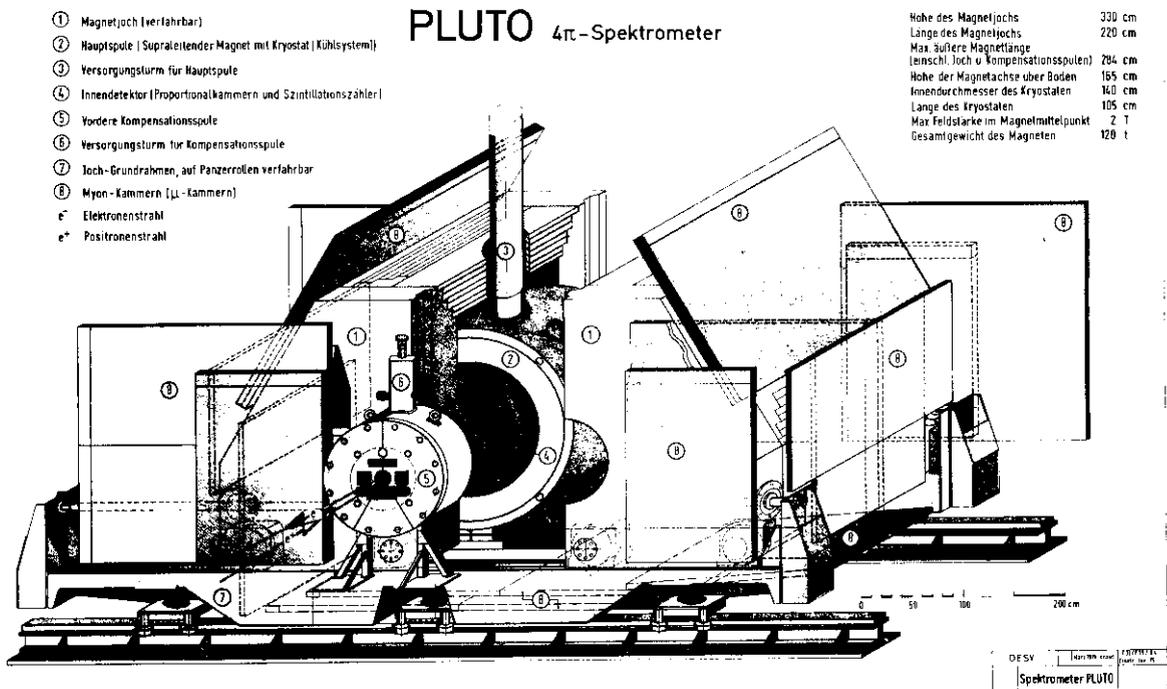


Abb. 1 a Der Plutodetektor

### 1. 2. 1 Das Magnetfeld =====

Die Magnetspule ist eine Zylinderspule, die an beiden Enden eine grössere Windungsdichte als in der Mitte aufweist, sodass man von einer Mischform zwischen Zylinderspule und Helmholtzspulen sprechen kann. An beiden Enden des Detektors befinden sich Kompensationsspulen auf kleinerem Radius, deren Feld dem der Hauptspule entgegengerichtet ist. Sie sorgen dafür, dass das Integral über das Magnetfeld entlang dem Strahl gleich Null ist. So wird der störende Einfluss des Magnetfeldes auf die umlaufenden Teilchen im Speicherring unterdrückt.

Die Spule ist von einem Eisenjoch umgeben, welches das Streufeld nach aussen abschirmt und das Feld im nutzbaren Volumen homogenisiert.

Mit der gesamten Anordnung lässt sich ein Magnetfeld mit einer Induktion von maximal 2 Tesla im Zentrum erzeugen. Das bedeutet, dass ein Teilchen von 2 GeV Impuls, das sich in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld bewegt, einen Kreis von etwa 3.3 m Radius beschreibt. Die Sagitta ist dann 63.4 mm.

Inwieweit das mit dieser Anordnung erzeugte Magnetfeld homogen ist, bzw. wie sich die vorhandenen Inhomogenitäten auf die Messgenauigkeit auswirken, lässt sich wie folgt abschätzen:

Sei  $\vec{H}_1 = (0,0,H_1)$  das erwartete axiale, homogene Feld und  $\vec{H}(r,\phi,z)$  das tatsächliche Feld. Die  $\phi$ -Abhängigkeit von  $\vec{H}$  beträgt nur einige Promille. Wichtiger sind da schon  $r$ - und  $z$ -Abhängigkeit. Hier betragen die Abweichungen bis zu 20%. Das hört sich schlimmer an, als es ist, denn die starken Inhomogenitäten sind räumlich eng begrenzt und tragen nur wenig zu den Messfehlern bei.

Betrachten muss man den Ausdruck

$$(1.1) \quad (A_r, A_z) = \frac{\int_0^{r_{\max}} dr \int_0^r \{ \vec{H}(r,z) - \vec{H}_1 \} dr}{\int_0^{r_{\max}} dr \int_0^r \vec{H}_1 dr}$$

$A_z$  gibt an, wie sich die Sagitta einer Spur ändert, wenn man von homogenem zum tatsächlichen Feld übergeht.  $A_r$  ist ein Mass für die Abweichung der Spur von einer Geraden in der R-Z-Projektion. (1.1) ergibt, berechnet bei verschiedenen  $z$  und gemittelt über alle  $\phi$  ( $B = 2$  Tesla):

z	0	100	200	300	400	mm
$A_r$	0.010	0.008	-0.001	-0.022	-0.059	
$A_z$	-0.002	0.003	0.013	0.030	0.059	

Im Bereich  $|z| < 200$  mm können Feldinhomogenitäten also Messfehler von 1% verursachen. Deshalb werden die Inhomogenitäten bei der Spurensuche berücksichtigt.

## 1. 2. 2 Die Zylinderkammern =====

Die Abb. 1 b zeigt den schematischen Aufbau einer Messkammer. Sie besteht aus drei ineinandergeschichteten Zylinderwänden. Den mittleren bilden die Drähte. Zwischen ihnen und den beiden inneren Flächen besteht ein elektrisches Feld. Es ist nach DER7) in der Nähe des Drahtes radialsymmetrisch und hat an Draht einen Betrag von  $1.1 \cdot 10^7$  V/m. Im restlichen Raum der Kammer ist das Feld als homogen zu betrachten mit einem Betrag von  $2.2 \cdot 10^5$  V/m (beides bei 1600 V Spannung).

In den Kammern befindet sich eine spezielle Gas Mischung. Beim Durchgang eines geladenen Teilchens werden einzelne Moleküle des Gases ionisiert. Elektronen und Ionen werden durch das elektrische Feld beschleunigt. Die Elektronen ionisieren weitere Gasmoleküle (Gasverstärkung). Es kommt zu je einer Lawine von Elektronen bzw. positiven Ionen, die auf die Drähte bzw. die Außenflächen zulaufen.

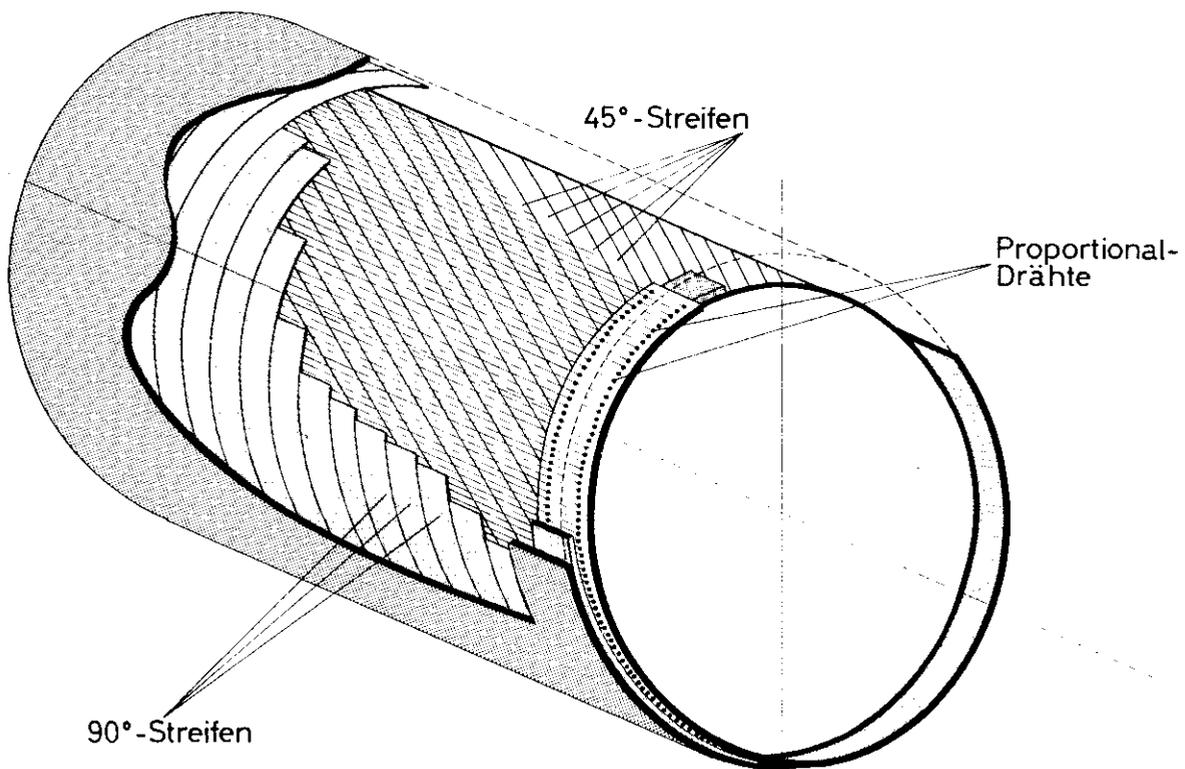


Abb. 1 b Schematischer Aufbau einer Messkammer

Durch Influenz werden in den Drähten und in den Außenflächen Ladungen verschoben. Diese Verschiebung wird im inneren Stromkreis als Stromstoß nachgewiesen. Dabei lässt sich heraus, welcher Draht angesprochen hat, die  $r$ - sowie die  $\phi$ -Koordinate bestimmen. Zur

Bestimmung der z-Koordinate sind die Aussenflächen in Streifen von 1.5 cm Breite unterteilt, die entweder senkrecht oder unter einem Winkel von  $\pm 45^\circ$  zu den Drähten verlaufen. Im ersten Fall geben sie die z-Koordinate direkt im zweiten Fall Schrägkoordinaten an. Mit den Drähten und den beiden Streifensystemen misst man einfach redundante räumliche Koordinaten.

### 1. 2. 3 Die Bleizylinder

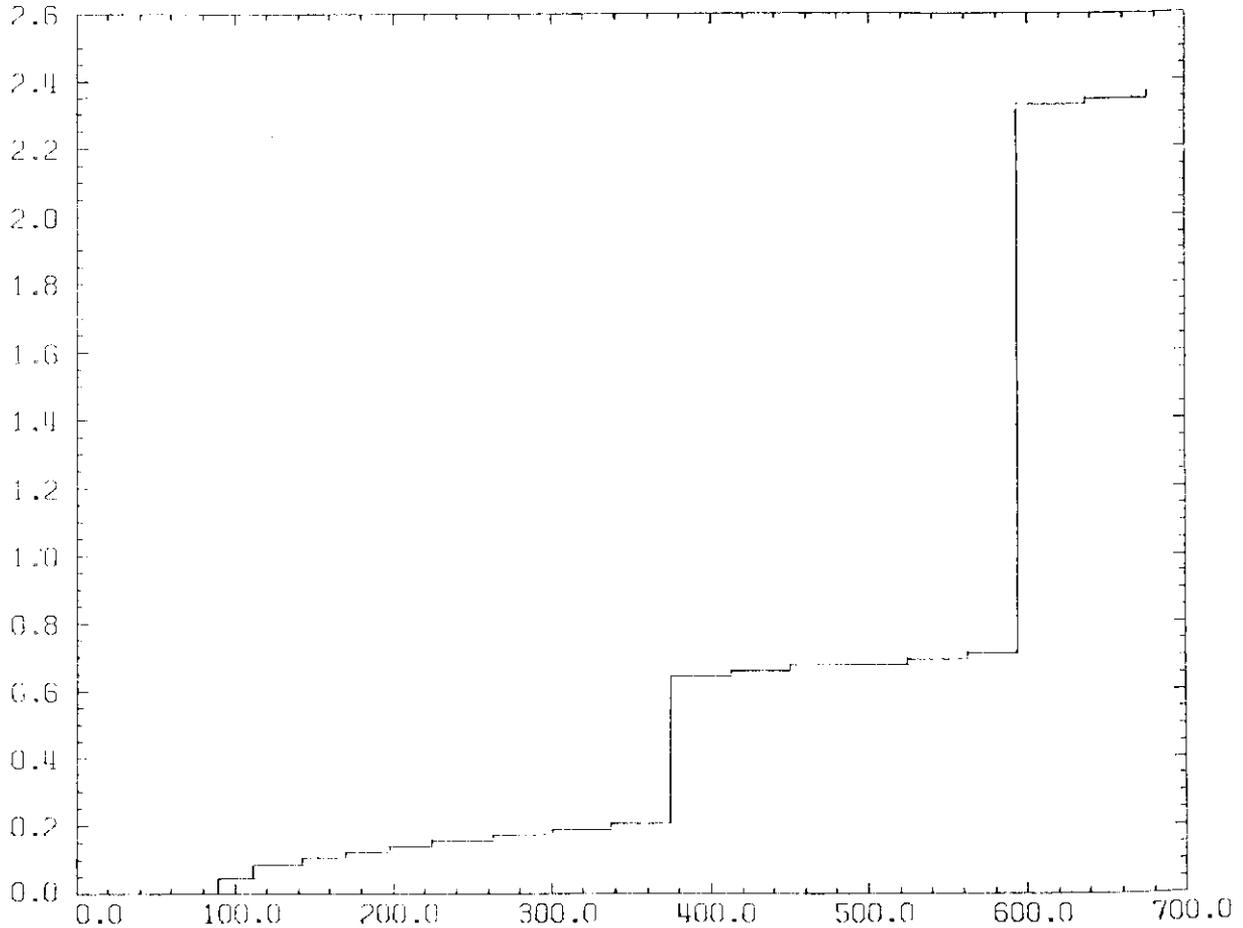


Abb. 1 : Strahlungslängen gegen Radius

In dem Paket der Messkammern befinden sich zwei Bleizylinder, die dazu dienen, den Detektor für Photonen empfindlich zu machen. Sie haben Radien von 375.0 mm und 539.5 mm, Dicken von 2 mm und 9 mm sowie Strahlungslängen von 0.44 und 1.72. Ein Teilchen das von Innern des Strahlrohres bis zur Kammer 16 gelangt, durchdringt insgesamt 2.345 Strahlungslängen Materie.

Abb. 1 : zeigt die Abhängigkeit der Anzahl der durchdrungenen Strahlungslängen vom Radius.

#### 1. 2. 4 Die Hy-Kammern =====

Im Gegensatz zu Elektronen sind Hy-Neusonen in der Lage, das Eisen des Jochs zu durchdringen. Sie werden in ebenen Proportionalrohrpaketen nachgewiesen, die ausserhalb des Jochs aufgestellt sind und 50 % des Raumwinkels erfassen. Durch Verlagerung der in Innern gefundenen Spuren bis zu den Hy-Kammern ist eine Identifizierung möglich.

#### 1. 3. Die Aufbereitung der Signale =====

##### 1. 3. 1 Verstärker =====

Die Signale der Masskammern durchlaufen Vor- und Hauptverstärker. Der Hauptverstärker gibt einen Impuls von 400 nsec Länge heraus. Vorder- und Rückflanke werden durch Differentiation in zwei Signale getrennt. Das erste Signal ('Fastout'), wird verwendet um die parallele Triggerlogik anzusteuern. Mit dem zweiten Signal wird ein Flipflop-Register gesetzt, falls die parallele Triggerlogik, die alle Signale in den dazwischenliegenden 400 nsec auf Spurenssegmente analysiert, einen Impuls, den sogenannte 'Strobe', aussendet.

##### 1. 3. 2 Der Trigger =====

Die Triggerlogik ist eine elektronische Schaltung, die entscheiden soll, ob die von den Kamern gemessenen Koordinaten möglicherweise von Spuren geladener Teilchen stammen (beschrieben in PL374, Kapitel 13). Sie arbeitet in drei Stufen. Höhere Stufen stellen jeweils härtere Bedingungen an ein Ereignis als niedrigere, brauchen dazu aber mehr Zeit. Die ersten beiden Stufen verarbeiten die Signale der Kamern gleichzeitig (parallele Logik), die dritte hintereinander (sequentielle Logik); allen Stufen gemeinsam ist, dass sie nur eine Auswahl der Koordinaten verarbeiten.

- a) In der ersten Stufe wird in Paaren von Kamern ('RING') geprüft, ob sie in demselben  $\phi$ -Sektor ein Teilchen registriert haben ('DOR'). Die Sektorbreite lässt sich zwischen  $3^\circ$  und  $9^\circ$  einstellen. Diese Untersuchung dauert etwa 150 - 250 nsec. Ist das der Fall, wird der Strobe gesetzt, der das Einlesen der Signale in das Flipflop-Register veranlasst.
- b) In der zweiten Stufe wird verlangt, dass in einem RING mindestens zwei DOR's wahr sind, die sich in Winkel mindestens um  $45^\circ$  unterscheiden. Ist das nicht der Fall, wird das Flipflop-Register wieder gelöscht. Der Zeitbedarf beträgt etwa 50 nsec zusätzlich.
- c) Die dritte (sequentielle) Stufe sucht nach mehreren Spuren. Dabei wird ausgenutzt, dass die Spuren von höherenergetischen Teilchen näherungsweise Geraden sind. (Zeitbedarf etwa 30 Mikrosekunden)

Wenn ein Ereignis den Anforderungen der sequentiellen Logik genügt, wird der Inhalt des Flipflop-Registers in den Kleinrechner PDP 11/45 eingelesen, andernfalls wird das Register gelöscht.

### 1. 3. 3 Der Kleinrechner PDP 11/45

=====

Aufgabe der PDP ist es, die Ereignisse zunächst zu speichern und auf mögliche Herkunft von einem kosmischen Teilchen zu untersuchen. Dazu wird auf einfache Art und Weise nach Zweiprongs gesucht, bei denen die Impulsvektoren der beiden Teilchen kollinear sind und die von Wechselwirkungspunkt einen Abstand von  $r > 30$  mm oder  $|z| > 150$  mm haben. Das Verfahren ist in PRA76 beschrieben.

Wird ein Ereignis auf diese Weise als Höhenstrahlteilchen identifiziert, so wird es verworfen. Auf diese Weise werden etwa 50% der getriggerten Ereignisse aussortiert. Die Reduktion ist notwendig, da die Anzahl der weiterzuverarbeitenden Daten sonst zu gross wäre. Allerdings sind unter den akzeptierten Ereignissen immer noch über 60% Höhenstrahlen. Das Verfahren ist in PRA76 beschrieben.

Nach 10 - 20 Ereignissen werden die dazugehörigen Daten gemeinsam von der PDP zur Grossrechenanlage IBM 370/168 übertragen.

Um später zu den Daten besser zugreifen zu können, werden sie in 'Runs' eingeteilt. Ein Run umfasst in der Regel 20000 Ereignisse. Die von der PDP verworfenen Ereignisse sind dabei mitgezählt. Alle 100 sec wird ein Satz von Parametern eingelesen, der in der Runbibliothek (s.u.) registriert wird, u.a. Strahlenergie und Magnetfeldstärke. Jedes Ereignis ist später durch die Nummer des Runs und die Eventnummer innerhalb des Runs gekennzeichnet.

### 1. 3. 4 Das Online-Programm

=====

Auf der IBM ist ein Programm (PLOT) ständig bereit, Daten von der PDP anzunehmen und zunächst auf einer Magnetplatte zu speichern. Ausserdem verwaltet es die Runbibliothek, in der für jeden Run die wichtigsten Parameter gespeichert werden, durch die der Zustand des Speicherrings und des Experiments charakterisiert wird. Wenn die Magnetplatte fast voll ist, wird sie auf ein Magnetband entladen. Diese Bänder bilden die sogenannte 1. Generation.

2 Das Spurensuchprogramm PLUPAT  
\*\*\*\*\*

2. 1. Allgemeines  
=====

PLUPAT ist ein von G.Franke in FORTRAN IV entwickeltes EDV-Programm. Die wesentlichen Teile werden im Folgenden skizziert. Als Eingabe dienen die Daten der 1. Generation, die die von den Kammern gemessenen Koordinaten in codierter Form enthalten. Zunächst werden daraus die einzelnen Messpunkte in der Darstellung  $(r, \phi, z)$  berechnet.

Ein Filterprogramm erkennt und eliminiert auf Grund einfacher Kriterien solche Ereignisse, die nicht von Wechselwirkungspunkt stammen, vorzugsweise Strahl-Gas-Ereignisse und Höhenstrahlen von weniger einfacher Topologie, die von der PDP nicht analysiert worden waren. Von 20000 Ereignissen eines Runs, die in die PDP eingelesen werden, werden in der PDP ca. 10000 als Höhenstrahlen erkannt. Von den restlichen 10000 Ereignissen, die zur IBM übertragen werden, werden vom Filterprogramm nochmal ca. 6000 zurückgewiesen. (Diese Zahl hängt von der Einstellung des Triggers ab, 6000 gilt für Daten, die im Februar 76 genommen wurden.)

Bei den verbleibenden Ereignissen wird zuerst in der x-y-Projektion nach Spuren gesucht; dann wird versucht, die zugehörige Spur in der r-z-Projektion zu finden.

2. 2. Spurensuche in der x-y-Projektion  
=====

Die x-y-Ebene wird in zwei Klassen von je zehn  $\phi$ -Sektoren eingeteilt, in die die Messpunkte einsortiert werden. Beide Klassen sind gegeneinander um die halbe Sektorbreite versetzt. Dadurch wird vermieden, dass ein am Rand liegender Punkt bevorzugt oder benachteiligt wird.

In jedem Sektor, der mehr als drei Punkte enthält, wird versucht eine Spur zu finden. Dazu werden von aussen beginnend drei Primärpunkte gesucht. Zwischen jeweils zwei Primärpunkten darf höchstens eine Kammer liegen, die nicht angesprochen hat. Durch die drei Punkte wird ein Kreisbogen gelegt und nach innen extrapoliert. Weiter innen wird in der Nähe des Kreises nach weiteren Punkten gesucht. Der dabei erlaubte Abstand vom Kreis (die Strassenbreite) hängt von der Auflösung ab, die sich aus je einem Anteil von der Ortsauflösung der Kamera und von der Vielfachstreuung zusammensetzt. Letztere ist impulsabhängig, deshalb wird schon jetzt der Impuls aus dem Radius des schon bestehenden Kreises berechnet.

Steht die Suche auf eine Lücke, d.h. auf drei aufeinanderfolgende Kammern, die nicht angesprochen haben, wird ein Fit zwischengeschaltet, der den Kreis an die bisher gefundenen Messpunkte optimal anpasst. Dasselbe geschieht, wenn das Verfahren an der innersten Kammer angekommen ist.

### 2. 3. Spurensuche in der r-z-Projektion =====

Zu jeder in der x-y-Projektion verwendeten Koordinate werden die möglichen z-Koordinaten bestimmt. Die Erkennung der Spur geschieht auf ähnliche Weise wie in x-y. Allerdings gibt es eine Vereinfachung: Weil die Spur in der x-y-Projektion schon erkannt ist, wählt man als unabhängige Variable für die Beschreibung der z-Koordinaten den Weg s entlang der Spur in der x-y-Projektion. So lässt sich z als lineare Funktion von s darstellen:

$$(2.1) \quad z = z(s) = z(0) + dz/ds \cdot s ; \quad dz/ds = \text{const}(s)$$

Deshalb lassen sich  $z_0$  und  $Dz/ds$  durch einen linearen Fit (ohne Iteration) bestimmen.

### 2. 4. Spurenparameter =====

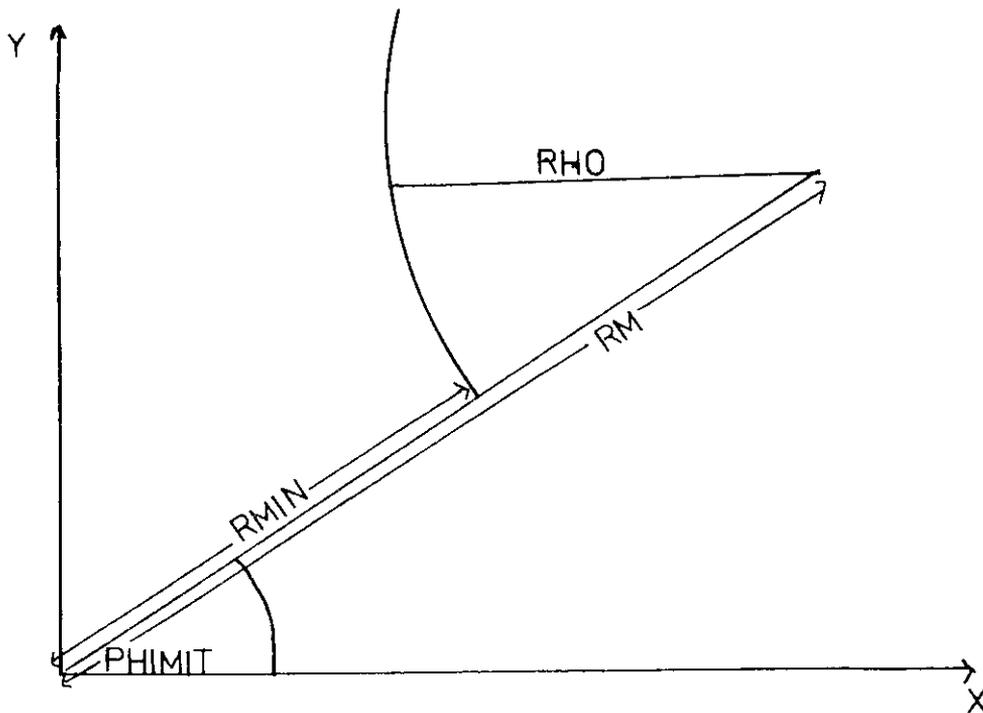


ABB. 2 a Spurenparameter der x-y-Projektion

Geladene Teilchen beschreiben im Magnetfeld eine Schraubenlinie. Sie wird durch fünf Parameter beschrieben (siehe auch Abb. 2 a).

KAPPA =  $1/RHO$       Krümmung der Spur in der x-y-Projektion  
 RMIN =  $RH - RHO$     Abstand der Spur von der Achse  
 PHIMIT              Kreismittelpunktswinkel  
 ZO                    z-Koordinate des achsnächsten Punktes der  
                           Schraubenlinie  
 DZDS =  $dz/ds$       Steigung in z (s = Weg entlang der Spur in der  
                           x-y-Projektion)

Ausserdem gibt es noch einen diskreten Parameter, das Ladungsvorzeichen  $q/e = \pm 1$ . Die Relianz wird angegeben durch die Freiheitsgrade:

NDPHI              Anzahl der in x-y benutzten Punkte minus drei  
 NDZ                Anzahl der in r-z benutzten Punkte minus zwei

Zu jeder Spur berechnet das PLUPAT-Programm ausserdem eine sogenannte Kovarianzmatrix. Das ist eine (5 x 5) - Matrix, die in der Hauptdiagonalen zu jedem Parameter die berechneten Fehler enthält ( $\sigma^2$ ). Die Elemente ausserhalb der Diagonalen beschreiben die Korrelationen der Parameter untereinander. Dabei werden nur die Korrelationen von KAPPA, RMIN, PHIMIT untereinander und von ZO, DZDS untereinander berechnet, die anderen werden zu 0 angenommen.

## 2. 5.      Das Fitverfahren und die Berechnung der Fehlermatrizen =====

Es wird hier nur das Verfahren für die x-y-Projektion beschrieben. Das Verfahren in r-z ist ähnlich. Es gibt entweder aus dem vorhergehenden Fit oder aus der Initialisierung mit Hilfe dreier Primärkoordinaten einen Kreis, beschrieben durch die Parameter KAPPA, RMIN und PHIMIT, der an eine Reihe von Messpunkten bereits angepasst ist. Ausserdem gibt es weitere Messpunkte, die als möglicherweise zur Spur gehörig erkannt worden sind. Aufgabe des Fits ist es nun, die Kreisparameter in mehreren Iterationen so zu ändern, dass auch die zusätzlichen Messpunkte einbezogen sind.

### 2. 5. 1 Residuen =====

Mit Residuen bezeichnet man die Differenz aus gemessenem Wert für  $\phi$  und demjenigen, der aus den vorhandenen Kreisparametern berechnet wird. Die Residuen für alle Messkammern werden zu einem Vektor  $\vec{e}$  zusammengefasst. Man kann  $\vec{e}$  also als Funktion der Parameter  $\vec{b}$  auffassen:

$$(2.2) \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \text{KAPPA} \\ \text{RMIN} \\ \text{PHIMIT} \end{pmatrix} \quad \vec{e} = f(\vec{b})$$

Eine Grösse, die die Güte der Anpassung beschreibt, ist

$$(2.3) \quad \chi^2 = \vec{e} C_e^{-1} \vec{e}$$

Dabei enthält  $C_e$  die theoretischen Messfehler für  $\phi$ , mit denen die Residuen verglichen werden müssen. In dem Fitverfahren werden iterativ die Parameter gesucht, für die  $\chi^2$  minimal wird. Falls  $\chi^2$  in zwei aufeinander folgenden Iterationen grösser wird, bricht das Fitverfahren ab.

### 2. 5. 2 Theoretische Messfehler =====

Wenn man den Impuls von Teilchen, d.h. Spurrichtung und Tangentialrichtung, am Wechselwirkungspunkt wissen will, bildet die Vielfachstreuung eine Schwierigkeit, denn je mehr Materie das Teilchen auf seinem Weg von innen nach aussen durchdringt, desto mehr weicht es von der ursprünglichen Kreisbahn ab. Daraus folgt, dass man den Messpunkten Fehler zuweisen muss, zu denen jeder Streuer (Kammern, Blei) beiträgt, den das Teilchen bis zu dem jeweiligen Punkt durchdrungen hat. So setzt sich also der Fehler für die  $\phi$ -Messung ( $\sigma_{\text{ges}}$ ) zusammen aus der Ortsauflösung (im wesentlichen geht der Drahtabstand ein) und einem Anteil, der die Vielfachstreuung behandelt. Die r-Koordinate eines Messpunktes ist gleich dem Radius der betreffenden Kammer, sie wird als nicht fehlerbehaftet angesehen. Die Fehler für alle Punkte werden zusammengefasst zur Matrix  $C_e$ :

$$(2.4) \quad C_e = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{ges},1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{ges},2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\text{ges},16}^2 \end{pmatrix}$$

Die nicht diagonalen Elemente sind gleich null, d.h. die Messfehler werden als nicht korreliert angesehen, was auf Grund des Vielfachstreuanteils in Strengem nicht richtig ist. Dieser Punkt wird in Kapitel 6 genauer behandelt.

2. 5. 3 Fehlermatrizen  
 =====

Aus  $C_e$  lässt sich über Fehlerfortpflanzung die Covarianzmatrix der Kreisparameter  $C_b$  bestimmen:

$$(2-5) \quad \begin{aligned} C_{a_i} &= Q C_b Q^t \\ \text{bzw.} \quad C_b^{-1} &= Q^t C_e^{-1} Q \end{aligned}$$

$Q$  ist die Ableitung von  $\vec{g}$ , ist also die Matrix, die die partiellen Ableitungen der Residuen  $\vec{e}$  nach den Parametern  $\vec{b}$  enthält. Dabei ist der gemessene  $\phi$ -Wert eine Konstante und ergibt bei der Ableitung 0. Die Covarianzmatrix spiegelt also nur die theoretischen Fehler wider und macht keine Aussage über die Güte der Anpassung an die Messpunkte.

Zur Illustration folgen für das Ereignis in Abb. 3 b die Spureparameter und die beiden Covarianzmatrizen.

	K A P P A	R M I N	P H I 4 I T	Z O	D Z D S
Spur 1	0.548E-03	0.506E+01	0.234E+01	-0.229E+02	-0.196E+00
Spur 2	0.573E-03	0.318E+00	0.244E+01	-0.141E+02	-0.956E-01

$$\text{Spur 1} \begin{pmatrix} 0.258E-08 & 0.127E-03 & 0.866E-06 & 0.0 & 0.0 \\ 0.127E-03 & 0.699E+01 & 0.447E-01 & 0.0 & 0.0 \\ 0.866E-06 & 0.447E-01 & 0.298E-03 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.847E+01 & 0.239E-01 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.239E-01 & 0.944E-04 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spur 2} \begin{pmatrix} 0.173E-08 & 0.850E-04 & -0.593E-06 & 0.0 & 0.0 \\ 0.850E-04 & 0.469E+01 & -0.306E-01 & 0.0 & 0.0 \\ -0.593E-06 & -0.306E-01 & 0.209E-03 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.845E+01 & -0.237E-01 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.237E-01 & 0.838E-04 \end{pmatrix}$$

#### 2. 5. 4 Änderung der Parameter =====

In Pit sollen die Parameter  $\vec{b}$  um einen Vektor  $\vec{d}$  so geändert werden, dass die Residuen möglichst klein oder sogar 0 werden.

$$(2.5) \quad \vec{g}(\vec{b} + \vec{d}) = \vec{0}$$

Da  $\vec{g}^{-1}$  nicht eindeutig ist, kann  $\vec{d}$  nicht einfach ausgerechnet werden. Vielmehr wird versucht,  $\vec{b}$  in mehreren Iterationsschritten an den günstigsten Wert anzunähern. In jedem Schritt wird  $\chi^2$  aus Gleichung (2.3) bestimmt. Steigt es in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen an, wird das Pitverfahren abgebrochen. In jedem Schritt wird  $\vec{d}$  aus der Gleichung (2.5) näherungsweise bestimmt (siehe Anhang):

$$(2.7) \quad \vec{d} = C_b^{-1} Q^t C_e^{-1} \vec{e}$$

Falls die Änderung der Parameter innerhalb des Fehlerellipsoids liegt

$$(2.8) \quad \vec{d}^t C_b^{-1} \vec{d} < 1,$$

wird Konvergenz angenommen und die Prozedur abgebrochen.

3 Die Daten der 2. Generation  
\*\*\*\*\*

3. 1. Allgemeines  
=====

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie aus den Daten der 2. Generation, deren Organisation im letzten Kapitel beschrieben ist, diejenigen Ereignisse herausgefiltert werden, die mit Sicherheit von Höhenstrahlen stammen. Ausserdem werden einige Verteilungen angegeben.

Man kann sich auf Ereignisse beschränken, bei denen das PLUPAT-Programm jeweils zwei Spuren in x-y- und r-z-Sicht mit unterschiedlichen Ladungsvorzeichen gefunden hat. Darunter können aber noch Ereignisse mit zwei geladenen und zusätzlichen neutralen Teilchen sein. Um solche Ereignisse auszuschliessen, muss man sich die Impulsbilanz ansehen. Für Höhenstrahlteilchen muss die vektorielle Summe der Impulse verschwinden.

Aus der Berechnung der kartesischen Impulse

$$\begin{array}{llll}
 (3.1) & P_x = 0.3(-q \text{ o } B) & \sin(\text{PHIMIT}) / \text{KAPPA} & [\text{KAPPA}] = 1/\alpha \\
 & P_y = 0.3(q \text{ o } B) & \cos(\text{PHIMIT}) / \text{KAPPA} & [B] = T \\
 & P_z = 0.3(-q \text{ o } B) & \text{DZDS} / \text{KAPPA} & [P] = \text{GeV}/c \\
 & & & q = te
 \end{array}$$

folgt, dass PHIMIT, KAPPA und DZDS für beide Spuren innerhalb gewisser Fehlergrenzen übereinstimmen müssen, damit die vektorielle Summe der Impulse gleich 0 ist. Da die Überprüfung der Fehler, mit denen diese Parameter behaftet sind, Thema dieser Arbeit ist, wird zunächst untersucht, bei welchen Parameterwerten die Spurenbilder von einem koplanaren Zweiprozess abzuweichen beginnen.

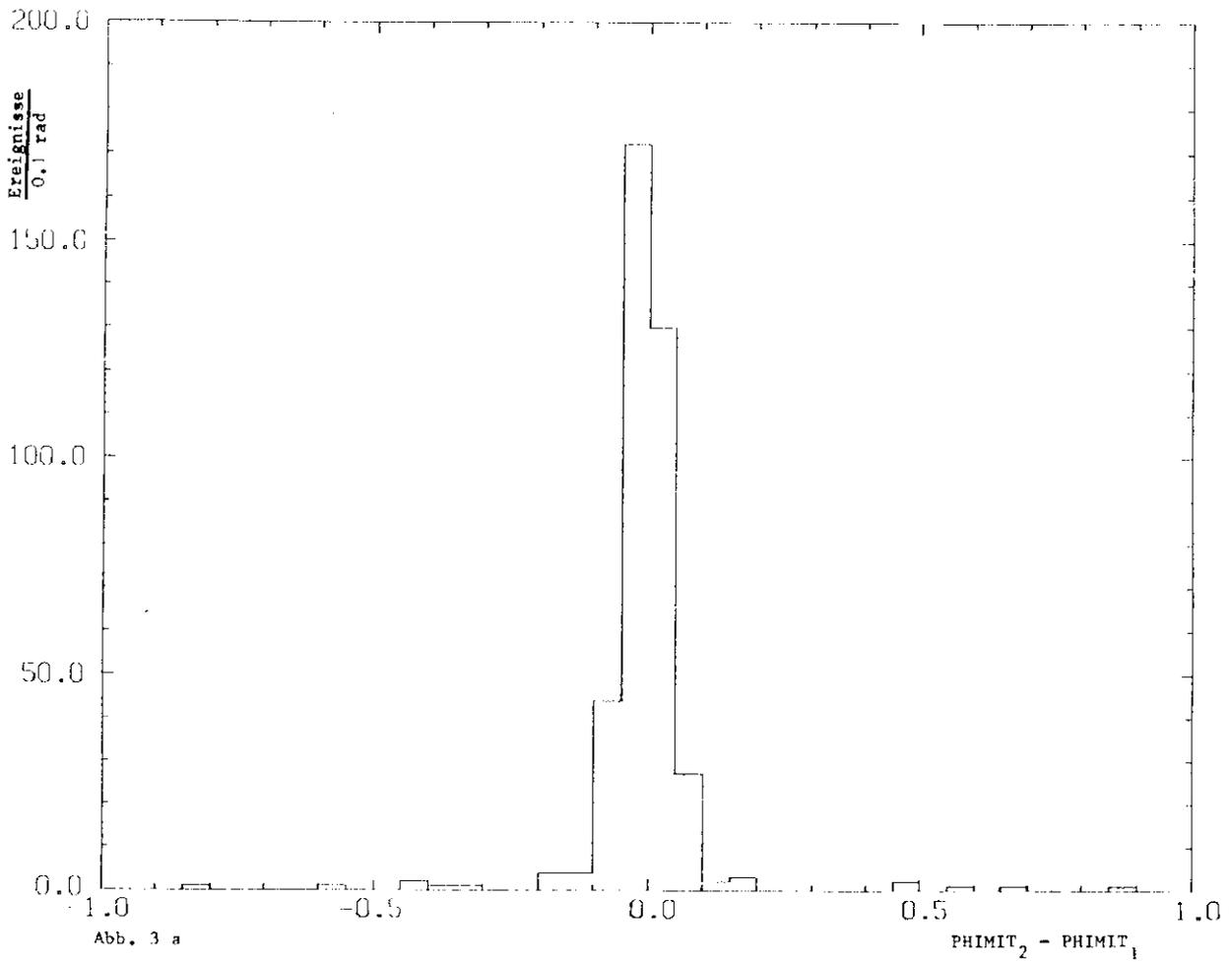
3. 2. Der Mittelpunktswinkel PHIMIT  
=====

Die Abbildung 3 a zeigt fuer 400 Ereignisse, bei denen zwei Spuren mit verschiedenem Ladungsvorzeichen gefunden wurden, die Differenz der Mittelpunktswinkel im Bogenmass.

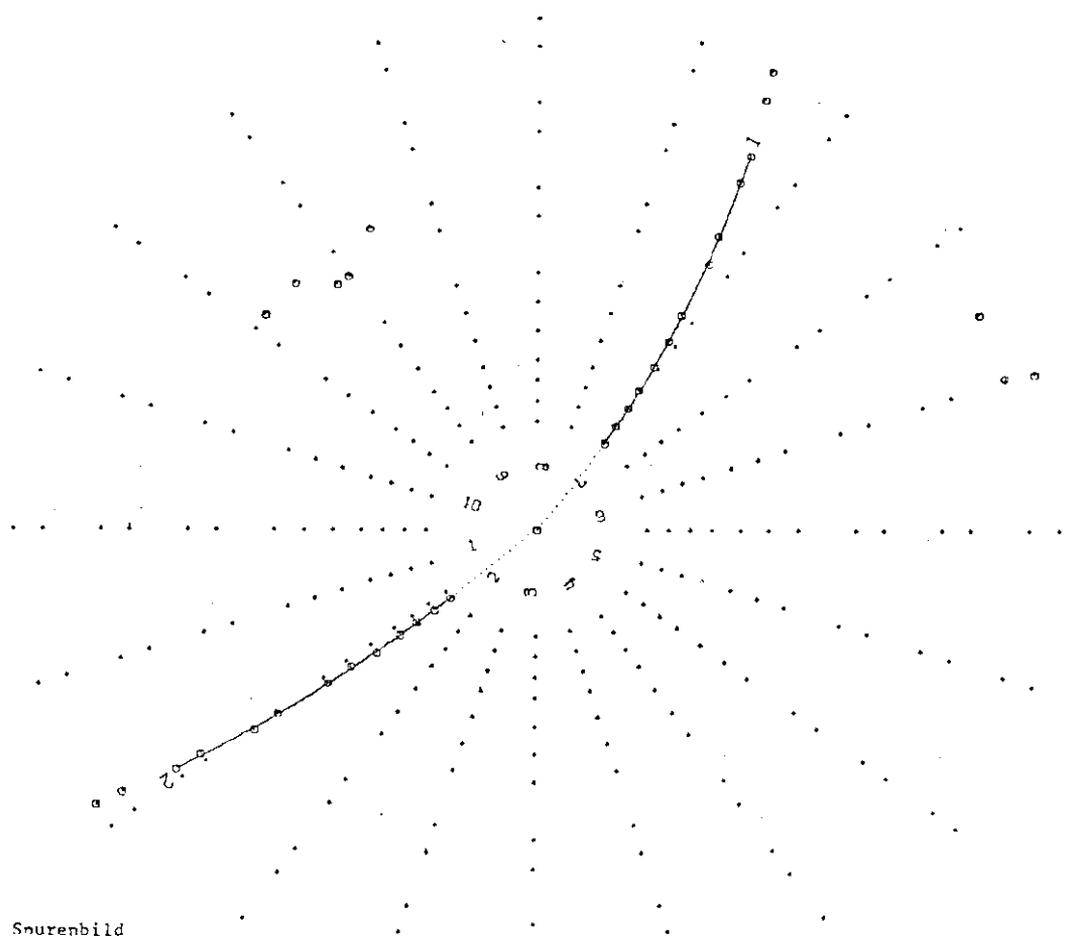
Für fast alle Ereignisse gilt

$$(3.2) \quad |\text{PHIMIT}_2 - \text{PHIMIT}_1| < 0.1$$

Von einem Ereignis mit  $|\text{PHIMIT}_2 - \text{PHIMIT}_1| = 0.103$  zeigt Abbildung 3 b das Spurenbild. Man sieht die Schauer hinter den beiden Bleiplatten, i.h. wahrscheinlich sind noch neutrale Teilchen beteiligt. Um so etwas möglichst auszuschliessen, werden im Folgenden nur solche Ereignisse genommen, die der Ungleichung 3.2 genügen.



RUN 4109  
 EVENT 2208  
 SPUR 1 STEW -1.  
 P = 0.91 +- 0.09  
 D = -0.0 +- 2.6  
 T = 0.877 +- 0.018  
 PROB 0.7951 N 11  
 SPUR 2 STEW 1.  
 P = 1.18 +- 0.18  
 D = 3.1 +- 2.6  
 T = 2.389 +- 0.018  
 PROB 0.0809 N 11



## 3. 3. Die Achsenabstände RMIN und Z0

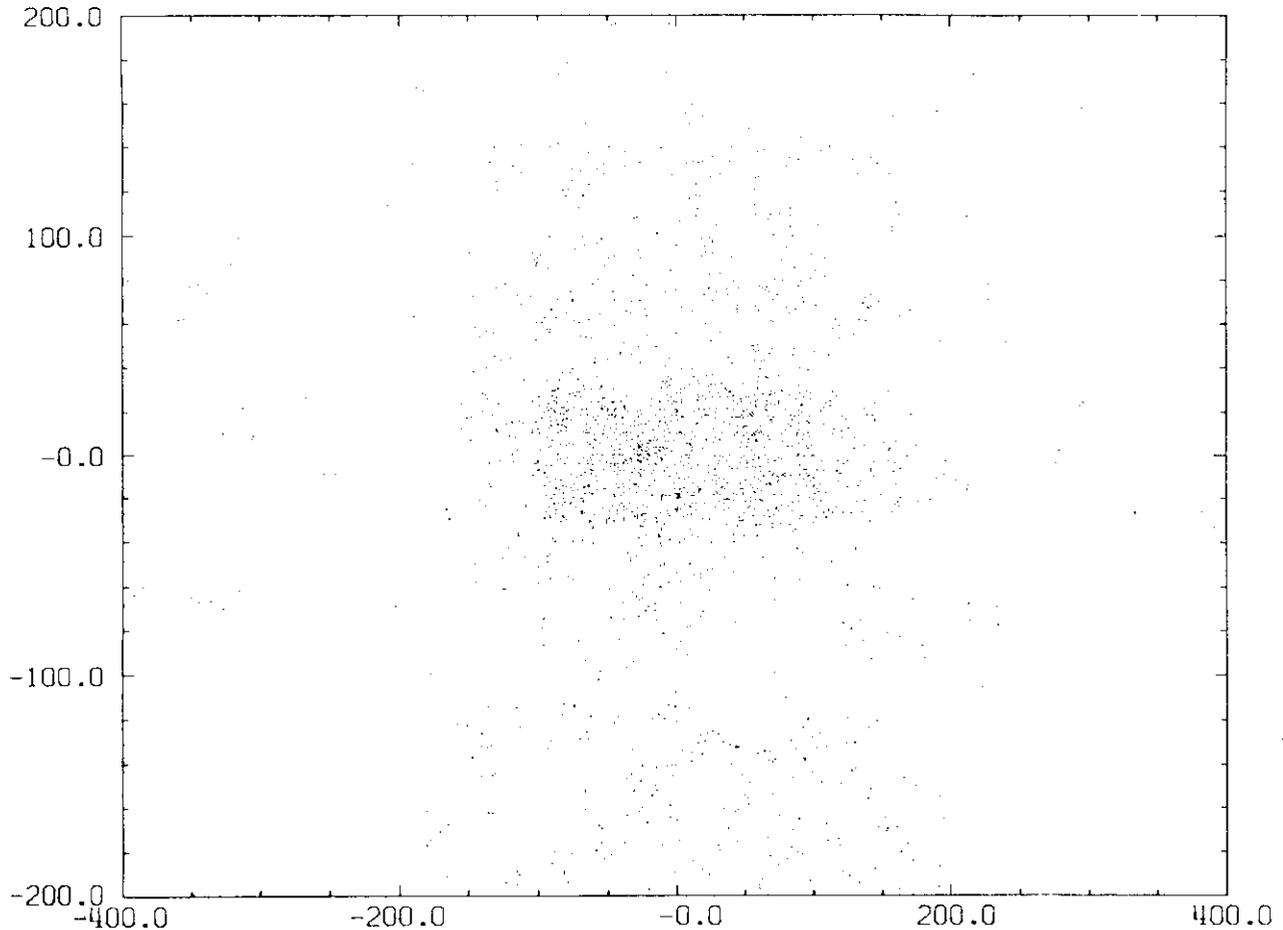


ABB. 3 c RMIN vs Z0

Abb. 3 c zeigt die Verteilung der Achsenabstände RMIN und Z0. Man sieht sehr deutlich die durch die Höhenstrahlreduktion in der PDP (siehe PRA76) bewirkte Verdünnung ausserhalb von

$$(3.3) \quad \begin{array}{l} |RMIN| < 30.0 \text{ mm} \\ |Z0| < 150.0 \text{ mm} \end{array}$$

Um sicher zu sein, dass nur Höhenstrahlen in dem betrachteten Sample sind, wird im folgenden von allen Ereignissen

$$(3.4) \quad |RMIN| > 8.0 \text{ mm} \quad \text{verlangt.}$$

## 3. 4. Die Freiheitsgrade NDPHI und NDZ

Eine genaue Vermessung der Spuren ist nur möglich, wenn viele Messpunkte vorliegen. Deshalb wird für die Freiheitsgrade verlangt, dass sie grösser sind als vier. Dadurch werden nur Spuren bearbeitet, die in x-y mindestens acht und in r-z mindestens sieben Messpunkte aufweisen. U.a. werden dadurch Ereignisse mit  $\cot\theta > 1.4$  nicht bearbeitet und entsprechend nur Ereignisse aus 81.2 % des gesamten Raumwinkels 'gesehen'. (vergleiche hierzu auch Kapitel 1.2)

## 3. 5. Die Krümmung KAPPA

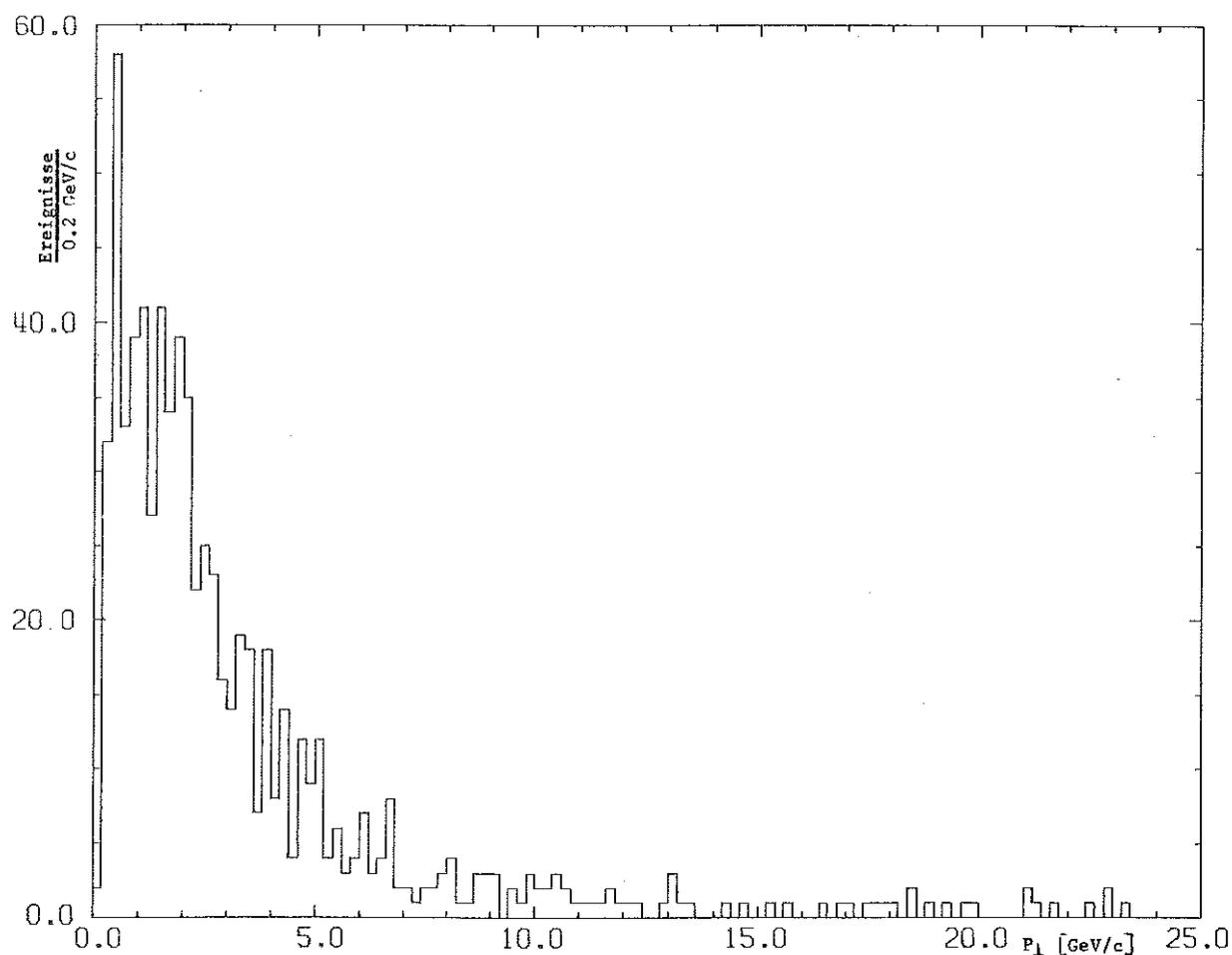


Abb. 3 1 Impulsverteilung (Vertikalkomponente)

Aus der Krümmung KAPPA lässt sich der Betrag der Impulsprojektion in x-y bestimmen ( $P_{\perp} = 0.3 e \cdot B / \text{KAPPA}$ ). Die Abbildung 3 1 zeigt die Verteilung. Da zunächst nur die Verhältnisse bei den Resonanzen  $J/\psi$  (3100) und  $\psi'$  (3700) interessieren, werden nur Ereignisse betrachtet, die

$$(3.5) \quad 1 \text{ GeV}/c < |P_{\perp}| < 2 \text{ GeV}/c$$

genügen. Hier noch einmal im Zusammenhang alle Bedingungen, die an ein Ereignis gestellt werden:

- a) Zweiprong mit unterschiedlichem Ladungsvorzeichen
- b)  $|PHIMIT2 - PHIMIT1| < 0.1$
- c)  $|RMIN| > 8 \text{ mm}$
- d) Mindestens 8 Kammern in R-PHI
- e) Mindestens 7 Kammern in R-Z
- f)  $P_{\perp}$  zwischen 1 und 2 GeV/c

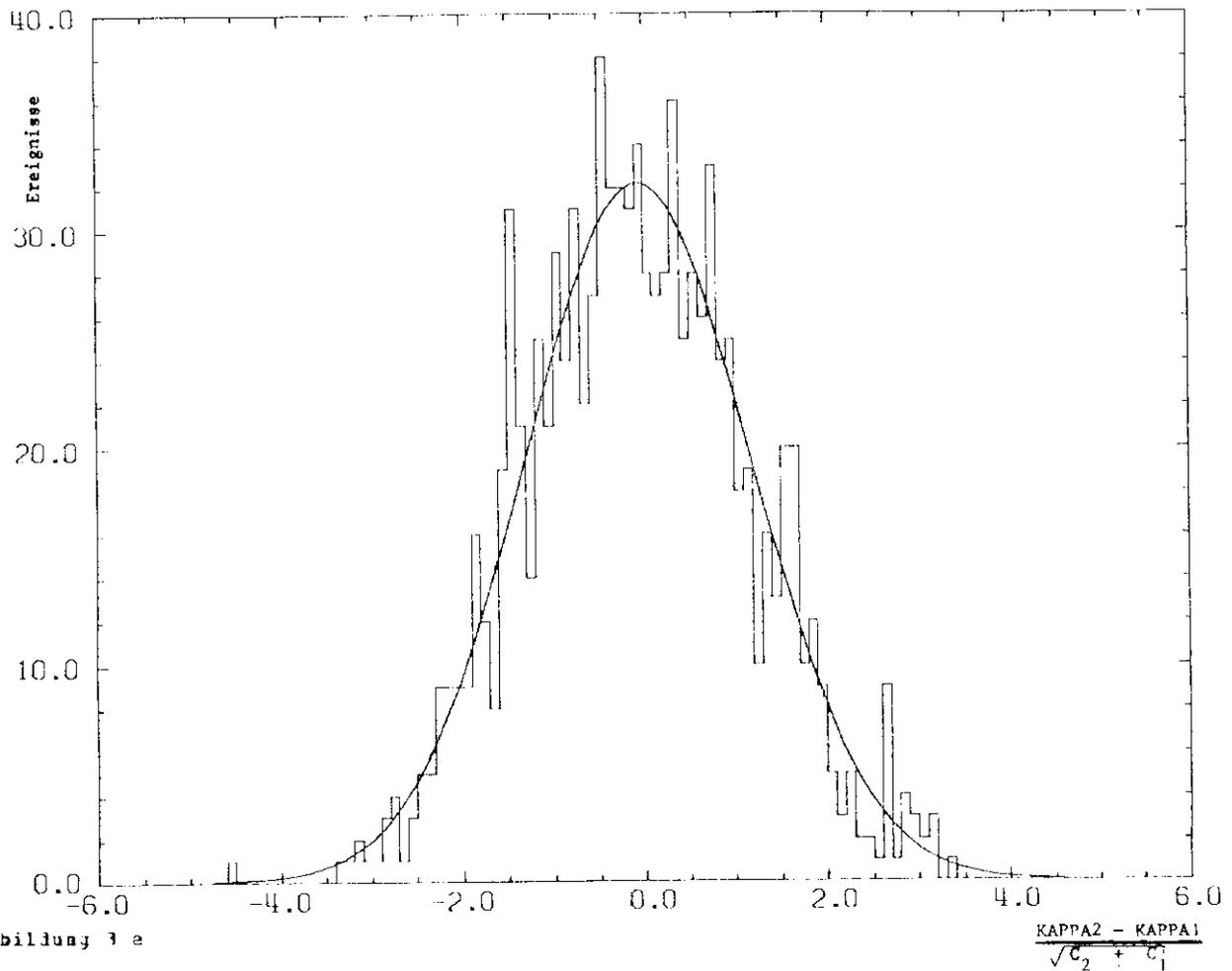
3. 6. Die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix  $C_b$ 

Abbildung 3 e

Eine erste Abschätzung über die Richtigkeit der von PLUPAF angebotenen Fehler lässt sich aus der folgenden Überlegung gewinnen. Seien  $C_1$  und  $C_2$  die Quadrate der Fehler zu den beiden Messwerten  $X_1$  und  $X_2$  des Parameters  $X$ . Dann ist nach dem Gesetz über die Fehlerfortpflanzung bei unabhängigen Parametern der Fehler von  $(X_2 - X_1)$ :

$$(3.6) \quad \sqrt{C_2 + C_1}$$

Entsprechend sollte bei richtigen  $C_1$  und  $C_2$  der Quotient

$$(3.7) \quad v^2 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{C_2 + C_1}}$$

normalverteilt sein, d.h. die Verteilung sollte der Gleichung

$$(3.8) \quad N(v) = N(0) \exp \frac{-v^2}{2\sigma^2}$$

mit  $\sigma=1$  genügen. Die Abbildungen 3 e und 3 f zeigen stellvertretend für alle fünf Parameter die gemessene Verteilung von (3.7) für  $x=KAPPA$  und  $x=ZO$  mit durchgefitteter Kurve nach (3.8).

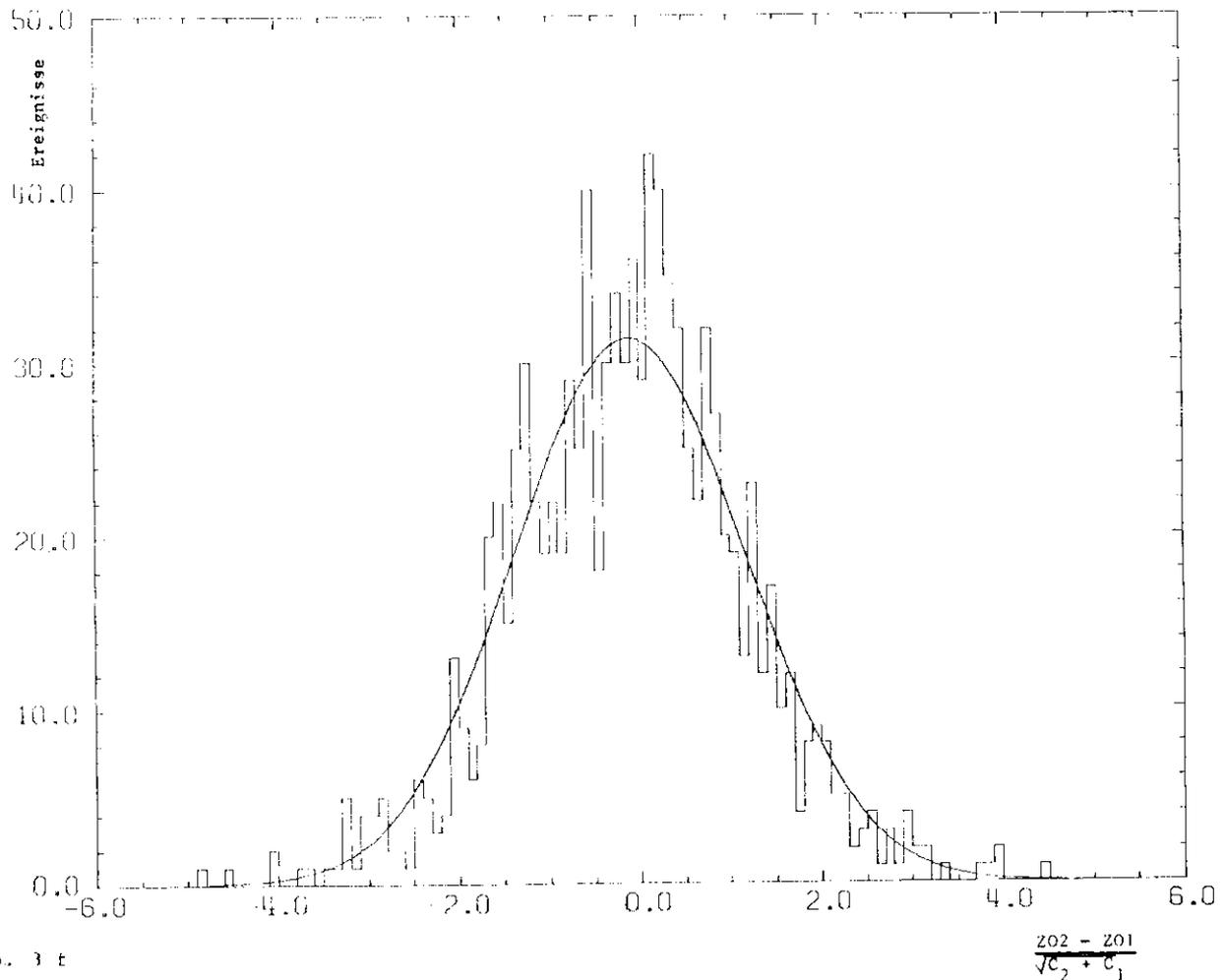


Abb. 3 f

Es ergeben sich für die einzelnen Parameter folgende Breiten:

KAPPA:	$\sigma = 1.24 \pm 0.02$	$(0.94 \pm 0.02)$
RMIN:	$\sigma = 1.26 \pm 0.04$	$(1.06 \pm 0.02)$
PHIMIF:	$\sigma = 1.26 \pm 0.04$	$(0.97 \pm 0.02)$
Z0:	$\sigma = 1.27 \pm 0.02$	$(1.28 \pm 0.02)$
BZDS:	$\sigma = 1.25 \pm 0.03$	$(1.09 \pm 0.02)$

Es scheint so aus, als ob die von PLUPAT im Bereich  $1 \text{ GeV}/c < p_{\perp} < 2 \text{ GeV}/c$  berechneten Fehler um 20 - 30 % zu klein sind. Im Klammern sind die entsprechenden Werte angegeben für Ereignisse mit Impulsen zwischen 10 und 20  $\text{GeV}/c$ . Sie geben einen Hinweis darauf, dass bei KAPPA, RMIN und PHIMIF die Vielfachstreuung bei der Berechnung der Fehler nicht richtig berücksichtigt wurde, denn Vielfachstreuung geht mit  $\exp(-p^2)$  zurück.

Weiter ist zu untersuchen, ob Energieverlust eine Rolle spielt. Es lässt sich mit der Bethe-Block-Formel abschätzen, dass ein minimal ionisierendes Teilchen, das den Detektor einmal ganz durchdringt (von Kammer 14 bis Kammer 14) etwa 17 MeV verliert. Das ist ungefähr 1% der Energie. In den Messfehler geht das noch geringer ein, da der Impuls nicht nur mit Kammer 14 sondern mit allen Kammern bestimmt wird. Daraus folgt, dass Energieverlust keine Erklärung für die zu breiten Verteilungen sein kann. Mit dem geschilderten Verfahren lassen sich aber nur die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix überprüfen. Über die Nichtdiagonalelemente ist keine Aussage gemacht. Das geschieht in Kapitel 5.

4 Das Fitverfahren  
\*\*\*\*\*

4. 1. Definitionen  
=====

Die im Folgenden verwendeten Begriffe, wie z.B. Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert, Covarianzmatrix, sind in BRA69 definiert und ausführlich erläutert. Zufallsvariable sind in dieser Arbeit z.B. die Spurparameter eines Ereignisses, die zu einem 10-Tupel

$$(4.1) \quad \vec{a} = (\text{KAPPA1}, \text{RMIN1}, \text{PHIMIT1}, \text{ZO1}, \text{DZDS1}, \\ \text{KAPPA2}, \text{RMIN2}, \text{PHIMIT2}, \text{ZO2}, \text{DZDS2}) \\ = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10})$$

zusammengefasst werden.

Dazu gehört jeweils eine (10 x 10)-Matrix  $\Sigma_x$ ,

KAPPA 1	RMIN 1	PHIMIT 1	ZO 1	DZDS 1	KAPPA 2	RMIN 2	PHIMIT 2	ZO 2	DZDS 2
0.258E-08	0.127E-03	0.866E-06	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.127E-03	0.699E+01	0.447E-01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.866E-06	0.447E-01	0.298E-03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.847E+01	0.239E-01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.239E-01	0.844E-04	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.173E-08	0.850E-04	-0.593E-06	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.850E-04	0.468E+01	-0.306E-01	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.593E-06	-0.306E-01	0.209E-03	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.847E+01	-0.237E-01
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.237E-01	0.838E-04

die aus den beiden (5 x 5) - Covarianzmatrizen zusammengesetzt wird, die zu einem Höhenstrahlereignis gehören. Die Korrelationen zwischen den Parametern der ersten und der zweiten Spur werden dabei gleich 0 gesetzt. Die hier gezeigte Matrix gehört zu dem Ereignis in Abb. 3 b, dessen Parameter und Covarianzmatrizen in Kapitel 2.5.3 angegeben wurden.

Sei  $\vec{y}$  der Erwartungswert der Zufallsvariablen  $\vec{Y}$  und C die zugehörige Covarianzmatrix, dann definiert man:

$$(4.2) \quad \chi^2 = (\vec{y} - \vec{y})^T C^{-1} (\vec{y} - \vec{y})$$

Dieser Ausdruck geht für den Fall, dass C nur Diagonalelemente enthält über in:

$$(4.3) \quad \chi^2 = \sum_i ((\vec{v}_i - \vec{v}_i) / \sigma_i)^2$$

Häufig gibt man statt  $\chi^2$  die Wahrscheinlichkeit an, ein grösseres  $\chi^2$  zu erhalten. Diese Wahrscheinlichkeit ist zwischen 0 und 1 gleichverteilt für Größen  $\vec{y}$ , die nach Gauss verteilt sind mit einer Breite 1.

Die Wahrscheinlichkeit kann also dazu dienen, eine gegebene Verteilung daraufhin zu untersuchen, ob es sich um eine Gaussverteilung handelt oder nicht.

## 4. 2. Berechnung der Mittelwerte

=====

Thema dieser Arbeit ist es, theoretische mit wahren Messfehlern zu vergleichen. Der wahre Messfehler ist die Differenz aus Messwert und wahren Wert; letzterer ist unbekannt. Das nächste Ziel ist es also, eine Näherung für die wahren Spurparameter zu bestimmen.

Wie schon gesagt, besteht eine Spur aus zwei Spurteilen, die jeder durch einen Satz von fünf Parametern gekennzeichnet sind. Die beiden Teile der wahren Spur stimmen in dem Punkt, in dem sie zusammenstossen, natürlich in allen Parametern überein, deshalb soll von der gesuchten Näherung das gleiche verlangt werden. Die gemessenen Parameter sind nach (4.1) zu einem 10-Tupel zusammengefasst:

$$(4.1) \quad \vec{a} = (\text{KAPPA1}, \text{RMIN1}, \text{PHIMIT1}, \text{Z01}, \text{DZDS1}, \\ \text{KAPPA2}, \text{RMIN2}, \text{PHIMIT2}, \text{Z02}, \text{DZDS2}) \\ = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10})$$

Die Näherung soll auch ein 10-Tupel sein

$$(4.4) \quad \vec{\bar{a}} = (\overline{\text{KAPPA}}, \overline{\text{RMIN}}, \overline{\text{PHIMIT}}, \overline{\text{Z0}}, \overline{\text{DZDS}}, \\ \overline{\text{KAPPA}}, \overline{\text{RMIN}}, \overline{\text{PHIMIT}}, \overline{\text{Z0}}, \overline{\text{DZDS}}) \\ = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_{10})$$

allerdings gilt jetzt

$$(4.5) \quad \vec{a}_i = \vec{a}_{i+5} \quad i = 1, \dots, 5$$

oder in Matrixschreibweise

$$(4.6) \quad P \vec{a} = \vec{0}$$

mit

$$(4.7) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ausserdem sollen die mit der Covarianzmatrix gewichteten Abweichungen der beiden 10-Tupel möglichst gering sein. Die letzte Bedingung führt auf:

$$(4.8) \quad H = \vec{e}^T G \vec{e} = \text{Min} \\ \text{mit} \quad \vec{e} = (\vec{a} - \vec{\bar{a}}) \quad \text{und} \quad G = C_x^{-1}$$

Um die Gleichung (4.8) unter der Nebenbedingung (4.6) zu lösen, wird das Verfahren der Lagrange'schen Multiplikatoren angewendet.

Aus (4.5) und (4.8) folgt zunächst

$$(4.9) \quad F \vec{a} = F(\vec{a} - \vec{c}) = P\vec{a} - P\vec{c} = \vec{0}$$

Nun werden fünf zunächst unbekannte Lagrange-Multiplikatoren eingeführt

$$(4.10) \quad \vec{\alpha}^t = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

und mit ihrer Hilfe die ursprüngliche Minimumfunktion  $M$  zu einer Lagrangefunktion  $L$  erweitert.

$$(4.11) \quad L = \vec{c}^t G \vec{c} - 2 \vec{\alpha}^t (P\vec{a} - P\vec{c})$$

Falls die Bedingung (4.6) erfüllt ist, geht  $L$  in  $M$  über, insbesondere fallen die Minima zusammen. Aufgabe ist es also das Minimum von  $L$  zu suchen und dabei (4.6) zu erfüllen. Im Minimum von  $L$  muss u.a. die Ableitung von  $L$  nach  $\vec{c}$  verschwinden:

$$(4.12) \quad 2\vec{c}^t G + 2\vec{\alpha}^t P = \vec{0}$$

(4.12) wird transponiert und aufgelöst

$$(4.13) \quad \vec{c} = -G^{-1} P^t \vec{\alpha}$$

und dann in (4.9) eingesetzt

$$(4.14) \quad P\vec{a} + PG^{-1}P^t \vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$\vec{\alpha} = - (PG^{-1}P^t)^{-1} P\vec{a}$$

(4.13) und (4.8) ergeben dann

$$(4.15) \quad \vec{c} = G^{-1}P^t (PG^{-1}P^t)^{-1} P\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a} - G^{-1}P^t (PG^{-1}P^t)^{-1} P\vec{a}$$

die dazugehörigen Kovarianzmatrix lässt sich mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$(4.16) \quad C_{\vec{a}} = P C_{\vec{a}} P^t$$

mit  $T = 1 - G^{-1}P^t (PG^{-1}P^t)^{-1} P$

ausrechnen. Es ergibt sich dann:

$$(4.17) \quad G_{\vec{a}}^{-1} = G^{-1} - G^{-1}P^t (PG^{-1}P^t)^{-1} PG^{-1}$$

$$C_{\vec{a}} = C_{\vec{a}} - C_{\vec{a}} P^t (P C_{\vec{a}} P^t)^{-1} P C_{\vec{a}}$$

5            Ergebnisse  
 \*\*\*\*\*

Auf dem in Kapitel 4.2.3 beschriebenen Weg erhält man eine gute Näherung für die wahren Spurparameter. Daraus und aus den gemessenen Parametern kann man den Messfehler bestimmen:

$$(5.1) \quad a_i - \bar{a}_i \quad i = 1, \dots, 10$$

Dieser Fehler wird mit dem berechneten Fehler also mit dem entsprechenden Diagonalelement der Kovarianzmatrix verglichen. D.h. es wird untersucht ob der Quotient

$$(5.2) \quad \tau = (a_i - \bar{a}_i) / \sqrt{C_a(i,i)} \quad i = 1, \dots, 10$$

gaussverteilt mit der Breite 1 ist. Ist das der Fall, lässt sich folgern, dass  $\vec{a}$  mit dem Erwartungswert von  $\vec{a}$  übereinstimmt und dass  $C_a(i,i)$  die Fehler richtig beschreibt.

5. 1.        Einzelergebnisse  
 =====

Es zeigt sich, dass man für  $\tau$  ähnliche Verteilungen erhält wie in Kapitel 3.6, allerdings ergibt sich für KAPPA, RMIN und PHIMIT eine Breite von 1.18 und für ZO sowie DZDS eine Breite von 1.20.

Aus der zu breiten Verteilung lässt sich schliessen, dass PLUPAT die Elemente der Kovarianzmatrix systematisch zu klein berechnet. Deshalb werden probeweise die Spalten und Zeilen von  $C_a$  mit 1.18 bzw. 1.20 multipliziert. Abbildung 5 a zeigt für KAPPA die Verteilung von  $\tau$  und die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung.  $\chi^2$  ist dabei gleich  $\tau^2$  (siehe dazu Gleichung 4.3). Man sieht in Abb. 5 a sowohl eine Normalverteilung von  $\tau$  als auch eine einigermaßen gute Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeit. Entsprechendes gilt für die anderen Parameter. Es scheint also so, als ob die Aufweitung der Fehler zu annähernden Ergebnissen führt. Dass das aber nur für die Parameter der r-z-Projektion richtig ist, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

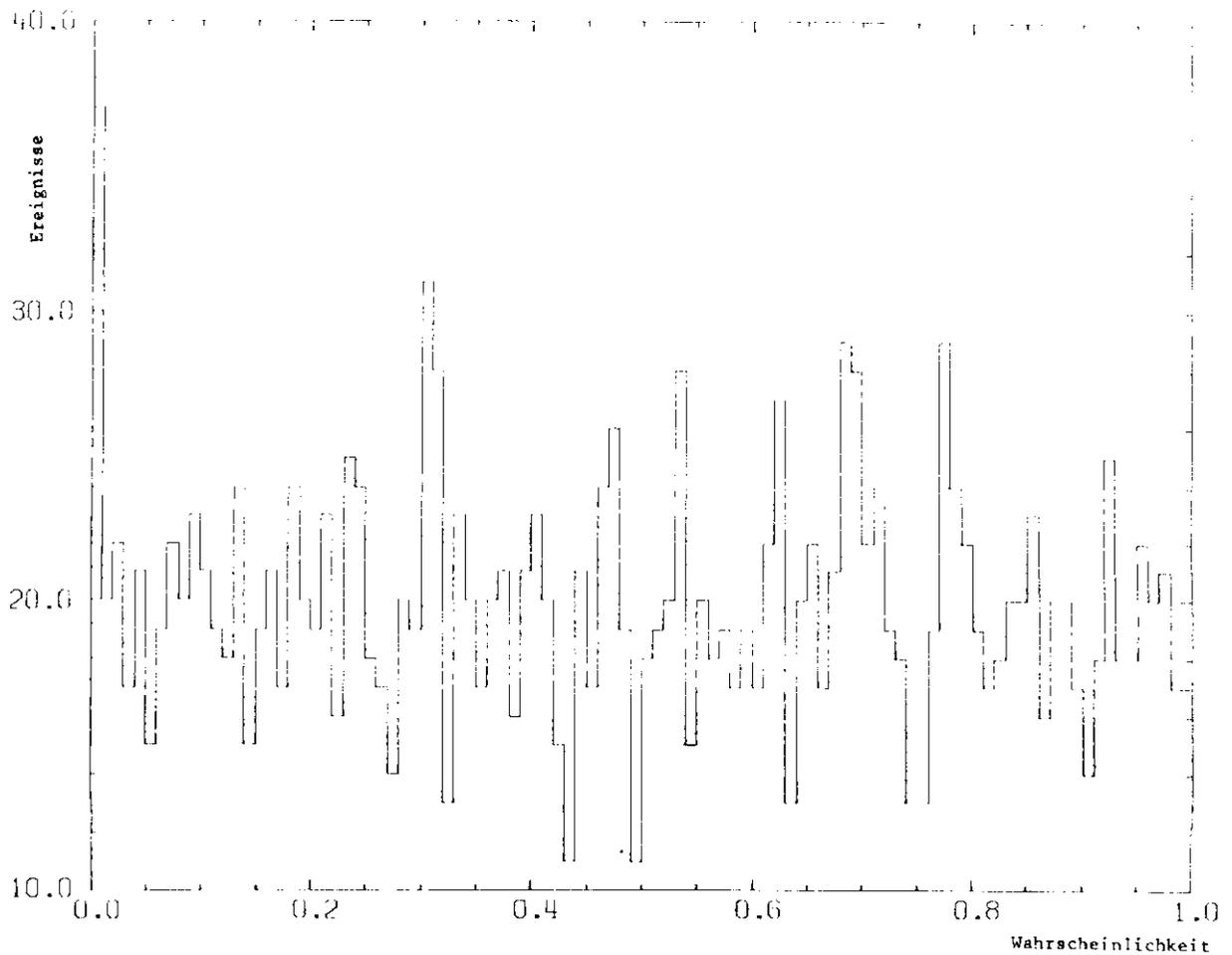
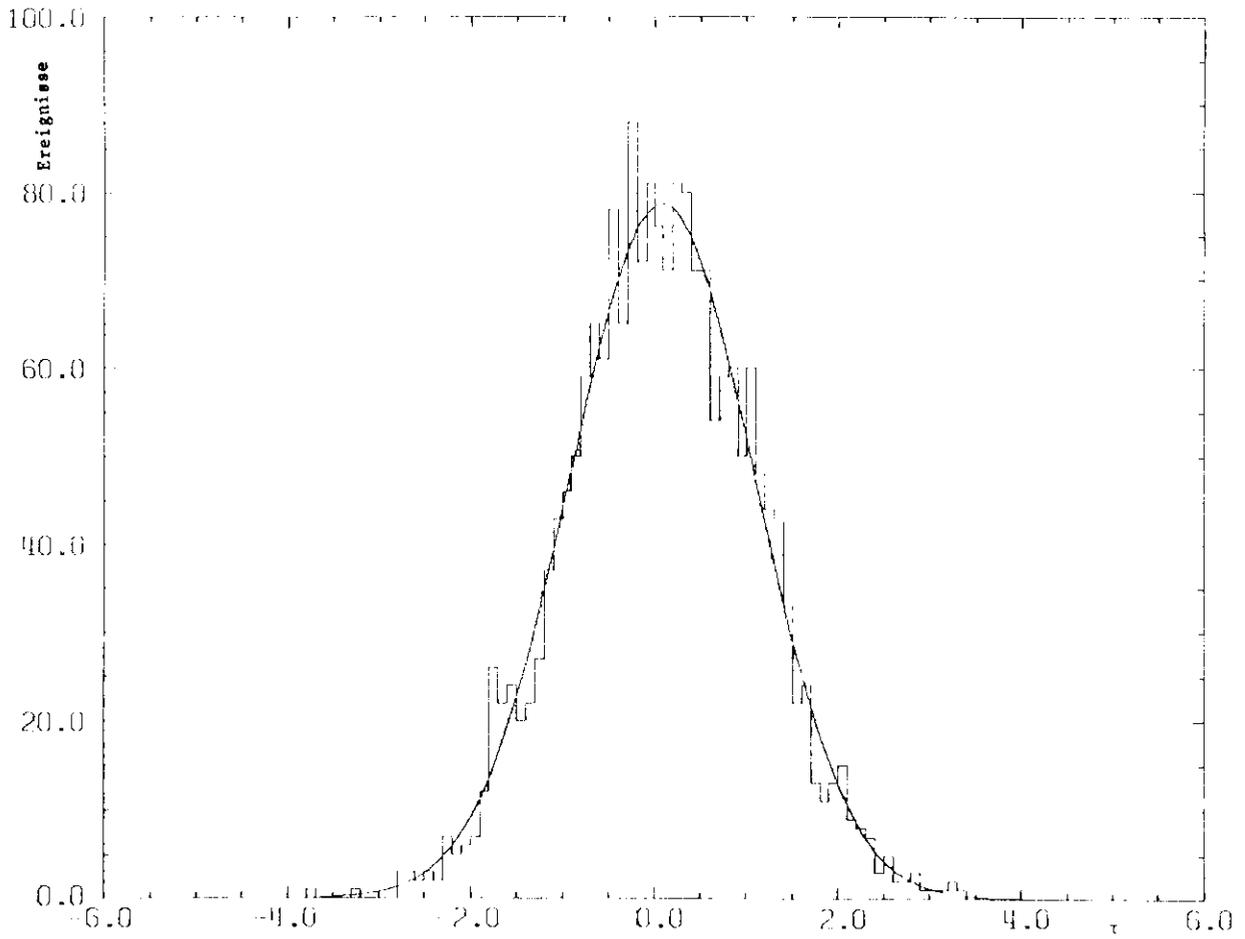


Abb. 5 a Verteilung von  $\tau$  und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit

## 5. 2. Gesamtwahrscheinlichkeit =====

$r$  macht nur eine sehr schwache Aussage über die nichtdiagonalen Elemente der Kovarianzmatrix. Sie wurden zwar zur Berechnung von  $\hat{\lambda}$  benutzt, aber in Gleichung (5.2) stehen im Nenner nur Diagonalelemente. Zur Überprüfung der Nichtdiagonalelemente berechnet man mit dem in (4.2) definierten  $X^2$  die Gesamtwahrscheinlichkeit.

Sie ist in Abb. 5 b aufgetragen. Es zeigt sich hier eine starke Überhöhung bei 0. Dasselbe Verfahren, angewandt lediglich auf die Parameter der r-z-Projektion führt auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Abbildung 5 c.

Aus dem Unterschied zu Abbildung 5 b kann man erkennen, dass die Abweichung der Gesamtwahrscheinlichkeit von der Gleichverteilung durch die Parameter der x-y-Projektion verursacht werden.

## 5. 3. Zusammenfassung =====

Die Überprüfung der Richtigkeit der Kovarianzmatrix zeigt, dass diejenigen Elemente der Matrix, die die R-Z-Projektion beschreiben, um einen Faktor 1.2 zu klein sind. Eine entsprechende Vergrößerung der übrigen Elemente um 1.18 führt nicht zu befriedigenden Ergebnissen. Man muss daraus schließen, dass an den übrigen Elementen kompliziertere Korrekturen angebracht werden müssen. Einen Ansatz dazu gibt die Behandlung der Vielfachstreuung, die, wie schon in Kapitel 2.5.2 bemerkt, bisher nicht in Strenge richtig behandelt wurde.

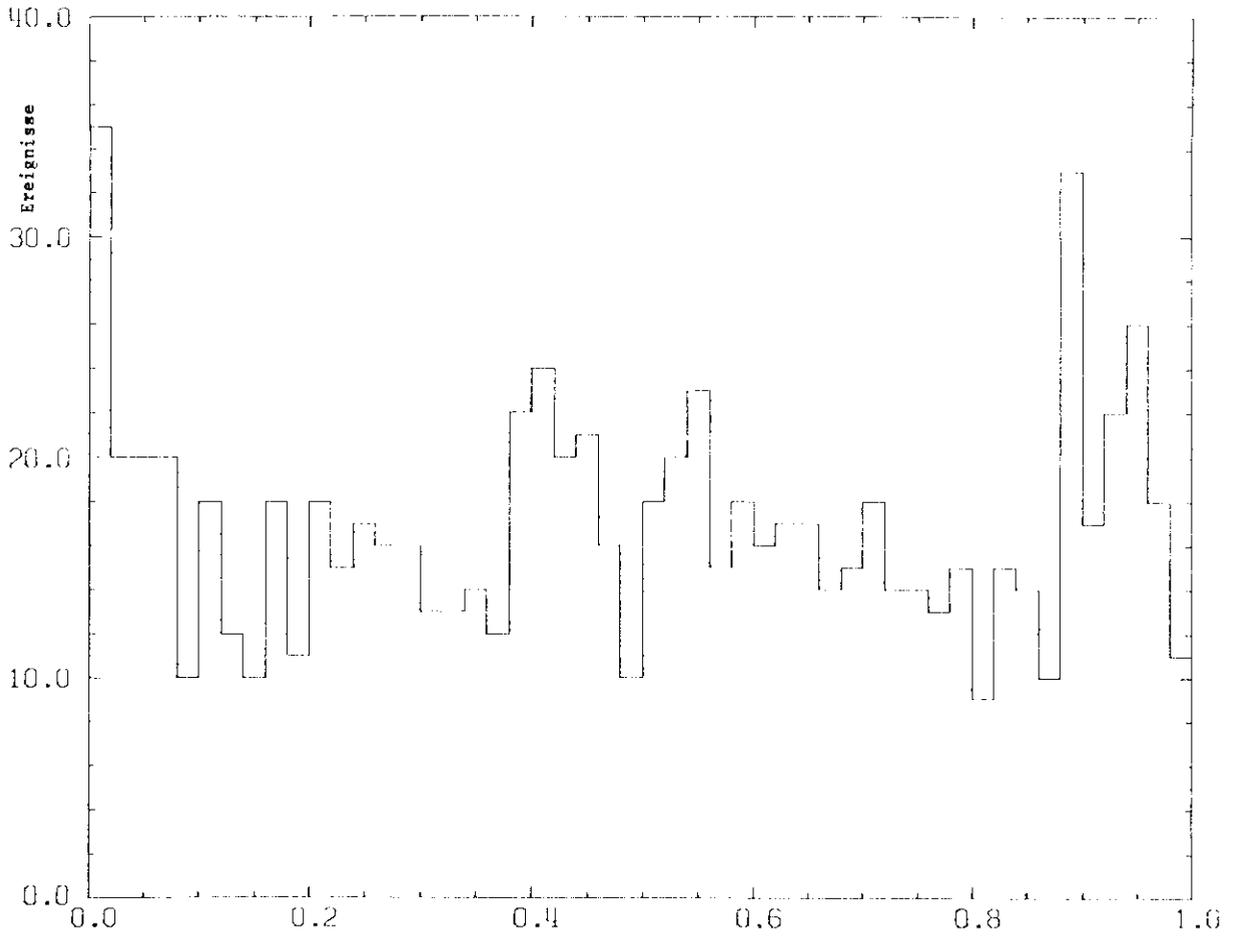


Abb. 5 c Gesamtwahrscheinlichkeit (berechnet mit ZO und DZDS)

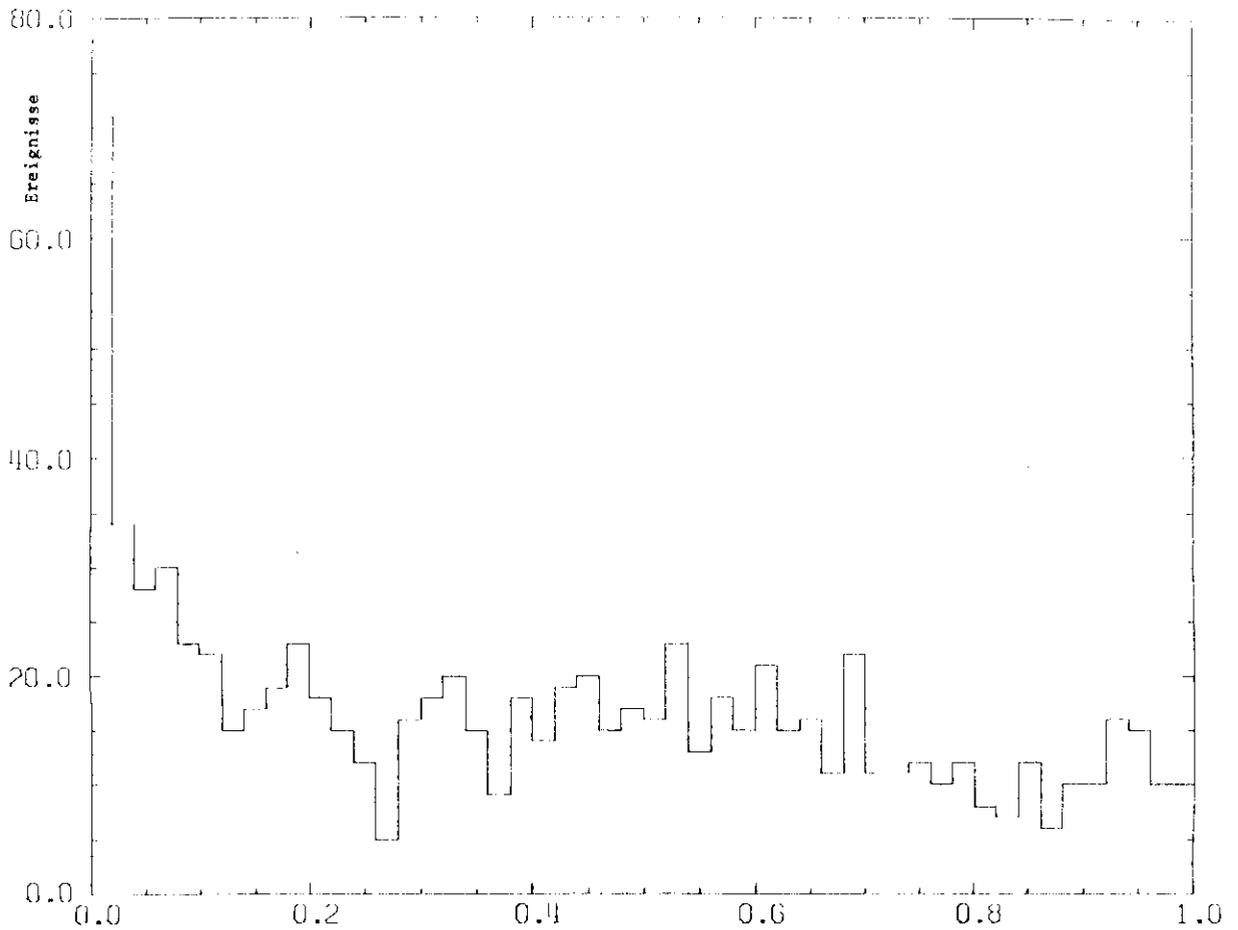


Abb. 5 b Gesamtwahrscheinlichkeit (berechnet mit 5 Parametern)

6 Korrekte Berücksichtigung der Vielfachstreuung  
 \*\*\*\*\*

6. 1. Verfeinerungen am Spurenfitt (PLUPAT)  
 =====

Die im letzten Kapitel beschriebenen Ergebnisse führen auf die Notwendigkeit, die Vielfachstreuung in der x-y-Projektion genauer zu behandeln. Die dazu notwendigen Berechnungen stammen von L.Criegee und werden im Folgenden skizziert.

Zunächst sei daran erinnert, dass die theoretischen Messfehler (siehe Kapitel 2.5.2) in der Matrix

$$(2.2) \quad C_e = \begin{pmatrix} \sigma_{ges,1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{ges,2}^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \sigma_{ges,16}^2 \end{pmatrix}$$

zusammengefasst sind. Ausserdem wird die Annahme gemacht, dass die Residuen (siehe Kapitel 2.5.1) nach

$$(6.1) \quad P(\vec{e}) = \exp\{-0.5 \vec{e}^t C_e^{-1} \vec{e}\}$$

verteilt sind. Es ist nun die theoretische Verteilung der Residuen unter korrekter Berücksichtigung der Vielfachstreuung zu berechnen und daraus ist  $C_e$  zu bestimmen.

Es wird zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Abweichungen berechnet, die sich aus der Vielfachstreuung ergeben, und dann mit derjenigen der Ortsauflösung gefaltet.

6. 1. 1 Vielfachstreuung  
 =====

Zur Berechnung der Abweichungen wird ein lineares Problem angenommen, d.h. die Zylindermittel der Kamern werden in der Umgebung des Auftreffpunktes einer Spur durch Ebenen approximiert.

Es ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, in den einzelnen Streuebene Abweichungen  $y_1, y_2, y_3, \dots$  zu erhalten

$$(6.2) \quad P(y_2, y_3, \dots) = \exp\left[-0.5 \sum_{i,k} \sigma_{ik} y_i y_k\right]$$

Dabei ist zu beachten, dass  $y_1=0$  ist, da die Spur bis zur Streuebene 1 ungestört ist. Die Herleitung von (6.2) und die Berechnung von  $C$  steht im Anhang.

### 6. 1. 2 Ortsauflösung =====

Man hat es nun mit zwei Arten von Abweichungen zu tun. Da ist einmal die Abweichung der wahren (gestreuten) Koordinate von der ungestreuten. Gemessen wird aber nur mit endlicher Ortsauflösung. Der entsprechende Fehler (die Differenz aus wahrer Koordinate  $y_i$  und gemessener Koordinate  $q_i$ ) sei normal verteilt

$$(6.3) \quad P(q_i - y_i) = k \exp[-0.5 h_i (q_i - y_i)^2] \quad h_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Da die Verteilungen beider Abweichungen unabhängig voneinander sind, muss man die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen miteinander multiplizieren. Wenn man dann über alle  $y_i$  integriert erhält man die Verteilung der  $q_i$ .

Die Integration wird dann einfach, wenn man die Verteilungen aus der Ortsauflösung nicht alle auf einmal sondern Streuebene für Streuebene hereinfaltet und jeweils die Ortsauflösung der anderen Ebenen als unendlich gut annimmt, d.h. mit einer Deltafunktion faltet.

Die Ebene, die gerade hereingefaltet werden soll trage die Nummer 1, dann ergibt sich nach längerer Rechnung für das Integral (bis auf Vorfaktoren):

$$(6.4) \quad \int_{y_1} \int_{y_2} \dots \int_{y_n} \exp \left\{ -0.5 \sum_{j,k} c_{jk} y_j y_k \right\} \cdot \exp \left\{ -0.5 a_1 (q_1 - y_1)^2 \right\} \cdot \delta(q_2 - y_2) \cdot \dots \cdot \delta(q_n - y_n) dy_1 \dots dy_n \\ = \exp \left\{ -0.5 \sum_{j,k} \left( c_{jk} - \frac{c_{j1} c_{1k}}{c_{11} + a_1} \right) q_j \cdot q_k \right\}$$

Dieser Ausdruck hat dieselbe Form wie (6.2) man muss nur substituieren:

$$(6.5) \quad c_{jk} \rightarrow c_{ik} = \frac{c_{ji} c_{ik}}{c_{ii} + h_i} \quad i = 1$$

Mit den so ausgerechneten  $c_{ik}$  führt man die zweite Faltung aus, i.h. man substituiert wieder nach (6.5), allerdings jetzt mit  $i=2$ . Das Verfahren wird für alle Streuebene wiederholt. Schliesslich lässt sich mit der so gewonnenen Matrix  $C$  das  $P(\vec{y})$  nach (6.2) berechnen.

Die  $y_i$  entsprechen, wenn man von ebenen wieder auf zylindrische Streuflächen übergeht, den Residuen. In der ursprünglichen Fitprozedur (siehe Kapitel 2) ist also die Matrix  $C_e$  durch die in diesem Kapitel berechnete Matrix  $C$  (s.o.) zu ersetzen.

## 6. 2. Die Ergebnisse mit geänderten Spurenfitprogramm

=====

Die in Kapitel 5.1 beschriebenen Veränderungen am PLUPAT-Programm haben nur Einfluss auf die Parameter der x-y-Projektion. Wenn man zusätzlich die theoretischen Messfehler für ZO und DZDS mit 1.2 multipliziert (also die entsprechenden Elemente der Covarianzmatrix mit 1.44), so erhält man folgende Gesamtwahrscheinlichkeit:

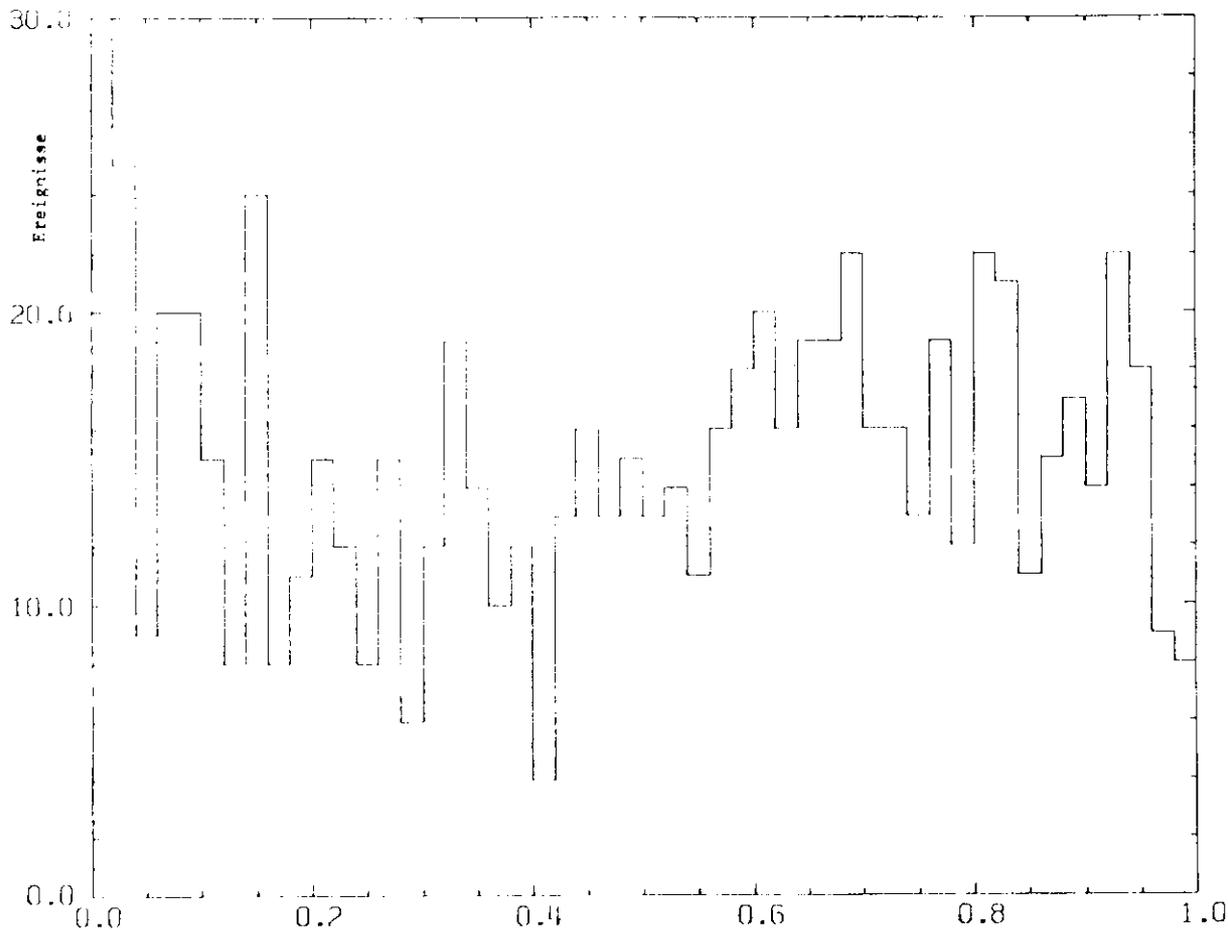


Abb. 6 a Gesamtwahrscheinlichkeit

Man sieht jetzt eine im Vergleich zu Abb. 5 b recht gute Gleichverteilung, i.h. man kann davon ausgehen, dass die Messfehler durch die berechneten Fehler richtig beschrieben werden. Jetzt hat es auch Sinn, die berechneten Fehler tatsächlich anzugeben. Der Quotient aus dem Fehler von  $KAPPA$  und  $KAPPA$ , also der relative Fehler von  $KAPPA$ , ist gleich dem relativen Fehler des Impulses, wie man leicht nachrechnen kann.

Abbildung 6 b,c zeigt den relativen Fehler von  $P$  gegen  $P$ , 6 b den Fehler, den PLUPAT für eine einzelne Spur berechnet, 6 c den Fehler den man durch das in Kapitel 4 beschriebene Fitverfahren erhält (Diagonalelement der Matrix  $C_{ii}$ ). Man sieht, dass der relative Fehler von  $P$  proportional zu  $P$  ist. Er liegt für eine Einzelspur von 1 GeV/c bei 10%. Bei etwa 12 GeV/c wird der Fehler grösser als der Messwert. Durch den Fit werden die Fehler um einen Faktor 8 kleiner.

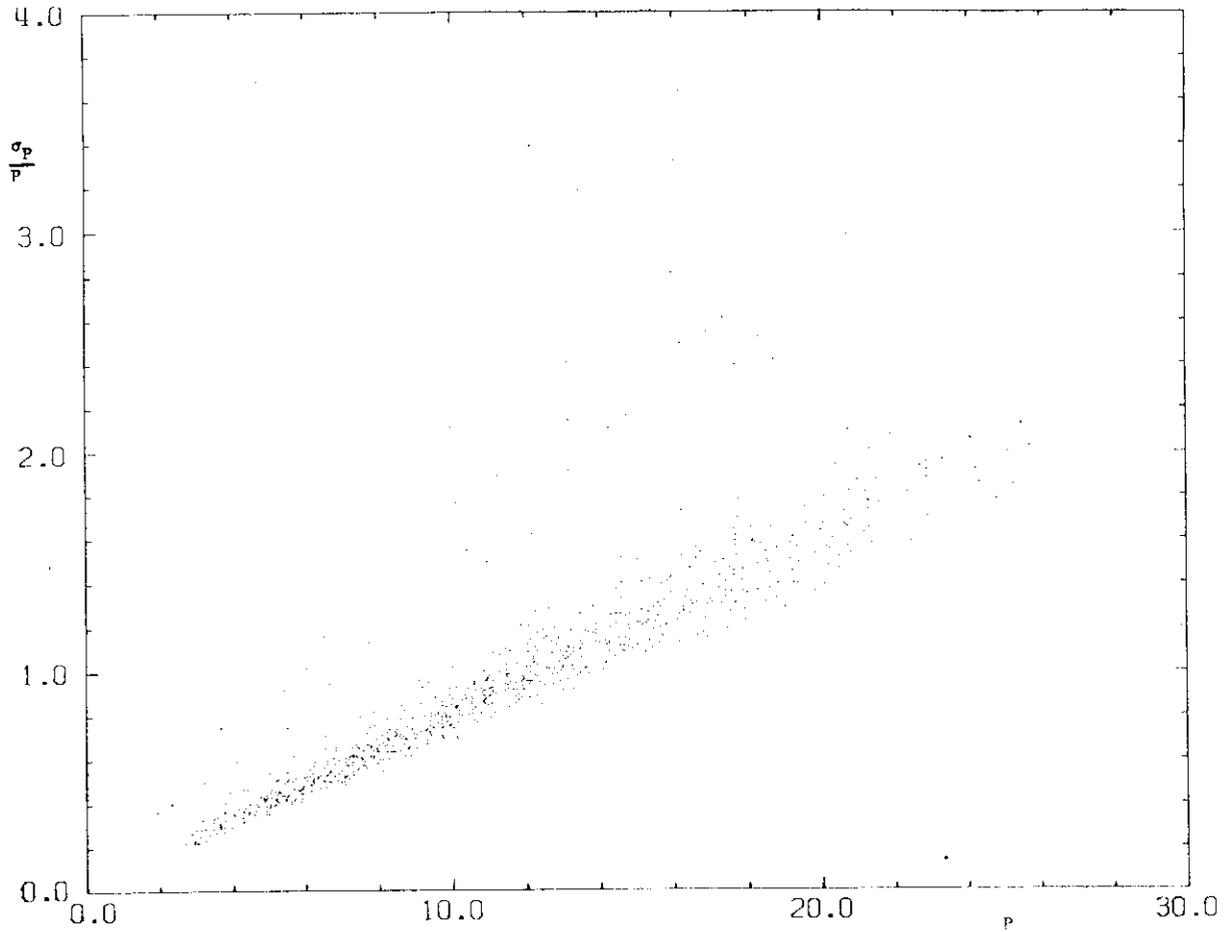


Abb 6 b relativer Impulsfehler gegen Impuls (Einzelfit von PLUPAT)

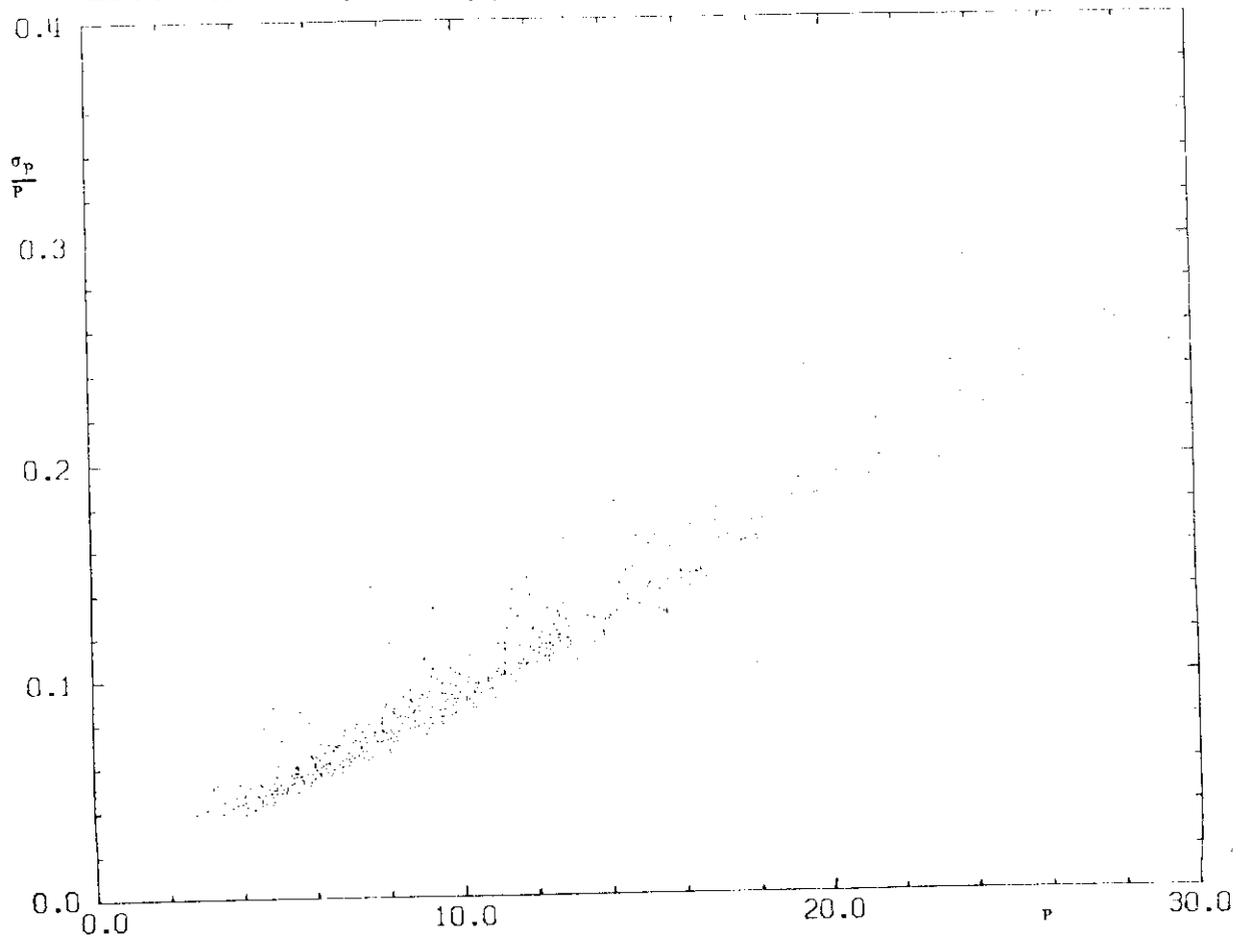


Abb. 6 c relativer Impulsfehler gegen Impuls (Zweitteilchenfit)

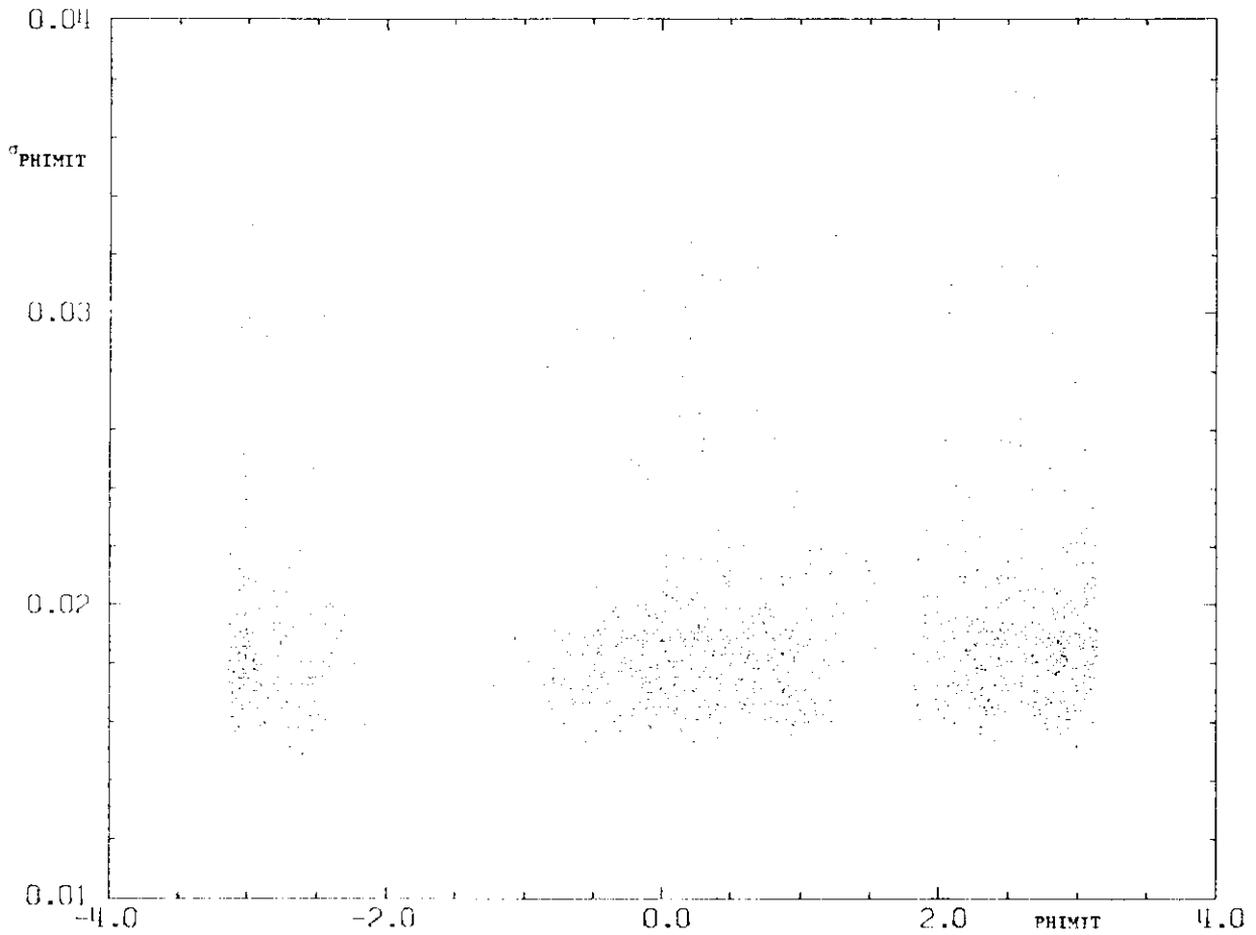


Abb. 6 d Fehler von PHIMIT gegen PHIMIT

Abbildung 6 d zeigt den Fehler von PHIMIT aufgetragen gegen PHIMIT. Der Fehler ist für alle Winkelbereiche konstant gleich 0.01 bis 0.02. Dass man zu einigen Winkelbereichen nur sehr wenige Einträge sieht, liegt daran, dass es sich um Höhenstrahlteilchen handelt, die nun mal bevorzugt von oben kommen. (Der zweite Spurtteil kommt dann scheinbar von unten.)

Abbildung 6 e zeigt den relativen Fehler von DZDS gegen  $DZDS = \cot \theta$ . Der Fehler wird für grosse  $\cot \theta$  grösser. Das liegt daran, dass bei grossen  $\cot \theta$  nicht mehr alle Messkammern durchdrungen werden und die Spur nicht mehr so genau vermessen werden kann.  $\cot \theta > 1.4$  ist wegen des Cuts in den Freiheitsgraden nicht möglich. Die Banstruktur erklärt sich dadurch, dass die von PLUPAT geschätzten Fehler von der Anzahl der Kammern abhängt, die angesprochen haben.

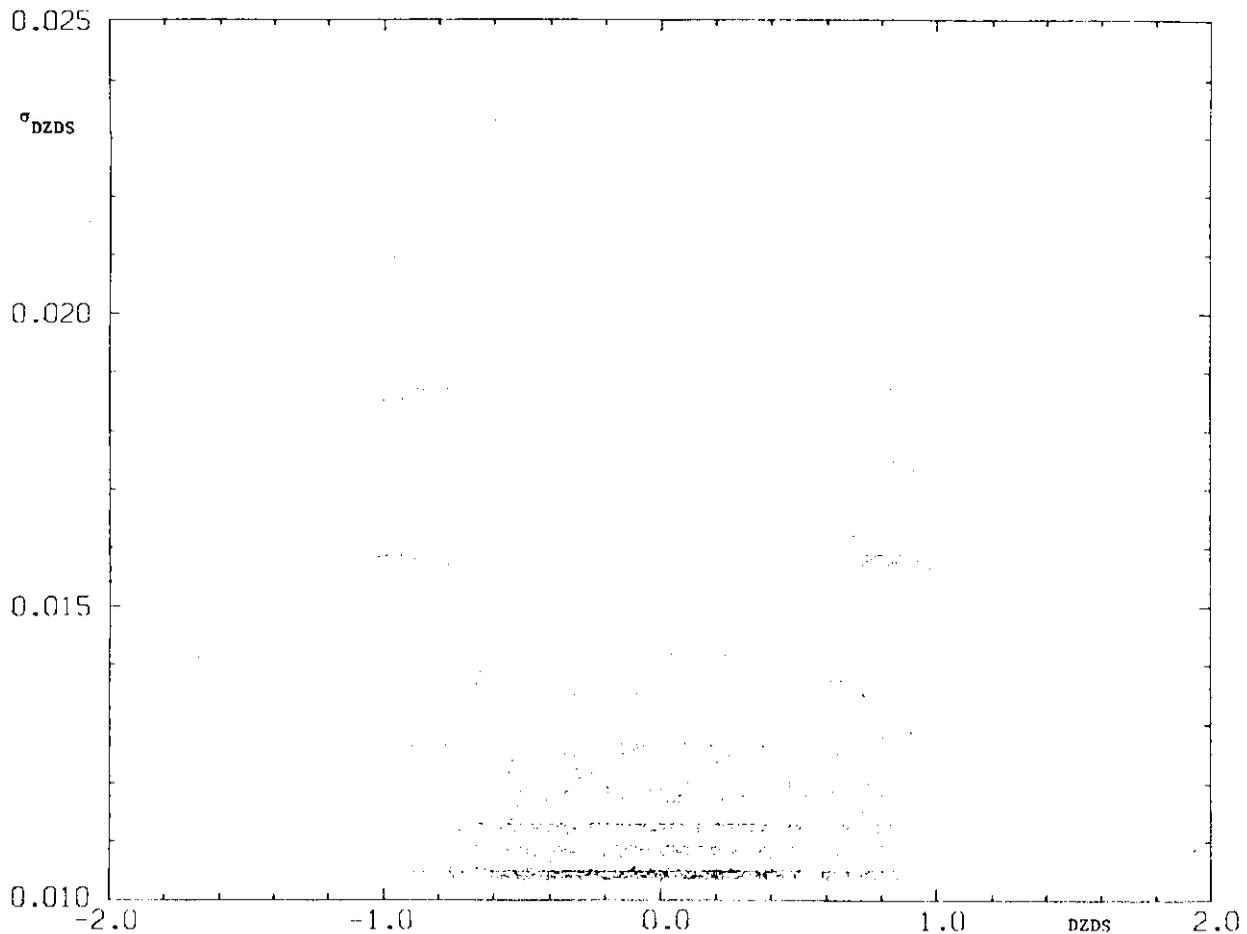
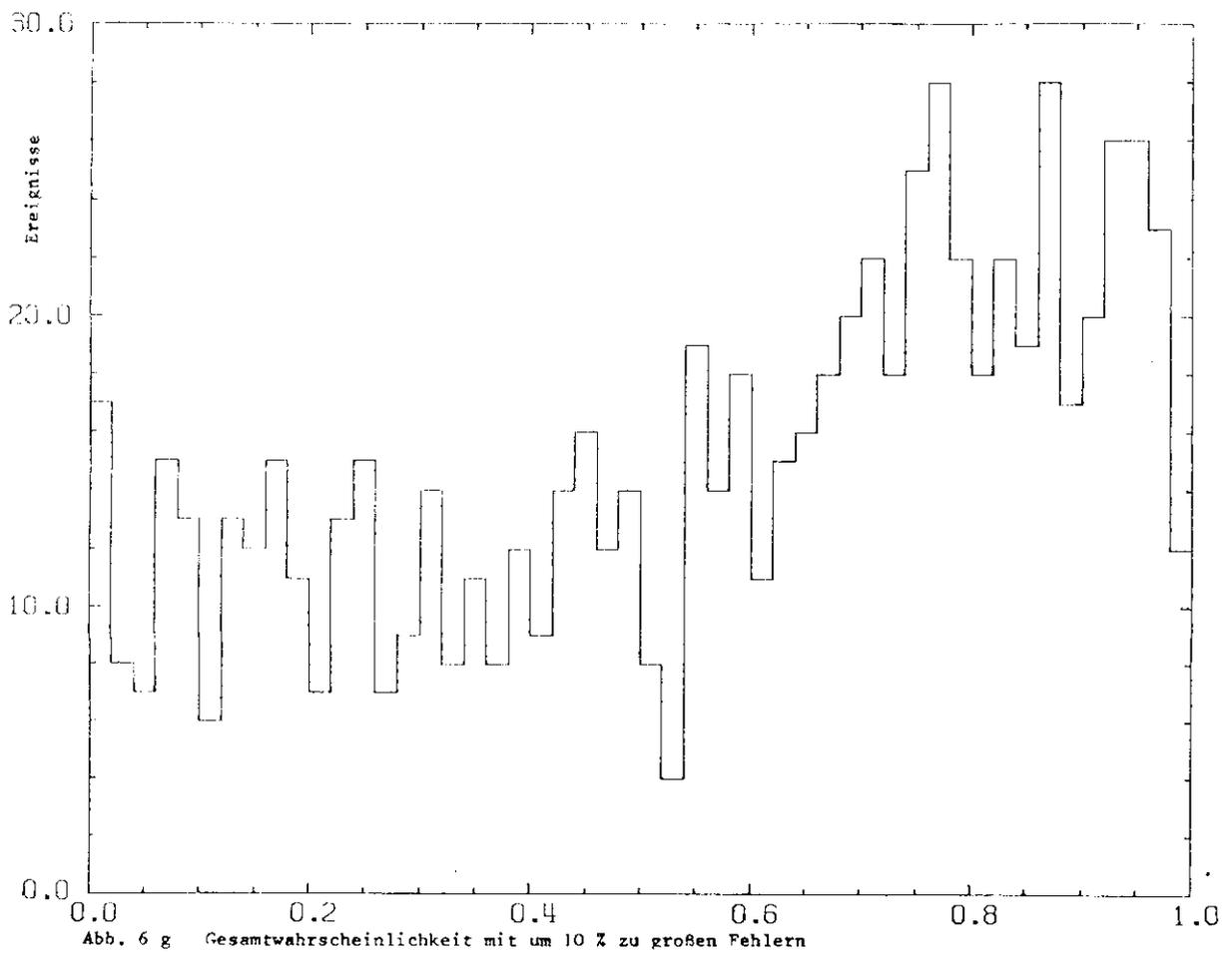
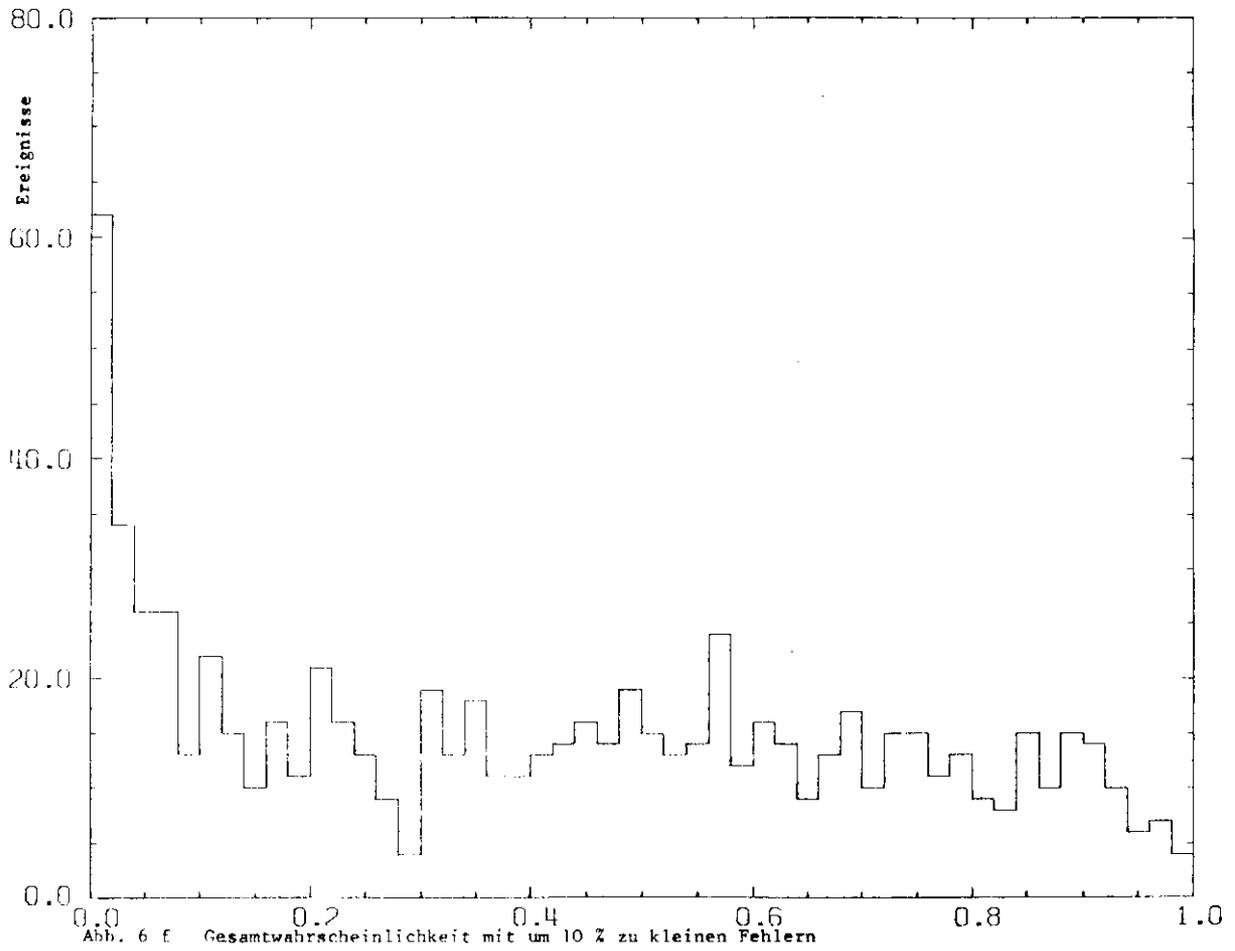


Abb 6 a Fehler von DZDS gegen DZDS

An dieser Stelle sei noch etwas über die Empfindlichkeit des Instruments 'Gesamtwahrscheinlichkeit' gesagt.

Abbildung 6 f und 6 g zeigen die Gesamtwahrscheinlichkeit mit jeweils um 10% zu kleinen (6f) bzw. zu grossen (6g) Elementen der Covarianzmatrix. Die Abweichung von Abbildung 6 a ist deutlich zu sehen.



### 6. 3. Zusammenfassung =====

Zur Auswertung der mit dem magnetischen Detektor PLUTO gemessenen Daten existiert ein von G. Franke entwickeltes EDV-Programm (PLUPAT), das die Spuren der im Detektor nachgewiesenen Teilchen rekonstruiert und durch je fünf Parameter beschreibt. Die dazugehörigen Fehler werden vom Programm abgeschätzt.

An Hand von Höhenstrahlereignissen wurde in dieser Arbeit untersucht, ob diese Fehlerabschätzung zu realistischen Ergebnissen führt.

Es zeigt sich, dass die Fehler zu klein geschätzt wurden. Bei den Parametern, die die Spur in der r-Z-Projektion beschreiben, führt das Multiplizieren der Fehler mit 1,2, bei den Parametern, die die Spur in der x-y-Projektion beschreiben, führt eine genaue Behandlung der Vielfachstreuung zu einer realistischen Fehlerabschätzung.

Die genaue Behandlung der Vielfachstreuung führt auf ein Anwachsen der benötigten Rechenzeit. Deshalb wird das Verfahren nur auf ausgewählte hadronische Ereignisse angewendet.

Der Impuls einer Einzelspur kann mit PLUTO bei 1 GeV/c auf 10 % genau gemessen werden. Der relative Messfehler wächst proportional zum Impuls an und erreicht bei 12 GeV/c die 100%-Grenze. Durch einen Zwei-Teilchen-Fit lässt sich der Impulsfehler um einen Faktor 8 erniedrigen.

Literaturverzeichnis  
\*\*\*\*\*

- BRA63 S. Brandt, Statistische Methoden in der Analyse von Experimenten, Institut für  
Hochenergiephysik der Universität Heidelberg, 1968
- DER75 K. Derikum, Interner Bericht, DESY F33 75/2
- PRA76 G. Franke and R. Schmitz, DESY-Bericht 76/64
- PLU74 PLUTO-Handbuch, DESY 1974
- STE70 K. Steffen, DESY-Bericht 70/24

Danksagung  
=====

Die vorliegende Arbeit entstand bei der Gruppe F33 des Deutschen Elektronensynchrotrons im Rahmen des PLUTO-Experiments.

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Weber für die Ermöglichung der Arbeit;

Herrn Dr. L. Criegee für ständige Betreuung und Förderung der Arbeit;

den Mitarbeitern der PLUTO-Kollaboration für viele Auskünfte, Ratschläge und Diskussionen.

Anhang  
\*\*\*\*\*

Herleitung von Gleichung (2.7)  
=====

Ausgegangen wird von der Gleichung

$$(2.6) \quad \vec{g}(\vec{b} + \vec{d}) = \vec{0}.$$

Da  $g^{-1}$  nicht einleutig ist, kann  $\vec{d}$  nicht einfach ausgerechnet werden. Vielmehr wird versucht,  $\vec{d}$  aus der Gleichung (2.6) näherungsweise zu bestimmen. Dazu wird (2.6) um  $\vec{b}$  tablorentwickelt:

$$(7.1) \quad \vec{g}(\vec{b} + \vec{d}) = \vec{g}(\vec{b}) + Q \vec{d} + \dots = \vec{0}$$

$$(7.2) \quad \vec{g}(\vec{b}) = \vec{e} = -Q \vec{d}$$

Diese Gleichung wird einerseits mit  $C_e^{-1}$  multipliziert und andererseits transponiert:

$$(7.3) \quad C_e^{-1} \vec{e} = -C_e^{-1} Q \vec{d}$$

$$(7.4) \quad \vec{e}^t = -\vec{d}^t Q^t$$

Beide Gleichungen werden multipliziert:

$$(7.5) \quad \vec{e}^t C_e^{-1} \vec{e} = \vec{d}^t Q^t C_e^{-1} Q \vec{d}$$

$$(7.6) \quad \vec{e}^t C_e^{-1} C_e C_e^{-1} \vec{e} = \vec{d}^t C_b^{-1} \vec{d}$$

$$(7.7) \quad \vec{e}^t C_e^{-1} Q C_b Q^t C_e^{-1} \vec{e} = \vec{d}^t C_b^{-1} C_b C_b^{-1} \vec{d}$$

Vergleich beider Seiten liefert

$$(7.8) \quad \vec{d}^t = \vec{e}^t C_e^{-1} Q C_b$$

$$(2.7) \quad \text{und} \quad \vec{d} = C_b Q^t C_e^{-1} \vec{e}$$

Herleitung der Gleichung (6.2)  
=====

Zur Berechnung der Abweichungen wird ein lineares Problem angewandt, d.h. die Zylinderdantele der Kammer werden in der Umgebung des Auftreffpunktes einer Spur durch Ebenen angenähert. Die Abbildung 7 a zeigt die benutzten Größen in der x-y-Projektion.

$$(7.9) \quad \vec{u} = (\sin \theta \cos \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \theta)$$

ist der Einheitsvektor in Richtung der ungestreuten Spur. Die Ablenkung wird mit Hilfe von zwei zu  $\vec{u}$  und untereinander senkrechten Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  angegeben.

$$(7.10) \quad \vec{v} = (-\sin \psi, \cos \psi, 0)$$

$$(7.11) \quad \vec{w} = (\cos \theta \cos \psi, \cos \theta \sin \psi, -\sin \theta)$$

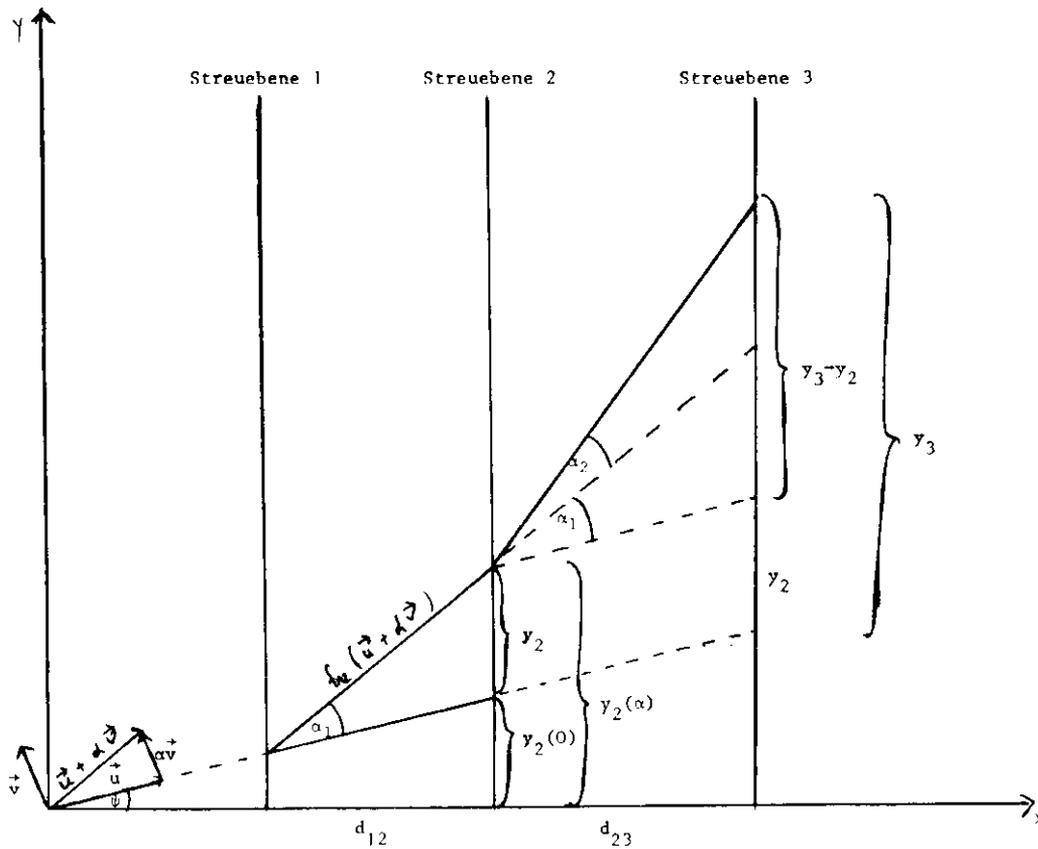


Abb. 7 a Darstellung der in diesem Abschnitt benutzten Vektoren

in der x-y-Projektion sieht man nur die Ablenkungen in Richtung  $\vec{v}$ .

$$(7.12) \quad \vec{u} + \alpha \vec{v}$$

ist ein Vektor in Richtung der gestreuten Spur. Multipliziert man ihn mit  $f_{12}$  so reicht er gerade von der ersten zur zweiten Streuebene. Für die x-Komponente gilt also

$$(7.13) \quad \begin{aligned} d_{12} &= f_{12} \cdot (\vec{u} + \alpha \vec{v})_x \\ d_{12} &= (\sin \theta \cos \psi - \alpha \sin \psi) \cdot f_{12} \\ f_{12} &= d_{12} / (\sin \theta \cos \psi - \alpha \sin \psi) \end{aligned}$$

Jetzt lässt sich die entsprechende y-Komponente als Funktion von  $\alpha$  bestimmen:

$$(7.14) \quad y_2(\alpha) = f_{12} (\vec{u} + \alpha \vec{v})_y = d_{12} \frac{\sin \theta \sin \psi + \alpha \cos \psi}{\sin \theta \cos \psi - \alpha \sin \psi}$$

Diese Funktion wird um  $\alpha=0$  Taylorentwickelt

$$(7.15) \quad \begin{aligned} y_2(\alpha) &= y_2(0) + y_2'(0) \cdot \alpha + \dots \\ y_2 &= y_2(\alpha) - y_2(0) = \frac{d_{12}}{\cos^2 \psi \sin \theta} \alpha \end{aligned}$$

$\gamma_2$  ist die Abweichung der gestreuten von der ungestreuten Spur in  $\gamma$ -Richtung. (7.15) wird nach aufgelöst.

$$(7.16) \quad \alpha = \frac{1}{d_{12}} \gamma_2 \cos^2 \psi \sin \theta$$

Möge die Strahlungslänge der  $i$ -ten Streuebene  $t_i$  sein. Dann durchdringt ein Teilchen, wenn man schrägen Durchgang berücksichtigt,  $t_i / (\sin \theta_i \cos \psi_i)$  Strahlungslängen. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, Streuwinkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  zu erhalten

$$(7.17) \quad P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) = \exp \left\{ -0.5 \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\theta_{01}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha_2}{\theta_{02}} \right)^2 + \dots \right] \right\}$$

$$\theta_{0i} = \frac{\sqrt{\frac{t_i}{\sin \theta_i \cos \psi_i} \cdot 0.015}}{P_{tot}}$$

Damit lässt sich auch die Wahrscheinlichkeit für die Ablagen  $\gamma_2, \gamma_3, \dots$  berechnen. ( $\gamma_1 = 0$ , da die Spur bis zur ersten Streuebene ungestört ist)

$$(7.18) \quad P(\gamma_2, \gamma_3, \dots) = \exp \left\{ -0.5 \left[ \left( \frac{\gamma_2}{d_{12}} \right)^2 b_1 + \left( \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{d_{23}} - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{d_{12}} \right)^2 b_2 + \dots \right] \right\}$$

$$b_i = \left( \frac{P_{tot}}{0.015} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta_i \cos^2 \psi_i}{t_i}$$

Dieser Ausdruck lässt sich umschreiben in die Form:

$$(6.2) \quad P(\gamma_2, \gamma_3, \dots) = \exp \left\{ -0.5 \sum_{i,k} c_{ik} \gamma_i \gamma_k \right\}$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\gamma_1 = 0$  ist.  $c$  berechnet sich auf folgende Weise:

$$(7.19) \quad c_{ij} = b_{i-1} \left( \frac{1}{d_{i-1,i}} \right)^2 + b_i \left( \frac{1}{d_{j,i+1}} + \frac{1}{d_{i-1,i}} \right)^2 + b_{i+1} \left( \frac{1}{d_{i,i+1}} \right)^2$$

$$c_{i,j+1} = b_i \left( -\frac{1}{d_{j,i+1}^2} - \frac{1}{d_{i,i+1} d_{i-1,i}} \right) + b_{i+1} \left( -\frac{1}{d_{i,i+1}^2} - \frac{1}{d_{i,j+1} d_{i+1,i+2}} \right)$$

$$c_{j-1,j+1} = b_j \left( \frac{1}{d_{j-1,i} d_{i,i+1}} \right)$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

$$c_{ij} = 0 \quad \text{falls } |i - j| > 2$$

$$c_{1j} = c_{j1} = 0$$

Ich versichere, dass ich diese Arbeit unter Angabe aller wesentlichen Quellen und Hilfsmittel selbständig angefertigt habe.