

Interner Bericht
DESY F56H-93-01
Januar 1993

Digitale Signalverarbeitung für die Feedbacksysteme der Elektronenspeicherringe in PETRA und HERA

von

M. Schweiger

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

**"Die Verantwortung für den Inhalt dieses
Internen Berichtes liegt ausschließlich beim Verfasser"**

**Digitale Signalverarbeitung
für die Feedbacksysteme
der Elektronenspeicherringe
in PETRA und HERA**

**Vom Promotionsausschuß der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation**

**von Markus Schweiger
aus Hamburg**

1992



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Strahlschwingungen in Hochenergiebeschleunigern	8
2.1	Einleitung	8
2.2	Betatronschwingungen	10
2.2.1	Die Bewegungsgleichungen	11
2.2.2	Transfermatrizen	14
2.2.3	Die β -Funktion	16
2.2.4	Der Q-Wert	17
2.2.5	Dispersion	18
2.2.6	Die Courant-Snyder-Transformation	20
2.3	Synchrotronschwingungen	21
2.4	Moden und Strahlspektrum	25
2.5	Instabilitäten und Dämpfung	27
2.6	Zusammenfassung	29
3	Theorie diskreter Systeme und digitale Filter	30
3.1	Diskrete lineare zeitinvariante Systeme	30
3.2	Die z-Transformation	32
3.2.1	Definition und Konvergenzbereiche	32
3.2.2	Die Rücktransformation	35
3.2.3	Einige Eigenschaften der z-Transformation	37
3.2.4	Die Differenzgleichung des harmonischen Oszillators	39
3.3	Der Zusammenhang mit kontinuierlichen Systemen	40
3.3.1	Kontinuierliche LTI-Systeme und die Laplace-Transformation	41
3.3.2	Der Übergang zwischen kontinuierlichen und diskreten Systemen	43
3.4	Digitale Filter	48

4	Das Einzelbunchfeedback	54
4.1	Grundlagen	55
4.1.1	Das Feedbackprinzip	55
4.1.2	Die Phasenbeziehungen	57
4.2	Der digitale Phasenschieber	60
4.2.1	Phasenverschiebung und Hilbert-Transformation	60
4.2.2	Die Optimierung des DPS	62
4.2.3	Die Anpassung des DPS an den Frequenzbereich der Synchrotronschwingung	68
4.2.4	Die Anpassung des DPS an die Zahl der Bunche	68
4.3	Die Theorie des Einzelbunchfeedbacks	70
4.3.1	Die Näherungen	70
4.3.2	Die Beschreibung eines Kicks	71
4.3.3	Die Differenzgleichung des Einzelbunchfeedbacks	73
4.3.4	Die Lösung der Differenzgleichung des Einzelbunchfeedbacks	75
4.4	Simulationen	81
4.4.1	Das Programm	81
4.4.2	Ergebnisse	82
4.5	Vergleich mit experimentellen Ergebnissen	89
5	Das Multibunchfeedback	94
5.1	Die Theorie des Multibunchfeedbacks	94
5.1.1	Der Feedbackpfad	95
5.1.2	Das Differenzgleichungssystem	97
5.1.3	Transformation in den z -Bereich und Berechnung der Kopplungsmatrix	98
5.1.4	Die Diagonalisierung der Kopplungsmatrix	100
5.1.5	Dämpfung und Frequenzverschiebung der Moden	102
5.1.6	Das optimale Multibunchfeedback	104
5.2	Die Simulation des Multibunchfeedbacks	106
5.2.1	Der Feedbackpfad	106
5.2.2	Die Simulation der Bunchschwingungen	108
5.2.3	Die Berechnung der Moden aus den simulierten Bunchschwingungen	111
5.2.4	Die theoretische Berechnung der Moden	112
5.2.5	Die Konstruktion der Bunchschwingungen aus den theoretisch berechneten Moden	114
5.3	Zusammenfassung	115

6	Der adaptive digitale Phasenschieber	118
6.1	Der adaptive Algorithmus	118
6.1.1	Die Ableitung des adaptiven Algorithmus	118
6.1.2	Die Simulation des adaptiven Feedbacks	123
6.2	Die Stabilität des adaptiven Feedbacks unter dem Einfluß von Rauschen	126
6.2.1	Das Simulationsmodell	126
6.2.2	Qualitative Stabilitätsbetrachtungen	128
6.2.3	x_{rms} und mittlere Dämpfung	130
6.2.4	Verschiedene Stabilitätskriterien	133
6.2.5	Die Verbesserung des Adaptionalgorithmus	138
6.2.6	Variation der Feedbackparameter	141
6.3	Diskussion	144
7	Zusammenfassung	147
	Anhang	149
A	Die Realisierung des digitalen Phasenschiebers	149
B	Die wichtigsten Formelzeichen von Kapitel 3 bis 6	152
C	Abkürzungen	157
	Literaturverzeichnis	159

Kapitel 1

Einleitung

Der seit 1984 am DESY ¹ in Hamburg errichtete Speicherring HERA ² wurde im Jahre 1990 fertiggestellt. In HERA werden Elektronen mit einer Energie von 30 GeV auf Protonen von 820 GeV geschossen. HERA ist der einzige Elektron-Proton-Speicherring der Welt und bietet einzigartige Möglichkeiten, die innere Struktur der Protonen, das heißt die dort vermuteten Quarks zu untersuchen. Darüber hinaus erwartet man Erkenntnisse über die zwischen den Elementarteilchen wirkenden Kräfte und über neue, von der Theorie vorhergesagte Elementarteilchen.

Der Ring hat einen Umfang von 6,3 km, Abb. 1.1, und verläuft vollständig unterirdisch in einem Tunnel mit 5,2 m Durchmesser. Elektronen und Protonen kreisen gegenläufig in zwei übereinander verlaufenden Hochvakuumstrahlrohren. Sie werden mit elektrischen Feldern beschleunigt und von Magnetfeldern auf ihrer Bahn gehalten, s. Kap. 2. Es wird angestrebt, $0,8 \cdot 10^{13}$ Elektronen und $2,1 \cdot 10^{13}$ Protonen über mehrere Stunden zu speichern. Die Teilchenstrahlen sind nicht kontinuierlich, sondern in je 220 Bunche ³ mit einer Länge im Bereich von Zentimetern bis Metern unterteilt. Der zeitliche Abstand von Bunch zu Bunch beträgt 96 ns, die Umlaufzeit 21 μ sec. Die beiden Detektoren "H1" und "ZEUS", die zur Beobachtung der Teilchenreaktionen dienen, sind in zwei großen Experimentierhallen untergebracht. In ihrem Innern werden Elektronen- und Protonenstrahl frontal zur Kollision gebracht. Sowohl für Elektronen als auch für Protonen gibt es eine Reihe von Vorbeschleunigern, deren größter jeweils der ehemalige Elektron-Positron-Speicherring PETRA ⁴ ist. Elektronen und Protonen werden in PETRA auf 14 bzw. 40 GeV beschleunigt und dann nach HERA injiziert. Die jeweils 80 Bunche haben wie in HERA

¹Deutsches Elektronen-Synchrotron

²Hadron-Elektron-Ring-Anlage

³Bunch: (engl.) Bündel, Haufen

⁴Positron Electron Tandem Ring Accelerator

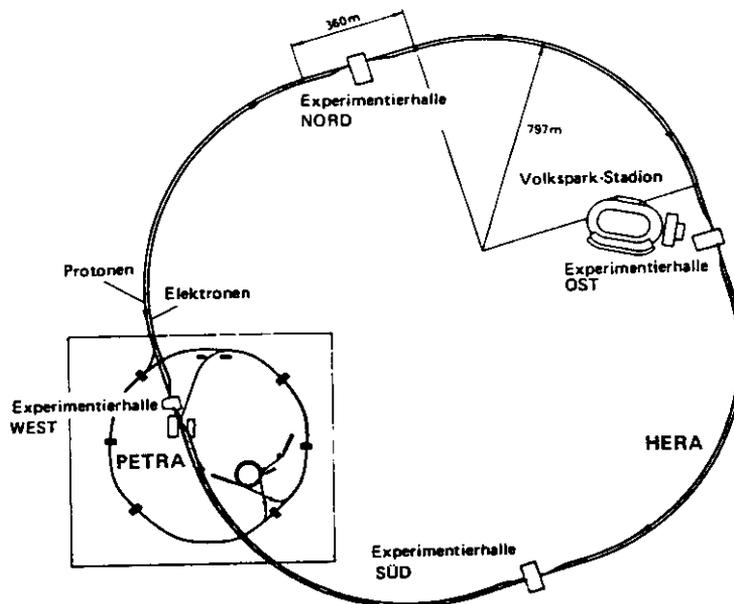


Abbildung 1.1: HERA mit Vorbeschleunigern und Experimentierhallen.

einen Abstand von 96 nsec. Die Umlaufzeit beträgt $7,7 \mu\text{sec}$. Genauere Beschreibungen von HERA finden sich in [HERA81, Schm90, Vos88, Wii90].

Im Jahre 1988 wurde beschlossen, die Elektronenringe von PETRA und HERA mit Feedbacksystemen auszurüsten. Ohne Feedback liegt der maximale Strahlstrom in beiden Ringen unter 10 mA, das heißt eine Größenordnung unter dem für beide Ringe angestrebten Wert von 60 mA. Der Strom ist durch Schwingungen der Bunche in allen drei Raumrichtungen, die mit der Strahlintensität anwachsen, begrenzt. Aufgabe des Feedbacksystems ist es, diese Schwingungen zu dämpfen. Im November 1990 wurden mit Hilfe zweier transversaler und eines longitudinalen Feedbacks in PETRA 56 mA erreicht [Ebe91]. Die longitudinalen Schwingungen der Protonen in PETRA [Gam90] und HERA werden ebenfalls mit Feedbacksystemen gedämpft.

Es gibt in Natur und Technik zahlreiche Beispiele für Feedbacksysteme verschiedenster Art, deren gemeinsames Merkmal darin besteht, daß das Ausgangssignal auf den Eingang zurückgeführt wird. In diesem Sinne sind auch die vielen, teilweise bereits digital aufgebauten Regelkreise [Mil88], mit denen HERA und die Vorbeschleuniger kontrolliert werden, Feedbacksysteme. Wenn jedoch hier und in den folgenden Kapiteln von "Feedback" die Rede ist, dann ist immer ein System nach Abb. 1.2 gemeint: Das Signal der Strahlschwingung wird mit einem Monitor aufgenommen, in geeigneter Weise verarbeitet und

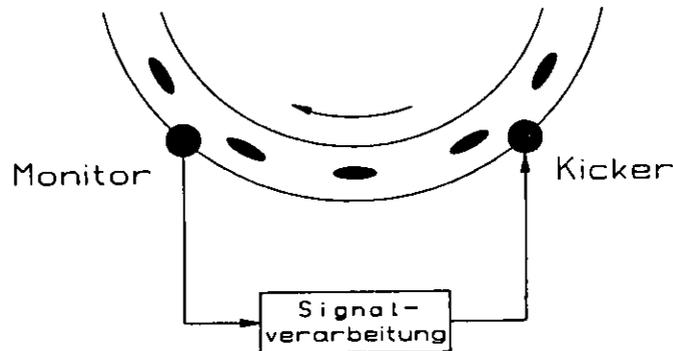


Abbildung 1.2: Das Feedbackprinzip: Das Strahlsignal wird aufgenommen, verarbeitet und dann direkt auf den Strahl rückgekoppelt.

dann von einem Kicker ⁵ direkt auf den Strahl rückgekoppelt.

Die Aufgabe der Signalverarbeitung besteht nun darin, Phase und Laufzeit im Feedbackpfad so einzustellen, daß eine dämpfende Wirkung erreicht wird. Das Signalverarbeitungssystem wird deshalb auch als Phasenschieber bezeichnet. Diese Funktion läßt sich sowohl analog als auch digital ausführen. In analoger Bauweise benötigt man für jeden Bunch einen eigenen Kanal [Hei79], das heißt bei PETRA 80 und bei HERA 220 Kanäle pro Feedbacksystem. Aufgrund von Temperaturabhängigkeit und Alterung analoger Filter müßte jeder Kanal immer wieder neu abgeglichen werden, so daß das Feedbacksystem sehr wartungsintensiv und damit in seiner Einsatzfähigkeit beeinträchtigt wäre. Digitale Filter haben mit Temperatur und Alterung wesentlich weniger Probleme, aber die Kosten pro Kanal sind für einen digitalen Phasenschieber sehr viel höher.

Ausschlaggebend für die Entscheidung zwischen analoger und digitaler Signalverarbeitung war deshalb die Frage, inwieweit es gelingen würde, die Signale mehrerer Bunche in einem Digitalkanal zu verarbeiten und so die Anzahl der digitalen Kanäle zu reduzieren. Eine Untersuchung der Eigenschaften digitaler Phasenschieber ergab unter Berücksichtigung der speziellen Anforderungen des Feedbacksystems hinsichtlich der Qualität der Phasenapproximation, des abzudeckenden Frequenzbereichs und der anfallenden Datenrate, daß unabhängig von der Zahl der Bunche ein einziges FIR-Filter ausreicht, um die Signale aller Bunche zu verarbeiten. Aus diesem Grunde wurde die digitale Lösung gewählt. Da 1989 noch kein geeigneter Signalprozessor kommerziell verfügbar

⁵Die aktive Rückkopplungseinheit, die auf den Strahl einwirkt, wird unabhängig von der technischen Realisierung als "Kicker" bezeichnet.

war, wurde aus diskreten Multiplizierern eine Phasenschieberkarte aufgebaut, die inzwischen erfolgreich getestet ist [Hei89] und mit der nun die Feedbacksysteme von PETRA [Ebe91] und HERA ausgerüstet werden.

Neben dem Aufbau der digitalen Phasenschieber für das Feedback wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Theorie entwickelt, die im Gegensatz zu anderen Ansätzen [Ebe91,Koh87,Koh91] das Feedback vollständig mit den Mitteln der Theorie diskreter Systeme, Folgen von Abtastwerten und z-Transformation, beschreibt. Das entspricht der zeitdiskreten Struktur der Signale an Monitor und Kicker sowie der Anwendung digitaler Signalverarbeitung im Feedbackpfad. Diese Theorie erfaßt in einer erweiterten Form auch die Kopplung der Bunche durch die linearen Eigenschaften der analogen Übertrager des Feedbackpfades. Das Feedback wurde simuliert, und die Ergebnisse von Theorie, Simulationen und, soweit vorhanden, Messungen stimmen gut überein. Des weiteren wurde ein adaptiver Algorithmus entwickelt, der den Phasenschieber automatisch an die Schwingungsfrequenz des Strahls anpaßt. Die Stabilität des adaptiven Feedbacks unter Rauscheinfluß wurde mit Hilfe von Simulationen untersucht.

Alle Untersuchungen wurden in enger Zusammenarbeit zwischen dem DESY und dem Arbeitsbereich Nachrichtentechnik der Technischen Universität Hamburg-Harburg durchgeführt. Dem interdisziplinären Charakter der Arbeit wird in den Kap. 2 und 3 Rechnung getragen. Kap. 2 enthält eine an den Elektrotechniker gerichtete Einführung in die Beschleunigerphysik. Kap. 3 wendet sich entsprechend an Physiker und erläutert die Grundlagen der Theorie diskreter Systeme, soweit sie für das Verständnis der folgenden Abschnitte von Bedeutung sind.

Die weitere Gliederung der Arbeit ist dann wie folgt: In Kap. 4 werden die grundlegenden Phasen- und Laufzeitbeziehungen abgeleitet, der digitale Phasenschieber entwickelt sowie das Feedback theoretisch beschrieben und simuliert. In Kap. 5 werden Theorie und Simulation auf den Fall gekoppelter Bunche erweitert. Der adaptive Phasenschieberalgorithmus wird in Kap. 6 entwickelt und der Einfluß des Rauschens simuliert. Die technische Realisierung des digitalen Phasenschiebers wird in Anhang A kurz beschrieben.

Kapitel 2

Strahlschwingungen in Hochenergiebeschleunigern

2.1 Einleitung

Das folgende Kapitel ist als eine an Ingenieure gerichtete Einführung in einige, für das Verständnis der Kap. 4 bis 6 nützliche Konzepte aus der Beschleunigerphysik gedacht. Die transversalen und longitudinalen Strahlschwingungen sowie die auf sie einwirkenden Instabilitäts- und Dämpfungsmechanismen werden weitgehend anschaulich diskutiert, ohne auf die physikalischen Grundlagen in allen Einzelheiten einzugehen. Besonders wichtig sind die Abschnitte über den Q-Wert (2.2.4) und die Schwingungsmoden (2.4). Ausführlichere Darstellungen finden sich in [Cou58,Edw87,Koh87,Schm87,Ste85,Wie75,Wil83].

Zunächst sollen kurz einige grundlegende Eigenschaften moderner Hochenergiebeschleuniger erwähnt werden. Beschleuniger unterteilen sich prinzipiell in Linear- und Kreisbeschleuniger. Linearbeschleuniger werden z. B. in [Edw87] beschrieben. Große Kreisbeschleuniger bestehen aus einem Hauptring und mehreren Vorbeschleunigern. Abb. 2.1 zeigt die Vorbeschleuniger für HERA. Die Elektronen werden mit 14 GeV, die Protonen mit 40 GeV von PETRA nach HERA injiziert, auf 30 bzw. 820 GeV beschleunigt und dann über viele Stunden gespeichert. HERA ist also gleichzeitig Beschleuniger und Speicherring. Eine Beschleunigung im eigentlichen Sinne des Wortes findet in HERA allerdings nicht mehr statt, denn die Injektionsenergien sind im Vergleich mit den Ruheenergien, 0,511 bzw. 938 MeV, schon so groß, daß die Teilchen sich praktisch mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Die Energie ist neben der Teilchensorte das wichtigste Charakteristikum eines Beschleunigers, denn sie bestimmt qualitativ, welche Reaktionen möglich sind.

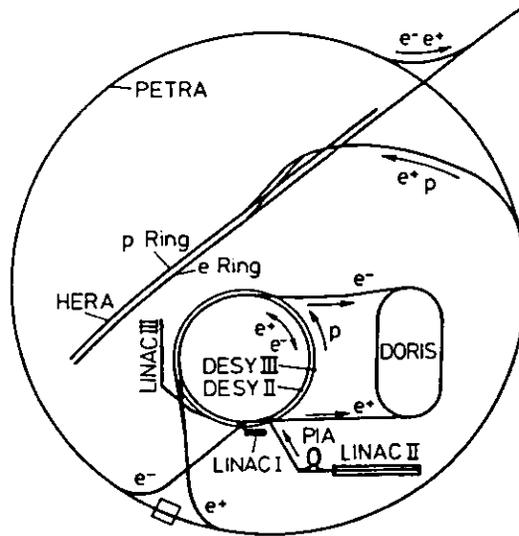


Abbildung 2.1: Das System der Vorbeschleuniger für HERA.

Je größer die Energie, desto kleiner sind die Strukturen, die noch aufgelöst werden können. Die Energie eines Protonenstrahls ist durch den Krümmungsradius der Kreisbahn und die Stärke des magnetischen Führungsfeldes begrenzt:

$$E = ec\rho B. \quad (2.1)$$

(E : Energie, e : Elementarladung, c : Lichtgeschwindigkeit, ρ : Krümmungsradius, B : Magnetfeld.) Um in HERA 820 GeV zu erreichen braucht man ein Feld von 4,7 T, was nur mit supraleitenden, durch flüssiges Helium auf 4 K gekühlten Ablenkmagneten möglich ist [Schm83,Schm90]. In Texas wird zur Zeit das SSC¹ mit 84 km Umfang und 6 T-Magneten errichtet. Die Protonenenergie wird dort 20000 GeV betragen.

Die Maximalenergie von Elektronen ist in Kreisbeschleunigern hingegen durch die Synchrotronstrahlung begrenzt, die in den Kreisbögen aufgrund der Zentripetalbeschleunigung, die die Elektronen erfahren, emittiert wird. Der Energieverlust pro Umlauf steigt mit zunehmender Energie stark an:

$$\Delta E \sim \frac{1}{\rho} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4, \quad m_0 : \text{Ruhemasse.} \quad (2.2)$$

Allein um die Energie von 26 auf 30 GeV zu erhöhen, wird in HERA die Umlaufspannung mit Hilfe supraleitender Beschleunigungsstrecken von 140 MV

¹Superconducting Super Collider

auf 240 MV gebracht. Auch größere Ringe erlauben nach Gl. 2.2 nur eine begrenzte Steigerung der Energie. Das LEP² am Europäischen Kernforschungszentrum CERN in Genf erreicht zur Zeit bei 27 km Umfang 60 GeV. Eine Alternative stellt der Bau großer Linearbeschleuniger dar, in denen nur wenig Synchrotronstrahlung entsteht.

Auch Protonen geben Synchrotronstrahlung ab, die aber aufgrund der viel größeren Ruhemasse vernachlässigt werden kann.

Neben der Energie ist die Luminosität L ein weiterer wichtiger Parameter. Sie ist über

$$R = L\sigma \quad (2.3)$$

definiert. Dabei ist R die Reaktionsrate einer bestimmten Teilchenreaktion und σ der Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion, das heißt die Wahrscheinlichkeit, mit der die Reaktion eintritt. Je größer L , desto mehr Reaktionen können beobachtet werden und desto besser ist die statistische Absicherung der physikalischen Ergebnisse. In Speicherringen mit kollidierenden Strahlen ist L proportional zur Zahl der gespeicherten Teilchen und damit zu den Strahlströmen: $L \sim N_1 N_2 \sim I_1 I_2$. Aus $I = Ne/T_0$ erhält man für HERA mit $N_e = 0,8 \cdot 10^{13}$, $N_p = 2,1 \cdot 10^{13}$ und $T_0 = 21 \mu\text{sec}$ die Ströme $I_e = 61 \text{ mA}$ und $I_p = 160 \text{ mA}$. (N : Teilchenzahl; I : Strahlstrom; e : Elementarladung; T_0 : Umlaufzeit; e,p: Indizes für Elektronen bzw. Protonen.)

Die entscheidende Begrenzung der Ströme rührt in Elektronenringen von Instabilitäten, dem exponentiellen Anwachsen der Strahlschwingungen, her. Sie entstehen durch die Rückwirkung der von dem Strahl in den Beschleunigungsstrecken induzierten Felder auf den Strahl selbst und werden mit Feedbacksystemen bekämpft.

Wichtig für den Experimentierbetrieb an einem Speicherring ist auch die Strahllebensdauer τ . Sie wird durch die Streuung der gespeicherten Teilchen an den in der Vakuumkammer verbliebenen Atomen und Molekülen begrenzt. Es gilt: $\tau \sim 1/p$. Mit Drücken p um 10^{-9} mbar erhält man Lebensdauern in der Größenordnung von 10 Stunden.

2.2 Betatronschwingungen

Die transversalen, also senkrecht zur Sollbahn ausgeführten Schwingungen der Teilchen werden als Betatronschwingungen bezeichnet. Die folgenden Ausführ-

²Large Electron Positron (Ring)

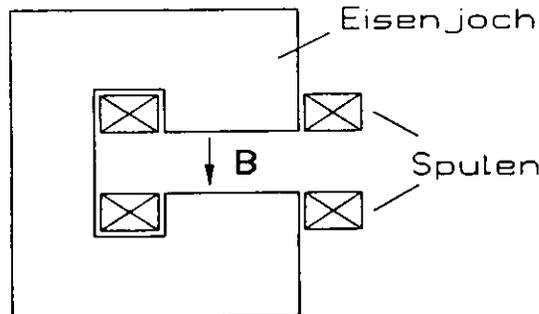


Abbildung 2.2: Ein Querschnitt durch einen Ablenkmagneten mit Weicheisenjoch zur Feldformung und -verstärkung.

rungen beruhen auf [Koh87,Ste85,Wie75,Wil83] und insbesondere [Schm87].

2.2.1 Die Bewegungsgleichungen

Ein elektrisch geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung q bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} auf einer Kreisbahn, falls die Geschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht auf \mathbf{B} steht. Aus dem Ansatz Zentrifugalkraft gleich Lorentzkraft,

$$m \frac{v^2}{\rho} = q |\mathbf{v} \times \mathbf{B}|, \quad (2.4)$$

erhält man mit $q = e$, $m = E/c^2$ und $v \approx c$ den bereits erwähnten Zusammenhang zwischen Energie, Magnetfeld und Krümmungsradius, Gl. 2.1. Mit

$$p = mv \approx mc = \frac{E}{c}$$

wird daraus für den Impuls

$$p = e\rho B. \quad (2.5)$$

Abb. 2.2 zeigt einen Querschnitt durch einen Ablenkmagneten, die vielfach auch als Dipolmagnete³ bezeichnet werden.

Neben den Dipolmagneten braucht man Quadrupolmagnete, Abb. 2.3, die dafür sorgen, daß von der Sollbahn abgekommene Teilchen nicht verloren gehen, sondern stabile Schwingungen ausführen. Wenn x und z die horizontale bzw. vertikale Abweichung von der Sollbahn auf der Magnetachse bezeichnen, so ist das Quadrupolfeld in Abb. 2.3 durch

$$\mathbf{B} = (gz, 0, gx) \quad (2.6)$$

³Die Bezeichnungen Dipol-, Quadrupol- oder Sextupol- Feld bzw. Magnet stammen aus der Multipolentwicklung zweidimensionaler Magnetfelder [Schm83].

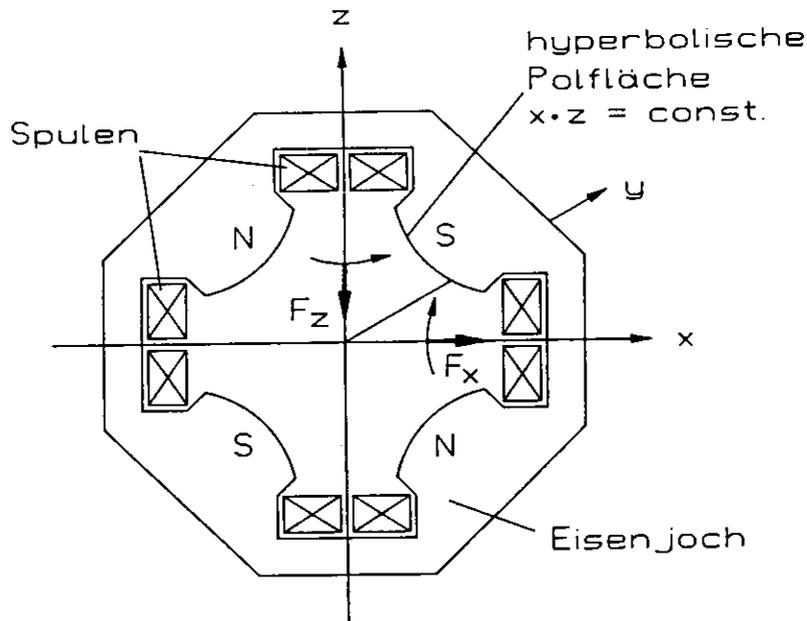


Abbildung 2.3: Ein Querschnitt durch einen Quadrupolmagneten: Die hyperbolischen Polschuhkonturen des Jochs definieren den Feldverlauf. Die Kräfte, $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, beziehen sich auf eine positive Ladung, die sich in positiver y -Richtung bewegt.

gegeben. g ist eine Konstante, der Feldgradient. Die Richtung der Kraftkomponenten F_x und F_z zeigt, daß der Magnet für ein positiv geladenes Teilchen, das sich in positiver y -Richtung bewegt, in z -Richtung fokussierend, in x -Richtung hingegen defokussierend wirkt. Dreht man den Magneten um 90° , polt den Strom um oder betrachtet ein negativ geladenes Teilchen, so erhält man Fokussierung in x und Defokussierung in z . Ordnet man abwechselnd fokussierende und defokussierende Quadrupole in geeignetem Abstand an, dann ist die Wirkung insgesamt fokussierend, s. Abschnitt 2.2.2.

In einem Quadrupolmagneten lassen sich nun die Bewegungsgleichungen leicht ableiten: Die Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld ist allgemein

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.7)$$

\mathbf{r} ist dabei der Ortsvektor, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, und t ist die Zeit. Mit $\mathbf{v} = (0, c, 0)$, die transversalen Komponenten werden vernachlässigt, und $q = e$ ergibt sich im Quadrupolfeld nach Gl. 2.6

$$e \mathbf{v} \times \mathbf{B} = ecg(x, 0, -z),$$

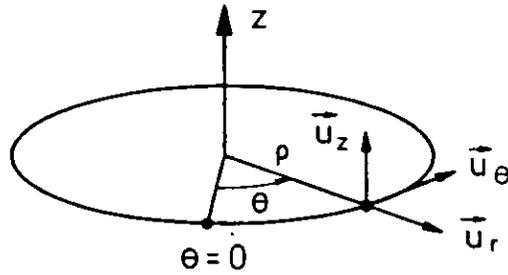


Abbildung 2.4: Die Bewegung des Teilchens in einem Ablenkmagneten wird mit Hilfe des von den Einheitsvektoren \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ und \mathbf{u}_z gebildeten Koordinatensystems beschrieben.

und somit

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = ecgx, \quad \text{und} \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -ecgz.$$

Man führt nun die Bogenlänge $s = ct$ der Sollbahn und für die Ableitung nach s ,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt},$$

die Abkürzung $x'(s)$ ein. Daraus folgt:

$$x''(s) - \frac{eg}{mc} x(s) = 0, \quad \text{und} \quad z''(s) + \frac{eg}{mc} z(s) = 0.$$

Der durch Gl. 2.5 gegebene Impuls wird auch als Sollimpuls p_0 bezeichnet. Man definiert:

$$k := \frac{eg}{p_0}. \quad (2.8)$$

Für ein Teilchen mit Sollimpuls, $mc = p_0$, gilt damit

$$x''(s) - kx(s) = 0, \quad \text{und} \quad z''(s) + kz(s) = 0. \quad (2.9)$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen in einem Quadrupol. Die beiden Schwingungsrichtungen sind nicht gekoppelt. $k > 0$ führt zu stabilen Schwingungen in z und exponentiellen Lösungen in x , $k < 0$ umgekehrt. Teilchen mit Impulsabweichung Δp werden in Abschnitt 2.2.5 behandelt.

In dem homogenen Feld eines Ablenkmagneten, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, ist die Sollbahn ein Kreisbogen in der horizontalen Ebene. Der Krümmungsradius ist nach Gl. 2.5 $\rho = p_0/eB$. Man benutzt ein krummliniges, der Sollbahn folgendes Koordinatensystem, Abb. 2.4. x und z bezeichnen wieder die Abweichung von der Sollbahn in horizontaler und vertikaler Richtung, das heißt $\mathbf{r} = (\rho + x)\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$.

Da der Magnet nur in der horizontalen Ebene ablenkt, ist die Gleichung für z einfach

$$z''(s) = 0. \quad (2.10)$$

Die entsprechende Gleichung für x erhält man, indem man Gl. 2.7 in dem krummlinigen Koordinatensystem auswertet [Schm87]. Für Teilchen mit Sollimpuls ist das Ergebnis in linearer Näherung

$$x''(s) + \frac{1}{\rho^2}x(s) = 0. \quad (2.11)$$

x und z sind also im Dipol ebenfalls nicht gekoppelt. In horizontaler Richtung wirkt der Dipol fokussierend. In großen Beschleunigern mit starken Quadrupolmagneten gilt jedoch $1/\rho^2 \ll |k|$, so daß dieser Effekt oft vernachlässigt werden kann.

Die Gleichungen 2.9, 2.10 und 2.11 lassen sich in der Form

$$\boxed{y''(s) + K(s)y(s) = 0} \quad (2.12)$$

zusammenfassen. y jetzt steht wahlweise für x oder z . Die stückweise konstante Funktion $K(s)$ beschreibt das gesamte Magnetsystem aus Dipolen und Quadrupolen. $K(s) = \pm k$ in einem Quadrupol. In einem Dipol ist $K(s) = 1/\rho^2$, falls y für x steht und $K(s) = 0$, falls y für z steht. In den Driftstrecken zwischen den Magneten ist $K(s) = 0$. In einem Kreisbeschleuniger mit Umfang L hat $K(s)$ die Periode L : $K(s + L) = K(s)$.

Gl. 2.12 beschreibt die Betatronschwingungen eines Teilchens mit Sollimpuls in linearer Näherung. In realen Beschleunigern werden auch Sextupol-Korrekturmagnete eingesetzt und Feldfehler erzeugen noch höhere Multipole. Die Gleichungen werden dadurch nichtlinear und gekoppelt. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

2.2.2 Transfermatrizen

Soweit $K(s)$ in Gl. 2.12 konstant ist, läßt sich $y(s)$ sofort angeben. Indem man diese stückweisen Lösungen stetig differenzierbar aneinandersetzt, kann man sich daraus spezielle Lösungen für den ganzen Ring verschaffen. Für einen vertikal fokussierenden Quadrupol ($k > 0$) beispielsweise ist die allgemeine Lösung von Gl. 2.12

$$y(s) = a \cos(\sqrt{k}(s - s_0) + \varphi_0),$$

und

$$y'(s) = -a\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}(s - s_0) + \varphi_0).$$

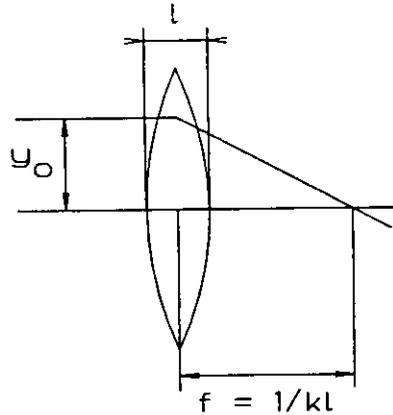


Abbildung 2.5: Die Brennweite eines kurzen, vertikal fokussierenden Quadrupols ($k > 0$) der Länge l ist $f = 1/kl$.

a und φ_0 sind frei wählbare Konstanten. Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s, s_0) \begin{pmatrix} y(s_0) \\ y'(s_0) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$\mathbf{M}(s, s_0) := \begin{pmatrix} \cos \delta\varphi & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \delta\varphi \\ -\sqrt{k} \sin \delta\varphi & \cos \delta\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

mit $\delta\varphi := \sqrt{k}(s - s_0)$, beschreibt die Transformation von y und y' durch den Magneten. Für defokussierende Quadrupole und Driftstrecken lassen sich leicht die entsprechenden Matrizen angeben. Durch fortgesetzte Matrixmultiplikation kann man so die Teilchenbahnen durch den ganzen Ring verfolgen. Man kann sich die Bahnen veranschaulichen, indem man die Quadrupole als dünne Linsen betrachtet. Sei l die Länge des Magneten. Falls $l \rightarrow 0$ und $k \rightarrow \infty$, so daß $\sqrt{kl} \rightarrow 0$, aber $kl = \text{const}$, folgt aus Gl. 2.13

$$\mathbf{M}(s_0 + l, s_0) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kl & 1 \end{pmatrix}.$$

Für ein achsenparallel in den Quadrupol einlaufendes Teilchen, $y'(s_0) = 0$, gilt somit

$$\begin{pmatrix} y(s_0 + l) \\ y'(s_0 + l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kl & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(s_0) \\ -kly(s_0) \end{pmatrix}.$$

Die Bahn des Teilchens schneidet die Achse also im Abstand $1/kl$ hinter dem Quadrupol, der als Sammellinse mit Brennweite $f = 1/kl$ wirkt, Abb. 2.5. Ein vertikal defokussierender Quadrupol, $k < 0$, hat die Brennweite $f = 1/kl < 0$.

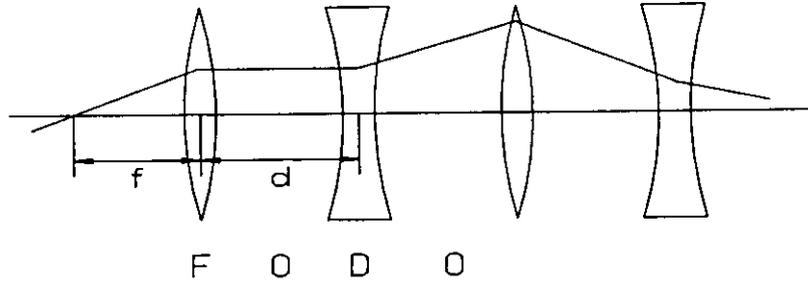


Abbildung 2.6: Eine mögliche Bahn durch zwei FODO-Zellen.

Man ordnet die Quadrupole nun abwechselnd fokussierend und defokussierend an, getrennt durch Dipole oder, in den geraden Stücken, durch Driftstrecken. Unter Vernachlässigung der fokussierenden Eigenschaften der Dipole, $1/\rho^2 \ll |k|$, gelangt man so zur "FODO-Zelle", dem Grundelement der Beschleunigeroptik, Abb. 2.6. Man kann zeigen, daß eine Folge von FODO-Zellen zu stabilen Bahnen führt, falls $2f > d$. Die regelmäßige Anordnung der Magnete wird in der Realität allerdings durchbrochen, beispielsweise in den Wechselwirkungszonen, wo der Strahl speziell auf den Wechselwirkungspunkt fokussiert wird.

2.2.3 Die β -Funktion

Der Ansatz

$$y(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0), \quad (2.14)$$

mit

$$\phi'(s) = \frac{1}{\beta(s)} \Leftrightarrow \phi(s) = \phi(s_0) + \int_{s_0}^s \frac{dt}{\beta(t)} \quad (2.15)$$

führt in Gl. 2.12 eingesetzt auf

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + K(s)\beta^2 = 1. \quad (2.16)$$

$\beta(s)$, die " β -Funktion", ist für die "Beschleunigeroptik" von grundlegender Bedeutung. Im allgemeinen verschafft man sich $\beta(s)$ nicht durch Lösen von Gl. 2.16. Eine einfachere Möglichkeit besteht darin, zunächst mit Hilfe des Matrixformalismus und passender Anfangsbedingungen zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 von Gl. 2.12 zu berechnen, so daß

$$y_1(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0),$$

und

$$y_2(s) = a\sqrt{\beta(s)} \sin(\phi(s) + \phi_0).$$

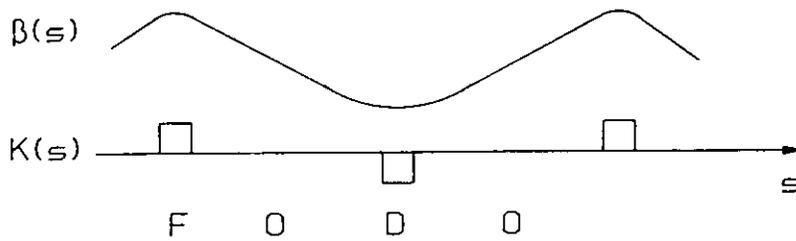


Abbildung 2.7: Der Verlauf der β -Funktion in einer FODO-Zelle.

Daraus ergibt sich β :

$$\beta(s) = \frac{1}{a^2}(y_1^2(s) + y_2^2(s)).$$

In einem Kreisbeschleuniger kann man die Optik stets so einstellen und die Anfangsbedingungen für β so wählen, daß β überall positiv und periodisch, $\beta(s + L) = \beta(s)$, ist. Aus $\beta > 0$ folgt, daß $\phi(s)$ monoton steigend ist. $y(s)$ läßt sich somit als Sinusschwingung mit modulierter Amplitude und nichtlinearem Phasenvorschub auffassen. Abb. 2.7 zeigt qualitativ den Verlauf der β -Funktion in einer FODO-Zelle. In den Driftstrecken, $k = 0$, verläuft β parabolisch.

2.2.4 Der Q-Wert

Aus der Periodizität von β folgt, daß der Phasenvorschub pro Umlauf,

$$\phi(s_0 + L) - \phi(s_0) = \int_{s_0}^{s_0+L} \frac{ds}{\beta(s)},$$

einen festen, von s_0 unabhängigen Wert hat. Der Phasenvorschub dividiert durch 2π ergibt die *Anzahl der Schwingungen pro Umlauf* und wird als *Q-Wert* bezeichnet:

$$Q := \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)}. \quad (2.17)$$

Man zerlegt Q in einen ganzzahligen und einen gebrochenen Anteil:

$$Q =: Q_0 + q. \quad (2.18)$$

Im Falle eines ganzzahligen Q-Werts, $q = 0$, erhält man periodische, das heißt geschlossene Bahnen: $y(s + L) = y(s)$. In der Praxis sind solche Bahnen jedoch nicht stabil, wie bereits folgende einfache Überlegung zeigt: Ein kleiner, lokaler Fehler ΔB im Magnetfeld gibt dem Teilchen jedesmal, wenn es den Magneten passiert, einen kleinen Stoß. Ist die Bewegung periodisch, so passiert das Teilchen den Magneten immer mit derselben Schwingungsphase, so daß sich die

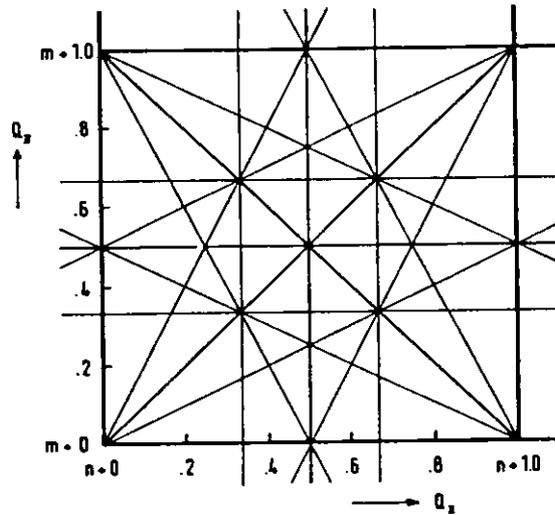


Abbildung 2.8: Das Resonanzdiagramm der Betatronschwingungen bis zur dritten Ordnung [Wie75]. m und n sind beliebige ganze Zahlen.

Wirkung aller Stöße aufaddiert und das Teilchen verloren geht. Man spricht dann von einer Resonanz. Eine genauere Analyse des Einflusses von Feldfehlern zeigt, daß Dipolfehler ganzzahlige Q -Werte verbieten, Quadrupolfehler halbzahlige, Sextupolfehler drittelzahlige usw. Die Kopplung von horizontalen und vertikalen Betatronschwingungen führt darüber hinaus zu der allgemeinen Bedingung

$$\mu Q_x + \nu Q_y \neq \lambda, \quad \mu, \nu, \lambda \text{ ganzzahlig und } \mu, \nu \text{ klein.} \quad (2.19)$$

Abb. 2.8 zeigt ein Resonanzdiagramm von Q_x und Q_y mit den verbotenen Linien bis zur Ordnung $|\mu| + |\nu| = 3$. Der Arbeitspunkt eines Beschleunigers muß insbesondere in sicherem Abstand von den Resonanzen niedriger Ordnung gewählt werden.

In großen Kreisbeschleunigern wie PETRA oder HERA ist Q_0 groß gegen 1. Im Elektronenring von HERA gilt beispielsweise $Q_{0,x} = Q_{0,y} = 47$.

2.2.5 Dispersion

Gl. 2.12 war für ein Teilchen mit Sollimpuls p_0 abgeleitet worden. Im Falle einer Impulsabweichung (Dispersion) $p = p_0 + \Delta p$ führt die Bewegungsgleichung 2.7 für x auf eine inhomogene Differentialgleichung:

$$x''(s) + K(s)x(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (2.20)$$

Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, $x_\beta(s)$, und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung, $x_D(s)$:

$$x(s) = x_\beta(s) + x_D(s). \quad (2.21)$$

Wählt man $x_D(s)$ periodisch, $x_D(s + L) = x_D(s)$, so führt das Teilchen die Betatronschwingungen nicht mehr um die Sollbahn, $x(s) = 0$, sondern um die geschlossene Dispersionsbahn $x_D(s)$ aus. Normiert man $x_D(s)$ auf die relative Impulsabweichung, so erhält man die "periodische Dispersion" $D(s)$:

$$x_D(s) =: D(s) \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (2.22)$$

In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, daß die longitudinalen Schwingungen (Synchrotronschwingungen) Energie- und damit Impulsschwingungen sind. Δp ist also nicht konstant, sondern schwingt mit der Synchrotronschwingungsfrequenz Ω_s :

$$\Delta p(t) \sim \cos \Omega_s t.$$

Gl. 2.21 bedeutet also eine Einkopplung der Synchrotronschwingungen in die horizontalen Schwingungen. Will man trotzdem $x_\beta(s)$ ungestört beobachten, so muß man den entsprechenden Monitor an einem Ort im Ring aufstellen, wo die Dispersion möglichst klein ist.

Die Dispersion verändert die Länge der geschlossenen Umlaufbahn. Es gilt:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (2.23)$$

Der "Momentum Compaction Factor" α ist positiv, weil Teilchen mit größerem Impuls weiter außen umlaufen.

In einem Quadrupolmagneten gilt für ein Teilchen mit Sollimpuls, $mc = p_0$,

$$K(s) = \frac{eg}{mc} = \frac{eg}{p_0} = k.$$

Mit einer Impulsabweichung, $mc = p_0 + \Delta p$, wird daraus

$$K(s) = \frac{eg}{mc} = \frac{eg}{p_0 + \Delta p} \approx k \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right).$$

Ein Teilchen mit z. B. $\Delta p > 0$ "sieht" also eine "Optik" mit etwas schwächeren Quadrupolen. Das führt zu einer dem Impulsfehler proportionalen Q-Wert-Verschiebung:

$$\Delta Q = \xi \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (2.24)$$

ξ wird als Chromatizität bezeichnet. Weil Q-Wert-Verschiebungen unerwünscht sind, wird die Chromatizität mit Sextupolmagneten, die wie impulsabhängige Quadrupole wirken, kompensiert. Dadurch werden die horizontalen und vertikalen Betatronschwingungen allerdings gekoppelt.

2.2.6 Die Courant-Snyder-Transformation

Die Courant-Snyder-Transformation überführt die Differentialgleichung

$$y''(s) + K(s)y(s) = f(s) \quad (2.25)$$

in eine Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta(\tau)}{d\tau^2} + \Omega_\beta^2\eta(\tau) = F(\tau). \quad (2.26)$$

$f(s)$ ist dabei eine beliebige Funktion. Für $f(s) = 0$ ist die Transformation sehr einfach. Aus Gl. 2.14 und der Definition

$$\eta(s) := \frac{y(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \quad (2.27)$$

folgt

$$\eta(s) = a \cos(\phi(s) + \phi_0).$$

Da ϕ eine monoton steigende Funktion von s ist, kann man η als Funktion von ϕ auffassen:

$$\eta(\phi) = a \cos(\phi + \phi_0).$$

Der Q-Wert ist die Anzahl der Schwingungen, die das Teilchen pro Umlauf, also in der Zeit T_0 ausführt. Man definiert deshalb die Kreisfrequenz der Betatronschwingung als

$$\Omega_\beta := 2\pi \frac{Q}{T_0}, \quad (2.28)$$

und führt nun noch die "Quasizeit" ein [Koh80]:

$$\tau := \frac{\phi}{\Omega_\beta}. \quad (2.29)$$

Die Quasizeit läuft im Mittel genauso schnell wie die reale Zeit:

$$\tau(t_0 + T_0) = \frac{\phi(s_0 + L)}{\Omega_\beta} = \frac{\phi(s_0)}{\Omega_\beta} + \frac{2\pi Q}{\Omega_\beta} = \tau(t_0) + T_0. \quad (2.30)$$

L ist der Umfang des Beschleunigers. In der Quasizeit führt η harmonische Schwingungen aus,

$$\eta(\tau) = a \cos(\Omega_\beta\tau + \phi_0),$$

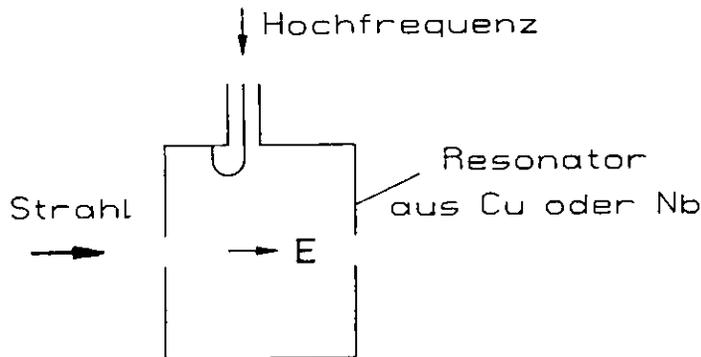


Abbildung 2.9: Die Beschleunigung erfolgt in Hohlraumresonatoren durch das elektrische Feld.

und erfüllt somit Gl. 2.26 mit $F(\tau) = 0$.

Für $f(s) \neq 0$ definiert man $\eta(s)$ und die Quasizeit τ wie oben und erhält mit Hilfe von Gl. 2.15 und 2.16 als Ergebnis der Transformation

$$\frac{d^2\eta(\tau)}{d\tau^2} + \Omega_\beta^2\eta(\tau) = \Omega_\beta^2\beta^{\frac{3}{2}}(\tau)f(\tau). \quad (2.31)$$

Die Courant-Snyder-Transformation ermöglicht es, die Betatronschwingungen als harmonische Oszillationen zu betrachten. In den Kap. 4 bis 6 wird davon Gebrauch gemacht.

2.3 Synchrotronschwingungen

Dieser Abschnitt folgt im wesentlichen [Wil83]. In großen Kreisbeschleunigern erfolgt die Energiezufuhr an die Teilchen mit Hilfe elektrischer Wechselfelder nach dem "Synchrotronprinzip", weshalb die longitudinalen Schwingungen als Synchrotronschwingungen bezeichnet werden. Die Beschleunigungsstrecken bestehen aus Hohlraumresonatoren in denen durch Einkopplung von Hochfrequenzleistung elektromagnetische Schwingungen angeregt werden. Das longitudinale elektrische Feld auf der Resonatorachse bewirkt die Beschleunigung. Die Hochfrequenz muß dazu mit den umlaufenden Teilchen synchronisiert sein. Abb. 2.9 zeigt das Prinzip. Der Resonator ist im wesentlichen ein Hohlraum aus sehr gut leitendem Material mit drei Öffnungen: Zwei für den Strahl und eine zur Einkopplung der Hochfrequenz. Die Form wird auf gute Resonanzeigenschaften optimiert. 30 cm ist eine typische Größenordnung für Länge und Radius des Resonators und damit auch für die halbe Wellenlänge des Grundmodes. Das entspricht Frequenzen von einigen hundert MHz.

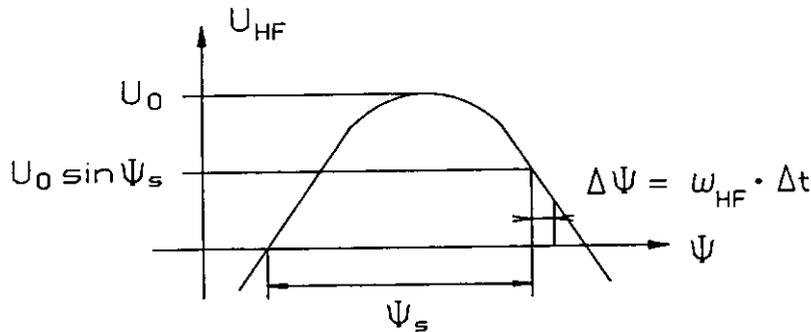


Abbildung 2.10: Der Verlauf der Hochfrequenzspannung in den Beschleunigungsstrecken.

Synchronisation ist nur möglich, wenn die Hochfrequenz ν_{HF} ein ganzzahliges Vielfaches der Umlauffrequenz ist:

$$\nu_{\text{HF}} = h\nu_0, \quad h \text{ ganzzahlig.}$$

Die Harmonischenzahl h muß wiederum ganzzahliges Vielfaches der Bunchzahl N_B sein. Im Elektronenring von HERA ist $h = 48 \cdot 220 = 10560$. Mit $\nu_0 = 47,3 \text{ kHz}$ folgt $\nu_{\text{HF}} = 500 \text{ MHz}$.

Kupferresonatoren erreichen Feldstärken von 1 MV/m . Allein um die Synchrotronstrahlungsverluste der Elektronen von 127 MeV pro Umlauf (bei 30 GeV) auszugleichen, braucht man also mehr als 100 m Beschleunigungsstrecke. Mit den ebenfalls eingesetzten supraleitenden Niobresonatoren erreicht man zur Zeit 5 MV/m [Schm90]. Aus der Umlaufspannung von 127 MV und dem Strahlstrom, 60 mA , ergibt sich eine Leistungsaufnahme des gespeicherten Elektronenstrahls von 8 MW .

Das Prinzip der Synchrotronschwingungen soll nun anhand von Abb. 2.10 beschrieben werden. Es wird angenommen, daß es nur eine Beschleunigungsstrecke im Ring gibt. Die Energie der Teilchen sei so groß, daß $v = c$ gesetzt werden kann. In den Elektronenringen von PETRA und HERA ist das der Fall. Das "synchrone Teilchen" erreicht die Beschleunigungsstrecke in jedem Umlauf mit der Sollenergie E_s und der synchronen Phase Ψ_s . Es nimmt die Energie $eU_0 \sin \Psi_s$ auf, die im Speicherbetrieb, das heißt ohne Beschleunigung, die Synchrotronstrahlungsverluste gerade ausgleicht. Ein anderes Teilchen erreiche die Beschleunigungsstrecke um Δt später, also mit der Phase $\Psi = \Psi_s + \omega_{\text{HF}} \Delta t$. Es erhält somit etwas weniger Energie. Dadurch verkürzt sich seine Umlaufbahn, s. Gl. 2.23, und damit seine Umlaufzeit. Umgekehrt erhält ein zu früh angekommenes Teilchen mehr Energie als das Sollteilchen, wodurch sich seine

Umlaufzeit verlängert. Für nicht zu große Amplituden führt dieser selbstfokussierende Effekt zu stabilen Schwingungen.

In linearer Näherung gilt für den Energiefehler $\Delta E = E - E_S$ vor und nach der Beschleunigungsstrecke

$$\Delta E_{k+1} - \Delta E_k = -\alpha_1 \Delta \Psi_k, \quad \text{mit} \quad \alpha_1 = -eU_0 \cos \Psi_S > 0, \quad (2.32)$$

und für den Phasenfehler $\Delta \Psi = \Psi - \Psi_S$ zu Beginn und am Ende des k -ten Umlaufs

$$\Delta \Psi_k - \Delta \Psi_{k-1} = \alpha_2 \Delta E_k, \quad \text{mit} \quad \alpha_2 = \frac{2\pi h \alpha}{E_S} > 0. \quad (2.33)$$

α ist der Momentum Compaction Factor aus Gl. 2.23. Da die Periode T_S der Synchrotronschwingung groß gegen die Umlaufzeit T_0 ist, lassen sich die Differenzgleichungen in Differentialgleichungen überführen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_{k+1} - \Delta E_k}{T_0} &\approx \frac{d(\Delta E)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d(\Delta E)}{dt} &= -\frac{\alpha_1}{T_0} \Delta \Psi, \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\frac{d(\Delta \Psi)}{dt} = \frac{\alpha_2}{T_0} \Delta E.$$

Durch Differenzieren der einen Gleichung und Einsetzen der anderen ergibt sich

$$\boxed{\frac{d^2 \Delta \Psi}{dt^2} + \Omega_S^2 \Delta \Psi = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \Delta E}{dt^2} + \Omega_S^2 \Delta E = 0,} \quad (2.34)$$

mit

$$\Omega_S = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{T_0}.$$

Man erhält also Energie- und Phasenschwingungen mit der Synchrotronfrequenz

$$\nu_S = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{T_0}. \quad (2.35)$$

Die Q-Werte der Synchrotronschwingungen liegen im allgemeinen unter 0,1. Die Umlauffrequenzen in PETRA und HERA sind 130 bzw. 47,3 kHz; die entsprechenden Synchrotronfrequenzen liegen also unter 13 bzw. 4,7 kHz.

In Protonenringen kann wegen des kleineren Verhältnisses E/m_0c^2 nicht immer $v = c$ gesetzt werden. Die Umlaufzeit hängt dann nicht nur von der Länge

der Umlaufbahn sondern auch von der Geschwindigkeit v ab. Unterhalb einer Übergangsenergie überwiegt die Abhängigkeit von v , so daß Teilchen mit größerer Energie kleinere Umlaufzeiten haben. In diesem Fall muß Ψ_S auf der ansteigenden Flanke des Sinus in Abb. 2.10 gewählt werden.

Gl. 2.32 und 2.33 lassen sich auch direkt lösen. Da zeitdiskrete Methoden auch in den Kap. 4 und 5 Anwendung finden, soll dieser Weg hier kurz vorgeführt werden:

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_{k+1} - \Delta\Psi_k &= \alpha_2\Delta E_{k+1} \\ &= \alpha_2(-\alpha_1\Delta\Psi_k + \Delta E_k) \\ &= -\alpha_1\alpha_2\Delta\Psi_k + \Delta\Psi_k - \Delta\Psi_{k-1} \\ \Rightarrow \Delta\Psi_{k+1} - 2\left(1 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2}\right)\Delta\Psi_k + \Delta\Psi_{k-1} &= 0.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Vergleicht man das mit der Differenzgleichung eines harmonischen Oszillators, s. Abschnitt 3.2.4,

$$x_{k+1} - 2\cos(\Omega T_0)x_k + x_{k-1} = 0,$$

so folgt

$$\cos \Omega_S T_0 = 1 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2}.\quad (2.37)$$

Ist $\Omega_S T_0$ hinreichend klein, dann gilt

$$\cos \Omega_S T_0 \approx 1 - \frac{(\Omega_S T_0)^2}{2},$$

und man erhält wieder

$$\Omega_S = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{T_0}.$$

Nimmt man den nächsten Term $(\Omega_S T_0)^4/24$ in der Kosinusreihe noch mit, so folgt aus Gl. 2.37

$$\Omega_S = \frac{1}{T_0} \left(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{24}\sqrt{\alpha_1\alpha_2^3} \right).\quad (2.38)$$

Für $Q_S < 0,1 \Rightarrow \sqrt{\alpha_1\alpha_2} \approx \Omega_S T_0 < 0,1 \cdot 2\pi$ ist die Korrektur kleiner als 1%. In diesem Fall lassen sich die Synchrotronschwingungen in guter Näherung durch Gl. 2.34 beschreiben. Sind die Beschleunigungsstrecken nicht auf einen Punkt konzentriert, sondern im Ring verteilt, so wird diese Näherung natürlich noch besser.

2.4 Moden und Strahlspektrum

Gegeben sei ein Strahl mit N_B Bunchen, deren Schwerpunktsschwingungen (longitudinal oder transversal) durch die Funktionen $x_\mu(t)$, $\mu = 0 \dots N_B - 1$, beschrieben werden. Die $x_\mu(t)$ können in einem Vektor zusammengefaßt werden:

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_{N_B-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Weiter definiert man N_B Vektoren \mathbf{K}_r , $r = 0 \dots N_B - 1$ [Koh87]. Die μ -te Komponente von \mathbf{K}_r ist durch

$$K_{\mu r} := \frac{1}{\sqrt{N_B}} e^{jr\omega_0\mu T_B} \quad (2.39)$$

gegeben. ω_0 ist die Umlaufkreisfrequenz, $T_B = T_0/N_B$ der zeitliche Bunchabstand. Die \mathbf{K}_r werden als Modenvektoren bezeichnet. Es gilt ⁴

$$\mathbf{K}_r^+ \mathbf{K}_{r'} = \delta_{rr'}, \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_{N_B-r} = \mathbf{K}_r^*. \quad (2.40)$$

Die \mathbf{K}_r bilden eine orthonormale Basis des Vektorraumes, nach der $\mathbf{x}(t)$ entwickelt werden kann:

$$c_r(t) := \mathbf{K}_r^+ \mathbf{x}(t) \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) = \sum_{r=0}^{N_B-1} c_r(t) \mathbf{K}_r. \quad (2.41)$$

Für reelle \mathbf{x} gilt

$$c_r^* = (\mathbf{K}_r^+)^* \mathbf{x} = \mathbf{K}_{N_B-r}^+ \mathbf{x} = c_{N_B-r}. \quad (2.42)$$

Die c_r werden als Modenkoeffizienten bezeichnet.

Der Nutzen dieser Entwicklung wird deutlich, wenn man das Signal betrachtet, das der Strahl an einem Monitor im Ring erzeugt. Behandelt man die Bunche als harmonische Oszillatoren, s. Abschnitt 2.2.6 und 2.3, so werden ungedämpfte Schwingungen durch

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} + \Omega^2 x_\mu = 0, \quad \mu = 0 \dots N_B - 1,$$

⁴ \mathbf{a}^+ sei der zu \mathbf{a} transponierte, komplex konjugierte Zeilenvektor. Das Matrixprodukt $\mathbf{a}^+ \mathbf{b}$ definiert dann das Skalarprodukt in dem komplexwertigen Vektorraum.

beschrieben. Somit gilt für den Vektor \mathbf{x} :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \Omega^2 \mathbf{x} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_r^+ \left(\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \Omega^2 \mathbf{x} \right) = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 c_r}{dt^2} + \Omega^2 c_r = 0 \\ &\Rightarrow c_r(t) = A_{r,+} e^{j\Omega t} + A_{r,-} e^{-j\Omega t}. \end{aligned}$$

$A_{r,+}$ und $A_{r,-}$ sind die beiden, zunächst einmal frei wählbaren Integrationskonstanten. Alle Moden außer Mode r seien 0 und außerdem $A_{r,-} = 0$, das heißt der Strahl schwingt im Mode r mit

$$\begin{aligned} c_r(t) &= A_{r,+} e^{j\Omega t} \\ \Rightarrow x_\mu(t) &= c_r(t) K_{\mu r} = \frac{1}{\sqrt{N_B}} A_{r,+} e^{j(\Omega t + r\omega_0 \mu T_B)}. \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz von Bunch zu Bunch beträgt im Mode r demnach $r\omega_0 T_B$. Der μ -te Bunch passiere den Monitor zu den Zeiten

$$t_\mu(k) = kT_0 + \mu T_B = lT_B, \quad \text{mit} \quad l := N_B k + \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Das Signal $u(lT_B)$ am Monitor ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} u(kT_0 + \mu T_B) &= x_\mu(kT_0 + \mu T_B) = \frac{1}{\sqrt{N_B}} A_{r,+} e^{j(\Omega(kT_0 + \mu T_B) + r\omega_0 \mu T_B)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_B}} A_{r,+} e^{j(r\omega_0 + \Omega)(kT_0 + \mu T_B)} \\ \Rightarrow u(lT_B) &= \frac{1}{\sqrt{N_B}} A_{r,+} e^{j(r\omega_0 + \Omega)lT_B}. \end{aligned}$$

Sind alle Moden angeregt, so erhält man entsprechend

$$u(lT_B) = \frac{1}{\sqrt{N_B}} \sum_{r=0}^{N_B-1} \left(A_{r,+} e^{j(r\omega_0 + \Omega)lT_B} + A_{r,-} e^{j(r\omega_0 - \Omega)lT_B} \right), \quad (2.43)$$

mit der Nebenbedingung für reelles u

$$A_{r,+} = A_{(N_B-r),-}^* \Leftrightarrow A_{r,-} = A_{(N_B-r),+}^*. \quad (2.44)$$

Im Strahlspektrum, das man an dem Monitor mißt, gehören also zum Mode r die Linien $r\omega_0 \pm \Omega$. Aufgrund dieses Zusammenhangs sind die Moden z. B. bei der Behandlung des Feedbacks im Frequenzbereich sehr nützlich.

$u(lT_B)$ ist ein zeitdiskretes Signal, s. Kap. 3, mit Abtastintervall $T_A = T_B$. Sein Spektrum ist deshalb periodisch mit der Periode $2\pi/T_B = N_B\omega_0$. Es setzt sich also über den Bereich von 0 bis $N_B\omega_0$ hinaus periodisch fort. Dem entspricht, daß $K_{r+N_B} = K_r$. Man könnte die Moden genauso gut von $-N_B/2$ bis $N_B/2 - 1$ definieren. Aus der Realität der x_μ folgt dann $c_{-r} = c_r^*$ und $A_{-r,\mp} = A_{r,\pm}^*$ entsprechend der Beziehung $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$ für die Fouriertransformierte einer reellen Funktion $f(t)$.

2.5 Instabilitäten und Dämpfung

Die folgende Diskussion beruht hauptsächlich auf [Koh87]. Das exponentielle, zum Strahlverlust führende Anwachsen der Strahlschwingungen wird als Instabilität bezeichnet. Instabilitäten können in allen drei Schwingungsrichtungen auftreten. Hauptursache für Instabilitäten in den Elektronenringen von PETRA und HERA ist die Rückwirkung der vom Strahlstrom I in den Resonatoren der Beschleunigungsstrecken induzierten Spannung U auf den Strahl. Der Zusammenhang wird durch die Resonatorimpedanz Z beschrieben: $U = ZI$.

Unter der Annahme, daß die rückwirkende Kraft im Bereich eines Bunches nicht ortsabhängig ist, werden die Elektronen zu kohärenten Schwingungen angeregt, die durch die Bewegung des Bunchschwerpunkts beschrieben werden können. Auf innere Schwingungen der Bunche, die ebenfalls zu Instabilitäten führen können, soll hier nicht weiter eingegangen werden, denn auch die für PETRA und HERA entwickelten Feedbacksysteme dämpfen nur die Schwerpunktsschwingungen.

Ein Bunch, der einen Resonator auf der Sollbahn, das bedeutet auf der Resonatorachse, durchfliegt, kann aus Symmetriegründen keine transversalen Kräfte auf der Resonatorachse erzeugen. Die longitudinalen Kräfte, die ein Bunch erzeugt, der mit der synchronen Phase Ψ_S im Resonator ankommt, werden von vorneherein im Hochfrequenzsystem kompensiert. Somit entstehen die rückwirkenden Kräfte aus den Abweichungen der Bunche von Sollbahn und Sollphase und sind deshalb zumindest für kleine Schwingungen den Auslenkungen proportional, was zu einem exponentiellen Anwachsen der Amplituden führt. Die Anwachsraten, d. h. die Kehrwerte der Anwachszeiten τ , sind wiederum proportional zum Strahlstrom: $1/\tau \sim I$.

Die Resonatorimpedanz ist frequenzabhängig, $Z = Z(\omega)$. Der Strahl regt den Resonator mit den Frequenzen $r\omega_0 \pm \Omega$ an, $r = 0, 1, 2, \dots$, s. Abschnitt 2.4. Die Eigenschaften von $Z(r\omega_0 \pm \Omega)$ bestimmen deshalb das Verhalten der entspre-

chenden Moden. Die Resonatoren haben jeweils mehrere, meist sehr schmale Resonanzbänder, so daß im allgemeinen nicht alle Moden instabil werden.

Die Schwingungsfrequenzen der einzelnen Elektronen sind genau genommen nicht alle gleich, sondern aufgrund von Nichtlinearitäten der in Abschnitt 2.2 und 2.3 diskutierten fokussierenden Kräfte amplitudenabhängig. Das führt zum Zerfall der Kohärenz der Elektronenschwingungen und dadurch einerseits zu einer "Aufblähung" der Bunche, das heißt einer größeren Emittanz⁵ des Strahls, andererseits zur Dämpfung der Schwerpunktsbewegungen der Bunche. Dieser Effekt wird als Landau-Dämpfung bezeichnet [Koh86].

Für kleine Ströme kompensiert die Landau-Dämpfung die Instabilitäten. Im Elektronenring von PETRA beträgt die transversale Landau-Dämpfungszeit ungefähr 10 msec. Ohne Feedback liegt das Maximum des Strahlstroms bei 7 mA [Hei89]. Unter der Voraussetzung, daß die transversalen Instabilitäten den Strom begrenzen, läßt sich daraus grob abschätzen, daß man ein transversales Feedback mit einer Dämpfungszeit von etwa

$$\frac{7 \text{ mA}}{60 \text{ mA}} \cdot 10 \text{ msec} \approx 1,2 \text{ msec}$$

braucht, um den Sollstrom von 60 mA zu erreichen.

Wie in Abschnitt 2.1 erwähnt, geben die umlaufenden Elektronen Energie in Form von Synchrotronstrahlung ab, die mit erheblichem Aufwand in den Beschleunigungsstrecken wieder zugeführt werden muß. Die Synchrotronstrahlung führt zu einer Dämpfung der individuellen Elektronenschwingungen, die als Strahlungsdämpfung bezeichnet wird.

Transversal läßt sich die Strahlungsdämpfung folgendermaßen anschaulich erklären: Die abgestrahlten Photonen werden in Bewegungsrichtung der Elektronen ausgesandt. Dadurch werden auch die transversalen Komponenten des Elektronenimpulses reduziert. In den Beschleunigungsstrecken wird jedoch nur der longitudinale Impuls ergänzt, wodurch die transversalen Komponenten allmählich verschwinden. Die longitudinale Strahlungsdämpfung beruht darauf, daß Elektronen mit Energieabweichung $\Delta E > 0$ mehr Energie abstrahlen, als solche mit $\Delta E < 0$ [Wie75]. Eine ausführlichere Diskussion der Strahlungsdämpfung findet sich in [Edw87].

Die Strahlungsdämpfung führt dazu, daß ein durch Landau-Dämpfung auf-

⁵Die Emittanz ist das Phasenraumvolumen des von den Teilchen eines Strahls gebildeten Ensembles.

geblähter Bunch sich wieder zusammenzieht. Ein möglichst geringer Querschnitt des Strahls ist wichtig für hohe Luminosität, d. h. eine hohe Reaktionsrate in den Wechselwirkungspunkten.

Bezüglich der Dämpfungseigenschaften unterscheiden sich Protonenstrahlen erheblich von Elektronenstrahlen. Der Grund liegt in der vernachlässigbar schwachen Synchrotronstrahlung der Protonen. Protonenringe kommen mit viel weniger Hochfrequenzleistung in den Beschleunigungsstrecken aus, so daß die die Instabilitäten treibende Impedanz entsprechend kleiner ist als in Elektronenringen. Andererseits fehlt die Strahlungsdämpfung und ein durch die auch für Protonen wirksame Landau-Dämpfung aufgeblähter Bunch zieht sich nicht wieder zusammen. Die Aufgabe des longitudinalen Feedbacks im Protonenring von PETRA besteht deshalb in der Dämpfung der durch Injektionsfehler kohärent angeregten Synchrotronschwingungen bevor die Landau-Dämpfung wirksam wird [Gam90].

2.6 Zusammenfassung

Die Bunche führen transversale, also horizontale und vertikale Betatronschwingungen um die Sollbahn aus. Mit Hilfe der Courant-Snyder-Transformation können diese Schwingungen auf den harmonischen Oszillator zurückgeführt werden.

Die Synchrotronschwingungen sind longitudinale Phasenschwingungen um die Sollphase der Bunche in den Beschleunigungsstrecken. Sie können in guter Näherung ebenfalls als harmonische Oszillationen betrachtet werden.

Die Anzahl der Schwingungen pro Umlauf wird als Q-Wert bezeichnet. Die Q-Werte müssen im Hinblick auf mögliche Resonanzen sorgfältig gewählt werden.

Die Schwingungen eines Systems von N_B Bunchen können nach Moden entwickelt werden. Zum Mode r gehören die Frequenzen $r\omega_0 \pm \Omega$ im Strahlspektrum.

In Elektronenringen entstehen bei großen Strahlströmen durch die Rückwirkung der vom Strahl in den Beschleunigungsstrecken induzierten Spannungen auf den Strahl Instabilitäten, die mit Feedbacksystemen gedämpft werden müssen.

Kapitel 3

Theorie diskreter Systeme und digitale Filter

Die Theorie diskreter Systeme ist die Grundlage der digitalen Signalverarbeitung. Da detaillierte Kenntnisse auf diesem Gebiet bei den mit Beschleunigertechnik befaßten Physikern und Ingenieuren nicht generell vorausgesetzt werden können, gibt dieses Kapitel eine Einführung in jene Teile der Theorie, die für das Verständnis der Kap. 4 bis 6 wichtig sind: Diskrete LTI-Systeme, z-Transformation und der Zusammenhang mit kontinuierlichen Systemen. Darüber hinaus wird speziell die Differenzgleichung des harmonischen Oszillators diskutiert, die zur Beschreibung der Strahlschwingungen benötigt wird. Ein Abschnitt über digitale Filter beschließt das Kapitel.

Einführungen in die digitale Signalverarbeitung, die neben der Systemtheorie auch den Entwurf digitaler Filter beinhalten, werden in [DeF88,Kam89,Schu88,Ste87] gegeben. Umfassendere Darstellungen der Systemtheorie finden sich in [Doe85,Fli91,Mar86,Unb83,Wil61]. Die Ausführungen dieses Kapitels beruhen weitgehend auf [Fli91,Kam89,Ste87,Unb83].

3.1 Diskrete lineare zeitinvariante Systeme

Dieser Abschnitt folgt der Darstellung in [Kam89]. Gegeben sei ein diskretes System H , welches jede Eingangsfolge $x(k)$ auf eine Ausgangsfolge $y(k)$ abbildet, Abb. 3.1. Statt von Folgen spricht man oft von diskreten Signalen. Man schreibt formal:

$$y(k) = H\{x(k)\}. \quad (3.1)$$

H ist linear, falls

$$H\{\alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k)\} = \alpha_1 H\{x_1(k)\} + \alpha_2 H\{x_2(k)\}. \quad (3.2)$$

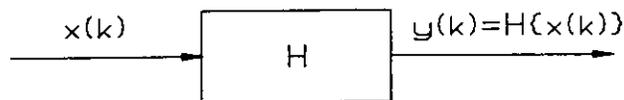


Abbildung 3.1: Das diskrete System H bildet jede Eingangsfolge $x(k)$ auf eine Ausgangsfolge $y(k)$ ab.

H ist translationsinvariant, falls

$$y(k) = H\{x(k)\} \Leftrightarrow y(k - k_0) = H\{x(k - k_0)\}. \quad (3.3)$$

Da die Folgen $x(k)$ und $y(k)$ in vielen Fällen die Abtastwerte zeitabhängiger Funktionen darstellen, spricht man im allgemeinen von Zeitinvarianz. Lineare zeitinvariante Systeme werden auch als LTI-Systeme bezeichnet, von engl. "Linear Time Invariant".

Die zu einer Impulsfolge

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

gehörige Ausgangsfolge

$$h(k) := H\{\delta(k)\} \quad (3.5)$$

wird als Impulsantwort des Systems H bezeichnet. LTI-Systeme sind durch ihre Impulsantwort eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich

$$y(k) = H\{x(k)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i). \quad (3.6)$$

Beweis: Für jede Folge $x(k)$ gilt:

$$x(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(k-i). \quad (3.7)$$

Mit Gl. 3.2 und 3.3 folgt daraus

$$H\{x(k)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)H\{\delta(k-i)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i).$$

Die Summe in Gl. 3.6 ist die diskrete Faltung der Folge $x(k)$ mit der Folge $h(k)$. Man schreibt die Faltungssumme oft als $x(k) * h(k)$:

$$x(k) * h(k) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i). \quad (3.8)$$

Die Faltungssumme ist kommutativ,

$$x(k) * h(k) = h(k) * x(k), \quad (3.9)$$

denn

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(k-i). \quad (3.10)$$

Man kann sich Gl. 3.6 veranschaulichen, indem man $x(i)$ als Ursache und $y(k)$ als Wirkung auffaßt. $h(k-i)$ überträgt dann die Ursache auf die Wirkung. In kausalen Systemen muß die Ursache der Wirkung vorausgehen. Es können dann nur die $x(i)$ zu $y(k)$ beitragen, für die $i \leq k$ gilt. In kausalen LTI-Systemen gilt deshalb

$$h(k-i) = 0 \text{ für } k < i \Leftrightarrow h(k) = 0 \text{ für } k < 0. \quad (3.11)$$

In Verallgemeinerung dieses Zusammenhangs werden alle Folgen $x(k)$, mit $x(k) = 0$ für alle $k < 0$, als kausal bezeichnet.

3.2 Die z-Transformation

3.2.1 Definition und Konvergenzbereiche

Gegeben sei eine Folge $x(k)$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$ konvergiere in einem Kreisring $r_1 < |z| < r_2$ der komplexen Zahlenebene. Dann wird die auf diesem Gebiet definierte analytische Funktion

$$X(z) := \mathcal{Z}\{x(k)\} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (3.12)$$

als z-Transformierte von $x(k)$ bezeichnet. Gl. 3.12 ist die Darstellung von $X(z)$ über eine Laurent-Reihe in dem Kreisring. In vielen Fällen läßt sich $X(z)$ über das Konvergenzgebiet hinaus analytisch fortsetzen und wird dann in anderen Kreisringen durch andere Laurent-Reihen dargestellt. Zu einer Funktion $X(z)$ gehören somit im allgemeinen je nach Konvergenzgebiet verschiedene Folgen, das heißt die z-Transformation ist nur im Zusammenhang mit der Angabe eines Konvergenzgebietes eindeutig. Die in der digitalen Signalverarbeitung vorkommenden z-Transformierten sind meist rationale Funktionen $X(z) = P(z)/Q(z)$, P und Q Polynome. Die Pole von $X(z)$ trennen dann die verschiedenen Konvergenzgebiete.

In der Praxis treten überwiegend rechtsseitige Signale $x(k)$ auf, das heißt es

gibt ein l mit $x(k) = 0$ für $k < l$. Sei $l < 0$ und $x(l) \neq 0$. Weiter sei vorausgesetzt, daß $x(k)$ mit $k \rightarrow \infty$ nicht stärker als exponentiell wächst. Es ist nun zweckmäßig, statt $X(z)$ zunächst $X(1/\zeta)$ zu betrachten. Aus Gl. 3.12 folgt dann:

$$X\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=l}^{-1} x(k)\zeta^k + \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\zeta^k. \quad (3.13)$$

Während die Taylor-Reihe in einem Kreisgebiet $|\zeta| < \rho$ konvergiert, stellt der Hauptteil der Reihe einen Pol der Ordnung $-l$ in $\zeta = 0$ dar. $X(1/\zeta)$ konvergiert also für $0 < |\zeta| < \rho$. $X(z)$ konvergiert demnach für $1/\rho < |z| < \infty$ und geht mit $|z| \rightarrow \infty$ wie z^{-l} . Im Falle kausaler Signale, $l \geq 0$, konvergiert $X(1/\zeta)$ auch in $\zeta = 0$.

Umgekehrt gilt: Ist $X(1/\zeta)$ in der gelochten Kreisscheibe, $0 < |\zeta| < \rho$, analytisch und hat einen Pol in $\zeta = 0$, so ist die diesem Konvergenzgebiet zugeordnete Folge $x(k)$ rechtsseitig, da dann die Existenz der Laurent-Reihe nach Gl. 3.13 gesichert ist. Ist $X(1/\zeta)$ im gesamten Kreisgebiet analytisch, so folgt die Kausalität von $x(k)$.

Für linksseitige Folgen lassen sich die entsprechenden Aussagen ableiten. Faßt man nun einen Pol von $X(1/\zeta)$ bei $\zeta = 0$ als einen Pol von $X(z)$ im Unendlichen auf und bezeichnet Folgen, die für $k > 0$ verschwinden, als antikausal, so kann man die Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

- Ein Pol z_i innerhalb des Konvergenzrings, $|z_i| \leq r_1$, entspricht einer kausalen Folge; $z_i = 0$ entspricht einer kausalen Folge endlicher Länge.
- Ein Pol z_i außerhalb des Konvergenzrings, $|z_i| \geq r_2$, entspricht einer antikausalen Folge; ein Pol im Unendlichen entspricht einer antikausalen Folge endlicher Länge.

Da $X(z)$ im allgemeinen mehrere Pole hat, setzt sich $x(k)$ aus den entsprechenden Teilfolgen zusammen, s. Abschnitt 3.2.2.

Eine quantitative Aussage über den Konvergenzradius macht das folgende Kriterium: Gibt es für ein kausales Signal $x(k)$ ein k_0 , ein r und ein M , so daß

$$|x(k)| \leq M r^k, \quad \text{für alle } k > k_0, \quad (3.14)$$

so konvergiert $\mathcal{Z}\{x(k)\}$ im Gebiet $r < |z|$.

Beispiel: Gegeben sei die Folge

$$x_2(k) = \begin{cases} 2^{k-1} & k \leq 0 \\ 1 & k > 0 \end{cases}.$$

Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^0 2^{k-1} z^{-k} = \frac{1}{2-z}$$

konvergiert für $|z| < 2$ (geometrische Reihe) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{z-1}$$

für $|z| > 1$. Man erhält also

$$X(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

mit dem Konvergenzring $1 < |z| < 2$. $X(z)$ ist jedoch in der gesamten Zahlenebene mit Ausnahme der beiden Pole bei $z = 1$ und $z = 2$ analytisch. In dem Gebiet $|z| > 2$ gilt

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_3(k) z^{-k},$$

mit

$$x_3(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ 1 - 2^{k-1} & k > 0 \end{cases},$$

und in dem Gebiet $|z| < 1$ ist

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) z^{-k},$$

mit

$$x_1(k) = \begin{cases} 2^{k-1} - 1 & k \leq 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}.$$

Abb. 3.2 zeigt die Konvergenzgebiete.

Bei der Behandlung der in Kap. 4 und 5 auftretenden Differenzgleichungen ist die "einseitige z-Transformierte" sehr nützlich: Sei $s(k)$ die Sprungfolge:

$$s(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}. \quad (3.15)$$

Dann wird

$$X_I(z) := \mathcal{Z}\{s(k)x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad (3.16)$$

als einseitige z-Transformierte der Folge $x(k)$ bezeichnet. Da $s(k)x(k)$ kausal ist, folgt, daß es stets ein $r > 0$ gibt, so daß $X_I(z)$ für alle $|z| > r$ konvergiert. Entsprechend gilt für alle Pole z_i von $X_I(z)$: $|z_i| \leq r$.

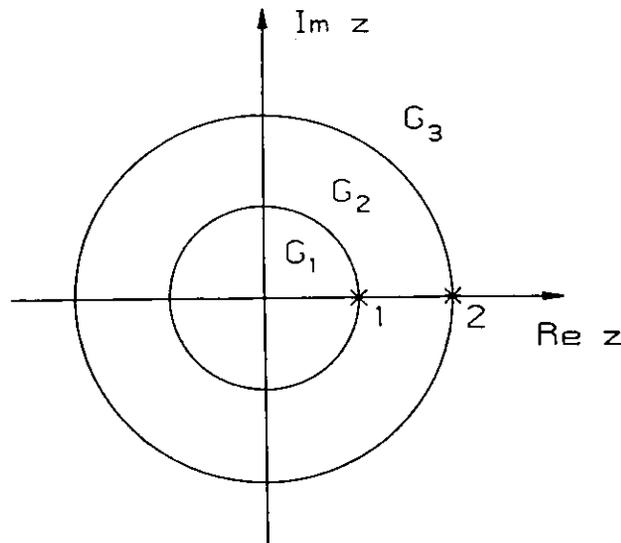


Abbildung 3.2: Die Konvergenzgebiete und Pole der z -Transformierten $X(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$. Je nach Gebiet sind $X(z)$ drei verschiedene Folgen $x_1(k)$, $x_2(k)$ und $x_3(k)$ zugeordnet. Da die beiden Pole außerhalb von Gebiet 1 liegen, ist $x_1(k)$ antikausal. Demgegenüber ist $x_3(k)$ kausal, während sich $x_2(k)$ aus einer kausalen und einer antikausalen Teilfolge zusammensetzt.

3.2.2 Die Rücktransformation

Gegeben seien eine Funktion $X(z)$ und ein Konvergenzgebiet $r_1 < |z| < r_2$, in dem $X(z)$ analytisch ist. Aus der Formel zur Berechnung der Koeffizienten einer Laurent-Reihe ergibt sich dann

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} := x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz, \quad (3.17)$$

wobei die Kurve C im Konvergenzgebiet verlaufen muß. Nach Anwendung des Residuensatzes wird daraus

$$x(k) = \sum_{|z_i| \leq r_1} \text{Res}(X(z) z^{k-1})_{z_i}. \quad (3.18)$$

Die z_i sind die Pole von $X(z) z^{k-1}$. Die Fälle $k > 0$ und $k < 0$ werden nun getrennt betrachtet:

1.) $k > 0$: z^{k-1} hat dann im Innern von C keinen Pol, so daß nur Pole von $X(z)$ auftreten. Für Pole erster Ordnung gilt:

$$\text{Res}(X(z) z^{k-1})_{z_i} = \lim_{z \rightarrow z_i} ((z - z_i) X(z) z^{k-1}) = z_i^{k-1} \lim_{z \rightarrow z_i} ((z - z_i) X(z)). \quad (3.19)$$

Für die in Kap. 4 und 5 entwickelte Theorie des zeitdiskreten Feedbacks reicht diese Formel aus, da dort nur einfache Pole auftreten. Pole höherer Ordnung, $l_i > 1$, kann man behandeln, indem man $X(z)$ und z^{k-1} um z_i entwickelt,

$$X(z) = \sum_{n=-l_i}^{\infty} a_{i,n}(z - z_i)^n,$$

$$z^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} z_i^{k-1-m} (z - z_i)^m,$$

und aus dem Produkt die Terme mit $(z - z_i)^{-1}$ aussortiert. Das Ergebnis ist:

$$\text{Res}(X(z)z^{k-1})_{z_i} = \sum_{n=\max(-l_i, -k)}^{-1} a_{i,n} \binom{k-1}{-n-1} z_i^{k+n}. \quad (3.20)$$

Speziell für $z_i = 0$ wird daraus mit $0^{k+n} = \delta(k+n)$:

$$\text{Res}(X(z)z^{k-1})_{z_i=0} = \begin{cases} a_{i,-k} & 0 < k \leq l_i \\ 0 & k > l_i \end{cases}. \quad (3.21)$$

Aus Gl. 3.18 und 3.20 folgt

$$x(k) = \sum_{|z_i| \leq r_1} \sum_{n=\max(-l_i, -k)}^{-1} a_{i,n} \binom{k-1}{-n-1} z_i^{k+n}, \quad \text{für } k > 0. \quad (3.22)$$

Mit $k \rightarrow \infty$ gehen die Binomialkoeffizienten wie k^{-n-1} . $x(k)$ verhält sich dann wie

$$x(k) \approx \sum_{|z_i| \leq r_1} \gamma_i k^{l_i-1} z_i^k, \quad (3.23)$$

wobei alle Vorfaktoren in den γ_i zusammengefaßt sind.

Für einfache wie für mehrfache Pole gilt also, daß die zugehörigen Folgen für große k durch Terme z_i^k bestimmt werden. Pole innerhalb des Einheitskreises führen somit zu stabilen, Pole außerhalb des Einheitskreises zu exponentiell anwachsenden Folgen.

2.) $k < 0$: Man betrachtet $X(1/\zeta)$. Aus Gl. 3.18 wird dann

$$x(k) = \sum_{|\zeta_i| \leq 1/r_2} \text{Res}\left(X\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^{-k-1}\right)_{\zeta_i}, \quad (3.24)$$

wobei die $\zeta_i := 1/z_i$ die Pole von $X(1/\zeta)$ sind. Daraus ergibt sich

$$x(k) = \sum_{|\zeta_i| \leq 1/r_2} \sum_{n=\max(-l_i, k)}^{-1} \alpha_{i,n} \binom{-k-1}{-n-1} \zeta_i^{-k+n}, \quad \text{für } k < 0. \quad (3.25)$$

Die $\alpha_{i,n}$ sind die Koeffizienten der Laurent-Reihe von $X(1/\zeta)$ um ζ_i .

Für $x(k=0)$ soll hier kein geschlossener Ausdruck abgeleitet werden. In der Praxis wird man zuerst $X(z) = P(z)/Q(z)$ in Partialbrüche zerlegen, die dann einzeln rücktransformiert werden können.

3.2.3 Einige Eigenschaften der z-Transformation

Linearität:

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k)\} = \alpha_1 \mathcal{Z}\{x_1(k)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{x_2(k)\}. \quad (3.26)$$

Verschiebung:

$$\mathcal{Z}\{x(k-i)\} = z^{-i} \mathcal{Z}\{x(k)\}. \quad (3.27)$$

Falls die $x(k)$ die Abtastwerte eines kontinuierlichen, zeitabhängigen Signals sind, so bedeutet diese Eigenschaft, daß eine Verzögerung des Signals um i Takte einen Faktor z^{-i} in der z-Transformierten erzeugt. Für die Feedbacksysteme der folgenden Kapitel sind die bei der Signalverarbeitung auftretenden Verzögerungen von entscheidender Bedeutung.

Betrachtet man im Zusammenhang mit einer Verschiebung die einseitige z-Transformierte, so müssen die Anfangswerte von $x(k)$ gesondert berücksichtigt werden. Es gilt:

$$\mathcal{Z}\{s(k)x(k-i)\} = z^{-i}(X_I(z) + \sum_{k=-i}^{-1} x(k)z^{-k}), \quad i > 0, \quad (3.28)$$

und

$$\mathcal{Z}\{s(k)x(k+i)\} = z^i(X_I(z) - \sum_{k=0}^{i-1} x(k)z^{-k}), \quad i > 0. \quad (3.29)$$

Reelle Folgen: Ist die Folge $x(k)$ reell, so gilt für $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$:

$$X(z^*) = X^*(z). \quad (3.30)$$

Insbesondere die Pole und Nullstellen von $X(z)$ sind dann also entweder reell, oder sie liegen komplex konjugiert.

Faltung: Sei

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k-n)x(n).$$

Dann konvergiert $Y(z)$ im Überlappungsgebiet der Konvergenzbereiche von $H(z)$ und $X(z)$, und es gilt:

$$\boxed{Y(z) = H(z)X(z)}. \quad (3.31)$$

Man rechnet dies leicht nach:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k-n)x(n)z^{-k} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k-n)z^{-k} \right) x(n) \\ &\stackrel{(3.27)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} H(z)x(n) \\ &= H(z)X(z). \end{aligned}$$

Im z -Bereich wird ein System mit Impulsantwort $h(k)$ demnach durch Multiplikation mit der z -Transformierten $H(z)$ beschrieben. Dieser Zusammenhang ist für die digitale Signalverarbeitung von großer Bedeutung. $H(z)$ wird als Systemfunktion oder Übertragungsfunktion des Systems bezeichnet.

Faltung im z -Bereich: Gegeben zwei Folgen $x_1(k)$ und $x_2(k)$, deren z -Transformierte $X_1(z)$ und $X_2(z)$ für $r_1 < |z| < R_1$ bzw. $r_2 < |z| < R_2$ konvergieren. Dann gilt für die z -Transformierte des Produkts $x(k) = x_1(k)x_2(k)$:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_1(k)x_2(k)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(\zeta)X_2\left(\frac{z}{\zeta}\right)\zeta^{-1}d\zeta. \quad (3.32)$$

Dabei muß die Kurve C im gemeinsamen Konvergenzbereich von $X_1(\zeta)$ und $X_2(z/\zeta)$ (für festes z als Funktion von ζ aufgefaßt) verlaufen. Dieser existiert nur, falls

$$r_1 r_2 < |z| < R_1 R_2,$$

wodurch der Konvergenzbereich von $X(z)$ bestimmt ist. Man erhält Gl. 3.32 aus der Definition von $X(z)$,

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k)z^{-k},$$

indem man für $x_1(k)$ nach Gl. 3.17 einsetzt,

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(\zeta)\zeta^{k-1}d\zeta \right) x_2(k)z^{-k},$$

und die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht:

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(\zeta) \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k} \right)}_{X_2(z/\zeta)} \zeta^{-1} d\zeta.$$

3.2.4 Die Differenzgleichung des harmonischen Oszillators

Differenzgleichungen werden beispielsweise in [Schu88] ausführlich behandelt. Hier soll nur die Differenzgleichung des harmonischen Oszillators,

$$\boxed{x(k+2) - 2 \cos(\Omega T_A) x(k+1) + x(k) = 0}, \quad (3.33)$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x(1) = x_1$ gelöst werden. Es gilt gemäß Gl. 3.16 und 3.29:

$$\mathcal{Z}\{s(k)x(k+1)\} = -x_0 z + z X_I(z), \quad (3.34)$$

und

$$\mathcal{Z}\{s(k)x(k+2)\} = -x_1 z - x_0 z^2 + z^2 X_I(z). \quad (3.35)$$

Wird Gl. 3.33 mit $s(k)$ multipliziert und dann z-transformiert, so ergibt sich damit:

$$X_I(z) = \frac{x_0 z^2 + (x_1 - 2 \cos(\Omega T_A) x_0) z}{z^2 - 2 \cos(\Omega T_A) z + 1}. \quad (3.36)$$

Die Pole liegen bei $z_{\pm} = e^{\pm j \Omega T_A}$. $s(k)x(k)$ muß deshalb aus Folgen

$$s(k)e^{\pm j \Omega k T_A} \quad \text{bzw.} \quad s(k) \sin(\Omega k T_A) \quad \text{und} \quad s(k) \cos(\Omega k T_A)$$

zusammengesetzt sein. Mit

$$\mathcal{Z}\{s(k)e^{\pm j \Omega k T_A}\} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{\pm j \Omega T_A} z^{-1})^k = \frac{z}{z - e^{\pm j \Omega T_A}}, \quad \text{für } |z| > 1, \quad (3.37)$$

erhält man die einseitigen z-Transformierten von Sinus und Kosinus:

$$S(z) := \mathcal{Z}\{s(k) \sin(\Omega k T_A)\} = \frac{\sin(\Omega T_A) z}{z^2 - 2 \cos(\Omega T_A) z + 1}, \quad (3.38)$$

und

$$C(z) := \mathcal{Z}\{s(k) \cos(\Omega k T_A)\} = \frac{z^2 - \cos(\Omega T_A) z}{z^2 - 2 \cos(\Omega T_A) z + 1}. \quad (3.39)$$

Der Ansatz

$$X_I(z) = A_1 S(z) + A_2 C(z) \\ \Leftrightarrow s(k)x(k) = A_1 s(k) \sin(\Omega k T_A) + A_2 s(k) \cos(\Omega k T_A)$$

führt dann durch Vergleich mit Gl. 3.36 auf

$$A_2 = x_0, \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{x_1 - \cos(\Omega T_A)x_0}{\sin(\Omega T_A)}, \quad \text{für } \Omega T_A \neq n\pi.$$

Damit ist die Lösung von Gl. 3.33 gefunden. Sie ist eindeutig, da aus $x(0)$ und $x(1)$ alle anderen Werte berechnet werden können.

Gl. 3.33 beschreibt also die Folge, die entsteht, wenn ein harmonischer Oszillator der Frequenz Ω in Intervallen T_A abgetastet wird. Sie stellt die Grundlage für die systemtheoretische Behandlung des zeitdiskreten Feedbacks dar.

3.3 Der Zusammenhang mit kontinuierlichen Systemen

Der Zusammenhang zwischen kontinuierlichen und diskreten LTI-Systemen ist für die vorliegende Arbeit sehr wichtig, denn in den Feedbacksystemen, um die es hier geht, werden kontinuierliche Oszillatoren, die Bunche, diskret rückgekoppelt, und zwar über einen Feedbackpfad, der sowohl kontinuierliche als auch diskrete Übertrager enthält, s. Kap. 5. Eine ausführliche Gegenüberstellung kontinuierlicher und diskreter Systeme findet sich in [Fli91].

Die Theorien diskreter und kontinuierlicher LTI-Systeme sind strukturell sehr ähnlich. Der diskrete Parameter k entspricht dem kontinuierlichen Parameter t , die Summe $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ dem Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dt$ und die z -Transformation mit der komplexen Variablen z der Laplace-Transformation mit der komplexen Variablen s , wobei beide Transformationen durch

$$z = e^{sT_A}$$

miteinander verknüpft sind.

Um die Sprechweise zu vereinfachen, wird im folgenden t als Zeit betrachtet. Der Index "c", von engl. "continuous", dient zur Unterscheidung kontinuierlicher Funktionen von den entsprechenden Folgen.

3.3.1 Kontinuierliche LTI-Systeme und die Laplace-Transformation

Ein kontinuierliches LTI-System H wird durch seine Impulsantwort $h_c(t)$ charakterisiert:

$$h_c(t) := H\{\delta_c(t)\}. \quad (3.40)$$

$\delta_c(t)$ ist die durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t)x_c(t)dt = x_c(0) \quad (3.41)$$

definierte "δ-Funktion". ¹ H bildet jedes Eingangssignal $x_c(t)$ auf ein Ausgangssignal $y_c(t)$ ab. Der Zusammenhang ist durch das Faltungsintegral

$$y_c(t) = x_c(t) * h_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau)h_c(t - \tau)d\tau \quad (3.42)$$

gegeben, vgl. Gl. 3.6.

Die Laplace-Transformierte $X_c(s)$ der Funktion $x_c(t)$ existiert, falls das Integral

$$X_c(s) := \mathcal{L}\{x_c(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)e^{-st}dt \quad (3.43)$$

auf einem Streifen $\alpha_1 < \text{Re}(s) < \alpha_2$ (α_1, α_2 reell) der komplexen Zahlenebene konvergiert. In vielen Fällen läßt sich $X_c(s)$ über diesen Streifen hinaus analytisch fortsetzen und entspricht dort anderen Zeitfunktionen. Im folgenden werden die Abkürzungen

$$\alpha := \text{Re}(s), \quad \text{und} \quad \omega := \text{Im}(s)$$

benutzt. Die inverse Laplace-Transformation ist durch

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_c(s)\} := x_c(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X_c(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(\alpha + j\omega)e^{(\alpha+j\omega)t}d\omega \quad (3.44)$$

gegeben. Der Integrationsweg, eine Parallele zur imaginären Achse im Abstand α , kann im Konvergenzbereich von $X_c(s)$ frei gewählt werden. Man beweist diese Gleichung, indem man für $X_c(\alpha + j\omega)$ nach Gl. 3.43 einsetzt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t')}d\omega = 2\pi\delta_c(t - t') \quad (3.45)$$

ausnutzt.

¹Mathematisch betrachtet ist $\delta_c(t)$ keine Funktion, sondern eine Distribution, s. beispielsweise [Fli91,Unb83].

Falls die imaginäre Achse im Konvergenzbereich liegt, erhält man mit $\alpha = 0$, das heißt $s = j\omega$, aus Gl. 3.43 und 3.44 als Spezialfall die Gleichungen der Fourier-Transformation. Umgekehrt kann man dann die Laplace-Transformierte $X_c(s)$ als die analytische Fortsetzung der Fourier-Transformierten $X_c(j\omega)$ von der imaginären Achse in die komplexe Zahlenebene betrachten.

Ist $X_c(s)$ eine rationale Funktion,

$$X_c(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{Grad } P < \text{Grad } Q,$$

so läßt sich der Integrationsweg von Gl. 3.44 im Unendlichen schließen und der Residuensatz anwenden. Es gilt dann

$$x_c(t) = \mp \sum_{\text{Re}(s_i) \gtrless \alpha} \text{Res}(X_c(s)e^{st})_{s_i}, \quad \text{für } t \gtrless 0, \quad (3.46)$$

wobei die s_i die Pole von $X_c(s)$ sind.

Die in Abschnitt 3.2.3 aufgeführten Eigenschaften der z-Transformation lassen sich direkt auf die Laplace-Transformation übertragen. Sie ist ebenfalls linear; eine Verzögerung von $x_c(t)$ um t_0 erzeugt einen Faktor e^{-st_0} in $X_c(s)$, das heißt

$$\mathcal{L}\{x_c(t - t_0)\} = e^{-st_0} X_c(s), \quad (3.47)$$

und die Realität von $x_c(t)$ bedingt, daß $X_c(s^*) = X_c^*(s)$.

Des weiteren besagt der Faltungssatz für kontinuierliche Funktionen, daß

$$y_c(t) = x_c(t) * h_c(t) \Leftrightarrow Y_c(s) = H_c(s)X_c(s) \quad (3.48)$$

unter der Voraussetzung, daß die Konvergenzstreifen von $X_c(s)$ und $H_c(s)$ einen Überlappungsbereich aufweisen, in dem $Y_c(s)$ dann konvergiert. $H_c(s)$ wird wieder als Systemfunktion oder Übertragungsfunktion des Systems H bezeichnet.

Der Multiplikation zweier Funktionen $x_{c,1}(t)$ und $x_{c,2}(t)$ im Zeitbereich entspricht umgekehrt die Faltung ihrer Laplace-Transformierten im s -Bereich:

$$x_c(t) = x_{c,1}(t)x_{c,2}(t) \Leftrightarrow X_c(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha' - j\infty}^{\alpha' + j\infty} X_{c,1}(\sigma)X_{c,2}(s - \sigma)d\sigma, \quad (3.49)$$

vgl. Gl. 3.32.

α' ist so zu wählen, daß der Integrationsweg im gemeinsamen Konvergenzbereich von $X_{c,1}(\sigma)$ und $X_{c,2}(s - \sigma)$ verläuft. Falls $X_{c,1}(s)$ für $\alpha_1 < \text{Re}(s) < \beta_1$ und $X_{c,2}(s)$ für $\alpha_2 < \text{Re}(s) < \beta_2$ konvergieren, so existiert dieser gemeinsame Bereich für

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \text{Re}(s) < \beta_1 + \beta_2,$$

wodurch der Konvergenzbereich von $X_c(s)$ definiert ist. Daraus folgt insbesondere, daß $x_c(t)$ Fourier-transformierbar ist, falls $x_{c,1}(t)$ und $x_{c,2}(t)$ dies sind. Wählt man dann den Integrationsweg entlang der imaginären Achse, so wird aus Gl. 3.49

$$X_c(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{c,1}(j\omega') X_{c,2}(j\omega - j\omega') d\omega'. \quad (3.50)$$

In dieser Form erkennt man, daß es sich um eine Faltung handelt.

3.3.2 Der Übergang zwischen kontinuierlichen und diskreten Systemen

Das Signal $x_c(t)$ werde mit einem Analog-Digital-Converter (ADC) zu den Zeitpunkten

$$t_k := kT_A, \quad k = \dots - 1, 0, 1, \dots,$$

abgetastet. Am Ausgang des ADC erhält man dann eine Folge von Zahlen $x(k)$, die durch

$$x(k) = x_c(kT_A)$$

gegeben ist. Dieser Vorgang wird formal durch die Multiplikation mit der "periodischen δ -Funktion" $\delta_p(t)$ beschrieben:

$$x_d(t) := x_c(t)\delta_p(t); \quad (3.51)$$

$$\delta_p(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_c(t - kT_A). \quad (3.52)$$

Der Index "d" steht für "diskret". Für die Laplace-Transformierte von $x_d(t)$ gilt:

$$X_d(s) := \mathcal{L}\{x_d(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta_p(t)e^{-st} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-skT_A}. \quad (3.53)$$

Sie wird deshalb auch als zeitdiskrete Laplace-Transformierte der Folge $x(k)$ bezeichnet. Für festes α ist $X_d(\alpha + j\omega)$ eine periodische Funktion von ω mit der Periode

$$\omega_A := \frac{2\pi}{T_A}, \quad (3.54)$$

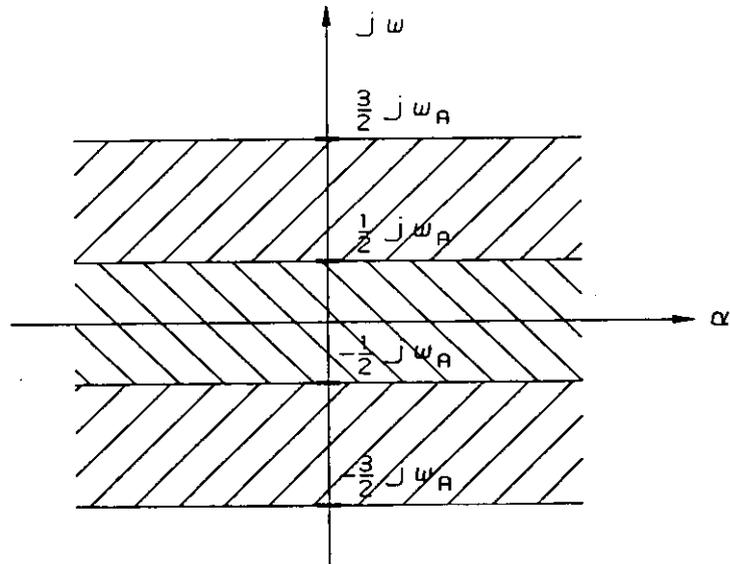


Abbildung 3.3: Die Periodizität der zeitdiskreten Laplace-Transformierten $X_d(s)$ unterteilt die s -Ebene in horizontale Streifen der Breite ω_A .

denn aus Gl. 3.53 folgt

$$X_d(s + nj\omega_A) = X_d(s), \quad n \text{ ganzzahlig.} \quad (3.55)$$

Jeder Periode entspricht ein horizontaler Streifen der Breite ω_A in der s -Ebene, s. Abb. 3.3. Der Übergang zur z -Transformierten $X(z)$ kann nun mit Hilfe der Abbildung

$$\boxed{z := e^{sT_A}} \quad (3.56)$$

vollzogen werden. Der Vergleich von Gl. 3.12 mit Gl. 3.53 ergibt dann

$$\boxed{X(z) = X(e^{sT_A}) = X_d(s).} \quad (3.57)$$

Jeder der Streifen in der s -Ebene wird dabei auf die gesamte z -Ebene abgebildet, die rechte s -Halbebene auf das Äußere des Einheitskreises, die linke Halbebene auf das Innere, die imaginäre Achse auf den Einheitskreis. Den vertikalen Konvergenzstreifen der Laplace-Transformation entsprechen die Konvergenzringe der z -Transformation und der Integration von $\alpha - j\infty$ nach $\alpha + j\infty$ das Kreisintegral bei $|z| = e^{\alpha T_A}$.

Konvergiert $X_d(s)$ auf der imaginären Achse, also $X(z)$ auf dem Einheitskreis, so ist das Spektrum des diskreten Signals $x(k)$ durch die periodische Funktion

$$\mathcal{F}\{x(k)\} = X_d(j\omega) = X(e^{j\omega T_A}) \quad (3.58)$$

gegeben und wird als zeitdiskrete Fourier-Transformierte von $x(k)$ bezeichnet.

An dieser Stelle erhält man einen interessanten Zusammenhang mit der Beschleunigerphysik, wenn man ein zeitlich begrenztes Signal $x(k)$ betrachtet: $k = 0 \dots N - 1$. Den N unabhängigen Werten im Zeitbereich entsprechen dann N unabhängige Werte im Frequenzbereich. Wählt man die Frequenzen äquidistant zwischen 0 und ω_A , so wird aus Gl. 3.53 die "diskrete Fourier-Transformation" (DFT):

$$X_d(jr \frac{\omega_A}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-jr \frac{\omega_A}{N} k T_A}, \quad r = 0 \dots N - 1. \quad (3.59)$$

Vergleich mit Abschnitt 2.4 zeigt, daß es sich bei der dort angegebenen Entwicklung der Bunchschwingungen nach Moden im wesentlichen um eine diskrete Fourier-Transformation handelt.

Die Umkehrung der zeitdiskreten Laplace-Transformation ist durch

$$x(k) = \frac{T_A}{2\pi j} \int_{\alpha - j\pi/T_A}^{\alpha + j\pi/T_A} X_d(s) e^{sk T_A} ds = \frac{T_A}{2\pi} \int_{-\pi/T_A}^{\pi/T_A} X_d(\alpha + j\omega) e^{(\alpha + j\omega)k T_A} d\omega \quad (3.60)$$

gegeben. α muß wieder im Konvergenzstreifen von $X_d(s)$ liegen. Man beweist diese Beziehung, indem man für $X_d(\alpha + j\omega)$ nach Gl. 3.53 einsetzt und

$$\int_{-\pi/T_A}^{\pi/T_A} e^{j\omega(k-k')T_A} d\omega = \frac{2\pi}{T_A} \delta(k - k') \quad (3.61)$$

ausnutzt. Gl. 3.60 entsteht ebenfalls, wenn man das Kreisintegral von Gl. 3.17 mit

$$z = e^{(\alpha + j\omega)T_A}$$

durch ω parametrisiert. Für $\alpha = 0$ ist Gl. 3.60 die Formel zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten $x(k)$ der periodischen Funktion $X_d(j\omega)$, das heißt die Umkehrformel der zeitdiskreten Fourier-Transformation.

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen $X_d(s)$ und $X_c(s)$ ergibt sich, wenn man die periodische δ -Funktion formal in eine Fourier-Reihe entwickelt,²

$$\delta_p(t) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_A t}, \quad (3.62)$$

²In [Fli91] wird gezeigt, wie man diese Entwicklung mit Hilfe der Distributionentheorie mathematisch exakt durchführt.

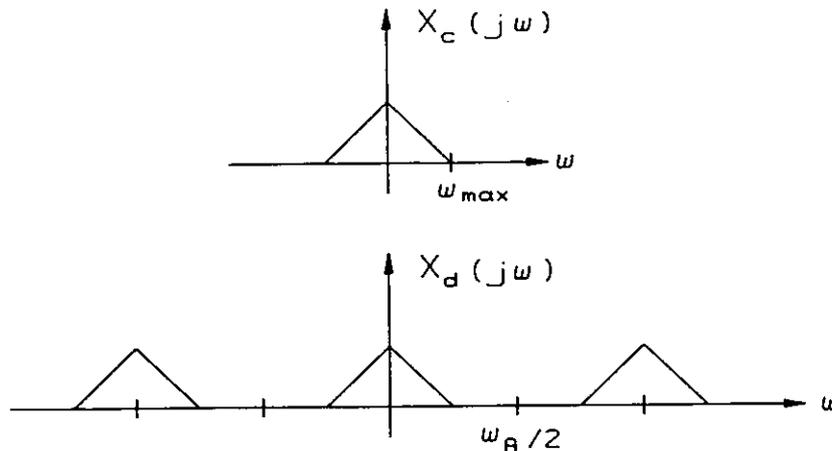


Abbildung 3.4: Die Spektren eines kontinuierlichen Signals $x_c(t)$ und der zugehörigen Abtastfolge $x(k)$. Da $\omega_{\max} < \omega_A/2$, treten in $X_d(j\omega)$ keine spektralen Überschneidungen auf. (Abtasttheorem!)

und in Gl. 3.53 einsetzt. Man findet:

$$X_d(s) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-(s-jn\omega_A)t} dt$$

$$\Rightarrow X_d(s) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(s - jn\omega_A). \quad (3.63)$$

Für $s = j\omega$ kann man sich dieses Ergebnis veranschaulichen: Das Spektrum $X_d(j\omega)$ der Folge $x(k)$ entsteht aus der Überlagerung unendlich vieler, um $jn\omega_A$ verschobener Spektren $X_c(j\omega)$ des zugehörigen kontinuierlichen Signals $x_c(t)$, s. Abb. 3.4.

Falls die maximale Frequenz des kontinuierlichen Signals, ω_{\max} , kleiner als die halbe Abtastfrequenz ist,

$$\omega_{\max} < \frac{\omega_A}{2}, \quad (3.64)$$

kommt es in $X_d(j\omega)$ nicht zu spektralen Überschneidungen. Prinzipiell ist dann die exakte Rekonstruktion von $x_c(t)$ aus $x(k)$ mit einem idealen Tiefpaß,

$$H_{c,TP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_A/2 \leq \omega \leq \omega_A/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (3.65)$$

der die Frequenzanteile $|\omega| > \omega_A/2$ wieder entfernt, möglich:

$$X_c(j\omega) = H_{c,TP}(j\omega)X_d(j\omega). \quad (3.66)$$

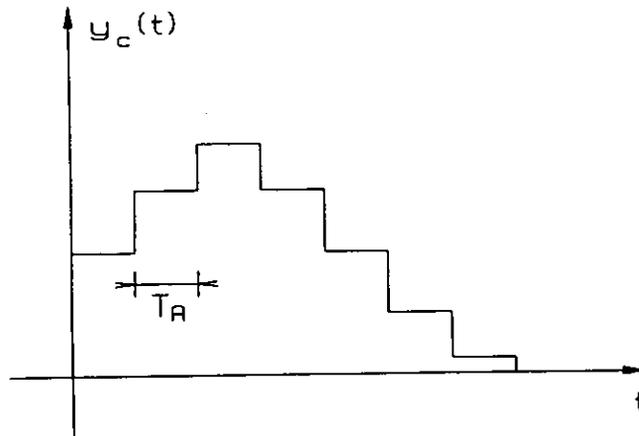


Abbildung 3.5: Das Ausgangssignal eines mit der Frequenz $\nu_A = 1/T_A$ getakteten DAC besteht aus einer Folge von Rechtecken der Breite T_A .

Durch die Abtastung geht in diesem Fall also keine Information über das Signal $x_c(t)$ verloren. Deshalb wird Gl. 3.64 als Abtasttheorem bezeichnet. Man vermeidet spektrale Überschneidungen, indem man durch einen analogen Tiefpaß, Anti-Alias-Filter genannt, vor dem ADC eine Bandbegrenzung auf $|\omega| < \omega_A/2$ vornimmt.

In der Praxis erfolgt die Umwandlung eines diskreten Signals $x(k)$ in ein kontinuierliches Signal $y_c(t)$ mit einem Digital-Analog-Converter (DAC), der im allgemeinen mit der gleichen Frequenz $\nu_A := 1/T_A$ wie der ADC getaktet wird. $y_c(t)$ besteht dann aus einer Folge von Rechteckfunktionen der Breite T_A und der Höhe $x(k)$, s. Abb. 3.5:

$$y_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)r_c(t - kT_A), \quad (3.67)$$

mit

$$r_c(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.68)$$

Weil man $y_c(t)$ als Faltung von $x_d(t)$ mit $r_c(t)$ auffassen kann,

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t - kT_A - \tau)}_{x_d(t-\tau)} r_c(\tau) d\tau,$$

gilt nach Gl. 3.48 für das Spektrum von $y_c(t)$:

$$Y_c(j\omega) = X_d(j\omega)R_c(j\omega), \quad (3.69)$$

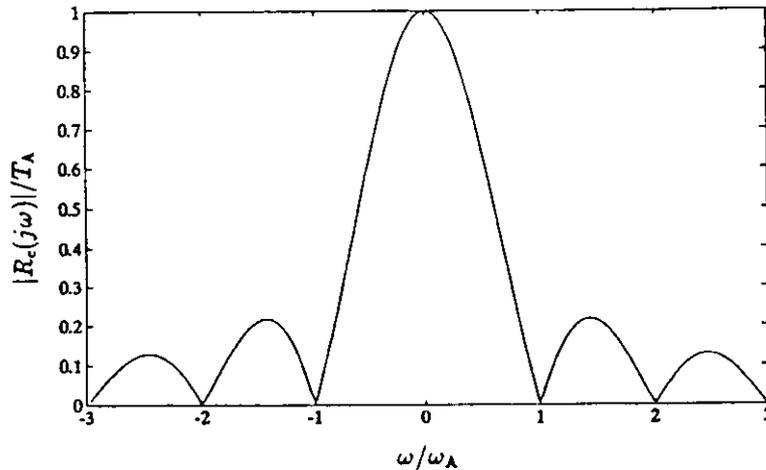


Abbildung 3.6: Das Spektrum der Rechteckfunktion $r_c(t)$.

mit

$$R_c(j\omega) := \mathcal{F}\{r_c(t)\} = \frac{1 - e^{-j\omega T_A}}{j\omega} = 2e^{-j\omega T_A/2} \frac{\sin(\omega T_A/2)}{\omega}. \quad (3.70)$$

Abb. 3.6 zeigt den Amplitudengang von $R_c(j\omega)$. Mit einem nachgeschalteten analogen Rekonstruktionstiefpaß filtert man aus, was in $Y_c(j\omega)$ noch von den Aliasfrequenzen $|\omega| > \omega_A/2$ übrig ist. Dadurch werden die Stufen in Abb. 3.5 geglättet.

Wie aus Abb. 3.6 hervorgeht, unterdrückt die Multiplikation mit $R_c(j\omega)$ jedoch teilweise auch die zur Rekonstruktion benötigten Signalfrequenzen unterhalb der halben Abtastfrequenz. Diesen Effekt kann man durch ein digitales Korrekturfilter vor dem DAC ausgleichen. Eine andere Möglichkeit besteht in der Wahl von ω_A deutlich größer als $2\omega_{\max}$, so daß $|R_c(j\omega)|$ bis ω_{\max} praktisch konstant ist. In diesem Fall sind auch die Anforderungen an die Flankensteilheit des Rekonstruktionstiefpasses geringer. Abb. 3.7 zeigt das Schema eines Systems zur digitalen Verarbeitung analoger Signale.

3.4 Digitale Filter

Mit Hilfe von diskreten LTI-Systemen nach Abb. 3.1 lassen sich Filterfunktionen wie Tiefpaß, Hochpaß oder Bandpaß realisieren. Solche Systeme werden deshalb als digitale Filter bezeichnet. Man unterscheidet nach der Form des Algorithmus nichtrekursive und rekursive Filter. Hier werden nur nichtrekursive Filter kurz diskutiert, weil rekursive Filter in dieser Arbeit nicht verwendet

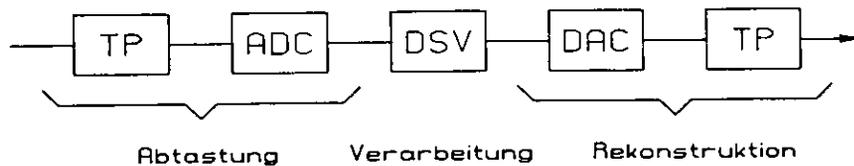


Abbildung 3.7: Ein digitales Signalverarbeitungssystem mit analogem Ein- und Ausgang. "TP" steht für "Tiefpaß".

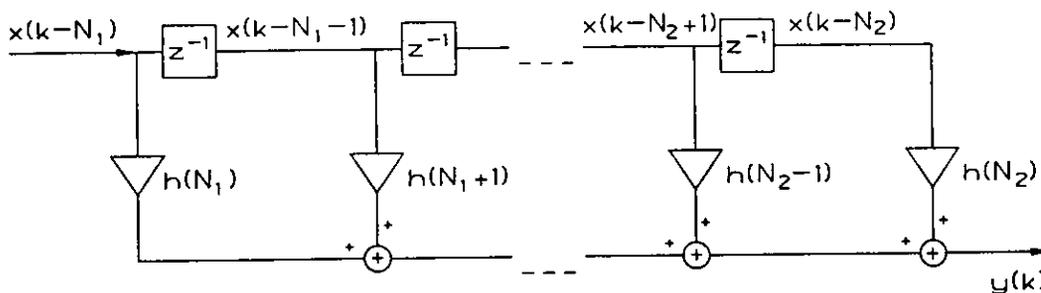


Abbildung 3.8: Das Blockdiagramm eines FIR-Filters: Zur Auswertung der Faltungssumme werden Multiplizierer, Addierer und Verzögerungsglieder benötigt. Eine Verzögerung um einen Takt T_A wird gemäß Gl. 3.27 durch z^{-1} symbolisiert.

werden.

Der nichtrekursive Algorithmus berechnet die Ausgangsfolge $y(k)$ über die direkte Auswertung der Faltungssumme von Gl. 3.6:

$$y(k) = \sum_{i=N_1}^{N_2} h(i)x(k-i). \quad (3.71)$$

Die Elemente der Impulsantwort $h(k)$ werden als Filterkoeffizienten bezeichnet. Ihre Zahl ist in der Praxis begrenzt, da $y(k)$ in endlicher Zeit berechnet werden muß. Man spricht deshalb auch von FIR-Filtern (Finite Impulse Response). Abb. 3.8 zeigt das Blockdiagramm eines FIR-Filters.

Falls das Filter in Echtzeit arbeiten soll, das heißt $y(k)$ zur gleichen Zeit $t_k = kT_A$ wie $x(k)$ zur Verfügung stehen soll, kann man zur Berechnung von $y(k)$ nicht die "zukünftigen" Werte $x(k+1)$, $x(k+2)$, ... benutzen. $h(k)$ muß dann kausal sein, also $N_1 \geq 0$. Eine zusätzliche Verzögerung entsteht allerdings aus der Rechenzeit, die zur Auswertung der Faltungssumme benötigt wird.

Die Übertragungsfunktion eines digitalen Filters ist durch die zeitdiskrete Fou-

rier-Transformierte der Impulsantwort gegeben. Aus Gl. 3.53 folgt

$$H_d(j\omega) = H(e^{j\omega T_A}) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)e^{-j\omega k T_A}. \quad (3.72)$$

Sind die Filterkoeffizienten reell und um $k = 0$ symmetrisch, $h(-k) = h(k)$, so ist auch $H_d(j\omega)$ reell und damit die Phase des Filters 0. Mit $N := N_2 = -N_1$ erhält man

$$H_d(j\omega) = h(0) + 2 \sum_{k=1}^N h(k) \cos \omega k T_A, \quad (3.73)$$

und

$$\varphi(\omega) := \arg(H_d(j\omega)) = 0. \quad (3.74)$$

Für die Realisation eines solchen Filters in Echtzeit muß $h(k)$ um $\Delta k = N$ nach rechts verschoben werden:

$$h(k) \rightarrow \tilde{h}(k) := h(k - N).$$

$\tilde{h}(k)$ ist um $k = N$ symmetrisch:

$$\tilde{h}(N - k) = \tilde{h}(N + k).$$

Aus dem nicht-kausalen Algorithmus

$$y(k) = \sum_{i=-N}^N h(i)x(k - i) \quad (3.75)$$

wird dadurch der kausale Algorithmus

$$\tilde{y}(k) := \sum_{i=0}^{2N} \tilde{h}(i)x(k - i). \quad (3.76)$$

$\tilde{y}(k)$ ist gegen $y(k)$ um N Takte, das heißt um $\Delta t = NT_A$ verzögert:

$$\tilde{y}(k) = \sum_{i=-N}^N h(i)x(k - N - i) = y(k - N).$$

Diese Verzögerung entspricht einem Phasenfaktor $e^{-j\omega NT_A}$ in der Übertragungsfunktion, vgl. Gl. 3.27 und 3.47:

$$\tilde{H}_d(j\omega) = \sum_{k=0}^{2N} \tilde{h}(k)e^{-j\omega k T_A} = \sum_{k=-N}^N h(k)e^{-j\omega(k+N)T_A} = e^{-j\omega NT_A} H_d(j\omega). \quad (3.77)$$

Somit ist die Phase nun nicht mehr 0, sondern hängt linear von ω ab:

$$\bar{\varphi}(\omega) := \arg(\bar{H}_d(j\omega)) = -\omega NT_A. \quad (3.78)$$

Bei dieser Betrachtung wurde die Zeit, die beispielsweise der Signalprozessor zur Berechnung der Faltungssumme benötigt, vernachlässigt. Soll diese Zeit mit berücksichtigt werden, so muß sie zu der o. a. systemtheoretischen Verzögerung um NT_A hinzuaddiert werden.

Die Linearphasigkeit ist ein wichtiger Vorteil symmetrischer FIR-Filter gegenüber analogen Filtern und rekursiven Digitalfiltern, die einen nicht-linearen Phasengang aufweisen.

Der im Zentrum von Kap. 4 stehende digitale Phasenschieber ist zwar ein nicht-symmetrisches FIR-Filter, aber die dort aus den Verzögerungen im Feedbackpfad folgenden linearen Phasenfaktoren sind dennoch von entscheidender Bedeutung für das Feedback.

Der Entwurf eines FIR-Filters ist im Prinzip sehr einfach: Ist $H_d(j\omega)$ im Frequenzintervall $[-\pi/T_A; \pi/T_A]$ vorgegeben, so werden die Koeffizienten gemäß Gl. 3.60 nach

$$h(k) = \frac{T_A}{2\pi} \int_{-\pi/T_A}^{\pi/T_A} H_d(j\omega) e^{j\omega k T_A} d\omega \quad (3.79)$$

berechnet. Die so entstandene Folge ist jedoch im allgemeinen unendlich lang und muß begrenzt werden. $H_d(j\omega)$ wird dann nur noch angenähert.

Beispiel: Die Übertragungsfunktion eines idealen digitalen Tiefpasses ist

$$H_{\text{TP,d}}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_g < \omega_A/2 \\ 0 & \omega_g < |\omega| \leq \omega_A/2 \end{cases}. \quad (3.80)$$

Aus Gl. 3.79 erhält man

$$h_{\text{TP}}(k) = \frac{\sin(\omega_g k T_A)}{k\pi}, \quad k = -\infty \dots \infty. \quad (3.81)$$

Am einfachsten begrenzt man den Koeffizientensatz, indem man die Koeffizienten mit $|k| > N$ wegläßt. Da $h_{\text{TP}}(k) = h_{\text{TP}}(-k)$ ergibt sich dann entsprechend Gl. 3.73

$$H_{\text{TP,N,d}}(j\omega) = h_{\text{TP}}(0) + 2 \sum_{k=1}^N h_{\text{TP}}(k) \cos(\omega k T_A). \quad (3.82)$$

$H_{\text{TP,N,d}}(j\omega)$ stellt im Sinne des kleinsten quadratischen Fehlers die beste, mit $2N + 1$ Koeffizienten realisierbare Approximation des idealen Tiefpasses dar,

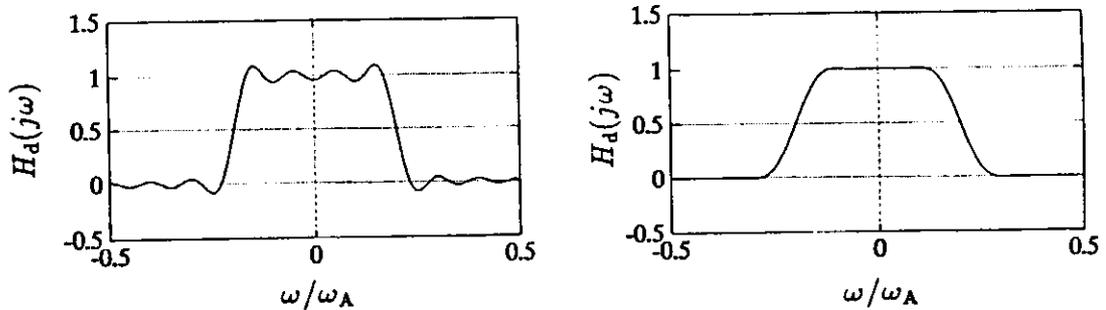


Abbildung 3.9: Vergleich des Frequenzgangs des digitalen Tiefpasses mit $N = 10$ und Rechteckfenster (links) bzw. Hanning-Fenster (rechts). Das Hanning-Fenster führt zu einem geglätteten Frequenzgang auf Kosten verringerter Flankensteilheit. $\omega_g = \omega_A/5$.

s. Abb. 3.9. Die Folge des "Abschneidens" der Koeffizienten bei $\pm N$ sind Schwingungen sowohl im Durchlaß- als auch im Sperrbereich. Man kann das Abschneiden auch als Multiplikation der Folge $h_{TP}(k)$ mit dem "Rechteckfenster"

$$r_N(k) := \begin{cases} 1 & -N \leq k \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.83)$$

auffassen. Dem entspricht im Frequenzbereich die Faltung von $H_{TP,d}(j\omega)$ mit der zeitdiskreten Fourier-Transformierten von $r_N(k)$:

$$R_{N,d}(j\omega) = \sum_{k=-N}^N e^{-j\omega k T_A} = \frac{\sin(\omega(2N+1)T_A/2)}{\sin(\omega T_A/2)}. \quad (3.84)$$

$R_{N,d}(j\omega)$ enthält die Schwingungen, die man in $H_{TP,N,d}(j\omega)$ wiederfindet. Man kann deshalb die Übertragungsfunktion glätten, indem man eine Fensterfunktion mit möglichst glattem Übergang an den Rändern $\pm N$ benutzt, deren zeitdiskrete Fourier-Transformierte dann entsprechend weniger Schwingungen enthält. Eine von vielen Möglichkeiten ist das "Hanning-Fenster":

$$f_H(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi k}{N})) & -N \leq k \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.85)$$

Abb. 3.9 zeigt das Ergebnis: Die erreichte Glättung geht mit einer verringerten Flankensteilheit einher.

Weitere Einzelheiten zum Entwurf nichtrekursiver Filter finden sich in der angegebenen Literatur über digitale Signalverarbeitung. Für die Praxis existieren verschiedene numerische Entwurfsprogramme.

Da in realen Systemen mit Digitalzahlen endlicher Wortlänge gearbeitet werden muß, entsteht in digitalen Filtern das Problem der Rundungsfehler. Die Rundung der Filterkoeffizienten verändert die Übertragungsfunktion und die Rundung von Daten und Zwischenergebnissen stellt eine Rauschquelle dar, das "Quantisierungsrauschen". Beide Effekte lassen sich, wie auch in dieser Arbeit geschehen, durch Wahl einer hinreichenden Wortlänge auf ein vernachlässigbares Maß reduzieren. Deshalb soll auf diesen Punkt hier nicht weiter eingegangen werden.

Kapitel 4

Das Einzelbunchfeedback

Die fünf Abschnitte dieses Kapitels behandeln folgende Themen:

- Das Prinzip des Feedbacks, das Verhältnis zwischen Einzelbunch- und Multibunchfeedback und die grundlegenden Phasen- und Laufzeitbeziehungen
- Der Entwurf eines digitalen Phasenschiebers unter Berücksichtigung der speziellen Bedingungen des Feedbacks
- Die Beschreibung des Einzelbunchfeedbacks mit den Mitteln der Theorie diskreter Systeme
- Die Simulation des Einzelbunchfeedbacks zur Untersuchung der Dämpfung insbesondere in Abhängigkeit von Feedbackstärke und -phase
- Der Vergleich von Theorie und Simulationen mit experimentellen Ergebnissen

Insgesamt sind für PETRA und HERA sechs Feedbacksysteme vorgesehen, je zwei transversale und ein longitudinales, die alle nach dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Prinzip arbeiten. Während sich die beiden transversalen Systeme jeweils sehr ähnlich sind und gemeinsam betrachtet werden können, gibt es zwischen den transversalen und dem longitudinalen Feedback sowie zwischen PETRA und HERA aus physikalischen und technischen Gründen Unterschiede. Von Bedeutung für die digitale Signalverarbeitung sind nur die unterschiedlichen Frequenzbereiche von Betatron- und Synchrotronschwingungen, sowie die Anzahl der Bunche in PETRA und HERA. Beide Punkte werden durch geringfügige Modifikationen des digitalen Phasenschiebers berücksichtigt, die in den Abschnitten 4.2.3 und 4.2.4 sowie in Anhang A beschrieben sind. Ansonsten stellt das transversale PETRA-Feedback die Grundlage der Diskussion dieses Kapitels dar.

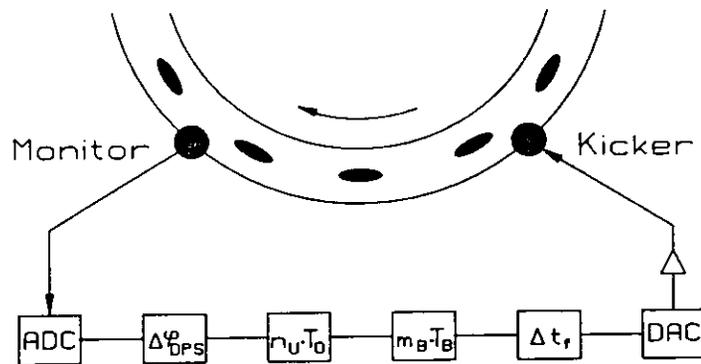


Abbildung 4.1: Ein Blockschaltbild des PETRA-Feedbacks: Die Signale der Bunche werden im Feedbackpfad phasenverschoben, verzögert und verstärkt. $n_U T_0$ und $m_B T_B$ stellen Verzögerungen in Einheiten der Umlaufzeit bzw. des Bunchabstandes dar, Δt_f eine Feinverzögerung.

Die Schwingungen der Bunche werden gemäß den Ausführungen von Kap. 2 in allen drei Richtungen als harmonische Oszillationen betrachtet und mit $x_c(t)$ in der kontinuierlichen bzw. $x(k)$ in der diskreten Formulierung bezeichnet. An einigen Stellen ist allerdings der Rückgriff auf die physikalischen Grundlagen der Betatron- und Synchrotronschwingungen erforderlich.

4.1 Grundlagen

4.1.1 Das Feedbackprinzip

Abb. 4.1 zeigt ein stark vereinfachtes Blockschaltbild des PETRA-Feedbacks. Das System funktioniert prinzipiell folgendermaßen: Die Ablagewerte der Bunche werden mit einem Monitor gemessen, der aus vier Knopfelektroden besteht und als punktförmig betrachtet werden kann. Die durch den ADC digitalisierten Meßwerte werden von einem diskreten Algorithmus verarbeitet, der die Phase des Signals jedes einzelnen Bunches unabhängig von allen anderen Bunchen um $\Delta\varphi_{DPS}$ verschiebt und als digitaler Phasenschieber (DPS) bezeichnet wird. Die Ausgangsfolge des DPS wird mit einem DAC analogisiert, verstärkt und durch den Kicker auf den jeweiligen Bunch rückgekoppelt. Der Kicker, ein spezieller Ablenkmagnet in den transversalen Feedbacksystemen und ein breitbandiger Hochfrequenzresonator im longitudinalen Feedback, kann ebenfalls als punktförmig genähert werden. Der Monitor steht in Umlaufrichtung der Bunche gesehen hinter dem Kicker. Der Abstand vom Kicker zum Monitor ist klein gegen den Umfang des Rings. Die Datenrate, mit der das ganze System

arbeitet, ist durch die Bunchfolgefrequenz

$$\nu_B = \frac{1}{T_B} = 10,4 \text{ MHz} \quad (4.1)$$

gegeben.

Mit Hilfe von $\Delta\varphi_{\text{DPS}}$ wird die Phasendifferenz zwischen Bunchschwingung und Kickersignal, die als Feedbackphase $\Delta\varphi_{\text{FB}}$ bezeichnet wird, auf $-\pi/2$ eingestellt, so daß die Kicks die Schwingung dämpfen, s. Abschnitt 4.1.2.

Die Gesamtverzögerung Δt_{FB} des Feedbackpfades vom Monitor zum Kicker setzt sich zusammen aus einer Verzögerung um eine ganze Zahl von Umläufen, $n_U T_0$, die der DPS-Algorithmus benötigt, einer Verzögerung um eine ganze Zahl von Bunchtaktten, $m_B T_B$, $m_B < N_B$, die in den DPS integriert ist, einer "Feinverzögerung" Δt_f , die über das Takttiming des DAC eingestellt wird, und verschiedenen Laufzeiten der Signale in Elektronik und Kabeln, Δt_L :

$$\Delta t_{\text{FB}} = n_U T_0 + m_B T_B + \Delta t_f + \Delta t_L. \quad (4.2)$$

$m_B T_B$ und Δt_f können frei gewählt werden. Sie werden so eingestellt, daß die Kicks jeweils den richtigen Bunch treffen.

Ein Feedbacksystem nach Abb. 4.1, welches mit N_B Bunchen arbeitet, $N_B \gg 1$, ist im eigentlichen Sinne des Wortes natürlich immer ein "Multibunchfeedback". Unter der Voraussetzung jedoch, daß die Rückkopplung über den Feedbackpfad für jeden einzelnen Bunch gleich, aber völlig unabhängig von allen anderen Bunchen erfolgt, kann man das Multibunchfeedback theoretisch als ein System von N_B identischen Einzelbunchfeedbacks auffassen. Allerdings wirkt die frequenzabhängige Resonatorimpedanz $Z(\omega)$, die die Instabilitäten erzeugt, wie in Abschnitt 2.5 erläutert nicht auf einzelne Bunche, sondern auf die in Abschnitt 2.4 eingeführten gekoppelten Schwingungszustände, die Moden. Unter diesen Umständen stellt sich die Frage, ob das Konzept eines Einzelbunchfeedbacks überhaupt sinnvoll ist. Ein Ergebnis der in Kapitel 5 dargelegten Theorie des Multibunchfeedbacks ist nun, daß die unabhängige Behandlung der Bunche im Feedbackpfad zu einer gleichmäßigen Dämpfung aller Moden führt und somit die Stabilität des Strahls unabhängig von den spektralen Eigenschaften der Resonatorimpedanz sicherstellt.

Die Feedbacksysteme von PETRA und HERA wurden auf dieses Kriterium optimiert und können in guter Näherung als Einzelbunchfeedbacks behandelt werden. Im folgenden wird deshalb ein einzelner Bunch stellvertretend für alle Bunche betrachtet. Auf diese Weise lassen sich die wichtigsten Eigenschaften des Feedbacks und insbesondere des DPS in anschaulicher Form darstellen.

Die Verallgemeinerung der Diskussion auf einen Feedbackpfad mit beliebigen linearen Eigenschaften erfordert hingegen den vollen Multibunchformalismus, der in Kapitel 5 unter Verwendung von wesentlichen Elementen der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Systemtheorie des Einzelbunchfeedbacks entwickelt wird.

4.1.2 Die Phasenbeziehungen

Es sollen nun die Phasen $\Delta\varphi_{\text{FB}}$ und $\Delta\varphi_{\text{DPS}}$ bestimmt werden, die zu einer dämpfenden Wirkung des Feedbacks führen. Da der Q-Wert der Betatronschwingungen groß gegen 1 ist, s. Abschnitt 2.2.4, werden diese mit einem Abtastwert pro Umlauf hochgradig unterabgetastet. Dadurch enthalten viele der hier und in den folgenden Abschnitten auftretenden Phasenfaktoren, soweit man sie auf die transversalen Schwingungen bezieht, ganzzahlige Vielfache von 2π , die in den meisten Fällen weggelassen werden, ohne darauf noch einmal ausdrücklich hinzuweisen. Insbesondere wird der Phasenvorschub pro Umlauf,

$$\Omega T_0 = 2\pi Q = 2\pi Q_0 + 2\pi q,$$

mit $2\pi q$ angegeben. Ω ist die Schwingungsfrequenz des Strahls und steht wahlweise für Ω_β oder Ω_s .

Zunächst wird $\Delta\varphi_{\text{FB}}$ aus der Analogie zu einem kontinuierlich gedämpften harmonischen Oszillator abgeleitet. Dieser wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x}_c(t) + \Omega^2 x_c(t) = -\alpha \dot{x}_c(t), \quad \alpha > 0, \quad (4.3)$$

beschrieben. Der Term $-\alpha \dot{x}_c(t)$ steht für die Dämpfungskraft. Ist α hinreichend klein, die Dämpfung also schwach, so ist $-\dot{x}_c(t)$ in guter Näherung um $-\pi/2$ in der Phase gegen $x_c(t)$ gedreht. Daraus folgert man, daß auch im diskreten Feedback die Phasenverschiebung zwischen Kickersignal und Bunchschwingung am Kicker diesen Wert haben muß:

$$\Delta\varphi_{\text{FB}} = -\frac{\pi}{2}. \quad (4.4)$$

Der Bunch passiere nun Monitor und Kicker zu den Zeiten

$$kT_0 \quad \text{bzw.} \quad kT_0 + \Delta t_{\text{M-KI}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\Delta t_{\text{M-KI}}$ ist also die Flugzeit vom Monitor zum Kicker, im PETRA-Feedback fast ein ganzer Umlauf. Die kontinuierliche Bunchschwingung sei durch

$$x_c(t) = \hat{x} \sin(\Omega t)$$

gegeben. \hat{x} ist eine beliebige Amplitude. Die Dämpfung wird vernachlässigt, da hier nur die Phasenbeziehungen betrachtet werden. Eine beliebige Anfangsphase wurde zu Null gewählt, um die folgenden Betrachtungen übersichtlicher zu machen. Die Abtastfolge des Bunches am Monitor ist dann

$$x_M(k) := x_c(kT_0) = \hat{x} \sin(\Omega k T_0).$$

Die Abtastfolge am Kicker wird entsprechend mit

$$x_{Ki}(k) := x_c(kT_0 + \Delta t_{M-Ki})$$

bezeichnet, und es gilt

$$x_{Ki}(k) = \hat{x} \sin(\Omega k T_0 + \Delta \phi_{M-Ki}),$$

wobei $\Delta \phi_{M-Ki}$ der Phasenvorschub der Schwingung vom Monitor zum Kicker ist, auf den unten noch näher eingegangen wird.

Ein punktförmiger Kicker beeinflusst nur \dot{x} und nicht x . Der Kick, der den Bunch zur Zeit $kT_0 + \Delta t_{M-Ki}$ trifft, wird deshalb mit $\Delta \dot{x}(k)$ bezeichnet.

Zwischen der Abtastung des Wertes $x_M(k)$ und dem zugehörigen Kick liegt die Laufzeit im Feedbackpfad, Δt_{FB} . Damit der Kick den Bunch trifft, muß die Laufzeit auf Δt_{M-Ki} zuzüglich einer ganzen Zahl von Umlaufzeiten eingestellt werden:

$$\Delta t_{FB} = \Delta t_{M-Ki} + n_U T_0. \quad (4.5)$$

Der gegen $x_M(k)$ um $\Delta \varphi_{DPS}$ gedrehte Kick erfolgt also zu der Zeit $kT_0 + n_U T_0 + \Delta t_{M-Ki}$ und ist deshalb mit $\Delta \dot{x}(k + n_U)$ zu bezeichnen:

$$\Delta \dot{x}(k + n_U) = \hat{V} \hat{x} \sin(\Omega k T_0 + \Delta \varphi_{DPS}).$$

\hat{V} ist die in Abschnitt 4.3.3 genauer definierte Feedbackverstärkung. Der Phasenvorschub, den der Bunch zwischen der Abtastung von $x_M(k)$ und dem Kick $\Delta \dot{x}(k + n_U)$ erfährt, ist $n_U \cdot 2\pi q + \Delta \phi_{M-Ki}$. Daraus folgt

$$x_{Ki}(k + n_U) = \hat{x} \sin(\Omega k T_0 + n_U \cdot 2\pi q + \Delta \phi_{M-Ki}).$$

$\Delta \varphi_{FB}$ war oben als Phasendifferenz zwischen dem Kick $\Delta \dot{x}(k)$ und der Schwingung des Bunches am Kicker, $x_{Ki}(k)$, eingeführt worden. Demnach gilt

$$\Delta \varphi_{FB} = \Delta \varphi_{DPS} - n_U \cdot 2\pi q - \Delta \phi_{M-Ki}. \quad (4.6)$$

Aus der Bedingung $\Delta \varphi_{FB} = -\pi/2$ folgt damit die Phase, auf die der DPS einzustellen ist:

$$\Delta \varphi_{DPS} = n_U \cdot 2\pi q + \Delta \phi_{M-Ki} - \frac{\pi}{2}. \quad (4.7)$$

Gl. 4.4, 4.5 und 4.7 sind die grundlegenden Phasen- und Zeitrelationen des Feedbacks. Der Phasenvorschub $\Delta\phi_{M-Ki}$ des transversalen Feedbacks ist nach Gl. 2.15 durch

$$\Delta\phi_{M-Ki} = \int_{s_M}^{s_{Ki}} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (4.8)$$

gegeben. Im longitudinalen Fall ist $Q_S = q_S < 0,1$, und Monitor und Kicker stehen so dicht beieinander, daß der Phasenvorschub vom Kicker zum Monitor vernachlässigt werden kann und $\Delta\phi_{M-Ki} \approx 2\pi q_S$ gilt. In Ringen mit $q_S \ll 0,1$ kann man auch noch $2\pi q_S \approx 0$ nähern und erhält $\Delta\varphi_{DPS} = -\pi/2$. Statt eines DPS kann man dann auch Differentiatoren oder Integratoren einsetzen. Diese Alternativen werden in [Bou91] diskutiert.

Anmerkung: Der oben erwähnte Phasenvorschub $n_U \cdot 2\pi q + \Delta\phi_{M-Ki}$, den der Bunch zwischen der Abtastung von $x_M(k)$ und dem Kick $\Delta\dot{x}(k + n_U)$, also in der Zeit Δt_{FB} erfährt, ist genau der Phasenfaktor, der den in Δt_{FB} zusammengefaßten Verzögerungen im Feedbackpfad (Gl. 4.2) entspricht. Es gilt:

$$n_U \cdot 2\pi Q + \Delta\phi_{M-Ki} = \Omega(n_U T_0 + \tau_{M-Ki}).$$

Im transversalen Fall ist dabei τ_{M-Ki} der Vorschub der in Abschnitt 2.2.6 eingeführten Quasizeit zwischen Monitor und Kicker. Im longitudinalen Fall gilt:

$$\Delta\phi_{M-Ki} \approx 2\pi q_S \Leftrightarrow \tau_{M-Ki} \approx T_0.$$

Gl. 4.7 zeigt, daß die durch den DPS zu bewirkende Phasenverschiebung vom Q -Wert abhängt. Eine für den Betrieb des Feedbacks wichtige Frage ist nun, wie stark q bei konstantem $\Delta\varphi_{DPS}$ variieren darf, ohne daß die Funktion des Feedbacks beeinträchtigt wird. Sei $\Delta\Xi$ der Phasenfehler des Feedbacks. Eine q -Verschiebung beeinflusst in Gl. 4.7 auch den Summanden $\Delta\phi_{M-Ki}$. Um die Betrachtung zu vereinfachen, sei

$$\Delta\phi_{M-Ki} \approx 2\pi q \quad (4.9)$$

genähert, da in PETRA die Kicker fast einen ganzen Umlauf hinter dem Monitor stehen. Es folgt

$$\Delta\Xi = 2\pi(n_U + 1)\Delta q. \quad (4.10)$$

In Abschnitt 4.3 wird gezeigt, daß die Feedbackdämpfung proportional $\cos \Delta\Xi$ ist. Läßt man $\Delta\Xi = \pm\pi/4$ zu, so reduziert sich die Dämpfung demnach nicht mehr als um einen Faktor $1/\sqrt{2}$. Für den erlaubten q -Bereich gilt dann

$$\Delta q = \pm \frac{1}{8(n_U + 1)}. \quad (4.11)$$

Geht die q -Verschiebung über diesen Bereich hinaus, so ist eine Nachstellung des DPS erforderlich. In Kapitel 6 wird ein Algorithmus entwickelt, der diese Anpassung selbsttätig vornimmt.

4.2 Der digitale Phasenschieber

4.2.1 Phasenverschiebung und Hilbert-Transformation

Die Übertragungsfunktion eines idealen digitalen Phasenschiebers (DPS) ist

$$H_d(\Delta\varphi; j\omega) = e^{j\Delta\varphi \operatorname{sgn}\omega}, \quad |\omega| \leq \frac{\omega_A}{2}. \quad (4.12)$$

Der Index "d" weist wie in Abschnitt 3.3.2 darauf hin, daß es sich um eine zeitdiskrete Fourier-Transformierte handelt, die für $|\omega| > \omega_A/2$ periodisch fortzusetzen ist. Zur Begründung von Gl. 4.12 werde die Wirkung von $H_d(\Delta\varphi; j\omega)$ auf die Abtastfolge einer Sinusschwingung betrachtet:

$$\sin \omega k T_A = \frac{1}{2j} (e^{j\omega k T_A} - e^{-j\omega k T_A}), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_A}{2},$$

$$\xrightarrow{H_d(\Delta\varphi; j\omega)} \frac{1}{2j} (e^{j(\omega k T_A + \Delta\varphi)} - e^{-j(\omega k T_A + \Delta\varphi)}) = \sin(\omega k T_A + \Delta\varphi).$$

Mit $\Delta\varphi = -\pi/2$ erhält man aus Gl. 4.12 die Übertragungsfunktion der zeitdiskreten Hilbert-Transformation, die auch in der Nachrichtentechnik von Bedeutung ist [Kam88, Kam89]:

$$H_d(-\pi/2; j\omega) = e^{-j\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\omega} = -j \operatorname{sgn}\omega, \quad |\omega| \leq \frac{\omega_A}{2}. \quad (4.13)$$

Aus Gl. 4.12 und 4.13 folgt:

$$H_d(\Delta\varphi; j\omega) = \cos \Delta\varphi - \sin \Delta\varphi H_d(-\pi/2; j\omega). \quad (4.14)$$

Der DPS läßt sich also auf die Hilbert-Transformation zurückführen. Der Zusammenhang der Impulsantworten ist entsprechend durch

$$h(\Delta\varphi; k) = \cos \Delta\varphi \delta(k) - \sin \Delta\varphi h(-\pi/2; k) \quad (4.15)$$

gegeben, denn die zeitdiskrete Fourier-Transformation von $\delta(k)$ ergibt den Wert 1. Die Impulsantwort der zeitdiskreten Hilbert-Transformation ergibt sich aus Gl. 3.60:

$$h(-\pi/2; k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi k} & k \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (4.16)$$

Die Folge ist ungerade, da $H_d(-\pi/2; j\omega)$ rein imaginär ist:

$$h(-\pi/2; 0) = 0, \quad \text{und} \quad h(-\pi/2; k) = -h(-\pi/2; -k). \quad (4.17)$$

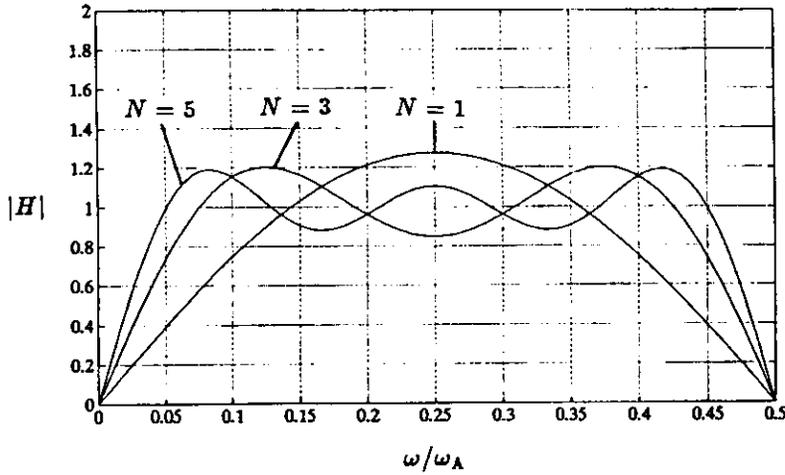


Abbildung 4.2: Der Amplitudengang des FIR-Hilbert-Transformators, $|H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)|$, für $N = 1, 3, 5$.

Eine FIR-Approximation des Hilbert-Transformators erhält man durch Begrenzung der Impulsantwort mit Hilfe des in Abschnitt 3.4 eingeführten Rechteckfensters:

$$H_{N,d}(-\pi/2; j\omega) := \sum_{k=-N}^N h(-\pi/2; k) e^{-j\omega k T_A}. \quad (4.18)$$

Setzt man für $h(-\pi/2; k)$ nach Gl. 4.16 ein, so folgt:

$$H_{N,d}(-\pi/2; j\omega) = -\frac{4j}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^N \frac{\sin \omega k T_A}{k}. \quad (4.19)$$

Für den FIR-DPS gilt entsprechend Gl. 4.14:

$$\begin{aligned} H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega) &:= \sum_{k=-N}^N h(\Delta\varphi; k) e^{-j\omega k T_A} \\ &= \cos \Delta\varphi - \sin \Delta\varphi H_{N,d}(-\pi/2; j\omega). \end{aligned} \quad (4.20)$$

$H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)$ ist ebenso wie $H_d(-\pi/2; j\omega)$ rein imaginär und hat deshalb unabhängig von N einen idealen Phasengang:

$$\arg(H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \omega, \quad |\omega| \leq \frac{\omega_A}{2}. \quad (4.21)$$

Die Abweichungen treten in der Amplitude auf, s. Abb. 4.2. Sie wirken sich auf Amplitude und Phase von $H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega)$ aus:

$$H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega) = \cos \Delta\varphi + j \sin \Delta\varphi \underbrace{j H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)}_{\operatorname{sgn} \omega |H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)|} \quad (4.22)$$

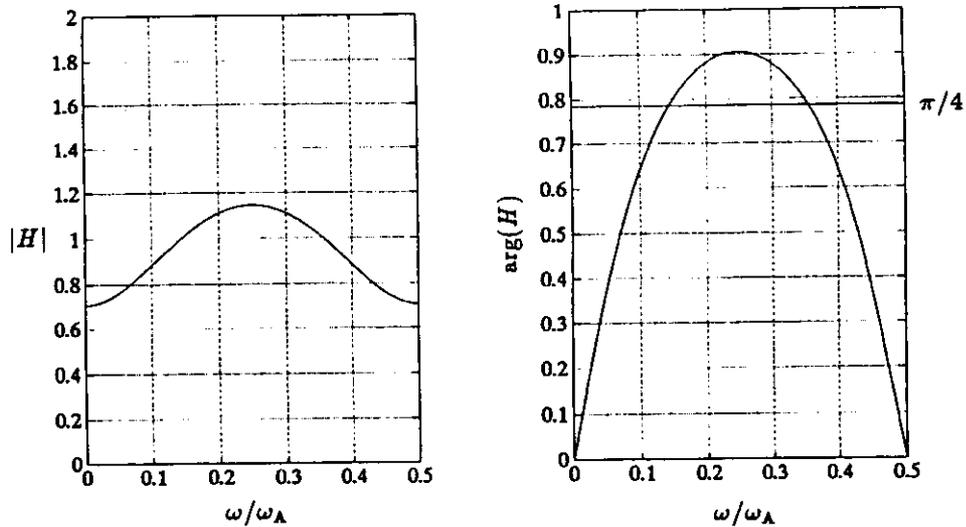


Abbildung 4.3: Amplituden- und Phasengang des FIR-DPS, $H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega)$, für $N = 1$ und $\Delta\varphi = \pi/4$.

$$\Rightarrow |H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega)| = (\cos^2 \Delta\varphi + \sin^2 \Delta\varphi |H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)|^2)^{1/2}, \quad (4.23)$$

und

$$\arg(H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega)) = \arctan(\tan \Delta\varphi \operatorname{sgn}\omega |H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)|), \quad (4.24)$$

für $|\omega| \leq \frac{\omega_\Lambda}{2}$. Abb. 4.3 zeigt Amplitude und Phase von $H_{1,d}(\Delta\varphi; j\omega)$ für $\Delta\varphi = \pi/4$.

4.2.2 Die Optimierung des DPS

Der Q-Wert der transversalen Strahlenschwingungen, Q_β , s. Abschnitt 2.2.4, muß in hinreichendem Abstand von ganz- und halbzahligen Resonanzen liegen. Dadurch ist der fraktale Anteil q_β in etwa auf den Bereich $q_\beta = 0,1 \dots 0,4$ bzw. $0,6 \dots 0,9$ beschränkt. Zunächst einmal wird nur der Bereich von 0,1 bis 0,4 betrachtet. Im Feedbacksystem ist die Abtastkreisfrequenz ω_Λ durch die Umlaufkreisfrequenz ω_0 gegeben:

$$\omega_\Lambda = \omega_0. \quad (4.25)$$

Wegen $q_\beta = \omega_\beta/\omega_0$ folgt, daß die Eigenschaften des DPS in den transversalen Feedbacks nur im Bereich $0,1\omega_0$ bis $0,4\omega_0$ relevant sind. Die Modifikation des DPS für das longitudinale Feedback wird im nächsten Abschnitt angegeben.

In [Her69] findet man die FIR-Filterkoeffizienten eines auf diesen Bereich optimierten Hilbert-Transformators. Die Werte hängen von der Ordnung N des

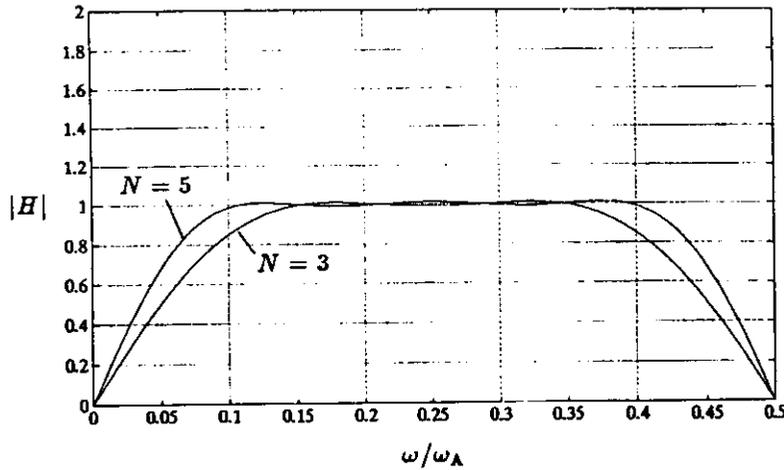


Abbildung 4.4: Der Amplitudengang $|H_{N,\text{opt,d}}(-\pi/2; j\omega)|$ des optimierten Hilbert-Transformators für $N=3$ und 5 . Im Bereich $q = 0, 1 \dots 0, 4$ ist die Approximation besser als in Abb. 4.2.

Filters ab und werden hier für $N = 1, 3, 5$ in der Form $h_N(-\pi/2; k)$ zitiert:

$$\begin{aligned}
 h_1(-\pi/2; 1) &= 2/\pi & (\text{wie in Gl. 4.16}) \\
 h_3(-\pi/2; 1) &= 0,582 & h_3(-\pi/2; 3) = 0,087 \\
 h_5(-\pi/2; 1) &= 0,610 & h_5(-\pi/2; 3) = 0,141 & h_5(-\pi/2; 5) = 0,037
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Wiederum sind für gerades k und $k = 0$ die Koeffizienten Null und für negatives k gilt

$$h_N(-\pi/2; -k) = -h_N(-\pi/2; k).$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion, die mit $H_{N,\text{opt,d}}(-\pi/2; j\omega)$ bezeichnet werden soll, weist deshalb ebenso wie $H_{N,d}(-\pi/2; j\omega)$ einen idealen Phasengang und Abweichungen in der Amplitude auf, s. Abb. 4.4. Für $N = 5$ ist der Amplitudenfehler im relevanten Frequenzbereich bereits kleiner als 2%.

Übertragungsfunktion $H_{N,\text{opt,d}}(\Delta\varphi; j\omega)$ und Koeffizienten $h_N(\Delta\varphi; k)$ des optimierten DPS erhält man aus $H_{N,\text{opt,d}}(-\pi/2; j\omega)$ und $h_N(-\pi/2; k)$ entsprechend Gl. 4.14 und 4.15. Abb. 4.5 zeigt Amplitude und Phase von $H_{5,\text{opt,d}}(\Delta\varphi; j\omega)$ für $\Delta\varphi = \pi/4$. Verglichen mit Abb. 4.3 ist die Approximation im Bereich $q = 0, 1 \dots 0, 4$ sehr gut.

Aus der Symmetrie der zeitdiskreten Fourier-Transformierten,

$$X_d(-j\omega) = X_d^*(j\omega),$$

und

$$X_d(j\omega - nj\omega_A) = X_d(j\omega), \quad n \text{ ganzzahlig,}$$

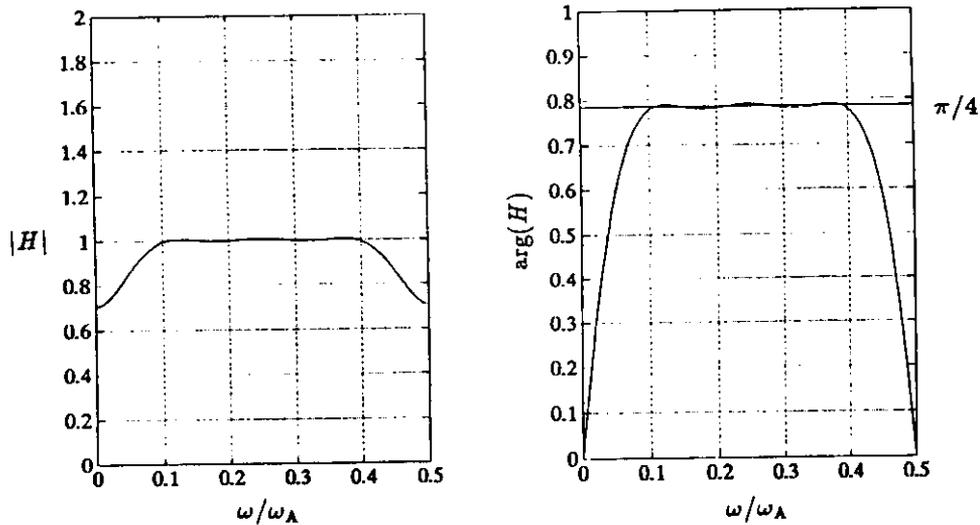


Abbildung 4.5: Amplituden- und Phasengang des optimierten DPS $H_{N,\text{opt,d}}(\Delta\varphi; j\omega)$ mit $N = 5$ für $\Delta\varphi = \pi/4$.

folgt speziell für den DPS

$$H_{N,\text{opt,d}}(\Delta\varphi; jq\omega_0) = H_{N,\text{opt,d}}(-\Delta\varphi; j(1-q)\omega_0).$$

Die Eigenschaften des DPS sind also für $q = 0,6 \dots 0,9$ die gleichen wie für $q = 0,1 \dots 0,4$. Lediglich das Vorzeichen der Phase ändert sich.

Es bleibt zu klären, welche Ordnung N für das Feedback am sinnvollsten ist. Diese Frage muß unter den Aspekten Phasenabweichung, Amplitudenabweichung, Verzögerung und Realisierungsaufwand diskutiert werden. Da die geraden DPS-Koeffizienten Null sind, kommen nur ungerade N in Frage.

a) **Die Phasenabweichung:** In Abschnitt 4.1.2 wurde gezeigt, daß die Phasendifferenz zwischen Kickersignal und Bunchschwingung am Kicker, $\Delta\varphi_{\text{FB}}$, im Idealfall $-\pi/2$ betragen sollte. Eine Abweichung $\Delta\Xi$ von diesem Wert führt zu einer Verringerung der Feedbackdämpfung um den Faktor $\cos \Delta\Xi$, wie in Abschnitt 4.3 gezeigt wird. Der DPS erzeugt im ungünstigsten Fall, $N = 1$ und $\Delta\varphi \approx \pi/4$, einen Phasenfehler von 0,15 rad, s. Abb. 4.3. Unter der Voraussetzung, daß der DPS die einzige Fehlerquelle im Feedbackpfad darstellt, ist dieser Effekt völlig zu vernachlässigen, denn $\cos(0,15) = 0,99$.

Phasenabweichungen können jedoch auch von den analogen Übertragern im Feedbackpfad herrühren, s. Kap. 5. Außerdem besteht die Möglichkeit von Q-Wert-Verschiebungen, die dazu führen, daß bereits der Sollwert des DPS,

$\Delta\varphi_{\text{DPS}}$, nicht exakt der Bedingung von Gl. 4.7 genügt. Nimmt man für diese beiden Fehlerquellen eine bereits vergleichsweise große Abweichung von insgesamt 30° an, so resultiert ein zusätzlicher Phasenfehler des DPS von $0,15$ rad, also $8,6^\circ$, in einer Reduktion von $\cos \Delta\Xi$ von $\cos 30^\circ = 0,87$ auf $\cos 39^\circ = 0,78$, ein deutlicher, aber noch tolerabler Effekt.

Im Prinzip kann man auch jeden Phasenfehler des DPS durch die Wahl eines geeigneten Wertes für $\Delta\varphi_{\text{DPS}}$ ausgleichen, aber im Hinblick auf einen unkomplizierten Beschleunigerbetrieb ist es wünschenswert, wenn die eingestellte Phase von der tatsächlichen Phasendrehung des DPS nur so wenig abweicht, daß die Dämpfung des Feedbacks nicht wesentlich beeinträchtigt wird.

b) Die Amplitudenabweichung: Ein weiteres Ergebnis von Abschnitt 4.3 ist, daß die Feedbackdämpfung proportional zur Amplitude der Übertragungsfunktion des DPS ist. Die größten Abweichungen vom Idealwert 1 ergeben sich für $\Delta\varphi = \pm\pi/2$. Die Variation im Bereich $q = 0,1 \dots 0,4$ beträgt (s. Abb. 4.4):

$$\begin{aligned} 0,75 \dots 1,27 & \quad (N = 1) \\ 0,90 \dots 1,01 & \quad (N = 3) \\ 0,98 \dots 1,01 & \quad (N = 5) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Für $N = 1$ folgt, daß entweder die Aussteuerung im Feedbackpfad jeweils an q angepaßt werden muß, oder im ungünstigsten Fall eine Verringerung der Dämpfung um 40% eintritt. Hingegen ist für $N = 5$ die Amplitudenabweichung nur noch unwesentlich.

c) Die Verzögerung: Der DPS-Algorithmus bestimmt maßgeblich die Verzögerung. $x_M(k)$ werde zur Zeit kT_0 gemessen. Der zugehörige Kick $\Delta\dot{x}(k+n_U)$ erfolgt dann zur Zeit

$$kT_0 + \Delta t_{\text{FB}} = kT_0 + n_U T_0 + \Delta t_{\text{M-Ki}},$$

s. Gl. 4.5. Aus

$$\Delta\dot{x}(k+n_U) = \hat{V} \sum_{i=-N}^N h_N(\Delta\varphi; i) x_M(k-i) \quad (4.28)$$

folgt, daß $\Delta\dot{x}(k+n_U)$ erst berechnet werden kann, nachdem $x_M(k+N)$ gemessen wurde. Daraus ergibt sich eine Verzögerung NT_0 im Feedbackpfad. Da alle anderen Verzögerungen im Feedbackpfad hinreichend klein sind, steht $\Delta\dot{x}(k+n_U)$ zur Zeit $kT_0 + NT_0 + \Delta t_{\text{M-Ki}}$ am Kicker zur Verfügung, woraus sich

$$n_U = N \quad (4.29)$$

ergibt. Setzt man dieses Ergebnis in Gl. 4.28 ein, so ist die Kausalität des Algorithmus, die im Feedback als Echtzeitsystem stets gewährleistet sein muß, unmittelbar zu erkennen, denn $\Delta \dot{x}(k+N)$ wird aus $x_M(k+N)$, $x_M(k+N-1)$, ... berechnet.

Δt_{FB} wirkt sich nun zweifach auf das Verhalten des Feedbacks aus:

i) Theoretische Überlegungen [Koh87] zeigen, daß die Dämpfung beeinträchtigt wird, falls Δt_{FB} in die Größenordnung der Dämpfungszeit τ_D kommt. In PETRA liegt τ_D oberhalb von $20T_0$, und unter dieser Bedingung macht es keinen Unterschied, ob man $N = 1, 3$ oder 5 wählt, wie auch die Simulationen von Abschnitt 4.4 bestätigen.

ii) Der Bereich, über den q variiert werden kann, ohne daß eine Nachstellung von $\Delta \phi_{DPS}$ erforderlich wird, nimmt mit zunehmender Verzögerung ab. Aus Gl. 4.11 und $n_U = N$ folgt

$$\Delta q = \pm \frac{1}{8(N+1)}. \quad (4.30)$$

$N = 5$ engt den Bereich also um einen Faktor 3 gegenüber $N = 1$ ein. Da zur Vermeidung von Resonanzen, s. Abb. 2.8, der Q-Wert ohnehin geregelt werden muß, ergibt sich daraus kein qualitativ neues Problem für den Beschleunigerbetrieb. Allerdings muß bei jeder beabsichtigten Änderung des Arbeitspunktes eine etwa erforderliche Anpassung der DPS-Phase bedacht werden, was um so störender empfunden wird, je kleiner Δq ist.

Am günstigsten ist in dieser Hinsicht natürlich $N = 0$, das heißt ein Feedback ohne Phasenschieber. Mit $q = 0,25 \pm 0,125$ wird dann fast der gesamte Arbeitsbereich abgedeckt. Voraussetzung ist aber, daß

$$\Delta \phi_{DPS} = 0 \Leftrightarrow \Delta \phi_{M-KI} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{für } q = 0,25,$$

wie aus Gl. 4.7 folgt. Monitor und Kicker können somit nicht mehr unabhängig voneinander im Ring positioniert werden. Die resultierenden technischen Probleme sind im allgemeinen so groß, daß der Verzicht auf einen Phasenschieber keine realistische Alternative darstellt.

d) Der Aufwand zur Realisierung des DPS nimmt linear mit N zu. Man benötigt $N + 2$ Multiplizierer, $2N$ Verzögerungsglieder und $N + 1$ Addierer. Abb. 4.6 zeigt das Blockdiagramm des DPS für $N = 3$. Dieser Aspekt spricht natürlich für einen möglichst kurzen DPS-Algorithmus, wobei aber zu bedenken ist, daß der Aufwand für den DPS, s. Anhang A, im Vergleich zum gesamten Feedbacksystem [Ebe91] eher gering ist.

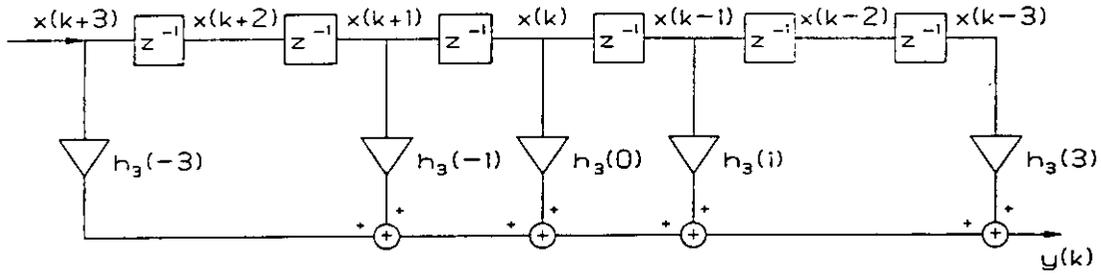


Abbildung 4.6: Das Blockdiagramm des DPS für $N=3$. Multiplikationen mit Null sind nicht eingezeichnet.

Zusammenfassend ist zunächst einmal festzustellen, daß unter den im PETRA- und HERA-Feedback gegebenen Bedingungen die Verwendung eines DPS mit $N > 5$ sicher nicht sinnvoll ist. Darüber hinaus spricht der verbesserte Amplitudengang für $N = 5$, die kleinere Verzögerung und der geringere Aufwand hingegen für $N = 1$. Eine gute Approximation der Phase ist in jedem Fall gewährleistet.

Für die Feedbacksysteme von PETRA und HERA wurde $N = 1$ gewählt. Der DPS-Algorithmus lautet somit

$$y(k) = h(\Delta\varphi; -1)x(k+1) + h(\Delta\varphi; 0)x(k) + h(\Delta\varphi; 1)x(k-1), \quad (4.31)$$

mit

$$\begin{aligned} h(\Delta\varphi; -1) &= \frac{2}{\pi} \sin \Delta\varphi, \\ h(\Delta\varphi; 0) &= \cos \Delta\varphi, \\ h(\Delta\varphi; 1) &= -\frac{2}{\pi} \sin \Delta\varphi, \end{aligned} \quad (4.32)$$

und für die Übertragungsfunktion erhält man aus Gl. 4.19 und 4.20

$$H_{1,d}(\Delta\varphi; j\omega) = \cos \Delta\varphi + \frac{4j}{\pi} \sin \Delta\varphi \sin(\omega T_A). \quad (4.33)$$

Wegen $N = n_U = 1$ beträgt die Verzögerung im Feedbackpfad also

$$\Delta t_{FB} = T_0 + \Delta t_{M-KI} \approx 2T_0.$$

Der entsprechende Phasenfaktor ist *nicht* in Gl. 4.33 enthalten, sondern wird mit Hilfe des Phasenvorschubs $2\pi q + \Delta\phi_{M-KI}$, den der Bunch in dieser Zeit erfährt, bei der Einstellung von $\Delta\varphi_{DPS}$ nach Gl. 4.7 berücksichtigt.

4.2.3 Die Anpassung des DPS an den Frequenzbereich der Synchrotronschwingung

q_s , der Q-Wert der Synchrotronschwingung, liegt in PETRA und HERA zwischen 0,05 und 0,1, also außerhalb des Arbeitsbereichs des DPS nach Gl. 4.31 und 4.32. Man "spreizt" nun den Algorithmus um einen Faktor 3, indem man zwischen zwei Koeffizienten je zwei Nullen einfügt:

$$y(k) = -\frac{2}{\pi} \sin \Delta\varphi x(k-3) + \cos \Delta\varphi x(k) + \frac{2}{\pi} \sin \Delta\varphi x(k+3). \quad (4.34)$$

Das Filter hat jetzt also sieben Koeffizienten, von denen jedoch weiterhin nur drei ungleich Null sind. Die Übertragungsfunktion des DPS wird dadurch um einen Faktor 3 "gestaucht",

$$H_{s,d}(\Delta\varphi; j\omega) = \sum_{k=-1}^1 h(\Delta\varphi; k) e^{-j\omega \cdot 3kT_0} = H_{1,d}(\Delta\varphi; 3j\omega), \quad (4.35)$$

und deckt so den Bereich $q = 0,033 \dots 0,133$ ab. Die Realisierung dieser Modifikation erfordert nur eine geringfügige Abänderung der Hardware des DPS, s. Anhang A. Die Kausalitätsbedingung führt dabei zu einer Verzögerung von drei Umläufen.

4.2.4 Die Anpassung des DPS an die Zahl der Bunche

Nach Abschnitt 4.1.1 hat der DPS in der Realität die Aufgabe, die Signale von N_B Bunchen unabhängig voneinander zu verarbeiten. Man erreicht dies, indem man den DPS mit der Bunchfolgefrequenz $\nu_B = N_B \nu_0$ taktet und jedes Verzögerungsglied um T_0 durch N_B Verzögerungen um je T_B ersetzt, s. Abb. 4.7. Der Algorithmus lautet dann

$$y(l) = \sum_{i=-1}^1 h(\Delta\varphi; i) x(l - N_B i). \quad (4.36)$$

Sei μ der Bunchindex, $\mu = 0 \dots N_B - 1$. Dann läßt sich jedes l eindeutig in

$$l = N_B k + \mu, \quad k \text{ ganzzahlig,}$$

zerlegen. Faßt man nun $x(l)$ als den k -ten Abtastwert des μ -ten Bunches auf,

$$x(l) = x(N_B k + \mu) = x_\mu(k),$$

und entsprechend

$$y(l) = y_\mu(k),$$

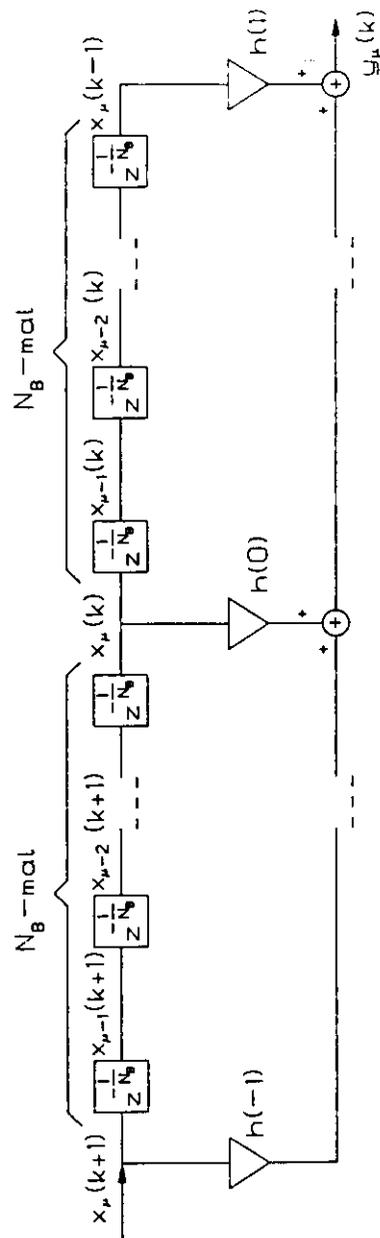


Abbildung 4.7: Das Blockschaltbild des DPS für N_B Bunche: z^{-1} ist in N_B Verzögerungsglieder z^{-1/N_B} zerlegt. In $y_\mu(k)$ gehen nur die Werte von Bunch μ ein; die Bunche werden also unabhängig voneinander behandelt.

so wird aus Gl. 4.36:

$$y_\mu(k) = \sum_{i=-1}^1 h(\Delta\varphi, i) x_\mu(k-i). \quad (4.37)$$

Wie gewünscht ist $y_\mu(k)$ unabhängig von den Abtastwerten $x_{\mu'}(k)$ aller anderen Bunche. In dieser praktisch leicht umzusetzenden Erweiterung der Zahl der verarbeiteten Signale von 1 auf N_B liegt der große Vorteil des DPS gegenüber vergleichbaren Lösungen in Analogtechnik. Das alte PETRA-Feedback [Hei79] benötigte für acht Bunche acht Kanäle mit acht analogen Phasenschiebern, das HERA-Feedback mit 220 Bunchen kommt dagegen mit einem einzigen DPS aus!

4.3 Die Theorie des Einzelbunchfeedbacks

Bereits in Abschnitt 4.1.1 war erwähnt worden, daß Monitor und Kicker als punktförmig betrachtet werden können. Dadurch erhält das Feedback eine zeitdiskrete Struktur, die sich in der Verwendung eines digitalen Phasenschiebers niederschlägt und einen entsprechenden theoretischen Ansatz nahelegt. Im folgenden wird eine Differenzgleichung für das Einzelbunchfeedback abgeleitet, aus der in Abhängigkeit von Feedbackstärke und -phase die Dämpfung berechnet wird. Diese Beschreibung wurde aus der Theorie eines kontinuierlich rückgekoppelten harmonischen Oszillators [Koh87] entwickelt. Stellt man Abtastung und Kick durch periodische Deltafunktionen dar, so läßt sich auch das diskrete Einzelbunchfeedback durch eine Differentialgleichung beschreiben [Koh87]. Kontinuierlicher und diskreter Ansatz führen in der Näherung eines schwachen Feedbacks, das heißt einer Dämpfungszeit, die groß gegen die Umlaufzeit ist, zu gleichen Ergebnissen.

4.3.1 Die Näherungen

Die Systemtheorie des diskreten Einzelbunchfeedbacks beruht auf folgenden Näherungen:

1. Linearität: Es wird vorausgesetzt, daß die Eingangswerte des DPS proportional zu den Schwingungswerten der Bunche am Monitor und die Kicks proportional zu den Ausgangswerten des DPS sind. Dies wird vor allem durch eine geeignete Wahl der Verstärkungsfaktoren im Feedbackpfad erreicht, die so einzustellen sind, daß auch bei maximaler Schwingungsamplitude keine Übersteuerungen auftreten.

2. Schwaches Feedback: Die unten definierte Feedbackstärke A muß klein gegen 1 sein, was einer Dämpfungszeit $\tau_D \gg T_0$ entspricht.

3. Punktförmigkeit von Monitor und Kicker: Die Punktförmigkeit des Monitors bedeutet, daß dort eine ideale Abtastung der Bunchschwingung nach dem Prinzip $x(k) = x_c(t_k)$ stattfindet, s. Abschnitt 3.3.2. Die Punktförmigkeit des Kickers bedeutet, daß der Kick nicht den Schwingungswert des Bunches, sondern nur dessen Ableitung nach der Zeit beeinflusst:

$$\Delta x_c = 0, \quad \text{und} \quad \Delta \dot{x}_c \neq 0.$$

Diese Näherung entspricht im Falle des transversalen Kickers der in Abschnitt 2.2.2 angegebenen Transfermatrix eines kurzen Quadrupolmagneten, im Falle des longitudinalen Kickers der Beschreibung der Synchrotronschwingungen durch Differenzgleichungen, s. Abschnitt 2.3.

4. Monitor und Kicker stehen am gleichen Ort: Für schwache Feedbacksysteme hat die tatsächliche Position von Monitor und Kicker im Ring nur geringen Einfluß auf das Feedback. Eine Verschiebung des Monitors relativ zum Kicker verändert zwar den Phasenvorschub $\Delta\phi_{M-Ki}$, aber dieser Effekt kann nach Gl. 4.6 stets mit Hilfe des DPS ausgeglichen werden, so daß $\Delta\varphi_{FB}$, welches die Dämpfung bestimmt, konstant bleibt. Dadurch wird die Beschreibung der Bunchschwingung durch eine einzige Folge

$$x(k) = x_M(k) = x_{Ki}(k)$$

ermöglicht. Für $\Delta\phi_{M-Ki}$ ist dann der Phasenvorschub eines ganzen Umlaufs, $2\pi q$, anzusetzen, und die Verzögerung zwischen Abtastung und Kick beträgt $N + 1$, in PETRA also zwei Umläufe. Aus Gl. 4.6 und 4.7 wird somit

$$\Delta\varphi_{FB} = \Delta\varphi_{DPS} - 4\pi q, \quad (4.38)$$

und

$$\Delta\varphi_{DPS} = 4\pi q - \frac{\pi}{2}. \quad (4.39)$$

Alle vier Punkte sind im PETRA-Feedback in guter Näherung erfüllt.

4.3.2 Die Beschreibung eines Kicks

a) **kontinuierlich:** Ein Kick zur Zeit $t = 0$, der die Ableitung $\dot{x}_c(t)$ der Bunchschwingung um $\Delta\dot{x}$ verändert, wird durch den Term $\Delta\dot{x}\delta_c(t)$ in der Schwingungsdifferentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{x}_c(t) + \Omega^2 x_c(t) = \Delta\dot{x}\delta_c(t). \quad (4.40)$$

Zur Begründung wird die Funktion

$$x_{s,c}(t) := \frac{\Delta \dot{x}}{\Omega} s_c(t) \sin(\Omega t) \quad (4.41)$$

betrachtet. $s_c(t)$ ist die kontinuierliche Sprungfunktion:

$$s_c(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

$x_{s,c}(t)$ stellt eine spezielle Lösung der Differentialgleichung 4.40 dar, wie man durch Einsetzen unter Berücksichtigung von

$$\frac{d}{dt} s_c(t) = \delta_c(t)$$

und

$$f(t)\delta_c(t) = f(0)\delta_c(t)$$

zeigt, und $\dot{x}_{s,c}(t)$ weist bei $t = 0$ den geforderten Sprung auf. Der Kick $\Delta \dot{x}$ stößt also eine Sinusschwingung der Amplitude $\Delta \dot{x}/\Omega$ an. Bezüglich des Umgangs mit der Deltafunktion sei beispielsweise auf [Fli91] verwiesen.

b) diskret: Gesucht ist eine Differenzgleichung, die die Wirkung des Kicks $\Delta \dot{x}$ auf den Bunch richtig beschreibt. Die Differenzgleichung eines harmonischen Oszillators wurde in Abschnitt 3.2.4 angegeben. Es erweist sich im folgenden als zweckmäßig, sie in der Form

$$x(k+1) - 2 \cos(\Omega T_0) x(k) + x(k-1) = 0 \quad (4.43)$$

zu benutzen. Für das Abtastintervall T_A wurde die Umlaufzeit T_0 eingesetzt. Die inhomogene Gleichung

$$x(k+1) - 2 \cos(\Omega T_0) x(k) + x(k-1) = \frac{\Delta \dot{x}}{\Omega} \sin(\Omega T_0) \delta(k) \quad (4.44)$$

hat die spezielle Lösung

$$x_s(k) = \frac{\Delta \dot{x}}{\Omega} s(k) \sin(\Omega k T_0). \quad (4.45)$$

Man weist dies nach, indem man zunächst in Gl. 4.44 die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x(-1) = 0$$

wählt. Daraus folgt

$$x(k) = 0, \quad \text{für } k < 0.$$

Die Lösung für $k \geq 0$ erhält man wie in Abschnitt 3.2.4 durch Multiplikation mit $s(k)$ und nachfolgende z -Transformation. Unter Anwendung von Gl. 3.28 und 3.29 ergibt sich

$$X_I(z) = \frac{\Delta \dot{x}}{\Omega} \cdot \frac{z \sin(\Omega T_0)}{z^2 - 2 \cos(\Omega T_0)z + 1},$$

woraus durch Vergleich mit Gl. 3.38 die angegebene Lösung $x_s(k)$ folgt. Da dies die diskrete Form von Gl. 4.41 darstellt, muß Gl. 4.44 die gesuchte Beschreibung eines Kicks im zeitdiskreten Formalismus sein.

4.3.3 Die Differenzgleichung des Einzelbunchfeedbacks

Der Feedbackpfad überträgt die am Monitor gemessene Folge von Schwingungswerten $x_M(k)$ in eine Folge von Kicks $\Delta \dot{x}(k)$. Der Feedbackpfad ist in guter Näherung linear und, solange Verstärkungsfaktoren und DPS-Algorithmus nicht verändert werden, auch zeitinvariant. Es handelt sich somit um ein zeitdiskretes LTI-System, dessen Eigenschaften nach Abschnitt 3.1 durch eine Impulsantwort gegeben sind, die hier mit $v(k)$ bezeichnet werden soll. Da das Feedback ein Echtzeitsystem ist und der Feedbackpfad keine weiteren Rückkopplungsschleifen enthält, muß $v(k)$ kausal und endlich angesetzt werden:

$$\Delta \dot{x}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} v(m)x_M(k-m). \quad (4.46)$$

M ist die Länge der Impulsantwort. Die Übertragungsfunktion des Feedbackpfades ist dann

$$V(z) := \sum_{k=0}^{M-1} v(k)z^{-k}. \quad (4.47)$$

Im Idealfall besteht die Übertragung nur aus Verzögerung und Phasendrehung, so daß

$$\hat{V} := |V(e^{j\omega T_0})| = \text{const}. \quad (4.48)$$

\hat{V} wird als systemtheoretische Feedbackverstärkung bezeichnet und ist von der in Abschnitt 4.5 eingeführten physikalischen Feedbackverstärkung zu unterscheiden. In der Realität ist $|V(e^{j\omega T_0})|$ jedoch nicht konstant, sondern enthält den Amplitudengang des DPS. Aus diesem Grunde werden die normierte Impulsantwort

$$w(k) := \frac{v(k)}{\hat{V}} \quad (4.49)$$

und die normierte Übertragungsfunktion

$$W(z) := \frac{V(z)}{\hat{V}} = \sum_{k=0}^{M-1} w(k)z^{-k} \quad (4.50)$$

definiert. \hat{V} enthält dann alle konstanten Verstärkungsfaktoren, und $|W(e^{j\omega T_0})|$ ist der Amplitudengang des DPS. Die $w(k)$ sind die entsprechend einer Verzögerung von zwei Umläufen um zwei Takte verschobenen DPS-Koeffizienten aus Gl. 4.32:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 & w(1) &= h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; -1) \\ w(2) &= h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; 0) & w(3) &= h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; 1) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Würde man einen DPS-Algorithmus mit $N = 3$ oder $N = 5$ benutzen, so müßte man die Koeffizienten $h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; k)$ um $N + 1 = 4$ bzw. 6 Takte verschieben, um $w(k)$ zu erhalten. Im Falle des longitudinalen Feedbacks ist $w(k)$ gemäß den Ausführungen von Abschnitt 4.2.3 zu modifizieren.

Der mit einer Folge $\Delta\dot{x}(k)$ rückgekoppelte Bunch wird gemäß Gl. 4.44 durch

$$x_{\text{Ki}}(k+1) - 2\cos(\Omega T_0)x_{\text{Ki}}(k) + x_{\text{Ki}}(k-1) = \frac{\Delta\dot{x}(k)}{\Omega} \sin(\Omega T_0) \quad (4.52)$$

beschrieben. Setzt man nun für $\Delta\dot{x}(k)$ nach Gl. 4.46 und 4.49 ein, so ergibt sich die Differenzgleichung des Einzelbunchfeedbacks:

$$x(k+1) - 2\cos(\Omega T_0)x(k) + x(k-1) = A \sin(\Omega T_0) \sum_{m=0}^{M-1} w(m)x(k-m). \quad (4.53)$$

Da $x_{\text{M}}(k) = x_{\text{Ki}}(k)$ vorausgesetzt wird, wurden die Indices "M" und "Ki" weggelassen.

$$A := \frac{\hat{V}}{\Omega} \quad (4.54)$$

ist die "Feedback-Stärke", eine dimensionslose Konstante. Wie bereits erwähnt, wird $A \ll 1$ vorausgesetzt. Gl. 4.53 beschreibt ein schwaches diskretes Einzelbunchfeedback im Zeitbereich. Die linke Seite stellt den Bunch als harmonischen Oszillator dar, und die rechte Seite der Gleichung repräsentiert den Feedbackpfad.

Die Feedbackstärke A hat eine sehr anschauliche Bedeutung: Es sei ein schwaches Feedback gegeben, so daß die Dämpfung über einige Umläufe vernachlässigt werden kann und $x(k)$ von der Form

$$x(k) = \hat{x} \sin(\Omega k T_0 + \hat{\varphi})$$

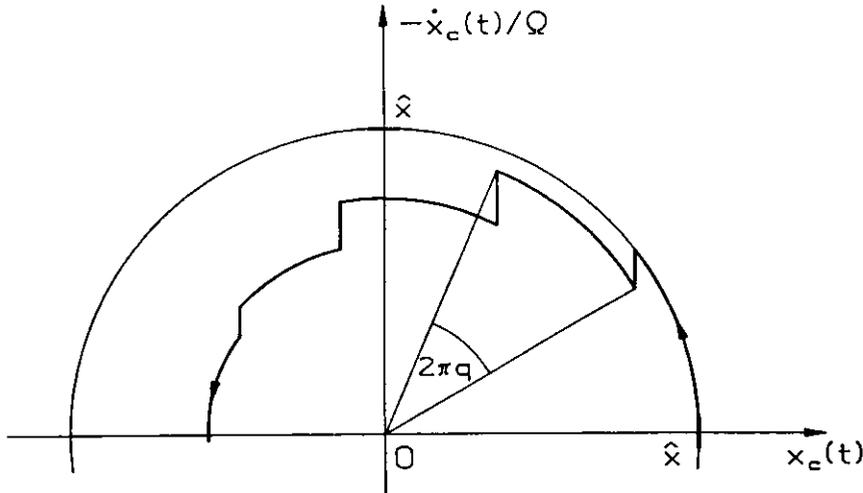


Abbildung 4.8: Die Trajektorie eines gedämpften Bunches im Phasenraum: Der Phasenverschub von Umlauf zu Umlauf beträgt $2\pi q$. Eine ungedämpfte Schwingung entspräche einem Kreis. Das Feedback reduziert mit jedem Kick $\dot{x}(k)$ um den Faktor $1 - A$. Für A wurde hier der Wert 0,2 gewählt.

ist. Unter der Voraussetzung eines in Amplitude und Phase idealen DPS gilt dann

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{x}(k) &= \hat{V} \hat{x} \sin(\Omega k T_0 + \hat{\varphi} - \frac{\pi}{2}) \\
 &= -A \Omega \hat{x} \cos(\Omega k T_0 + \hat{\varphi}) \\
 &= -A \dot{x}(k) \\
 \Rightarrow A &= \frac{-\Delta \dot{x}(k)}{\dot{x}(k)}. \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Jeder Kick reduziert also die Ableitung $\dot{x}(k)$ um einen Faktor $1 - A$. Abb. 4.8 zeigt eine mögliche Trajektorie des Bunches im durch $x_c(t)$ und $-\dot{x}_c(t)/\Omega$ definierten Phasenraum. Dieser Anschauung zufolge liegt die optimale Feedbackstärke bei $A = 1$, während $A > 2$ eine anregende Wirkung des Feedbacks hervorruft. Die Folgerungen sind jedoch mit Vorsicht zu betrachten, weil Gl. 4.55 für ein schwaches Feedback, $A \ll 1$, abgeleitet wurde.

4.3.4 Die Lösung der Differenzgleichung des Einzelbunchfeedbacks

Zur Lösung von Gl. 4.53 wird wieder das in Abschnitt 3.2.4 beschriebene Verfahren angewandt: Die Gleichung wird mit der Sprungfolge $s(k)$ multipliziert

und unter Berücksichtigung von Gl. 3.28 und 3.29 z -transformiert. Für die linke Seite von Gl. 4.53 erhält man:

$$\mathcal{Z} \{s(k)(x(k+1) - 2 \cos(\Omega T_0)x(k) + x(k-1))\} = X_I(z)Q(z) - x(0)z + x(-1),$$

mit

$$Q(z) := z - 2 \cos(\Omega T_0) + z^{-1}. \quad (4.56)$$

Es sei nun $M \geq 2$. Unter Anwendung von Gl. 3.28 ergibt dann die Transformation der Summe auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z} \left\{ s(k) \sum_{m=0}^{M-1} w(m)x(k-m) \right\} \\ &= w(0)X_I(z) + \sum_{m=1}^{M-1} w(m)z^{-m} \left(X_I(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right) \\ &= W(z)X_I(z) + R(z), \end{aligned}$$

mit

$$R(z) := \sum_{m=1}^{M-1} w(m) \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-(k+m)}.$$

$R(z)$ ist ein Polynom in z^{-1} vom Grade $M-2$. Das Ergebnis der z -Transformation lautet somit:

$$\begin{aligned} X_I(z)Q(z) - x(0)z + x(-1) &= A \sin(\Omega T_0)(W(z)X_I(z) + R(z)) \\ \Rightarrow X_I(z) &= \frac{A \sin(\Omega T_0)R(z) + x(0)z - x(-1)}{Q(z) - A \sin(\Omega T_0)W(z)}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Es sei nun $w(M-1) \neq 0$, das heißt, die Impulsantwort des Feedbackpfades hat die Länge $M \geq 2$. Dann erhält man $X_I(z)$ durch Erweitern von Gl. 4.57 mit z^{M-1} in Form einer rationalen Funktion in z . Während der Zähler von den Anfangsbedingungen bestimmt wird, sind die Pole durch die Nullstellen des Nenners, also durch

$$z^{M-1}Q(z) = A \sin(\Omega T_0)z^{M-1}W(z) \quad (4.58)$$

gegeben. Da $w(M-1) \neq 0$, ist $z=0$ keine Lösung, und man kann den Faktor z^{M-1} wieder abdividieren:

$$\boxed{Q(z) = A \sin(\Omega T_0)W(z)}. \quad (4.59)$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für die Pole des Einzelbunchfeedbacks. Sie kann auch direkt aus der Differenzgleichung 4.53 mit Hilfe des Ansatzes

$x(k) = z^k$ abgeleitet werden.

Unter der Voraussetzung, daß die Anfangsbedingungen $x(-M + 1), \dots, x(0)$ bekannt sind, kann man aus $X_I(z)$ mittels der in Abschnitt 3.2.2 erläuterten inversen z -Transformation die Lösung $x(k)$ von Gl. 4.53 berechnen. Beim Betrieb eines Beschleunigers sind aber nie irgendwelche Anfangsbedingungen gegeben, sondern allein ausschlaggebend ist die Dämpfungsrate, die die Anwachsrate der Instabilitäten kompensiert und damit den Maximalstrom bestimmt. Da jeder Pol z_i von $X_I(z)$ im wesentlichen einer Folge z_i^k entspricht, s. Abschnitt 3.2.2, entscheiden die Lösungen von Gl. 4.59 über das Dämpfungsverhalten des Feedbacks.

Bereits für $M = 4$ lassen sich diese Lösungen im allgemeinen nicht mehr in geschlossener Form angeben. Gl. 4.59 gilt jedoch ohnehin nur für $A \ll 1$, denn andernfalls kann man nicht voraussetzen, daß Monitor und Kicker am gleichen Orte stehen, und in dieser Näherung soll nun die Feedbackdämpfung berechnet werden:

Schreibt man Gl. 4.58 in der Form

$$z^{M-2}(z^2 - 2 \cos(\Omega T_0)z + 1) = A \sin(\Omega T_0) \sum_{m=0}^{M-1} w(m)z^{M-1-m},$$

so wird deutlich, daß zwar $z = 0$ keine Lösung ist, aber für $A \rightarrow 0$ entweder

$$z \rightarrow 0,$$

oder

$$\begin{aligned} (z^2 - 2 \cos(\Omega T_0)z + 1) &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow z &\rightarrow e^{\pm j\Omega T_0} \end{aligned}$$

gilt. Von den M Polen liegen also $M - 2$ in der Nähe des Ursprungs und für die anderen beiden gilt:

$$z_{\pm} \approx e^{\pm j\Omega T_0}. \quad (4.60)$$

Dies ist auch sinnvoll, denn im Grenzfall $A = 0$ müssen sich die Pole $e^{\pm j\Omega T_0}$ einer ungedämpften Schwingung ergeben.

Beispiel: Gegeben sei die Impulsantwort des Feedbackpfades gemäß Gl. 4.51 mit $q = 0, 2$, also

$$\Delta\varphi_{DPS} = 4\pi q - \frac{\pi}{2} = 0, 3\pi,$$

und

$$\Omega T_0 = 2\pi q = 0, 4\pi.$$

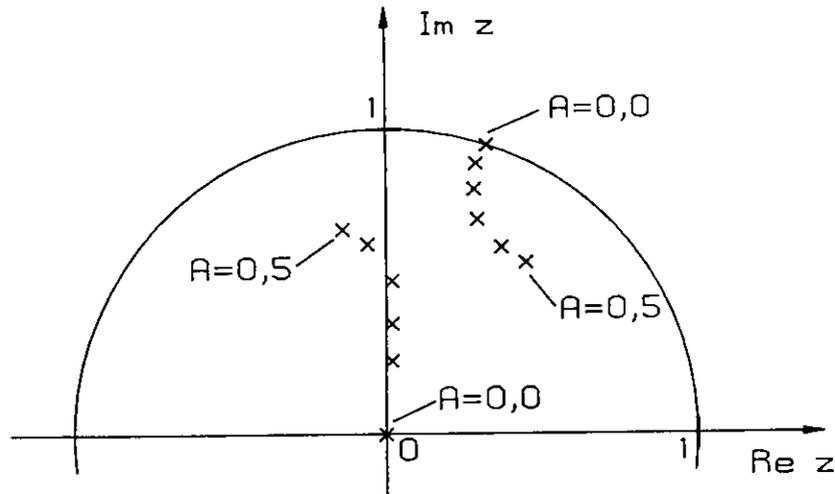


Abbildung 4.9: Die Lösungen der Polgleichung 4.59 des Feedbacks in Abhängigkeit von der Feedbackstärke A für einen DPS mit drei Koeffizienten und zwei Umläufen Verzögerung. Die anderen beiden Pole liegen jeweils komplex konjugiert. q beträgt 0,2. Die Werte für A sind: 0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Abb. 4.9 zeigt die numerisch ermittelten Positionen der vier Lösungen von Gl. 4.59 in Abhängigkeit von A .

Da die zu den Polen z_i mit $|z_i| \ll 1$ gehörigen Folgen z_i^k schnell abklingen, genügt es, zur Berechnung der Dämpfung z_+ zu betrachten. z_- ergibt sich aus $z_- = z_+^*$. Aus Gl. 4.59 folgt

$$(z - e^{j\Omega T_0})(z - e^{-j\Omega T_0}) = A \sin(\Omega T_0) z W(z).$$

Wegen $z_+ \approx e^{j\Omega T_0}$ wird nun in allen Termen außer $z - e^{j\Omega T_0}$ die Variable z durch die Konstante $e^{j\Omega T_0}$ approximiert. In dieser Näherung erhält man

$$z_+ \approx e^{j\Omega T_0} + \frac{A}{2j} e^{j\Omega T_0} W(e^{j\Omega T_0}).$$

Mit

$$W(e^{j\Omega T_0}) =: \hat{W} e^{j\Xi_+} \tag{4.61}$$

folgt

$$z_+ = e^{j\Omega T_0} + \frac{A}{2} \hat{W} e^{j(\Xi_+ + \Omega T_0 - \frac{\pi}{2})}. \tag{4.62}$$

Betrachtet man z_+ als Funktion von Ξ_+ , so wird $|z_+|$ minimal und somit die Dämpfung maximal, wenn

$$\Omega T_0 = \Xi_+ + \Omega T_0 - \frac{\pi}{2} + \pi$$

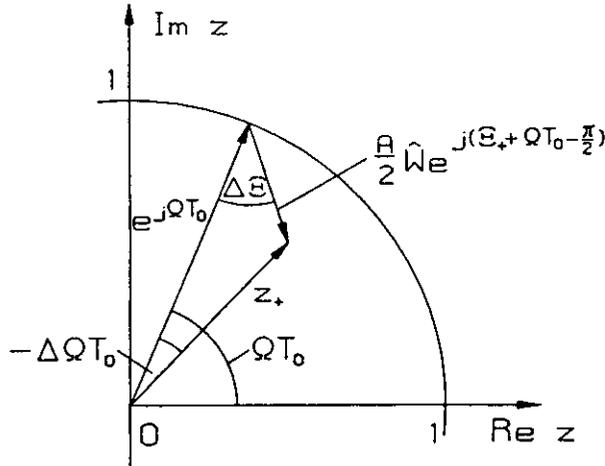


Abbildung 4.10: Das Zeigerdiagramm zu Gl. 4.62: $|z_+|$ ist minimal, wenn $\Delta \Xi = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\Xi_+ = -\frac{\pi}{2}} \quad (4.63)$$

Da

$$\Delta \dot{x}(k) = \hat{V} w(k) * x(k)$$

gilt, stellt Ξ_+ die Phasendifferenz zwischen $\Delta \dot{x}(k)$ und $x(k)$ dar und ist deshalb mit der in Abschnitt 4.1.1 definierten Feedbackphase $\Delta \varphi_{FB}$ identisch:

$$\Xi_+ = \Delta \varphi_{FB}. \quad (4.64)$$

Gl. 4.63 bestätigt also das bereits in Gl. 4.4 angegebene Ergebnis für die Feedbackphase.

Im allgemeinen wird Ξ_+ nicht exakt auf $-\pi/2$ eingestellt sein, sondern einen Phasenfehler $\Delta \Xi$ aufweisen:

$$\Xi_+ = -\frac{\pi}{2} + \Delta \Xi. \quad (4.65)$$

Die Anwendung des Kosinussatzes auf das Zeigerdiagramm von Abb. 4.10, welches Gl. 4.62 darstellt, ergibt:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{A^2}{4} \hat{W}^2 - A \hat{W} \cos \Delta \Xi &= |z_+|^2 \\ \Rightarrow |z_+| &\approx 1 - \frac{A}{2} \hat{W} \cos \Delta \Xi. \end{aligned}$$

Man definiert nun N_D als die Zahl der Umläufe, in denen $|z_+|^k$ um einen Faktor $1/e$ reduziert wird:

$$|z_+|^{N_D} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow N_D = -\frac{1}{\ln|z_+|} \approx \frac{2}{A\hat{W} \cos \Delta \Xi}.$$

Für die Dämpfungszeit folgt:

$$\tau_D = N_D T_0 = \frac{2T_0}{A\hat{W} \cos \Delta \Xi}. \quad (4.66)$$

Die reziproke Dämpfungszeit wird als Dämpfungsrate d bezeichnet:

$$d = \frac{A}{2T_0} \hat{W} \cos \Delta \Xi. \quad (4.67)$$

Als Feedbackdämpfung wird die dimensionslose Größe D eingeführt:

$$D := \frac{1}{N_D} = \frac{d}{\nu_0} \quad (4.68)$$

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{A}{2} \hat{W} \cos \Delta \Xi.} \quad (4.69)$$

Die Frequenzverschiebung $\Delta \Omega$ wird über

$$z_{\pm} =: e^{-D \pm j(\Omega + \Delta \Omega) T_0} \quad (4.70)$$

definiert. Sie läßt sich aus Abb. 4.10 mit Hilfe des Sinussatzes ableiten:

$$\frac{\sin(-\Delta \Omega T_0)}{\frac{A}{2} \hat{W}} = \frac{\sin \Delta \Xi}{|z_+|}.$$

Daraus folgt mit $\sin(\Delta \Omega T_0) \approx \Delta \Omega T_0$ und $|z_+| \approx 1$:

$$\Delta \Omega = -\frac{A}{2T_0} \hat{W} \sin \Delta \Xi, \quad (4.71)$$

bzw. auf den Q-Wert bezogen

$$\boxed{\Delta q = -\frac{A}{2} \hat{W} \sin \Delta \Xi.} \quad (4.72)$$

Diese Ergebnisse gelten exakt nur im Limes $A \rightarrow 0$.

4.4 Simulationen

4.4.1 Das Programm

a) **Die ungestörte Bunchschwingung:** Die Schwingung wird durch die Folgen $x_M(k)$ und $\dot{x}_M(k)$ am Monitor bzw. $x_{Ki}(k)$ und $\dot{x}_{Ki}(k)$ am Kicker beschrieben. \dot{x} steht für die Ableitung von x nach der Zeit. Der Zusammenhang ist durch die Matrizen M_{M-Ki} und M_{Ki-M} gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_{Ki}(k) \\ \dot{x}_{Ki}(k)/\Omega \end{pmatrix} = M_{M-Ki} \begin{pmatrix} x_M(k) \\ \dot{x}_M(k)/\Omega \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

und

$$\begin{pmatrix} x_M(k+1) \\ \dot{x}_M(k+1)/\Omega \end{pmatrix} = M_{Ki-M} \begin{pmatrix} x_{Ki}(k) \\ \dot{x}_{Ki}(k)/\Omega \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

mit

$$M_{M-Ki} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi_{M-Ki} & \sin \Delta\phi_{M-Ki} \\ -\sin \Delta\phi_{M-Ki} & \cos \Delta\phi_{M-Ki} \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

und

$$M_{Ki-M} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\phi_{Ki-M} & \sin \Delta\phi_{Ki-M} \\ -\sin \Delta\phi_{Ki-M} & \cos \Delta\phi_{Ki-M} \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

$\Delta\phi_{M-Ki}$ und $\Delta\phi_{Ki-M}$ sind der Phasenvorschub der Schwingung vom Monitor zum Kicker bzw. vom Kicker zum Monitor. Es gilt

$$\Delta\phi_{M-Ki} + \Delta\phi_{Ki-M} = 2\pi q. \quad (4.77)$$

b) **Die Instabilität** wird durch ein sehr einfaches Modell beschrieben: ¹ Bei jedem Umlauf werden $x_M(k)$ und $\dot{x}_M(k)$ mit einem Faktor F_I multipliziert, was ohne Feedback zu exponentiellem Anwachsen der Schwingung führt:

$$x_M(k) \sim F_I^k.$$

Dies entspricht dem in Abschnitt 2.5 angegebenen Instabilitätsmechanismus.

c) **Das Feedback:** Mit Feedback wird aus Gl. 4.74

$$\begin{pmatrix} x_M(k+1) \\ \dot{x}_M(k+1)/\Omega \end{pmatrix} = M_{Ki-M} \begin{pmatrix} x_{Ki}(k) \\ (\dot{x}_{Ki}(k) + \Delta\dot{x}(k))/\Omega \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

$\dot{x}_{Ki}(k)$ ist dabei der Wert der Ableitung vor dem Kick. Der Kick ist nach Abschnitt 4.3.3 durch

$$\Delta\dot{x}(k) = A\Omega \sum_{m=0}^{M-1} w(m)x_M(k-m) \quad (4.79)$$

¹Dieses Modell wurde aus einem Programm von S. Pätzold übernommen.

gegeben. Für die Impulsantwort des Feedbackpfades, $w(m)$, wird der DPS-Algorithmus mit drei Koeffizienten nach Gl. 4.32 angesetzt. Daraus folgt

$$\Delta \dot{x}(k) = A\Omega(h(\Delta\varphi; -1)x_M(k+1-n_U) + h(\Delta\varphi; 0)x_M(k-n_U) + h(\Delta\varphi; 1)x_M(k-1-n_U)). \quad (4.80)$$

Die Kausalität des Algorithmus erfordert $n_U \geq 1$.

d) Die Einstellung der DPS-Koeffizienten: $\Delta\varphi$ wird iterativ so eingestellt, daß die tatsächliche Phasendrehung des DPS, $\arg(H_{1,d}(\Delta\varphi; j\omega))$ bei $\omega = \Omega$ eine vorgegebene Abweichung $\Delta\Xi$ vom Idealwert $\Delta\varphi_{DPS}$, Gl. 4.7, aufweist. Darüber hinaus werden die Koeffizienten so normiert, daß

$$|H_{1,d}(\Delta\varphi; j\Omega)| = 1 \Rightarrow \hat{W} = |W(e^{j\Omega T_0})| = 1.$$

e) Die Bestimmung der Dämpfung: Ohne Feedback würde die Schwingungsamplitude aufgrund der Instabilität wie F_I^k wachsen. $N_I := 1/\ln F_I$ ist die Zahl der Umläufe, während derer die Amplitude um einen Faktor e zunähme. F_I wird nun iterativ auf einen Wert $F_{I,G}$ eingestellt, bei dem Instabilität und Feedback im Gleichgewicht sind. $\ln F_{I,G}$ wird mit der Feedbackdämpfung D identifiziert:

$$D = \ln F_{I,G}. \quad (4.81)$$

Kriterium für das Vorliegen eines Gleichgewichts ist das Verhalten der Schwingungsamplitude am Monitor:

$$a_M(k) := (x_M(k)^2 + \frac{\dot{x}_M(k)^2}{\Omega^2})^{1/2}. \quad (4.82)$$

Die Folge $\ln a_M(k)$ wird durch eine Regressionsgerade mit der Steigung s_R approximiert. $|s_R| \leq 10^{-3}$ ist die Gleichgewichtsbedingung. Die auf diese Weise erhaltene Näherung für D wird noch verbessert, indem Gl. 4.81 durch

$$D = \ln F_{I,G} - s_R \quad (4.83)$$

ersetzt wird.

4.4.2 Ergebnisse

Abb. 4.11 zeigt den Schwingungsverlauf ohne Instabilität, $F_I = 0$, aber mit Feedback, welches nach zehn Umläufen eingeschaltet wird. Sofort beginnt der exponentielle Abfall, der nach weiteren 18 Umläufen den Faktor $1/e$ erreicht.

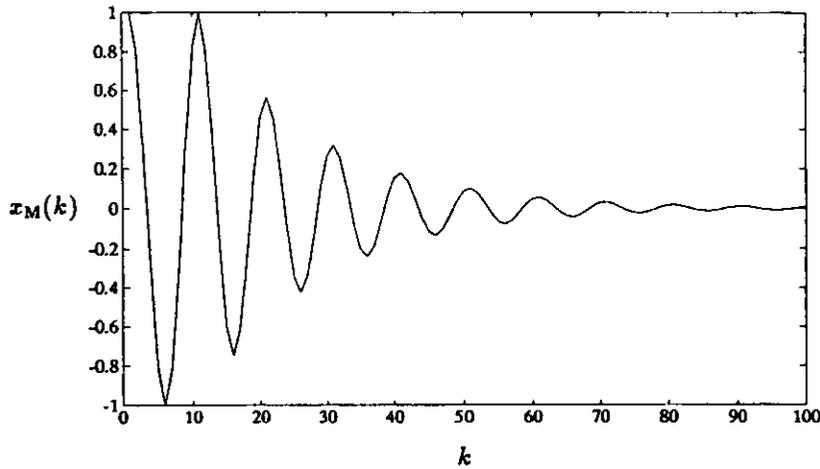


Abbildung 4.11: Eine durch das Feedback gedämpfte Schwingung: Das Feedback wird nach zehn Umläufen eingeschaltet. Die Dämpfungszeit beträgt in etwa 18 Umläufe. $q = 0,1$; $A = 0,1$; $n_U = 1$; $\Delta \Xi = 0$.

Die Dämpfungszeit beträgt somit $\tau_D \approx 18T_0$, was mit $A = 0,1$; $\hat{W} = 1$ und $\Delta \Xi = 0$ in recht guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert von $20T_0$ steht, s. Gl. 4.66. Im Prinzip könnte man auch mit dieser Methode die Dämpfungseigenschaften des Feedbacks untersuchen, aber die Bestimmung der Gleichgewichtsinstabilität entspricht der realen Anwendung des Feedbacks besser.

Abb. 4.12 zeigt die Schwingung mit demselben Feedback und der Instabilität $F_{I,G} = 0,0522$. Die verbliebene Steigung der Regressionsgeraden durch $\ln a_M(k)$ beträgt $s_R = -0,0004$, woraus sich die Dämpfung $D = 0,0526$ ergibt.

Mit dieser Methode wurde die Abhängigkeit der Dämpfung von folgenden Parametern untersucht: A , $\Delta \Xi$, n_U , q , $\Delta \phi_{K_i-M}$. Die Variation von $\Delta \phi_{K_i-M}$ entspricht einer Variation der relativen Position von Monitor und Kicker. Da \hat{W} auf 1 normiert wurde, sollte die Dämpfung nach Gl. 4.69 theoretisch nur von A und $\Delta \Xi$ abhängen:

$$D_{th} = \frac{A}{2} \cos \Delta \Xi. \quad (4.84)$$

Die wichtigsten Simulationsergebnisse werden bereits in Abb. 4.13 zusammengefasst: $D(\Delta \Xi)$ ist für $\Delta \phi_{K_i-M} = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ dargestellt. Die anderen Parameter sind $q = 0,1$; $A = 0,1$ und $n_U = 1$. Die Kurvenschar folgt im wesentlichen der nach Gl. 4.84 berechneten theoretischen Abhängigkeit D_{th} . Die Abweichung beträgt bei $\Delta \Xi = 0$ weniger als 10%. Für größere Phasenfehler erkennt man eine systematische Abweichung der Simulationsergebnisse in Rich-

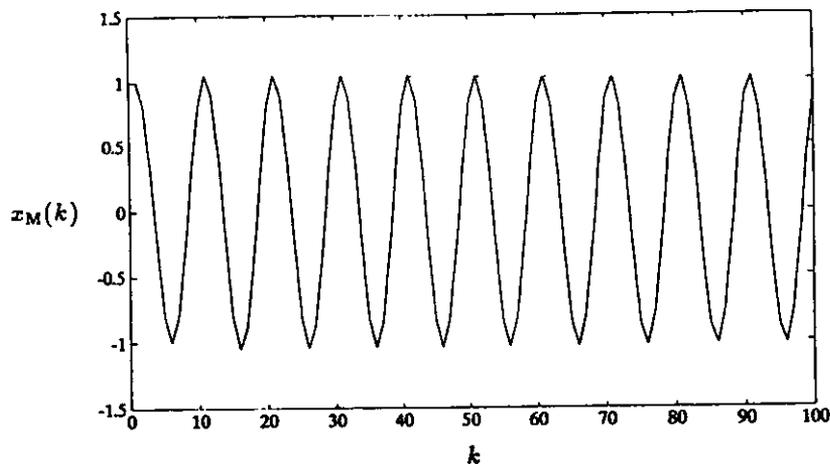


Abbildung 4.12: Feedback (Parameter wie in Abb. 4.11) und Instabilität halten sich das Gleichgewicht. $\ln F_{I,G} = 0,0522$.

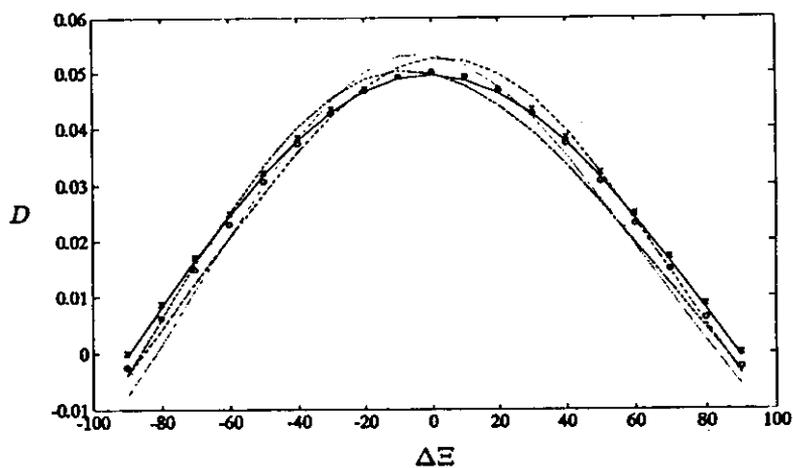


Abbildung 4.13: Die Dämpfung D in Abhängigkeit vom Phasenfehler $\Delta\Xi$ für $q = 0, 1$; $A = 0, 1$ und $n_U = 1$. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation ist gut.

$\Delta\phi_{KI-M}$: 0 (\cdots); $\pi/4$ (---); $\pi/2$ (---); $3\pi/4$ (\cdots). D_{th} : \times ; $D_{th,FV}$: \circ .

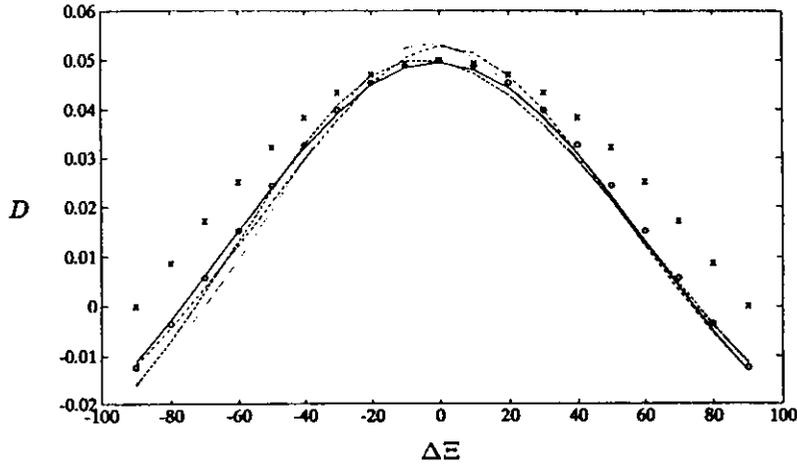


Abbildung 4.14: Die Dämpfung D in Abhängigkeit vom Phasenfehler $\Delta\Xi$ für $q = 0, 1$; $A = 0, 1$ und $n_U = 5$. Aufgrund der größeren Verzögerung wirkt sich die Frequenzverschiebung stärker auf die Dämpfung aus.

$\Delta\phi_{\text{Ki-M}}$: 0 (· · ·); $\pi/4$ (—); $\pi/2$ (— —); $3\pi/4$ (· · ·). D_{th} : x; $D_{\text{th,FV}}$: o.

tung auf geringere Dämpfung. Dieser Effekt läßt sich mit der ebenfalls vom Feedback verursachten Frequenzverschiebung, Gl. 4.71, erklären. $\Delta\Omega$ erzeugt einen zusätzlichen Phasenfehler

$$\Delta\Xi_{\text{FV}} = -n_U \Delta\Omega T_0 = n_U \frac{A}{2} \sin \Delta\Xi. \quad (4.85)$$

Berücksichtigt man dies, so erhält man

$$D_{\text{th,FV}} = \frac{A}{2} \cos\left(\Delta\Xi + n_U \frac{A}{2} \sin \Delta\Xi\right). \quad (4.86)$$

Diese Formel ergibt eine noch bessere Übereinstimmung mit den Simulationen. Vergrößerung der Verzögerung auf beispielsweise $n_U = 5$ verdeutlicht den Effekt, s. Abb. 4.14. Für kleine $\Delta\Xi$ ist die Dämpfung jedoch praktisch unabhängig von n_U .

Die relative Abweichung zwischen Theorie und Simulation liegt für $\Delta\Xi = 0$ in der Größenordnung von A , das heißt bei $A = 0, 1$ beträgt sie $\leq 10\%$, Abb. 4.13, für $A = 0, 2$ hingegen $\leq 20\%$, Abb. 4.15. Die Abweichungen weisen eine gewisse Abhängigkeit von q auf. In Abb. 4.16 ist das Maximum bzgl. $\Delta\phi_{\text{Ki-M}}$ des relativen Fehlers

$$\frac{\Delta D}{D_{\text{th}}} = \left. \frac{D(\Delta\phi_{\text{Ki-M}}) - D_{\text{th}}}{D_{\text{th}}} \right|_{\Delta\Xi=0}$$

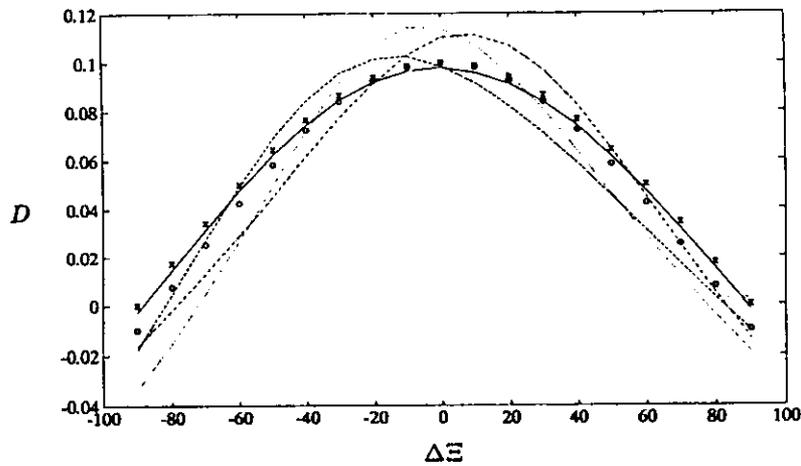


Abbildung 4.15: Die Dämpfung D in Abhängigkeit vom Phasenfehler $\Delta\Xi$ für $q = 0, 1$; $A = 0, 2$ und $n_U = 1$. Die verdoppelte Feedbackstärke bewirkt eine weniger gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation.

$\Delta\phi_{Ki-M}$: 0 (— · —); $\pi/4$ (—); $\pi/2$ (— —); $3\pi/4$ (· · ·). D_{th} : x; $D_{th,FV}$: o.

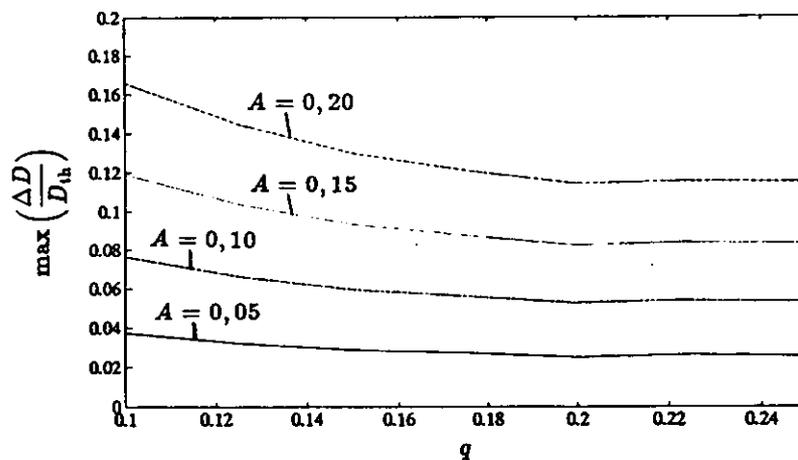


Abbildung 4.16: Das Maximum der relativen Abweichung zwischen Theorie und Simulation bei $\Delta\Xi = 0$ in Abhängigkeit von q . $n_U = 1$. Die Kurven sind im Bereich $q = 0, 25 \dots 0, 4$ symmetrisch fortzusetzen. Die Abweichungen sind proportional zu A und für $q = 0, 1$ bzw. $0, 4$ am größten.

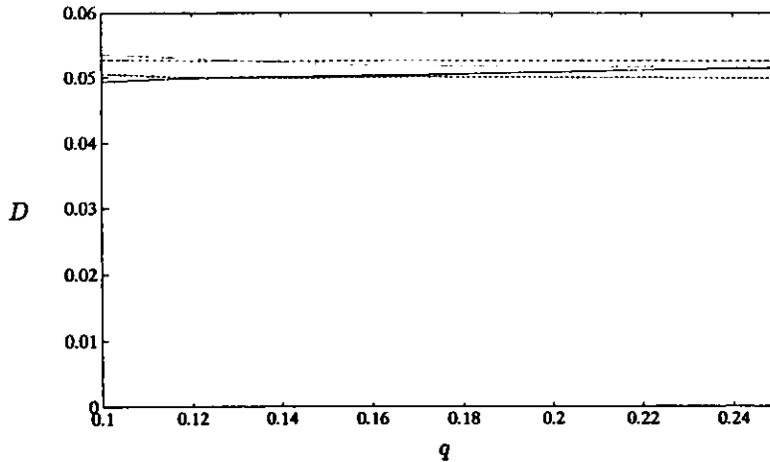


Abbildung 4.17: Die Dämpfung hängt nur sehr schwach vom Q-Wert ab. $A = 0,10$; $\Delta \Xi = 0$ und $n_U = 1$.
 $\Delta \phi_{K_i-M}$: 0 (- · -); $\pi/4$ (—); $\pi/2$ (- - -); $3\pi/4$ (· · ·).

abhängig von q für $A = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20$ und $n_U = 1$ aufgetragen. $\Delta \phi_{K_i-M}$ wurde in Schritten von $\pi/9$ zwischen 0 und π variiert. Die Betrachtung von $\Delta \phi_{K_i-M}$ zwischen π und 2π ist nicht erforderlich, denn es gilt:

$$D(\Delta \phi_{K_i-M}) = D(\Delta \phi_{K_i-M} + \pi). \quad (4.87)$$

Abb. 4.16 zeigt noch einmal sehr deutlich die Proportionalität zwischen A und der relativen Abweichung Theorie - Simulation. Das bedeutet insbesondere auch, daß für $A \rightarrow 0$ die Dämpfung tatsächlich unabhängig von $\Delta \phi_{K_i-M}$, das heißt von der Position von Monitor und Kicker, ist.

Die Dämpfung selbst ist von q nur schwach abhängig, s. Abb. 4.17.

Die lineare Abhängigkeit der Dämpfung von der Feedbackstärke (mit quadratisch wachsender Abweichung zwischen den Kurven für verschiedene $\Delta \phi_{K_i-M}$) ist in Abb. 4.18 dargestellt.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die Kurven $D(\Delta \Xi; \Delta \phi_{K_i-M})$ nicht exakt symmetrisch zu $\Delta \Xi = 0$ verlaufen. Aufgrund von Gl. 4.87 und der Beziehung

$$D(\Delta \phi_{K_i-M}; q; \Delta \Xi) = D(\pi - \Delta \phi_{K_i-M}; 0,5 - q; -\Delta \Xi) \quad (4.88)$$

verhält sich jedoch die Kurvenschar von Abb. 4.13 spiegelbildlich zu der mit $q = 0,4$ simulierten Schar von Abb. 4.19.

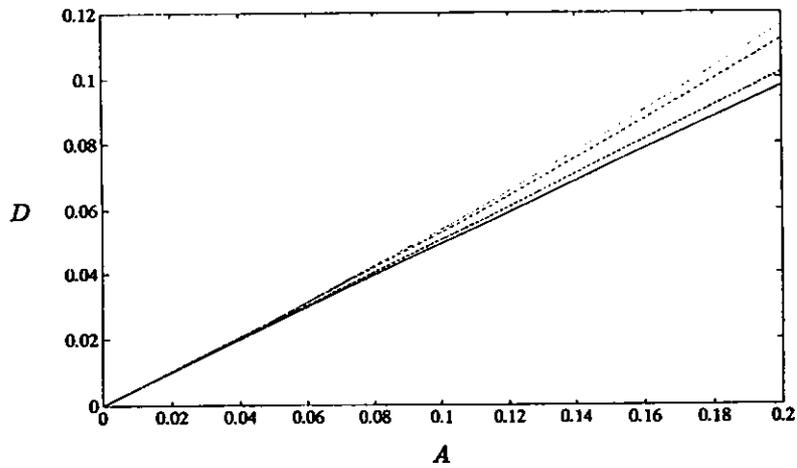


Abbildung 4.18: D ist proportional zur Feedbackstärke A . $q = 0,10$; $\Delta\Xi = 0$ und $n_U = 1$.
 $\Delta\phi_{Ki-M}$: 0 (- · -); $\pi/4$ (—); $\pi/2$ (- - -); $3\pi/4$ (···).

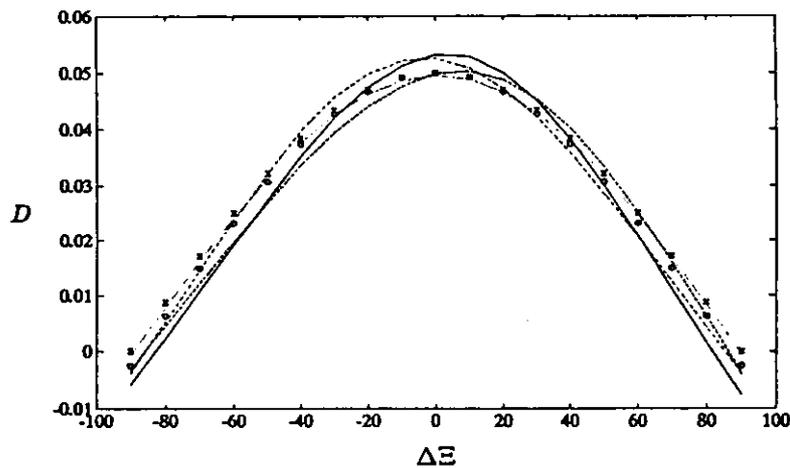


Abbildung 4.19: Die Dämpfung D in Abhängigkeit vom Phasenfehler $\Delta\Xi$ für $q = 0,4$; $A = 0,1$ und $n_U = 1$. Die Kurvenschar verläuft spiegelbildlich zu Abb. 4.13.
 $\Delta\phi_{Ki-M}$: 0 (- · -); $\pi/4$ (—); $\pi/2$ (- - -); $3\pi/4$ (···). D_{th} : x; $D_{th,FV}$: o

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die Simulationen das in erster Näherung berechnete Ergebnis von Gl. 4.69 für die Dämpfung eines schwachen Feedbacks bestätigen. Allerdings bewirkt die ebenfalls vom Feedback hervorgerufene Verschiebung der Schwingungsfrequenz einen zusätzlichen Phasenfehler, der bei genauerer Betrachtung zum Phasenfehler $\Delta\Xi$ des Feedbackpfades hinzuaddiert werden muß.

4.5 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Die drei Feedbacksysteme für PETRA wurden installiert und getestet. Die technischen Einzelheiten und Testergebnisse sind in [Hei89] und [Ebe91] beschrieben. Die Tests wurden nicht im Rahmen dieser Arbeit, jedoch unter Verwendung des hier entwickelten digitalen Phasenschiebers durchgeführt. Die Ergebnisse werden an dieser Stelle erwähnt, um zu belegen, daß die Theorie von Abschnitt 4.3 und die in Abschnitt 4.4 dargestellten Simulationen zur Beschreibung der Feedbacksysteme geeignet sind.

Die relevanten Größen für den Vergleich zwischen Theorie bzw. Simulation auf der einen und dem Experiment auf der anderen Seite sind die Feedbackstärke A und die Dämpfungszeit τ_D . Deshalb sollen zunächst aus den technischen Daten der Feedbacksysteme die transversale und longitudinale Feedbackstärke, A_{tr} und A_{long} , und die zugehörigen Dämpfungszeiten berechnet werden:

a) A_{tr} : Die folgenden Betrachtungen gelten gleichermaßen für das horizontale wie für das vertikale System. In [Ebe91] ist die Formel für die transversale Dämpfungsrate angegeben:

$$d_{tr} = \frac{\Delta y'_{max}}{y_{M,max}} \sqrt{\beta_M \beta_{Kl}} \frac{\nu_0}{2} \hat{W} \cos \Delta\Xi. \quad (4.89)$$

Vergleich mit Gl. 4.67 ergibt:

$$A_{tr} = \frac{\Delta y'_{max}}{y_{M,max}} \sqrt{\beta_M \beta_{Kl}}. \quad (4.90)$$

y ist die Abweichung der Bunche von der Sollbahn und y' ist die Ableitung von y nach der Bahnlänge s , vgl. Abschnitt 2.2. y und y' hängen mit den in den vorangehenden Abschnitten dieses Kapitels zur Beschreibung der transversalen Bunchschwingungen verwendeten Variablen x und \dot{x} über die Courant-Snyder-Transformation von Abschnitt 2.2.6 zusammen. $y_{M,max}$ bezeichnet die

maximale Auslenkung der Bunche am Monitor und $\Delta y'_{\max}$ den zugehörigen maximalen Kick. $\Delta y'_{\max}/y_{M,\max}$ ist somit die physikalische Feedbackverstärkung. Sie ist von der in Abschnitt 4.3.3 eingeführten systemtheoretischen Feedbackverstärkung \hat{V} zu unterscheiden. β_M und β_{Ki} sind die Werte der Betafunktion an Monitor und Kicker.

Mit

$$\frac{\Delta y'_{\max}}{y_{M,\max}} = \frac{4 \mu\text{rad}}{\text{mm}}$$

bei einer Strahlenergie von 7 GeV [Ebe91] und

$$\sqrt{\beta_M \beta_{Ki}} = 20 \text{ m}$$

[Koh] erhält man

$$A_{tr} = 0,080 .$$

Daraus ergibt sich nach Gl. 4.66 mit $\hat{W} = 1$, $\Delta \Xi = 0$ und $T_0 = 7,68 \mu\text{sec}$:

$$\tau_{D,tr} = 190 \mu\text{sec} .$$

b) A_{long} : Die Dämpfungsrate des longitudinalen Feedbacks ist durch

$$d_{\text{long}} = \frac{\Delta U_{\max}}{\Delta \Psi_{\max}} \frac{\Omega_S}{2U_c} \hat{W} \cos \Delta \Xi \quad (4.91)$$

[Ebe91] gegeben. ΔU_{\max} ist die Maximalspannung, welche die Bunche im Kicker durchlaufen. $\Delta \Psi_{\max}$ ist die zugehörige Phasenabweichung, bezogen auf die Phase der Beschleunigungsspannung, s. Abschnitt 2.3, der Bunche am Monitor. $\Delta U_{\max}/\Delta \Psi_{\max}$ ist die physikalische Verstärkung des longitudinalen Feedbacks. Ω_S ist die Kreisfrequenz der Synchrotronschwingung und U_c ist die Beschleunigungsspannung, die die Bunche pro Umlauf durchlaufen. Vergleich mit Gl. 4.67 ergibt:

$$A_{\text{long}} = \frac{\Delta U_{\max}}{\Delta \Psi_{\max}} \frac{\Omega_S}{2U_c} \cdot 2T_0 . \quad (4.92)$$

Die technischen Daten des longitudinalen Feedbacks sind [Koh]:

$$\frac{\Delta U_{\max}}{\Delta \Psi_{\max}} = \frac{50 \text{ kV}}{1^\circ} ,$$

$$\Omega_S = 2\pi \cdot 7 \text{ kHz} ,$$

und

$$U_c = 20 \text{ MV} .$$

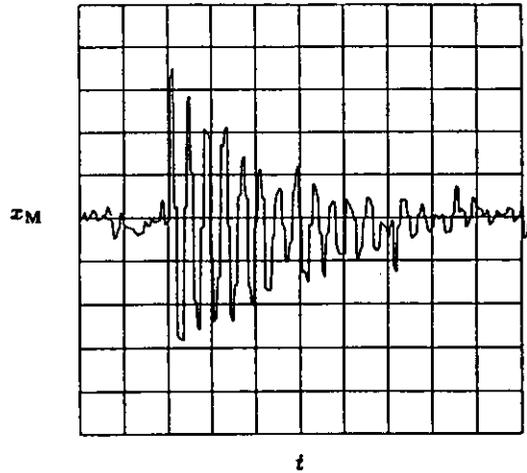


Abbildung 4.20: Die durch das Feedback gedämpfte Betatronschiwingung eines einzelnen Bunches: Ein Skalenteil entspricht $100 \mu\text{sec}$. Die Dämpfungszeit liegt bei $300 \mu\text{sec}$.

Zusammen mit $T_0 = 7,68 \mu\text{sec}$ ergibt sich daraus:

$$A_{\text{long}} = 0,048$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{D,long}} = 320 \mu\text{sec}.$$

Während $\Delta y'_{\text{max}}$ und ΔU_{max} durch die maximale Leistung der Kicker festgelegt sind, wurden im Laufe der Feedbacktests die Verstärkungen und damit $y_{\text{M,max}}$ und $\Delta \Psi_{\text{max}}$ an die jeweiligen Schwingungsamplituden und Rauschverhältnisse angepaßt. Die Ergebnisse für A_{tr} und A_{long} sind deshalb nicht als exakte Konstanten zu verstehen, sondern als typische Werte. Ein präziser quantitativer Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Dämpfungszeiten ist aus diesem Grunde nicht möglich.

Abb. 4.20 [Hei89] zeigt die transversale Schwingung eines einzelnen Bunches, die mit einem Kicker angeregt und dann vom Feedback gedämpft wird. In Übereinstimmung mit Theorie und Simulationen klingt die Schwingung exponentiell ab. Die Dämpfungszeit beträgt $\tau_{\text{D,tr}} \approx 300 \mu\text{sec}$. Unter der Annahme, daß $\hat{W} = 1$ und $\Delta \bar{E} = 0$ erhält man aus

$$A = \frac{2T_0}{\tau_{\text{D}}},$$

s. Gl. 4.66, eine Feedbackstärke $A_{\text{tr}} \approx 0,05$. Durch Erhöhung der Verstärkung im Feedbackpfad wurde eine Dämpfungszeit von ca. $100 \mu\text{sec}$ erreicht, s. Abb. 4.21, entsprechend $A_{\text{tr}} \approx 0,15$.

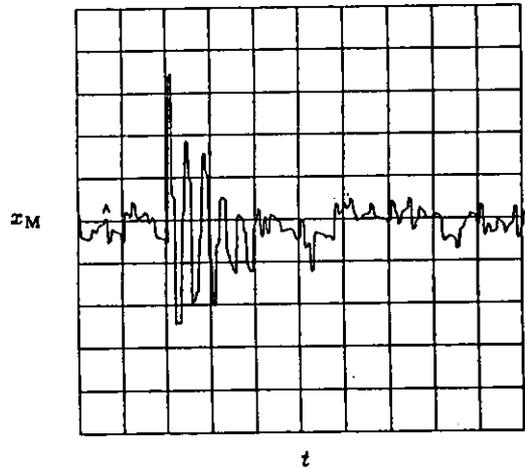


Abbildung 4.21: Die durch das Feedback gedämpfte Betatronschwingung eines einzelnen Bunches: Ein Skalenteil entspricht $100 \mu\text{sec}$. Die größere Verstärkung führt auf eine Dämpfungszeit von ungefähr $100 \mu\text{sec}$.

Die Dämpfung eines Modes der Synchrotronschwingungen, die im PETRA-Feedback der Dämpfung eines Bunches entspricht, vgl. Abschnitt 5.1.6, ist in Abb. 4.22 zu erkennen [Ebe91]. Die Dämpfungszeit beträgt etwa $500 \mu\text{sec}$. Mit größeren Verstärkungen wurden Dämpfungszeiten bis zu $200 \mu\text{sec}$ erreicht. A_{long} lag somit im Bereich $0,03 \dots 0,075$.

Die Meßergebnisse liegen also sowohl transversal als auch longitudinal im Rahmen der theoretischen Erwartungen.

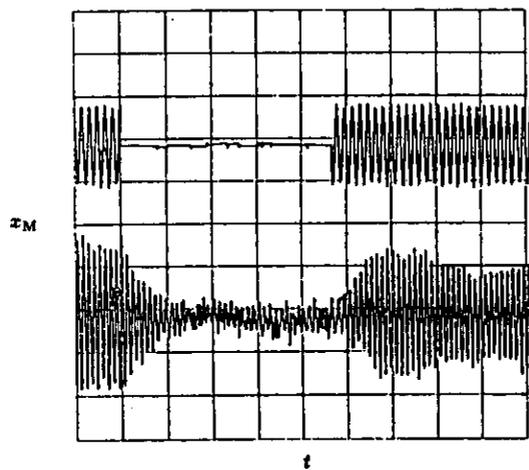


Abbildung 4.22: Die Dämpfung eines Modes der Synchrotronschwingung: Ein Skalenteil entspricht 1 msec. Die obere Spur zeigt die Anregungsfunktion, die untere Spur die Schwingung des Modes. Die Dämpfungszeit liegt bei 500 μ sec.

Kapitel 5

Das Multibunchfeedback

Im vorangehenden Kapitel wurde das Einzelbunchfeedback als der Spezialfall des Multibunchfeedbacks, bei dem die Bunche im Feedbackpfad alle gleich und unabhängig voneinander behandelt werden, diskutiert. Im allgemeinen führen jedoch die analogen Übertrager im Feedbackpfad, Verstärker und Kicker, zu einer Kopplung der Bunche, deren Beschreibung durch Theorie und Simulation Gegenstand dieses Kapitels ist.

5.1 Die Theorie des Multibunchfeedbacks

In diesem Abschnitt wird die Systemtheorie des zeitdiskreten Multibunchfeedbacks dargestellt. Dazu wird das Differenzgleichungssystem des Multibunchfeedbacks abgeleitet und daraus mittels z-Transformation und Entwicklung nach Moden die Dämpfungseigenschaften des Feedbacks berechnet. Diese Beschreibung wurde aus der Theorie des kontinuierlichen Multibunchfeedbacks [Hei89] und des diskreten Einzelbunchfeedbacks, s. Abschnitt 4.3, entwickelt. In [Koh91] wird das diskrete Multibunchfeedback durch Deltafunktionen und ein Differentialgleichungssystem beschrieben. Für schwache Feedbacksysteme führen der kontinuierliche und die zeitdiskreten Ansätze zu gleichen Ergebnissen.

Das Multibunchfeedback wird im folgenden unter denselben Näherungen behandelt wie das Einzelbunchfeedback in Abschnitt 4.3: Linearität des Feedbackpfades, Feedbackstärke $A \ll 1$, Punktförmigkeit von Monitor und Kicker sowie gleiche Position von Monitor und Kicker, das heißt $\Delta\phi_{M-Ki} = 0$.

Die Indices "c" und "d" werden wie in Abschnitt 3.3 angegeben verwendet.

5.1.1 Der Feedbackpfad

Die Zeitskala wird so gewählt, daß die Bunche Monitor und Kicker zu den Zeiten lT_B passieren. $T_B = T_0/N_B$ ist der zeitliche Bunchabstand. Der zur Zeit lT_B abgetastete Schwingungswert wird mit $x(l)$ bezeichnet, der entsprechende Kick mit $\Delta\dot{x}(l)$. Dabei wird zunächst noch nicht berücksichtigt, daß diese Werte verschiedenen Bunchen zuzuordnen sind.

Der Feedbackpfad stellt ein diskretes LTI-System mit $x(l)$ als Eingangs- und $\Delta\dot{x}(l)$ als Ausgangsfolge dar, vgl. Abschnitt 3.1, und wird somit durch eine zeitdiskrete kausale Impulsantwort beschrieben, die hier mit $v(m)$ bezeichnet werden soll. Es gilt:

$$\Delta\dot{x}(l) = \sum_{m=0}^{\infty} v(m) x(l-m). \quad (5.1)$$

Die Übertragungsfunktion des Feedbackpfades ist dann

$$V(\zeta) := \sum_{m=0}^{\infty} v(m) \zeta^{-m}, \quad \zeta = e^{sT_B}. \quad (5.2)$$

Dies ist der allgemeinste Ansatz für den Feedbackpfad des diskreten Multibunchfeedbacks. Das Differenzgleichungssystem läßt sich daraus direkt ableiten. Zuvor soll jedoch auf die spezielle Struktur von $v(m)$ in den Feedbacks von PETRA und HERA eingegangen werden. Dort kann der Feedbackpfad in den digitalen Phasenschieber auf der einen sowie die Gesamtheit aller analogen Übertrager auf der anderen Seite unterteilt werden:

Der DPS wird durch die Folge $\bar{h}(\Delta\varphi; m)$ beschrieben. Es gilt

$$\bar{h}(\Delta\varphi; m) = \begin{cases} h(\Delta\varphi; k) & \text{für } m = kN_B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (5.3)$$

Die $h(\Delta\varphi; k)$ sind die DPS-Koeffizienten aus Abschnitt 4.2, die auch im Multibunchfeedback angewendet werden, vgl. Abschnitt 4.2.4. Die Übertragungsfunktion ist unabhängig von der Zahl der Bunche:

$$H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega) = \sum_{k=-N}^N h(\Delta\varphi; k) e^{-j\omega k T_0} = \sum_{m=-N \cdot N_B}^{N \cdot N_B} \bar{h}(\Delta\varphi; m) e^{-j\omega m T_B}. \quad (5.4)$$

Die kontinuierlichen Impulsantworten der analogen Übertrager werden zu einer einzigen Impulsantwort $g_c(t)$ zusammengefaßt. Sie enthält auch sämtliche Verzögerungen, da der DPS verzögerungsfrei angesetzt wird. Die Übertragungsfunktion ist

$$G_c(j\omega) = \int_0^{\infty} g_c(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.5)$$

Da sich $g_c(t)$ im allgemeinen über mehrere Bunchabstände T_B erstreckt, trifft jeder Kick nicht nur den Bunch, dem er zugeordnet ist, sondern auch benachbarte Bunche. Dadurch werden die Bunchschwingungen miteinander gekoppelt. Ein Beispiel dafür wird in Abschnitt 5.2.1 angegeben.

$g_c(t)$ wird am Kicker durch die Bunche mit der Frequenz ν_B abgetastet, so daß eine Folge

$$g(m) := g_c(mT_B) \quad (5.6)$$

entsteht. Im Frequenzbereich wird der Beitrag der analogen Übertrager zum Feedbackpfad deshalb durch die zeitdiskrete Fourier-Transformierte

$$G_d(j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} g(m)e^{-j\omega mT_B} = \frac{1}{T_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_c(j(\omega - n\omega_B)) \quad (5.7)$$

beschrieben, vgl. Gl. 3.53 und 3.63.

$v(m)$ ist das Faltungsprodukt von $\bar{h}(\Delta\varphi; m)$ und $g(m)$:

$$v(m) = \bar{h}(\Delta\varphi; m) * g(m) \quad (5.8)$$

$$\Leftrightarrow V_d(j\omega) = V(e^{j\omega T_B}) = H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega)G_d(j\omega). \quad (5.9)$$

$V_d(j\omega)$ und $G_d(j\omega)$ haben die Periode ω_B ; $H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega)$ hingegen die Periode $\omega_0 = \omega_B/N_B$.

Es wird nun wie beim Einzelbunchfeedback eine systemtheoretische Feedbackverstärkung \hat{V} definiert,¹ auf die die Impulsantwort normiert wird:

$$w(m) := \frac{v(m)}{\hat{V}}. \quad (5.10)$$

Die normierte Übertragungsfunktion ist

$$W(\zeta) := \frac{V(\zeta)}{\hat{V}} = \sum_{m=0}^{\infty} w(m)\zeta^{-m}. \quad (5.11)$$

Die Feedbackstärke wird wieder als

$$A := \frac{\hat{V}}{\Omega} \quad (5.12)$$

eingeführt. Damit erhält man aus Gl. 5.1:

$$\Delta\dot{x}(l) = A\Omega \sum_{m=0}^{\infty} w(m)x(l-m). \quad (5.13)$$

¹Es gibt verschiedene Möglichkeiten, \hat{V} zu definieren, beispielsweise $\hat{V} := \max|V_d(j\omega)|$, oder $\hat{V} := \max|G_d(j\omega)|$.

5.1.2 Das Differenzgleichungssystem

Die Ableitung des Differenzgleichungssystems, welches das Multibunchfeedback beschreibt, besteht in der Zuordnung der Werte $\Delta\dot{x}(l)$ und $x(l-m)$ in Gl. 5.13 zu den verschiedenen Bunchen. Da sich jedes l eindeutig in

$$l = N_B k + \mu, \quad 0 \leq \mu \leq N_B - 1, \quad k, l, \mu \text{ ganzzahlig,}$$

zerlegen läßt, kann man die Numerierung der Bunchen so wählen, daß der μ -te Bunch Monitor bzw. Kicker zu den Zeiten

$$kT_0 + \mu T_B = (N_B k + \mu)T_B$$

passiert. Der entsprechende Schwingungswert wird mit $x_\mu(k)$ bezeichnet. Die Zuordnung lautet somit:

$$x(l) = x(N_B k + \mu) = x_\mu(k), \quad (5.14)$$

und

$$\Delta\dot{x}(l) = \Delta\dot{x}_\mu(k). \quad (5.15)$$

Die Differenzgleichung für den mit der Folge von Kicks $\Delta\dot{x}_\mu(k)$ rückgekoppelten Bunch ist:

$$x_\mu(k+1) - 2 \cos(\Omega T_0) x_\mu(k) + x_\mu(k-1) = \frac{\Delta\dot{x}_\mu(k)}{\Omega} \sin(\Omega T_0), \quad (5.16)$$

s. Gl. 4.52. Betrachtet man μ von 0 bis $N_B - 1$, so ist dies bereits das gekoppelte Differenzgleichungssystem für ein Feedback mit N_B Bunchen. Die Kopplung geschieht durch $\Delta\dot{x}_\mu(k)$, da dieses von allen anderen $x_\nu(k)$ abhängt. Dieser Zusammenhang soll explizit dargestellt werden. Einsetzen von $l = N_B k + \mu$ und Gl. 5.15 in Gl. 5.13 ergibt:

$$\Delta\dot{x}_\mu(k) = A\Omega \sum_{m=0}^{\infty} w(m) x(N_B k + \mu - m). \quad (5.17)$$

Nun muß noch $x(N_B k + \mu - m)$ nach Gl. 5.14 umgeformt, das heißt einem Bunch zugeordnet werden. Für $0 \leq \mu - m \leq N_B - 1$ folgt sofort

$$x(N_B k + \mu - m) = x_{\mu-m}(k).$$

Für den Fall $\mu - m < 0$ wird eine ganzzahlige Funktion $\alpha(n)$ als der nach $-\infty$ gerundete Quotient n/N_B definiert:

$$\alpha(n) := \text{floor}\left(\frac{n}{N_B}\right),$$

das heißt

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= 0 & \text{für} & \quad 0 \leq n \leq N_B - 1, \\ \alpha(n) &= -1 & \text{für} & \quad -N_B \leq n \leq -1, \\ \alpha(n) &= -2 & \text{für} & \quad -2N_B \leq n \leq -N_B - 1,\end{aligned}$$

usw. Es gilt dann

$$0 \leq \mu - m - N_B \alpha(\mu - m) \leq N_B - 1$$

für beliebige $\mu - m$. Man zerlegt nun

$$N_B k + \mu - m = N_B (k + \alpha(\mu - m)) + \underbrace{\mu - m - N_B \alpha(\mu - m)}_{\mu'}$$

mit $0 \leq \mu' \leq N_B - 1$. Anwendung von Gl. 5.14 ergibt somit für alle $\mu - m$:

$$x(N_B k + \mu - m) = x_{\mu - m - N_B \alpha(\mu - m)}(k + \alpha(\mu - m)).$$

Aus Gl. 5.17 wird damit:

$$\Delta \dot{x}_\mu(k) = A\Omega \sum_{m=0}^{\infty} w(m) x_{\mu - m - N_B \alpha(\mu - m)}(k + \alpha(\mu - m)). \quad (5.18)$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, wie im allgemeinen die Schwingungswerte aller Bunche in die Kicks auf den μ -ten Bunch eingehen. Einsetzen in Gl. 5.16 ergibt das Differenzgleichungssystem des Multibunchfeedbacks:

$$\begin{aligned}x_\mu(k+1) - 2 \cos(\Omega T_0) x_\mu(k) + x_\mu(k-1) \\ = A \sin(\Omega T_0) \sum_{m=0}^{\infty} w(m) x_{\mu - m - N_B \alpha(\mu - m)}(k + \alpha(\mu - m))\end{aligned} \quad (5.19)$$

für $\mu = 0 \dots N_B - 1$.

5.1.3 Transformation in den z-Bereich und Berechnung der Kopplungsmatrix

Gl. 5.19 wird einer z-Transformation unterzogen. Das Ergebnis ist:

$$X_\mu(z)Q(z) = A \sin(\Omega T_0) F_\mu(z), \quad \mu = 0 \dots N_B - 1, \quad (5.20)$$

mit

$$z = e^{sT_0} = \zeta^{N_B}, \quad (5.21)$$

$$Q(z) := z - 2 \cos(\Omega T_0) + z^{-1}, \quad (5.22)$$

und

$$F_\mu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w(m) X_{\mu-m-N_B \alpha(\mu-m)}(z) z^{\alpha(\mu-m)}. \quad (5.23)$$

Dabei wurden alle Anfangswerte zu Null gesetzt, weil sie, wie die Behandlung des Einzelbunchfeedbacks in Abschnitt 4.3.4 zeigt, für die Berechnung der Dämpfung keine Rolle spielen. Zu beachten ist der Unterschied zwischen den beiden Variablen der z-Transformation, ζ und z , die sich auf die Abtastintervalle T_B bzw. T_0 beziehen.

Es soll nun $F_\mu(z)$ auf die Form

$$F_\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{N_B-1} B_{\mu\nu}(z) X_\nu(z) \quad (5.24)$$

gebracht werden. $B_{\mu\nu}(z)$ ist die Kopplungsmatrix im z-Bereich. Im Sinne einer kompakten Darstellung werden zunächst die $X_\mu(z)$ zu einem Spaltenvektor $\mathbf{X}(z)$ zusammengefasst. Die μ -te Komponente dieses Vektors ist $X_\mu(z)$. $\mathbf{X}(z)$ wird jetzt nach den in Abschnitt 2.4 eingeführten orthonormalen Modenvektoren \mathbf{K}_r entwickelt:

$$\mathbf{X}(z) =: \sum_{r=0}^{N_B-1} C_r(z) \mathbf{K}_r \quad (5.25)$$

$$\Leftrightarrow X_\mu(z) =: \sum_{r=0}^{N_B-1} C_r(z) K_{\mu r} \quad (5.26)$$

$$\Leftrightarrow C_r(z) = \mathbf{K}_r^+ \mathbf{X}(z) = \sum_{\nu=0}^{N_B-1} K_{r\nu}^* X_\nu(z). \quad (5.27)$$

Zur Definition von \mathbf{K}_r^+ s. Abschnitt 2.4. Jetzt wird Gl. 5.26 in Gl. 5.23 eingesetzt. Man erhält

$$F_\mu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w(m) \sum_{r=0}^{N_B-1} C_r(z) K_{\mu-m-N_B \alpha(\mu-m), r} z^{\alpha(\mu-m)}.$$

Einsetzen für $C_r(z)$ nach Gl. 5.27 ergibt

$$F_\mu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w(m) \sum_{r=0}^{N_B-1} \sum_{\nu=0}^{N_B-1} K_{r\nu}^* X_\nu(z) K_{\mu-m-N_B \alpha(\mu-m), r} z^{\alpha(\mu-m)}.$$

Die Summation über r lässt sich mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation der Moden, Gl. 2.40, ausführen. Das Ergebnis ist

$$F_\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{N_B-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} w(m) \delta_{\nu, \mu-m-N_B \alpha(\mu-m)} z^{\alpha(\mu-m)} \right) X_\nu(z).$$

Damit hat $F_\mu(z)$ die gewünschte Form von Gl. 5.24. Für die Kopplungsmatrix erhält man

$$B_{\mu\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w(m) \delta_{\nu, \mu-m-N_B} \alpha(\mu-m) z^{\alpha(\mu-m)}. \quad (5.28)$$

Sie wird durch die Impulsantwort $w(m)$ des Feedbackpfades bestimmt. Aus Gl. 5.20 und 5.24 folgt nun:

$$X_\mu(z)Q(z) = A \sin(\Omega T_0) \sum_{\nu=0}^{N_B-1} B_{\mu\nu}(z) X_\nu(z), \quad \mu = 0 \dots N_B - 1. \quad (5.29)$$

Diese Gleichung zeigt die lineare Struktur der Bunchkopplung.

5.1.4 Die Diagonalisierung der Kopplungsmatrix

Man kann das Gleichungssystem 5.29 auch in Matrixschreibweise darstellen:

$$A \sin(\Omega T_0) \mathbf{B}(z) \mathbf{X}(z) = Q(z) \mathbf{X}(z) \quad (5.30)$$

$\mathbf{B}(z)$ ist die Kopplungsmatrix mit den Elementen $B_{\mu\nu}(z)$. Es handelt sich um ein z -abhängiges Eigenwertproblem. Gesucht sind die z , für die $A \sin(\Omega T_0) \mathbf{B}(z)$ den Eigenwert $Q(z)$ hat. Die Eigenvektoren von $\mathbf{B}(z)$ sind eng mit den Modenvektoren \mathbf{K}_r verbunden und werden deshalb als modifizierte Modenvektoren $\tilde{\mathbf{K}}_r(z)$ bezeichnet. Es gilt

$$\tilde{K}_{\mu r}(z) = K_{\mu r} z^{\mu/N_B}, \quad \mu = 0 \dots N_B - 1, \quad r = 0 \dots N_B - 1. \quad (5.31)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{N_B-1} B_{\mu\nu}(z) \tilde{K}_{\nu r}(z) &= \sum_{\nu=0}^{N_B-1} \sum_{m=0}^{\infty} w(m) \delta_{\nu, \mu-m-N_B} \alpha(\mu-m) z^{\alpha(\mu-m)} K_{\nu r} z^{\nu/N_B} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} w(m) z^{\alpha(\mu-m)} K_{\mu-m-N_B \alpha(\mu-m), r} z^{(\mu-m-N_B \alpha(\mu-m))/N_B} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} w(m) K_{\mu-m-N_B \alpha(\mu-m), r} z^{(\mu-m)/N_B}. \end{aligned}$$

Wegen $K_{\rho r} = K_{(\rho+N_B), r}$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{N_B-1} B_{\mu\nu}(z) \tilde{K}_{\nu r}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} w(m) K_{\mu-m, r} z^{(\mu-m)/N_B} \\ &= \tilde{K}_{\mu r}(z) \sum_{m=0}^{\infty} w(m) e^{-j r \omega_0 m T_B} z^{-m/N_B}. \end{aligned}$$

Führt man nun die Abkürzung

$$\zeta_r := e^{jr\omega_0 T_B} \quad (5.32)$$

ein, so folgt mit Gl. 5.11

$$\sum_{\nu=0}^{N_B-1} B_{\mu\nu}(z) \tilde{K}_{\nu r}(z) = \tilde{K}_{\mu r}(z) W(\zeta_r z^{1/N_B}),$$

oder in Matrixdarstellung

$$\mathbf{B}(z) \tilde{\mathbf{K}}_r(z) = W(\zeta_r z^{1/N_B}) \tilde{\mathbf{K}}_r(z). \quad (5.33)$$

Die $\tilde{\mathbf{K}}_r(z)$ sind also die Eigenvektoren von $\mathbf{B}(z)$ zu den Eigenwerten $W(\zeta_r z^{1/N_B})$.

Zu jedem $\tilde{\mathbf{K}}_r(z)$ wird nun ein "adjungierter" Vektor $\tilde{\mathbf{K}}_r^{(a)}(z)$ definiert:

$$\tilde{K}_{\mu r}^{(a)}(z) := K_{\mu r} \cdot (z^*)^{-\mu/N_B}. \quad (5.34)$$

Es gilt:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_r^{(a)}(z))^+ \tilde{\mathbf{K}}_{r'}(z) = \sum_{\mu=0}^{N_B-1} K_{r\mu}^* z^{-\mu/N_B} K_{\mu r'} z^{\mu/N_B} = \delta_{rr'}. \quad (5.35)$$

Daraus folgt, daß die modifizierten Modenvektoren linear unabhängig sind. Für beliebige Koeffizienten a_r gilt nämlich, daß aus

$$\sum_{r=0}^{N_B-1} a_r \tilde{\mathbf{K}}_r(z) = 0$$

folgt

$$a_r = (\tilde{\mathbf{K}}_r^{(a)}(z))^+ \sum_{r'=0}^{N_B-1} a_{r'} \tilde{\mathbf{K}}_{r'}(z) = 0$$

für alle $r = 0 \dots N_B - 1$. Die $\tilde{\mathbf{K}}_r(z)$ bilden also eine nicht orthogonale Basis des Vektorraums.

Durch Entwicklung von $\mathbf{X}(z)$ nach dieser Basis wird die Kopplungsmatrix diagonalisiert:

$$\mathbf{X}(z) =: \sum_{r=0}^{N_B-1} \tilde{\mathbf{C}}_r(z) \tilde{\mathbf{K}}_r(z) \quad (5.36)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{C}}_r(z) = (\tilde{\mathbf{K}}_r^{(a)}(z))^+ \mathbf{X}(z) = \sum_{\mu=0}^{N_B-1} K_{r\mu}^* z^{-\mu/N_B} X_\mu(z). \quad (5.37)$$

Die $\tilde{C}_r(z)$ werden als modifizierte Modenkoeffizienten bezeichnet. Die Faktoren $z^{-\mu/N_B} = \zeta^{-\mu}$ entsprechen im Zeitbereich einer Verzögerung um μT_B , s. Gl. 3.27. Sie resultieren aus der Tatsache, daß die den $X_\mu(z)$ zugeordneten Folgen $x_\mu(k)$ zeitlich um μT_B gegeneinander versetzt abgetastet werden.

Man setzt nun Gl. 5.36 in Gl. 5.30 ein und erhält:

$$A \sin(\Omega T_0) \sum_{r=0}^{N_B-1} \tilde{C}_r(z) \mathbf{B}(z) \tilde{\mathbf{K}}_r(z) = Q(z) \sum_{r=0}^{N_B-1} \tilde{C}_r(z) \tilde{\mathbf{K}}_r(z).$$

Dann wird auf beiden Seiten mit $(\tilde{\mathbf{K}}_{r'}^{(a)}(z))^+$ multipliziert. Es folgt:

$$A \sin(\Omega T_0) \sum_{r=0}^{N_B-1} W_{r',r}(z) \tilde{C}_r(z) = Q(z) \tilde{C}_{r'}(z), \quad r' = 0 \dots N_B - 1, \quad (5.38)$$

mit

$$W_{r',r}(z) := (\tilde{\mathbf{K}}_{r'}^{(a)}(z))^+ \mathbf{B}(z) \tilde{\mathbf{K}}_r(z) \stackrel{\text{Gl. 5.33}}{=} W(\zeta_r z^{1/N_B}) \delta_{r',r}. \quad (5.39)$$

Gl. 5.38 ist das Gleichungssystem 5.29 in (modifizierter) Modendarstellung. Da in dieser Darstellung die Kopplungsmatrix, $W_{r',r}(z)$, diagonal ist, sind die Moden in Gl. 5.38 entkoppelt:

$$A \sin(\Omega T_0) W(\zeta_r z^{1/N_B}) \tilde{C}_r(z) = Q(z) \tilde{C}_r(z).$$

Die Pole von $\tilde{C}_r(z)$ sind somit durch

$$\boxed{Q(z) = A \sin(\Omega T_0) W(\zeta_r z^{1/N_B}), \quad r = 0 \dots N_B - 1} \quad (5.40)$$

gegeben. Das entspricht Gl. 4.59 für die Pole des Einzelbunchfeedbacks.

5.1.5 Dämpfung und Frequenzverschiebung der Moden

Die Entkopplung der Moden bedeutet, daß jeder Mode eigene Dämpfungen $D_{r\pm}$ und eigene Frequenzverschiebungen $\Delta\Omega_{r\pm}$ besitzt, die, abgesehen von einem unten erläuterten Zusammenhang zwischen Mode r und $N_B - r$, unabhängig vom Verhalten der anderen Moden sind. Diese lassen sich aus Gl. 5.40 auf gleiche Weise berechnen, wie D und $\Delta\Omega$ des Einzelbunchfeedbacks aus Gl. 4.59. Für kleines A sind wieder nur die Lösungen $z_{r\pm} \approx e^{\pm j\Omega T_0}$ relevant, da alle anderen gegen Null gehen. Für $z_{r\pm}$ ergibt sich:

$$z_{r\pm} \approx e^{\pm j\Omega T_0} \pm \frac{A}{2j} e^{\pm j\Omega T_0} W(\zeta_r e^{\pm j\Omega T_B}).$$

Man definiert entsprechend Gl. 4.61:

$$W(\zeta_r e^{\pm j\Omega T_B}) = W(e^{j(r\omega_0 \pm \Omega) T_B}) =: \hat{W}_{r\pm} e^{j\Xi_{r\pm}}. \quad (5.41)$$

$r\omega_0 \pm \Omega$ sind nach Abschnitt 2.4 die Frequenzen, die der Mode r am Monitor erzeugt. Der Mode ist für

$$\Xi_{r\pm} = \mp \frac{\pi}{2} \quad (5.42)$$

optimal gedämpft, da dann $|z_{r\pm}|$ minimal ist. Die Phasenabweichung wird mit

$$\Delta\Xi_{r\pm} := \Xi_{r\pm} \pm \frac{\pi}{2} \quad (5.43)$$

bezeichnet. Definiert man Dämpfung und Frequenzverschiebung der Moden durch

$$z_{r\pm} := e^{-D_{r\pm} \pm j(\Omega + \Delta\Omega_{r\pm})}, \quad (5.44)$$

so erhält man analog zu Gl. 4.69 und 4.71 die Ergebnisse

$$D_{r\pm} = \frac{A}{2} \hat{W}_{r\pm} \cos \Delta\Xi_{r\pm}, \quad (5.45)$$

und

$$\Delta\Omega_{r\pm} = \mp \frac{A}{2T_0} \hat{W}_{r\pm} \sin \Delta\Xi_{r\pm}. \quad (5.46)$$

$D_{r\pm}$ und $\Delta\Omega_{r\pm}$ werden also durch die spektralen Eigenschaften des Feedbackpfades bei $\omega = r\omega_0 \pm \Omega$ bestimmt, ein sehr plausibles Ergebnis.

Die exakte Unterscheidung zwischen den Frequenzen $r\omega_0 + \Omega$ und $r\omega_0 - \Omega$ von Mode r ist wichtig, weil $z_{r+}^* \neq z_{r-}$. Die beiden Linien sind also unterschiedlich gedämpft. Es gilt jedoch

$$z_{r\pm}^* = z_{N_B - r, \mp}, \quad (5.47)$$

woraus

$$D_{r\pm} = D_{N_B - r, \mp} \quad \text{und} \quad \Delta\Omega_{r\pm} = \Delta\Omega_{N_B - r, \mp} \quad (5.48)$$

folgt. Dieser Zusammenhang zwischen Mode r und $N_B - r$, der Gl. 2.44 von Abschnitt 2.4 entspricht, stellt sicher, daß die Kombination aller Moden wieder reelle Signale ergibt.

Der Beweis von Gl. 5.47 und 5.48 beruht auf der Realität der Impulsantwort $w(m)$ des Feedbackpfades: Sei $z_{r\pm}$ Lösung von Gl. 5.40, also

$$z_{r\pm} - 2 \cos(\Omega T_0) + z_{r\pm}^{-1} = A \sin(\Omega T_0) W(\zeta_r z_{r\pm}^{1/N_B}). \quad (5.49)$$

Da $w(m)$ reell und $\zeta_r^* = \zeta_{N_B - r}$, gilt

$$(W(\zeta_r z_{r\pm}^{1/N_B}))^* = W(\zeta_{N_B - r} (z_{r\pm}^*)^{1/N_B}). \quad (5.50)$$

Bildet man in Gl. 5.49 auf beiden Seiten das konjugiert Komplexe, so erhält man daraus

$$z_{r\pm}^* - 2 \cos(\Omega T_0) + (z_{r\pm}^*)^{-1} = A \sin(\Omega T_0) W(\zeta_{N_B-r} (z_{r\pm}^*)^{1/N_B}). \quad (5.51)$$

Die $z_{r\pm}^*$ sind also Lösungen der Polgleichung von Mode $N_B - r$. Da $z_{r\pm}^* \approx e^{\mp j \Omega T_0}$, gilt die Behauptung $z_{r\pm}^* = z_{N_B-r, \mp}$. Analog zu Gl. 5.50 gilt

$$(W(\zeta_r e^{\pm j \Omega T_B}))^* = W(\zeta_{N_B-r} e^{\mp j \Omega T_B}), \quad (5.52)$$

woraus mit Gl. 5.41 folgt:

$$\hat{W}_{r\pm} = \hat{W}_{N_B-r, \mp} \quad \text{und} \quad -\Xi_{r\pm} = \Xi_{N_B-r, \mp}. \quad (5.53)$$

Für den Phasenfehler ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \Delta \Xi_{N_B-r, \mp} &= \Xi_{N_B-r, \mp} \mp \frac{\pi}{2} = -\Xi_{r\pm} \mp \frac{\pi}{2}. \\ \Rightarrow \Delta \Xi_{N_B-r, \mp} &= -\Delta \Xi_{r\pm}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Aus den Gleichungen für Dämpfung und Frequenzverschiebung, 5.45 und 5.46, erhält man nun direkt die oben behaupteten Relationen

$$D_{r\pm} = D_{N_B-r, \mp} \quad \text{und} \quad \Delta \Omega_{r\pm} = \Delta \Omega_{N_B-r, \mp}.$$

5.1.6 Das optimale Multibunchfeedback

Als "optimal" wird hier ein Feedback bezeichnet, bei dem alle Moden gleichmäßig und mit Phase $\Xi_{r+} = -\pi/2$ gedämpft sind. Der Frequenzgang des Feedbackpfades ist nach Gl. 5.9 durch

$$W_d(j\omega) := W(e^{j\omega T_B}) = \frac{1}{\hat{V}} H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega) G_d(j\omega) \quad (5.55)$$

gegeben. Im Idealfall stellt $G_d(j\omega)$ einen linearphasigen Allpaß dar. Definiert man $\hat{V} := |G_d(j\omega)|$, so gilt dann:

$$G_d(j\omega) = \hat{V} e^{-j\omega \Delta t}.$$

Da $G_d(j\omega)$ alle Laufzeiten im Feedbackpfad enthält, ist Δt mit der Verzögerung Δt_{FB} zwischen Abtastung und Kick zu identifizieren:

$$G_d(j\omega) = \hat{V} e^{-j\omega \Delta t_{FB}}. \quad (5.56)$$

Es folgt

$$\Xi_{r+} = \Delta\varphi - (r\omega_0 + \Omega) \Delta t_{FB}.$$

Um $\Xi_{r+} = -\pi/2$ für alle r zu erfüllen, muß $\omega_0 \Delta t_{\text{FB}}$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein:

$$\omega_0 \Delta t_{\text{FB}} = p \cdot 2\pi \Leftrightarrow \Delta t_{\text{FB}} = p \cdot T_0.$$

p ist die Zahl der ganzen Umläufe zwischen Abtastung und Kick, die in Abschnitt 4.1.1 als n_U eingeführt wurde. Man schreibt deshalb besser

$$\Delta t_{\text{FB}} = n_U \cdot T_0. \quad (5.57)$$

Daraus ergibt sich für die am DPS einzustellende Phase:

$$\Xi_{r+} = \Delta\varphi_{\text{DPS}} - \Omega n_U T_0 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi_{\text{DPS}} = -\frac{\pi}{2} + n_U \cdot 2\pi q. \quad (5.58)$$

Dies entspricht den bereits für das Einzelbunchfeedback abgeleiteten Ergebnissen Gl. 4.5 und 4.7 mit $\Delta t_{\text{M-Ki}} = 0$ und $\Delta\phi_{\text{M-Ki}} = 0$.

Aus Gl. 5.56 und 5.57 folgt

$$G_a(j\omega) = \hat{V} e^{-j\omega n_U T_0}. \quad (5.59)$$

Vergleich mit Gl. 5.7 ergibt

$$g(m) = \begin{cases} \hat{V} & m = n_U N_B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (5.60)$$

$g_c(t)$ muß also sehr schnell abklingen, oder für alle $mT_B \neq n_U N_B T_B$ Nulldurchgänge haben. Neben $H_{N,a}(\Delta\varphi; j\omega)$ haben dann auch $G_a(j\omega)$ und damit $V_a(j\omega)$ bzw. $W_a(j\omega)$ eine von ω_B auf ω_0 verkürzte Periode. \tilde{W}_{r+} ist somit für alle r gleich und alle Moden sind gleichmäßig gedämpft.

Da $g(m)$ nur für einen Wert von 0 verschieden ist, trifft jeder Kick nur noch den Bunch, dem er zugeordnet ist, woraus bereits anschaulich folgt, daß das Multibunchfeedback in N_B Einzelbunchfeedbacks übergeht. Das läßt sich auch explizit nachrechnen: Aus Gl. 5.60 und $v(m) = \tilde{h}(\Delta\varphi; m) * g(m)$ folgt

$$v(m) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{h}(\Delta\varphi; m-l) g(l) = \hat{V} \tilde{h}(\Delta\varphi; m - n_U N_B).$$

$v(m)$ und damit $w(m)$ sind also wie $\tilde{h}(\Delta\varphi; m)$, s. Gl. 5.3, nur dann von Null verschieden, wenn m ein ganzzahliges Vielfaches von N_B ist, $m = n N_B$. Dadurch entfällt die Kopplung zwischen den Bunchen und das Differenzgleichungssystem 5.19 zerfällt in N_B unabhängige Gleichungen: Setzt man dort $m = n N_B$, so folgt wegen

$$\alpha(\mu - n N_B) = \text{floor}\left(\frac{\mu}{N_B} - n\right) = -n,$$

daß

$$x_\mu(k+1) - 2 \cos(\Omega T_0) x_\mu(k) + x_\mu(k-1) = A \sin(\Omega T_0) \sum_{n=n_0-N}^{n_0+N} w(n N_B) x_\mu(k-n),$$

für $\mu = 0 \dots N_B - 1$. Das entspricht der Differenzgleichung 4.53 des Einzelbunchfeedbacks. Damit ist das optimale Multibunchfeedback auf ein Einzelbunchfeedback zurückgeführt, das aus diesem Grunde in Kap. 4 ausführlich behandelt wurde. Die Feedbacksysteme von PETRA und HERA können in guter Näherung als Einzelbunchfeedbacks betrachtet werden.

Die Qualität des Feedbacks hängt neben dem DPS also entscheidend von den Eigenschaften der analogen Übertrager ab. Abweichungen von der Linearphasigkeit in $G_d(j\omega)$ führen zu Phasenfehlern $\Delta \Xi_{r\pm}$ und Abweichungen vom Allpaßverhalten zu unterschiedlichen $\hat{W}_{r\pm}$, was sich gemäß Gl. 5.45 auf die Dämpfung der Moden auswirkt. Gl. 5.7 zeigt, daß $|G_d(j\omega)| = \text{const}$ nur möglich ist, wenn die kontinuierliche Übertragungsfunktion $G_c(j\omega)$ eine Mindestbandbreite von $\Delta\omega = \omega_B/2$ besitzt, vgl. auch Abb. 3.4.

Eine ausführliche Diskussion des Zusammenhangs zwischen den analogen Übertragern im Feedbackpfad und den Eigenschaften des Feedbacks findet sich in [Ebe91]. Eine Alternative zu der dort beschriebenen Optimierung des Frequenzgangs mit den Mitteln der Analogtechnik besteht in der Einfügung eines zusätzlichen Digitalfilters in den Feedbackpfad. Dadurch wird prinzipiell die Einstellung der Dämpfung jedes einzelnen Modes ermöglicht, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, daß aus den in Abschnitt 4.2.2 genannten Gründen die Verzögerung Δt_{FB} begrenzt werden muß.

5.2 Die Simulation des Multibunchfeedbacks

Die folgende Simulation zeigt anhand eines Systems von acht Bunchen, wie die Theorie des Multibunchfeedbacks anzuwenden ist, und demonstriert gleichzeitig die Leistungsfähigkeit dieser Theorie.

Die Berechnungen wurden auf einem PC mit Hilfe des Befehlsinterpreters "MATLAB" der Firma "The MathWorks" durchgeführt.

5.2.1 Der Feedbackpfad

Die Impulsantwort des Feedbackpfades ist nach Gl. 5.8 von der Form

$$v(m) = \bar{h}(\Delta\varphi; m) * g(m).$$

$\bar{h}(\Delta\varphi; m)$ ist nach Gl. 5.3 durch die Impulsantwort des DPS, $h(\Delta\varphi; k)$, gegeben, für die der dreikoeffizientige Algorithmus von Gl. 4.31 angesetzt wurde. $\Delta\varphi$ wurde auf die optimale Phase $\Delta\varphi_{\text{DPS}}$ eingestellt. Es folgt:

$$v(m) = \sum_{l=-1}^1 h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; l) \cdot g(m - N_{\text{B}}l). \quad (5.61)$$

Der Frequenzgang der analogen Übertrager im PETRA-Feedback ist so weit optimiert, daß er sich zur Demonstration von Multibuncheffekten nicht eignet. Deshalb wurde ein einfacher RC -Tiefpaß als Modell benutzt:

$$H_{\text{TP},c}(j\omega) = \frac{\omega_{\text{g}}}{\omega_{\text{g}} + j\omega}. \quad (5.62)$$

$\omega_{\text{g}} := 1/RC$ ist die Grenzfrequenz des Tiefpasses. Die kontinuierliche Impulsantwort ist durch

$$h_{\text{TP},c}(t) = \omega_{\text{g}} s_{\text{c}}(t) e^{-\omega_{\text{g}} t} \quad (5.63)$$

gegeben. $s_{\text{c}}(t)$ ist die Sprungfunktion. In der Gesamt-Impulsantwort der analogen Übertrager, $g_{\text{c}}(t)$, sind darüber hinaus die Impulsantwort $r_{\text{c}}(t)$ des DAC, s. Abschnitt 3.3.2, eine Verzögerung Δt und ein Verstärkungsfaktor \hat{V} zu berücksichtigen:

$$g_{\text{c}}(t) = \hat{V} h_{\text{TP},c}(t) * r_{\text{c}}(t) * \delta_{\text{c}}(t - \Delta t). \quad (5.64)$$

Δt wurde so gewählt, daß das Maximum von $g_{\text{c}}(t)$ bei $t = 2T_0$ entsprechend $m = 2N_{\text{B}}$ liegt. Da gleiche Position von Monitor und Kicker vorausgesetzt wird, trifft dadurch das Maximum des Kickerpulses den richtigen Bunch. Auswertung der Faltungsintegrale ergibt:

$$g_{\text{c}}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2T_0 - T_{\text{B}} \\ \hat{V}(1 - e^{-\omega_{\text{g}}(t - (2T_0 - T_{\text{B}}))}) & 2T_0 - T_{\text{B}} \leq t \leq 2T_0 \\ \hat{V}(1 - e^{-\omega_{\text{g}}T_{\text{B}}})e^{-\omega_{\text{g}}(t - 2T_0)} & 2T_0 \leq t \end{cases} \quad (5.65)$$

Wie in Abb. 5.1 dargestellt, entsteht daraus durch Abtastung in Intervallen von T_{B} die Folge $g(m)$. Sie ist aufgrund des exponentiellen Verlaufs von $g_{\text{c}}(t)$ von unendlicher Länge. Für die Simulation wurden jedoch alle $g(m)$ mit

$$\frac{g(m)}{g(2N_{\text{B}})} < e^{-4} \approx 0,018$$

zu Null gesetzt.

Für die Grenzfrequenz, den Q -Wert und die Feedbackstärke wurden die Werte

$$\omega_{\text{g}} = 0,05\omega_{\text{B}}, \quad q = 0,15 \quad \text{und} \quad A = 0,1$$

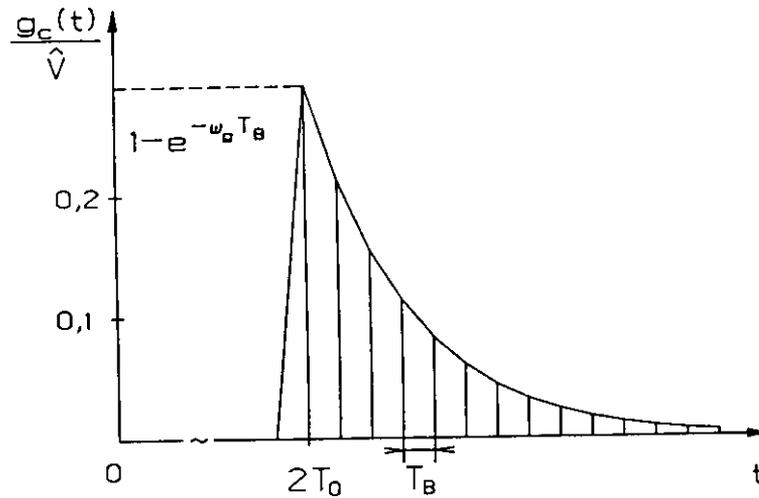


Abbildung 5.1: Die in der Simulation benutzte kontinuierliche Impulsantwort des Feedbackpfades, $g_c(t)$: Die Bunche tasten diese Funktion in Intervallen von T_B ab, wodurch die Folge $g(m)$ entsteht. Die Verzögerung wird so eingestellt, daß das Maximum den richtigen Bunch trifft. $\omega_g = 0,05 \omega_B$.

gewählt. Aus $q = 0,15$ folgt

$$\Delta\varphi_{\text{DPS}} = 4\pi q - \frac{\pi}{2} = 0,1\pi.$$

Abb. 5.2 zeigt die normierte Impulsantwort $w(m)$ des Feedbackpfades, die aus $g(m)/\hat{V}$ durch Faltung mit $\tilde{h}(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; m)$ hervorgeht. Die Bandbreite des Feedbackpfades liegt um einen Faktor 10 unter dem für ein optimales Multibunchfeedback erforderlichen Mindestwert von $\omega_B/2$, vgl. Abb. 5.3. Der durch den RC -Tiefpaß hervorgerufene Phasenfehler, $\arg(G_d(j\omega)) - (-\omega \cdot 2T_0)$, ist in Abb. 5.4 abzulesen. Er beträgt maximal ca. 50° .

Die Angabe von A , $\Omega = q\omega_0$ und $w(m)$ definiert nach Gl. 5.13 den Feedbackpfad eindeutig.

5.2.2 Die Simulation der Bunchschwingungen

Wie bereits erwähnt, wurde für die Simulation ebenso wie in der Multibunchtheorie angenommen, daß Monitor und Kicker am gleichen Orte stehen. Die Schwingung des μ -ten Bunches wird deshalb durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_\mu(k+1) \\ \dot{x}_\mu(k+1)/\Omega \end{pmatrix} = \mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} x_\mu(k) \\ (\dot{x}_\mu(k) + \Delta\dot{x}_\mu(k))/\Omega \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

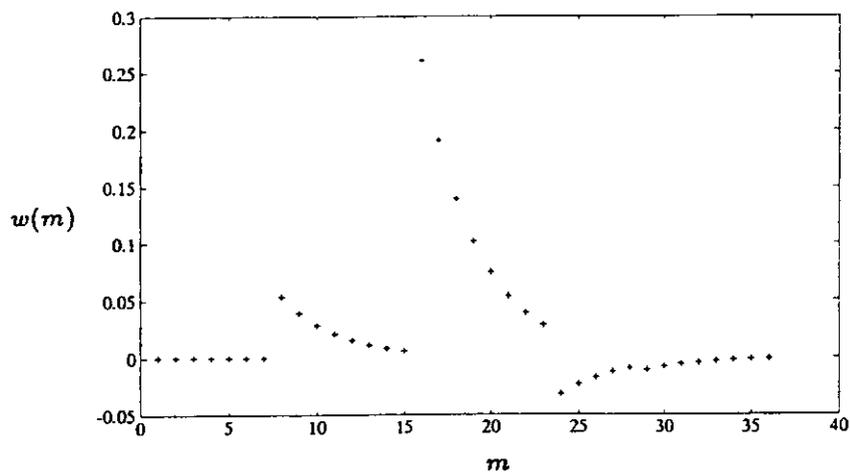


Abbildung 5.2: Die in der Simulation verwendete normierte Impulsantwort des Feedbackpfades, $w(m)$: Man erkennt deutlich, daß $w(m)$ aus $g(m)/\hat{V}$ durch Faltung mit dem dreikoeffizientigen DPS entstanden ist.

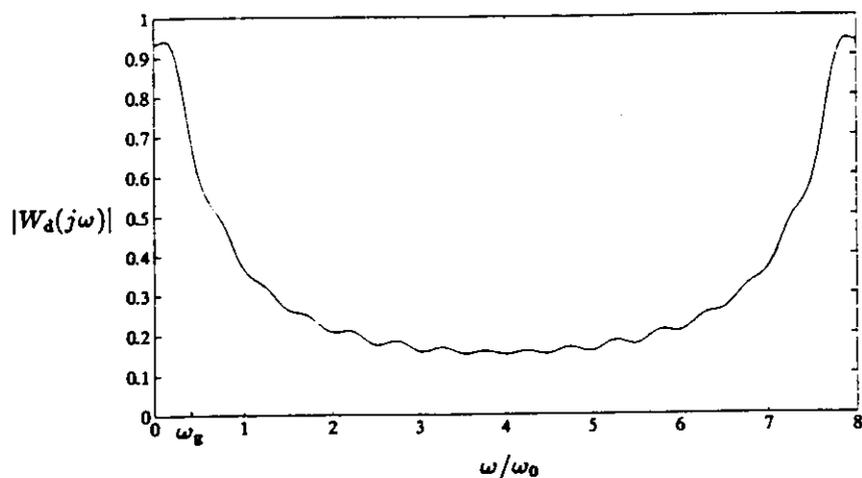


Abbildung 5.3: Der Amplitudengang der normierten Übertragungsfunktion des Feedbackpfades, $|W_d(j\omega)|$. ω_g liegt so niedrig, daß nur Mode 0 annähernd optimal gedämpft wird, s. u.

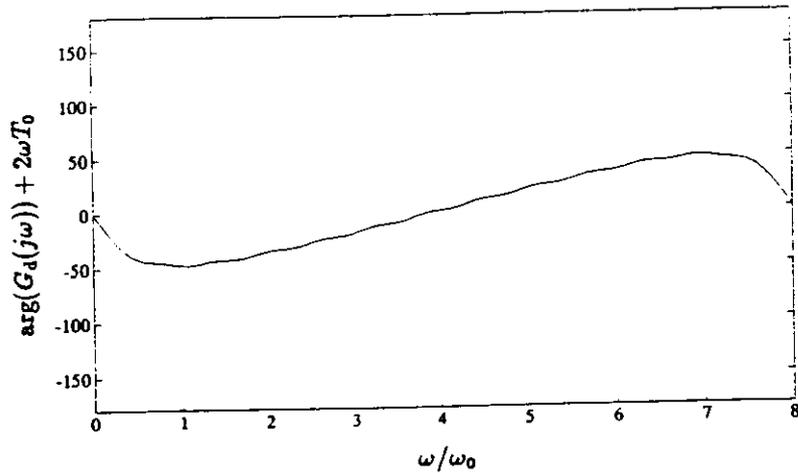


Abbildung 5.4: Der Anteil der analogen Übertrager am Phasengang des Feedbackpfades, $\arg(G_d(j\omega))$, weicht von der Idealphase $-\omega \cdot 2T_0$ bis zu $\pm 50^\circ$ ab.

beschrieben. $x_\mu(k)$ ist der Schwingungswert des μ -ten Bunches am Monitor/Kicker im k -ten Umlauf, $\dot{x}_\mu(k)$ die zugehörige Ableitung vor dem Kick, $\Delta\dot{x}_\mu(k)$ der Kick und Ω die Schwingungsfrequenz. M_0 ist die Umlaufmatrix, die den Phasenvorschub der Schwingung pro Umlauf beschreibt:

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi q & \sin 2\pi q \\ -\sin 2\pi q & \cos 2\pi q \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Für den ganzzahligen Anteil des Q-Werts wurde $Q_0 = 0$ angenommen, das heißt $\Omega = 2\pi q/T_0$. $Q_0 \neq 0$ führt lediglich zu einer Vertauschung der Moden. Der Kick $\Delta\dot{x}_\mu(k)$ ist durch Gl. 5.18 gegeben. Für die Zahl der Bunche wurde der Wert

$$N_B = 8$$

gewählt, um die Rechenzeit zu verkürzen. Damit ist nun das Gesamtsystem aus Strahl und Feedbackpfad nach Gl. 5.19 eindeutig bestimmt. Die Gleichungen 5.66, 5.67 und 5.18 lassen sich direkt in ein Programm umsetzen.

Zur Demonstration von Multibuncheffekten eignet sich besonders der Fall gut, in dem zu Beginn nur ein einzelner Bunch schwingt und alle anderen Bunche in Ruhe sind. Abb. 5.5 zeigt das Ergebnis der Simulation: Anfangs schwingt allein Bunch 0. Bei $k = k_F = 10$ wird das Feedback eingeschaltet. $x_0(k)$ wird dadurch gedämpft. Da die diesem Bunch zugeordneten Kicks jedoch auch die nachfolgenden Bunche treffen, werden jene zu Schwingungen angeregt, am stärksten Bunch 1. Mit dem Abklingen von $x_0(k)$ läßt die Anregung nach, so daß für größere k auch $x_1(k)$ gedämpft wird. Im Endeffekt werden alle Bunche gedämpft, weil, wie unten erläutert, alle Moden gedämpft sind.

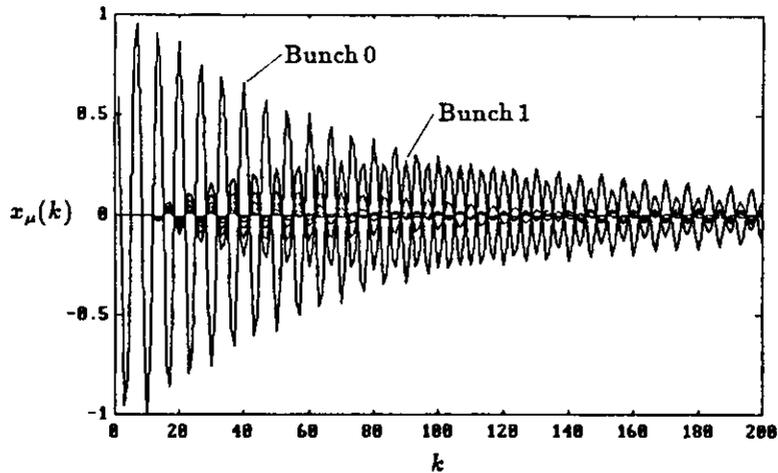


Abbildung 5.5: Das simulierte Multibunchfeedback: Zu Beginn schwingt nur Bunch 0. Einschalten des Feedbacks bei $k = 10$ dämpft diese Schwingung, aber die anderen Bunche werden angeregt. Für große k sind alle Bunche gedämpft.

5.2.3 Die Berechnung der Moden aus den simulierten Bunchschwingungen

Ausgangspunkt für die Berechnung der Moden aus den simulierten Folgen $x_\mu(k)$ ist Gl. 5.37. Diese muß als erstes in den Zeitbereich transformiert werden. Dabei ist der Faktor $z^{-\mu/N_B} = \zeta^{-\mu}$ zu beachten, der im Zeitbereich einer Verzögerung um μT_B entspricht. $x_\mu(k)$ stellt nach Abschnitt 5.1.2 die Abtastfolge der kontinuierlichen Schwingung $x_{\mu,c}(t)$ zu den Zeitpunkten $kT_0 + \mu T_B$ dar:

$$x_\mu(k) = x_{\mu,c}(kT_0 + \mu T_B).$$

Es wird nun die Folge

$$x_{\mu,M}(k) := x_{\mu,c}(kT_0)$$

definiert. Der Index "M" deutet an, daß es die Folgen $x_{\mu,M}(k)$ sind, aus denen die Moden berechnet werden. Da

$$X_\mu(z) = \mathcal{Z}\{x_\mu(k)\} = \mathcal{Z}\{x_{\mu,c}(kT_0 + \mu T_B)\},$$

gilt mit Gl. 3.27:

$$z^{-\mu/N_B} X_\mu(z) = \mathcal{Z}\{x_{\mu,c}(kT_0)\} = \mathcal{Z}\{x_{\mu,M}(k)\}.$$

Damit ergibt sich aus Gl. 5.37:

$$c_r(k) = \sum_{\mu=0}^{N_B-1} K_{r\mu}^* x_{\mu,M}(k), \quad r = 0 \dots N_B - 1. \quad (5.68)$$

Die $c_r(k)$ sind die Modenkoeffizienten im Zeitbereich. Man könnte an dieser Stelle $\tilde{c}_r(k)$ statt $c_r(k)$ schreiben, worauf aber der Übersichtlichkeit halber verzichtet wird.

Die Folgen $x_{\mu,M}(k)$ werden aus den Abtastwerten $x_\mu(k)$ mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\mathbf{M}(\phi_\mu) := \begin{pmatrix} \cos(\phi_\mu) & \sin(\phi_\mu) \\ -\sin(\phi_\mu) & \cos(\phi_\mu) \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

berechnet. ϕ_μ ist der Phasenvorschub, den der Bunch in der Zeit μT_B erfährt:

$$\phi_\mu := \Omega \mu T_B = 2\pi q \frac{\mu}{N_B}. \quad (5.70)$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_{\mu,M}(k) \\ \dot{x}_{\mu,M}(k)/\Omega \end{pmatrix} = \mathbf{M}(-\phi_\mu) \begin{pmatrix} x_\mu(k) \\ \dot{x}_\mu(k)/\Omega \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

Die so berechneten Moden $c_r(k)$ sind jedoch keine anschaulichen Größen, denn es handelt sich um komplexwertige Folgen, die, da $z_{r+} \neq z_{r-}^*$, aus zwei unterschiedlich gedämpften ($D_{r\pm}$) und mit verschiedenen Frequenzen ($\Omega + \Delta\Omega_{r\pm}$) schwingenden Anteilen $c_{r\pm}(k)$ bestehen. Ist das Feedback hinreichend schwach, so läßt sich $c_r(k)$ näherungsweise in diese Anteile zerlegen:

$$c_{r\pm}(k) := \frac{1}{2}(c_r(k) \pm \frac{1}{j\Omega} \dot{c}_r(k)), \quad r = 0 \dots N_B - 1, \quad (5.72)$$

mit

$$\dot{c}_r(k) := \sum_{\mu=0}^{N_B-1} K_{r\mu}^* \dot{x}_{\mu,M}(k), \quad r = 0 \dots N_B - 1. \quad (5.73)$$

Abb. 5.6 zeigt den Verlauf der Beträge $|c_{r+}(k)|$: Zu Beginn sind alle Moden gleich angeregt, da nur ein Bunch schwingt. Vom Einschalten des Feedbacks an klingt jeder Mode mit seiner eigenen Dämpfungs konstanten ab.

5.2.4 Die theoretische Berechnung der Moden

Dämpfung und Frequenzverschiebung der Moden sind in erster Näherung durch Gl. 5.45 und 5.46 gegeben. Da $w(m)$ bekannt ist, s. Abb. 5.2, lassen sich diese Formeln leicht numerisch auswerten. Abb. 5.7 zeigt die so berechnete Dämpfung der Moden r_+ : Alle Moden sind gedämpft ($D_{r+} > 0$), da der Phasenfehler überall unter 90° liegt, aber die geringe Bandbreite des Feedbackpfades führt dazu, daß nur $|D_{0+}|$ den optimalen Wert von $A/2 = 0,05$ annähernd erreicht. Das entspricht den Ergebnissen der Simulation. Zum Ver-

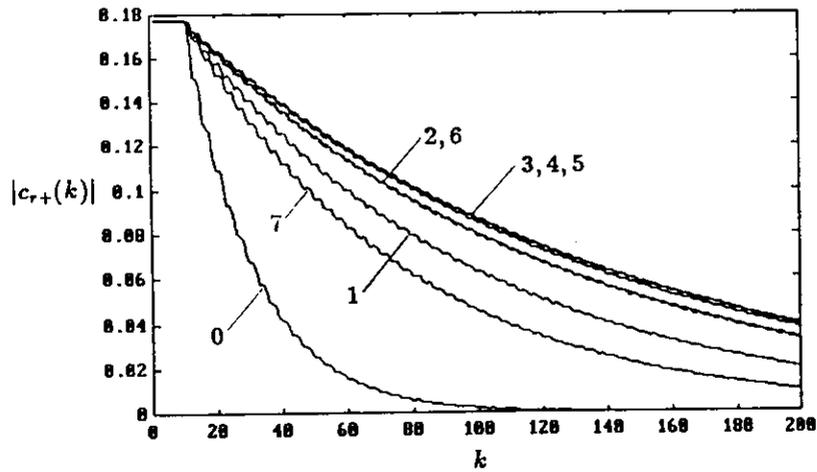


Abbildung 5.6: Der Verlauf der aus der Simulation berechneten Moden $|c_{r+}(k)|$: Jeder Mode klingt mit seiner eigenen Dämpfungs konstanten D_{r+} exponentiell ab.

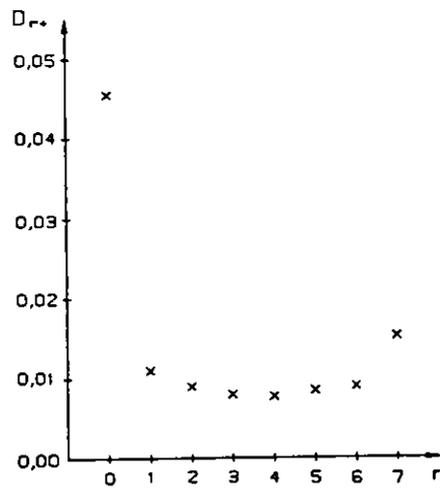


Abbildung 5.7: Die nach Gl. 5.45 berechnete Dämpfung der Moden, D_{r+} : Alle Moden sind, wenn auch unterschiedlich stark, gedämpft.

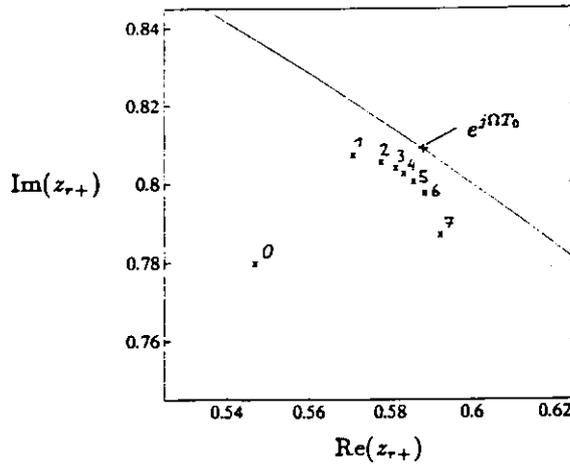


Abbildung 5.8: Die Pole der Moden, z_{r+} : Alle Pole liegen innerhalb des Einheitskreises, von dem ein Abschnitt zusammen mit dem “ungestörten” Pol $e^{j\Omega T_0}$ zur besseren Orientierung eingezeichnet ist.

gleich sind in Abb. 5.8 die aus Gl. 5.40 numerisch berechneten Pole z_{r+} dargestellt. Alle Lösungen liegen innerhalb des Einheitskreises, sind also gedämpft, und $|z_{0+}|$ ist deutlich kleiner als die anderen $|z_{r+}|$.

Nun zur eigentlichen Berechnung des Modenverlaufs: Im folgenden werden alle theoretisch berechneten Werte mit dem Index “th” gekennzeichnet. Für $k \leq k_F$ werden die $c_{r\pm,th}(k)$ aus der Simulation übernommen:

$$c_{r\pm,th}(k) = c_{r\pm}(k), \quad k \leq k_F.$$

Für $k > k_F$ bestimmen $D_{r\pm}$ und $\Delta\Omega_{r\pm}$ den Verlauf:

$$c_{r\pm,th}(k) = c_{r\pm}(k_F) e^{-D_{r\pm}(k-k_F)} e^{j(\Omega + \Delta\Omega_{r\pm})(k-k_F)T_0}, \quad k > k_F. \quad (5.74)$$

Die Folgen $|c_{r\pm,th}(k)|$ sind in Abb. 5.9 dargestellt. Die Übereinstimmung mit Abb. 5.6 ist offensichtlich gut.

5.2.5 Die Konstruktion der Bunchschwingungen aus den theoretisch berechneten Moden

Die Berechnung der Abtastwerte $x_{\mu,th}(k)$ der Bunche aus den bereits bekannten Moden $c_{r\pm,th}(k)$ verläuft umgekehrt zu der in Abschnitt 5.2.3 angegebenen Berechnung der Moden aus den simulierten Bunchschwingungen. Die zu implementierenden Gleichungen sind

$$c_{r,th}(k) = c_{r+,th}(k) + c_{r-,th}(k), \quad (5.75)$$

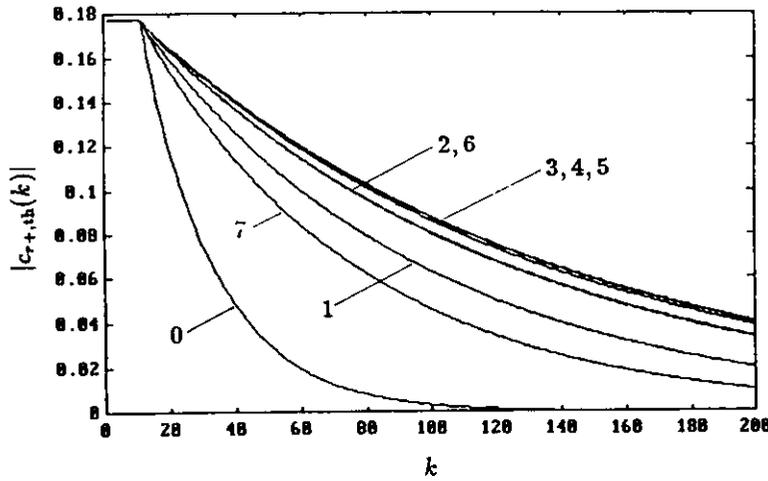


Abbildung 5.9: Der berechnete Verlauf der Beträge $|c_{r,th}(k)|$: Vergleich mit Abb. 5.6 zeigt, daß Simulation und Theorie gut übereinstimmen.

$$\dot{c}_{r,th}(k) = j\Omega(c_{r+,th}(k) - c_{r-,th}(k)), \quad (5.76)$$

$$x_{\mu,M,th}(k) = \sum_{r=0}^{N_B-1} c_{r,th}(k) K_{\mu r}, \quad (5.77)$$

$$\dot{x}_{\mu,M,th}(k) = \sum_{r=0}^{N_B-1} \dot{c}_{r,th}(k) K_{\mu r}. \quad (5.78)$$

für $r = 0 \dots N_B - 1$ bzw. $\mu = 0 \dots N_B - 1$. Daraus erhält man die Abtastwerte mit

$$\begin{pmatrix} x_{\mu,th}(k) \\ \dot{x}_{\mu,th}(k)/\Omega \end{pmatrix} = M(\phi_\mu) \begin{pmatrix} x_{\mu,M,th}(k) \\ \dot{x}_{\mu,M,th}(k)/\Omega \end{pmatrix}, \quad \mu = 0 \dots N_B - 1. \quad (5.79)$$

Die gute Übereinstimmung von Theorie und Simulation belegt der Vergleich von Abb. 5.5 mit Abb. 5.10. Im Detail treten jedoch Abweichungen auf, wie Abb. 5.11 für Bunch 1 zeigt. Diese dürften im wesentlichen von der Vernachlässigung der Anfangsbedingungen und der Näherung $A \ll 1$ bei der Berechnung von Dämpfung und Frequenzverschiebung der Moden sowie bei der Zerlegung von $c_r(k)$ in $c_{r\pm}(k)$ herrühren.

5.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Differenzgleichungssystem für das diskrete Multibunchfeedback abgeleitet und in der Näherung eines schwachen Feedbacks mit Hilfe der z-Transformation gelöst. Weiter wurde gezeigt, wie sich aus dieser

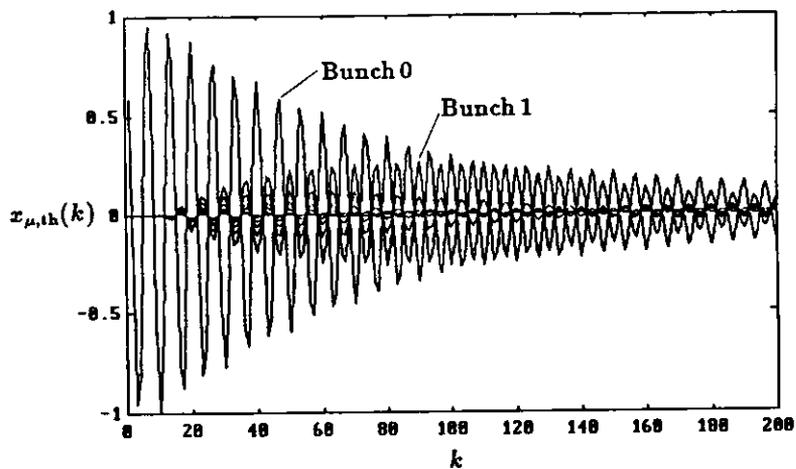


Abbildung 5.10: Die theoretisch berechneten Bunchschwingungen: Die Übereinstimmung mit der in Abb. 5.5 dargestellten Simulation ist gut.

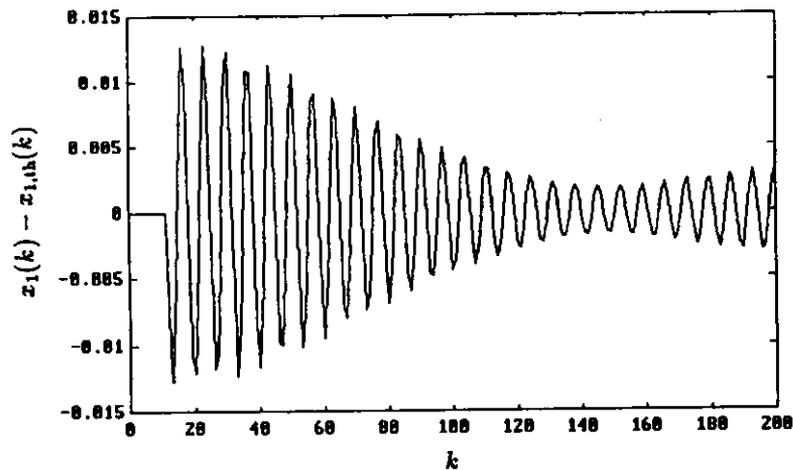


Abbildung 5.11: Die Differenz zwischen simulierter und theoretisch berechneter Schwingung von Bunch 1: Im Vergleich zur Anfangsamplitude von Bunch 0 (1,0) sind die Abweichungen gering.

Theorie das komplexe Verhalten eines rückgekoppelten Multibunchsystems berechnen läßt. Es ergab sich gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen einer Simulation.

Für die Entwicklung eines Feedbacksystems von großer Bedeutung ist Gl. 5.40, aus der sich das Verhalten der entkoppelten Eigenzustände des Bunchsystems, der Moden, in Abhängigkeit von den Übertragungseigenschaften des Feedbackpfades bestimmen läßt. Dies ermöglicht den direkten Vergleich zwischen dem Dämpfungsverhalten des Feedbacks und den ebenfalls modenselektiv wirkenden Instabilitäten. Gl. 5.40 steht im Einklang mit den Resultaten anderer Ansätze [Hei89,Koh91].

Kapitel 6

Der adaptive digitale Phasenschieber

Die Motivation zur Entwicklung eines adaptiven DPS ergibt sich aus Gl. 4.7. Danach hängt der Winkel $\Delta\varphi_{\text{DPS}}$, um den der DPS die Phase des Signals im Feedbackpfad zu drehen hat, vom Q-Wert ab. Die Anpassung von $\Delta\varphi_{\text{DPS}}$ an q kann, wie das bisher in den Feedbacksystemen von PETRA und HERA der Fall ist, "per Hand" vorgenommen werden. Eine Automatisierung dieses Vorgangs ist jedoch im Sinne eines stabilen Beschleunigerbetriebs wünschenswert. Deshalb wird in Abschnitt 6.1 ein Algorithmus entwickelt, der die DPS-Koeffizienten an den Q-Wert anpaßt. Die Stabilität des "adaptiven Feedbacks", das heißt eines Feedbacks mit adaptivem DPS, unter dem Einfluß von Rauschen wird in Abschnitt 6.2 untersucht.

Die Simulationen dieses Kapitels wurden auf einem PC mit Hilfe des Befehlsinterpreters "MATLAB" der Firma "The MathWorks" durchgeführt.

6.1 Der adaptive Algorithmus

6.1.1 Die Ableitung des adaptiven Algorithmus

Gegeben sei ein Einzelbunchfeedback wie in Kap. 4, s. Abb. 4.1. Die Feedbackstärke A sei hinreichend klein, so daß in guter Näherung Monitor und Kicker als am gleichen Orte befindlich betrachtet werden können. Die Strahlschwingung wird dann durch die Folgen

$$x(k) := x_{\text{M}}(k) = x_{\text{Ki}}(k)$$

und

$$\dot{x}(k) := \dot{x}_{\text{M}}(k) = \dot{x}_{\text{Ki}}(k)$$

beschrieben. Im Unterschied zu Kap. 4 wird jedoch angenommen, daß q nicht bekannt ist, so daß $\Delta\varphi_{\text{DPS}}$ und damit die DPS-Koeffizienten nicht auf Grundlage von Gl. 4.7 berechnet werden können. Gesucht ist deshalb ein Algorithmus, der die Filterkoeffizienten für beliebiges q so adaptiert, daß das Feedback die Schwingung möglichst gut dämpft.

Ein solcher Algorithmus wird nun auf Grundlage des beispielsweise in [Kam88a] beschriebenen Gradientenverfahrens entwickelt. Als Zielfunktion wird zunächst die Schwingungsenergie nach dem k -ten Kick

$$E(k) := x(k)^2 + \frac{1}{\Omega^2}(\dot{x}(k) + \Delta\dot{x}(k))^2 \quad (6.1)$$

betrachtet. Daraus ergibt sich sofort der optimale Kick:

$$\Delta\dot{x}(k) = -\dot{x}(k).$$

Am Monitor wird aber nur $x(k)$ und nicht $\dot{x}(k)$ gemessen. In einem schwachen Feedback ist nun die Schwingung $x(k)$ auch nur schwach gedämpft, und man erhält $\Delta\dot{x}(k)$ in guter Näherung aus $x(k)$ durch Multiplikation mit Ω und Phasenverschiebung um $\pi/2$. Die Phasenverschiebung erhält man vermittels des in Abschnitt 4.2 diskutierten Hilbert-Transformators. Die einfachste Approximation von $\dot{x}(k)$ ist deshalb

$$\dot{x}(k) \approx \Omega \frac{2}{\pi} (x(k+1) - x(k-1)). \quad (6.2)$$

Entsprechend erhält man den Kick durch Phasenverschiebung um $-\pi/2$:

$$\Delta\dot{x}(k) = -A\Omega \frac{2}{\pi} (x(k+1) - x(k-1)). \quad (6.3)$$

Mit Hilfe der Feedbackstärke $A \ll 1$ wird berücksichtigt, daß es sich um ein schwaches Feedback handelt. Dieses Ergebnis stellt zunächst einmal eine alternative Ableitung von Gl. 4.4, $\Delta\varphi_{\text{FB}} = -\pi/2$, dar. Abgesehen von dem Vorfaktor Ω , der zusammen mit A in die systemtheoretische Feedbackverstärkung \hat{V} eingeht, vgl. Abschnitt 4.3.3, ist der Algorithmus von Gl. 6.3 unabhängig von q und erfüllt somit die oben aufgestellte Forderung. Er ist aber auch nicht-kausal und damit nicht realisierbar, denn in Echtzeit stehen zur Berechnung von $\Delta\dot{x}(k)$ nur die vergangenen Werte von x bis einschließlich $x(k-1)$ zur Verfügung.

Der korrekte, kausale Ansatz für $\Delta\dot{x}(k)$ lautet deshalb

$$\Delta\dot{x}(k) = A\Omega \sum_{i=-N}^N h_{\text{ad},i}(k)x(k-N-1-i). \quad (6.4)$$

$h_{\text{ad},i}(k)$ ist der im k -ten Umlauf für den i -ten Filterkoeffizienten adaptiv berechnete Wert. Im folgenden wird $N = 1$ angesetzt, da aus Abschnitt 4.2.2 bekannt ist, daß mit drei DPS-Koeffizienten eine gute Annäherung des optimalen Kicks möglich ist.

Die Idee des Gradientenverfahrens besteht nun darin, den Koeffizientenvektor in Richtung des negativen Gradienten der Zielfunktion, hier also der Energie, zu variieren:

$$h_{\text{ad},i}(k+1) = h_{\text{ad},i}(k) - \beta \frac{\partial E(k)}{\partial h_{\text{ad},i}(k)}. \quad (6.5)$$

Über den Parameter β wird die Schrittweite der Adaption eingestellt. Da in $E(k)$ und damit auch in $\partial E(k)/\partial h_{\text{ad},i}(k)$ der Wert $\dot{x}(k)$ eingeht, der nach Gl. 6.2 approximiert werden muß, ist klar, daß auch das Gradientenverfahren in dieser Form auf einen nicht-kausalen Algorithmus führt. Das Kausalitätsproblem läßt sich nun jedoch mit Hilfe einer modifizierten Zielfunktion lösen. Es wird definiert:

$$\bar{E}(k-1) := x(k-1)^2 + \frac{1}{\Omega^2} (\dot{x}(k-1) + \bar{\Delta}\dot{x}(k-1))^2, \quad (6.6)$$

mit

$$\bar{\Delta}\dot{x}(k-1) := A\Omega \sum_{i=-1}^1 h_{\text{ad},i}(k)x(k-3-i). \quad (6.7)$$

Gl. 6.5 wird durch

$$h_{\text{ad},i}(k+1) = h_{\text{ad},i}(k) - \beta \frac{\partial \bar{E}(k-1)}{\partial h_{\text{ad},i}(k)} \quad (6.8)$$

ersetzt. $\bar{\Delta}\dot{x}(k-1)$ ist der Kick, den der Bunch im $(k-1)$ -ten Umlauf erhalten hätte, wenn zu diesem Zeitpunkt bereits der Koeffizientensatz $h_{\text{ad},i}(k)$ benutzt worden wäre. Nach dem Kick hätte die Schwingung dann die Energie $\bar{E}(k-1)$ gehabt, die nun anstelle von $E(k)$ minimiert wird.

In vielen Anwendungen adaptiver Filter wird die Adaption der Koeffizienten an einem Testdatensatz durchgeführt. Die auf diese Weise ermittelten Koeffizienten werden dann auf die aktuellen Daten angewandt. So gesehen kann man die in Gl. 6.6 bis 6.8 verwendete Folge $x(k-1)$ als Testdatensatz betrachten und $x(k)$ als die aktuellen Daten. Der enge Zusammenhang zwischen beiden Datensätzen bewirkt, daß die $h_{\text{ad},i}(k)$ immer auf dem neuesten Stand sind.

Gl. 6.8 läßt sich nun unter Berücksichtigung von Gl. 6.2, 6.6 und 6.7 auswerten. Es gilt:

$$\frac{\partial \bar{E}(k-1)}{\partial h_{\text{ad},i}(k)} = \frac{2}{\Omega^2} (\dot{x}(k-1) + \bar{\Delta}\dot{x}(k-1)) \frac{\partial \bar{\Delta}\dot{x}(k-1)}{\partial h_{\text{ad},i}(k)},$$

und

$$\frac{\partial \tilde{\Delta} \dot{x}(k-1)}{\partial h_{\text{ad},i}(k)} = A\Omega x(k-3-i).$$

Daraus folgt

$$h_{\text{ad},i}(k+1) = h_{\text{ad},i}(k) - \alpha \left(f(k-1) - \frac{g(k-1)}{A} \right) x(k-3-i), \quad (6.9)$$

mit

$$f(k) := \frac{\tilde{\Delta} \dot{x}(k)}{A\Omega} = \sum_{i=-1}^1 h_{\text{ad},i}(k) x(k-2-i), \quad (6.10)$$

$$g(k) := -\frac{2}{\pi} (x(k+1) - x(k-1)) \approx -\frac{\dot{x}(k)}{\Omega}, \quad (6.11)$$

und

$$\alpha := 2\beta A^2. \quad (6.12)$$

Gl. 6.9, 6.10 und 6.11 stellen im Prinzip den (kausalen!) Adaptionalgorithmus dar. $h_{\text{ad},i}(k+1)$ wird aus $h_{\text{ad},i}(k)$ sowie den vergangenen Schwingungswerten bis einschließlich $x(k)$ berechnet. $f(k)$ ist der DPS-Algorithmus, nach dem der Kick $\tilde{\Delta} \dot{x}(k)$ mit zwei Umläufen Verzögerung aus den Werten $x(k-1)$, $x(k-2)$ und $x(k-3)$ berechnet wird. $g(k)$ ist der von q unabhängige, weil verzögerungsfreie und damit nicht-kausale Algorithmus zur Berechnung des Kicks. Gl. 6.9 ist trotzdem kausal, denn dort tritt nur $g(k-1)$ auf. $g(k)$ wird im folgenden als Referenzalgorithmus bezeichnet.

Gl. 6.9 kann nun unter drei Gesichtspunkten noch verbessert werden:

1.) Die Adaption ist beendet, wenn

$$h_{\text{ad},i}(k+1) = h_{\text{ad},i}(k)$$

$$\Rightarrow f(k-1) = \frac{g(k-1)}{A} \Rightarrow \frac{\tilde{\Delta} \dot{x}(k-1)}{A\Omega} = -\frac{\dot{x}(k-1)}{A\Omega} \Rightarrow \tilde{\Delta} \dot{x}(k-1) = -\dot{x}(k-1).$$

Das ist, wie oben bereits erwähnt, in der Tat der ideale Kick, der $\tilde{E}(k-1)$ minimiert. Da somit $f(k) \sim 1/A$, gleicht der Adaptionalgorithmus auf diese Weise eine Feedbackstärke $A \ll 1$ wieder aus, indem die Filterkoeffizienten $h_{\text{ad},i}(k)$ entsprechend vergrößert werden. In der Realität würde dies natürlich nicht zu besserer Dämpfung führen, sondern zur Übersteuerung der Verstärker, deren Ausgangsleistung die Feedbackstärke begrenzt. Aus diesem Grunde wird in Gl. 6.9 der Term $g(k-1)/A$ durch $g(k-1)$ ersetzt:

$$h_{\text{ad},i}(k+1) = h_{\text{ad},i}(k) - \alpha (f(k-1) - g(k-1)) x(k-3-i). \quad (6.13)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Koeffizienten jetzt solange adaptiert werden, bis der kausale DPS-Algorithmus $f(k)$ die gleichen Kicks liefert wie der nicht-kausale Referenzalgorithmus $g(k)$.

2.) Die Schrittweite, $h_{\text{ad},i}(k+1) - h_{\text{ad},i}(k)$, ist nach Gl. 6.13 im Mittel proportional dem Quadrat der Schwingungsamplitude. Dadurch wird die Adaption für kleine Amplituden unnötig langsam, für zu große Amplituden hingegen instabil. Deshalb wird das halbe Amplitudenquadrat näherungsweise über

$$M(k+1) := \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 (x(k-i))^2 \quad (6.14)$$

berechnet und in Gl. 6.13 α durch $\alpha/2M(k+1)$ ersetzt.

3.) Aus der Phasenschieberfunktion der Filterkoeffizienten $h_{\text{ad},i}(k)$ ergibt sich, daß für das "richtige" Adaptionsergebnis $h_{\text{ad},i}(k) = -h_{\text{ad},-i}(k)$ gelten muß, vgl. Abschnitt 4.2.2. Dieses à priori Wissen wurde ausgenutzt und

$$h_{\text{ad},1}(k) = -h_{\text{ad},-1}(k)$$

festgelegt, wodurch sich der Algorithmus, wenn auch nicht maßgeblich, vereinfacht.

Abschließend soll noch die Frage diskutiert werden, wie sich die realen Positionen von Monitor und Kicker auf den Algorithmus auswirken. Bisher war $\Delta\phi_{\text{Ki-M}} = 0$ angenommen worden. Im allgemeinen muß jedoch $\Delta\phi_{\text{Ki-M}}$ im Referenzalgorithmus berücksichtigt werden. Es gilt dann

$$g(k) \approx -\frac{\dot{x}_{\text{Ki}}(k)}{\Omega}$$

$$\Rightarrow g(k) = h(\Delta\varphi; -1)x_{\text{M}}(k+1) + h(\Delta\varphi; 0)x_{\text{M}}(k) + h(\Delta\varphi; 1)x_{\text{M}}(k-1), \quad (6.15)$$

mit

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \Delta\phi_{\text{Ki-M}}.$$

Die $h(\Delta\varphi; i)$ sind die DPS-Koeffizienten nach Gl. 4.32. Auf diese Weise wird der Phasenvorschub zwischen Kicker und Monitor wieder ausgeglichen. Da das Adaptionsverfahren auf der Unabhängigkeit des Referenzalgorithmus vom Q -Wert beruht, folgt, daß $\Delta\phi_{\text{Ki-M}}$ unabhängig von q sein muß. Dies ist in guter Näherung der Fall, wenn Monitor und Kicker so dicht beieinander stehen, daß der Anteil der q -Verschiebung, der auf den Abschnitt zwischen Kicker und Monitor entfällt, klein gegen 1 ist. Da eine geringe Entfernung vom Monitor zum Kicker auch wegen der dann entsprechend kurzen Kabel im Feedbackpfad

zweckmäßig ist, dürfte diese Bedingung keine wesentliche Einschränkung für die Anwendung des adaptiven DPS darstellen.

Im folgenden wird wieder $\Delta\phi_{k_i-M} = 0$ angenommen.

6.1.2 Die Simulation des adaptiven Feedbacks

Die im folgenden beschriebene Simulation dient dazu, die prinzipielle Funktionsfähigkeit des im vorigen Abschnitt hergeleiteten Adaptionsalgorithmus zu zeigen und einen passenden Wert für den Schrittweitenparameter α zu finden. Der Simulationsalgorithmus lautet:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1)/\Omega \end{pmatrix} = \mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} x(k) \\ (\dot{x}(k) + \Delta\dot{x}(k))/\Omega \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

$$\Delta\dot{x}(k+1) = A\Omega(h_{ad,-1}(k)x(k) + h_{ad,0}(k)x(k-1) + h_{ad,1}(k)x(k-2)), \quad (6.17)$$

$$M(k+1) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 (x(k-i))^2, \quad (6.18)$$

$$f(k-1) = h_{ad,-1}(k)x(k-2) + h_{ad,0}(k)x(k-3) + h_{ad,1}(k)x(k-4), \quad (6.19)$$

$$g(k-1) = -\frac{2}{\pi}(x(k) - x(k-2)), \quad (6.20)$$

$$h_{ad,-1}(k+1) = h_{ad,-1}(k) - \frac{\alpha}{2M(k+1)}(f(k-1) - g(k-1))x(k-2), \quad (6.21)$$

$$h_{ad,0}(k+1) = h_{ad,0}(k) - \frac{\alpha}{2M(k+1)}(f(k-1) - g(k-1))x(k-3). \quad (6.22)$$

$$h_{ad,1}(k+1) = -h_{ad,-1}(k+1). \quad (6.23)$$

\mathbf{M}_0 ist die Umlaufmatrix von Abschnitt 5.2.2. Die ersten beiden Zeilen des Algorithmus beschreiben den rückgekoppelten Bunch, die anderen Gleichungen die Adaption der Filterkoeffizienten.

Die Simulation wurde mit $q = 0,15$ und $A = 0,1$ durchgeführt. Für den Anfangswert der Schwingungsamplitude wurde $\hat{x} = 1$ gewählt. Abb. 6.1 zeigt den Schwingungsverlauf $x(k)$ und die Adaption des Koeffizienten $h_{ad,0}(k)$ für $\alpha = 0,05; 0,20; 0,80$. Die Adaption der Koeffizienten beginnt bei $h_{ad,i}(0) = 0$. Feedback und Adaption werden nach zehn Umläufen eingeschaltet. Das Adaptionsergebnis und damit die am Ende erreichte Dämpfung sind in allen Fällen gleich. Die Adaption benötigt für $\alpha = 0,05$ deutlich mehr Umläufe als für $\alpha = 0,20$, während bei $\alpha = 0,80$ Überschwinger im Verlauf von $h_{ad,0}(k)$ ein

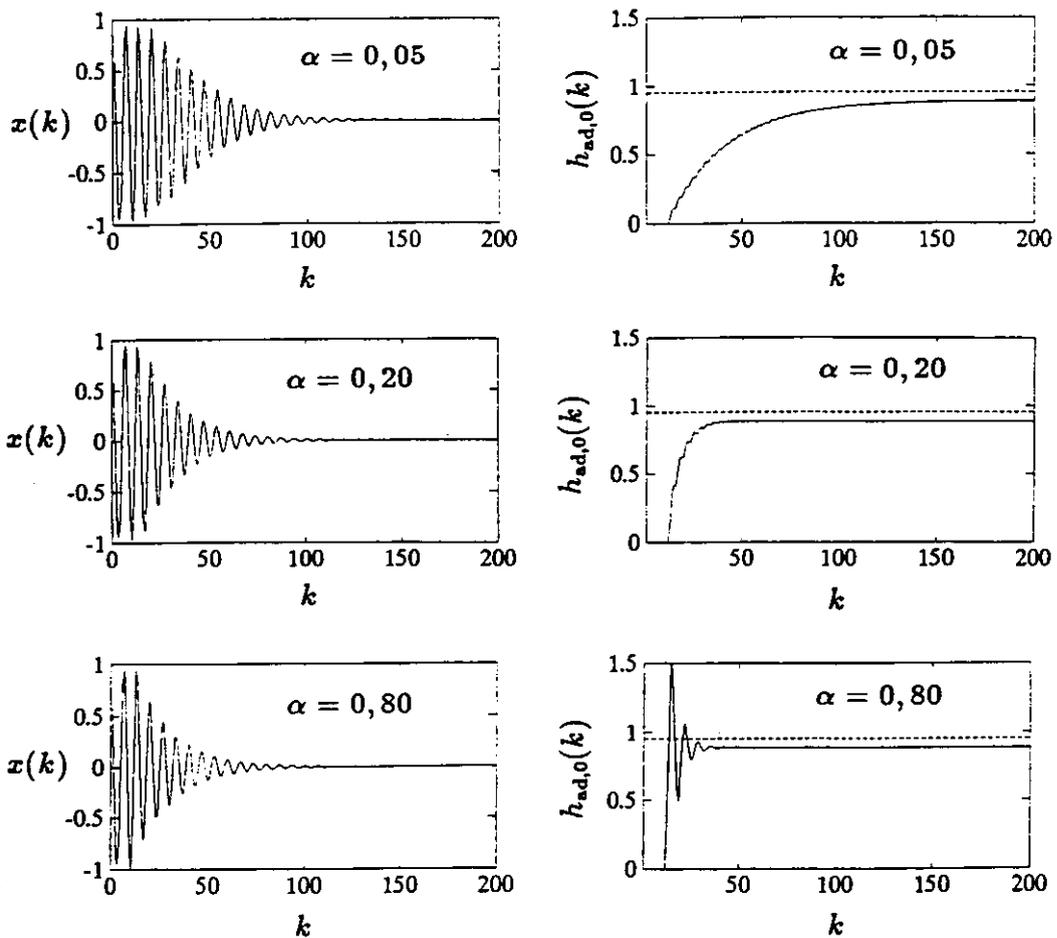


Abbildung 6.1: Das adaptive Feedback für verschiedene Schrittweitenparameter α : Dargestellt sind der Schwingungsverlauf $x(k)$ sowie der Koeffizient $h_{\text{ad},0}(k)$. Zum Vergleich ist auch der DPS-Koeffizient $h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; 0)$ eingezeichnet. $q = 0,15$; $A = 0,1$.

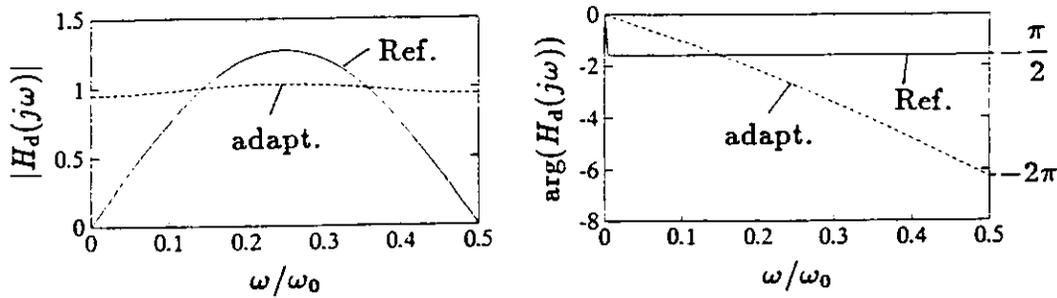


Abbildung 6.2: Vergleich der Übertragungsfunktionen von adaptivem Algorithmus ($k \rightarrow \infty$) und Referenzalgorithmus. Bei $\omega = q\omega_0 = 0,15\omega_0$ stimmen beide überein.

bei weiterer Erhöhung von α zu erwartendes instabiles Verhalten des Gradientenverfahrens andeuten. Das Optimum liegt demnach in der Größenordnung von 0,2. Die Untersuchung des adaptiven Feedbacks unter dem Einfluß von Rauschen wird dieses Ergebnis bestätigen, s. Abschnitt 6.2.6.

Der aus $q = 0,15$ berechnete DPS-Koeffizient $h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; 0)$, s. Gl. 4.32, ist in Abb. 6.1 zum Vergleich mit eingezeichnet. Die Adaption erreicht diesen Wert nicht exakt. Der Grund liegt darin, daß sich die aus dem nicht-kausalen Referenzalgorithmus $g(k)$ berechneten Kicks, auf die nach Gl. 6.21 und 6.22 adaptiert wird, von den mit $h(\Delta\varphi_{\text{DPS}}; i)$ kausal berechneten Kicks unterscheiden.

Die Übertragungsfunktion des adaptiven DPS einschließlich der in Gl. 6.17 und 6.19 enthaltenen Verzögerung um zwei Umläufe,

$$H_{\text{ad,d}}(j\omega; k) := \sum_{i=-1}^1 h_{\text{ad,i}}(k) e^{-j\omega(i+2)T_0}, \quad (6.24)$$

wird für das Endergebnis der Adaption, d. h. für $k \rightarrow \infty$, in Abb. 6.2 mit der Übertragungsfunktion des Referenzalgorithmus,

$$H_{\text{Ref,d}}(j\omega) := -\frac{2}{\pi}(e^{j\omega T_0} - e^{-j\omega T_0}) = -\frac{4j}{\pi} \sin \omega T_0, \quad (6.25)$$

verglichen. Während im Bereich $q = 0,1 \dots 0,4$ der Betrag wenigstens annähernd übereinstimmt, unterscheiden sich die Phasengänge aufgrund der unterschiedlichen Verzögerungen sehr stark. Nur auf der Frequenz, auf der die Adaption stattfindet, in diesem Falle also bei $\omega = 0,15\omega_0$, stimmen beide Übertragungsfunktionen überein. Diese Eigenschaft des adaptiven DPS ist für den im folgenden Abschnitt diskutierten Einfluß von Rauschen auf das adaptive Feedback von großer Bedeutung.

6.2 Die Stabilität des adaptiven Feedbacks unter dem Einfluß von Rauschen

Das einfachste Stabilitätskriterium für ein Feedbacksystem ist eine Dämpfung, die stärker sein muß als die Instabilität. In den Kap. 4 und 5 stand deshalb die Feedbackdämpfung im Zentrum der Diskussion. In der Realität stellt dieses Kriterium jedoch nur eine Näherung dar, denn auch das Rauschen und der begrenzte lineare Verstärkungsbereich der Übertrager im Feedbackpfad beeinflussen die Stabilität des Strahls. Während der Einfluß dieser Faktoren z. B. auf das in [Hei89] beschriebene PETRA-Feedback vernachlässigbar ist, hängt die Stabilität des adaptiven Feedbacks davon stark ab. Die folgenden Untersuchungen zeigen, daß die Dämpfung des adaptiven Feedbacks unter dem Einfluß von Rauschen keine Konstante mehr ist, sondern sich den äußeren Bedingungen anpaßt.

Aussagen über die Stabilität des Systems können aus diesen Gründen nur mit Hilfe von Simulationen gewonnen werden. Aufgrund des statistischen Charakters des Prozesses können diese Aussagen nicht mehr einfach nur "stabil" oder "instabil" lauten. Vielmehr erhält man beispielsweise eine Obergrenze für die Instabilität, bis zu der der Strahl mit großer Wahrscheinlichkeit über eine vorgegebene Zahl von Umläufen stabil bleibt.

Zur Abgrenzung von adaptiven Systemen werden in diesem Abschnitt nicht-adaptive Systeme durch die Abkürzung "CIR" (Constant Impulse Response) gekennzeichnet.

6.2.1 Das Simulationsmodell

Abb. 6.3 zeigt ein einfaches Modell des adaptiven Feedbacks, in dem Rauschen, Instabilität und der begrenzte Linearitätsbereich berücksichtigt werden. ¹ Die Umlaufmatrix M_0 wird mit dem Instabilitätsfaktor F_1 multipliziert, was ohne Feedback zu einer Anwachsrate $\ln F_1$ der Strahlschwingung führen würde. Zu der Abtastfolge $x(k)$ wird ein normalverteiltes Rauschen $r(k)$ mit Streuung σ addiert:

$$x_r(k) := x(k) + r(k). \quad (6.26)$$

Dies entspricht der Tatsache, daß das Rauschen hauptsächlich am Anfang der Verstärkerkette, also im Monitor entsteht. Das Summensignal wird von einem Begrenzer auf den linearen Verstärkungsbereich L begrenzt. Auf das ver-

¹Bezüglich Rauschen, Instabilität und Begrenzung folgt dieses Modell im wesentlichen einem Simulationsprogramm von S. Pätzold.

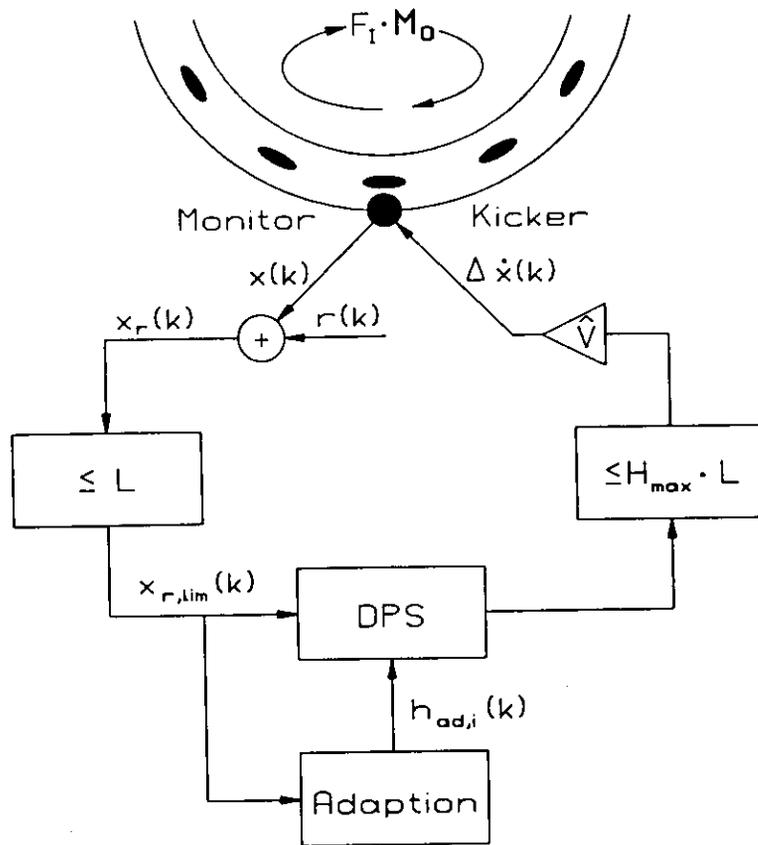


Abbildung 6.3: Das Blockschaltbild des adaptiven Feedbacks mit Rauschquelle und Begrenzern. Die Instabilität wird durch Multiplikation der Umlaufmatrix M_0 mit dem Faktor F_I berücksichtigt.

rauschte und limitierte Signal $x_{r,\text{lim}}(k)$ wird dann der Adaptionalgorithmus von Abschnitt 6.1.2 angewendet. Die Ausgangsfolge des DPS wird noch einmal auf den Bereich $L \cdot H_{\text{max}}$ begrenzt. $H_{\text{max}} = 1,3$ orientiert sich am Maximum des Amplitudengangs des CIR-DPS, s. Abschnitt 4.2, das mit dem Maximum des Referenzalgorithmus zusammenfällt. Dadurch wird gewährleistet, daß das adaptive Feedback keine stärkeren Kicks erzeugt als das CIR-Feedback, so daß die Vergleichbarkeit beider Systeme gewährleistet ist. Durch Multiplikation mit der "systemtheoretischen Verstärkung" $\hat{V} := A\Omega$ ergibt sich die Folge $\Delta\dot{x}(k)$ von Kicks.

Man erhält somit einen Simulationsalgorithmus, der sich von Gl. 6.16 bis 6.23 nur durch den Instabilitätsfaktor F_I in Gl. 6.16, die beiden Begrenzer und die Ersetzung von $x(k)$ durch $x_{r,\text{lim}}(k)$ in der Adaption unterscheidet.

6.2.2 Qualitative Stabilitätsbetrachtungen

Abb. 6.4 zeigt ein typisches Beispiel für das qualitative Verhalten des adaptiven Feedbacks. Die in der Simulation verwendeten Parameter sind: $q = 0,1$; $A = 0,16$; $\sigma = 0,2$; $L = 1$; $\ln F_I = 0,050$.²

Dargestellt sind das verrauschte Strahlsignal $x_r(k)$ vor dem Begrenzer und die Adaption des Koeffizienten $h_{\text{ad},0}(k)$. Beide Folgen beginnen mit dem Wert 0. Rauschen und Instabilität regen die Schwingung an, und nach 150 Umläufen ist die Schwingungsamplitude in etwa auf den Wert 1 angewachsen. Gleichzeitig hat der Koeffizient $h_{\text{ad},0}(k)$ jedoch zumindest näherungsweise den Idealwert 0,71, ermittelt aus der Adaption auf eine ungedämpfte, nicht verrauschte Sinusschwingung, anadaptiert, wodurch das Feedback zunächst ein weiteres Anwachsen der Schwingung verhindert. Die ersten 150 Umläufe zeigen, daß das Rauschen die Adaption behindert und gute Ergebnisse nur erreicht werden, wenn das Signal weit genug aus dem Rauschen herauskommt.

Von $k = 150$ bis $k = 500$ verläuft die Schwingung unter leichten Schwankungen der Amplitude recht stabil. Dabei stellt sich heraus, daß eine Überschreitung der Begrenzung von ± 1 nicht unbedingt zum Verlust des Bunches führt. Im weiteren Verlauf der Simulation wird dieser Wert aber offensichtlich zu stark überschritten. Die nun sehr wirksame Begrenzung führt dazu, daß das Signal nicht mehr ausreichend verstärkt und das Feedback somit effektiv schwächer

²Faßt man die Werte für σ und L als Angaben in Millimetern auf, dann entsprechen sie typischen Verhältnissen in den transversalen PETRA-Feedbacks. Das heißt, Strahlschwingungen bis zu einer Amplitude von 1 mm werden vom Feedbackpfad linear übertragen und die Streuung des Rauschens entspricht einer Ablage von 0,2 mm.

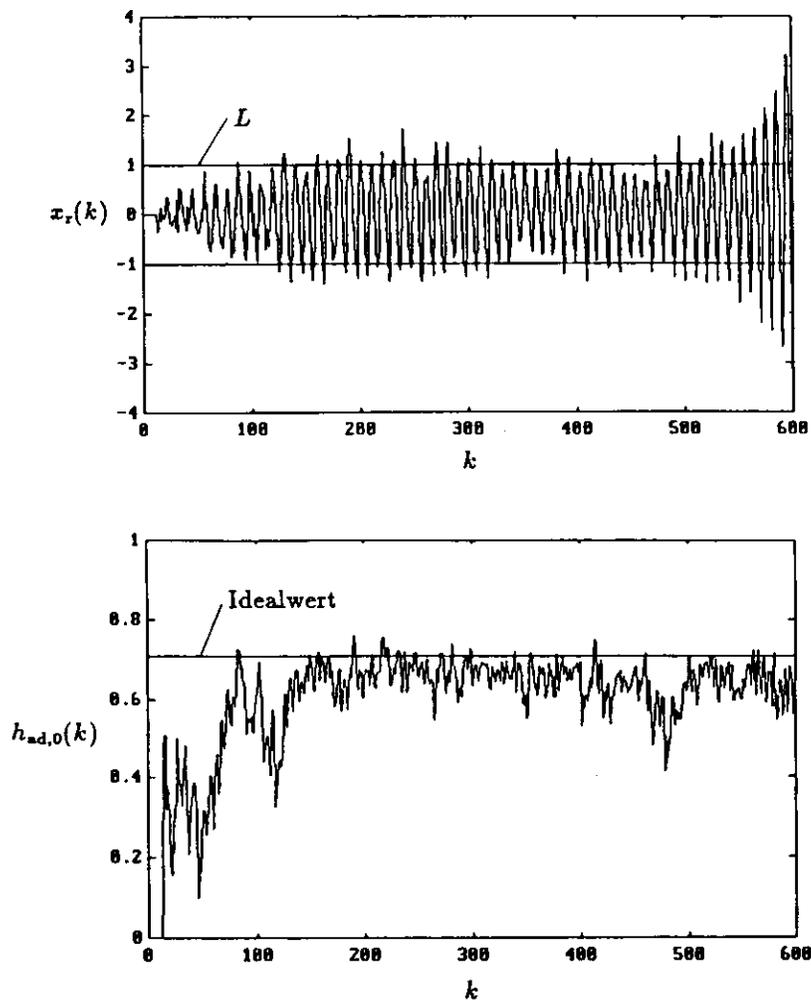


Abbildung 6.4: Das adaptive Feedback: Das verrauschte Strahlsignal $x_r(k)$ und die Adaption des Koeffizienten $h_{ad,0}(k)$. Sobald das Signal aus dem Rauschen herauskommt, funktioniert die Adaption recht gut. Nach ca. 500 Umläufen wird der Bunch allerdings instabil. $q = 0,1$; $A = 0,16$; $\sigma = 0,2$; $L = 1$; $\ln F_1 = 0,050$.

wird. Trotz der relativ guten Adaption des Koeffizienten wächst die Schwingung deshalb nun immer schneller an, ab $k = 600$ praktisch ungedämpft. Der Bunch bleibt hier also nur ca. 500 Umläufe stabil, obwohl die theoretisch, d. h. ohne Rauschen erreichbare Dämpfung $D_0 = 0,060$ deutlich über der Instabilität $\ln F_1 = 0,050$ liegt. D_0 ergibt sich aus

$$D_0 := \frac{A}{2} |H_{\text{Ref,d}}(jq\omega_0)|, \quad (6.27)$$

mit $|H_{\text{Ref,d}}(j \cdot 0,1\omega_0)| = 0,75$; s. Abb. 6.2.

An diesem Beispiel zeigt sich bereits, daß es i. a. nicht möglich ist vorherzusagen, wieviele Umläufe der Bunch unter gegebenen Bedingungen stabil bleiben wird. In den folgenden Abschnitten werden statistische Methoden entwickelt, mit deren Hilfe Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Stabilität des adaptiven Feedbacks gewonnen werden können.

6.2.3 x_{rms} und mittlere Dämpfung

Zwei nützliche Größen für die Betrachtung des adaptiven Feedbacks sind der quadratische Mittelwert der Schwingung, x_{rms} , und die mittlere Dämpfung \bar{D} . Sei n die Zahl der simulierten Umläufe. Dann wird x_{rms} als

$$x_{\text{rms}} := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(k)^2} \quad (6.28)$$

und \bar{D} als

$$\bar{D} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D(k) \quad (6.29)$$

definiert. $D(k)$ ist die momentane Dämpfung des Feedbacks im k -ten Umlauf, die sich aus den Koeffizienten $h_{\text{ad,i}}(k)$ ergibt. Sie wird folgendermaßen berechnet: Gegeben sei ein q -Wert, auf den das Feedback adaptieren soll. Der Wert der Übertragungsfunktion des adaptiven Phasenschiebers auf der entsprechenden Frequenz $q\omega_0$ ist dann durch $H_{\text{ad,d}}(jq\omega_0; k)$ gegeben, vgl. Gl. 6.24. Da dieser Wert bereits zwei Umläufe Verzögerung enthält, beträgt die Phase im Idealfall $-\pi/2$. Der Phasenfehler des adaptiven Feedbacks im k -ten Umlauf wird deshalb als

$$\Delta\Xi(k) := \arg(H_{\text{ad,d}}(jq\omega_0; k)) + \frac{\pi}{2} \quad (6.30)$$

definiert. Für den Betrag wird die Größe

$$\hat{W}(k) := |H_{\text{ad,d}}(jq\omega_0; k)| \quad (6.31)$$

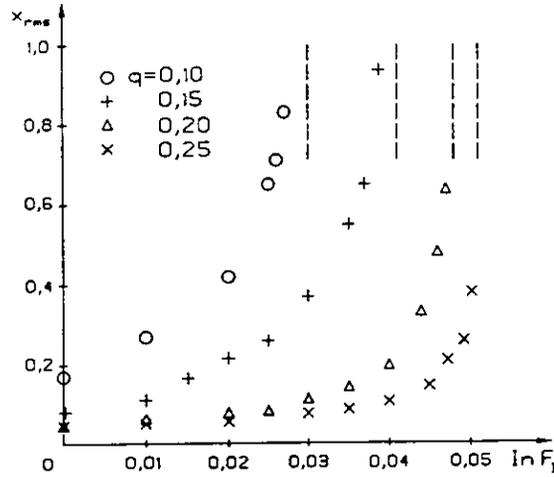


Abbildung 6.5: x_{rms} in Abhängigkeit von $\ln F_I$ für verschiedene q . Die gestrichelten Linien markieren $D_0(q)$. $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$; $L = \infty$.

eingeführt. Gemäß Gl. 4.69 ergibt sich dann die momentane Dämpfung zu

$$D(k) = \frac{A}{2} \hat{W}(k) \cos \Delta \Xi(k). \quad (6.32)$$

Es wurde nun untersucht, wie x_{rms} und \bar{D} von $\ln F_I$ und q abhängen. Dazu wurden jeweils $n = 10000$ Umläufe simuliert. Für A und σ wurden Werte gewählt, die in etwa der Realität der transversalen Feedbacks im Elektronenring von PETRA entsprechen: $A = 0,08$ und $\sigma = 0,2$. Die Begrenzer wurden für diese Untersuchungen aus dem Algorithmus herausgenommen.

Abb. 6.5 zeigt die Abhängigkeit $x_{rms}(\ln F_I)$ für $q=0,1$; $0,15$; $0,2$ und $0,25$. Die Werte $0,3$; $0,35$; und $0,4$ verhalten sich symmetrisch zu $0,25$, das heißt $0,3$ entspricht $0,2$ usw. Wie zu erwarten geht x_{rms} gegen Unendlich, wenn $\ln F_I$ sich der theoretischen Dämpfung D_0 nähert. D_0 hängt gemäß Gl. 6.27 von q ab. Mit $A = 0,08$ gilt:

$$D_0(0,1) = 0,030; \quad D_0(0,15) = 0,041; \quad D_0(0,2) = 0,048; \quad D_0(0,25) = 0,051.$$

Die Kurven unterscheiden sich jedoch nicht nur in den verschiedenen Grenzwerten, sondern auch bei kleineren Instabilitätswerten. Für $\ln F_I \ll D_0$ gilt, daß die Kurven desto höher und steiler verlaufen, je größer $|q - 0,25|$ ist.

Diese zunächst einmal überraschenden Unterschiede werden verständlich, wenn man den Zusammenhang zwischen \bar{D} und $\ln F_I$ betrachtet, s. Abb. 6.6. Die Kurven beziehen sich auf dieselben q -Werte. Für $q = 0,1$ folgt die Kurve ziemlich genau der Geraden $\bar{D} = \ln F_I$, das heißt die durchschnittliche Dämpfung

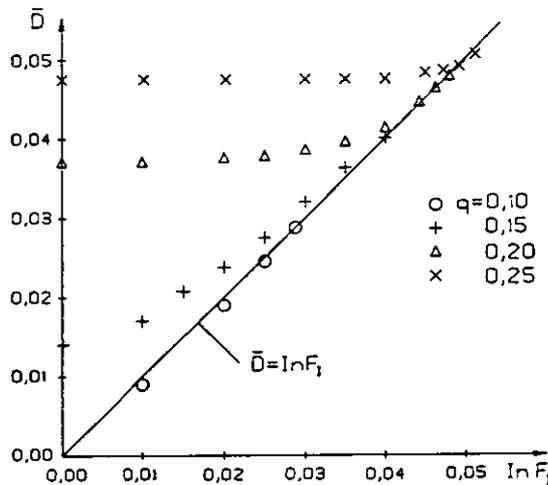


Abbildung 6.6: \bar{D} in Abhängigkeit von $\ln F_1$ für verschiedene q . $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$; $L = \infty$.

reicht gerade eben aus, um die Instabilität zu kompensieren. Da aber neben der Instabilität auch das Rauschen den Strahl anregt, erhält man auch bei kleinen $\ln F_1$ schon recht große x_{rms} -Werte. Für $q = 0,25$ hingegen ist \bar{D} nur schwach von $\ln F_1$ abhängig und liegt auch bei $\ln F_1 = 0$ nur geringfügig unter $D_0 = 0,051$. Entsprechend klein ist x_{rms} . Die Kurven der beiden anderen q -Werte liegen wieder zwischen den Extremen.

Die Folgerung aus dieser Beobachtung ist, daß das Rauschen im Mittel eine Adaption der Koeffizienten $h_{\text{ad},i}(k)$ auf Werte, die $q = 0,25$ entsprechen, bewirkt. Das adaptive Feedback funktioniert aus diesem Grunde für $q = 0,25$ fast ebenso gut wie das CIR-Feedback. Die in Abb. 6.5 nicht eingezeichnete $x_{\text{rms}}(\ln F_1)$ -Kurve für das CIR-Feedback verläuft deshalb nur geringfügig unterhalb der Kurve für $q = 0,25$. Bei $\ln F_1 = 0$ betragen die x_{rms} -Werte beispielsweise 0,047 bzw. 0,045. Für $q = 0,1$ hingegen muß das adaptive Feedback immer dagegen wirken, daß das Rauschen die Koeffizienten auf falsche Werte zieht. Dadurch funktioniert die Adaption in diesem Fall nur gut, wenn das Signal deutlich größer als das Rauschen ist, was auch schon an Abb. 6.4 beobachtet wurde.

Aufgrund der unterschiedlichen Verzögerungen in Referenz- und DPS-Algorithmus ist klar, daß die Adaption beide Übertragungsfunktionen nicht im gesamten Frequenzbereich von 0 bis $\omega_0/2$, der im Rauschen enthalten ist, zur Übereinstimmung bringen kann. Das wurde bereits an Abb. 6.2 erläutert. Eine schlüssige Begründung dafür, daß das Rauschen die Koeffizienten auf Werte

zieht, die $q = 0,25$ entsprechen, ist jedoch nicht bekannt. Zwei Vermutungen liegen nahe:

- $q = 0,25$ wird bevorzugt, weil die Übertragungsfunktion des Referenzalgorithmus dort ihr Maximum hat.
- Die Adaption stellt sich im Mittel auf dem Mittelwert des Frequenzbereichs ein.

Die erste Vermutung wird in Abschnitt 6.2.5 widerlegt. Dort stellt sich heraus, daß sich das Adaptionsverhalten in dieser Beziehung auch mit einem Referenzalgorithmus, dessen Übertragungsfunktion betragsmäßig zwischen $0,1\omega_0$ und $0,4\omega_0$ fast konstant ist, nicht ändert.

6.2.4 Verschiedene Stabilitätskriterien

Aufgrund der Diskussion des vorigen Abschnitts ist zu erwarten, daß die Stabilität des adaptiven Feedbacks um so größer sein wird, je näher q an $0,25$ liegt. Quantitative Aussagen waren bisher aber noch nicht möglich. Deshalb soll nun eine Antwort auf folgende Fragestellung gesucht werden: Wie groß darf unter gegebenen Bedingungen (q, A, σ, L) die Anwachsrate der Instabilität maximal sein, so daß der Bunch mit großer Wahrscheinlichkeit mindestens 10^9 Umläufe, entsprechend einer Speicherzeit in HERA von ca. 6 Stunden, stabil schwingt?

Der direkte Weg zur Beantwortung dieser Frage, die mehrmalige Simulation von 10^9 Umläufen für verschiedene $\ln F_1$, war mit der benutzten Hard- und Software nicht praktikabel, da allein die Simulation von $1 \cdot 10^9$ Umläufen ungefähr zwei Jahre gedauert hätte.

Ein anderer Ansatz beruht auf der Annahme, daß das adaptive Feedback stabil bleibt, solange $|x(k)| \leq L$. Zwar kann dann immer noch $|x_r(k)| > L$ auftreten, aber das Abschneiden des Rauschens durch den Begrenzer dürfte die Stabilität kaum beeinträchtigen. Wenn nun die Verteilungsfunktion der Werte $x(k)$ bekannt wäre, so könnte man versuchen, aus den zum Beispiel über 10000 Umläufe ermittelten Parametern dieser Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, daß auf 10^9 Umläufe kein Wert über L liegt.

Abb. 6.7 zeigt ein Histogramm der Verteilung von $x(k)$. Es wurden 10000 Umläufe simuliert, von denen allerdings die ersten 1000 nicht in das Histogramm eingetragen wurden, um den Einfluß der Anfangsbedingungen auszuschalten. Die Simulation wurde mit $q = 0,1$; $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$; $L = \infty$ und $\ln F_1 = 0,019$ durchgeführt. Das Histogramm läßt sich offensichtlich durch keine gängige Verteilung approximieren. Dieser Ansatz wurde deshalb nicht

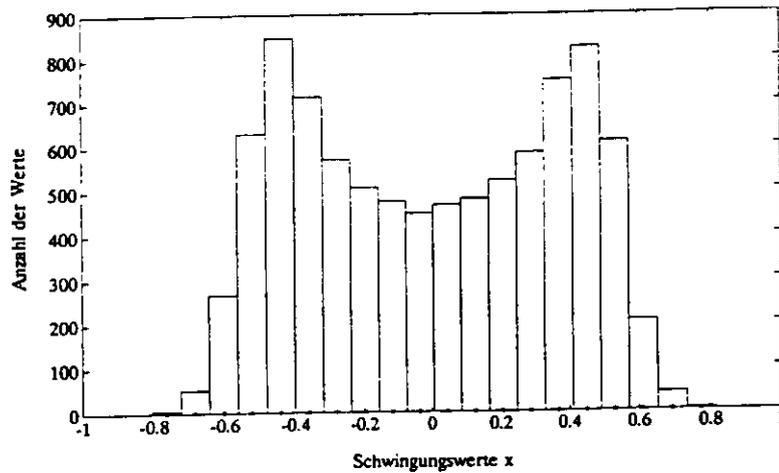


Abbildung 6.7: Die Verteilung von $x(k)$ aus 9000 Umläufen. $q = 0,1$; $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$; $L = \infty$; $\ln F_1 = 0,019$.

weiter verfolgt.

Immerhin kann man das Histogramm qualitativ erklären: Bei $q = 0,1$ wirkt das adaptive Feedback wie eine grobe Amplitudenregelung: Für große Amplituden funktioniert die Adaption gut, so daß die Dämpfung stark ist und die Amplitude reduziert wird. Für kleine Amplituden funktioniert die Adaption schlecht, so daß die Dämpfung schwach ist, wodurch die Amplitude anwächst. Deshalb sollte $x(k)$ eine ähnliche Verteilung wie eine verrauschte Sinusschwingung haben. Dies entspricht der beobachteten Verteilung.

Um nun dennoch zumindest einen vorläufigen Eindruck von der Stabilität zu gewinnen, werden im folgenden zwei mehr oder weniger willkürlich gewählte Kriterien angewandt. Dabei wird $A = 0,08$; $L = 1$ und $\sigma = 0,2$ angenommen. Das erste Kriterium ist

$$x_{\text{rms}} \leq 0,1. \quad (6.33)$$

Die zu $x_{\text{rms}} = 0,1$ gehörigen Instabilitätswerte werden aus den $x_{\text{rms}}(\ln F_1)$ -Kurven des vorigen Abschnitts abgelesen. Der Wert 0,1 ist verglichen mit L so klein, daß die Annahme, der Bunch werde unter dieser Bedingung auch 10^9 Umläufe stabil bleiben, sehr einleuchtend erscheint. Andererseits führt dieses Kriterium, angewandt auf das CIR-Feedback, zu Stabilitätsgrenzen für $\ln F_1$, die nicht unakzeptabel weit unter den theoretischen Werten liegen, s. Abb. 6.8. Die Anwendung des Kriteriums auf das adaptive Feedback zeigt die q -Abhängigkeit der Stabilität drastisch. Die Werte liegen zwischen $\ln F_1 = 0,038$ ($q = 0,25$) und $\ln F_1 = -0,008$ ($q = 0,1$).

Ein anderes, ebenso plausibles aber nicht exakt begründbares Kriterium ist

$$\max(|x(k)|) \leq 0,6. \quad (6.34)$$

Die damit erhaltenen Stabilitätswerte liegen wesentlich höher; insbesondere sind die äußeren q -Werte nicht mehr ganz so stark benachteiligt, wie Abb. 6.8 zeigt.

Die in Abb. 6.8 angegebenen theoretischen Stabilitätsgrenzen $D_0(q)$ wurden folgendermaßen berechnet:

a) CIR-Feedback: Aus Gl. 4.7 folgt mit $n_U = 2$ und $\Delta\phi_{M-KI} = 0$:

$$\Delta\varphi_{DPS} = 4\pi q - \frac{\pi}{2}.$$

Einsetzen in Gl. 4.33 ergibt:

$$H_{1,d}(\Delta\varphi_{DPS}(q); jq\omega_0) = \cos(4\pi q - \frac{\pi}{2}) + \frac{4j}{\pi} \sin(4\pi q - \frac{\pi}{2}) \sin(2\pi q).$$

b) Adaptives Feedback: Hier wird die theoretische Dämpfung durch die Übertragungsfunktion des Referenzalgorithmus, Gl. 6.25, bestimmt:

$$H_{Ref,d}(jq\omega_0) = -\frac{4j}{\pi} \sin(2\pi q).$$

$D_0(q)$ ergibt sich nun in beiden Fällen aus dem Betrag der Übertragungsfunktion durch Multiplikation mit $A/2 = 0,04$.

Man könnte eine große Zahl weiterer Kriterien untersuchen, die alle den Mangel hätten, daß ihr Verhältnis zu der Stabilität über 10^9 Umläufe nicht bekannt wäre, und die deshalb auch nur noch einmal die relativen Stabilitäten bezüglich q qualitativ bestätigen könnten. Es ist nicht möglich, von 10000 auf 10^9 Umläufe zu schließen.

Zum Erfolg führt schließlich ein anderer, auf der Simulation von sehr viel mehr Umläufen beruhender Ansatz: Für verschiedene Anwachsraten $\ln F_1$ wird jeweils simuliert, wie groß die Zahl n der Umläufe ist, über die der Bunch stabil bleibt. Trägt man $\ln F_1$ gegen $\lg n$ auf, so zeigt sich, daß die Punkte um einen linearen Zusammenhang streuen, s. Abb. 6.9. Aus der Extrapolation der Regressionsgeraden auf $n = 10^9$ ergibt sich die gesuchte Stabilität.

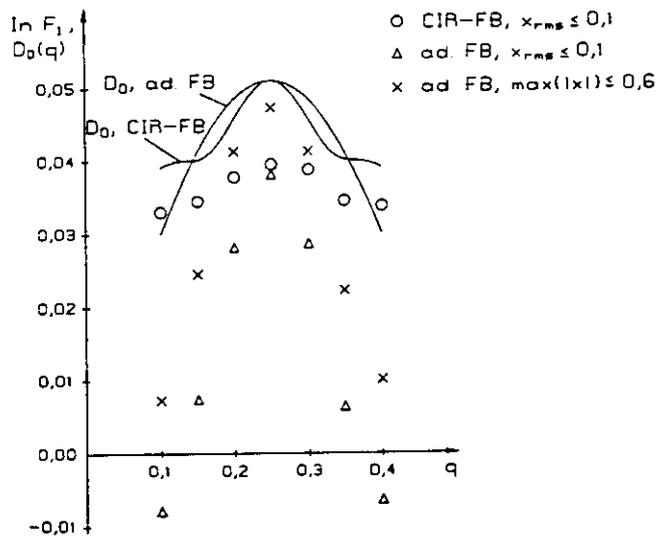


Abbildung 6.8: Die mit verschiedenen Kriterien abgeschätzte Stabilität des adaptiven und des CIR-Feedbacks. Ebenfalls eingezeichnet sind die theoretischen Stabilitätsgrenzen. $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$; $L = 1$.

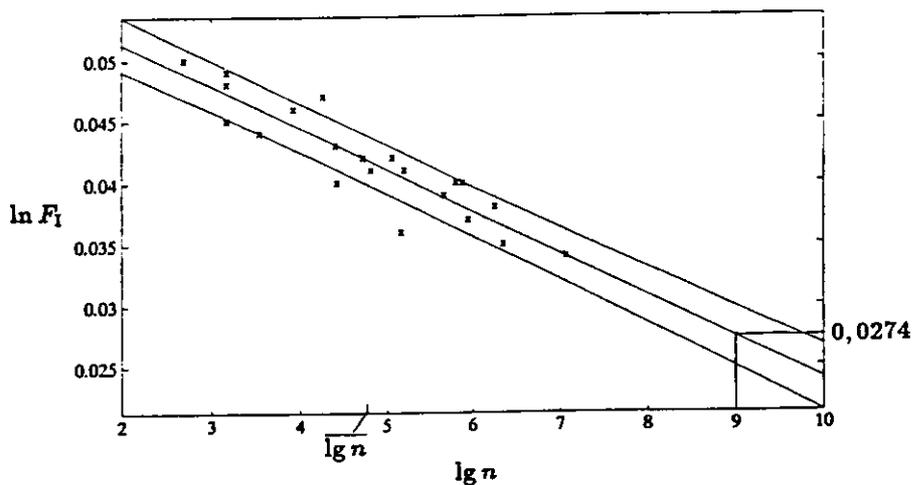


Abbildung 6.9: Der Zusammenhang zwischen $\ln F_1$ und $\lg n$ ist linear und ermöglicht die Extrapolation auf $n = 10^9$ Umläufe. Der mit eingezeichnete Wertebereich berücksichtigt die Unsicherheit der Regressionsparameter und die Streuung der Werte um die Gerade. $q = 0,1$; $A = 0,125$; $\sigma = 0,2$; $L = 1$.

Von Stabilität zu sprechen ist nur sinnvoll, wenn $\ln F_I$ nicht zu groß ist, so daß die Bunchschwingung nicht sofort exponentiell gegen Unendlich wächst, sondern ein gewisser statistischer Charakter des Vorgangs vorliegt. Abb. 6.4 zeigt, daß dies von einigen Hundert Umläufen an der Fall ist. Die Simulationen wurden deshalb jeweils mit einem Instabilitätswert begonnen, der diese Minimalstabilität gewährleistete. Von dort aus wurde $\ln F_I$ dann schrittweise erniedrigt.

n war durch die zur Verfügung stehende Rechenleistung auf ca. 10^7 begrenzt. Die Punkte $(\lg n; \ln F_I)$ liegen also alle in etwa im Bereich von $n = 10^3 \dots 10^7$. Da eine theoretische Begründung für den linearen Zusammenhang zwischen $\ln F_I$ und $\lg n$ nicht vorliegt, ist die Extrapolation auf 10^9 etwas problematisch. Andererseits wurde jedoch bei einer ganzen Reihe von derartigen Simulationen, s. Abschnitt 6.2.6, keine wesentliche Abweichung von der Linearität festgestellt. Deshalb sollte mit dieser Methode zumindest eine Abschätzung der Stabilität möglich sein.

Das Beispiel von Abb. 6.9 wurde mit $q = 0,1$; $A = 0,125$; $\sigma = 0,2$ und $L = 1$ simuliert. Dabei wurde bereits eine verbesserte Version des Adaptionsalgorithmus benutzt, s. Abschnitt 6.2.5. Der Ansatz für die Regressionsgerade lautet

$$\ln F_I = a(\lg n - \overline{\lg n}) + b, \quad (6.35)$$

mit

$$\overline{\lg n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (\lg n)_i. \quad (6.36)$$

N ist hier die Zahl der Punkte $((\lg n)_i; (\ln F_I)_i)$. Relevant für die Abschätzung der Stabilität ist neben den Regressionsparametern a und b und deren Standardabweichungen s_a und s_b auch die Streuung $s_{\ln F_I}$ der Punkte um die Gerade. Der Wertebereich $\Delta \ln F_I$, innerhalb dessen die Punkte mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $2/3$ liegen sollten, wurde durch quadratische Addition der drei statistisch unabhängigen Fehler berechnet:

$$\Delta \ln F_I = (s_a^2(\lg n - \overline{\lg n})^2 + s_b^2 + s_{\ln F_I}^2)^{1/2}. \quad (6.37)$$

Dieser Bereich ist im Zentrum der Punkte, das heißt für $\lg n = \overline{\lg n}$ am schmalsten und wird nach außen hin breiter, s. Abb. 6.9. Darin drückt sich die Unsicherheit der Extrapolation aus. Im gegebenen Beispiel erhält man so für $n = 10^9$:

$$\ln F_I = 0,0274 \pm 0,0025.$$

Liegt $\ln F_I$ unterhalb von $0,0274 - 0,0025 = 0,0249$, so bleibt der Bunch mit großer Wahrscheinlichkeit mindestens 10^9 Umläufe stabil.

Vor der Anwendung dieses Verfahrens auf die Untersuchung der Stabilität des adaptiven Feedbacks unter verschiedenen Bedingungen wird im nächsten Abschnitt die bereits erwähnte Verbesserung des Adaptionalgorithmus beschrieben.

6.2.5 Die Verbesserung des Adaptionalgorithmus

Ein Grund für die relativ geringe Stabilität des adaptiven Feedbacks an den Rändern des q -Bereichs ist der Amplitudengang des Referenzalgorithmus $g(k)$ von Gl. 6.11, s. Abb. 6.2. Gl. 6.11 stellt die einfachste Approximation eines Hilbert-Transformators dar. In Abschnitt 4.2.2 wurde gezeigt, daß man mit 11 Koeffizienten eine Approximation des Hilbert-Transformators erreichen kann, die im Bereich $q = 0,1 \dots 0,4$ um weniger als $\pm 2\%$ von $|H| = 1$ abweicht. Die Koeffizienten wurden aus [Her69] zitiert. Multipliziert man diese Koeffizienten mit 1,25, so ist der Amplitudengang des verbesserten Referenzalgorithmus auf das Maximum von $|H_{\text{Ref},d}(j\omega)|$ in Abb. 6.2 normiert. Man erhält:

$$g(k) = -1,25\{0,610(x(k+1) - x(k-1)) + 0,141(x(k+3) - x(k-3)) + 0,037(x(k+5) - x(k-5))\}. \quad (6.38)$$

Dieser Algorithmus enthält keine Verzögerung und ist nicht-kausal. Für die Berechnung des neuen Koeffizientensatzes $h_{\text{ad},i}(k+1)$ stehen deshalb nur die vergangenen Werte der Folge $g(k)$ bis einschließlich $g(k-5)$ zur Verfügung. Die Adaption muß deshalb mit Daten durchgeführt werden, die 5 Umläufe statt wie bisher 1 Umlauf zurückliegen. Aus den Gln. 6.18 bis 6.22 wird somit:

$$M(k-3) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 (x(k-4-i))^2, \quad (6.39)$$

$$f(k-5) = h_{\text{ad},-1}(k)x(k-6) + h_{\text{ad},0}(k)x(k-7) + h_{\text{ad},1}(k)x(k-8), \quad (6.40)$$

$$g(k-5) = -1,25\{0,610(x(k-4) - x(k-6)) + 0,141(x(k-2) - x(k-8)) + 0,037(x(k) - x(k-10))\}, \quad (6.41)$$

$$h_{\text{ad},-1}(k+1) = h_{\text{ad},-1}(k) - \frac{\alpha}{2M(k-3)}(f(k-5) - g(k-5))x(k-6), \quad (6.42)$$

$$h_{\text{ad},0}(k+1) = h_{\text{ad},0}(k) - \frac{\alpha}{2M(k-3)}(f(k-5) - g(k-5))x(k-7). \quad (6.43)$$

Für die Simulation unter realen Bedingungen ist $x(k)$ natürlich durch $x_{r,\text{lim}}(k)$ zu ersetzen.

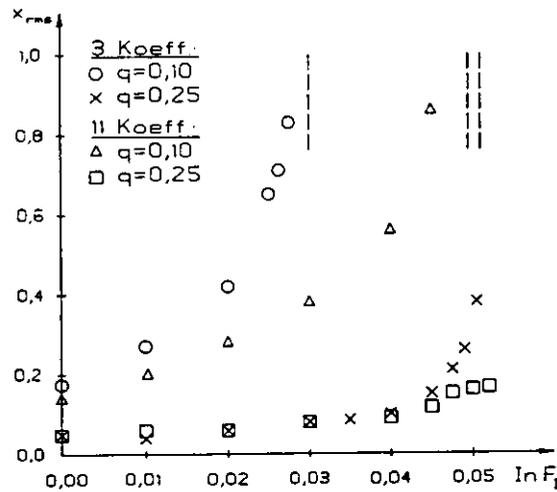


Abbildung 6.10: $x_{rms}(\ln F_1)$ mit altem Referenzalgorithmus (3 Koeffizienten) und verbessertem Referenzalgorithmus (11 Koeffizienten) für $q=0,1$ bzw. $0,25$. Mit eingezeichnet sind auch die theoretischen Stabilitätsgrenzen, die sich bei $q=0,25$ zwischen altem und neuem Algorithmus nicht unterscheiden. $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$; $L = \infty$.

Abb. 6.10 zeigt die Auswirkungen des verbesserten Referenzalgorithmus: Für $q = 0,1$; $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$ und $L = \infty$ sind die aus der Simulation von jeweils 10000 Umläufen mit altem und neuem Algorithmus ermittelten Kurven $x_{rms}(\ln F_1)$ aufgetragen. Bei kleinen x_{rms} erhält man kaum Stabilitätzuwachs; bei großen Werten, $x_{rms} \approx 1$, hingegen fast den vollen theoretischen Zuwachs. Dieser beträgt

$$\Delta D_0 = \frac{A}{2} \Delta |H_{ref,d}(j \cdot 0,1\omega_0)| = 0,019.$$

Dies gilt jedoch nur unter der Annahme eines unbegrenzten linearen Verstärkungsbereiches. In der Realität bedeutet $x_{rms} \approx 1$, daß der Bunch beispielsweise für $L = 1$ mit Sicherheit nicht lange stabil schwingt. Um den verbesserten Algorithmus auszunutzen, bedarf es deshalb einer gleichzeitigen Erhöhung von L bzw. einer gleichwertigen Verringerung des Rauschens.

Ebenfalls in Abb. 6.10 dargestellt sind die Kurven für $q = 0,25$. Da sich die Amplituden der beiden Referenzalgorithmen bei $0,25\omega_0$ nicht unterscheiden, gibt es kaum Unterschiede. Auch mit dem verbesserten Algorithmus ist $q = 0,25$ gegenüber $q = 0,1$ stark bevorzugt. Zudem fällt auf, daß mit dem neuen Algorithmus x_{rms} für $\ln F_1 \rightarrow D_0 = 0,051$ nicht gegen Unendlich geht.

Der Grund dafür ist in Abb. 6.11 zu erkennen: Dort sind die mit dem verbesserten Algorithmus simulierten $\bar{D}(\ln F_1)$ -Kurven für $q = 0,1$ und $0,25$ auf-

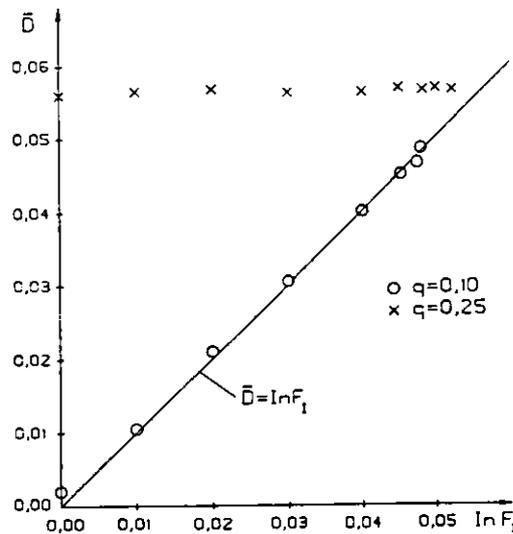


Abbildung 6.11: Die mittlere Dämpfung des adaptiven Feedbacks mit verbessertem Referenzalgorithmus für $q = 0,1$ bzw. $0,25$. $A = 0,08$; $\sigma = 0,2$ und $L = \infty$.

getragen. Für $q = 0,25$ liegt die mittlere Dämpfung sogar über D_0 . Dadurch blieb der Bunch auch mit $\ln F_1 = 0,052$ über die simulierten 10000 Umläufe stabil. Gegen Ende der Simulation deutete allerdings ein starkes Anwachsen der Schwingung auf eine beginnende Instabilität hin. Für $q = 0,1$ verläuft die Kurve ähnlich wie in Abb. 6.6 im wesentlichen entlang der Geraden $\bar{D} = \ln F_1$. Auch mit dem neuen Algorithmus zieht das Rauschen die Koeffizienten also auf Werte, die $q = 0,25$ entsprechen, und behindert so die Adaption bei $q = 0,1$.

Die Kurve $x_{\text{rms}}(\ln F_1)$ für das CIR-Feedback verläuft, wie bereits in Abschnitt 6.2.3 erwähnt, praktisch identisch mit der für $q = 0,25$ und dreikoeffizientigem Referenzalgorithmus simulierten Kurve von Abb. 6.10.

Die Randwerte des q -Bereichs sind also nach wie vor gegenüber den mittleren Werten benachteiligt, solange das Rauschen die Adaption maßgeblich beeinflusst. Erst wenn L/σ so groß ist, daß das Schwingungssignal weit genug aus dem Rauschen herauskommen kann, ist zu erwarten, daß der verbesserte Algorithmus Stabilitätswerte erreicht, die über den ganzen q -Bereich in etwa gleich sind. Eine quantitative Aussage über L/σ wird im folgenden Abschnitt gewonnen.

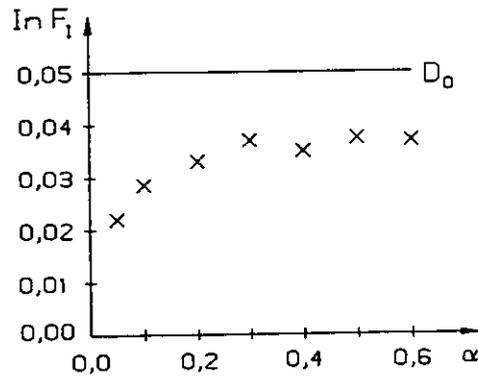


Abbildung 6.12: Die Stabilität bezogen auf 10^6 Umläufe in Abhängigkeit vom Schrittweitenparameter α . $A = 0,1$; $L/\sigma = 5$.

6.2.6 Variation der Feedbackparameter

Mit Hilfe des in Abschnitt 6.2.4 entwickelten Verfahrens zur Abschätzung der Stabilität über 10^9 Umläufe wurde das adaptive Feedback in Abhängigkeit von den Parametern A , σ , L und α untersucht. Alle Simulationen wurden mit dem ungünstigsten q -Wert von 0,1 durchgeführt. Die Ergebnisse wurden jeweils mit der theoretischen Stabilitätsgrenze D_0 verglichen, die in guter Näherung der Stabilität des CIR-Feedbacks entspricht. Der Adaptionalgorithmus wurde in der verbesserten Form von Abschnitt 6.2.5 benutzt. Die Übertragungsfunktion war dort auf $|H| \approx 1,25$ normiert worden. Da in allen anderen Teilen dieser Arbeit die DPS-Koeffizienten so gewählt wurden, daß $|H| \approx 1$, soll das auch hier geschehen, indem der Faktor 1,25 in A einbezogen wird. Dadurch gilt jetzt wieder $D_0 \approx A/2$.

Weil das Feedback, abgesehen von der Begrenzung L , linear ist und die Schrittweite $h_{ad,i}(k+1) - h_{ad,i}(k)$ nicht von der Schwingungsamplitude abhängt, skalieren die simulierten Schwingungen mit σ , so daß die Stabilität nicht von L und σ getrennt, sondern nur von L/σ abhängt. Beide Parameter werden deshalb im folgenden zusammengefaßt.

Die Abhängigkeit der Stabilität vom Schrittweitenparameter α wurde mit einem vereinfachten Verfahren untersucht. $\ln F_1$ wurde in Schritten von 0,001 solange erniedrigt, bis der Bunch über mindestens 10^6 Umläufe stabil blieb. Abb. 6.12 zeigt das Ergebnis: Die Stabilität hängt zwischen 0,2 und 0,6 nur schwach von α ab. Darunter nimmt sie wegen der zu geringen Adaptiongeschwindigkeit deutlich ab. Da die Adaption unter dem Einfluß von Rauschen ohnehin unruhig verläuft, ist es sinnvoll, den kleinstmöglichen Wert zu verwenden. Deshalb wurde für alle weiteren Untersuchungen $\alpha = 0,2$ gesetzt.

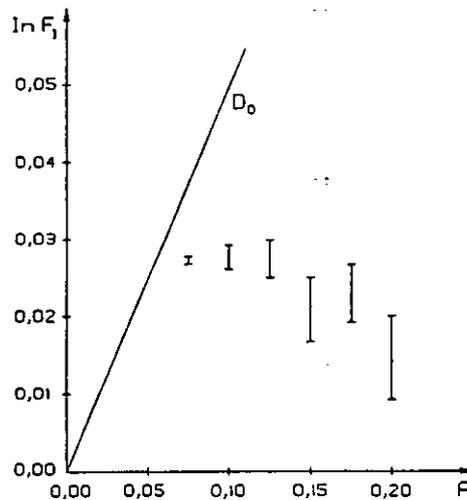


Abbildung 6.13: Die Stabilität bezogen auf 10^9 Umläufe in Abhängigkeit von der Feedbackstärke A . Mit eingezeichnet ist die theoretische Stabilitätsgrenze $D_0 = A/2$. $L/\sigma = 5$.

A	$a/10^{-3}$	$\ln F_I/10^{-3}$	$\Delta \ln F_I/10^{-3}$
0,075	-0,63	27,2	0,5
0,100	-2,45	27,6	1,6
0,125	-3,42	27,4	2,5
0,150	-4,96	20,8	4,1
0,175	-4,68	22,9	3,7
0,200	-6,57	14,6	5,4

Tabelle 6.1: Die Stabilität bezogen auf 10^9 Umläufe in Abhängigkeit von der Feedbackstärke A . a ist der Regressionsparameter aus Gl. 6.35. $L/\sigma = 5$.

Die beiden Parameter A und L/σ wurden ausgehend von den Werten $A = 0,1$ und $L/\sigma = 5$, wie sie im transversalen PETRA-Feedback ungefähr vorliegen, variiert. Die Berechnung der Stabilitätswerte bezogen auf 10^9 Umläufe und der Fehlerbalken erfolgte nach Gl. 6.35 bis 6.37.

Abb. 6.13 und Tab. 6.1 zeigen die Ergebnisse der Variation von A mit $L/\sigma = 5$. Eine Steigerung von A über 0,075 hinaus erbringt keine größere Stabilität mehr, sondern statt dessen nimmt die Stabilität oberhalb von $A = 0,125$ wieder ab. Der Grund liegt in der verstärkten Übertragung des Rauschens auf den Bunch.

Für $A < 0,075$ ist $\ln F_I$ im wesentlichen durch die theoretische Stabilitätsgrenze

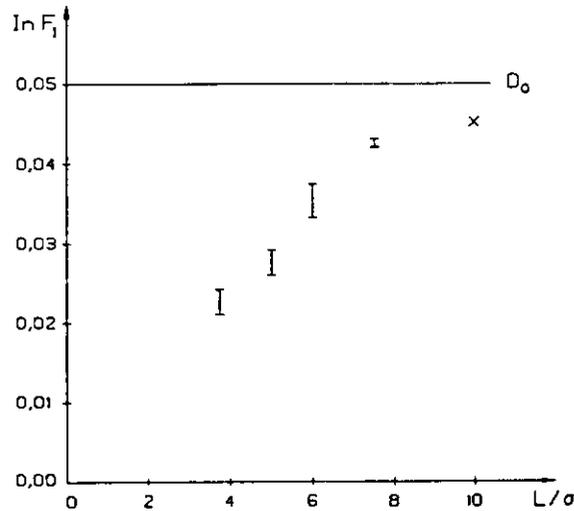


Abbildung 6.14: Die Stabilität bezogen auf 10^9 Umläufe in Abhängigkeit von L/σ . Mit eingezeichnet ist die theoretische Stabilitätsgrenze $D_0 = A/2$. $A = 0,1$.

$D_0 = A/2$ gegeben, da der Rauscheinfluß immer schwächer wird. Das Optimum für A liegt also bei 0,075.

Auffällig ist die starke Zunahme der Unsicherheit $\Delta \ln F_I$ mit A . Letztlich ist auch hierfür der Grund in der verstärkten Rauschübertragung zu suchen. Man kann sich die Zusammenhänge zusätzlich an Abb. 6.10 veranschaulichen: Für $q = 0,1$ und $\ln F_I \rightarrow D_0$ verlaufen die x_{rms} -Kurven sehr steil. Somit führt in der Nähe der theoretischen Stabilitätsgrenze bereits eine geringfügige Reduktion von $\ln F_I$ zu einem erheblichen Stabilitätsgewinn.

Das drückt sich auch in einem sehr flachen Verlauf der Regressionsgeraden aus, wie die relativ kleine Steigung $a = -0,063 \cdot 10^{-3}$ für $A = 0,075$ in Tab. 6.1 zeigt. Umgekehrt liegt für großes A der Stabilitätswert weit unter D_0 in einem Bereich, wo die x_{rms} -Kurve viel flacher verläuft. Entsprechend sind die Fehlerbalken und die Steigung a der Regressionsgeraden groß.

Den gleichen Effekt beobachtet man bei der Variation von L/σ in Abb. 6.14. Je näher die Werte an $D_0 = 0,05$ liegen, desto kleiner werden die Fehlerbalken und desto flacher verläuft die Regressionsgerade, s. Tab. 6.2. Abb. 6.14 zeigt, daß, ausgehend von $A = 0,1$ und $L/\sigma = 5$, eine Erhöhung von L/σ sinnvoller ist als eine Erhöhung von A . Die Kurve steigt zunächst steil an und flacht oberhalb von $L/\sigma = 7,5$ ab. Bei

$$L/\sigma = 10 \tag{6.44}$$

L/σ	$a/10^{-3}$	$\ln F_I/10^{-3}$	$\Delta \ln F_I/10^{-3}$
3,75	-1,94	22,6	1,6
5,00	-2,45	27,6	1,6
6,00	-1,30	35,3	2,1
7,50	-0,37	42,6	0,5
10,00	-0,35	45,2	0,2

Tabelle 6.2: Die Stabilität bezogen auf 10^9 Umläufe in Abhängigkeit von L/σ . $A = 0,1$.

A	L/σ	$a/10^{-3}$	$\ln F_I/10^{-3}$	$\Delta \ln F_I/10^{-3}$
0,0625	8,00	-0,25	27,6	0,4
0,075	6,66	-0,45	31,1	0,2
0,0875	5,71	-0,96	32,1	0,5
0,100	5,00	-2,45	27,6	1,6
0,125	4,00	-3,94	18,9	3,3
0,150	3,33	-3,83	18,3	2,6

Tabelle 6.3: Die Stabilität bezogen auf 10^9 Umläufe in Abhängigkeit von A unter der Bedingung $A \cdot L/\sigma = 0,5$.

erreicht $\ln F_I$ 90 % des theoretischen Werts. Hier beginnt also der Bereich, wo das Rauschen die Stabilität des adaptiven Feedbacks nicht mehr entscheidend beeinflusst.

Sowohl die Erhöhung von A als auch die von L/σ erfordern eine substantielle Verbesserung des Feedbackpfades, d. h. einen stärkeren Kicker oder einen rauschärmeren Monitor. Nimmt man beides als fest vorgegeben an, so gibt es jedoch immer noch die Möglichkeit, A unter der Nebenbedingung $A \cdot L/\sigma = \text{const}$ zu optimieren, da die Kickerstärke proportional zu $A \cdot L$ ist.

Die entsprechende Kurve zeigt Abb. 6.15 mit $A \cdot L/\sigma = 0,5$. Das Optimum liegt demnach bei $A \approx 0,0875$ entsprechend $L/\sigma \approx 5,71$. Nach beiden Seiten fällt die Kurve recht steil ab, für kleinere A durch D_0 begrenzt, für größere A wegen der stärkeren Rauschübertragung auf den Bunch, deren Auswirkung durch die gleichzeitige Reduktion von L/σ noch verstärkt wird.

6.3 Diskussion

Zunächst eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Kapitels: Es wurde ein adaptiver Phasenschieberalgorithmus entwickelt, der sich automa-

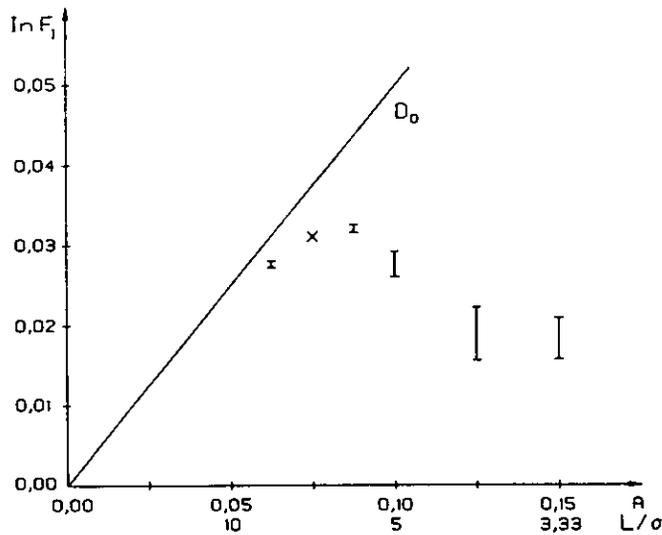


Abbildung 6.15: Die Stabilität bezogen auf 10^9 Umläufe in Abhängigkeit von A unter der Bedingung $A \cdot L/\sigma = 0,5$. Mit eingezeichnet ist die theoretische Stabilitätsgrenze $D_0 = A/2$.

tisch an den q -Wert anpaßt. Die Zeit für das Auffinden der richtigen Koeffizienten beträgt typisch 10 bis 20 Umläufe.

Der Einfluß von Rauschen, welches dem Schwingungssignal überlagert ist, auf die Adaption wurde ausführlich untersucht. Es stellte sich heraus, daß das Rauschen im Mittel zu einer Adaption der DPS-Koeffizienten auf Werte führt, die $q = 0,25$ entsprechen. Aus diesem Grunde arbeitet das adaptive Feedback für $q = 0,25$ fast ebenso gut, wie das CIR-Feedback. Je mehr sich q den Rändern des für das Feedback relevanten Bereichs von 0,1 bis 0,4 nähert, desto störender wirkt das Rauschen.

Die Adaption funktioniert in den Randbereichen nur dann gut, wenn das Schwingungssignal das Rauschen deutlich übersteigt. Ein adaptiv stabilisierter Bunch schwingt deshalb deutlich stärker als ein Bunch, der von einem CIR-Feedback stabilisiert wird. Entsprechend ist ein größeres Verhältnis zwischen linearem Verstärkungsbereich L des Feedbackpfades und Streuung σ des Rauschens erforderlich, um eine vergleichbare Stabilität zu erzielen. Für $q = 0,1$ und $A = 0,1$ wird ein Verhältnis $L/\sigma = 10$ benötigt, um mit dem adaptiven Feedback die theoretische Stabilitätsgrenze D_0 zu 90 % zu erreichen.

Eine Alternative zum adaptiven Feedback mit besserer Rauschunterdrückung stellt die laufende q -Messung dar, z. B. mittels einer FFT oder eines Pha-

senregelkreises. Da Letzteres bereits für PETRA und HERA existiert, bietet es sich an, den so gemessenen Wert als Eingangsgröße für den CIR-DPS zu benutzen. Der Vorteil des adaptiven Algorithmus liegt demgegenüber in der kurzen Adaptionzeit, die einen Einsatz auch im Falle sehr viel schnellerer q -Verschiebungen als in PETRA oder HERA ermöglichen würde.

Die Realisierung eines adaptiven DPS ist erheblich aufwendiger als die Realisierung des CIR-DPS. Dennoch dürfte der Aufwand in einem Feedbacksystem mit einer Datenrate von beispielsweise 10,4 MHz nicht unangemessen hoch sein, wenn man ihn mit den anderen Komponenten des Feedbacks vergleicht. Dies gilt insbesondere angesichts der steigenden Leistungsfähigkeit digitaler Signalprozessoren.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die Sollströme von etwa 60 mA in den Elektronenringen von PETRA und HERA sind nur mit Hilfe von Feedbacksystemen, die die Strahlschwingungen dämpfen, zu erreichen.

Die durch die Unterteilung des Strahls in einzelne Bunche bedingte zeitdiskrete Struktur des Signals am Monitor des Feedbacks legt es nahe, Phasenverschiebung und Verzögerung im Feedbackpfad durch digitale Verarbeitung des Signals anzustreben. Es wurde gezeigt, daß ein digitales FIR-Filter mit drei Koeffizienten als Phasenschieber sowohl in den transversalen als auch in den longitudinalen Feedbacksystemen im gesamten relevanten Frequenzbereich gute Dämpfungseigenschaften ergibt.

Deshalb wurde ein digitaler Phasenschieber (DPS) auf einer VME-Karte entwickelt. Da dieser DPS die Signale aller 80 bzw. 220 Bunche simultan verarbeitet, ist der Aufwand verglichen mit analogen Alternativen sehr gering. Der DPS wird mit großem Erfolg in den Feedbacksystemen von PETRA und HERA eingesetzt.

Darüber hinaus wurde eine Theorie abgeleitet, die das gesamte Feedback, also einschließlich der analogen Übertrager im Feedbackpfad, einheitlich in einem zeitdiskreten Formalismus beschreibt. Diese Theorie stimmt mit den Ergebnissen von Simulationen und, soweit vorhanden, auch mit den Meßergebnissen gut überein.

Der zur Zeit eingesetzte DPS erfordert eine manuelle Anpassung an die jeweilige Frequenz der Strahlschwingung. Aus diesem Grunde wurde ein adaptiver Algorithmus entwickelt, der die Anpassung selbsttätig vornimmt. Durch umfangreiche Simulationen konnte gezeigt werden, daß auch mit einem adap-

tiven DPS unter realistischen Bedingungen bzgl. Rauschen und Aussteuerung im Feedbackpfad über 90 % der theoretischen, durch die Feedbackstärke begrenzten Stabilität erreicht werden.

Allerdings stellt die verstärkte Rauschübertragung auf den Strahl einen unerwünschten Nebeneffekt des adaptiven DPS dar. Deshalb, und weil es einfacher ist, die ohnehin gemessene Schwingungsfrequenz als Eingangswert für den vorhandenen DPS zu nutzen, kommt eine Realisierung des adaptiven DPS momentan für PETRA und HERA nicht in Betracht.

Anhang A

Die Realisierung des digitalen Phasenschiebers

In den transversalen Feedbacksystemen ist der DPS-Algorithmus für N_B Bunches in kausaler Form, einschließlich einer zusätzlichen Verzögerung um m_B Takte, durch folgende Gleichung gegeben, vgl. Abschnitt 4.1 und 4.2.4:

$$y(l) = \sum_{i=-1}^1 h(\Delta\varphi; i)x(l - m_B - N_B(i + 1)) \quad (\text{A.1})$$

In den longitudinalen Feedbacks ist N_B durch $3N_B$ zu ersetzen, s. Abschnitt 4.2.3.

Abb. A.1 zeigt ein einfaches Blockschaltbild des DPS. Die Eingangswerte $x(l)$ werden als 8-Bit-Zahlen mit der Bunchfolgefrequenz $\nu_B = 10,4$ MHz vom ADC übernommen. Das erste Schieberegister bewirkt eine einstellbare Verzögerung um m_B Takte, d. h. um $\Delta t = m_B T_B$. Die zur exakten Einstellung von Δt_{FB} nach Gl. 4.2 bzw. 4.5 erforderliche Feinverzögerung Δt_f ist nicht in den DPS integriert. Die anderen beiden Schieberegister verzögern die Daten um je N_B (bzw. $3N_B$) Takte, so daß an den drei Multiplizierern jeweils die Daten eines Bunches anliegen.

72 Koeffizientensätze $h(\Delta\varphi; i)$ sind in Schritten von 5° mit einer Auflösung von ebenfalls 8 Bit im Koeffizientenspeicher tabelliert. Dadurch kann jeder Winkel $\Delta\varphi$ zwischen 0° und 360° mit ausreichender Genauigkeit eingestellt werden. Daten und Koeffizienten werden in drei 8×8 -Bit-Multiplizierern miteinander multipliziert und die wieder auf 8 Bit gerundeten Ergebnisse aufaddiert. Da der Amplitudengang des DPS den Wert von 1,27 nicht überschreitet, läßt sich die Summe mit 9 Bit exakt darstellen. $y(l)$ wird deshalb als 9-Bit-Zahl an den DAC übergeben.

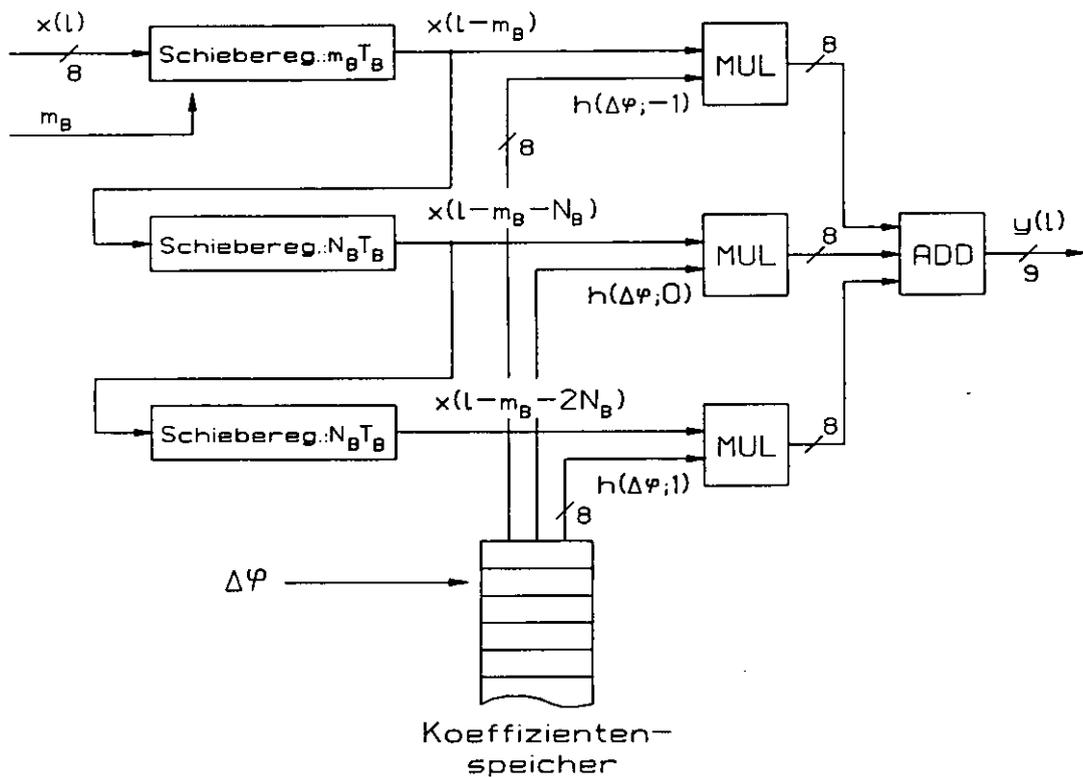


Abbildung A.1: Das Blockschaltbild des DPS für ein transversales Feedback einschließlich einer zusätzlichen einstellbaren Verzögerung um $m_B T_B$. Im Falle der longitudinalen Feedbacks ist in den beiden unteren Schieberegistern N_B durch $3N_B$ zu ersetzen.

Die Schieberegister sind als statische Dual Ported RAMs ($2K \times 8$ Bit, 35 ns Schreib- oder Lesezyklus), die von Ringzählern gesteuert werden, ausgeführt. Die jeweilige Verzögerung wird über den Startwert des Ringzählers eingestellt.

Der Koeffizientenspeicher besteht aus drei EPROMs ($4K \times 8$ Bit, 250 ns Zugriffszeit). Die gewünschte Phase $\Delta\varphi$ wird als Adresse kodiert an die EPROMs gelegt, und die entsprechenden Koeffizienten werden über Synchronisierungsregister an die Multiplizierer übergeben. Dadurch läßt sich die Phase während des Betriebs umschalten, ohne daß der DPS aufgrund der langen Zugriffszeit der EPROMs in einen undefinierten Zustand gerät.

Die Multiplizierer erlauben eine maximale Datenrate von 20 MHz. Addierer und Zählersteuerung der RAMs sind in einem "Field Programmable Gate Array" (FPGA) zusammengefaßt. Das spart Platz auf der Karte, macht die Schaltung zuverlässiger und vereinfacht die Anpassung des DPS an das jeweilige Feedbacksystem, transversal oder longitudinal, PETRA oder HERA.

Das gesamte System arbeitet synchron mit TTL-Pulsen und der Taktfrequenz $\nu_B = 10,4$ MHz. Die eingesetzten Schaltkreisfamilien sind vorwiegend CMOS (RAMs, MULs, FPGA) und AS-TTL. Die gedruckte Schaltung paßt gut auf eine VME-Karte. Ein- und Ausgabe erfolgen differentiell über Frontplattenstecker und paarweise verdrillte Flachkabel.

Die DPS-Karte wird über eine separate Kontrollkarte gesteuert. Auf ihr befinden sich zwei Zifferschalter zur manuellen Einstellung von $\Delta\varphi$ und Δt sowie ein Interface zu SEDAC, einem bei DESY entwickelten seriellen Datenübertragungssystem, über das die Verbindung zum Kontrollraum hergestellt wird.

Anhang B

Die wichtigsten Formelzeichen von Kapitel 3 bis 6

Die folgenden Listen enthalten die wichtigsten Variablen, Spezialzeichen und Indices von Kap. 3 bis 6. Kap. 2 ist inhaltlich und bezüglich der Nomenklatur weitgehend selbständig. Deshalb sind aus diesem Kapitel nur jene Variablen mit aufgelistet, die auch in den folgenden Kapiteln von Bedeutung sind.

Hinsichtlich der speziellen Problematik bei der Bezeichnung kontinuierlicher und diskreter Funktionen und deren Spektraltransformierter sei auf Abschnitt 3.3 verwiesen.

Vektoren und Matrizen sind durch Fettdruck gekennzeichnet.

a) Variable:

A	: Feedbackstärke
$\mathbf{B}(z)$: Kopplungsmatrix der Bunche
$c_r(k)$: Modenkoeffizient
$C_r(z)$: Modenkoeffizient im Frequenzbereich
$\tilde{C}_r(z)$: modifizierter Modenkoeffizient im Frequenzbereich
d	: Dämpfungsrate des Feedbacks
D	: Feedbackdämpfung
\bar{D}	: mittlere Dämpfung des adaptiven Feedbacks
D_0	: Dämpfung, die das adaptive Feedback ohne Rauschen erreichen würde.
$E(k)$: Schwingungsenergie des Bunches
$\tilde{E}(k)$: modifizierte Schwingungsenergie des Bunches
$f(k)$: s. Gl. 6.10
F_1	: Instabilitätsfaktor

g	: Impulsantwort der analogen Übertrager im Feedbackpfad (Kap. 5)
$g(k)$: Referenzalgorithmus im adaptiven DPS (Kap. 6)
G	: Übertragungsfunktion der analogen Übertrager im Feedbackpfad
$h(\Delta\varphi; k)$: Impulsantwort des DPS
$h_N(\Delta\varphi; k)$: Impulsantwort des optimierten DPS der Länge $2N + 1$
$\bar{h}(\Delta\varphi; m)$: Impulsantwort des DPS für N_B Bunche (Kap. 5)
$h_{\text{ad},i}(k)$: Koeffizienten des adaptiven DPS
$h_{\text{TP}}(k)$: Impulsantwort des idealen digitalen Tiefpasses
$h_{\text{TP},c}(t)$: Impulsantwort eines RC-Tiefpasses
$H_{\text{ad},d}(j\omega; k)$: Übertragungsfunktion des adaptiven DPS
$H_{\text{Ref},d}(j\omega; k)$: Übertragungsfunktion des Referenzalgorithmus im adaptiven DPS
$H_d(\Delta\varphi; j\omega)$: Übertragungsfunktion des DPS
H_{max}	: Maximum der Übertragungsfunktion des DPS
$H_{N,d}(\Delta\varphi; j\omega)$: Übertragungsfunktion eines DPS mit $2N + 1$ Koeffizienten
$H_{N,\text{opt},d}(\Delta\varphi, j\omega)$: Übertragungsfunktion des optimierten DPS der Länge $2N + 1$
$H_{S,d}(\Delta\varphi; j\omega)$: Übertragungsfunktion des DPS im longitudinalen Feedback
$H_{\text{TP},c}(j\omega)$: Übertragungsfunktion eines RC-Tiefpasses
$H_{\text{TP},d}(j\omega)$: Übertragungsfunktion des idealen digitalen Tiefpasses
$H_{\text{TP},N,d}(j\omega)$: Übertragungsfunktion eines digitalen Tiefpasses mit $2N + 1$ Koeffizienten
j	: $\sqrt{-1}$
k_F	: Einschaltzeitpunkt des Feedbacks
\mathbf{K}_r	: Modenvektor
$\tilde{\mathbf{K}}_r(z)$: modifizierter Modenvektor
L	: linearer Verstärkungsbereich des Feedbacks
M	: Länge der Impulsantwort des Feedbackpfades (Kap. 4)
\mathbf{M}	: Transfermatrix der Bunchschwingung
\mathbf{M}_0	: Transfermatrix für einen Umlauf
n	: Zahl der simulierten Umläufe (Kap. 6)
n_U	: Zahl der ganzen Umläufe zwischen Abtastung und Kick
N	: ganze Zahl zur Kennzeichnung der Länge eines FIR-Filters mit $2N + 1$ Koeffizienten
N_B	: Zahl der Bunche
N_D	: Zahl der Umläufe, in denen das Feedback die Schwingung

	um einen Faktor $1/e$ dämpft.
q	: fraktaler Anteil von Q
Δq	: q-Verschiebung
Q	: Q-Wert
Q_0	: ganzzahliger Anteil von Q
$Q(z)$: $z - 2 \cos(\Omega T_0) + z^{-1}$
$r_c(t)$: Rechteckfunktion
$r_N(k)$: Rechteckfolge der Länge $2N + 1$
$R_c(j\omega)$: Spektrum der Rechteckfunktion
$R_{N,d}(j\omega)$: Spektrum von $r_N(k)$
s	: komplexe Frequenzvariable der Laplace-Transformation
$s(k)$: Sprungfolge
$s_c(t)$: Sprungfunktion
t	: Zeit
Δt_{FB}	: Gesamtverzögerung des Feedbackpfades
$\Delta t_{\text{M-Ki}}$: Flugzeit des Bunches vom Monitor zum Kicker
T_A	: Abtastintervall
T_B	: zeitlicher Bunchabstand
T_0	: Umlaufzeit
v	: Impulsantwort des Feedbackpfades
V	: Übertragungsfunktion des Feedbackpfades
\hat{V}	: systemtheoretische Feedbackverstärkung
w	: normierte Impulsantwort des Feedbackpfades
W	: normierte Übertragungsfunktion des Feedbackpfades
\hat{W}	: $ W(e^{j\Omega T_0}) $
$\hat{W}_{r\pm}$: $ W(e^{j(r\omega_0 \pm \Omega) T_B}) $
$x(k)$: Abtastwerte des Bunches (Kap. 4 und 6)
$x_\mu(k)$: Abtastwerte des μ -ten Bunches (Kap. 5)
$x_r(k)$: verrauschtes Bunchsignal
$x_{r,\text{lim}}(k)$: verrauschtes und limitiertes Bunchsignal
x_{rms}	: quadratisches Mittel der Abtastwerte des Bunches
$\Delta \dot{x}(k)$: Kick
$\bar{\Delta} \dot{x}(k)$: modifizierter Kick
$X(z)$: z-Transformierte von $x(k)$
$X_I(z)$: einseitige z-Transformierte von $x(k)$
$\mathbf{X}(z)$: aus den $X_\mu(z)$ zusammengestellter Vektor
$X_\mu(z)$: z-Transformierte von $x_\mu(k)$
z	: komplexe Frequenzvariable der z-Transformation
z_\pm	: Pole in der Nähe von $e^{\pm j\Omega T_0}$
$z_{r\pm}$: Pole von Mode r in der Nähe von $e^{\pm j\Omega T_0}$
α	: Schrittweitenparameter im adaptiven DPS

$\delta(k)$: Impulsfolge
$\delta_c(t)$: Delta-Funktion
$\delta_p(t)$: periodische Delta-Funktion
$\delta_{rr'}$: Kroneckersymbol
ζ	: komplexe Frequenzvariable der z-Transformation
ζ_r	: $e^{jr\omega_0 T_B}$
φ	: Phase
$\Delta\varphi$: Phasenverschiebung
$\Delta\varphi_{DPS}$: Phase, auf die der DPS einzustellen ist
$\Delta\varphi_{FB}$: Phasenverschiebung zwischen Kickersignal und Bunchschwingung
$\Delta\phi$: Phasenverschiebung der Bunchschwingung
ν	: Frequenz
ν_A	: Abtastfrequenz
ν_B	: Bunchfolgefrequenz
ν_0	: Umlauffrequenz
σ	: Streuung des Rauschens
τ_D	: Dämpfungszeit
Ξ_{\pm}	: $\arg(W(e^{\pm j\Omega T_0}))$
$\Xi_{r\pm}$: $\arg(W(e^{j(r\omega_0 \pm \Omega)T_B}))$
$\Delta\Xi$: Phasenfehler des Feedbacks
$\Delta\Xi_{r\pm}$: Phasenfehler des Feedbacks bei $r\omega_0 \pm \Omega$
ω	: Kreisfrequenz
ω_A	: Abtastkreisfrequenz
ω_g	: Grenzkreisfrequenz eines RC-Tiefpasses
ω_0	: Umlaufkreisfrequenz
Ω	: Kreisfrequenz des harmonischen Oszillators bzw. der Bunchschwingung
$\Delta\Omega$: vom Feedback erzeugte Verschiebung der Kreisfrequenz

b) Spezielle Zeichen:

$\arg(\dots)$: Phase einer komplexen Zahl
$\text{floor}(\dots)$: Rundung nach $-\infty$
$\text{Im}(\dots)$: Imaginärteil
$\text{max}(\dots)$: Maximum
$\text{Re}(\dots)$: Realteil
$\text{Res}(\dots)$: Residuum
$\text{sgn}(\dots)$: Vorzeichenfunktion
$\mathcal{F}\{\dots\}$: Fourier-Transformierte
$\mathcal{L}\{\dots\}$: Laplace-Transformierte
$\mathcal{Z}\{\dots\}$: z-Transformierte

$:=, =:$: Definition; auf der Seite des Doppelpunkts wird eine neue Größe eingeführt.
$(\dots) * (\dots)$: Faltung
$(\dots)^*$: komplexe Konjugation
(\dots)	: Ableitung nach der Zeit
$(\dots)^+$: komplexe Konjugation und Transposition eines Vektors
$\overline{(\dots)}$: Mittelwert

c) Indices:

A	: Abtast...
ad	: adaptiv
B	: Bunch
c	: kontinuierlich
d	: diskret
long	: longitudinal
M	: Monitor (Kap. 4); Moden (Kap. 5)
Ki	: Kicker
r	: Rauschen
r	: Modenindex
r_{\pm}	: Indiziert die Frequenzen $r\omega_0 \pm \Omega$.
Ref	: Referenz...
S	: Synchrotronschwingung
th	: theoretisch
TP	: Tiefpaß
tr	: transversal
β	: Betatronschwingung
μ	: Bunchindex
ν	: Bunchindex
0	: Bezieht sich auf einen vollen Umlauf.
\pm	: Indiziert die Frequenzen $\pm\Omega$.

Anhang C

Abkürzungen

Die wichtigsten Abkürzungen sind:

ADC : Analog-Digital-Converter
CIR : Constant Impulse Response
DAC : Digital-Analog-Converter
DESY : Deutsches Elektronen-Synchrotron
DPS : Digitaler Phasenschieber
FIR : Finite Impulse Response
HERA : Hadron-Elektron-Ring-Anlage
LTI : Linear Time Invariant
PETRA: Positron Electron Tandem Ring Accelerator

Vereinzelt treten auch die folgenden Abkürzungen auf:

ADD : Addierer
AS-TTL: Advanced Schottky TTL
CERN : Conseil European pour la Recherche Nucleaire
CMOS : Complementary Metal Oxide Semiconductor
DFT : Diskrete Fourier-Transformierte
DORIS : Doppelringspeicher
DSV : Digitale Signalverarbeitung
e : Elektron
EPROM: Erasable Programmable Read only Memory (Lese-Speicher)
FODO : Fokussierend - Null - Defokussierend - Null
FPGA : Field Programmable Gate Array
GeV : Gigaelektronenvolt; $1 \text{ GeV} = 1,60 \cdot 10^{-10} \text{ J}$
HF : Hochfrequenz
IIR : Infinite Impulse Response
LEP : Large Electron Positron (Ring)
LINAC : Linear Accelerator

MeV : Megaelektronenvolt; $1 \text{ MeV} = 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J}$
MUL : Multiplizierer
p : Proton
PC : Personal Computer
RAM : Random Access Memory (Schreib-Lese-Speicher)
SEDAC : Serial Data Acquisition (DESY Standard)
SSC : Superconducting Super-Collider
TP : Tiefpaß
TTL : Transistor-Transistor-Logik
VME : Versa Module Europe (Industrieller Busstandard)

Literaturverzeichnis

- [Bou91] D. Boussard, "Design of a Ring RF System", CERN SL/91-2(RFS), März 1991.
- [Cou58] E. D. Courant, H. S. Snyder, "Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron", Annals of Physics 3, 1 - 48, 1958.
- [DeF88] D. J. DeFatta, J. G. Lucas, W. S. Hodgkiss, "Digital Signal Processing", New York, John Wiley & Sons, 1988.
- [Doe85] G. Doetsch, "Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation", München, R. Oldenbourg, 5. Aufl., 1985.
- [Ebe91] M. Ebert et al., "Transverse and Longitudinal Multi-Bunch Feedback Systems for PETRA", DESY 91-036, April 1991.
- [Edw87] D. A. Edwards, M. J. Syphers, "An Introduction to the Physics of Particle Accelerators", Proceedings of the FNAL Summer School, Batavia, USA, 1987.
- [Fli91] N. Fliege, "Systemtheorie", Stuttgart, B. G. Teubner, 1991.
- [Gam90] A. Gamp et al., "Damping of coherent synchrotron oscillations occurring at injection of 7.5 GeV protons into PETRA II", 2nd European Particle Accelerator Conference, EPAC 90, Nice, 12. - 16. Juni 1990.
- [Hei79] D. Heins et al., "The Transverse Feedback System at PETRA", DESY M-79/06, Mai 1979.
- [Hei89] D. Heins et al., "Wide Band Multi-Bunch Feedback Systems for PETRA", DESY 89-157, Nov. 1989.
- [HERA81] "HERA - A Proposal for a large Electron-Proton Colliding Beam Facility at DESY", DESY-HERA 81/10, Juli 1981.

- [Her69] O. Herrmann, "Transversalfilter zur Hilbert-Transformation", AEÜ, Bd. 23, Heft 12, S. 581, Dez. 1969.
- [Kam88] K. D. Kammeyer, "Nachrichtenübertragung", Vorlesung, TU Hamburg-Harburg, 1988.
- [Kam88a] K. D. Kammeyer, "Konstant-Modulus Algorithmen zur Einstellung adaptiver Empfangsfilter", AEÜ, Bd. 42, Heft 1, S. 25, 1988.
- [Kam89] K. D. Kammeyer, K. Kroschel, "Digitale Signalverarbeitung", Stuttgart, B. G. Teubner, 1989.
- [Koh] R. D. Kohaupt, persönliche Mitteilung.
- [Koh80] R. D. Kohaupt, "Head-Tail-Turbulences", DESY 80-22, 1980.
- [Koh86] R. D. Kohaupt, "What is Landau-Damping?", DESY M-86-02, März 1986.
- [Koh87] R. D. Kohaupt, "Dynamik intensiver Teilchenstrahlen", Vorlesung, Universität Hamburg, SS 87 - WS 89.
- [Koh91] R. D. Kohaupt, "Theory of Multi-Bunch Feedback Systems", DESY 91-071, Juni 1991.
- [Mar86] H. Marko, "Methoden der Systemtheorie", Berlin, Springer, 2. Aufl., 1986.
- [Mil88] A. H. Millhouse, H.-J. Stuckenberg, "VME-Bus Based Digital Control of the DESY-III Proton Synchrotron", Conference on VME-Bus in Research, Zürich, 11. - 13. Okt. 1988.
- [Schm83] P. Schmüser, "Supraleitende Magnete für HERA", Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach, 1983.
- [Schm87] P. Schmüser, "Basic Course on Accelerator Optics", DESY HERA 87-02, Jan. 1987.
- [Schm90] P. Schmüser, "Zur Fertigstellung von HERA", Phys. Bl. 46, Nr. 12, S. 470, Dez. 1990.
- [Schm90a] P. Schmüser, D. Proch, "Der Einsatz von Supraleitung bei der neuen Speicherringanlage HERA", AGF, Jahresheft 1990.
- [Schu88] H. W. Schüßler, "Digitale Signalverarbeitung", Band I, "Analyse diskreter Signale und Systeme", Berlin, Springer, 1988.

- [Ste85] K. Steffen, "Basic Course on Accelerator Optics", DESY HERA 85/10, März 1985.
- [Ste87] S. D. Stearns, "Digitale Verarbeitung analoger Signale", München, R. Oldenbourg, 3. Aufl., 1987.
- [Unb83] R. Unbehauen, "Systemtheorie", München, R. Oldenbourg, 4. Aufl., 1983.
- [Vos88] G. A. Voss, "The HERA-Project", 1st European Particle Accelerator Conference, EPAC 88, Rome, 7. - 11. Juni 1988.
- [Wal89] P. Waloschek, "Das Forschungszentrum DESY", Pr. d. NatWiss., Phys. 38, Nr. 7, 1989.
- [Wie75] H. Wiedemann, "Einführung in die Physik der Elektron Positron Speicherringe", DESY H-75/01, Jan. 1975.
- [Wii90] B.-H. Wiik, "The Status of HERA", 2nd European Particle Accelerator Conference, EPAC 90, Nice, 12. - 16. Juni 1990.
- [Wil61] W. R. LePage, "Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers", New York, McGraw-Hill, 1961.
- [Wil83] K. Wille, "The Physics of e^+e^- -Storage Rings", DESY M-83-16, Juli 1983.
- [Zha91] V. M. Zhabitsky, "Theoretical Treatment of a Classical Transverse Feedback System using z-Transform", JINR Dubna, E9-91-156, April 1991.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Deutschen Elektronen-Synchrotron in Hamburg in Zusammenarbeit mit der Technischen Universität Hamburg-Harburg angefertigt. Sie wurde seitens der TU von Prof. Dr. K. D. Kammeyer, seitens des DESY von Prof. Dr. R. D. Kohaupt und Dr. H. J. Stuckenberg betreut.

Dem DESY danke ich für die großzügige finanzielle und materielle Förderung der Arbeit. Prof. Kammeyer und Prof. Kohaupt danke ich für die interessante Aufgabenstellung und die mir in jeder Form gewährte kontinuierliche Unterstützung sowie für zahlreiche Anregungen und Diskussionen. Ebenso gilt mein Dank Dr. Stuckenberg, der mich in seiner Gruppe, DESY-F56, "beheimatet" hat und dessen erfahrener Ratschlag mir vielfach zugute gekommen ist.

Ich danke auch den anderen Mitarbeitern der Gruppe F56, insbesondere Dr. A. H. Millhouse, Herrn W. Neff, Herrn H. Quehl, Herrn J. Stastny und Herrn Th. Wolff. Sie haben mir bei meinen Problemen mit Hard- und Software stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden. Zu Dank verpflichtet bin ich Herrn S. Pätzold und Herrn J. Klute für ihre Unterstützung bei der Entwicklung des digitalen Phasenschiebers und seiner Einbindung in die Feedbacksysteme. Die Fertigung des digitalen Phasenschiebers wurde zum größten Teil von Herrn S. Kluwe übernommen. Auch ihm sei hiermit gedankt. Dr. J. Feikes und Dr. K. Balewski danke ich für viele interessante Diskussionen auf dem Gebiet der Beschleunigerphysik. Einen großen Teil der Zeichnungen dieser Arbeit hat Frau M. Möller mit freundlicher Unterstützung von Herrn W. Kolzenburg angefertigt. Ich danke beiden dafür.

Mein abschließender Dank gilt den Mitarbeitern des Arbeitsbereiches Nachrichtentechnik der TU, die mir stets mit großem Wohlwollen begegnet sind.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Markus Schweiger
Geburtstag: 15.12.1960
Geburtsort: Hamburg
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Schulbildung

Aug. 1967 bis Juni 1978: Grundschule und naturwissenschaftlich-neusprachliches Gymnasium in Hamburg
Juni 1978: Abitur
Juli 1978 bis Sept. 1978: Urlaub und sechs Wochen Arbeit in einer Glaserei

Wehrdienst

1.10.1978 bis 30.9.1980: Soldat auf Zeit in Hamburg-Wentorf

Studium

WS 1980 bis WS 1982: Physik (Diplom) an der Universität Hamburg
Nebenfach: Chemie
SS 1983 bis WS 1983: Physik an der Universität Freiburg
SS 1984 bis WS 1988: Physik an der Universität Hamburg
Nebenfach: Biophysik
Juni 1985 bis Aug. 1987: Diplomarbeit am Deutschen Elektronen-Synchrotron in Hamburg: "Quenchuntersuchungen an supraleitenden Magneten."
März 1988: Abschluß der Physik-Diplomprüfung
Seit April 1988: Doktorarbeit am Deutschen Elektronen-Synchrotron in Zusammenarbeit mit der Technischen Universität Hamburg-Harburg: "Digitale Signalverarbeitung für die Feedbacksysteme der Elektronenspeicher-
ringe in PETRA und HERA."

M. Schweiger

