

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

# DESY

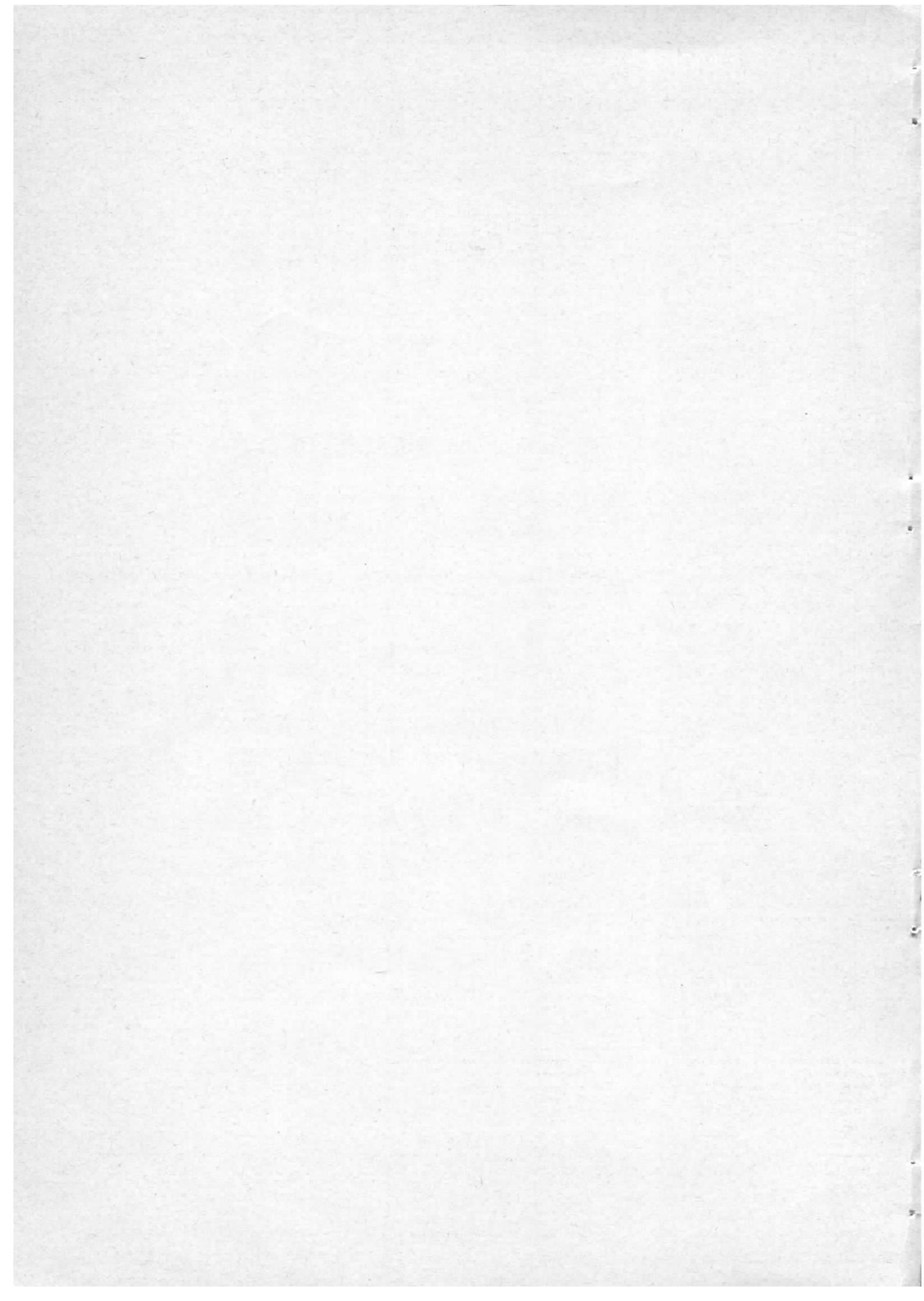
H-9

August 1965

VORSCHLAG  
FÜR DIE  
ERZEUGUNG VON POSITRONEN UND IHRE STRAHLFÜHRUNG  
IN EINEM  
LINEARBESCHLEUNIGER.

von

HELMUT WIEDEMANN



H. Wiedemann

Hamburg, den 17.8.65  
DESY - H 9

VORSCHLAG FÜR DIE ERZEUGUNG VON POSITRONEN UND IHRE  
STRAHLFÜHRUNG IN EINEM LINEARBESCHLEUNIGER

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

Einleitung	Seite	2
Der Konverter		3
Positronenerzeugung		6
Einfang der Positronen durch ein magn. Horn		8
Technische Realisierung des Positronenhorns		11
Betrieb des Positronenhorns		11
Positronen-Fokussierung im Linearbeschleuniger		12
Teilchen in einem magnetischen und elek. Feld		13
Solenoidfokussierung		14
Fokussierung mit Quadrupolen		16
FODO-Kanal		17
Solenoidfeld als Anfangsstrahlführung		19
Ausführung des FODO-Kanals		20
Literatur		22

## Einleitung

Mit dem zur Zeit diskutierten neuen Linearbeschleuniger als Injektor für DESY soll es möglich sein, neben Elektronen auch Positronen zu erzeugen und zu beschleunigen.

Im folgenden werden Einrichtungen beschrieben, die die Erzeugung der Positronen und ihre Führung durch den Linearbeschleuniger ermöglichen. Es wird dabei ein Beschleuniger vorausgesetzt, der am Konverter eine Elektronenstrahlleistung von 50 MW erreicht und dessen zweiter Teil nach dem Konverter die Positronen in acht drei Meter langen Beschleunigerabschnitten auf 300 MeV zu beschleunigen gestattet.

## Der Konverter

Als Target zur Konversion der Elektronen in Positronen muß ein Material gefunden werden, welches unter dem Beschuß von 50 MW Elektronenpulsleistung eine längere Zeit gebrauchsfähig bleibt.

Zu bisher gebauten und vorgeschlagenen Konvertern wird meist Wolfram als Target gewählt. Dieses Metall hat eine hohe Ordnungszahl, einen sehr hohen Schmelzpunkt und eine relativ gute Wärmeleitfähigkeit. Mit allen anderen festen Materialien hat aber der Gebrauch von Wolfram den Nachteil, daß das Target mit seinem Kühlsystem im Hochvakuum bewegt werden muß, damit nicht immer die gleiche Stelle vom Elektronenstrahl getroffen wird. Der zweite Nachteil ist die mechanische Zerstörung des Materials durch örtliche Erhitzungen. Diese führen zu hohen thermischen Spannungen, wodurch mikroskopische Materialteilchen losgelöst werden können.

Beide Nachteile kann man umgehen, wenn es gelingt, einen Konverter mit einem flüssigen Target zu bauen. Die Wärme kann durch Konvektion abgeführt werden und eine mechanische Zerstörung kann naturgemäß nicht auftreten.

Für dieses Vorhaben bieten sich zwei Möglichkeiten an: Quecksilber und Wood'sches Metall, das durch einen elektrischen Strom verflüssigt wird.

Zum Folgenden soll nur Quecksilber untersucht werden, da für das Wood'sche Metall bezüglich seines Verhaltens bei höheren Temperaturen noch weitere Studien notwendig sind.

Die an das Target abgegebene thermische Energie, die hier gleich der Ionisationsenergie gesetzt werden soll, beträgt

für den vorliegenden Fall:

$$(1) \quad \frac{\Delta E}{\Delta x} = 17,0 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}}$$

Wie sich später zeigen wird, ist die optimale Targetdicke etwa  $l = 1,5 \text{ r.l.} = 0,75 \text{ cm}$ .

Die zugeführte Wärmeenergie pro Puls beträgt damit:

$$(2) \quad \Delta Q = 1,37 \text{ cal/Puls}$$

bei einer Impulsdauer von  $1,5 \mu\text{sec}$ .

Dies entspricht einer Temperaturerhöhung des Quecksilbers von

$$(3) \quad \Delta T = \frac{\Delta Q}{\rho \cdot V \cdot c} = 85^\circ \text{ C},$$

wobei der Targetquerschnitt gleich dem Elektronenstrahlquerschnitt von  $2,5 \text{ mm}$  gesetzt wurde.

Da der Siedepunkt von Quecksilber bei  $357^\circ \text{ C}$  liegt, hat man also in obiger Abschätzung noch einen Sicherheitsfaktor von 3 bis 4. Sicherheitsvorkehrungen sind jedoch für den Fall zu treffen, in dem der Elektronenstrahlquerschnitt merklich abnimmt. Es kann dann zu einem Verdampfen des Quecksilbers kommen. Selbst in diesem Fall ist ein Platzen des Quecksilberbehälters jedoch nicht zu befürchten, da zum Beispiel dieser Behälter aus  $1 \text{ mm}$  Stahl mit den vorgegebenen Abmessungen ( $l = 0,75 \text{ cm}$ ;  $d = 2,5 \text{ mm}$ ) einem Druck bis zu  $20 \text{ Atm}$  standhält. Stahl empfiehlt sich am besten, da Eisen nicht merklich amalgamiert. Die Druckerhöhung durch ein Überhitzen des Quecksilbers - bei  $400^\circ \text{ C}$  beträgt der Dampfdruck  $2 \text{ Atm}$  - kann sich über das Vorratsgefäß oder ein Ventil ausgleichen. Während also bei einem flüssigen Target eine Strahlquerschnittverminderung bei getroffenem Sicherheitsvorkehrungen keine negativen Folgen zeigt, kann

ein festes Target in diesem Fall zerstört werden. Die für feste Materialien als Target gemachten Einschränkungen treffen natürlich auch für den Quecksilberbehälter zu, machen sich aber nicht so stark bemerkbar, da man ein Material möglichst niedriger Ordnungszahl wählen kann. Außerdem wirkt das Quecksilber als Kühlmittel. Will man zwischen zwei Strahlungsimpulsen das Quecksilbervolumen im Target gerade einmal austauschen, so ist ein Fluß von

$$(4) \quad F = 2 \text{ cm}^3/\text{sec}$$

notwendig.

## Positronenerzeugung

Zur Abschätzung der Positronenergiebigkeit eines Konverters ist man bisher auf zwei ausführlichere experimentelle Arbeiten angewiesen:

In Orsay wurden von T.L. Aggson und L. Burnod<sup>(1)</sup> die Positronenintensitäten in Vorwärtsrichtung -  $\vartheta = \pm 2^\circ$  - in Abhängigkeit von der Positronenenergie bei verschiedenen Elektronenenergien von 55 MeV bis 220 MeV gemessen. Da wir Positronen in einem großen Winkelbereich einfangen wollen und daher zur Abschätzung der gesamten Positronenintensität den Intensitätsabfall mit zunehmendem Winkel berücksichtigen müssen, können wir aus diesen Messungen keine quantitativen Ergebnisse übernehmen. Qualitativ ergibt sich jedoch ein breites Intensitätsmaximum bei niederen Positronenenergien - 5-10 MeV - für alle Elektronenenergien. Als zweites für uns wichtiges Ergebnis ergibt sich eine optimale Targetdicke von etwa 1,5 Strahlungslängen ebenfalls unabhängig von der Elektronenenergie.

Die für uns wichtigste Quelle für abschätzende Betrachtungen sind Messungen von de Staebler<sup>(2)</sup> in Stanford an Mark III. Er hat die Winkelverteilung der Positronen für verschiedene Energien und einer Elektronenenergie von 1 GeV gemessen. Als Target benutzte er 3 Strahlungslängen Kupfer bzw. Blei. Dabei zeigte sich für Kupfer gegenüber Blei nur ein unwesentlicher Positronenintensitätsunterschied. Auch bei de Staebler liegt das Intensitätsmaximum bei Energien zwischen 5 und 10 MeV (siehe Abb. 1).

Bezüglich der Absolutwerte sind die Messungen von de Staebler, wie er selbst bemerkt, nicht sehr genau. Durch Streuung vor allem der niederenergetischen Positronen an den Mylarfenstern seines Spektrometers gehen etwa 1/3 der Positronen verloren.

Wenn wir uns in den folgenden Rechnungen auf die Absolutwerte der Messungen beziehen, so erhält man eine untere Grenze der erreichbaren Positronenintensitäten. Trotz dieser Verluste ist aber doch anzunehmen, daß die Messungen die richtige Winkelverteilung geben.

Eine numerische Integration der Meßkurven ergibt die Positronenintensität in Abhängigkeit von halben Öffnungswinkeln des Strahls für eine Elektronenenergie von 1 GeV und Positronenenergien zwischen 5 und 10 MeV (siehe Abb. 2).

Für eine Elektronenimpulsleistung von 50 MW am Target und einer zulässigen Energiebreite von  $\Delta E_+ = 3$  MeV, entsprechend einer relativen Energiebreite von  $\Delta E_+/E_+ = 1$  % am Ende des Linearbeschleunigers, erhält man einen Positronenstrom von:

$$(5) \quad I_+ = \frac{1}{E_0} \cdot \frac{\Delta n_+}{\Delta E_+} P_- \cdot \Delta E_+ = 12 \text{ mA}$$

( $\Delta n_+$  Anzahl der Positronen im Energieintervall  $\Delta E_+$ ;  
 $P_-$  Elektronenstrahlleistung am Konverter)

Dies ist also die untere Grenze. Der wirkliche Positronenstrom kann bis zu 50 % höher sein. Bei einer effektiven Transparenz des geplanten Positronenhorns von mindestens 70 % und der Annahme, daß von den Positronen, die im Linearbeschleuniger eingefangen werden, mindestens ein Drittel innerhalb eines Energieintervalls von 1 % bleibt, ergibt sich ein Mindestpositronenpulsstrom von

$$(6) \quad I_+ = 2,5 \text{ mA}$$

welcher in das Synchrotron injiziert werden kann. Dies entspricht einem effektiven Umwandlungswirkungsgrad von

$$(7) \quad I_+/P_- = 0,05 \text{ mA/MW}$$

bei  $\Delta E_+/E_+ = 1$  % und einer Emittanz von 2 mrad.cm.

(Abb.1)

# Winkelverteilung von Positronen (SLAC-de-Staebler)

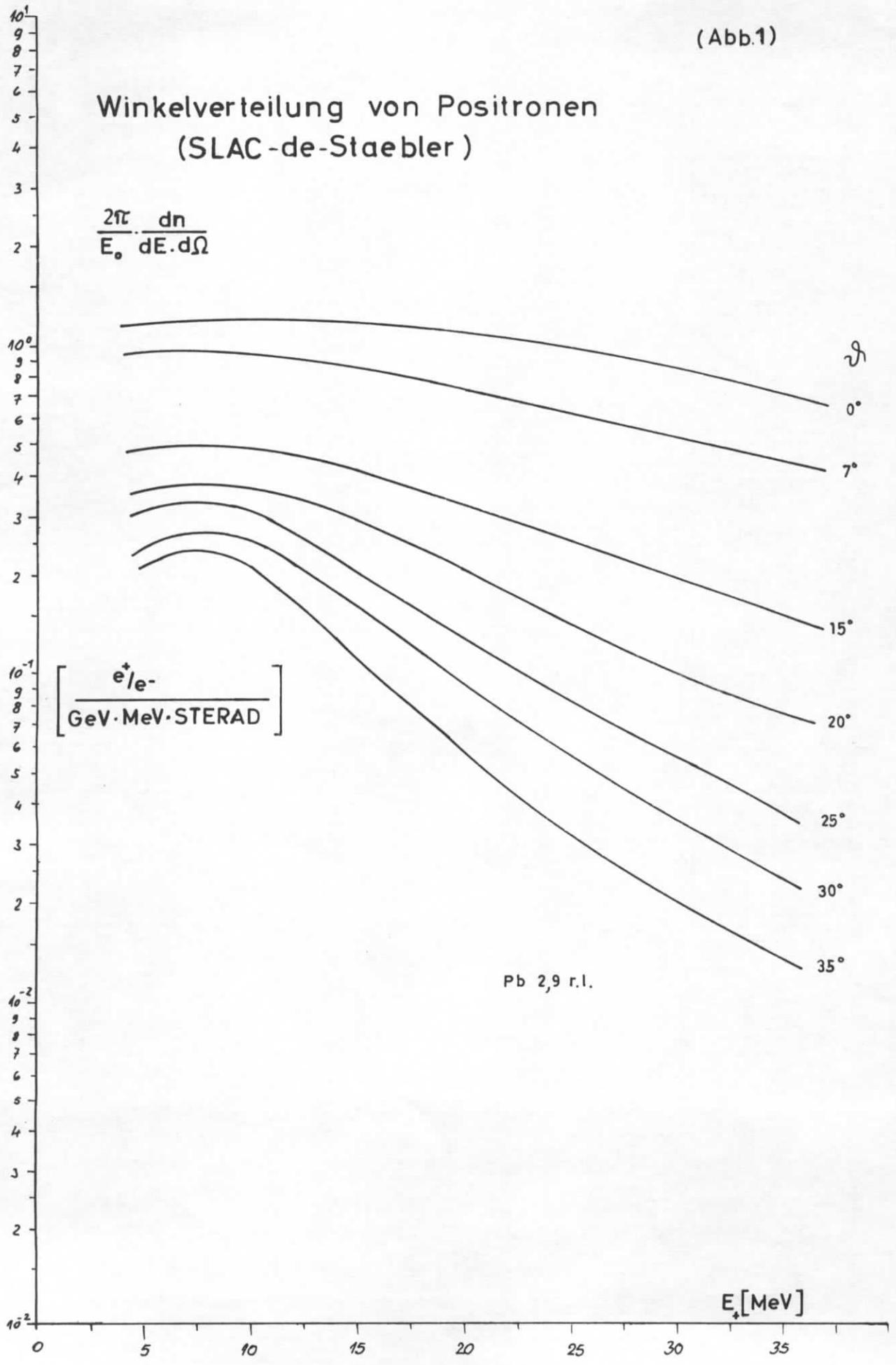


Abb. 7

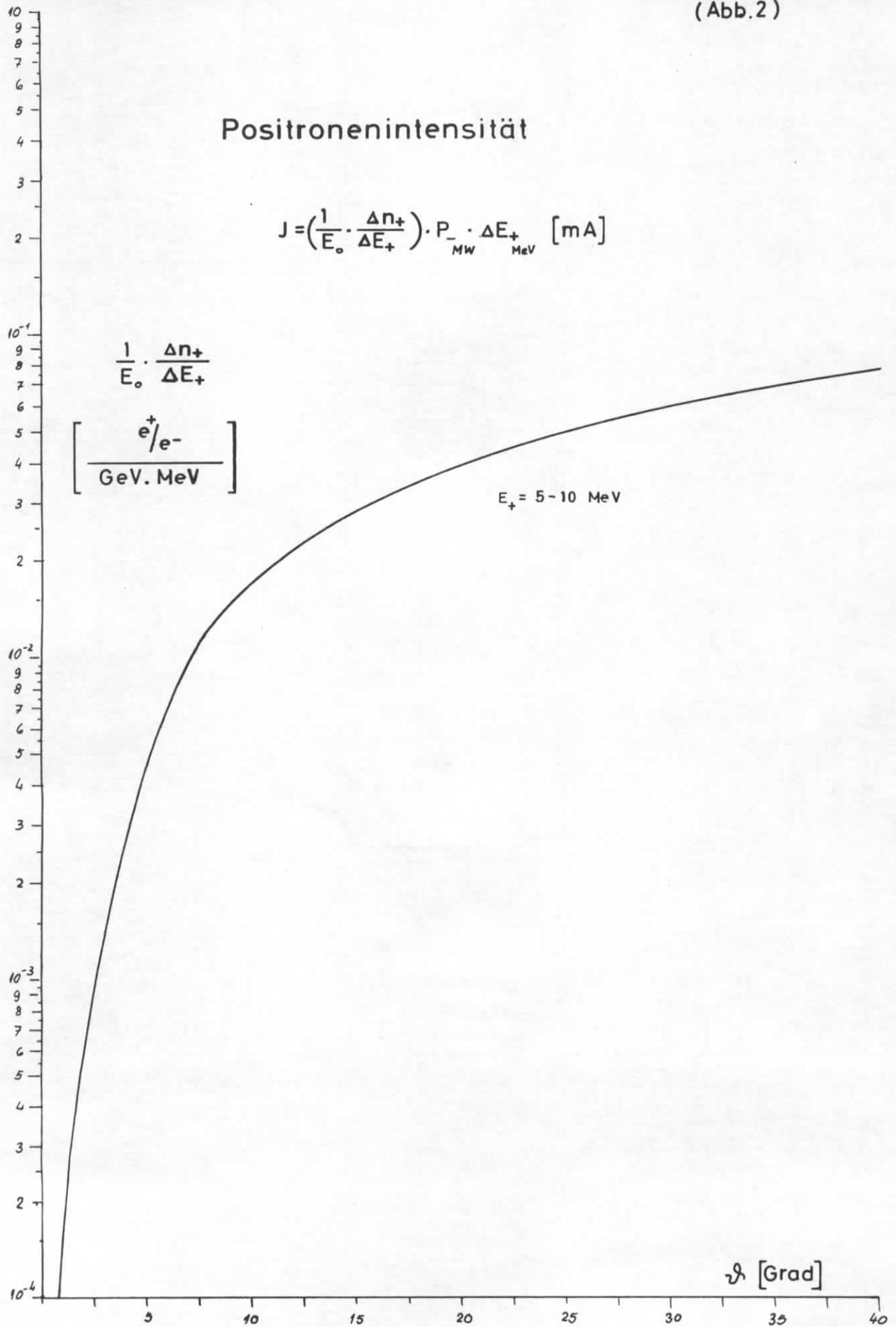
# Winkelverteilung von Positionen (SLAC-de-Stoß)

$$\frac{dN}{d\Omega dV dt}$$



[Mm]

(Abb.2)



(App. 1)

### Positioning differential

$$I = \left( \frac{1}{E} \right) \left( \frac{dE}{dt} \right) E \quad [mA]$$

$$\left[ \frac{1}{\text{eV} \cdot \text{MeV}} \right]$$

$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$

[0.10]

## Einfang der Positronen durch ein magnetisches Horn

Die im Konverter erzeugten Positronen haben infolge Vielfachstreuung eine breite Winkelverteilung. Um möglichst viele Positronen im Linearbeschleuniger einzufangen und beschleunigen zu können, müssen Fokussierungselemente dem Konverter nachgeschaltet werden.

In den bisher gebauten und vorgeschlagenen Positronenbeschleunigern ist es üblich, den Konverter in das magnetische Feld eines kurzen Solenoids zu setzen. Das Solenoid wirkt dabei als dünne Linse, welche den Positronenstrahl nahezu parallel macht.

Um Positronen bis zu einem Öffnungswinkel von  $\pm 14^\circ$  einzufangen, benötigt man ein Magnetfeld von etwa 17 kG. Der Aufwand für wesentlich größere Feldstärken ist technisch nicht mehr vertretbar.

Positronen über einen größeren Öffnungswinkel lassen sich also nur einfangen, wenn man statt mit einem Solenoidfeld mit Hilfe eines Magnetfeldes fokussiert, das zu den Teilchenbahnen senkrecht steht.

Ein solches Fokussierungsfeld wird im großen Maßstab bei CERN<sup>(3)</sup> im sog. "Magnetischen Horn" für die Neutrinoexperimente mit Erfolg eingesetzt.

Es soll hier in etwas abgewandelter Form ein solches magnetisches Horn zur Fokussierung der Positronen vorgeschlagen werden (siehe Abb. 3).

Teilchenbahnen in einem coaxialen magnetischen Feld

Für die Teilchenbahnen im coaxialen Magnetfeld des magnetischen Horns ergeben sich aus Gleichung (16) auf Seite 13 folgende Differentialgleichungen in Polarkoordinaten  $\{r, \phi, z\}$ :

$$r'' - r\phi'^2 + \epsilon \frac{z'}{r} = 0$$

$$(8) \quad \frac{d}{ds} (r^2 \phi') = 0 \quad \epsilon = \frac{2eI}{cE}$$

$$z'' - \epsilon \frac{r'}{r} = 0$$

Um die Teilchen auf einen Punkt zu fokussieren, muß das magnetische Horn eine solche Form haben, daß jedes Teilchen gerade dann aus dem Magnetfeld austritt, wenn die Tangente an seine Bahn durch den vorgegebenen Fokus geht. Dies ist, wie Rechnungen am Analogrechner zeigten, nur für manoenergetische Teilchen aus einer punktförmigen Quelle möglich. Um Teilchen aus einem größeren Energieintervall (einige MeV) und aus einer ausgedehnten Quelle zu "fokussieren", muß man einen Kompromiß schließen und das Horn so gestalten, daß möglichst viele Positronen auf einen Fleck von etwa 2 cm Durchmesser - das entspricht dem Durchmesser der Irisöffnung im Linearbeschleuniger - fokussiert werden können.

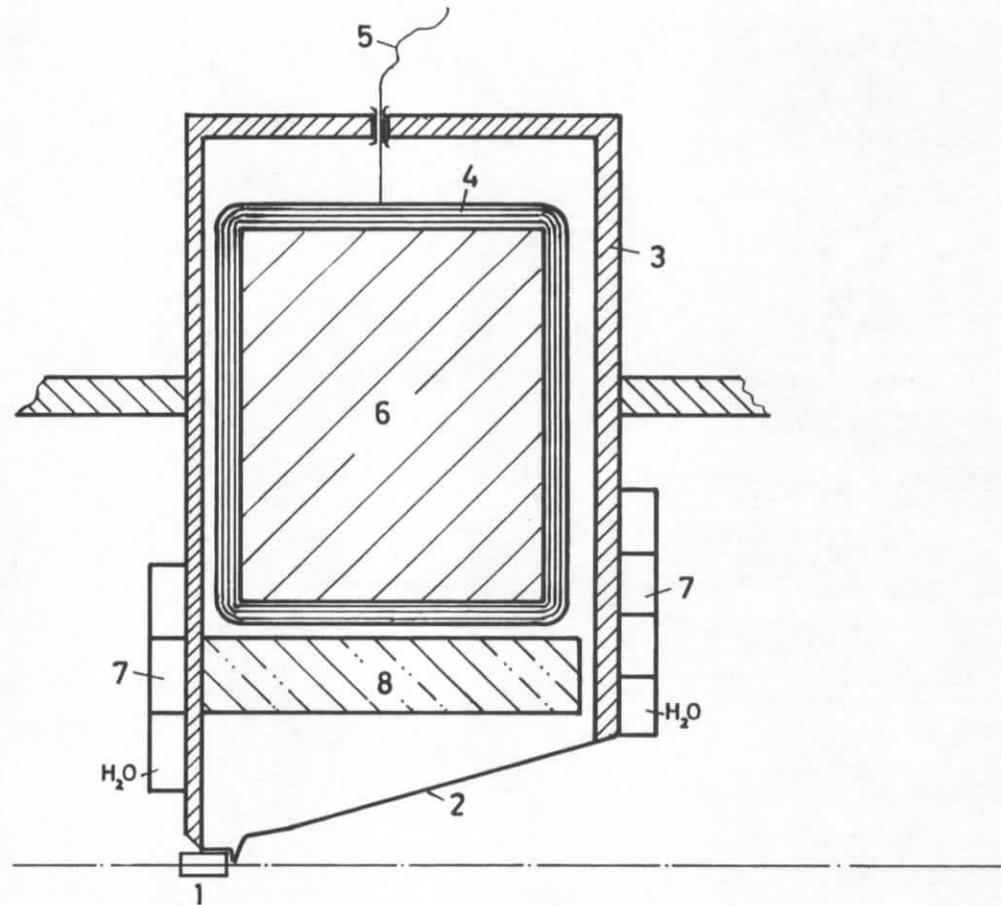
Um das zu erreichen, wurde das Differentialgleichungssystem am Analogrechner gelöst. Dazu wurde es reduziert, da der Drehimpuls der Teilchen konstant bleibt:

$$(9) \quad r^2 \phi' = \frac{\rho^2 \dot{\phi}_0}{c} = \alpha \quad \begin{array}{l} \rho : \text{Radius des Targets} \\ m\rho^2 \dot{\phi}_0 : \text{Drehimpuls} \end{array}$$

(8) reduziert sich also auf

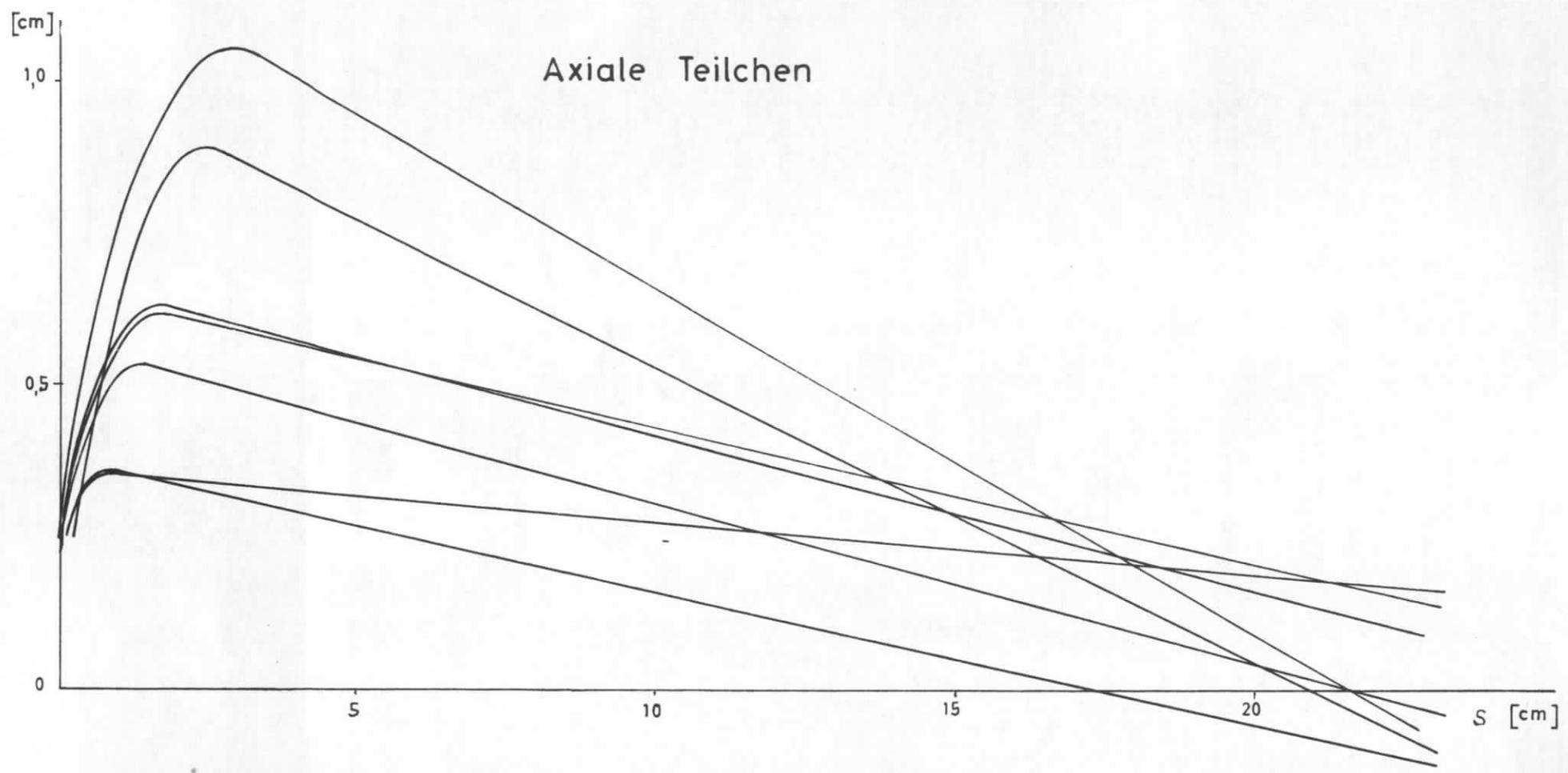
$$(10) \quad \begin{array}{l} r^3 r'' - \alpha^2 + \epsilon z' r^2 = 0 \\ z'' r - \epsilon r' = 0 \end{array}$$

### Konverter (schematisch)



- 1 Target
- 2 Positronenhorn
- 3 Sekundärwindung=Gehäuse
- 4 Primärwindungen
- 5 Primäre Energiezuführung
- 6 Kern
- 7 Kühlung
- 8 Bleischutz



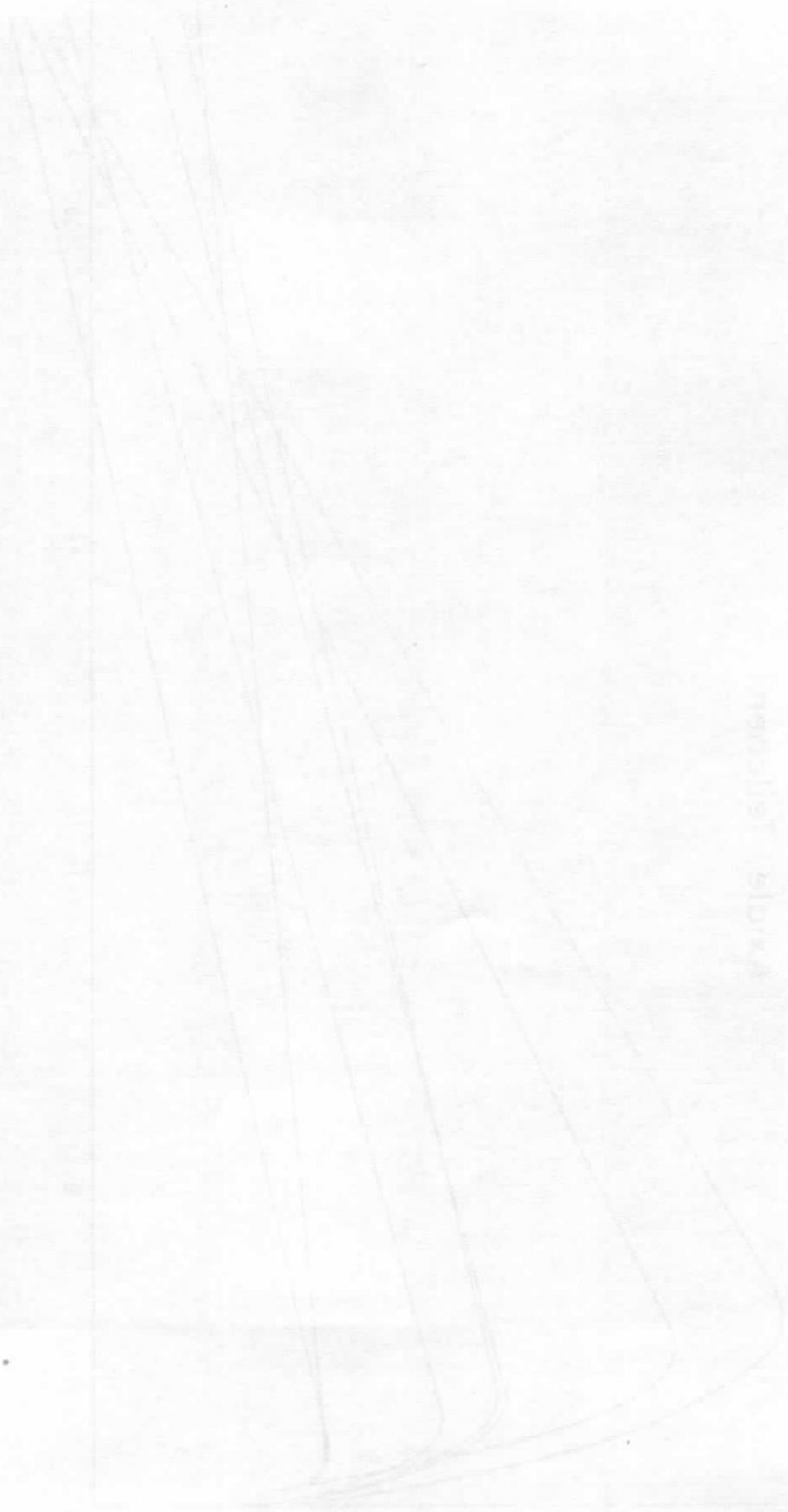


(Abb.4)

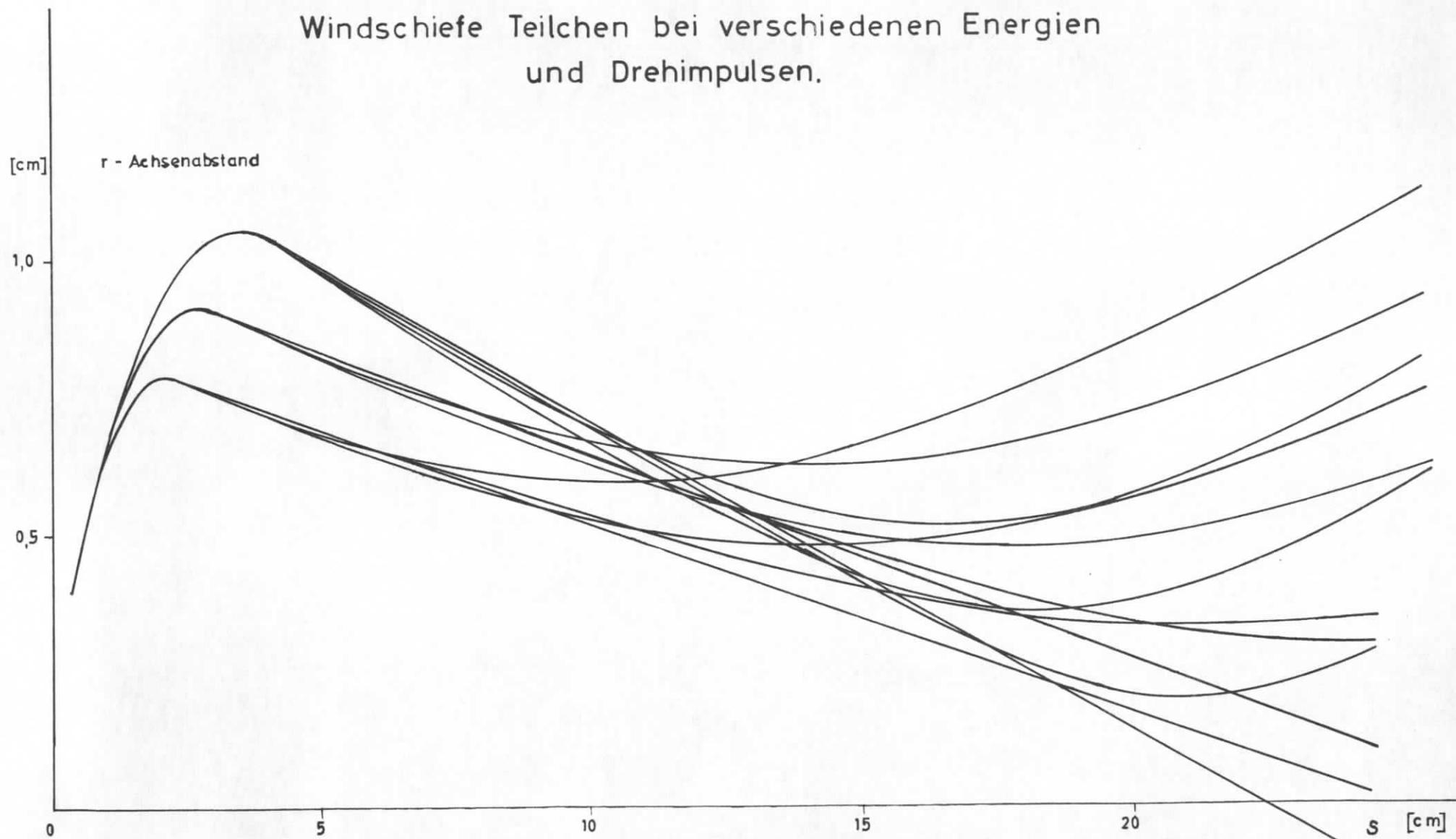
(A) (1)

(B) (1)

1990/1/1 6/1/1990



# Windschiefe Teilchen bei verschiedenen Energien und Drehimpulsen.



(Abb. 5)



Mit Hilfe dieser Differentialgleichungen konnten am Analogrechner Teilchenbahnen für beliebige Anfangsbedingungen  $\{r_0, \phi_0, z_0\}$  berechnet werden.

Das Magnetfeld wurde so stark gewählt, daß Teilchen mit einem Anfangswinkel von  $40^\circ$  und einer Energie von 6 MeV einen Achsenabstand von 1 cm nicht wesentlich überschreiten. Das führt zu einem felderzeugenden Pulsstrom von  $I = 15000$  A. Dieses starke Feld war notwendig, um möglichst wenig Verluste zu haben und um die Laufzeitunterschiede möglichst klein zu halten.

Teilchenbahnen für verschiedene Anfangswinkel, -energien und -drehimpulse sind in den Abb. 4 und 5 dargestellt.

Grob kann man ablesen, daß die Teilchendichte in etwa 10 cm Abstand vom Target am größten ist. An dieser Stelle haben nur noch wenige Teilchen größere Achsenabstände als 1 cm. Abb. 6 zeigt die Emittanz des magnetischen Horns.

Als optimales Hornprofil wurde die in Abb. 7 gezeigte Form gefunden. Wegen der endlichen Ausdehnung des Targets ist es nicht möglich, mit einem glatten Hornprofil Teilchen schwacher Divergenz ( $< 10^\circ$ ) aus allen Targetbereichen zu fokussieren. Diese Teilchen lassen sich durch den angedeuteten Zacken im Hornprofil teilweise einfangen.

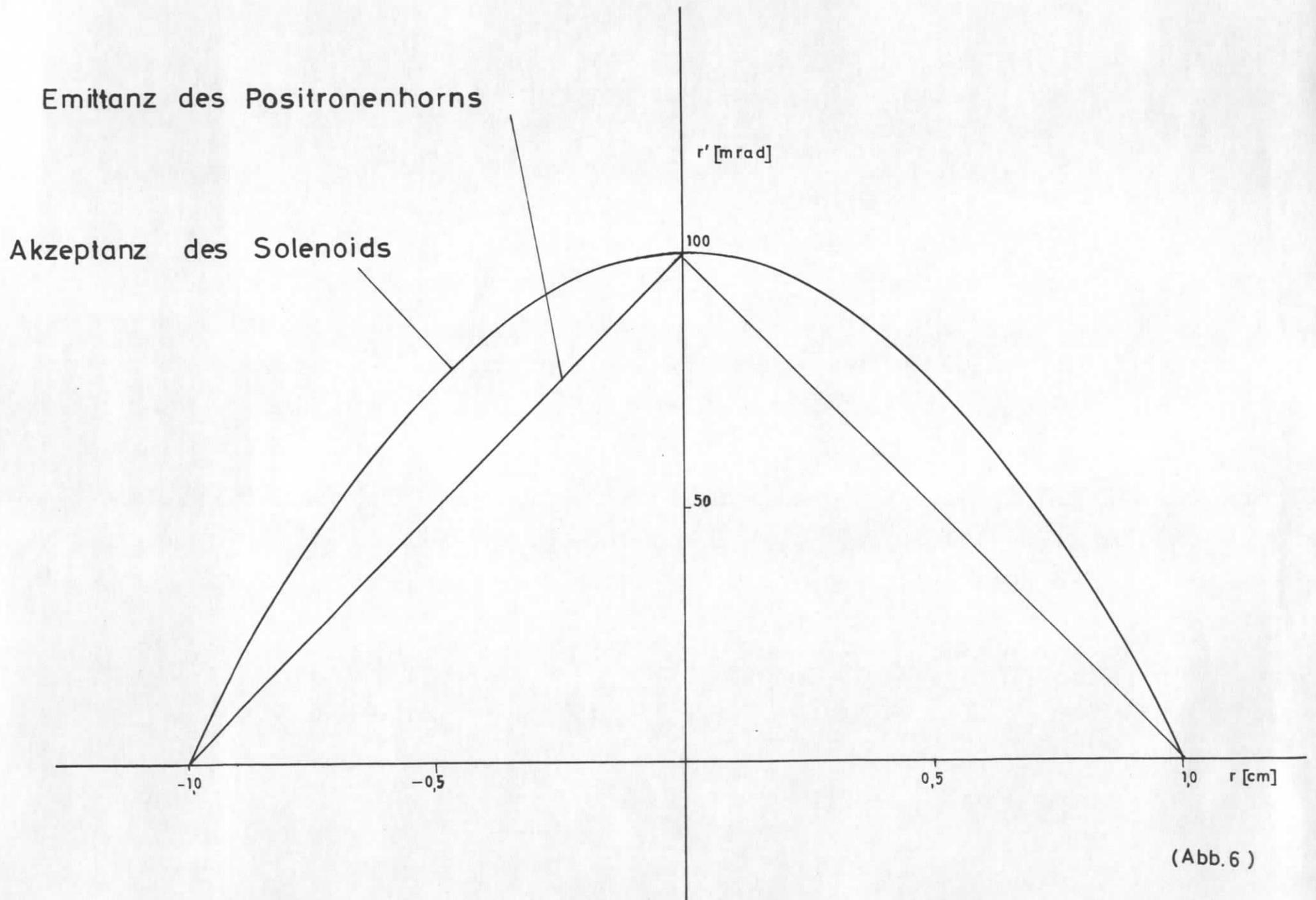
## Technische Realisierung des Positronenhorns

Im Gegensatz zu der Ausführung bei CERN können wir wegen der geringen Teilchenenergien das Horn nicht aus massivem Blech gestalten. Wir müssen das koaxiale Magnetfeld durch einen stromdurchflossenen Konus mit möglichst vielen Öffnungen annähern.

Rechnungen am Digitalrechner haben ergeben, daß man mit 8 stromdurchflossenen Stegen ein koaxiales Feld gut annähern kann. Die Abb. 8 zeigt den azimuthalen Feldverlauf längs verschiedener Radien im Vergleich zum Magnetfeld eines geschlossenen Horns. Die Abb. 9 zeigt die azimuthalen und radialen Feldstärken zwischen zwei Stegen längs Kreisbögen verschiedener Radien. Wie weitere Rechnungen gezeigt haben, sind die gezeigten Feldverläufe nicht vom Radius, auf dem die Stege angeordnet sind, abhängig. Die Feldverläufe zeigen einen starken Anstieg in Stegnähe. Teilchen, die also nahe an den Stegen vorbeifliegen, erhalten einen Azimutalimpuls, der die Teilchenbahn jedoch maximal nur um etwa 30 bis 40 mrad ablenkt, so daß diese Teilchen noch nicht verloren sind.

## Betrieb des Positronenhorns

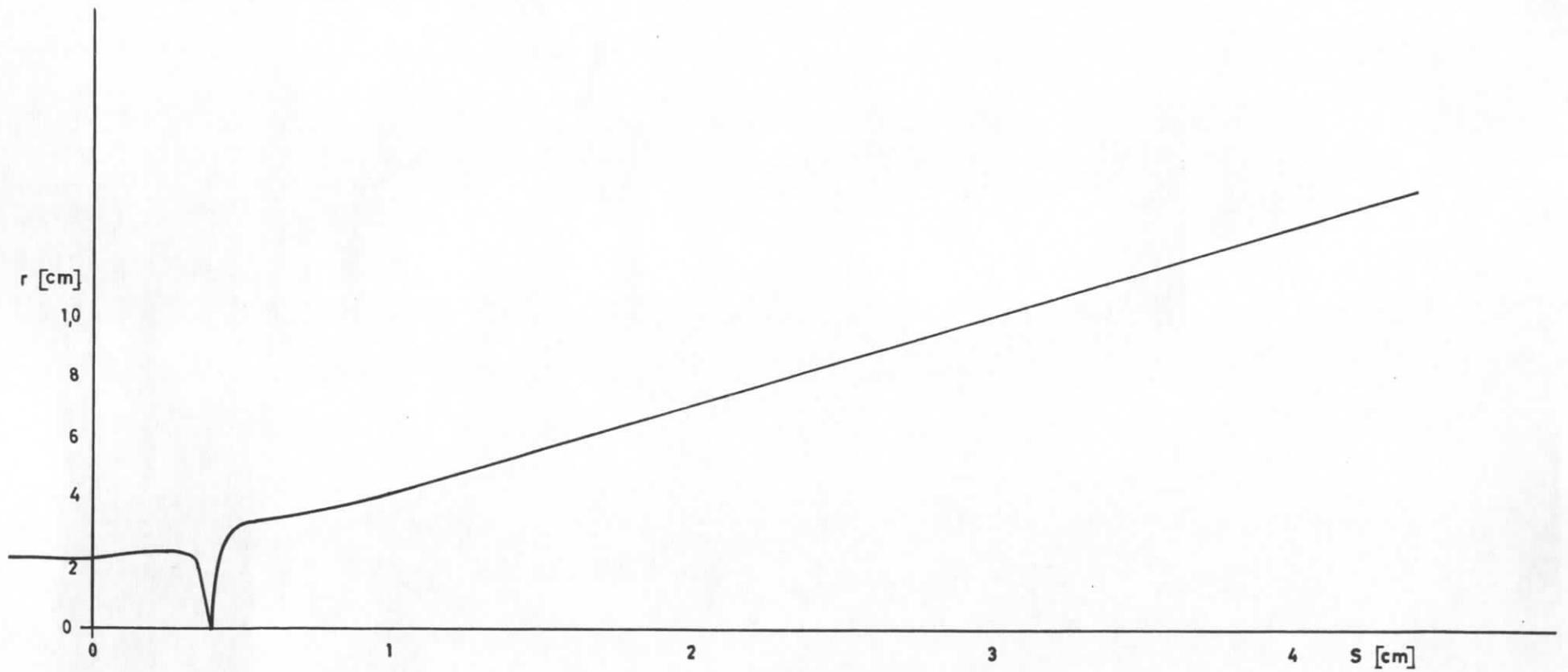
Das Positronenhorn soll aus einem Impulstransformator gespeist werden, dessen Primärseite über ein Schaltelement - Thyatron oder Funkenstrecke - an eine Laufzeitkette angeschlossen ist. Der gesamte Stromstoß beträgt 0,1 Asec mit einer Wiederholfrequenz von 50 pro sec. Durch diese Belastung erreicht das Horn sehr schnell eine hohe Temperatur, so daß eine Kühlung an seinen Enden notwendig wird.



(Abb. 6)



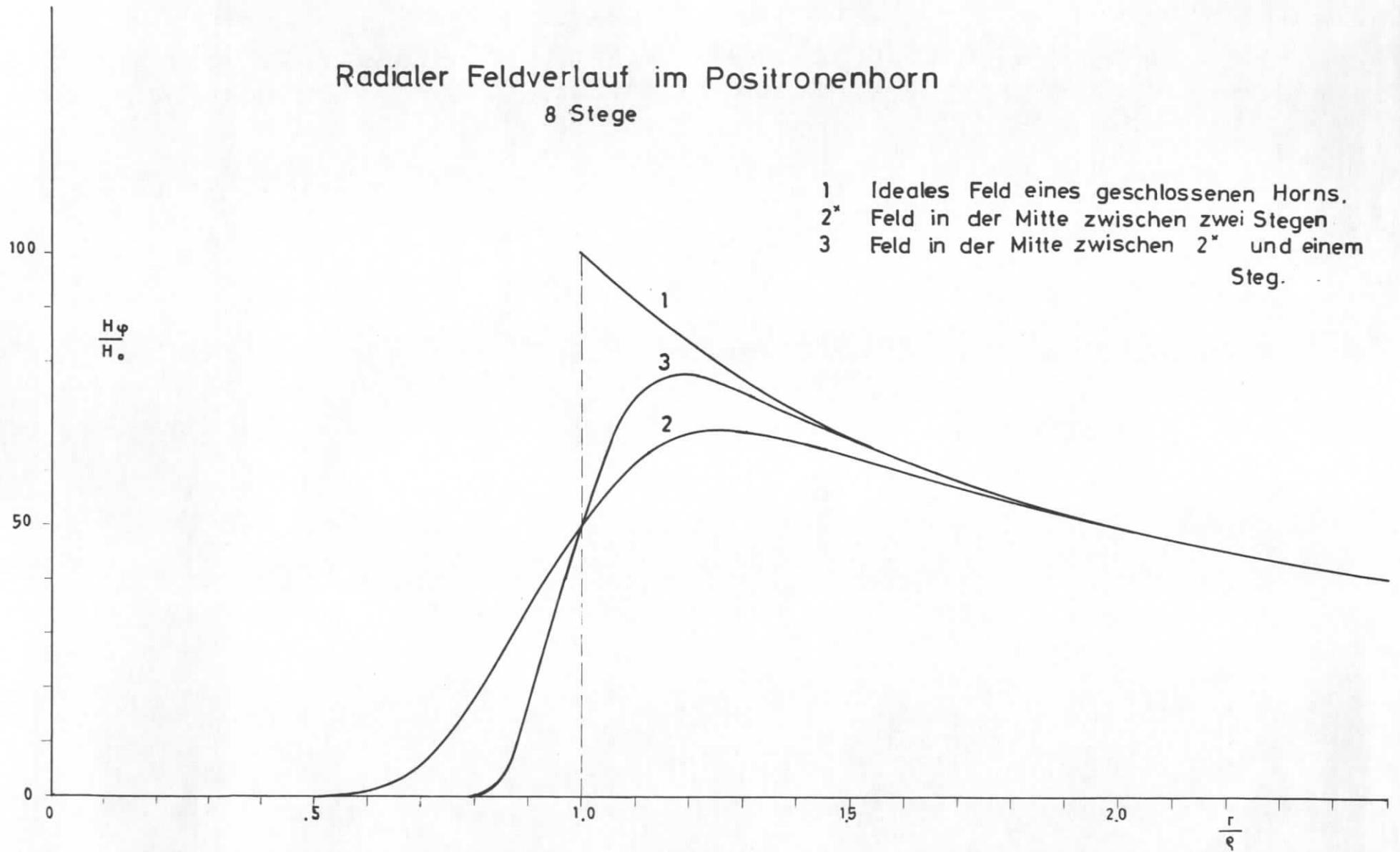
## Profil des Positronenhorns



(Abb. 7)



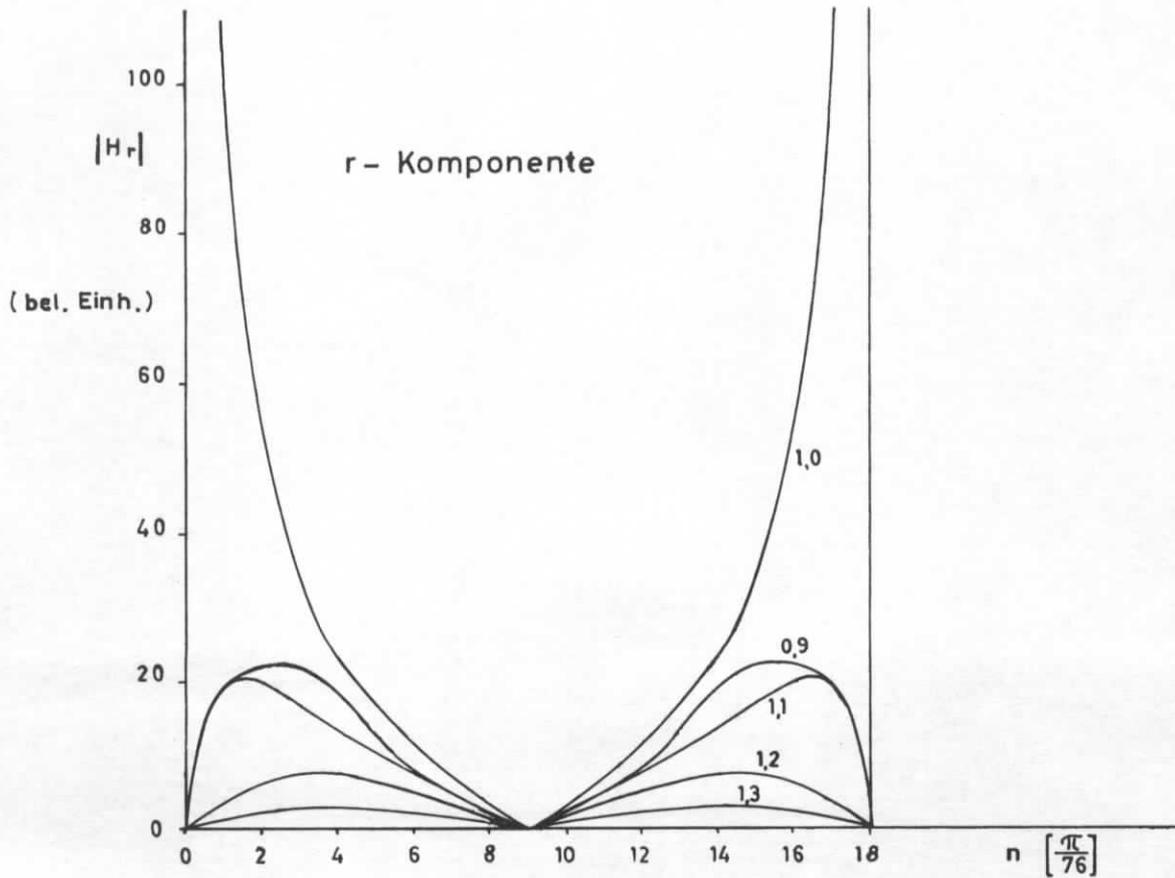
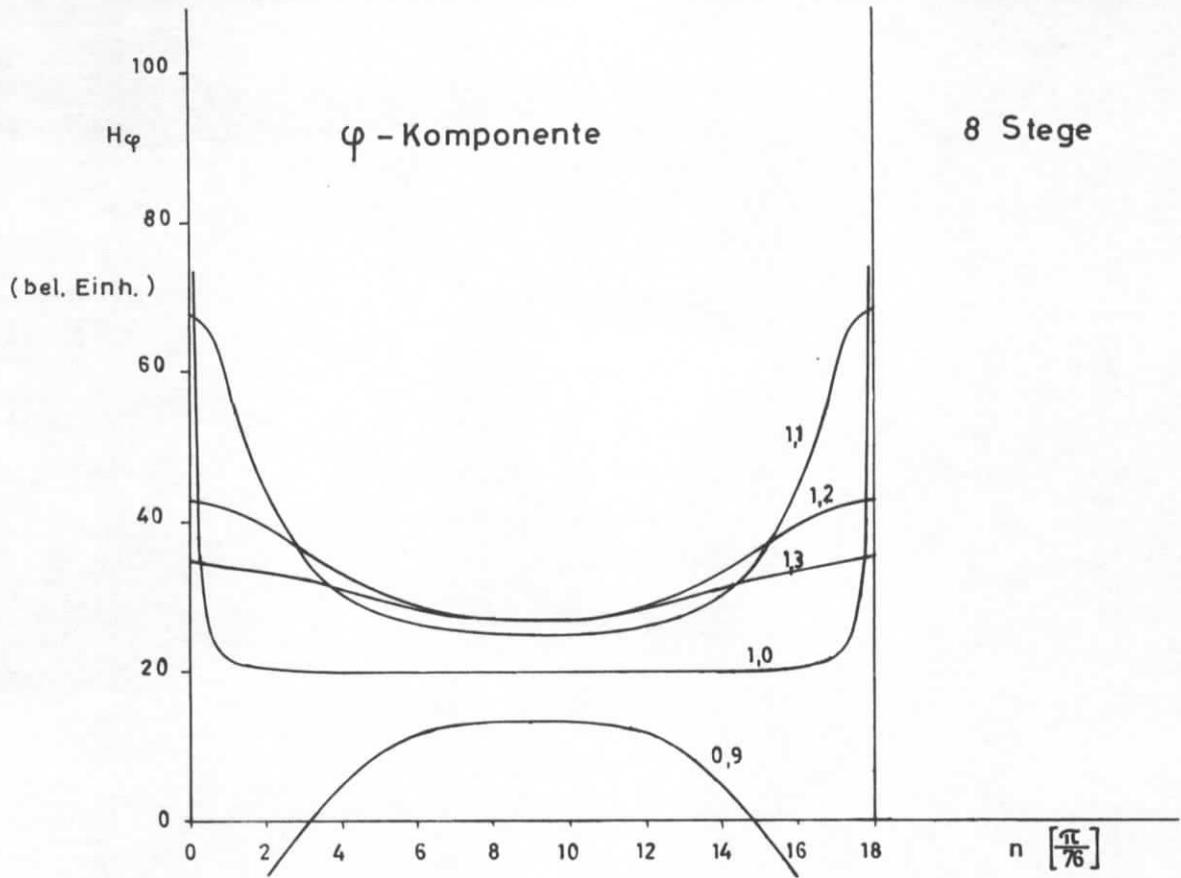
# Radialer Feldverlauf im Positronenhorn 8 Stege



( Abb. 8 )



# Azimutaler Feldverlauf



(Abb. 9)



Die Energiezufuhr pro cm Steglänge und Impuls beträgt:

$$(11) \quad \Delta Q = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ cal/cm} \cdot \text{puls}$$

Bei einer Steglänge von 4,5 cm sind das  $1,1 \cdot 10^{-2}$  cal, die innerhalb von 0,02 sec wieder durch Wärmeleitung abgeführt werden müssen. Für Kupfer ist dazu ein Temperaturgradient von

$$(12) \quad \nabla T = 200^{\circ}/\text{cm}$$

notwendig. Bei Kühlung an beiden Enden des Horns hat man damit in der Stegmitte eine Temperatur von  $T = 450^{\circ}\text{C}$ . Diese Temperatur bildet einen oberen Grenzwert, da auch durch Strahlung ein Teil der Wärme abgeführt wird.

Bei einer Umgebungstemperatur von  $T_0 = 300^{\circ}\text{K}$  ergibt sich für  $T = 723^{\circ}\text{K}$  pro Pulsintervall und 1 cm Steglänge eine Energieabstrahlung von

$$(13) \quad \Delta Q = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ cal/cm} \cdot \text{puls}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß das Kupfer des Positronenhorns schwarz oxydiert ist. Man erhält so also über die ganze Hornlänge eine erträgliche Temperaturverteilung.

### Positronen-Fokussierung im Linearbeschleuniger

Ausgehend von der Emittanz des Positronenhorns sollen alle Positronen mit möglichst geringem Fokussierungsaufwand in den nachfolgenden Linearbeschleunigerabschnitten beschleunigt werden können.

Zur Teilchenfokussierung gibt es im wesentlichen zwei Methoden:

1. Fokussierung mit Hilfe eines axialen Magnetfeldes, erzeugt durch ein Solenoid.

## 2. Fokussierung mit Hilfe von magnetischen Quadrupolfeldern.

Hinsichtlich des Wirkungsgrades ist die Quadrupolfokussierung der Solenoidfokussierung eindeutig überlegen. Während bei der Solenoidfokussierung das Magnetfeld in unverminderter Stärke für die ganze Linearbeschleunigerlänge geführt werden muß, können bei Quadrupolfokussierung die einzelnen Magnete immer größere Abstände haben. Dieser Unterschied macht sich mit wachsendem Teilchenimpuls immer mehr bemerkbar. Es gibt jedoch Fälle, wie wir sehen werden, in denen nur Solenoide brauchbar sind.

### Teilchen in einem magnetischen und elektrischen Feld

Die Teilchen seien hoch relativistisch, d.h.  $\gamma \gg m_0 c^2$ .  
Es gelten die allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$(14) \quad \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = e\vec{E} + e \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]$$

Wir gehen zu den Teilchenbahnen über:

$$(15) \quad \frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = c \cdot \frac{d}{dt} \quad \vec{r}(z, x, s)$$

in (14) eingesetzt ergibt:

$$(16) \quad \vec{r}'' + \frac{(mc^2)'}{mc^2} \vec{r}' - \frac{e\vec{E}}{mc^2} - \frac{ec}{mc^2} [\vec{r}' \times \vec{B}] = 0$$

Striche bezeichnen Ableitungen nach s

$$(17) \quad mc^2 = m_0 c^2 (\alpha s + \gamma_0) = m_0 c^2 \cdot d \cdot (s + \lambda)$$

$\gamma_0$  : Anfangsenergie (MeV/ $m_0 c^2$ )

d : Energiegradient (MeV/m/ $m_0 c^2$ )

$$(18) \quad e |\vec{E}| = m_0 c^2 \cdot \alpha$$

(16) ergibt damit

$$(19) \quad \vec{r}'' + \frac{1}{s + \lambda} \vec{r}' - \frac{e \vec{E}}{\alpha (s + \lambda) m_0 c^2} - \frac{e c}{\alpha (s + \lambda) m_0 c^2} (\vec{r}' \times \vec{B}) = 0$$

Zur Vereinfachung des Differentialgleichungssystems (19) gehen wir zum System  $\{z, x, \tau\}$  des beschleunigten Teilchens über:

$$(20) \quad \gamma_0 ds = \gamma d\tau$$

$$(21) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} \vec{r} - \frac{\gamma \cdot e \vec{E}}{\gamma_0 \cdot m_0 c^2} - \frac{ec}{\gamma_0 \cdot m_0 c^2} \frac{d}{d\tau} (\vec{r} \times \vec{B}) = 0$$

Wir werden dieses Differentialgleichungssystem auf verschiedene Magnetfelder anwenden und einige wesentliche Eigenschaften ablesen.

### Solenoidfokussierung

$$\vec{B} (0, 0, B)$$

$$\vec{E} (0, 0, E)$$

Aus (21) folgt:

$$(22) \quad \ddot{z} - \frac{ec}{m_0 c^2 \cdot \gamma_0} \dot{x} B = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{ec}{m_0 c^2 \cdot \gamma_0} \dot{z} B = 0$$

Punkte bedeuten Ableitungen nach  $\tau$

Trennen der Variablen ergibt mit (17) und (18):

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \left(\frac{cB}{\lambda E}\right)^2 \dot{z} &= 0 \\ (23) \quad \ddot{x} + \left(\frac{cB}{\lambda E}\right)^2 \dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

Eine Hauptlösung für beide Differentialgleichungen ist:

$$(24) \quad y = A \cdot \cos \frac{cB}{\lambda E} \tau$$

Geht man mit  $\tau = \lambda \log \frac{s + \lambda}{x}$  wieder in das Laborsystem zurück, so erhält man:

$$(25) \quad y = A \cdot \cos \left(\frac{cB}{E} \log \frac{s + \lambda}{\lambda}\right)$$

und

$$(26) \quad y' = -A \frac{cB}{E} \cdot \frac{1}{s+\lambda} \sin \left(\frac{cB}{\lambda E} \log \frac{s+\lambda}{\lambda}\right)$$

Die Teilchen führen also in beiden Koordinaten periodische ungedämpfte Schwingungen von zunehmender Wellenlänge durch. Das heißt, in einem Solenoidfeld bewirkt die Beschleunigung durch das elektrische Feld nur eine Abnahme der Divergenz des Strahls, wie aus (26) hervorgeht. Da der Querschnitt des Strahles konstant bleibt, muß bei Solenoidfokussierung das Feld von Anfang bis ans Ende des Beschleunigers geführt werden. Da die Divergenz des Strahls umgekehrt proportional zur Teilchenenergie abnimmt, bleibt der Radialimpuls konstant, so daß die Solenoide überall dieselbe Feldstärke haben müssen.

### Fokussierung mit Quadrupolen

$$\vec{B} (B_z, B_x, 0)$$

Aus (21) folgt hier:

$$\ddot{z} + \frac{ec}{m_0 c^2 \gamma_0} \dot{s} B_x = 0$$

(27)

$$\ddot{x} - \frac{ec}{m_0 c^2 \gamma_0} \dot{s} B_z = 0$$

Mit (20) und

$$(28) \quad B_x = gz; \quad B_z = gx; \quad g = g(s)$$

folgt aus (27):

$$(29) \quad \ddot{y} \pm \frac{ec \cdot \gamma}{m_0 c^2 \cdot \gamma_0} g \cdot y = 0$$

(29) läßt sich mit der Größe Q weiter vereinfachen:

$$(30) \quad Q = \int \frac{\delta B_x}{\delta z} ds = g \cdot L_{Q_0}$$

wobei  $L_{Q_0}$  die Quadrupollänge im Laborsystem ist. Für das relativistische Teilchen erscheint die Quadrupollänge verkürzt gemäß (20):

$$(31) \quad L_Q = \frac{\gamma_0}{\gamma} L_{Q_0}$$

wobei  $L_Q$  die Quadrupollänge im Teilchensystem ist. Mit (31) folgt aus (30):

$$(32) \quad g = \frac{Q}{L_{Q_0}} = \frac{\gamma_0}{\gamma} \frac{Q}{L_Q}$$

Damit (29) eine periodische Lösung hat, muß  $\gamma \cdot g$  konstant sein. Das heißt:

$$Q / L_Q = g_0 \quad \text{und}$$
$$(33) \quad g = \frac{\gamma_0}{\gamma} g_0$$

Führen wir die Linsenstärke ein:

$$(34) \quad k_0 = \frac{e}{p_0} g_0 = \frac{ec}{m_0 c^2 \cdot \gamma_0} g_0$$

so wird aus (29) mit (33):

$$(35) \quad \ddot{y} \pm k_0 y = 0$$

Ein Quadrupolsystem für unbeschleunigte Teilchen hat für beschleunigte Teilchen dieselben Eigenschaften, wenn man bei gleichbleibenden Linsenstärken  $k_0$  und Quadrupollängen  $L_{Q_0}$  die Längsachse des Systems gemäß (20) dehnt. Hier zeigt sich besonders für lange Beschleuniger der Vorteil der Quadrupolfokussierung. Ihr Wirkungsgrad wird mit der Energie größer, so daß die Quadrupolstände mit der Energie zunehmen können.

#### FODO - Kanal

Die Strahlführung der Positronen in einem Linearbeschleuniger ist also gelöst, wenn man eine Quadrupolanordnung gefunden hat, die einen Teilchenstrahl durch einen beliebig langen Kanal mit vorgegebener Apertur führen kann.

Die Charakterisierung eines solchen Kanals findet man bei K.G. Steffen<sup>(4)</sup>. Die Strahlführung besteht hier aus perio-

disch angeordneten fokussierenden und defokussierenden Quadrupolen mit dazwischenliegenden feldfreien Stücken. Man nennt eine solche Anordnung deshalb einen FODO-Kanal (siehe Abb. 10).

Zur Bestimmung der optimalen Quadrupolanordnung für ein bestimmtes System hat K.G. Steffen folgende Formeln angegeben:

$$(36) \quad \phi = l \sqrt{k}$$

$$(37) \quad m^2 = \frac{1 + \tanh\phi \left( \tan\phi + \frac{L}{l}\phi \right)}{1 - \tanh\phi \left( \tan\phi + \frac{L}{l}\phi \right)}$$

$$(38) \quad \epsilon^2 = \frac{R^4}{l^2} \frac{m^2}{(1+m^2)^2} \frac{\left[ \tan\phi \left( \text{ctanh}\phi + \frac{L}{l}\phi \right) - 1 \right] \phi^2}{1 + \text{ctanh}\phi \left( \tan\phi + \frac{L}{l}\phi \right)}$$

Hierbei bedeuten  $k$  die Linsenstärke,  $m$  der "Beatfaktor", d.h. das Verhältnis von maximalem zu minimalem Strahldurchmesser in einer Koordinate,  $\epsilon$  die Akzeptanz des FODO-Kanals und  $R$  der Radius der Röhre, in der die Teilchen fliegen.

Es besteht also die Aufgabe, für eine vorgegebene Akzeptanz und feste Linsenlängen die optimale Anordnung zu finden. Dazu wurden am Digitalrechner aus (36) bis (38) die Funktionen  $\epsilon_{\max}(L,l)$ ,  $m_{\text{opt}}(L,l)$  und  $k_{\text{opt}}(L,l)$  berechnet (siehe Abb. 11). Aus den Rechnungen ergab sich, daß der optimale Beatfaktor für das vorliegende Problem unabhängig von  $L$  und  $l$  konstant bleibt ( $m_{\text{opt}} = 2,3$ ). Die maximale Akzeptanz nimmt mit abnehmendem  $L$  und  $l$  zu. Hier zeigt sich die grundsätzliche Grenze der Anwendbarkeit von Quadrupolen. Um ein gutes Quadrupolfeld zu erhalten, sollte die Quadrupollänge etwa doppelt so groß sein als seine Apertur. Da aber die Apertur der Quadrupole für Linearbeschleunigerfokussierung sehr groß sein muß ( $D \geq 15$  cm)

ergibt sich eine minimale brauchbare Linsenlänge von 25 bis 30 cm. Aus bautechnischen Gründen muß  $L > 12$  cm sein, und aus Kostengründen soll die Linsenstärke  $k$  möglichst klein und  $L$  möglichst groß sein. Diese Forderungen engen den Spielraum sehr stark ein, und ein Vergleich von Abb. 6 und Abb. 11 zeigt sofort, daß es unmöglich ist, sofort hinter dem Positronenhorn mit Quadrupolen zu fokussieren. Wir sind also gezwungen, in den ersten Beschleunigungsabschnitten nach dem Konverter die Positronen mit einem Solenoidfeld zu fokussieren.

#### Solenoidfeld als Anfangsstrahlführung nach dem Positronenhorn

Ist  $r_0'$  der maximal vorkommende Winkel der Teilchenbahnen zur Achse, so erhält man im Solenoidfeld Spiralbahnen mit dem Radius  $\rho$ :

$$(39) \quad \rho = \frac{E_0 r_0'}{eB}$$

$E_0$ : Anfangsenergie der Positronen

$B$ : Solenoidfeld.

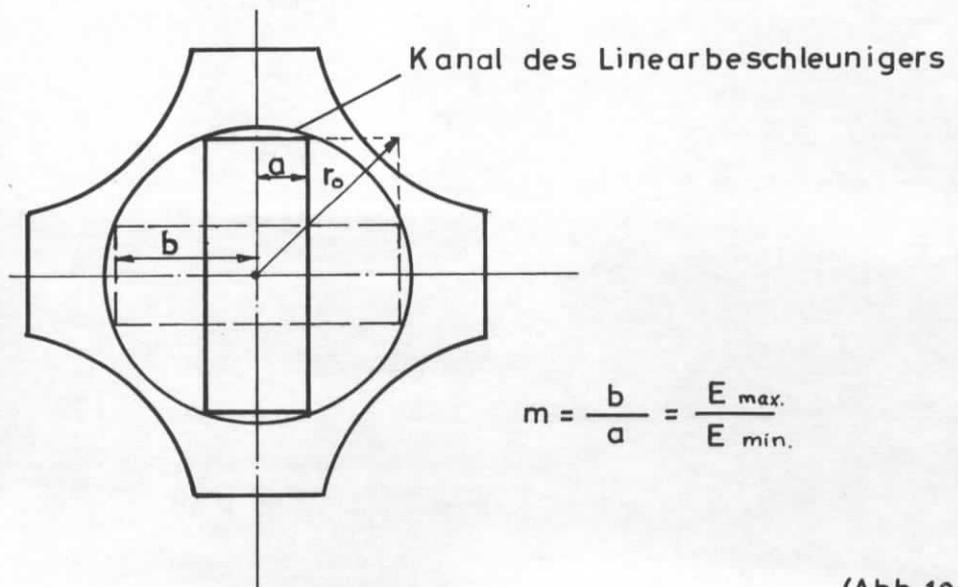
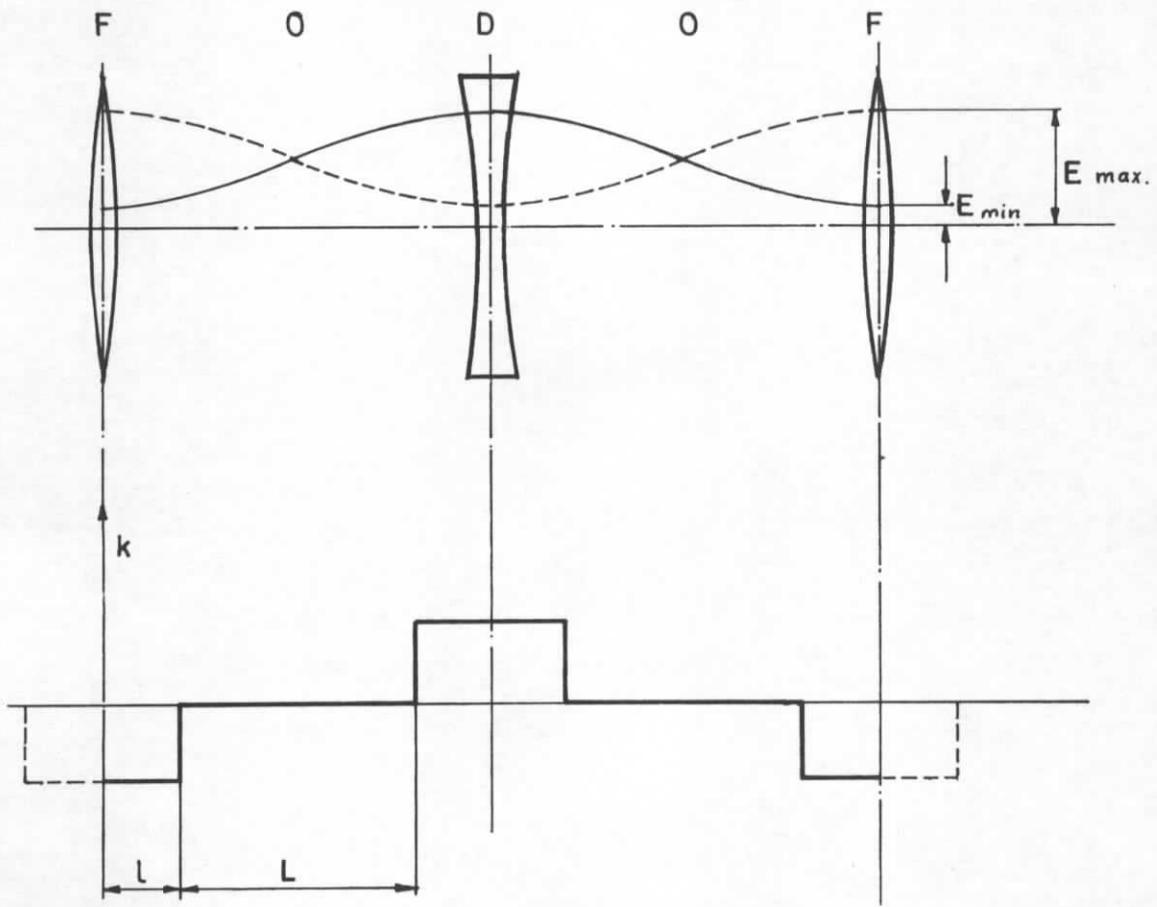
Da  $\rho \leq 0,5$  cm sein muß, ergibt sich für  $E_0 = 6,0$  MeV und  $r_0' = 100$  mrad ein Magnetfeld von

$$(40) \quad B = 4,0 \text{ kG}$$

Die Akzeptanz eines solchen Solenoidfeldes ist in Abb. 6 für  $E_0 = 6$  MeV eingezeichnet.

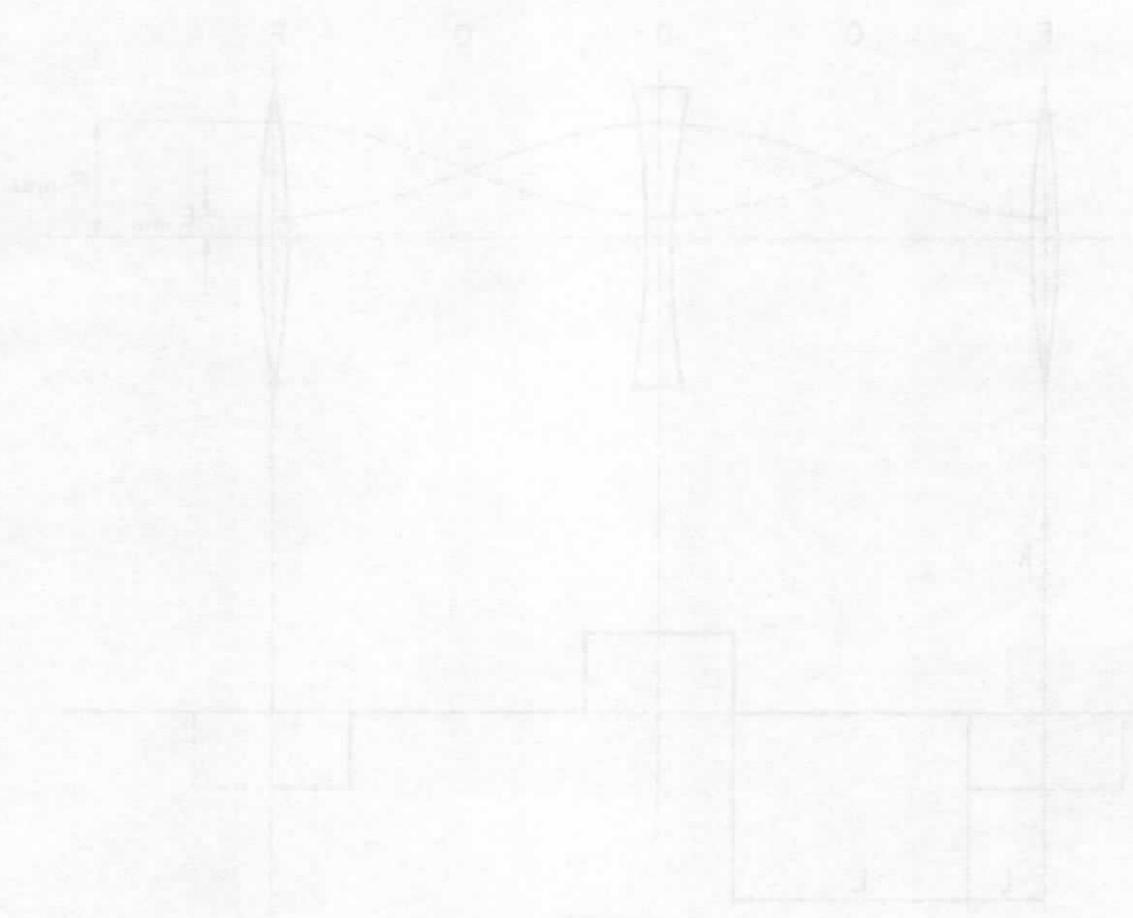
Die Phasenfläche  $F = \pi r r'$  nimmt mit der Energie ab. Es ergibt sich also umso früher die Möglichkeit, zur Quadrupolfokussierung überzugehen, je schneller man die Teilchen

FODO-Kanal (nach K.G. Steffen)

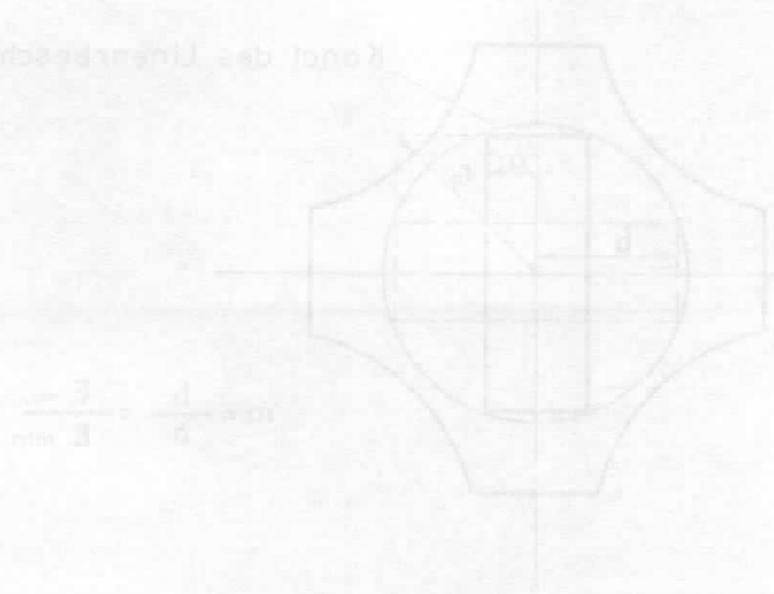


$$m = \frac{b}{a} = \frac{E_{\max.}}{E_{\min.}}$$

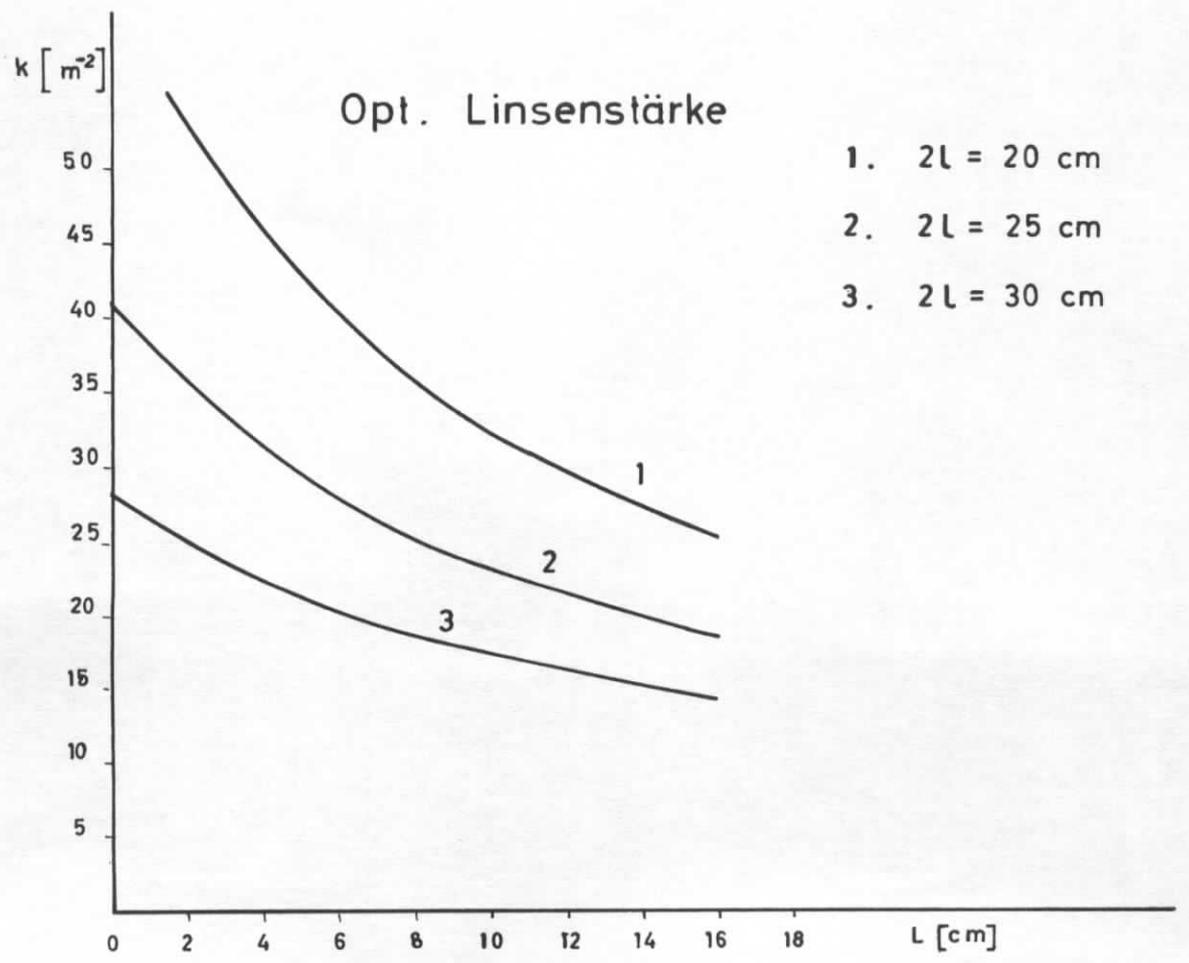
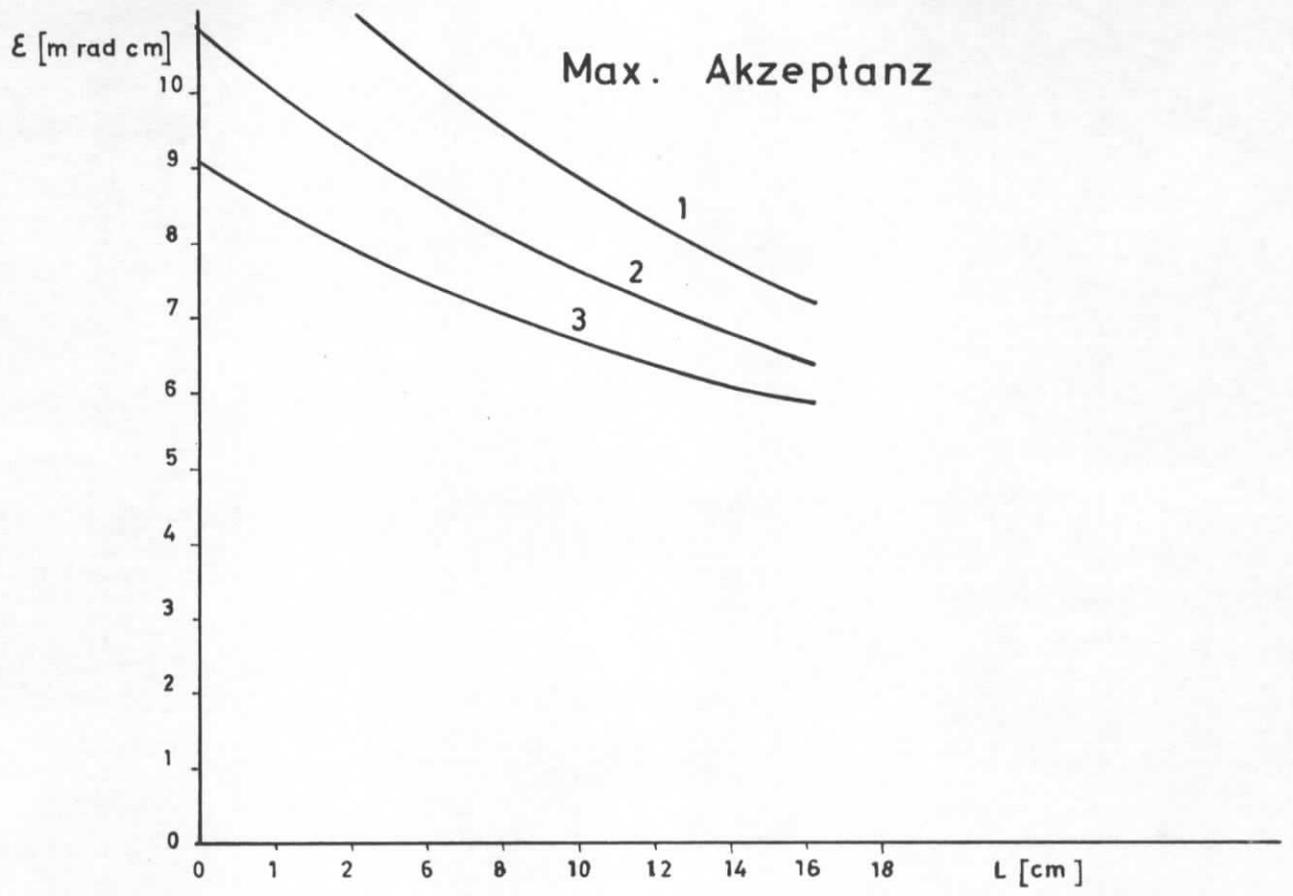
(Abb.10)



Kanal des Linienrechnungs...

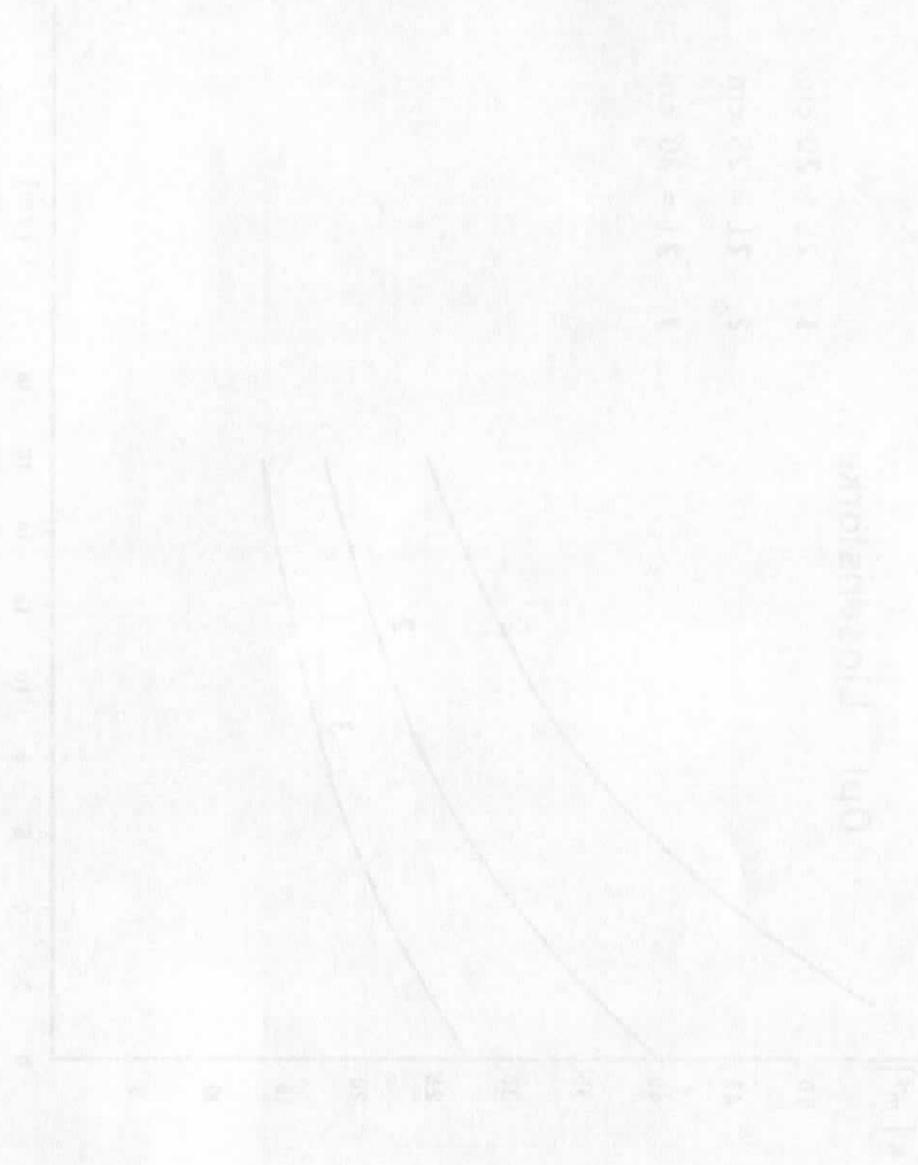


(Abb. 10)



(Abb.11)

(174)



Ohm's law



Ohm's law

beschleunigt. Eine hohe Klystronleistung in den ersten Beschleunigerabschnitten nach dem Konverter vergrößert daher den Wirkungsgrad der Fokussierungsleistung.

Sieht man in den ersten beiden Abschnitten je eine Klystronleistung von 20 MW vor, so erreichen die Positronen nach zwei je drei Meter langen Abschnitten eine Energie von:

$$(41) \quad E_2 = 6 + 90 = 96 \text{ MeV}$$

Die Energie hat sich also um den Faktor 16 vergrößert, und die Emittanz des Solenoids von  $0,1 \text{ } \mu\text{rad}\cdot\text{cm}$  auf  $5,3 \text{ } \mu\text{rad}\cdot\text{cm}$  verkleinert. Bei einer Akzeptanz dieser Größe kann man nun zur Quadrupolfokussierung übergehen.

Eine Abschätzung des Leistungsbedarfs für dieses 6 m lange Solenoid ergibt

$$(42) \quad N_{\text{Sol}} = 200 \text{ kW}$$

#### Ausführung des FODO-Kanals

Da die Berechnungen eines FODO-Kanals nur für eine Ellipse als Akzeptanzfläche gelten, muß eine solche der Emittanzfläche des Solenoids umschrieben werden. Es ergibt sich eine Ellipsenfläche von  $F = 6,2 \text{ } \mu\text{rad}\cdot\text{cm}$ . Für eine Akzeptanz von  $\epsilon = 6,2 \text{ } \mu\text{rad}\cdot\text{cm}$  entnimmt man aus der Abb. 9 folgende optimale Anordnung:

$$(43) \quad \begin{aligned} \epsilon &= 6,2 \text{ } \mu\text{rad}\cdot\text{cm} \\ L &= 13 \text{ cm} \\ 2l &= 30 \text{ cm} \\ k_{\text{opt}} &= 15,5 \text{ m}^{-2} \end{aligned}$$

Mit (34) erhält man den Feldgradienten:

$$(44) \quad g_{\text{opt}} = 495 \text{ r/cm}$$

Bei einem nutzbaren Irisdurchmesser der Beschleunigerstruktur von  $2R = 2 \text{ cm}$  und einem Beatfaktor von  $m = 2,3$  ergibt sich ein rechteckiger Strahlquerschnitt mit den Halbmessern  $a = 0,92 \text{ cm}$  und  $b = 0,40 \text{ cm}$ . Das Ergebnis der Berechnung der Einhüllenden der Teilchenbahnen in der x- und z-Ebene am Analogrechner für diese FODO-Kanal zeigt die Abb. 12. Die kleinen Unregelmäßigkeiten in den Einhüllenden liegen innerhalb der Rechengenauigkeit.

Um nun die Quadrupolanordnung im Laborsystem zu erhalten, müssen die freien Längen  $L$  transformiert werden.

Es sei  $L_n$  der Abstand des n-ten Quadrupos von der Bezugsebene  $s = 0$ , so gilt

$$(45) \quad L_n = \lambda \exp\left(\frac{n}{\lambda} L'\right) - \lambda$$

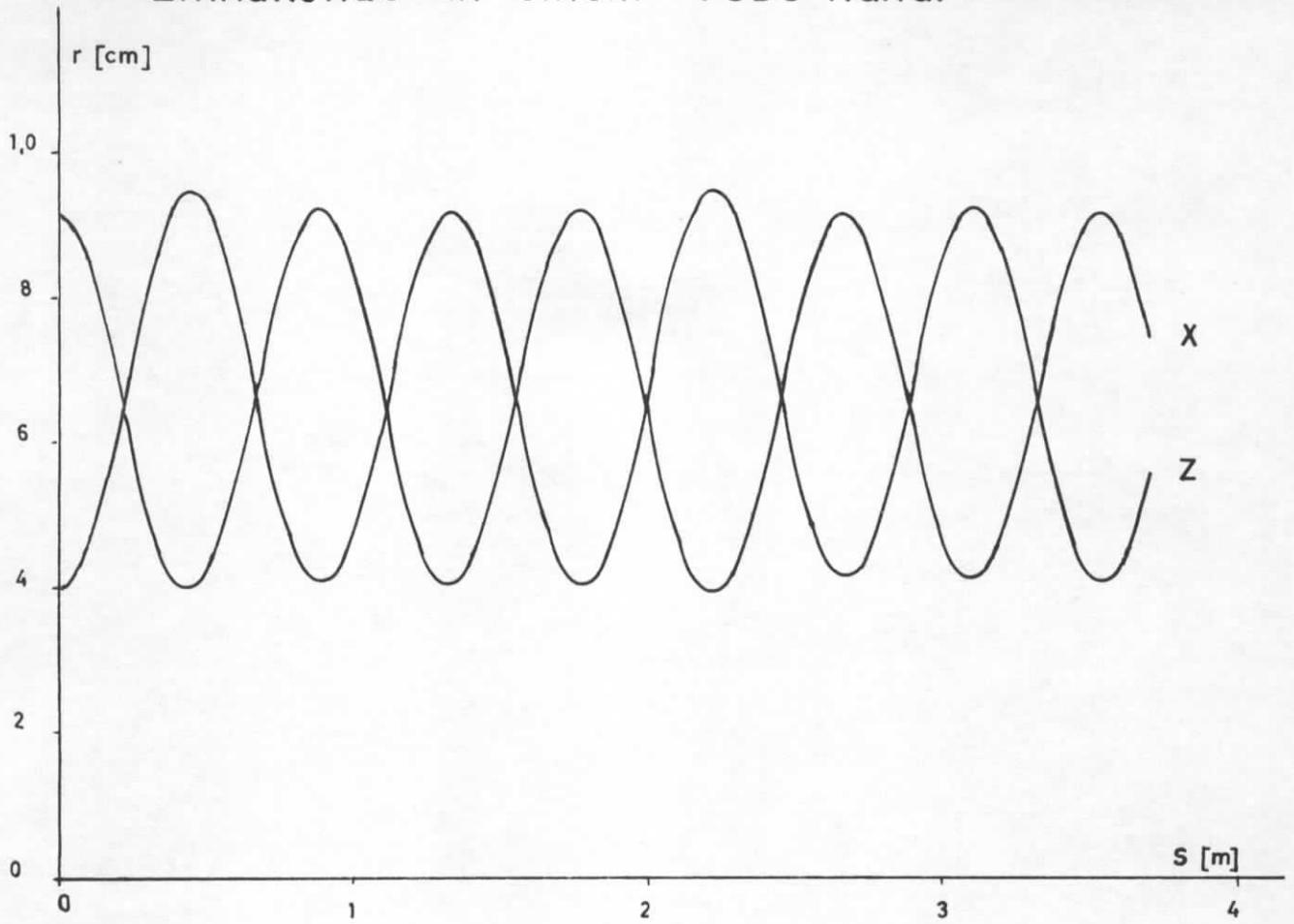
Bei einer Beschleunigung von  $\alpha = 0,2 m_0 c^2 / e / \text{cm}$ ,  $\gamma_0 = 188$  und  $L' = L + 2l = 43 \text{ cm}$  benötigt man etwa 25 Quadrupole, um die Positronen auf eine Energie von 300 MeV zu beschleunigen.

Das gesamte Fokussierungssystem wird endlich vollständig, wenn man noch ein Anpassungstriplet zwischen Solenoid und FODO-Kanal setzt.

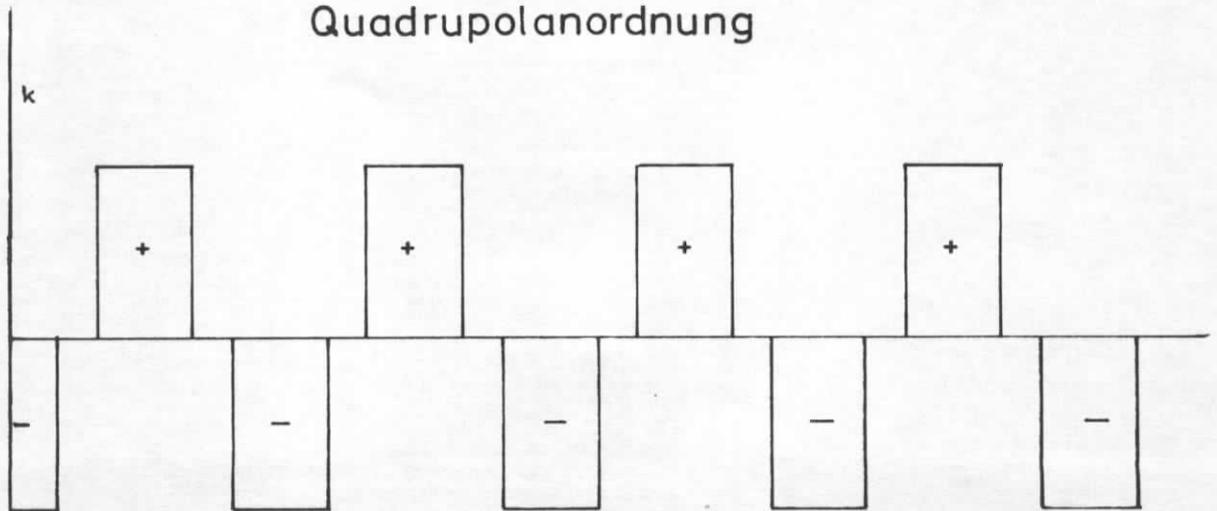
Eine grobe Abschätzung des Leistungsbedarfs ergibt 3,5 kW pro Quadrupol, das sind insgesamt 90 kW für den FODO-Kanal.

Wenn man vom verschwindend kleinen Leistungsbedarf des Positronenhorns absieht, benötigt die gesamte Positronenfokussierung bei einer Akzeptanz von  $0,1 \text{ } \mu\text{rad}\cdot\text{cm}$  bei 6 MeV und einer Emittanz von  $2 \text{ } \mu\text{rad}\cdot\text{cm}$  bei 300 MeV eine elektrische Leistung von  $N = 300 \text{ kW}$ .

# Einhüllende in einem FODO-Kanal



# Quadrupolanordnung



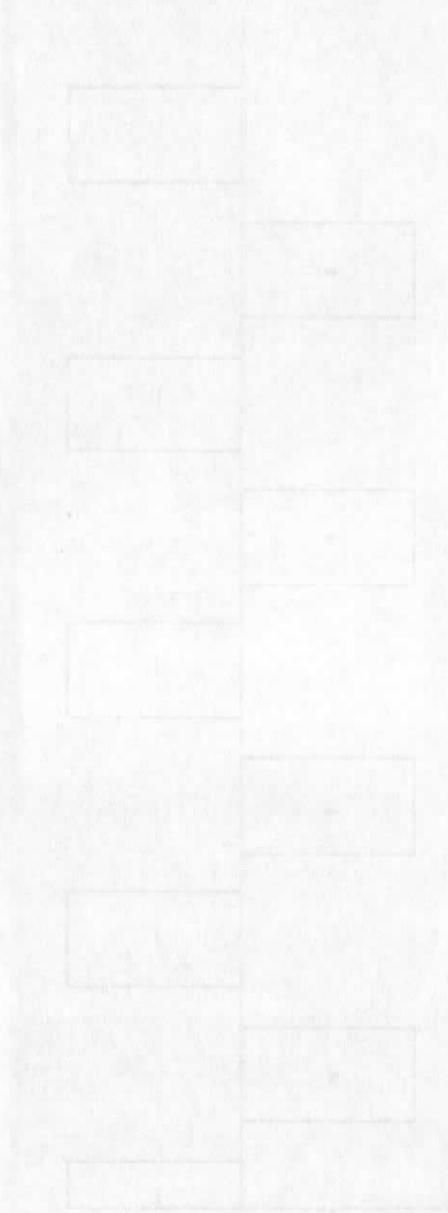


Figure 15: Multi-stage amplifier circuit diagram.

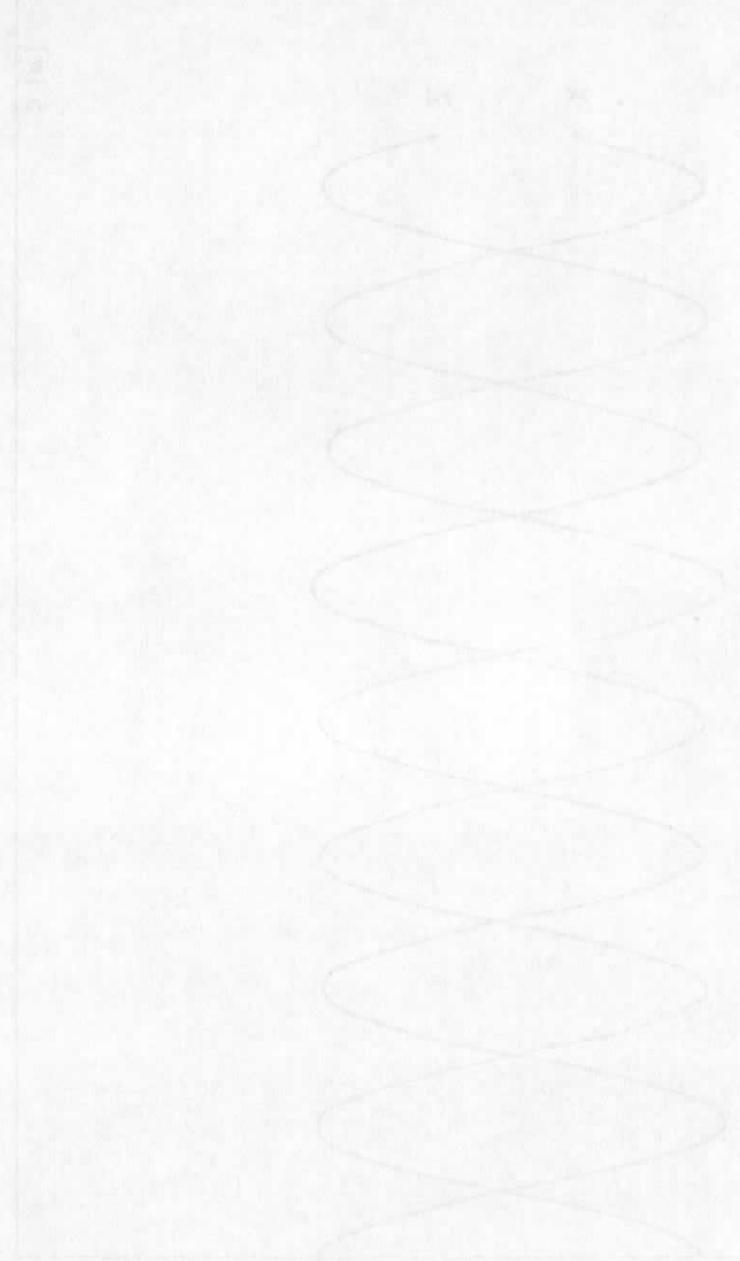


Figure 16: Sinusoidal waveform graph showing voltage (V) versus time (t).

Für zahlreiche weiterführende Diskussionen bin ich Herrn Dr. K.G. Steffen zu besonderem Dank verpflichtet. Ebenfalls danke ich herzlich Fräulein Borchardt für die Programmierung der Teilchenbahnen im Positronenhorn am Analogrechner, Herrn R. Haupt für die Berechnung des Magnetfeldes im Positronenhorn am Digitalrechner und Herrn Kashan für die Anfertigung der Abbildungen.

