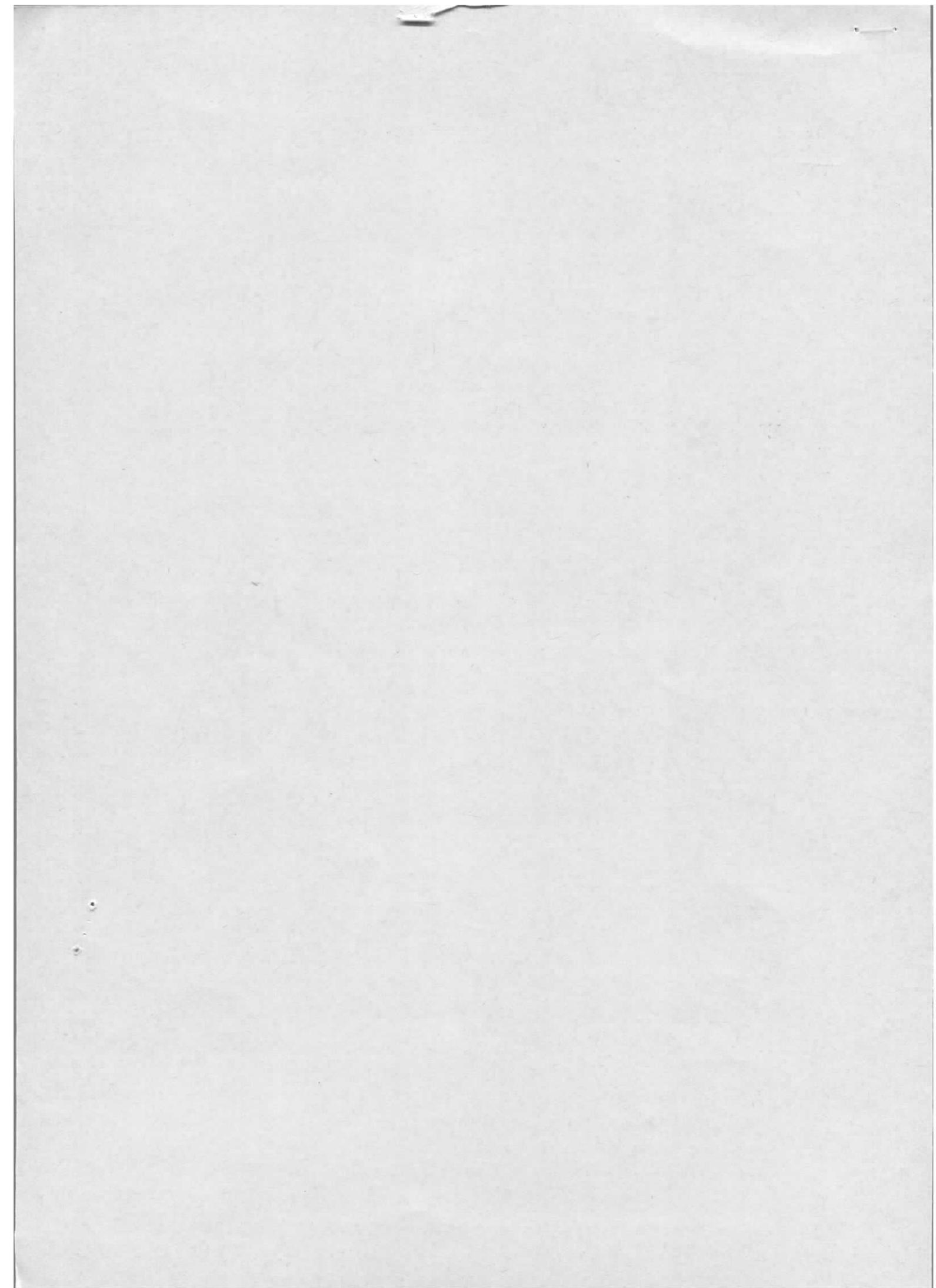


Interner Bericht
DESY H2-75/3
März 1975

DESY
20. MAI 1975
DESY-Bibliothek

Einstellung der Kreuzung der beiden Strahlen mit Hilfe des Raumladungseffektes

A. Piwinski



1. Zusammenfassung

Bei der Einstellung der Kreuzung der beiden Strahlen in den Wechselwirkungspunkten hat es sich als nützlich erwiesen, nach der maximalen Q-Verschiebung zu suchen. Dieses Verfahren ist bedeutend schneller und genauer als die Messung der Luminosität, die immer einen statistischen Fehler enthält.

Allerdings benötigt man zur Messung der Q-Verschiebung einen schwachen und einen starken oder mittleren Strahl. Bei zwei starken Strahlen, z.B. zur Nachoptimierung der Kreuzung in einer Meßschicht, entstehen erhebliche Schwierigkeiten.

Deshalb soll hier ein anderes Verfahren erörtert werden, das sowohl bei zwei starken Strahlen als auch bei zwei schwachen Strahlen (ab einigen Milliampere) eine schnelle Einstellung der Kreuzung gestattet. Dieses Verfahren besteht, vereinfacht ausgedrückt, darin, daß ein Strahl auf der Resonanzfrequenz des anderen Strahls angeregt wird. Die kohärente Amplitude des zweiten, indirekt angeregten Strahl wächst dann mit der Wechselwirkung der beiden Strahlen, und ist ein empfindliches Signal für die Güte der Überlappung.

Zum Verständnis der Anregung zweier starker Strahlen, die durch den Raumladungseffekt miteinander gekoppelt sind, ist folgendes zu beachten. Ähnlich wie bei der Kopplung zweier Schwingkreise entstehen aus den Betatronfrequenzen der beiden Strahlen zwei neue, etwas verschobene Resonanzfrequenzen (betrachtet wird nur eine Schwingungsebene, horizontal oder vertikal). Jeder der beiden Strahlen kann auf beiden Resonanzfrequenzen angeregt werden. Diese Resonanzfrequenzen sind gegeben durch

$$Q_{\text{res1,2}} = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2 + \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \pm \sqrt{4\Delta Q_1 \cdot \Delta Q_2 + (Q_1 - Q_2 + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^2}) \quad (1)$$

Q_1 und Q_2 sind die Betatronfrequenzen der beiden Strahlen (horizontal oder vertikal). ΔQ_1 und ΔQ_2 sind die inkohärenten Q-Verschiebungen, die jedes Teilchen durch den anderen Strahl erfährt und die in linearer Näherung aus der Linsenstärke der Raumladung berechnet werden können. Im Falle gleicher inkohärenter Q-Verschiebungen vereinfacht sich Gl.(1) zu

$$Q_{\text{res1,2}} = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + \Delta Q \pm \sqrt{\Delta^2 Q + (Q_1 - Q_2)^2 / 4} \quad (2)$$

Diagramm 1 zeigt den Verlauf der beiden Resonanzfrequenzen. Aus dem Diagramm geht hervor, daß im Falle zweier starker Strahlen bei Änderung der Betatronfrequenz eines Strahls, z.B. durch Änderung des closed orbit in den großen Quadrupolen, beide Resonanzfrequenzen verschoben werden. Dadurch wird die Bestimmung der maximalen Q-Verschiebung äußerst schwierig.

Ein empfindlicheres und eindeutiges Kriterium stellen die kohärenten Amplituden der angeregten Schwingungen dar. In linearer Näherung, d.h. bei sehr kleinen Schwingungen, aber unter Berücksichtigung der starken Fokussierung der Maschine, erhält man für die Amplituden des direkt angeregten Strahls auf den beiden Resonanzfrequenzen

$$\sqrt{\epsilon_1 \beta_1} = A \left| Q_1 - Q_2 + \Delta Q_1 - \Delta Q_2 \mp \sqrt{4\Delta Q_1 \Delta Q_2 + (Q_1 - Q_2 + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^2} \right| \quad (3)$$

und für die Amplituden des zweiten Strahls

$$\sqrt{\epsilon_2 \beta_2} = 2 A \Delta Q_2 \quad (4)$$

mit

$$A = \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_A} e U l}{4\alpha d E \sqrt{4\Delta Q_1 \Delta Q_2 + (Q_1 - Q_2 + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^2}}$$

$\beta_{1,2}$ = Amplitudenfunktionen am Wechselwirkungspunkt

β_A = Amplitudenfunktion an der Stelle der Anregung

α = Dämpfung pro Umlauf, e = Elementarladung

E = Teilchenenergie, U = Anregungsspannung

d, l = Abstand bzw. Länge der Anregungsplatten

Die Amplituden des direkt angeregten Strahls sind auf den beiden Resonanzfrequenzen verschieden groß (Gl.(3)), und zwar liefert die Resonanzfrequenz die größere Amplitude, die bei verschwindender Wechselwirkung in die Betatronfrequenz dieses Strahls übergeht. Dagegen sind die Amplituden des indirekt angeregten Strahls im Rahmen der linearen Näherung gleich groß.

Diagramm 2 zeigt das prinzipielle Verhalten der Amplituden der beiden Strahlen in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz in linearer Näherung. Diagramm 3 zeigt gemessene Kurven für den indirekt angeregten Strahl bei verschiedenen Phasen zwischen den Beschleunigungsspannungen, d.h. bei verschiedenen Stärken der Wechselwirkung.

Im Diagramm 4 sind die kohärenten Signale für die beiden Resonanzfrequenzen (Fläche unter der Resonanzkurve) in Abhängigkeit von der HF-Phase aufgetragen. Die beiden Maxima neben dem Hauptmaximum werden, wie aus der negativen Frequenzverschiebung im Diagramm 3 hervorgeht, durch die "long-range forces" verursacht.

2. Resonanzfrequenzen

Die Resonanzfrequenzen für die Anregung der gekoppelten Betatronschwingungen werden durch die Eigenwerte der gesamten Übertragungsmatrix bestimmt. Mit

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

sollen die Übertragungsmatrizen der beiden Strahlen für den Abschnitt zwischen zwei Wechselwirkungspunkten bezeichnet werden. Die Rechnung wird auf den Fall einer oder zweier Wechselwirkungszonen beschränkt. Dann trifft jeder Bunch immer mit demselben Bunch des anderen Strahls zusammen. Die Übertragungsmatrix für zwei derartige Bunche, die die Bewegung der Bunche vom Zeitpunkt unmittelbar vor einer Wechselwirkung bis zum Zeitpunkt unmittelbar vor der nächsten Wechselwirkung beschreibt, lautet dann

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta_1 & 1 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \eta_2 & 0 & -\eta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - \eta_1 b_1 & b_1 & \eta_1 b_1 & 0 \\ c_1 - \eta_1 d_1 & d_1 & \eta_1 d_1 & 0 \\ \eta_2 b_2 & 0 & a_2 - \eta_2 b_2 & b_2 \\ \eta_2 d_2 & 0 & c_2 - \eta_2 d_2 & d_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Hierbei ist

$$\eta_{1,2} = 4\pi \epsilon_{1,2} / \beta_{1,2}$$

mit

$$\epsilon_{1,2} = \frac{N_{B2,1} r_e \beta_{z1,2}}{2\pi\gamma_{1,2} \sigma_{z2,1} (\sigma_{x2,1} + \sigma_{z2,1})}$$

N_B = Zahl der Teilchen im Bunch, r_e = Elektronenradius

$\sigma_{x,z}$ = Standardabweichung für die horizontale bzw. vertikale Teilchendichte

γ = Teilchenenergie

Die 4 Eigenwerte der Matrix M genügen der Gleichung

$$\begin{aligned} & (\lambda + 1/\lambda)^2 + (\lambda + 1/\lambda)(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2 - a_1 - d_1 - a_2 - d_2) \\ & + (a_1 + d_1)(a_2 + d_2) - \eta_1 b_1(a_2 + d_2) - \eta_2 b_2(a_1 + d_1) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

mit

$$\lambda = \exp\{\pm j\mu_{res1,2}\}$$

und

$$a_{1,2} = \cos(\mu_{1,2}/p) + \alpha_{1,2} \sin(\mu_{1,2}/p)$$

$$b_{1,2} = \beta_{1,2} \sin(\mu_{1,2}/p)$$

$$c_{1,2} = -(1 + \alpha_{1,2}^2) \sin(\mu_{1,2}/p) / \beta_{1,2}$$

$$d_{1,2} = \cos(\mu_{1,2}/p) - \alpha_{1,2} \sin(\mu_{1,2}/p)$$

$$\alpha_{1,2} = -\beta'_{1,2}/2$$

$$p = 1,2 \text{ (1 oder 2 Wechselwirkungszonen)}$$

erhält man die Beziehung

$$\cos(\mu_{\text{resl},2}/p) = C_1 + C_2 \pm \sqrt{(C_1 - C_2)^2 + \eta_1 \eta_2 \beta_1 \beta_2} \quad (7)$$

mit
$$C_{1,2} = \cos(\mu_{1,2}/p)/2 - \eta_{1,2} \beta_{1,2} \sin(\mu_{1,2}/p)/4$$

Nimmt man schließlich an, daß die Frequenzverschiebung klein ist und die Beta-tronfrequenzen nicht zu dicht an einer ganzen Zahl liegen, d.h. daß

$$\frac{2\pi \xi_{1,2}}{\sin(2\pi Q_{1,2}/p)} \ll 1 \quad (8)$$

ist, so erhält man mit

$$\mu_{\text{resl},2} = 2\pi Q_{\text{resl},2}$$

Gl.(1) und Gl.(2).

3. Eigenvektoren

Um die Bewegung der Bunche über viele Umläufe zu verfolgen, ist es zweckmäßig, die Koordinaten der Schwingung der Bunche durch die Eigenvektoren der Übertragungsmatrix auszudrücken. Die Eigenvektoren der Matrix M Gl.(5) berechnen sich zu

$$\vec{y}_i = \bar{N}_i \begin{pmatrix} (\lambda_i - d_1)(\lambda_i + 1/\lambda_i - a_2 - d_2 + \eta_2 b_2) \\ (c_1 - \eta_1 d_1)(\lambda_i + 1/\lambda_i - a_2 - b_2) + \eta_2 b_2 c_1 \\ (\lambda_i - d_1) \eta_2 b_2 \\ (\lambda_i - d_1)(d_2^{-1}/\lambda_i) \eta_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

mit $i = 1, 2$ und $\vec{y}_3 = \vec{y}_1^*$, $\vec{y}_4 = \vec{y}_2^*$, wobei \bar{N}_i Normierungskonstanten sind. Macht man hier ebenfalls die Annahme Gl.(8), so erhält man

$$\vec{y}_{1,2} = N_{1,2} \begin{pmatrix} (Q_2 - Q_1 + \Delta Q_2 - \Delta Q_1)/2 \pm W \\ (j - \alpha_1)((Q_2 - Q_1 + \Delta Q_2 - \Delta Q_1)/2 \pm W)/\beta_1 \\ \Delta Q_2 \\ (j - \alpha_2)\Delta Q_2/\beta_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

mit $W = \sqrt{\Delta Q_1 \Delta Q_2 + (Q_1 - Q_2 + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^2/4}$

$N_{1,2}$ sind neue Normierungskonstanten.

In diese Eigenvektoren soll der Beitrag zur kohärenten Schwingung zerlegt werden, den die Anregungsspannung bei einem einmaligen Durchgang durch die Anregungsplatten verursacht. Es wird angenommen, daß die Plattenlänge l klein ist gegen die Wellenlänge der Betatronschwingung oder, genauer, klein gegen die Amplitudenfunktion an der Stelle der Platten. Dann bleibt die Auslenkung beim Durchgang konstant, während sich der Winkel um den Anteil $eUl/(Ed)$ ändert. Die Transformation zum Wechselwirkungspunkt liefert

$$M_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{eUl}{E_1 d} = \begin{pmatrix} b_A \\ d_A \end{pmatrix} \frac{eUl}{E_1 d},$$

wobei M_A die Übertragungsmatrix von den Platten zum Wechselwirkungspunkt ist. Als Vierervektor geschrieben bekommt dieser Beitrag die Form

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} b_A \\ d_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{eUl}{E_1 d} \quad (11)$$

Zerlegt man den Vektor \vec{S} in die Eigenvektoren Gl.(10), so bekommt man

$$\vec{S} = B_1 \vec{y}_1 + B_2 \vec{y}_2 + B_1^* \vec{y}_1^* + B_2^* \vec{y}_2^* \quad (12)$$

mit $B_1 N_1 = ((1-j\alpha_1) b_A - j\beta_1 d_A) \frac{eU_1}{4WE_1 d}$

und $B_2 N_2 = - B_1 N_1$

4. Amplituden der kohärenten Schwingungen

Die stationären Amplituden ergeben sich nach vielen Umläufen als Gleichgewichtszustand zwischen Anregung und Dämpfung. Bezeichnet man mit \vec{X}_n die Schwingungskordinaten nach n Umläufen, so erhält man die Beziehungen

$$\vec{X}_1 = \vec{S} \cos \mu + M \vec{X}_0 e^{-\alpha}$$

$$\vec{X}_2 = \vec{S} \cos 2\mu + M \vec{S} \cos \mu e^{-\alpha} + M^2 \vec{X}_0 e^{-2\alpha}$$

.....

$$\vec{X}_m = \vec{S} \cos n\mu + M \vec{S} \cos(n-1)\mu e^{-\alpha} + M^2 \vec{S} \cos(n-2)\mu e^{-2\alpha} + \dots$$

μ ist der Phasenvorschub der Anregungsspannung pro Umlauf, und α ist die natürliche Strahlungsdämpfung pro Umlauf. Ersetzt man \vec{S} durch die Eigenvektoren von M gemäß Gl.(12), so bekommt man

$$\begin{aligned} \vec{X}_n &= \sum_{m=1}^2 \left\{ (\cos n\mu + \cos(n-1)\mu e^{-\alpha+j\mu\text{res}m} + \cos(n-2)\mu e^{-2(\alpha-j\mu\text{res}m)} + \dots) B_m \vec{y}_m \right. \\ &\quad \left. + (\cos n\mu + \cos(n-1)\mu e^{-\alpha-j\mu\text{res}m} + \dots) B_m^* \vec{y}_m^* \right\} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^2 (\cos n\mu + \cos(n-1)\mu e^{-\alpha+j\mu\text{res}m} + \dots) B_m \vec{y}_m \right\} \end{aligned}$$

Nach vielen Umläufen, d.h. $n\alpha \gg 1$, kann diese Reihe als unendliche Reihe behandelt werden und ergibt nach der Summation

$$\vec{X}_n = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^2 (e^{jn\mu} (1 - e^{-\alpha - j(\mu_{\text{res}m} + \mu)})^{-1} + e^{-jn\mu} (1 - e^{-\alpha - j(\mu_{\text{res}m} - \mu)})^{-1}) B_m \vec{y}_m \right\} \quad (13)$$

Aus Gl.(13) folgt, daß \vec{X}_n nur dann groß wird, wenn $\mu_{\text{res}m} \pm \mu$ in der Nähe von 0 oder einem Vielfachen von 2π liegt. Es ist deshalb zweckmäßig, die Exponenten in eine Reihe zu entwickeln. Außerdem genügt es, sich auf positive μ zu beschränken, so daß man den ersten Term in Gl.(13) fortlassen kann:

$$\vec{X}_n = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^2 \frac{e^{-jn\mu}}{\alpha + j(\mu_{\text{res}m} - \mu)} B_m \vec{y}_m \right\} \quad (14)$$

Die Schwingungsamplituden können nun analog zur Bestimmungsgleichung für die Emittanz ϵ berechnet werden:

$$\epsilon\beta = z^2 + (\alpha z + \beta z')^2$$

Für den ersten, direkt angeregten Strahl lautet diese Gleichung

$$\epsilon_1 \beta_1 = ((\vec{X}_m)_1)^2 + (\alpha_1 (\vec{X}_n)_1 + \beta_1 (\vec{X}_n)_2)^2$$

$(\vec{X}_n)_i$ bezeichnet die i -te Komponente des Vierervektors \vec{X}_n . Berücksichtigt man weiter die Beziehung

$$(\vec{y}_m)_2 = (\vec{y}_m)_1 (j - \alpha_1) / \beta_1,$$

die aus Gl.(10) folgt, so erhält man

$$\epsilon_1 \beta_1 = |B_1 N_1|^2 \left| \frac{Q_{\text{res}1}^{-Q_1 - \Delta Q_1}}{\alpha + j(\mu_{\text{res}1} - \mu)} - \frac{Q_{\text{res}2}^{-Q_1 - \Delta Q_1}}{\alpha + j(\mu_{\text{res}2} - \mu)} \right|^2$$

Mit $| (1 - j\alpha_1) b_A - j\beta_1 d_B | = \sqrt{\beta_1 \beta_A}$

erhält man schließlich

$$\sqrt{\epsilon_1 \beta_2} = \sqrt{\beta_1 \beta_A} \frac{eU_1}{2E_1 d} \left(\frac{\alpha^2 + 4\pi^2 (Q_2 + \Delta Q_2 - Q)^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 (Q - Q_{\text{res1}})^2) (\alpha^2 + 4\pi^2 (Q - Q_{\text{res2}})^2)} \right)^{1/2} \quad (15)$$

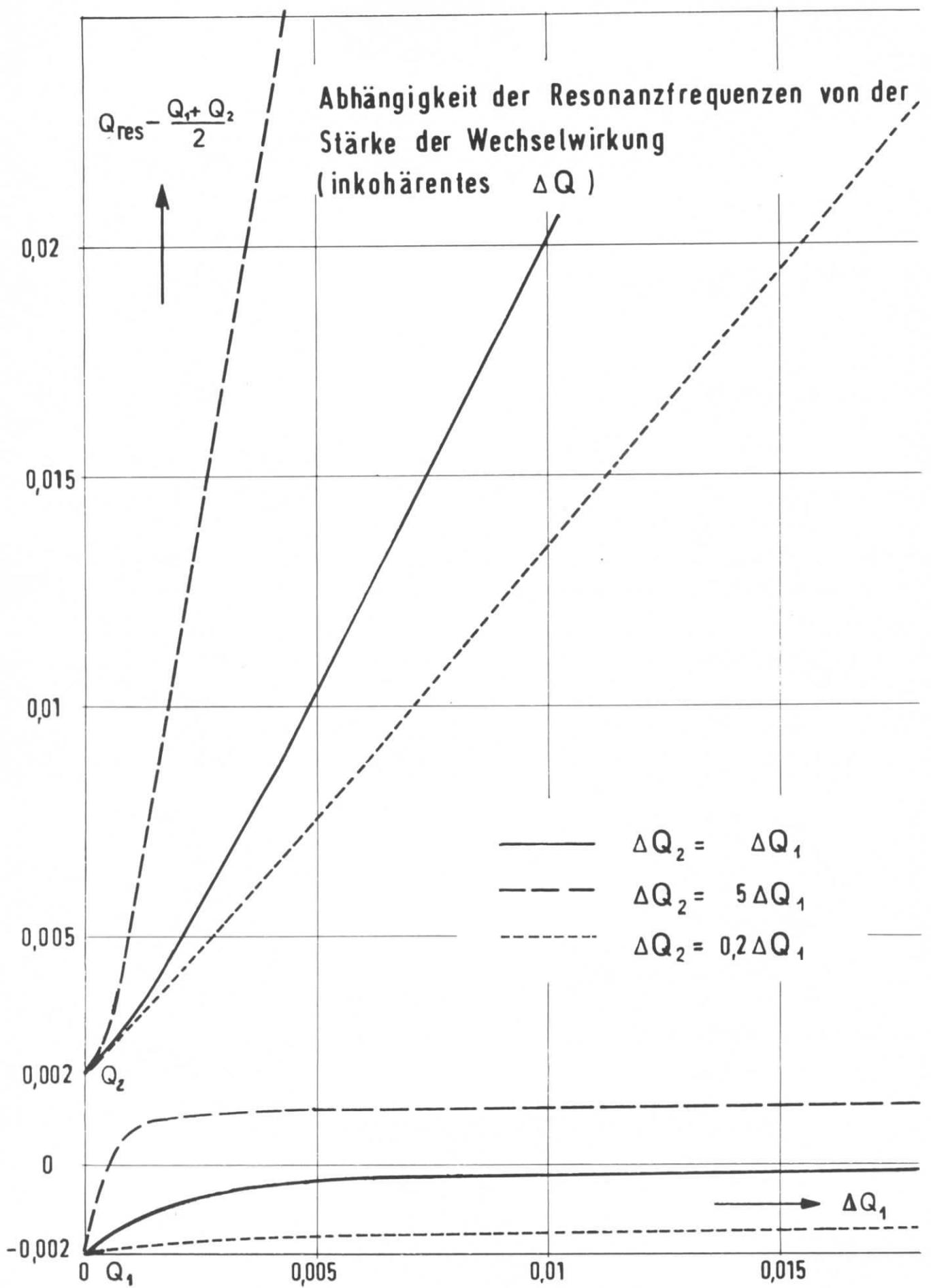
Ähnlich folgt aus

$$\epsilon_2 \beta_2 = ((\vec{X}_n)_3)^2 + (\alpha_2 (\vec{X}_n)_3 + \beta_2 (\vec{X}_n)_4)^2$$

für die Amplitude des zweiten Strahls

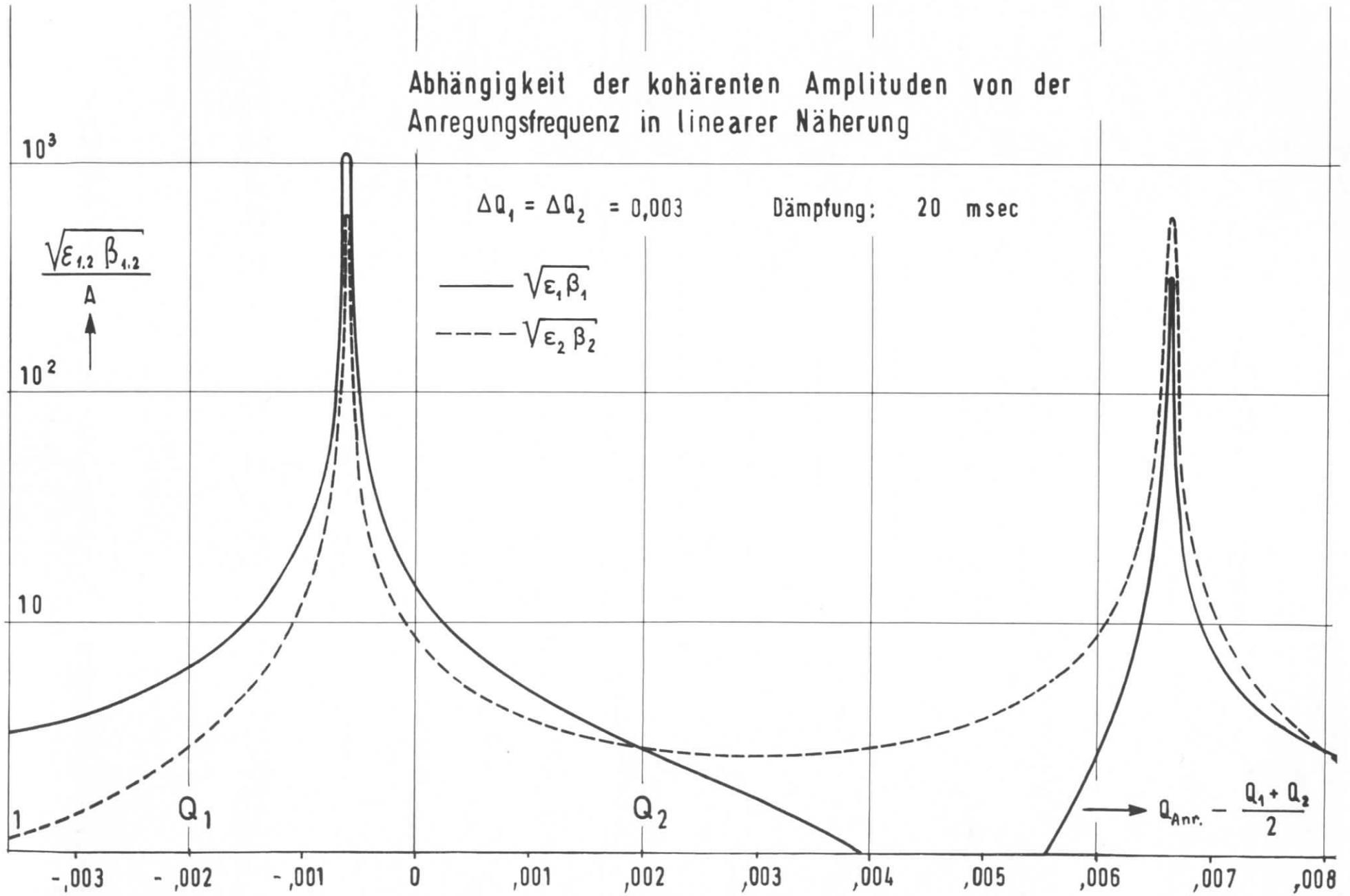
$$\sqrt{\epsilon_2 \beta_2} = \sqrt{\beta_1 \beta_A} \frac{eU_1}{2E_1 d} \frac{2\pi \Delta Q_2}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 (Q - Q_{\text{res1}})^2} \sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 (Q - Q_{\text{res2}})^2}} \quad (16)$$

Aus Gl.(15) und Gl.(16) folgen für $Q = Q_{\text{res1,2}}$ und bei Vernachlässigung von α^2 gegen $16\pi^2 W^2$ die Beziehungen Gl.(3) und Gl.(4).



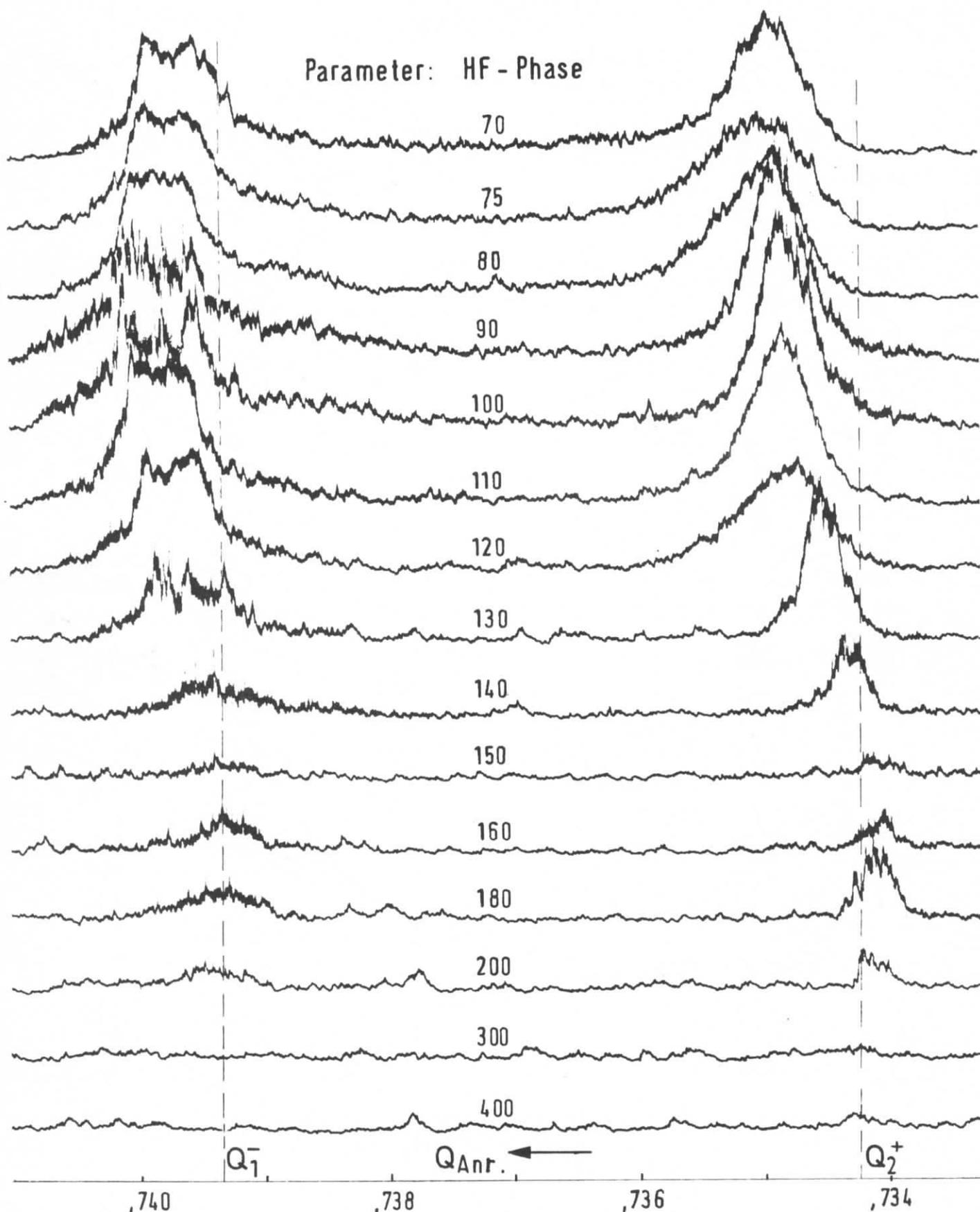
Diagr. 1

Abhängigkeit der kohärenten Amplituden von der Anregungsfrequenz in linearer Näherung



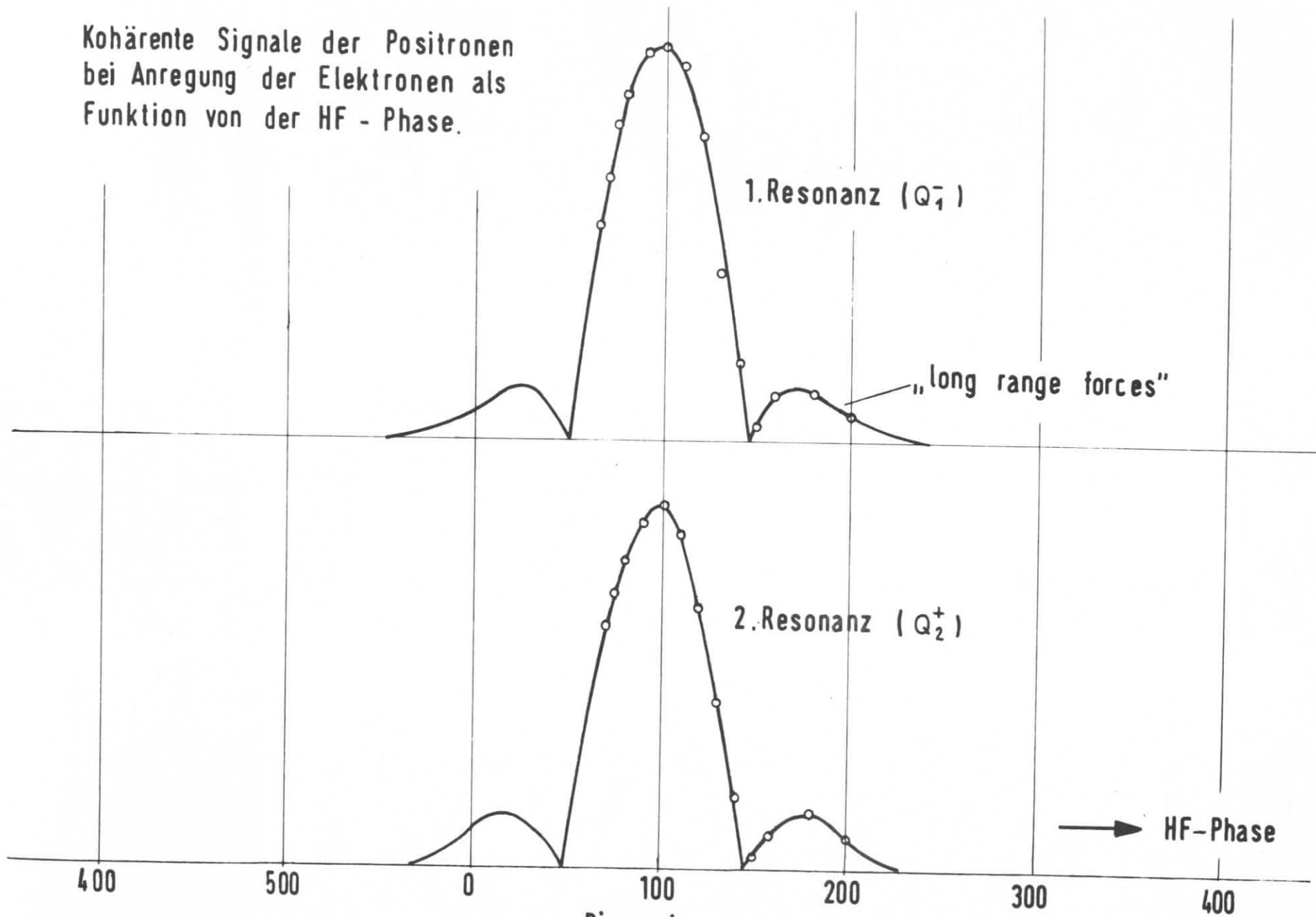
Diagr. 2

Parameter: HF - Phase



Kohärentes Signal der Positronen in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz der Elektronen (25 mA x 25 mA)
Diagr. 3

Kohärente Signale der Positronen
bei Anregung der Elektronen als
Funktion von der HF - Phase.



Diagr. 4

