

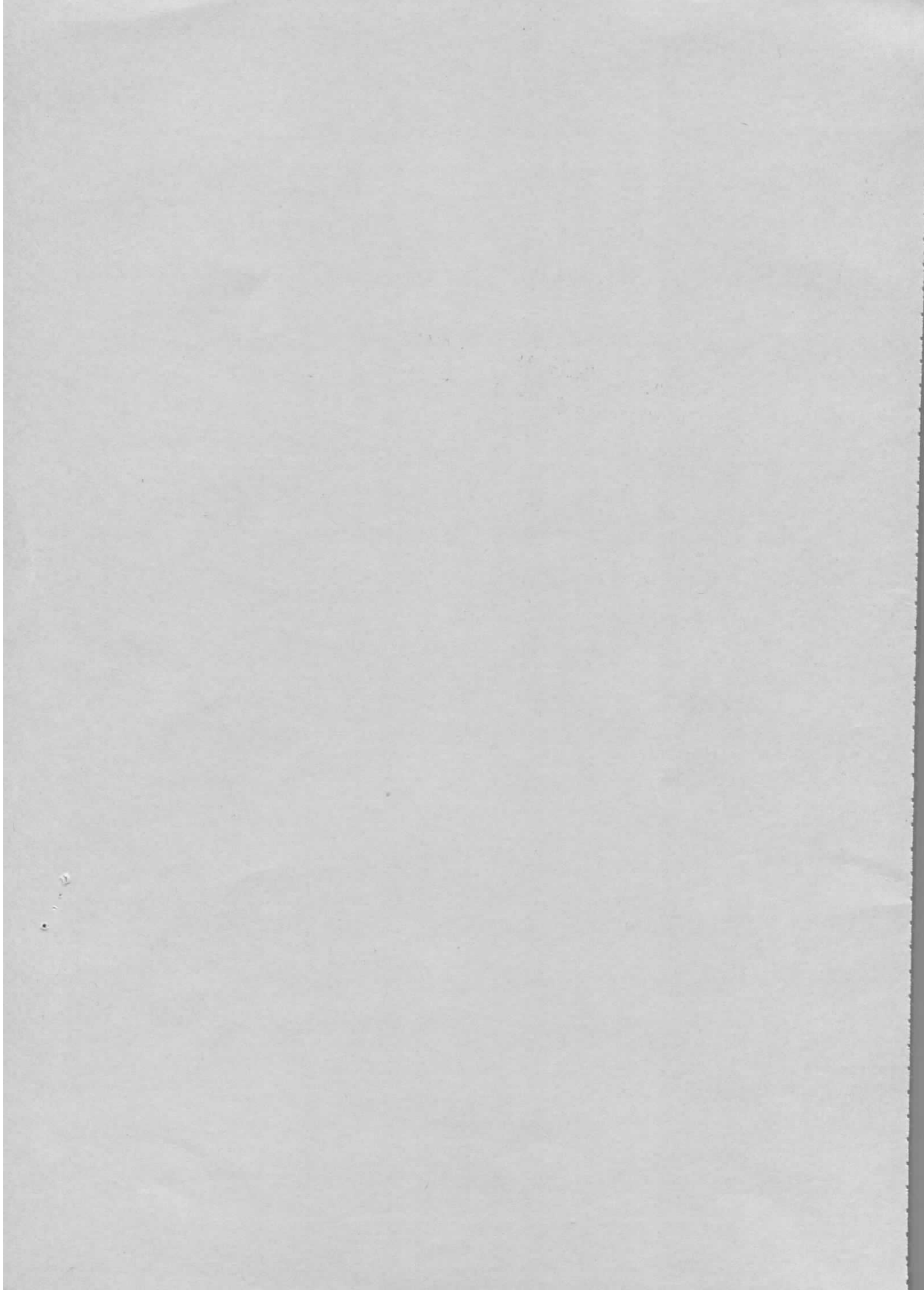
Interner Bericht  
DESY H3-73/1  
Oktober 1973

DESY-Bibliothek  
3. NOV. 1973

Beeinflussung der Cavity-Parameter  
durch Zuschaltung einer äußeren Impedanz

von

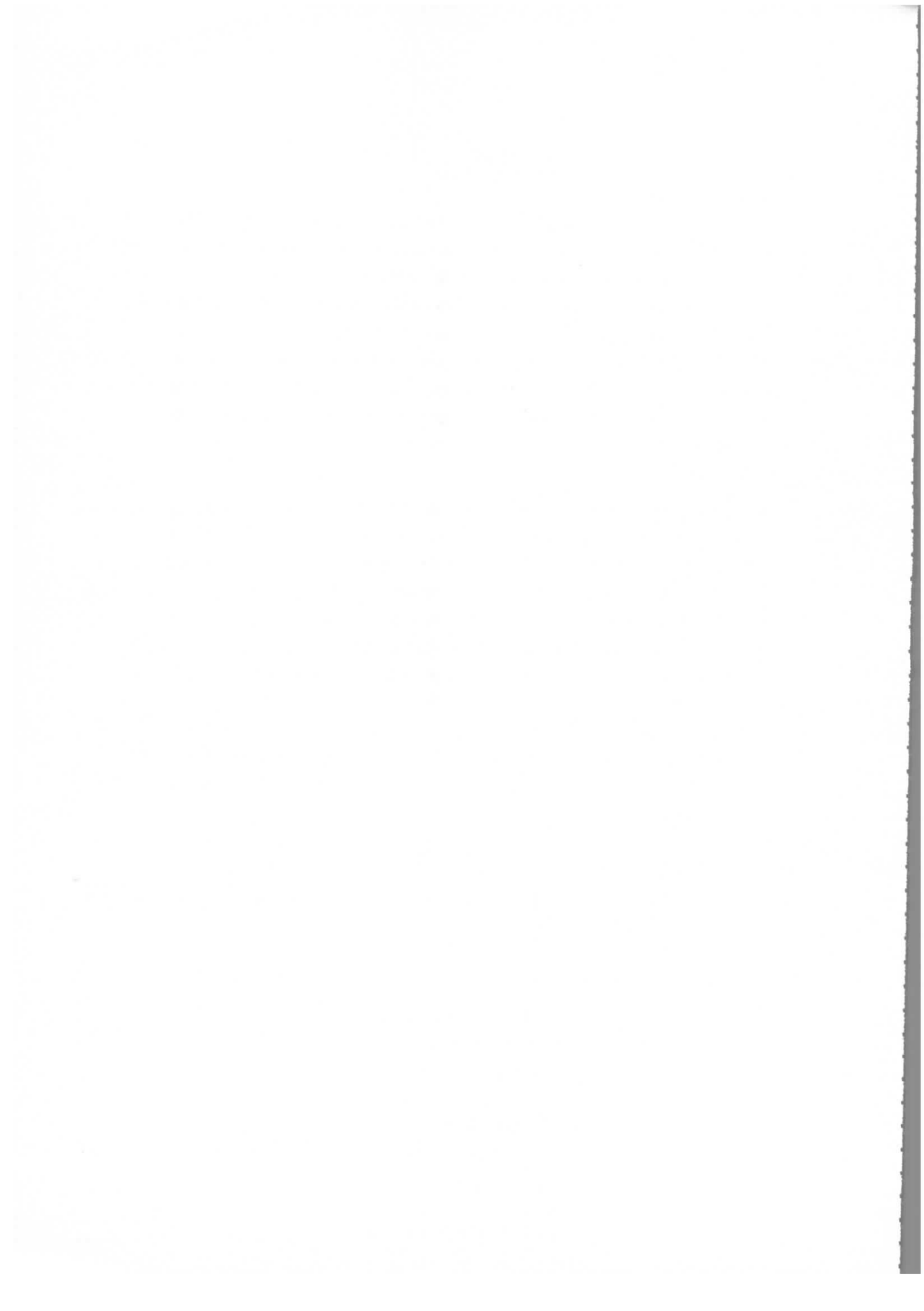
N. Lehnart



## Einleitung

In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie die Parameter eines Beschleunigungsresonators beeinflußt werden, wenn eine Impedanz zusätzlich parallel zur Shuntimpedanz geschaltet wird. Die Problemstellung ist von Interesse, zumal die am DORIS-Speicherring benutzten Cavities über einen Reserveflansch verfügen. Die Öffnung kann zur Auskopplung von HF-Leistung benutzt werden. Je nach Wahl des Auskopplungsgrades und der äußeren Belastung kann die Shuntimpedanz der Cavities und deren Güte herabgesetzt werden, was in besonderen Fällen (Dämpfung von Synchrotronschwingungen, Dämpfung höherer Cavity-Modes) von Interesse ist.

Um quantitative Aussagen machen zu können, wird der Beschleunigungsresonator als Parallelersatzschaltbild dargestellt und der Strahlstrom als eine Konstantstromquelle angenommen. Ferner wird vorausgesetzt, daß über eine zusätzliche Koppelschleife HF-Energie aus dem Resonator ausgekoppelt und in einem Absorber verbraucht wird. Das stationäre und dynamische Verhalten des Systems Cavity-Strahl wird von den Parametern Koppelgrad der Schleife, Größe des parallelgeschalteten Absorbers und Wellenleiterlänge zwischen Resonator und Absorber näher untersucht.



## 2. Eingangswiderstand einer Leitung bei reellem Abschluß

In Abb.1 ist das Cavity einschließlich des HF-Generators und der externen Beeinflussungsanordnung dargestellt. Um den Einfluß des Abschlußwiderstandes  $\vec{Z}$  auf den Zustand des Resonators diskutieren zu können, ist es wichtig zu wissen, wie der Abschlußwiderstand einer Leitung in Abhängigkeit von der Leiterlänge  $\ell$  den Eingangswiderstand  $\vec{Z}_e$  beeinflusst.

Für eine verlustfreie Leitung ergibt die Lösung der Leitungsgleichungen in komplexer Schreibweise

$$\begin{aligned}\vec{U}(x) &= \vec{U}' e^{-j\beta x} + \vec{U}'' e^{j\beta x} \\ \vec{I}(x) &= \frac{\vec{U}'}{Z_{L2}} e^{-j\beta x} - \frac{\vec{U}''}{Z_{L2}} e^{j\beta x}\end{aligned}\quad (1)$$

mit  $\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \frac{2\pi}{\lambda}$  Phasenmaß

$Z_{L2} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$  Wellenwiderstand der Leitung

$L', C'$  = Induktivitäts- bzw. Kapazitätsbelag der Leitung

Legt man den Koordinatenursprung an das Leitungsende, d. h.  $\vec{U}(\ell = 0) = \vec{U}_0$  und  $\vec{I}(\ell = 0) = \vec{I}_0$  und setzt  $x = -\ell$ , dann kann Strom und Spannung an einer beliebigen Stelle  $\ell$  der Leitung durch Strom und Spannung am Leitungsende ( $\ell = 0$ ) ausgedrückt werden.

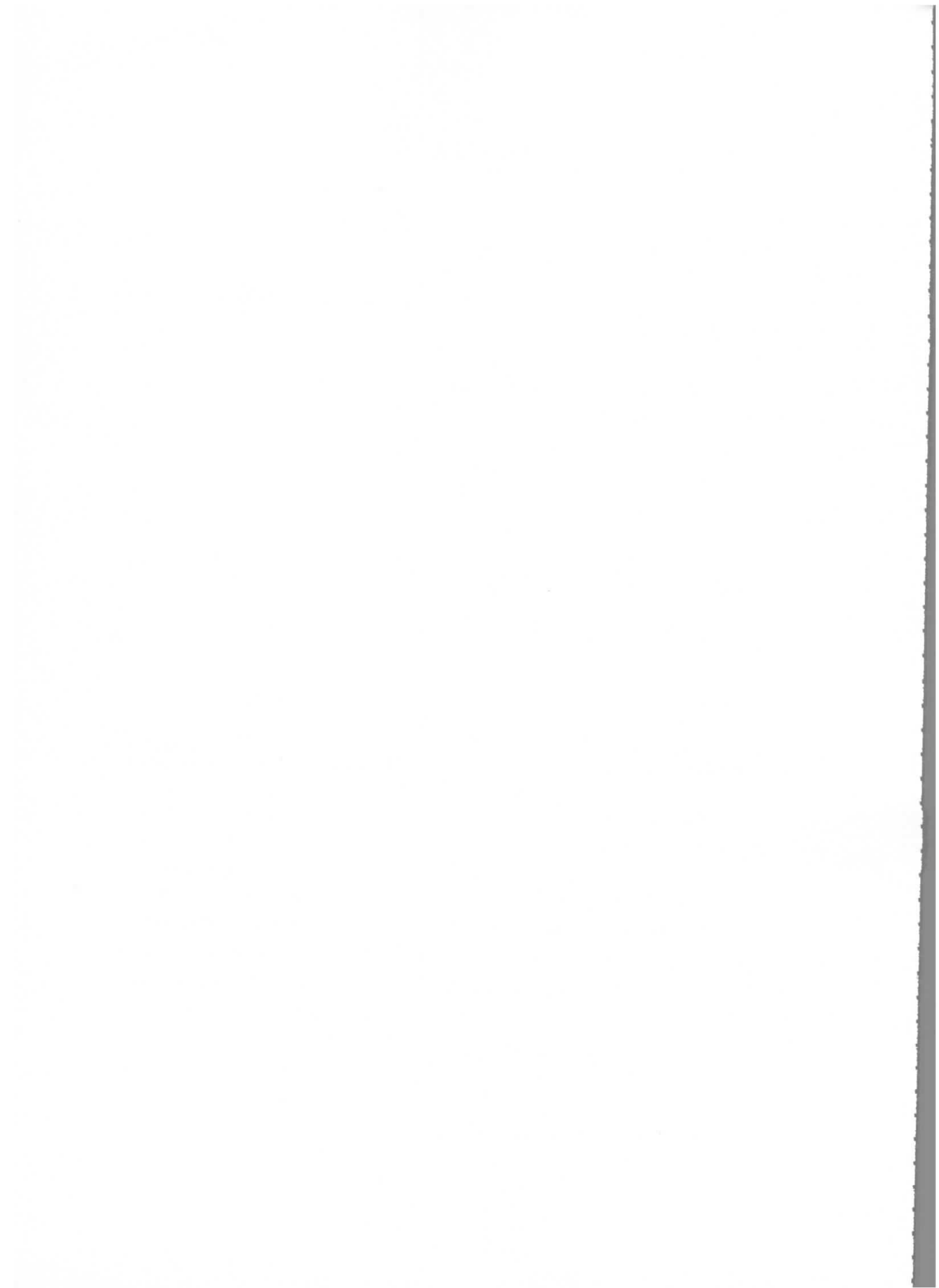
$$\begin{aligned}\vec{U}(\ell) &= \vec{U}_0 \cos\beta\ell + jZ_{L2} \vec{I}_0 \sin\beta\ell \\ \vec{I}(\ell) &= \vec{I}_0 \cos\beta\ell + j\frac{\vec{U}_0}{Z_{L2}} \sin\beta\ell\end{aligned}\quad (2)$$

Daraus ergibt sich der Eingangswiderstand der Leitung zu

$$\vec{Z}_e = \frac{\vec{U}(\ell)}{\vec{I}(\ell)} = \vec{Z} \frac{1 + j \frac{Z_{L2}}{\vec{Z}} \tan\beta\ell}{1 + j \frac{\vec{Z}}{Z_{L2}} \tan\beta\ell}\quad (3a)$$

$\vec{Z}$  ist der Abschlußwiderstand der Leitung.

Aus Gl.(3a) können für einen kurzgeschlossenen und einen reell abgeschlossenen



Wellenleiter die entsprechenden Beziehungen abgeleitet werden. Für einen kurzgeschlossenen Leiter gilt mit  $\vec{Z} = 0$  der Eingangswiderstand

$$Z_{ek} = jZ_{L2} \tan \beta \ell \quad (3b)$$

und für einen reel abgeschlossenen Leiter mit  $\vec{Z} = R_a$  und der Abkürzung  $m = \frac{R_a}{Z_{L2}}$

$$Z_{er} = Z_{L2} \frac{m + j \tan \beta \ell}{1 + j m \tan \beta \ell} \quad (3c)$$

Der Leitwert für den letzten Fall ist

$$Y = \frac{1}{Z_{er}} = Y_r + jY_{im}$$

mit

$$Y_r = \frac{1}{Z_{L2}} \frac{m + m \tan^2 \beta \ell}{m^2 + \tan^2 \beta \ell} \quad (3d)$$

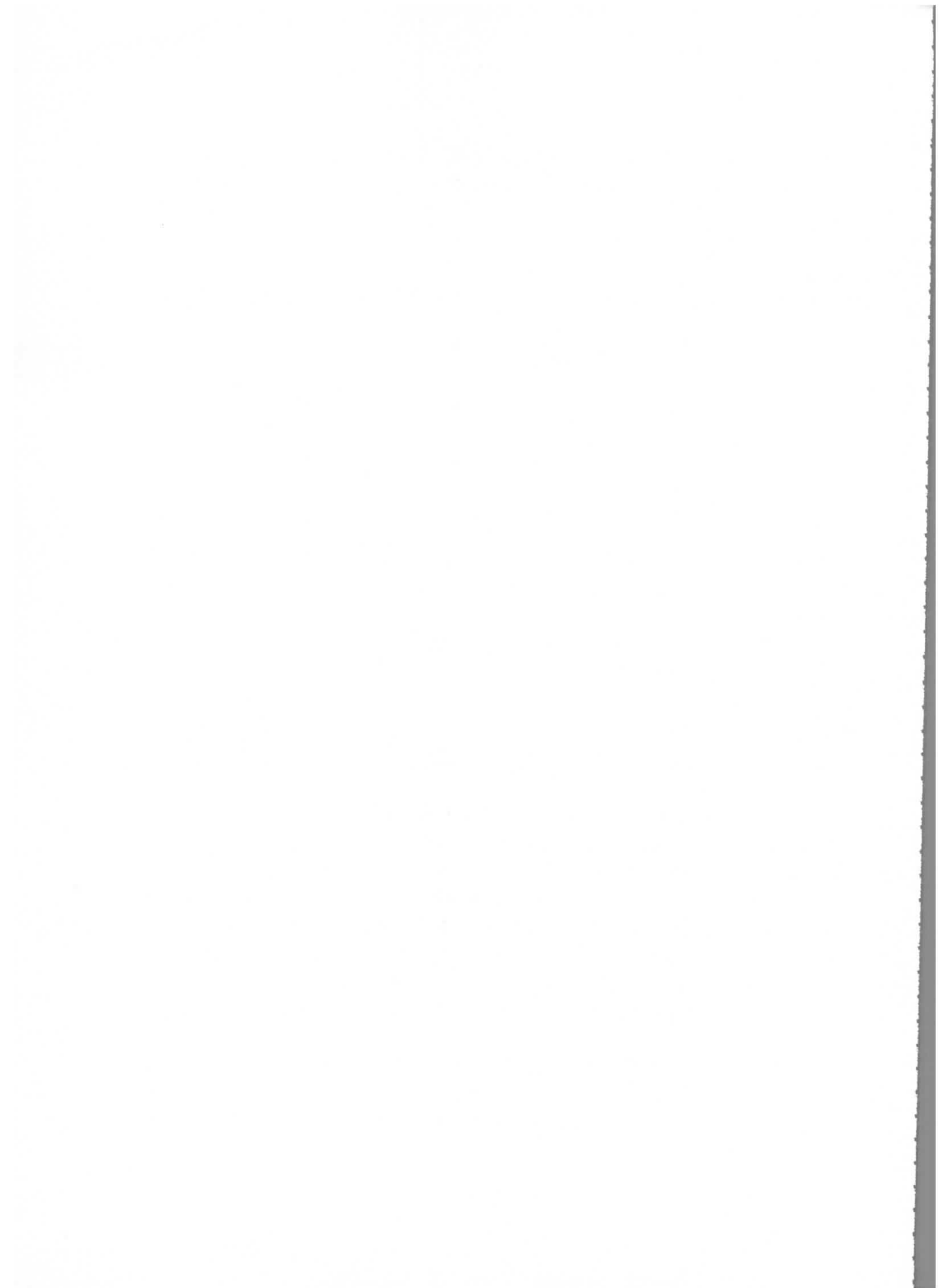
$$Y_{im} = \frac{1}{Z_{L2}} \frac{\tan \beta \ell (m^2 - 1)}{m^2 + \tan^2 \beta \ell} \quad (3e)$$

### 3. Belastung eines Cavity's durch eine von außen parallelgeschaltete Impedanz

Um das Verhalten von elektrischen Größen, wie z. B. Spannung und Strom in einem belasteten Beschleunigungsresonator zu studieren, geht man am besten vom Parallel-Ersatzschaltbild<sup>1,2)</sup> Abb.2 aus. Außer der parallelgeschalteten Impedanz muß hier der Einfluß des Elektronenstrahls auf die Parameter des Resonators berücksichtigt werden. Der Elektronenstrahl, der in diskreten Elektronenpaketen das Cavity passiert, wird durch die Grundwelle der Fourierzerlegung berücksichtigt und soll hier durch  $\vec{I}_B$  dargestellt werden. Mit den Größen des Ersatzschaltbildes der Abb.2 gelten die Beziehungen in komplexer Schreibweise:

$$\vec{U}_{S1} = j\omega L_1 \vec{I}_{S1} + j\omega M_1 \vec{I}_2$$

$$\vec{U}_c = j\omega L_2 \vec{I}_2 + j\omega M_1 \vec{I}_{S1} \quad (4)$$





$$\vec{U}_c = (\vec{I}_B - \vec{I}_2 - \vec{I}_3) \frac{R}{1 + j\omega CR}$$

$$\vec{U}_{S2} = -j\omega L_4 \vec{I}_{S2} + j\omega M_2 \vec{I}_3$$

(4)

$$\vec{U}_c = j\omega L_3 \vec{I}_3 - j\omega M_2 \vec{I}_{S2}$$

$$\frac{\vec{U}_{S2}}{\vec{I}_{S2}} = \vec{Z}_e, \quad \vec{Y}_e = \frac{1}{\vec{Z}_e}$$

Hier bedeuten:

$L_1, L_2$  - primäre und sekundäre Ersatzschaltungsinduktivitäten auf der Einkoppelseite

$L_3, L_4$  - primäre und sekundäre Ersatzschaltungsinduktivitäten auf der Auskoppelseite

$\vec{U}_{S1}, \vec{I}_{S1}$  - Spannung und Strom auf der Zuführungsleitung

$\vec{U}_{S2}, \vec{I}_{S2}$  - Spannung und Strom auf der Auskoppelseite

$\vec{I}_2, \vec{I}_3, \vec{U}_c$  - Ströme bzw. Spannung am Cavity

$R, C$  - Shuntimpedanz und Cavity-Ersatzschaltungskapazität

$\vec{Z}_e$  - Eingangswiderstand der Leitung

$M_1, M_2$  - Gegeninduktivitäten auf der Ein- bzw. Auskoppelseite

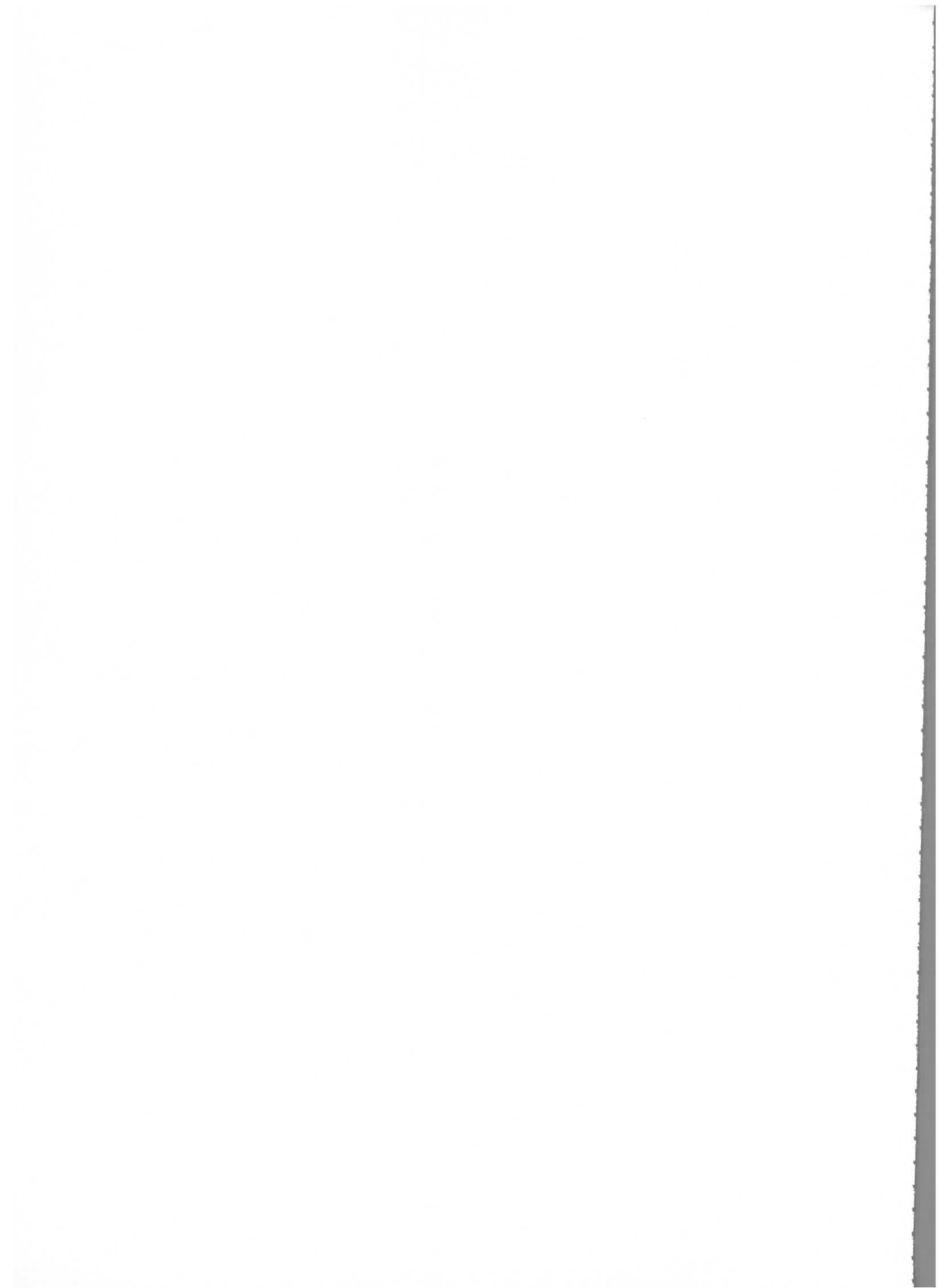
Es ist

$$M_1^2 = L_1 L_2; \quad M_2^2 = L_3 L_4$$

$$n_1 = L_1 / L_2; \quad n_2 = \frac{L_4}{L_3}$$

$n_1, n_2$  - Übertragungsverhältnis der Ein- bzw. Ausgangskopplung

Berücksichtigt man, daß sich die Gesamtinduktivität des Resonanzkreises schreiben läßt:



$$L = \frac{L_2 \cdot L_3}{L_2 + L_3}, \quad (5)$$

und normiert die Schwingkreisgrößen

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{unbelastete Resonanzfrequenz} \quad (6)$$

$$Q_0 = \omega_0 C \cdot R \quad \text{Leerlaufgüte} \quad (7)$$

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{normierte Frequenz} \quad (8)$$

$$\Omega = Q_0 \cdot \nu \quad \text{normierte Verstimmung des Kreises} \quad (9)$$

dann erhält man aus dem Gleichungssystem Gl.(4) die Beziehung

$$\frac{\vec{I}_B}{\vec{U}_C} = \frac{1}{R} (1 + j\Omega) - \frac{n_1^2}{\frac{\vec{U}_{S1}}{\vec{I}_{S1}}} + \frac{n_2^2}{\frac{\vec{U}_{S2}}{\vec{I}_{S2}}} \quad (10)$$

Bevor auf die Gl.(10) näher eingegangen wird, soll die Phasenbeziehung zwischen  $\vec{U}_C$  und  $\vec{I}_B$  erörtert werden. Aus Stabilitätsgründen<sup>3)</sup> muß die Cavityspannung  $U_C$  gegenüber der Position des Elektronenbunches im Cavity voreilen. Mit  $\vec{U}_C = |U_C| e^{j\psi_C}$  und  $\vec{I}_B = |I_B| e^{j\psi_B}$  wird auch die Sollphase  $\phi_s$  definiert:

$$\psi_C - \psi_B = \frac{\pi}{2} - \phi_s \quad (11)$$

Bei der Behandlung von Resonatoren für Beschleunigungszwecke ist es immer wieder wichtig zu wissen, welche Bedingungen eingehalten werden müssen, damit die gesamte vom Sender gelieferte Leistung in das Cavity gelangen kann. Unter Berücksichtigung der Belastung seitens der zum Resonator parallelgeschalteten Impedanz und durch den Strahlstrom muß für diesen Fall das Cavity an den Hohlleiter mit der Impedanz  $Z_{L1}$  angepaßt sein, d.h. es müssen die beiden Bedingungen gelten:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\vec{U}_{S1}}{\vec{I}_{S1}} \right\} = Z_{L1} \quad (12)$$

$Z_{L1}$  - Leitungsimpedanz



$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\vec{U}_{S1}}{\vec{I}_{S1}} \right\} = 0 \quad (13)$$

Mit diesen Gleichungen und Gl.(10) erhält man eine Bedingung für den Grad der Ankopplung und eine für die Resonatorfrequenz  $\omega_C$  bei vorgegebener Senderfrequenz  $\omega_s$ . Mit  $\Omega \approx \frac{2\Delta f}{f_s} Q_0$  und Gl.(3)

$$\frac{R}{Z_{L1}} n_1^2 = 1 + \frac{R|I_B|}{|U_C|} \sin\phi_s + Y_r \cdot R \cdot n_2^2 \quad (14)$$

$$\frac{2\Delta f}{f_s} Q_0 = \frac{R|I_B|}{|U_C|} \cos\phi_s - Y_{im} R \cdot n_2^2 \quad (15)$$

Hier wurde  $\psi_c$  als Bezugsphase gewählt und gleich Null gesetzt.

Ferner ist der Real- und Imaginärteil des Belastungsleitwertes  $\vec{Y}_e$  aus Gl.(3a) in abgekürzter Form geschrieben worden

$$Y_r = \operatorname{Re} \{ Y_e \} \quad (16)$$

$$Y_{im} = \operatorname{Im} \{ Y_e \} ,$$

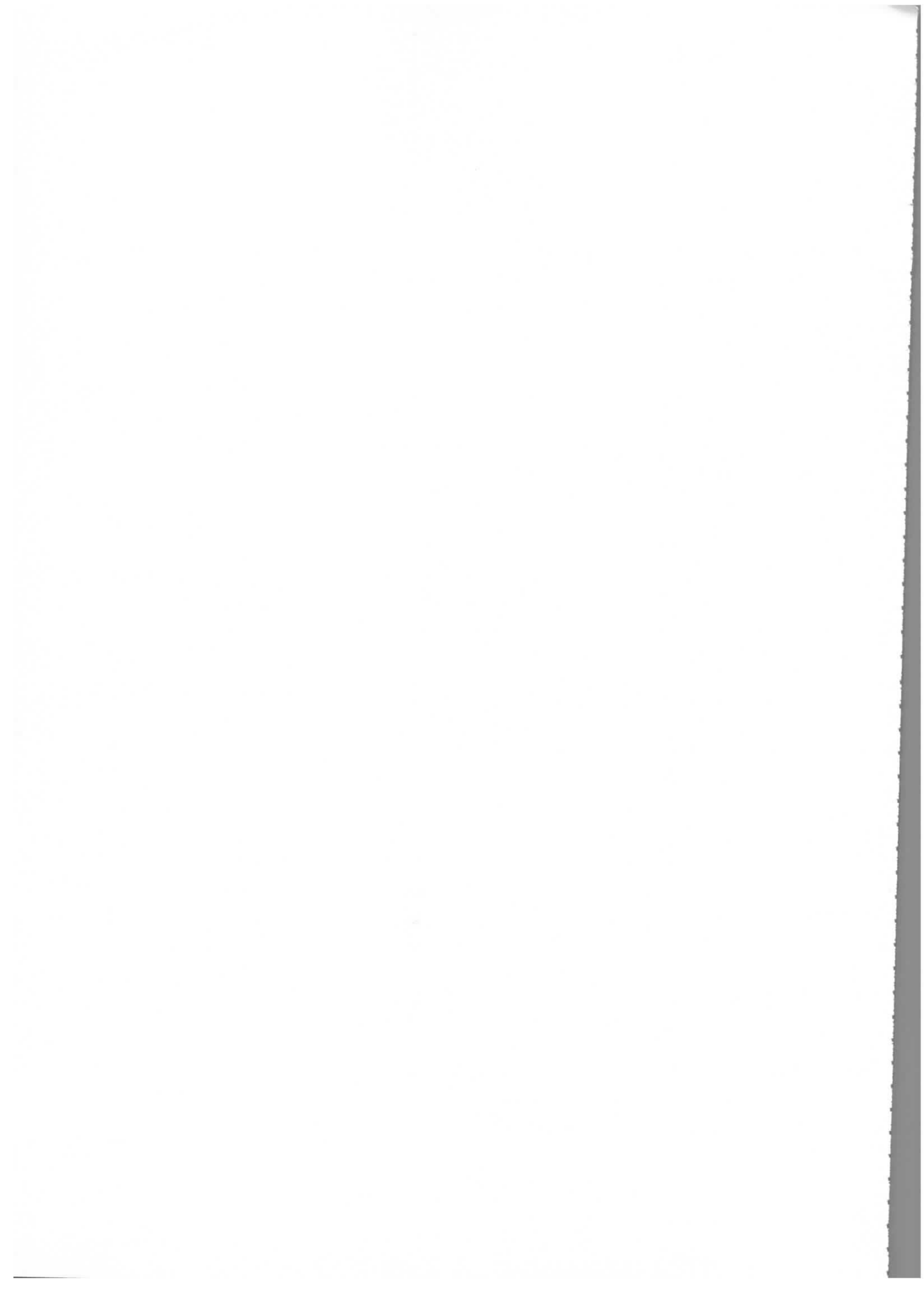
und die Verstimmlung des Resonators.

$$\Delta f = f_s - f_c \quad (17)$$

Die Bedingungsgleichungen Gl.(14) und Gl.(15) lassen sich für die im Abschnitt 2 diskutierten Sonderfälle je nach Abschluß des Belastungskabels noch modifizieren. So können sie im Fall eines kurzgeschlossenen Wellenleiters geschrieben werden:

$$d_1 = 1 + \frac{R|\vec{I}_B|}{|\vec{U}_C|} \sin\phi_s \quad (18)$$

$$\frac{\Delta f}{f_s} = \frac{R|\vec{I}_B|}{2Q_0|\vec{U}_C|} \cos\phi_s + \frac{d_2}{2Q_0} \operatorname{ctg}\beta l \quad (19)$$



Hier sind  $d_1 = n_1^2 \frac{R}{Z_{L1}}$  und  $d_2 = n_2^2 \frac{R}{Z_{L2}}$  entsprechend die Koppelfaktoren für die Einkoppel- und Auskoppelschleife.

Da hier der Belastungswiderstand  $\vec{Z}_e$  nur einen Imaginärteil besitzt, ist auch der Koppelfaktor  $d_1$  nicht wie in Gl.(14) von der Länge  $\ell$  des Wellenleiters abhängig. Andererseits beeinflusst die Kabellänge und der Koppelgrad  $n_2^2 \frac{R}{Z_{L2}}$  die Resonanzfrequenz des Cavitys.

Praktische Anwendung kann diese Beschaltung gewinnen, wenn die Abstimmeelemente im Cavity nicht ausreichen, um eine geforderte Verstimmung als Funktion des Strahlstromes  $\vec{I}_B$  nach

$$\frac{\Delta f}{f_s} = \frac{R |\vec{I}_B|}{2Q_0 |\vec{U}_C|} \cos \phi_s \quad (20)$$

zu gewährleisten. Nach Gl.(19) kann über eine Längenänderung des Kabels bei konstanter Kopplung  $d_2$  der Verstimmungsbereich des Resonators erweitert werden.

Ist der Wellenleiter, der das Cavity belastet, mit einem reellen Widerstand nach Gl.(3c) abgeschlossen, dann folgt für diesen Spezialfall aus den Gl.(14) und Gl.(15)

$$d_1 = 1 + \frac{R |\vec{I}_B|}{|\vec{U}_C|} \sin \phi_s + \frac{m \cdot d_2 (1 + \tan^2 \beta \ell)}{m^2 + \tan^2 \beta \ell} \quad (21)$$

$$\frac{2\Delta f}{f_s} Q_0 = \frac{R |\vec{I}_B|}{|\vec{U}_C|} \cos \phi_s - d_2 \frac{\tan \beta \ell (m^2 - 1)}{m^2 + \tan^2 \beta \ell} \quad (22)$$

mit  $m = \frac{R_a}{Z_{L2}}$

Bei gegebener Verstimmung des Resonators ist durch Gl.(22), unter der Voraussetzung eines angepaßten Cavity's an den Sender, der maximal speicherbare Strahlstrom  $I_B$  gegeben.

Ist  $\beta \ell = \frac{2\pi}{\lambda} \ell = 0, \frac{\pi}{2}, \dots$ , dann folgt  $\tan \beta \ell = 0$ , und der Koppelfaktor  $d_1$  ist abhängig von  $|I_B|$  und dem Fehlanpassungsgrad  $m = \frac{R_a}{Z_{L2}}$

Es ist:  $d_1 = 1 + \frac{R |\vec{I}_B|}{|\vec{U}_C|} \sin \phi_s + \frac{d_2}{m} \quad (23)$





Da in diesem Fall der Einfluß des Wellenleiters auf die Cavityverstimmlung gleich Null ist, kann in Abhängigkeit vom gespeicherten Strom  $\vec{I}_B$  der optimale Koppelfaktor  $d_1$  durch den Belastungswiderstand  $R_a$  verändert werden, ohne daß dabei gleichzeitig eine Verstimmlung vorgenommen wird. Bei einem anderen Sonderfall, bei dem  $m = 1$  d.h.  $R_a = Z_{L2}$  Anpassung am Leitungsende herrscht, gilt:

$$d_1 - d_2 = 1 + \frac{R|\vec{I}_B|}{|\vec{U}_C|} \sin\phi_s \quad (24)$$

Auch hier kann der optimale Koppelfaktor  $d_1$  als Funktion von  $|\vec{I}_B|$  durch Änderung von  $d_2$  eingestellt werden, ohne daß die Verstimmlung des Cavity's beeinflußt wird.

Vergleicht man die beiden Verstimmmethoden, dann erkennt man, daß die Änderung von  $d_2$  sicherlich größere technologische Probleme mit sich bringt als eine Änderung von  $R_a$ .

#### 4. Berechnung der Cavityspannung und des Reflexionsfaktors

Kennzeichnet man die vom Sender zum Cavity laufende Spannungswelle mit  $\vec{U}_V$  und die vom Cavity reflektierte Welle  $\vec{U}_R$ , dann gelten an jedem Punkt der Leitung die Beziehungen:

$$\vec{U}_{S1} = \vec{U}_V + \vec{U}_R \quad (25)$$

$$\vec{I}_{S1} = \frac{1}{Z_{L1}} (\vec{U}_V - \vec{U}_R) \quad (26)$$

Im Fall einer Fehlanpassung am Cavity ist  $\vec{U}_R$  ungleich Null und ein Teil der Leistung wird am Resonator reflektiert. Der Reflexionsfaktor

$$\vec{r} = \frac{\vec{U}_R}{\vec{U}_V} \quad (27)$$

läßt sich aus dem Gleichungssystem Gl.(4), Gl.(25), Gl.(26) und den Beziehungen

$$\vec{U}_{S1} = n_1 \cdot \vec{U}_C \quad (28)$$



$$\vec{U}_{S2} = n_2 \cdot \vec{U}_C \quad (29)$$

berechnen und ist für den Fall einer reellen Belastung in der Auskoppelschleife  $m = \frac{R_a}{Z_{L2}}$  gegeben durch

$$\vec{r} = \frac{d_1 - 1 - j\Omega - d_2 \frac{(1+jm \tan \beta \ell)}{m+j \tan \beta \ell} + \vec{I}_B \cdot \frac{n_1 R}{\vec{U}_V}}{1 + d_1 + j\Omega + d_2 \frac{(1+jm \tan \beta \ell)}{m+j \tan \beta \ell}} \quad (30)$$

Die oben diskutierten Senderfälle, Anpassung  $m = 1$ , Kurzschluß  $m = 0$ , bzw.  $\beta \ell = n \cdot \frac{\pi}{2}$  resultieren direkt aus der Gl.(30).

Die Spannung am Resonator kann aus den Gl.(25) und Gl.(28) gefunden werden.

$$\vec{U}_C = \frac{\vec{U}_V}{n_1} (1 + \vec{r}) \quad (31)$$

oder explizit:

$$\vec{U}_C = \frac{2d_1 \frac{\vec{U}_V}{n_1} + \vec{I}_B R}{1 + d_1 + j\Omega + d_2 \frac{(1+jm \tan \beta \ell)}{m+j \tan \beta \ell}} \quad (32)$$

Der letzte Term im Nenner dieser Gleichung rührt von der parallelgeschalteten Impedanz her und besitzt einen Real- und Imaginärteil. Dementsprechend wird durch den reell abgeschlossenen Leiter  $m = \frac{R_a}{Z_{L2}}$  sowohl die Verstimmung als auch die Shuntimpedanz des Cavity's beeinflusst.

Für die weitere Diskussion ersetzen wir den Senderstrom  $\frac{2d_1 |U_V| e^{j\phi_g}}{R n_1}$  durch den Ausdruck  $\frac{\sqrt{8d_1 R P_o} e^{j\phi_g}}{R}$  durch den

$$\quad (32a)$$

Mit  $\phi_g$  - Phase der vorlaufenden Senderspannung

$P_o$  - Senderleistung



Die entsprechenden Sonderfälle erhält man durch Einsetzen der Größen  $m$ , bzw.  $\beta\ell$  in Gl.(32). Für die Fälle Anpassung ( $m = 1$ ) und  $\beta\ell = n \frac{\pi}{2}$  ( $\ell = n \frac{\lambda}{4}$ ) wird nur die Shuntimpedanz des Resonators beeinflusst und nicht die Frequenz; bei Kurzschluß ( $m = 0$ ) wird nur die Verstimmung des Resonators verändert.

Entsprechend diesen Sonderfällen kann die Güte des Cavity's aus Gl.(32) abgeleitet werden ( $Q_0$  - Leerlaufgüte des Resonators):

$$\text{Kurzschluß } m = 0 \quad Q = \frac{Q_0}{1+d_1} \quad (33)$$

$$\begin{array}{l} \beta\ell = n\frac{\pi}{2} \\ \text{Anpassung } m = 1 \end{array} \quad Q = \frac{Q_0}{1+d_1+d_2} \quad (34)$$

$$\text{Allgemein} \quad Q = \frac{Q_0}{1+d_1+d_2 \frac{m+m\tan^2\beta\ell}{m^2+\tan^2\beta\ell}} \quad (35)$$

### 5. Leistungsbeziehungen

Im folgenden soll für den allgemeinen Fall der Resonatorbelastung  $m = \frac{R_a}{Z_{L2}}$  der Leistungsverbrauch im Ersatzschaltbild näher diskutiert werden.

Es gilt allgemein für die abgegebene Senderleistung:

$$P_s = \frac{1}{2} R_e \{ \vec{U}_{S1} \vec{I}_{S1} \} = \frac{1}{2} R_e \{ \vec{U}_C \cdot n_1 \vec{I}_{S1} \} \quad (36)$$

Mit dem Gleichungssystem (4) kann Gl.(36) geschrieben werden:

$$P_s = \frac{1}{2} R_e \left\{ \vec{U}_C \left( \frac{\vec{U}_C}{j\omega_{L2}} + \frac{\vec{U}_C}{j\omega_{L3}} + \frac{\vec{U}_C}{R} + j\omega C \vec{U}_C - \vec{I}_B + n_2 \vec{I}_{S2} \right) \right\} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{2} \frac{|\vec{U}_C|^2}{R} + \frac{1}{2} R_e \{ -\vec{U}_C \vec{I}_B \} + \frac{1}{2} R_e \{ \vec{U}_C n_2 \vec{I}_{S2} \} \\ &= P_C + P_B + P_Z \end{aligned} \quad (38)$$



Hier ist  $P_C$  - Cavityverlustleistung  
 $P_B$  - Strahlverlustleistung  
 $P_Z$  - reelle Leistung auf der Belastungsleitung

Mit Gl.(29) und Gl.(3d), Gl.(3e) gilt für  $P_Z$  die Beziehung

$$P_Z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{U}_C^* \vec{U}_C n_2^2 \cdot \vec{Y} \} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{U}_C|^2}{R} \cdot d_2 \frac{m(1+\tan^2 \beta l)}{m^2 + \tan^2 \beta l} \quad (39)$$

Für den Fall der Anpassung auf der Belastungsleitung, d.h.  $R_a = Z_{L2}$  ergibt sich eine einfache Beziehung für die Senderleistung

$$P_s = \frac{1}{2} \frac{|\vec{U}_C|^2}{R} (1+d_2) + |\vec{U}_C| |\vec{I}_B| \sin \phi_s \quad (40)$$

Setzt man den Strahlstrom  $\vec{I}_B = 0$  und substituiert  $\vec{U}_C$  aus Gl.(32) und Gl.(32a), dann folgt die vereinfachte Beziehung

$$P_s = \frac{4d_1(1+d_2)}{(1+d_1+d_2)^2 + \Omega^2} P_o \quad (41)$$

Da für  $m = 1$ , aus Gl.(38) und Gl.(39), gilt

$$P_Z = d_2 P_C \quad (42)$$

ist die im Abschlußwiderstand  $R_a$  verbrauchte Leistung  $P_Z$

$$P_Z = \frac{4d_1 d_2 P_o}{(1+d_1+d_2)^2 + \Omega^2} \quad (43)$$

Ist  $I_B \neq 0$ , dann muß nach Gl.(32) und Gl.(32a), die durch das Beamloading modifizierte Cavityspannung  $U_C$  berücksichtigt werden. Für den Sonderfall  $m = 0$ , d.h.  $R_a = 0$ , in dem keine reelle Leistung verbraucht wird, ergibt sich die ausgekoppelte Blindleistung zu

$$P_b = \frac{1}{2} U_{S2}^2 \cdot \vec{Y} = \frac{1}{2} |U_C|^2 n_2^2 \frac{1}{Z_L} \operatorname{ctg} \beta l = \frac{1}{2} \frac{|U_C|^2}{R} d_2 \operatorname{ctg} \beta l \quad (44)$$





Hier ist  $\vec{Y}$  der Eingangsleitwert der kurzgeschlossenen Leitung.

Anschließend soll bemerkt werden, daß bei einer Realisierung der Auskoppelschleife der Blindstrom nicht zu vernachlässigen ist und bei der Konstruktion mit berücksichtigt werden muß. Der Blindstrom über die Koppelschleife ist aus

$$I_{S2} = n_2 |U_C| \cdot Y \quad \text{und Gl. (3e) zu}$$

berechnen

$$\text{Im}\{I_{S2}\} = n_2 |U_C| Y_{\text{im}}$$

#### 6. Dynamische Wechselwirkung zwischen dem Strahl und einer belasteten Beschleunigungsstrecke

---

Um quantitative Aussagen über das dynamische Verhalten zwischen Strahl und einem Cavity zu treffen, wird zuerst die Differentialgleichung für die Spannung am Resonator gesucht.

Aus dem Ersatzschaltbild und entsprechend dem Gleichungssystem Gl. (4) können die Beziehungen gefunden werden.

$$U_{S1} = L_1 \frac{di_{S1}}{dt} + M_1 \frac{di_2}{dt}$$

$$U_C = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_1 \frac{di_{S1}}{dt}$$

$$\frac{U_C}{R} + C \frac{dU_C}{dt} = i_B - i_2 - i_3$$

$$U_{S2} = -L_4 \frac{di_{S2}}{dt} + M_2 \frac{di_3}{dt}$$

$$U_C = L_3 \frac{di_3}{dt} - M_2 \frac{di_{S2}}{dt}$$

$$\frac{U_{S2}}{i_{S2}} = Z_e$$

(45)



Für die nachstehenden Betrachtungen soll angenommen werden, daß der Wellenleiter  $Z_{L2}$  mit einem reellen Widerstand  $R_a$  abgeschlossen ist, d.h.  $m = \frac{R_a}{Z_{L2}}$ .

Durch Umformungen der Gl.(45) und unter Berücksichtigung der Gl.(25) bis Gl.(29) erhält man die Differentialgleichung:

$$\ddot{U}_C + 2\alpha \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \frac{1}{C} \frac{di_B}{dt} + \frac{2n_1}{CZ_{L1}} \frac{dU_V}{dt} \quad (46)$$

Mit

$$2\alpha = \frac{1}{CR} (1+d_1+d_2 \frac{1+jm \tan \beta l}{m+j \tan \beta l})$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C} (\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_2})$$

Man erkennt, daß die Gl.(46) bis auf die Dämpfungskonstante  $\alpha$  und die Eigenfrequenz  $\omega_0$  mit der Differentialgleichung übereinstimmt, die schon früher ohne der parallelgeschalteten Impedanz zum Cavity gefunden<sup>1)</sup> wurde. Der Realteil der Konstanten  $\alpha$  ist ein Maß für das Dämpfungsverhalten des Resonators; der Imaginärteil von  $\alpha$  bewirkt lediglich eine Resonanzverschiebung.

Die Differentialgleichung kann mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst<sup>4)</sup> werden. Interessiert man sich nur für die Umhüllende der Hochfrequenzspannung, dann findet man unter der Voraussetzung  $\omega_C \gg \alpha'$  und mit

$$U_C = \vec{U}_C e^{j\omega t}$$

$$i_B = \vec{I}_B e^{j\omega t}$$

eine vereinfachte Differentialgleichung für  $\vec{U}_C$

$$\frac{d\vec{U}_C}{dt} + \alpha' (1+d_1+d_2 \frac{1+jm \tan \beta l}{m+j \tan \beta l}) \vec{U}_C = \alpha' R (\vec{I}_g - \vec{I}_B) \quad (47)$$



Hier ist

$$\Omega = Q \cdot \left( \frac{f_s}{f_o} - \frac{f_c}{f_s} \right)$$

$$\vec{I}_g = \frac{\sqrt{8d_1 R P_o}}{R} e^{j\psi_g} = \frac{2d_1 |\vec{U}_V|}{n \cdot R} e^{j\psi_g}$$

$$\vec{I}_B = |\vec{I}_B| e^{-j(90^\circ - \phi_s)}$$

$$\alpha' = \frac{\omega_c}{2Q}$$

$Q_o$  - Leerlaufgüte des Resonators

$f_s$  - Senderfrequenz

$P_o$  - Senderleistung

$\phi_s$  - Sollphase

$\psi_g$  - Phase der Senderspannung

$\psi_c$  - Phase der Cavityspannung

Die gekoppelte nichtlineare Gl.(47) kann man in zwei Gleichungen, eine für die Amplitude  $|U_c|$  und die zweite für die Phase  $\psi_c$  zerlegen. Nimmt man noch die beiden Synchrotronschwingungsgleichungen für die Phase und die Energie der Bunchschwerpunkte hinzu, dann erhält man ein Gleichungssystem, das die Wechselwirkung zwischen Resonator und Strahl beschreibt.

$$\frac{dU_c}{dt} = \alpha' \sqrt{8d_1 R P_o} \cos(\psi_g - \psi_c) - \alpha' R I_B \cdot \sin(\phi_s - \phi_c) - \alpha' (1 + d_1 + d_2') U_c$$

$$\frac{d\psi_c}{dt} = \alpha' \frac{\sqrt{8d_1 R P_o}}{U_c} \sin(\phi_g - \psi_c) + \frac{\alpha' R I_B}{U_c} \cos(\phi_s - \psi_c) - \alpha' (d_2'' + \Omega)$$

(48)

$$\frac{d\phi}{dt} = -2\pi \cdot q \alpha_m f_o \cdot \frac{\epsilon}{E} - \frac{d\psi_c}{dt}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = f_o e U_c \sin(\phi_s - \psi_c) - f_o e U_{co} \sin\phi_{so}$$

Hier ist

$U_{co}, \psi_{so}$  - Cavityspannung bzw. Sollphase im stationären Zustand

$\phi$  =  $\phi_s - \psi_c$

$f_o$  - Umlauffrequenz

$g$  =  $\frac{\omega_{HF}}{\omega_o}$  Harmonischenzahl

$\alpha_m$  - Momentum-Compaction-Faktor

$\epsilon$  - Energieabweichung von der Sollenergie



e - Elementarladung

E - Energie des Sollteilchens

Ferner sind die Abkürzungen gewählt worden:

$$d_2 \frac{1+jm \tan \beta \ell}{m+j \tan \beta \ell} = d_2' + j d_2''$$

Für die weiter oben diskutierten Sonderfälle ist zu berücksichtigen

m = 1 Anpassung

$$d_2' = d_2, d_2'' = 0$$

m = 0 Kurzschluß

$$d_2' = 0, d_2'' = -d_2 \operatorname{tg} \beta \ell$$

$\beta \ell = n \frac{\pi}{2}$  (n = 0, 1, 2 ...)

$$d_2' = \frac{d_2}{m}, d_2'' = 0$$

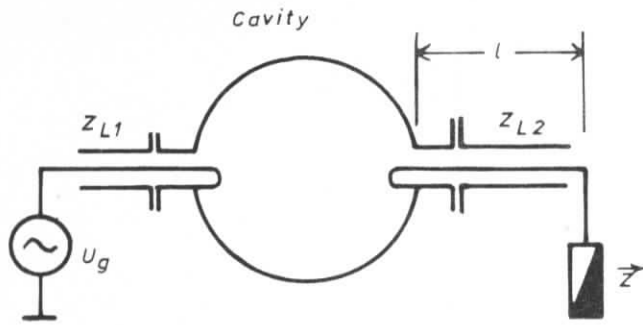




## Literaturverzeichnis

- 1) N.Lehnant, Wechselwirkung zwischen einem Beschleunigungsresonator und einem Elektronenstrahl bei kleinen Phasenwinkeln; Int.Bericht DESY H3/71-1.
- 2) H.Gerke, A.Piwinski, Vergleich zwischen Travelling-Wave- und Resonanzstruktur für das Hochfrequenzsystem des Speicherringes; Int.Bericht DESY H-68/17
- 3) K.W.Robinson, CEAL-1010, 1964 .
- 4) N.Lehnant, Beschreibung des Systems Cavity-Strahl durch ein Differentialgleichungssystem; Technische Notiz H3-22.

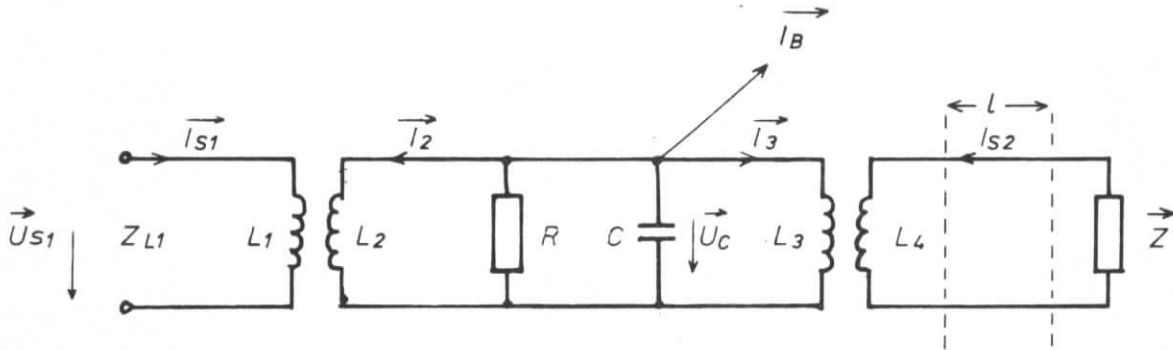




- $Z$  = Abschlußwiderstand
- $Z_{L2}$  = Leitungswellenwiderstand  
der Auskoppelseite
- $Z_{L1}$  = Leitungswellenwiderstand  
der Einkoppelseite

Cavity mit parallelgeschalteter Impedanz

Abb. 1



Ersatzschaltbild der Anordnung

Abb. 2

$$M_1^2 = L_3 L_4 \quad M_2^2 = L_3 L_4$$

$$n_1 = L_1 / L_2 \quad n_2 = \frac{L_4}{L_3}$$

