Interner Bericht
DESY H5-70/7
Dezember 1970

Strahlaufweitung und Erhöhung der Luminositätsgrenze des Amman-Ritson-Effektes durch Kopplung und Entdämpfung der Betatronschwingungen

von

G. Ripken

Abstract:

In the following we describe a method for blowing up the beam cross section in a storage ring by coupling the betatron oscillations and damping the synchrotron oscillations.

It is shown that in the case of resonance

$$Q_z - Q_x \approx \text{ integer number}$$

the vertical beam expansion is increasing and the horizontal expansion decreasing if a coupling of the betatron oscillations is introduced.

In connection with coupling a further enlargement of the beam cross section in the x-direction as well as in the z-direction occurs by damping the synchrotron oscillations.

A rotation of the beam at the crossing points generated by coupling, which could give rise to an additional coupling, does not appear if

1.) $Q_z - Q_x$ is an odd number;
2.) the rotated quadrupole which produces the coupling is just in the middle between the interaction sections.

The expansion of the beam cross section leads to

1.) a balancing of the wrong vertical and the relatively small horizontal space-charge forces and
2.) a weakening of the space-charge forces.

In this way the limit of luminositiy due to the space-charge effect is raised up.

Equations to determine the beam cross section and the Q-shifting induced by the beam-beam interaction are derived and evaluated numerically for the case of the DESY Storage Ring.

Inhalt:

I. Einführung und Problemstellung

In der vorliegenden Arbeit soll im Hinblick auf eine Anhebung der zum Amman-Ritson-Effekt gehörigen Luminositätsgrenze ein Verfahren angegeben werden, durch Kopplung der Betatronschwingungen, verbunden mit einer Verschiebung der Dämpfungskonstanten für Betatron- und Synchrotronschwingungen, den Strahl in den Wechselwirkungszonen wesentlich aufzuweiten.

Zunächst betrachten wir die Kopplung allein, und zwar wird untersucht, wie mit Hilfe eines gedrehten Quadrupols, der eine Kopplung der Betatronschwingung hervorruft, der Strahlquerschnitt verändert werden kann derart, daß der Strahl sich in vertikaler Richtung ausdehnt auf Kosten seiner im Vergleich zur Strahlhöhe großen Strahlbreite.

Eine solche Deformation des Strahlquerschnitts hat zur Folge, daß in den Wechselwirkungszonen ein Ausgleich zwischen den starken vertikalen und relativ schwachen horizontalen Raumladungskräften geschaffen wird.

Ein Maß für die Stärke der Raumladungskräfte ist die durch den Amman-Ritson-Effekt verursachte Q-Verschiebung, die erfahrungsgemäß in x- und z-Richtung kleiner als 0,025 ausfallen muß, wenn der Strahl stabil bleiben soll. Eine Strahlaufweitung in z-Richtung durch Kopplung wird sich somit darin äußern, daß bei konstant gehaltener Stromstärke I des Strahls eine Angleichung der Q-Verschiebung ΔQ_I und ΔQ_{II} für beide Schwingungsformen stattfindet in der Weise, daß die kleinere Verschiebung anwächst, die stärkere dagegen abnimmt, und infolgedessen die durch den Amman-Ritson-Effekt bedingte Luminositätsgrenze insgesamt heraufgesetzt wird. Die günstigste Verteilung der Raumladungskräfte, bei der beide Schwingungsformen durch die Strahl-Strahl-Wechselwirkung im richtigen Verhältnis zur Fokussierungskraft beansprucht werden, ist genau dann erreicht, wenn ΔQ_I und ΔQ_{II} gleich große Werte annehmen.

Unsere Aufgabe muß demnach sein, zunächst die beim Einschalten der Kopplung neu sich einstellende Q-Verschiebung und die damit verbundene Verschiebung der Luminositätsgrenze zu ermitteln sowie allgemeine Bedingungen für die Kopplungsstärke und die Maschinenparameter anzugeben, die erfüllt sein müssen, wenn die Luminosität merklich gesteigert werden soll.

Im Anschluß an die Untersuchung der Strahlaufweitung durch Kopplung soll dann noch anhand der allgemeinen Bestimmungsgleichungen für den Strahlquerschnitt gezeigt werden, daß man eine weitere Vergrößerung der Strahlausdehnung erzielen kann, und zwar bei Einschaltung der Kopplung in x- und z-Richtung zugleich, indem man die Betatronschwingungen durch Einbau eines FODO-Kanals entdämpft unter gleichzeitiger Dämpfung der Synchrotronschwingung [(1)]. Diese zusätzliche Aufweitung des Strahls aufgrund einer Verschiebung der Dämpfungskonstanten ist lediglich durch die Größe der Vakuumkammer begrenzt und bewirkt, daß die Raumladungskräfte nochmals abgeschwächt werden, diesmal sowohl in x- als auch in z-Richtung, so daß eine weitere Steigerung der Luminositätsgrenze des Raumladungseffektes eintritt.

Von Bedeutung ist die Strahlaufweitung für den bei DESY geplanten Storage Ring insbesondere im Energiebereich

$$E \lesssim 2 \text{ GeV},$$

wo die Lebensdauer des Strahls im wesentlichen gerade durch den Amman-Ritson-Effekt bestimmt wird.

II. Die allgemeinen Bestimmungsgleichungen des Strahlquerschnittes und des Amman-Ritson-Effektes für eine gekoppelte Maschine

Zur Berechnung der Strahlaufweitung und der Verschiebung der Luminositätsgrenze des Raumladungseffektes bei Kopplung gehen wir aus von den allgemeinen Bestimmungsgleichungen des Strahlquerschnitts und des Amman-Ritson-Effektes für eine "gekoppelte" Maschine [(2),(3),(4)].

Bezeichnet man die Eigenvektoren der Umlaufsmatrix $\mathfrak{M}$ (s + C, s) (C = Bahnumfang) mit

$$
\begin{aligned}
w_1 &= w_I , \\
w_2 &= w_I^* , \\
w_3 &= w_{II} , \\
w_4 &= w_{II}^* ,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

wobei die Normierungsbedingungen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2i} \quad w_I^+ \, \gamma \, w_I &= 1 \quad ; \\
\frac{1}{2i} \quad w_{II}^+ \, \gamma \, w_{II} &= 1 \quad ;
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

erfüllt sein sollen, so gelten folgende Gleichungen:

<u>Dämpfungskonstante für die Synchrotronschwingung:</u>

$$
\alpha_s = \frac{\bar{W}}{E \cdot \langle \kappa^2 \rangle} \left\{ \langle \kappa^2 \rangle + \frac{1}{2} \cdot \langle \kappa^2 (C_x D_x + C_z D_z) \rangle \right\}
\tag{2.3}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
C_x &= K_x \, (1 - 2n_x) \; ; \\
C_z &= K_z \, (1 - 2n_z) \; ;
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

(2.5) $$K^2 = K_x^2 + K_z^2 ;$$

(2.6) $$\bar{W} = \frac{2}{3} r_e c \gamma^3 E \cdot \langle K^2 \rangle ;$$

n_i = Feldindex ; (i = x, z)

K_i = Krümmung;

D_i = Dispersion;

E = Teilchenenergie

$\bar{W}$ = mittlerer Energieverlust für ein Teilchen

Dämpfungskonstanten für die Betatronschwingung:

(2.7) $$\alpha_n = \frac{\bar{W}}{2E \cdot \langle K^2 \rangle} \cdot \Big\langle K^2 \Big(1 + \mathrm{Im} \Big\{ (C_x v_{n1}^* + C_z v_{n3}^*) \cdot (D_x v_{n2} - D_x' v_{n1} + D_z v_{n4} - D_z' v_{n3}) \Big\} \Big\rangle ;$$

$$(n = \mathrm{I}, \mathrm{II}) ;$$

Emittanzen:

(2.8) $$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{\gamma_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}} ; \quad \varepsilon_{\mathrm{II}} = \frac{\gamma_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{II}}}$$

mit (n = I, II)

(2.9) $$\gamma_n = \frac{\bar{Q}_s}{4E^2 \cdot \langle |K^3| \rangle} \cdot \Big\langle |K|^3 \, \big| D_x v_{n2} - D_x' v_{n1} + D_z v_{n4} - D_z' v_{n3} \big|^2 \Big\rangle ;$$

(2.10) $$\bar{Q}_s = \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e c^2 \hbar \gamma^6 E \cdot \langle |K^3| \rangle .$$

Mittlere Strahlausdehnung in x- und z-Richtung:

(2.11) $$\sigma_x^2 = \varepsilon_{\mathrm{I}} \cdot |v_{\mathrm{I}1}(s)|^2 + \varepsilon_{\mathrm{II}} \cdot |v_{\mathrm{II}1}(s)|^2 ;$$
$$\sigma_z^2 = \varepsilon_{\mathrm{I}} \cdot |v_{\mathrm{I}3}(s)|^2 + \varepsilon_{\mathrm{II}} \cdot |v_{\mathrm{II}3}(s)|^2 .$$

Halbachsen des elliptischen Strahlquerschnitts:

$$\sigma_{1,2}^{2} = \frac{1}{2}\left\{ [\sigma_x^2 + \sigma_z^2] \pm [\sigma_x^2 - \sigma_z^2]\cdot\sqrt{1 + \frac{4\,\sigma_{xz}^2}{[\sigma_x^2 - \sigma_z^2]^2}} \right\} \tag{2.12}$$

mit

$$\sigma_{xz} = \varepsilon_{I}\cdot \mathrm{Re}\{v_{Ix}\, v_{Iz}^{*}\} + \varepsilon_{II}\cdot \mathrm{Re}\{v_{IIx}\, v_{IIz}^{*}\}; \tag{2.13}$$

Drehwinkel des Strahls:

$$\mathrm{tg}\, 2\theta = \frac{2\,\sigma_{xz}}{\sigma_x^2 - \sigma_z^2}; \qquad \sin 2\theta = \frac{2\,\sigma_{xz}}{\sqrt{[\sigma_x^2 - \sigma_z^2]^2 + 4\,\sigma_{xz}^2}}; \tag{2.14}$$

Q-Verschiebung durch die Raumladungskräfte in der Wechselwirkungszone:

$$\begin{aligned} \Delta Q_n = \frac{1}{4\pi}\Big\{ & [h_1 \cos^2\theta + h_2 \sin^2\theta]\cdot |v_{n1}|^2 \\ & + [h_1 \sin^2\theta + h_2 \cos^2\theta]\cdot |v_{n3}|^2 \\ & + \mathrm{Re}\{v_{n1}\, v_{n3}^{*}\}\cdot (h_1 - h_2)\sin 2\theta \Big\}; \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$(n = I, II)$$

mit

$$h_1 \cdot \sigma_1 = h_2\, \sigma_2 = \frac{2\, r_e N}{q\,\gamma\,(\sigma_1 + \sigma_2)}, \tag{2.16}$$

N = Teilchenzahl;

q = Bunchzahl;

(der Kreuzungswinkel ist in (2.16) vernachlässigt worden).

Bedenken wir, daß für den DESY Storage Ring die Beziehungen

$$
(2.17)\qquad
\begin{aligned}
K_z \cdot D_x &= K_x \cdot D_z = 0 ; \\
K_z \cdot D_x' &= K_x \cdot D_z' = 0 ; \\
D_x \cdot D_z &= 0 ; \\
D_x \cdot D_z' &= D_z \cdot D_x' = 0 ; \\
D_x' \cdot D_z' &= 0 ; \\
K_x \cdot K_z &= 0
\end{aligned}
$$

bestehen, so vereinfachen sich die Gleichungen (2.3), (2.7) und (2.9) noch zu

$$(2.3a)\qquad \alpha_s = \frac{\bar{W}}{E \cdot \langle K^2 \rangle} \cdot \left\{ \langle K^2 \rangle + \frac{1}{2} A_x + \frac{1}{2} A_z \right\}$$

mit

$$
(2.3b)\qquad
\begin{aligned}
A_x &= \langle K_x^3 (1 - 2 n_x) D_x \rangle ; \\
A_z &= \langle K_z^3 (1 - 2 n_z) D_z \rangle ;
\end{aligned}
$$

$$(2.7a)\qquad \alpha_n = \frac{\bar{W}}{2 E \cdot \langle K^2 \rangle} \cdot \Big\{ \langle K^2 \rangle + \langle K_x^3 (1 - 2 n_x) D_x \operatorname{Im} \{ v_{n1}^* v_{n2} \} \rangle + \langle K_z^3 (1 - 2 n_z) D_z \cdot \operatorname{Im} \{ v_{n3}^* v_{n4} \} \rangle \Big\} ;$$

$$
\begin{aligned}
(2.9a)\qquad \gamma_n = {} & \frac{\bar{Q}_s}{4 E^2 \langle |K^3| \rangle} \times \\
& \times \Big\{ \langle |K_x|^3 \cdot (D_x^2 \cdot v_{n2} v_{n2}^* - 2 D_x D_x' \cdot \operatorname{Re} \{ v_{n2} v_{n1}^* \} + D_x'^2 \cdot v_{n1} v_{n1}^*) \rangle \\
& + \langle |K_z|^3 \cdot (D_z^2 \cdot v_{n4} v_{n4}^* - 2 D_z D_z' \cdot \operatorname{Re} \{ v_{n4} v_{n3}^* \} + D_z'^2 \cdot v_{n3} v_{n3}^*) \rangle \Big\} ,
\end{aligned}
$$

$(n = \mathrm{I}, \mathrm{II})$.

Zur Auswertung der Gln. (2.1) - (2.16) benötigen wir nunmehr die Eigenvektoren der Umlaufsmatrix $\mathfrak{M}$ (s + C, s) bei Kopplung der Betatronschwingungen durch einen gedrehten Quadrupol, die im nächsten Kapitel berechnet werden sollen.

III. Die Eigenvektoren der Umlaufsmatrix bei Kopplung der Betatronschwingungen durch einen gedrehten Quadrupol

Zur Ermittlung der Eigenvektoren denken wir uns den gedrehten Quadrupol durch eine dünne Linse mit der Übertragungsmatrix

(3.1) $$\mathfrak{M}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ersetzt und bezeichnen den Linsenmittelpunkt mit s = s_L. Dann lautet die gesamte Umlaufsmatrix

(3.2) $$\mathfrak{M}(s_L + C, s_L) = \mathfrak{M}_L \cdot \mathfrak{M}_o(s_L + C, s_L),$$

wobei $\mathfrak{M}_o(s_L + s, s_L)$ die Übertragungsmatrix der idealen Maschine (ohne Kopplung) bezeichnet, und für die Eigenvektoren

(3.3) $$\mathfrak{w}_k(s) = \mathfrak{M}_o(s, s_L)\, \mathfrak{w}_k(s_L)$$

erhält man die Bestimmungsgleichung (2)

(3.4) $$\left\{ \mathfrak{M}_L\, \mathfrak{M}_o(s_L + C, s_L) - e^{-i \cdot 2\pi Q_k} \cdot \underline{1} \right\} \mathfrak{w}_k(s_L) = 0 .$$

Setzt man noch

(3.5) $$\mathfrak{M}_o(s, s_L) = \left(\mathfrak{y}_1(s),\ \mathfrak{y}_2(s),\ \mathfrak{y}_3(s),\ \mathfrak{y}_4(s) \right)$$

mit

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{\sqrt{\beta_x(s_L)}} \cdot \left\{ \cos\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] + \alpha_x(s_L) \cdot \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_x(s_L)}\sqrt{\beta_x(s)}} \left\{ \left[\alpha_x(s_L) - \alpha_x(s)\right] \cdot \cos\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] - \right. \\ \left. - \left[1 + \alpha_x(s_L)\alpha_x(s)\right] \cdot \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \right\} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_x(s)}\sqrt{\beta_x(s_L)} \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \\ \frac{\sqrt{\beta_x(s_L)}}{\sqrt{\beta_x(s)}} \left\{ \cos\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] - \alpha_x(s) \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \right\} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\beta_z(s)}}{\sqrt{\beta_z(s_L)}} \left\{ \cos\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] + \alpha_z(s_L) \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_z(s_L)}\sqrt{\beta_z(s)}} \left\{ \left[\alpha_z(s_L) - \alpha_z(s)\right] \cdot \cos\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] - \right. \\ \left. - \left[1 + \alpha_z(s_L)\alpha_z(s)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] \right\} \end{pmatrix};$$

$$\eta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\beta_z(s_L)}\sqrt{\beta_z(s)} \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] \\ \frac{\sqrt{\beta_z(s_L)}}{\sqrt{\beta_z(s)}} \left\{ \cos\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] - \alpha_z(s) \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] \right. \end{pmatrix},$$

so folgt aus Gl. (3.1) - (3.5), wenn noch die Normierungsbedingungen (2.2) berücksichtigt werden (n = I, II): [5]

$$
w_n = N_n \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_x} \cdot G_{nx} \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_x}} \cdot H_{nx} \\ \sqrt{\beta_z} \cdot G_{nz} \cdot \frac{\Delta \cdot \sin \mu_z}{2 \left(\cos 2\pi Q_n - \cos \mu_z \right)} \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_z}} \cdot H_{nz} \cdot \frac{\Delta \cdot \sin \mu_z}{2 \left(\cos 2\pi Q_n - \cos \mu_z \right)} \end{pmatrix} \tag{3.6}
$$

mit (k = x, z)

$$
G_{nk} = \cos \left[\varphi_k - \varphi_k(s_L) \right] + \sin \left[\varphi_k - \varphi_k(s_L) \right] \cdot \frac{e^{-i \cdot 2\pi Q_n} - \cos \mu_k}{\sin \mu_k} \; ; \tag{3.7a}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{nk} = & - \left(\sin \left[\varphi_k - \varphi_k(s_L) \right] + \alpha_k \cdot \cos \left[\varphi_k - \varphi_k(s_L) \right] \right) + \\
& + \left(\cos \left[\varphi_k - \varphi_k(s_L) \right] - \alpha_k \sin \left[\varphi_k - \varphi_k(s_L) \right] \right) \cdot \frac{e^{-i \cdot 2\pi Q_n} - \cos \mu_k}{\sin \mu_k} \; ;
\end{aligned} \tag{3.7b}
$$

$$
\begin{aligned}
N_I &= \sqrt{ \frac{\sin \mu_x}{\sin 2\pi Q_I} \cdot \frac{\kappa + 1}{2\kappa} } \; ; \\
N_{II} &= \sqrt{ \frac{\sin \mu_x}{\sin 2\pi Q_{II}} \cdot \frac{\kappa - 1}{2\kappa} } \; ;
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos 2\pi Q_I &= \frac{1}{2} \left(\cos \mu_x + \cos \mu_z \right) + \frac{1}{2} \left(\cos \mu_x - \cos \mu_z \right) \kappa \; ; \\
\cos 2\pi Q_{II} &= \frac{1}{2} \left(\cos \mu_x + \cos \mu_z \right) - \frac{1}{2} \left(\cos \mu_x - \cos \mu_z \right) \cdot \kappa \; ;
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

$$\Delta = \delta \cdot \sqrt{\beta_x(s_L)}\,\sqrt{\beta_z(s_L)} \quad ; \tag{3.10}$$

$$\varkappa = +\sqrt{1 + \frac{\Delta^2 \sin\mu_x \sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2}} \; . \tag{3.11}$$

Dabei ist das Vorzeichen von Q_I und Q_{II} nach Gleichung (2.2) so festzulegen, daß

$$\frac{\sin 2\pi Q_I}{\sin\mu_x} > 0 \, , \tag{3.12}$$

$$\frac{\sin 2\pi Q_{II}}{\sin\mu_x} \; \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sin 2\pi Q_{II}}{\sin\mu_z} > 0$$

wird.

IV. Strahlaufweitung durch Kopplung

A) Allgemeiner Fall (Q_x, Q_z beliebig).

Mit Hilfe der Gln. (3.6) - (3.11) sind wir jetzt in der Lage, die Strahlaufweitung und die zugehörige Verschiebung der Luminositätsgrenze des Amman-Ritson-Effektes zu berechnen für den Fall, daß die Kopplung der Betatronschwingungen durch einen gedrehten Quadrupol hervorgerufen wird.

Zunächst erhält man durch Einsetzen von (3.6), (3.7) und (3.8) in (2.7a), (2.9a), (2.8) und (2.11)

für die Dämpfungskonstanten [5]

$$\alpha_I = \frac{\bar{W}}{2E \cdot \langle K^2 \rangle} \cdot \left\{ \langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} A_z \right\}; \tag{4.1a}$$

$$\alpha_{II} = \frac{\bar{W}}{2E \cdot \langle K^2 \rangle} \left\{ \langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} A_z \right\}; \tag{4.1b}$$

$$A_x = \langle K_x^3 (1 - 2n_x) D_x \rangle ;$$

$$A_z = \langle K_z^3 (1 - 2n_z) D_z \rangle ;$$

für die Größen γ_I und γ_{II}:

$$\begin{aligned}
\gamma_I = {} & \frac{\bar{Q}_s}{4E^2 \cdot \langle |K^3| \rangle} \times \\
& \times \left\{ \frac{\sin \mu_x}{\sin 2\pi Q_I} \cdot \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \left[\left\langle |K_x|^3 \cdot \left(D_x^2 \cdot \frac{1 + \alpha_x^2}{\beta_x} + 2 D_x D_x' \cdot \alpha_x + D_x'^2 \cdot \beta_x \right) \right\rangle \right.\right. \\
& \left. + (\varkappa - 1) \cdot \frac{(\cos \mu_x - \cos \mu_z)}{\sin \mu_x} \cdot \left\langle |K_x|^3 \cdot \left(D_x^2 \cdot \frac{R_x}{\beta_x} + 2 D_x D_x' \cdot S_x + D_x'^2 \beta_x T_x \right) \right\rangle \right] \\
& + \frac{\sin \mu_z}{\sin 2\pi Q_I} \cdot \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \left[\left\langle |K_z|^3 \cdot \left(D_z^2 \cdot \frac{1 + \alpha_z^2}{\beta_z} + 2 D_z D_z' \cdot \alpha_z + D_z'^2 \cdot \beta_z \right) \right\rangle \right. \\
& \left.\left. + (\varkappa + 1) \cdot \frac{(\cos \mu_x - \cos \mu_z)}{\sin \mu_z} \cdot \left\langle |K_z|^3 \cdot \left(D_z^2 \cdot \frac{R_z}{\beta_z} + 2 D_z D_z' \cdot S_z + D_z'^2 \cdot \beta_z T_z \right) \right\rangle \right] \right\};
\end{aligned} \tag{4.2a}$$

$$\gamma_{II} = \frac{\bar{Q}_s}{4E^2 \cdot \langle |K|^3 \rangle} \times$$

$$\times \Bigg\{ \frac{\sin\mu_x}{\sin 2\pi\nu_{II}} \; \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \Bigg[\Big\langle |K_x|^3 \Big(D_x^2 \cdot \frac{1+\alpha_x^2}{\beta_x} + 2 D_x D_x' \cdot \alpha_x + D_x'^2 \cdot \beta_x \Big) \Big\rangle$$

$$- (\kappa + 1) \cdot \frac{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)}{\sin\mu_x} \cdot \Big\langle |K_x|^3 \cdot \Big(D_x^2 \cdot \frac{R_x}{\beta_x} + 2 D_x D_x' \cdot S_x + D_x'^2 \cdot \beta_x T_x \Big) \Big\rangle \Bigg]$$

$$+ \frac{\sin\mu_z}{\sin 2\pi\nu_{II}} \cdot \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \Bigg[\Big\langle |K_z|^3 \cdot \Big(D_z^2 \cdot \frac{1+\alpha_z^2}{\beta_z} + 2 D_z D_z' \cdot \alpha_z + D_z'^2 \cdot \beta_z \Big) \Big\rangle \tag{4.2b}$$

$$- (\kappa - 1) \cdot \frac{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)}{\sin\mu_z} \cdot \Big\langle |K_z|^3 \cdot \Big(D_z^2 \cdot \frac{R_z}{\beta_z} + 2 D_z D_z' \cdot S_z + D_z'^2 \cdot \beta_z T_z \Big) \Big\rangle \Bigg] \Bigg\}$$

mit (k = x, z)

$$R_k = - \Big(\cos[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] - \alpha_k \sin[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \Big) \times$$

$$\times \Big\{ \Big(\sin[\varphi_k - \varphi_k(s)] + \alpha_k \cos[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \Big) +$$

$$+ \frac{\cos\mu_k}{\sin\mu_k} \cdot \Big(\cos[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] - \alpha_k \sin[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \Big) \Big\}; \tag{4.3}$$

$$S_k = \frac{1}{2} \sin[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \cdot \Big\{ \Big(\sin[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] + \alpha_k \cos[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \Big) +$$

$$+ 2 \frac{\cos\mu_k}{\sin\mu_k} \cdot \Big(\cos[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] - \alpha_k \sin[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \Big) \Big\}; \tag{4.4}$$

$$T_k = \sin[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \cdot \Big(\cos[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] - \frac{\cos\mu_k}{\sin\mu_k} \sin[\varphi_k - \varphi_k(s_L)] \Big); \tag{4.5}$$

<u>für die Emittanzen:</u>

(4.6a)

$$\varepsilon_I = \frac{\sin\mu_x}{\sin 2\pi Q_I}\cdot\frac{\kappa+1}{2\kappa}\cdot\left\{\varepsilon_x+\frac{(\cos\mu_x-\cos\mu_z)}{\sin\mu_x}(\kappa-1)\;\tilde{\varepsilon}_x\right\}\times\frac{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_x}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-\frac{\kappa+1}{2\kappa}A_x-\frac{\kappa-1}{2\kappa}A_z}$$

$$+\frac{\sin\mu_z}{\sin 2\pi Q_I}\cdot\frac{\kappa-1}{2\kappa}\cdot\left\{\varepsilon_z+\frac{(\cos\mu_x-\cos\mu_z)}{\sin\mu_z}(\kappa+1)\cdot\tilde{\varepsilon}_z\right\}\times\frac{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_z}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-\frac{\kappa+1}{2\kappa}A_x-\frac{\kappa-1}{2\kappa}A_z}\;;$$

(4.6b)

$$\varepsilon_{II} = \frac{\sin\mu_x}{\sin 2\pi Q_{II}}\cdot\frac{\kappa-1}{2\kappa}\cdot\left\{\varepsilon_x-\frac{(\cos\mu_x-\cos\mu_z)}{\sin\mu_x}(\kappa+1)\cdot\tilde{\varepsilon}_x\right\}\times\frac{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_x}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-\frac{\kappa-1}{2\kappa}A_x-\frac{\kappa+1}{2\kappa}A_z}$$

$$+\frac{\sin\mu_z}{\sin 2\pi Q_{II}}\cdot\frac{\kappa+1}{2\kappa}\cdot\left\{\varepsilon_z-\frac{(\cos\mu_x-\cos\mu_z)}{\sin\mu_z}(\kappa-1)\cdot\tilde{\varepsilon}_z\right\}\times\frac{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_z}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-\frac{\kappa-1}{2\kappa}A_x-\frac{\kappa+1}{2\kappa}A_z}$$

mit

(4.7)

$$\varepsilon_x = \frac{55\,\hbar c\gamma^3}{32\sqrt{3}\,E}\cdot\frac{\left\langle|\mathcal{K}_x|^3\cdot\left(D_x^2\cdot\frac{1+\alpha_x^2}{\beta_x}+2\,D_x D_x'\cdot\alpha_x+D_x'^2\cdot\beta_x\right)\right\rangle}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_x}\;;$$

$$\tilde{\varepsilon}_x = \frac{55\,\hbar c\gamma^3}{32\sqrt{3}\,E}\cdot\frac{\left\langle|\mathcal{K}_x|^3\cdot\left(D_x^2\cdot\frac{R_x}{\beta_x}+2\,D_x D_x'\cdot S_x+D_x'^2\cdot\beta_x T_x\right)\right\rangle}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_x}\;;$$

$$\varepsilon_z = \frac{55\,\hbar c\gamma^3}{32\sqrt{3}\,E}\cdot\frac{\left\langle|\mathcal{K}_z|^3\cdot\left(D_z^2\cdot\frac{1+\alpha_z^2}{\beta_z}+2\,D_z D_z'\cdot\alpha_z+D_z'^2\cdot\beta_z\right)\right\rangle}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_z}\;;$$

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{55\,\hbar c\gamma^3}{32\sqrt{3}\,E}\cdot\frac{\left\langle|\mathcal{K}_z|^3\cdot\left(D_z^2\cdot\frac{R_z}{\beta_z}+2\,D_z D_z'\cdot S_z+D_z'^2\cdot\beta_z T_z\right)\right\rangle}{\langle\mathcal{K}^2\rangle-A_z}$$

und schließlich für die mittlere Strahlausdehnung

(4.8a)
$$\sigma_x^2 = \beta_x \cdot \left\{ \varepsilon_I \cdot \frac{\sin\mu_x}{\sin 2\pi Q_I}\,\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left[1 + \frac{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)}{\sin\mu_x}\,(\varkappa-1)\cdot T_x\right] + \varepsilon_{II}\cdot\frac{\sin\mu_x}{\sin 2\pi Q_{II}}\,\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\left[1 - \frac{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)}{\sin\mu_x}\,(\varkappa+1)\cdot T_x\right]\right\};$$

(4.8b)
$$\sigma_z^2 = \beta_z \cdot \left\{ \varepsilon_I \cdot \frac{\sin\mu_z}{\sin 2\pi Q_I}\,\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\left[1 + \frac{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)}{\sin\mu_z}\,(\varkappa+1)\cdot T_z\right] + \varepsilon_{II}\cdot\frac{\sin\mu_z}{\sin 2\pi Q_{II}}\,\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left[1 - \frac{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)}{\sin\mu_z}\,(\varkappa-1)\cdot T_z\right]\right\};$$

(4.9)
$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(1)} + \sigma_{xz}^{(2)};$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \frac{1}{2}\cos\left[\left(\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right) - \left(\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right)\right]\cdot\sqrt{\beta_x\beta_z}\,\times$$

$$\times\frac{\Delta\cdot\sin\mu_x\sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)\cdot\sqrt{1 + \dfrac{\Delta^2\sin\mu_x\sin\mu_z}{(\cos\mu_x-\cos\mu_z)^2}}}\,\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_I}{\sin 2\pi Q_I} + \frac{\varepsilon_{II}}{\sin 2\pi Q_{II}}\right\};$$

(4.9a)

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\cos\mu_x - \cos\mu_z\right]\cdot\sqrt{\beta_x\beta_z}\,\times$$

$$\times\frac{\Delta\cdot\sin\mu_x\sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)\cdot\sqrt{1 + \dfrac{\Delta^2\sin\mu_x\sin\mu_z}{(\cos\mu_x-\cos\mu_z)^2}}}\,\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_I}{\sin 2\pi Q_I}\left[\frac{\varkappa+1}{\sin\mu_z}\cdot U_{xz} + \frac{\varkappa-1}{\sin\mu_x}\cdot V_{xz}\right] - \frac{\varepsilon_{II}}{\sin 2\pi Q_{II}}\left[\frac{\varkappa-1}{\sin\mu_z}\cdot U_{xz} + \frac{\varkappa+1}{\sin\mu_x}\cdot V_{xz}\right]\right\}$$

mit

$$U_{xz} = \cos\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] -$$

$$- \frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x} \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right];$$

(4.9b)

$$V_{xz} = \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \cos\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] -$$

$$- \frac{\cos\mu_z}{\sin\mu_z} \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right].$$

(Die Größe σ_{xz} legt nach Gl. (2.14) den Drehwinkel des Strahlquerschnitts fest.)

B) Allgemeine Forderungen für die Strahlaufweitung

Die Gln. (4.8) und (4.9) bestimmen den Strahlquerschnitt an jeder Stelle s des Ringes, insbesondere also in den Wechselwirkungszonen, wobei der Ort $s = s_L$ der Linse, die die Kopplung verursacht, und die Linsenstärke δ vorzugeben sind. Für $\delta = 0$ (bzw. $\Delta = 0$) gehen sie in die bekannten Beziehungen

$$\sigma_x = \varepsilon_x \cdot \sqrt{\beta_x} \,, \qquad \sigma_z = \varepsilon_z \cdot \sqrt{\beta_z} \,, \qquad \sigma_{xz} = 0 \tag{4.10}$$

der ungekoppelten Maschine über.

Gemäß dem in der Einleitung entwickelten Programm besteht unsere weitere Aufgabe nunmehr darin festzustellen, ob der Strahlquerschnitt an den Kreuzungspunkten in vertikaler Richtung gedehnt werden kann, um die Raumladungskräfte in dieser Richtung zur Stabilisierung der Betatronschwingungen abzuschwächen.

Für eine solche Aufweitung des Strahls sind allgemein folgende Bedingungen zu stellen:

(I) Die durch Kopplung bedingte Q-Verschiebung

$$(Q_x, Q_z) \rightarrow (Q_I, Q_{II})$$

muß so klein bleiben, daß der Arbeitspunkt (Q_I, Q_{II}) kein Stoppband erreicht, d.h. es müssen die Stabilitätsbedingungen der Strahlführung [4]

$$Q_I, Q_{II} \neq n, \frac{n}{2} \qquad (n = \text{ganze Zahl}) \tag{4.11}$$

erfüllt sein.

(II) Die Strahlaufweitung soll schon bei möglichst kleiner Linsenstärke δ erfolgen.

(III) Beim Einschalten der Kopplung dürfen die Dispersionsbahnen $D_x(s)$, $D_z(s)$ nicht gestört werden. Die Linse muß also an einer solchen Stelle $s = s_L$ aufgestellt werden, wo D_x und D_z verschwinden:

$$D_x(s_L) = D_z(s_L) = 0 \quad . \tag{4.12}$$

(IV) Da die Raumladungskräfte beim Durchdringen zweier gedrehter Strahlen in linearer Näherung wie eine um den gleichen Winkel gedrehte Quadrupollinse wirken, muß der Drehwinkel des Strahls in der Wechselwirkungszone so klein sein, daß die von der Strahl-Strahl-Wechselwirkung verursachte zusätzliche Kopplung den Strahlquerschnitt nicht merklich beeinflußt und gegen die von der eingebauten Quadrupollinse hervorgerufene Kopplung vernachlässigt werden kann.

C) Die Resonanzbedingung

Um die Forderungen (I) - (IV) erfüllen zu können, bedenken wir zunächst, daß sich nach Gl. (3.10) und (4.8) die mittlere Strahlausdehnung in x- und z-Richtung nur dann wesentlich ändert, wenn

(4.13) $$\sin\mu_x \cdot \sin\mu_z > 0$$

(4.14) $$\Delta^2 \cdot \sin\mu_x \sin\mu_z > (\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2$$

gilt. *)

Andererseits geht aus Gl. (3.9) hervor, daß die Größe $\varkappa$ und damit die Kopplungsstärke Δ der Linse nicht beliebig groß werden darf, da sonst nach Gl. (3.9)

$$\cos 2\pi Q_n, \quad (n = I, II)$$

den Absolutwert 1 überschreitet, also Q_n komplex und damit der Strahl instabil wird [(4)]:

(4.15) $$|\cos 2\pi Q_n| < 1, \quad (n = I, II);$$

(Stabilitätsbedingung).

Alle drei Bedingungen (4.13, 14, 15) können aber nur dann gleichzeitig befriedigt werden, wenn wir zum Resonanzfall

(4.16) $$Q_z - Q_x = n + \delta Q;$$

$$n = \text{ganze Zahl};$$

$$|\delta Q| \ll 1$$

übergehen.

---

*) Der Fall $\sin\mu_x \sin\mu_z < 0$ wirkt sich ungünstig auf den Amman-Ritson-Effekt aus, kann also außer acht gelassen werden. Außerdem ist mit $\sin\mu_x \sin\mu_z < 0$ nicht die Forderung (IV) erfüllbar (siehe Gl. (4.18)).

In der Tat ist dann mit

$$\begin{aligned} \sin\mu_x &\equiv \sin 2\pi Q_x \\ &= \sin(2\pi Q_z + n + \delta Q) \\ &\approx \sin 2\pi Q_z \equiv \sin\mu_z \end{aligned}$$

die Forderung (4.13) automatisch erfüllt.

Ferner entsteht aus (4.14)

(4.17) $$\Delta^2 \gg (2\pi\cdot\delta Q)^2 .$$

Dieser Bedingung kann man aber für $|\delta Q| \ll 1$ schon bei relativ kleiner Kopplungsstärke Δ genügen, ohne daß die Stabilitätsbedingungen (4.15) verletzt wird, die sich jetzt in der Form

(4.18a) $$|\cos 2\pi Q_I| < 1 , \quad |\cos 2\pi Q_{II}| < 1$$

mit

(4.18b) $$\begin{cases} \cos 2\pi Q_I = \cos\mu_x + (\varkappa - 1)\cdot\pi\cdot\delta Q\cdot\sin\mu_x \\ \cos 2\pi Q_{II} = \cos\mu_x - (\varkappa + 1)\cdot\pi\cdot\delta Q\cdot\sin\mu_x \end{cases}$$

schreibt.

Daraus erhellt, daß bereits mit der Resonanzbedingung (4.16) allein die Forderungen (I) und (II) befriedigt werden können.

Um zu zeigen, daß auch noch die Forderungen (III) und (IV) erfüllbar sind, wählen wir für den bei DESY geplanten Speicherring als Linsenort die Stelle

$$s_L = \frac{C}{4}$$

(C = Bahnumfang),

so daß sich der gedrehte Quadrupol gerade in der Mitte zwischen den beiden Wechselwirkungszonen befindet. Dann gilt zunächst für den DESY-Speicherring

$$D_x\left(\frac{C}{4}\right) = D_z\left(\frac{C}{4}\right) \approx 0$$

im Einklang mit Forderung (III)

Weiterhin fordern wird, daß die Differenz der Q-Werte

$$Q_x - Q_z$$

nahezu eine ungerade Zahl darstellt:

$$Q_z - Q_x = (2m + 1) + \delta Q \;;$$

$$m = \text{ganze Zahl.}$$

Dann ergibt sich die für die Größe $_{xz}$ maßgebliche Phasendifferenz

$$\Delta\varphi(s) = \left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] - \left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right]$$

an den Kreuzungspunkten $s = 0, \frac{C}{2}$ mit

$$\varphi_x(0) - \varphi_x(s_L) = -\frac{1}{4}\cdot 2\pi Q_x = -\frac{\pi}{2}\cdot Q_x \;;$$

$$\varphi_z(0) - \varphi_z(s_L) = -\frac{1}{4}\cdot 2\pi Q_z = -\frac{\pi}{2}\cdot Q_z \;,$$

$$\varphi_x\left(\frac{C}{2}\right) - \varphi_x(s_L) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi Q_x - \frac{1}{4}\cdot 2\pi Q_x = \frac{\pi}{2} Q_x \;;$$

$$\varphi_z\left(\frac{C}{2}\right) - \varphi_z(s_L) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi Q_z - \frac{1}{4}\cdot 2\pi Q_z = \frac{\pi}{2} Q_z$$

zu

$$\Delta\varphi(0) = \frac{\pi}{2}\left(Q_z - Q_x\right) = \frac{\pi}{2}\cdot(2m+1) + \frac{\pi}{2}\cdot\delta Q \;;$$

$$\Delta\varphi\left(\frac{C}{2}\right) = -\Delta\varphi(0) \,,$$

und für den in (4.9a) auftretenden Faktor $\cos(\Delta\varphi)$ bekommen wir

$$\cos(\Delta\varphi) = -(-1)^m \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \delta Q \ .$$

Infolgedessen kann man die Größe σ_{xz}, die nach Gl. (2.14) die Drehung des Strahls bestimmt, und somit auch den Drehwinkel θ in den Wechselwirkungszonen durch Einstellung einer scharfen Resonanz ($|\delta Q| \ll 1$) beliebig klein machen, wie in der Bedingung (IV) verlangt wurde.

Im folgenden Abschnitt soll der Strahlquerschnitt selbst ermittelt werden (σ_x, σ_z und σ_{xz}), der sich im Resonanzfall an den Kreuzungspunkten einstellt.

D) Strahlquerschnitt im Resonanzfall

Die für die Strahlausdehnung charakteristischen Größen σ_x, σ_z und σ_{xz} errechnen sich im Resonanzfall aus den allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4.8) und (4.9) unter Berücksichtigung der aus der Resonanzbedingung (4.16) folgenden Beziehung

$$\cos\mu_x - \cos\mu_z = \cos 2\pi Q_x - \cos 2\pi\left[Q_x + n + \delta Q\right] \approx 2\pi \cdot \delta Q \cdot \sin\mu_x . \tag{4.19}$$

Grundsätzlich sind wir damit in der Lage, bei Vorgabe der "Verstimmung " δQ den Strahlquerschnitt für eine beliebige Kopplungsstärke Δ zu ermitteln.

Man kann jedoch die Gln. (4.8) und (4.9) noch wesentlich vereinfachen, wenn folgende Annahmen gemacht werden, die für den DESY Speicherring weitgehend zutreffen bzw. realisierbar sind (durch Einstellung einer scharfen Resonanz $\Rightarrow |\delta Q| \ll 1$ und relativ schwache Kopplung):

$$\varepsilon_z \ll \varepsilon_x \; ; \quad |\tilde{\varepsilon}_z| \ll \varepsilon_x \, , \tag{4.20a}$$

$$2\pi \cdot |\delta Q| \cdot \kappa \cdot |\tilde{\varepsilon}_x| \ll \varepsilon_x \; ; \tag{4.20b}$$

$$2\pi \cdot |\delta Q| \cdot \kappa \cdot |T_{x,z}| \ll 1 \quad \text{für } s = 0, \frac{C}{2} \; ; \tag{4.20c}$$

$$2\pi \, |\delta Q| \cdot \kappa \cdot \left| \frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x} \right| \ll 1 \, . \tag{4.20d}$$

Unter diesen Voraussetzungen wird

$$\frac{\sin^2\mu_x}{\sin^2 2\pi Q_I} \approx \frac{\sin^2\mu_x}{\sin^2 2\pi Q_{II}} \approx 1$$

und alle Ausdrücke in (4.6) und (4.8), die eine der Größen

$$\varepsilon_z \, , \quad \tilde{\varepsilon}_x \, , \quad \tilde{\varepsilon}_z$$

als Faktor enthalten, können in diesen Gleichungen vernachlässigt werden, so daß wir aus (4.8) unter Berücksichtigung von (4.6) für den Strahlquerschnitt im Resonanzfall

(4.21a) $$\sigma_x^2 = \beta_x \cdot F_x(\varkappa) \quad ,$$

(4.21b) $$\sigma_z^2 = \beta_z \cdot F_z(\varkappa) \quad ,$$

(4.21c) $$\sigma_{xz} = \sqrt{\beta_x}\,\sqrt{\beta_z} \cdot F_{xz}(\varkappa)$$

erhalten mit

(4.22a) $$F_x(\varkappa) = \varepsilon_x \cdot \left\{ \frac{(\varkappa+1)^2}{4\varkappa^2} \cdot \frac{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - A_x}{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_z} + \frac{(\varkappa-1)^2}{4\varkappa^2} \cdot \frac{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - A_x}{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_z} \right\} ;$$

(4.22b) $$F_z(\varkappa) = \varepsilon_x \cdot \frac{\varkappa^2-1}{4\varkappa^2} \cdot \left\{ \frac{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - A_x}{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_z} + \frac{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - A_x}{\langle \mathcal{K}^2 \rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_z} \right\} ,$$

$$(4.22c) \qquad F_{xz}(\varkappa) = F_{xz}^{(1)}(\varkappa) + F_{xz}^{(2)}(\varkappa) \; ;$$

$$F_{xz}^{(1)}(\varkappa) = -(-1)^{m} \cdot \frac{\pi}{4} \, \delta Q \; \times$$

$$\times \frac{\Delta \cdot \sin\mu_x}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)\sqrt{1 + \dfrac{\Delta^2 \cdot \sin\mu_x \sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2}}} \times$$

$$\times \; \varepsilon_x \cdot \left\{ \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle - A_x}{\langle K^2 \rangle - \dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_x - \dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_z} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle - A_x}{\langle K^2 \rangle - \dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_x - \dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_z} \right\} ;$$

$$F_{xz}^{(2)}(\varkappa) = \pi \cdot \delta Q \; \times$$

$$\times \frac{\Delta \cdot \sin\mu_x}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)\sqrt{1 + \dfrac{\Delta^2 \cdot \sin\mu_x \sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2}}} \times$$

$$\times \; \varepsilon_x \cdot \left\{ \frac{(\varkappa+1)^2}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle - A_x}{\langle K^2 \rangle - \dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_x - \dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_z} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\varkappa-1)^2}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle - A_x}{\langle K^2 \rangle - \dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_x - \dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_z} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \cos\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x} \cdot \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right] \right\} .$$

Um noch die Bedingungen (4.20) in eine für die Auswertung bequemere Form zu bringen, setzen wir nach (4.3, 4, 5, 7) für $\tilde{\varepsilon}_x$ und $\left(T_{x,z}\right)_{s=0,\frac{C}{2}}$

(4.23) $$\tilde{\varepsilon}_x = \tilde{\varepsilon}_x^{(1)} + \frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x}\cdot\tilde{\varepsilon}_x^{(2)} \; ;$$

(4.24) $$T_{x,z} = T_{x,z}^{(1)} + \frac{\cos\mu_{x,z}}{\sin\mu_{x,z}}\cdot T_{x,z}^{(2)} \quad \left(\text{mit } s = 0, \frac{C}{2}\right)$$

mit

(4.25) $$\tilde{\varepsilon}_x^{(v)} = \frac{55\,\hbar c\gamma^3}{32\sqrt{3}\,E}\cdot\frac{\left\langle |K_x|^3\cdot\left(D_x^2\cdot\frac{R_x^{(v)}}{\beta_x} + 2\,D_x D_x'\cdot S_x^{(v)} + D_x'^2\cdot\beta_x T_x^{(v)}\right)\right\rangle}{\langle K^2\rangle - \mathcal{H}_x}$$

$$(v = 1, 2),$$

$$R_x^{(1)} = -\left\{\cos[\varphi_x - \varphi_x(s_L)] - \alpha_x\cdot\sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\right\}\times$$
$$\times\left\{\sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)] + \alpha_x\cos[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\right\};$$

$$R_x^{(2)} = -\left\{\cos[\varphi_x - \varphi_x(s_L)] - \alpha_x\sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\right\}^2;$$

$$S_x^{(1)} = \frac{1}{2}\sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\cdot\left\{\sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)] + \alpha_x\cos[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\right\},$$

$$S_x^{(2)} = \sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\cdot\left\{\cos[\varphi_x - \varphi_x(s_L)] - \alpha_x\sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\right\};$$

$$T_x^{(1)} = \sin[\varphi_x - \varphi_x(s_L)]\cdot\cos[\varphi_x - \varphi_x(s_L)];$$

$$T_x^{(2)} = -\sin^2[\varphi_x - \varphi_x(s_L)],$$

$$T_z^{(1)} = \sin[\varphi_z - \varphi_z(s_L)]\cdot\cos[\varphi_z - \varphi_z(s_L)],$$

$$T_z^{(2)} = -\sin^2[\varphi_z - \varphi_z(s_L)]$$

sowie

$$(4.26)\qquad \begin{aligned}
\left(T_x^{(1)}\right)_{s=0} &= -\left(T_x^{(1)}\right)_{s=\frac{C}{2}} = -\frac{1}{2}\sin\left(Q_x\cdot\pi\right);\\
\left(T_x^{(2)}\right)_{s=0} &= +\left(T_x^{(2)}\right)_{s=\frac{C}{2}} = -\sin^2\left(Q_x\cdot\frac{\pi}{2}\right);\\
\left(T_z^{(1)}\right)_{s=0} &= -\left(T_x^{(1)}\right)_{s=\frac{C}{2}} = -\frac{1}{2}\sin\left(Q_z\cdot\pi\right);\\
\left(T_z^{(2)}\right)_{s=0} &= +\left(T_z^{(2)}\right)_{s=\frac{C}{2}} = -\sin^2\left(Q_z\cdot\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dann entstehen aus (4.20b) die Bedingungen

$$(4.27a)\qquad 2\pi\cdot\delta Q\cdot\kappa\cdot\left|\tilde{\varepsilon}_x^{(1)}\right| \ll \varepsilon_x;$$

$$(4.27b)\qquad 2\pi\cdot\delta Q\cdot\kappa\cdot\left|\tilde{\varepsilon}_x^{(2)}\right|\cdot\left|\frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x}\right| \ll \varepsilon_x$$

und aus (4.20c)

$$(4.28a)\qquad \pi\cdot|\delta Q|\cdot\kappa\cdot\left|\sin\left(Q_x\cdot\pi\right)\right| \ll 1;$$

$$(4.28b)\qquad 2\pi\cdot|\delta Q|\cdot\kappa\cdot\left|\frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x}\right|\cdot\sin^2\left(Q_x\cdot\frac{\pi}{2}\right) \ll 1;$$

$$(4.28c)\qquad 2\pi\cdot|\delta Q|\cdot\kappa\cdot\left|\frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x}\right|\cdot\sin^2\left(Q_z\cdot\frac{\pi}{2}\right) \ll 1,$$

von denen (4.28b, c) automatisch mit (4.20d) erfüllt sind.

Ist außerdem wie beim DESY-Speicherring

(4.29)
$$|\tilde{\varepsilon}_x^{(1)}| \ll \varepsilon_x \quad ;$$
$$|\tilde{\varepsilon}_x^{(2)}| \lesssim \varepsilon_x \quad ,$$

so können wir (4.27a) außer acht lassen, während (4.27b) mit (4.20d) identisch wird. Insgesamt bekommen wir dann die zu (4.20) äquivalenten Forderungen

(4.20')
$$1)\quad \varepsilon_z \ll \varepsilon_x \; ; \quad |\tilde{\varepsilon}_z| \ll \varepsilon_x \; ;$$
$$2)\quad \pi \cdot \delta Q \cdot \varkappa \cdot |\sin(Q_x \cdot \pi)| \ll 1 \; ,$$
$$3)\quad 2\pi \cdot |\delta Q| \cdot \varkappa \cdot \left| \frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x} \right| \ll 1 \; ,$$

die (neben (4.29)), evtl. nach einer geeigneten Verschiebung des Arbeitspunktes, für die Gültigkeit der Bestimmungsgleichungen (4.21) und (4.22) des Strahlquerschnitts zu befriedigen sind.

Für den DESY-Speicherring (ohne FODO-Kanal) dürfen wir weiterhin zur Bestimmung des Strahlquerschnitts

(4.30a)
$$\frac{\langle K^2 \rangle - A_x}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_z} \approx 1 \; ,$$

(4.30b)
$$\frac{\langle K^2 \rangle - A_x}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_x - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_z} \approx 1$$

setzen, da

$$|A_x|, \quad |A_z| \quad << \quad \langle \varkappa^2 \rangle \tag{4.31}$$

gilt, so daß (4.22) übergeht in

$$F_x(\varkappa) = \varepsilon_x \cdot \frac{\varkappa^2 + 1}{2\varkappa^2} \quad ; \tag{4.32a}$$

$$F_z(\varkappa) = \varepsilon_x \cdot \frac{\varkappa^2 - 1}{2\varkappa^2} \quad ; \tag{4.32b}$$

$$\begin{aligned} F_{xz}(\varkappa) = {} & \varepsilon_x \cdot n \cdot \delta Q \;\times \\ & \times \frac{\Delta \cdot \sin\mu_x}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)\sqrt{1 + \dfrac{\Delta^2 \cdot \sin\mu_x \sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2}}} \;\times \\ & \times \Big\{ -(-1)^m \cdot \frac{1}{4} + \\ & \quad + 2 \cdot \Big[\cos\big(\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\big) \sin\big(\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\big) - \\ & \quad - \frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x} \cdot \sin\big(\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\big) \sin\big(\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\big)\Big]\Big\} . \end{aligned} \tag{4.32c}$$

Ist $\varkappa^2 >> 1$, so erhält man also insbesondere in den Wechselwirkungszonen, wo (für den DESY-Speicherring)

$$\beta_x = \beta_z$$

wird, nahezu einen kreisförmigen Strahlquerschnitt mit dem Radius

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon_x} \cdot \sqrt{\beta_x} \quad .$$

Im Falle der Entkopplung ($\varkappa$ = 1) bekommen wir aus Gl. (4.22) und (4.32)

$$F_x(1) = \varepsilon_x ;$$

$$F_z(1) = 0 ;$$

$$F_{xz}(1) = 0 ,$$

d.h. die Strahlhöhe verschwindet. In Wirklichkeit tritt jedoch aufgrund der Gasstreuung eine geringe vertikale Strahlaufweitung auf:

$$\sigma_{z0}^2 = \beta_z \cdot (\varepsilon_z)_{Gas} ,$$

die wir bei der Berechnung des Strahlquerschnitts (Gl. (4.8) und (4.9)) vernachlässigt haben. Damit die Gln. (4.22) und (4.32) gültig bleiben, müssen wir demnach eine so starke Kopplung voraussetzen, daß

$$F_z(\varkappa) \gg (\varepsilon_z)_{Gas} \qquad (4.33)$$

wird.

Die von den Raumladungskräften hervorgerufene, aufgrund der geringfügigen Strahldrehung $\theta(0)$ bzw. $\Theta(\frac{C}{2})$ verbleibende Kopplung, die durch die Größe σ_{xz} bzw. F_{xz} festgelegt wird, schätzen wir in Abschnitt V B) genauer ab. Zuvor soll die durch den Amman-Ritson-Effekt bedingte Q-Verschiebung ermittelt werden.

V. Amman-Ritson-Effekt bei Kopplung

A) Q-Verschiebung

Der Amman-Ritson-Effekt wird allgemein beschrieben durch die Gln. (2.15) und (2.16), die die Verschiebung des Arbeitspunktes aufgrund der Strahl-Strahl-Wechselwirkung bei beliebigem Drehwinkel θ angeben. Wie wir in Kap. IV gesehen haben, kann man im Resonanzfall (falls $Q_x - Q_z \approx 2m + 1$ gilt) näherungsweise $\theta = 0$ setzen. Dann entsteht zunächst aus (2.15, 16), wenn noch die Beziehungen (3.6), (3.7) und (3.8) berücksichtigt werden:

(5.1a)

$$\Delta Q_I = \frac{r_e \cdot N}{2\pi q \gamma \cdot (\sigma_x + \sigma_z)} \cdot \left\{ \frac{|v_{I1}|^2}{\sigma_x} + \frac{|v_{I3}|^2}{\sigma_z} \right\};$$

$$\Delta Q_{II} = \frac{r_e \cdot N}{2\pi q \gamma \cdot (\sigma_x + \sigma_z)} \cdot \left\{ \frac{|v_{II1}|^2}{\sigma_x} + \frac{|v_{II3}|^2}{\sigma_z} \right\};$$

r_e = klassischer Elektronenradius;

q = Bunchzahl;

N = Teilchenzahl

mit

(5.1b)

$$|v_{I1}|^2 = \beta_x \cdot \frac{\sin \mu_x}{\sin 2\pi Q_I} \cdot \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \cdot \left\{ 1 + 2\pi \cdot \delta Q \cdot (\kappa - 1) \cdot T_x \right\};$$

$$|v_{I3}|^2 = \beta_z \cdot \frac{\sin \mu_z}{\sin 2\pi Q_I} \cdot \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \cdot \left\{ 1 + 2\pi \cdot \delta Q \cdot (\kappa + 1) \cdot T_z \right\};$$

$$|v_{II1}|^2 = \beta_x \cdot \frac{\sin \mu_x}{\sin 2\pi Q_{II}} \cdot \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \cdot \left\{ 1 - 2\pi \cdot \delta Q \cdot (\kappa + 1) \cdot T_x \right\},$$

$$|v_{II3}|^2 = \beta_z \cdot \frac{\sin \mu_z}{\sin 2\pi Q_{II}} \cdot \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \cdot \left\{ 1 - 2\pi \cdot \delta Q \cdot (\kappa - 1) \cdot T_z \right\},$$

wobei die Funktionen $T_x(s)$ und $T_z(s)$ aus Gl. (4.5) zu entnehmen sind.

Die Gln. (5.1a, b) gelten bei Vorgabe der Größen σ_x und σ_z für beliebige Kopplungsstärken der Linse ($\varkappa$ beliebig). Insbesondere ergeben sich aus (5.1a, b) für $\varkappa = 1$ die bekannten Beziehungen

(5.2)
$$\Delta Q_x = \frac{r_e \cdot N \; \beta_x}{2\pi\gamma \cdot \sigma_{x0}\left(\sigma_{x0} + \sigma_{z0}\right)} \approx \frac{r_e \cdot N}{2\pi\gamma \cdot \varepsilon_x} \; ;$$

$$\Delta Q_z = \frac{r_e \cdot N \cdot \beta_z}{2\pi\gamma \cdot \sigma_{z0}\left(\sigma_{x0} + \sigma_{z0}\right)} \approx \frac{r_e \cdot N \cdot \beta_z}{2\pi\gamma \cdot \sigma_{z0}\,\sigma_{x0}} \; ;$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{x0} = \text{halbe Strahlbreite} \\ \sigma_{z0} = \text{halbe Strahlhöhe} \end{array}\right\} \text{bei Entkopplung}$$

der entkoppelten Maschine ($\sigma_{zo} << \sigma_{xo}$).

Zur weiteren Auswertung dieser Gleichungen wollen wir wieder annehmen, daß die in (4.20) genannten Voraussetzungen erfüllt sind.

Durch Einsetzen von (4.21) in (5.1) erhält man dann

(5.3a)
$$\Delta Q_I = \frac{r_e \cdot N}{2\pi\gamma \cdot \left(\sigma_x + \sigma_z\right)} \cdot \left\{ \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \cdot \frac{\beta_x}{\sigma_x} + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \cdot \frac{\beta_z}{\sigma_z} \right\}$$

$$= \frac{r_e \cdot N}{2\pi\gamma \cdot \left(\sqrt{\beta_x F_x} + \sqrt{\beta_z F_z}\right)} \cdot \left\{ \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \cdot \sqrt{\frac{\beta_x}{F_x}} + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \sqrt{\frac{\beta_z}{F_z}} \right\} ;$$

(5.3b)
$$\Delta Q_{II} = \frac{r_e \cdot N}{2\pi\gamma \cdot \left(\sigma_x + \sigma_z\right)} \cdot \left\{ \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \cdot \frac{\beta_x}{\sigma_x} + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \cdot \frac{\beta_z}{\sigma_z} \right\}$$

$$= \frac{r_e \cdot N}{2\pi\gamma \cdot \left(\sqrt{\beta_x F_x} + \sqrt{\beta_z F_z}\right)} \cdot \left\{ \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \cdot \sqrt{\frac{\beta_x}{F_x}} + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \sqrt{\frac{\beta_z}{F_z}} \right\}$$

mit den in Gl. (4.22) bzw. (4.32) angegebenen Funktionen F_1 $(\varkappa)$ und F_2 $(\varkappa)$.

In dem Sonderfall

$$|A_x| , \; |A_z| \; << \; \langle \varkappa^2 \rangle$$

wird daraus nach (4,32)

(5.4a)
$$\Delta Q_I = \Delta Q_x \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta_x} \cdot \sqrt{\varkappa^2 + 1} + \sqrt{\beta_z} \cdot \sqrt{\varkappa^2 - 1}} \times$$
$$\times \left\{ \sqrt{\beta_x} \cdot \frac{\varkappa + 1}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} + \sqrt{\beta_z} \cdot \frac{\varkappa - 1}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}} \right\} ;$$

(5.4b)
$$\Delta Q_{II} = \Delta Q_x \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta_x} \cdot \sqrt{\varkappa^2 + 1} + \sqrt{\beta_z} \cdot \sqrt{\varkappa^2 - 1}} \times$$
$$\times \left\{ \sqrt{\beta_x} \cdot \frac{\varkappa - 1}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} + \sqrt{\beta_z} \cdot \frac{\varkappa + 1}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}} \right\} .$$

Dabei ist die Bedingung (4.33) zu beachten, die die Gültigkeit der Gln. (5.3) und (5.4) auf solche $\varkappa$-Werte beschränkt, für die

$$\sigma_2 \;>>\; \sigma_{20} \times \sqrt{(\varepsilon_z)_{Gas}} \cdot \sqrt{\beta_z}$$

wird.

Aus diesen Gleichungen geht aber hervor, daß mit Einschaltung der Kopplung ein Ausgleich der Raumladungskräfte stattfindet, wie in der Einleitung behauptet wurde, da sich die Größen ΔQ_I und ΔQ_{II} mit wachsender Kopplungsstärke einander nähern und für $\varkappa^2 >> 1$ gleich groß werden.

Der Faktor, um den die Luminositätsgrenze des Amman-Ritson-Effektes bei dieser neuen (günstigeren) Verteilung der Raumladungskräfte angehoben wird, ist dabei gegeben durch das Verhältnis

$$\frac{\Delta Q_z}{\Delta Q_{II}}$$

und errechnet sich für den Fall

$$|\Pi_x| , \quad |\Pi_z| \quad \ll \quad \langle \kappa^2 \rangle$$

nach (5.2) und (5.4) zu

(5.5)
$$\frac{\Delta Q_z}{\Delta Q_{II}} = \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{z0}} \cdot \frac{\beta_z}{\beta_x} \cdot \frac{\sqrt{\beta_x}\,\sqrt{\kappa^2+1} + \sqrt{\beta_z}\,\sqrt{\kappa^2-1}}{\kappa} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\kappa^4-1}}{\sqrt{\beta_x}\cdot(\kappa-1)\sqrt{\kappa^2-1} + \sqrt{\beta_z}\cdot(\kappa+1)\sqrt{\kappa^2+1}} .$$

Zahlenbeispiel:

$$L = 0{,}60\ m \qquad \text{(Linsenlänge)}$$

$$k = 0{,}015\ m^{-2} \qquad \text{(Linsenstärke)}$$

$$\beta_x(s_L) = 11{,}24\ m$$

$$\beta_z(s_L) = 32{,}35\ m$$

$$\Rightarrow \quad \delta = k \cdot L = 0{,}009\ m^{-1}$$

$$\sqrt{\beta_x(s_L)\,\beta_z(s_L)} = 19{,}07\ m$$

$$\Delta = \delta \cdot \sqrt{\beta_x(s_L)\,\beta_z(s_L)} = 0{,}172$$

$$2\pi \cdot \delta Q = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \varkappa \approx 2$$

$$\sigma_x^2 = \varepsilon_x\,\beta_x \cdot \frac{5}{8}\ , \quad \sigma_x = 0{,}79\ \sqrt{\varepsilon_x \beta_x}$$

$$\sigma_z^2 = \varepsilon_x\,\beta_z \cdot \frac{3}{8}\ ; \quad \sigma_z = 0{,}61 \cdot \sqrt{\varepsilon_x \beta_x}$$

$$\Delta Q_I = \Delta Q_x \cdot 0{,}97\ ;$$

$$\Delta Q_{II} = \Delta Q_x \cdot 1{,}10\ ;$$

Die Differenz ($\Delta Q_{II} - \Delta Q_I$) beträgt nur noch

$$\Delta Q_{II} - \Delta Q_I \approx 0{,}13\ \Delta Q_x\ ;$$

Die Luminositätsgrenze wird um den Faktor

$$\frac{\Delta Q_z}{\Delta Q_{II}} = 0{,}9 \cdot \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{z0}}$$

angehoben.

Bei diesen Betrachtungen haben wir jedoch noch nicht die Forderung (IV) in Abschnitt IV B.) für die von den Raumladungskräften herrührende Kopplung berücksichtigt, die neben der Bedingung

$$|\Delta Q_{I,II}| \lesssim 0{,}025$$

eine zusätzliche Einschränkung für die Luminositätsgrenze liefert, mit der wir uns im folgenden Abschnitt befassen wollen.

B) Abschätzung der von den Raumladungskräften herrührenden Kopplung

In Abschnitt IV B) wurde bereits erwähnt, daß die Raumladungskräfte eines gedrehten Strahls in linearer Näherung wie eine dünne Linse wirken, die um denselben Winkel wie der Strahl gedreht ist und somit ebenfalls eine Kopplung liefert, welche sich der von der eingebauten Linse herrührenden Kopplung überlagert. Mathematisch kann die Linsenwirkung der Raumladungskräfte beschrieben werden durch die Übertragungsmatrix

$$\mathfrak{M}_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (k_1 \sin^2\theta + k_2 \cos^2\theta) & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta_W & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta_W & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix eines gedrehten Quadrupols}} \tag{5.6}$$

mit dem Kopplungsglied

$$\delta_W = (k_1 - k_2) \sin 2\theta \tag{5.7}$$

und der Kopplungsstärke

$$\Delta_W = \delta_W \cdot \sqrt{\beta_x(s_W)\,\beta_z(s_W)} \; ; \tag{5.8}$$

$$\left(s_W = 0, \; \frac{C}{2}, \; \text{Kreuzungspunkte} \right),$$

wobei die Größen k_1 und k_2 sowie der Drehwinkel θ aus den Gln. (2.12) - (2.16) entnommen werden können.

Damit der Strahl durch dieses Kopplungsglied nicht wesentlich gestört wird, muß man verlangen, daß

$$\Delta_W^2 \sin\mu_z \sin\mu_x \ll (\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2 \tag{5.9}$$

oder im Resonanzfall

$$\Delta_W^2 \ll |2n \cdot \delta Q|^2 \tag{5.10}$$

wird, weil dann die Größe

$$\varkappa_W = \sqrt{1 + \frac{\Delta_W^2 \cdot \sin\mu_x \sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2}} \quad , \tag{5.11}$$

die nach Gl. (3.11) und (4.8) ein Maß für die Auswirkung der Kopplung auf den Strahl darstellt, nicht wesentlich vom Werte 1 abweicht, den $\varkappa$ für verschwindende Kopplung annimmt.

Durch Einsetzen von (2.14) und (2.16) in Gl. (5.7) erhält man nun unter Berücksichtigung von (2.12)

$$|\Delta_W| = \sqrt{\beta_x(s_W)\,\beta_z(s_W)} \cdot \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \frac{2 \cdot |\sigma_{xz}|}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \cdot \frac{2 r_e N}{4\gamma} \quad . \tag{5.12}$$

Weiterhin gilt unter den in (4.20) genannten Annahmen mit

$$\sigma_1 \approx \sigma_x \;, \quad \sigma_2 \approx \sigma_z$$

nach Gl. (5.3b), wenn wir noch von der für den DESY-Speicherring gültigen Beziehung

$$\beta_x(s_W) = \beta_z(s_W) \tag{5.13}$$

Gebrauch machen:

$$\Delta Q_{II} \approx \frac{r_e \cdot N}{2\pi q \gamma \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)} \cdot \beta_x \cdot \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \frac{1}{\sigma_1} + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \frac{1}{\sigma_2} \right)$$

$$= \frac{r_e \cdot N}{2\pi q \gamma \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)} \cdot \beta_x \cdot \frac{\varkappa (\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2)}{2\varkappa \cdot \sigma_1 \sigma_2}$$

(5.14)

$$\gtrsim \frac{r_e \cdot N}{4\pi q \gamma} \cdot \beta_x \cdot \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} ,$$

so daß wir anstelle von (5.13) schreiben können

(5.15) $$|\Delta_W| \lessapprox 8\pi \cdot \Delta Q_{II} \cdot \frac{2 \cdot |\sigma_{xz}|}{(\sigma_x + \sigma_z)^2} = 8\pi \cdot \Delta Q_{II} \cdot \frac{2 \cdot |F_{xz}|}{(\sqrt{F_x} + \sqrt{F_z})^2} .$$

Mit dem durch Gl. (4.22) u. (4.32) gegebenen Strahlquerschnitt (wir beschränken uns wieder auf den Fall $|A_x|, |A_z| \ll \langle K^2 \rangle$) entsteht daraus

$$|\Delta_W| \lessapprox 8\pi \cdot \Delta Q_{II} \cdot n \cdot |\delta Q| \cdot |(M_{xz}^{(1)} + M_{xz}^{(2)})| ;$$

$$M_{xz}^{(1)} = -(-1)^m \cdot \frac{1}{4} -$$

$$- 2 \frac{\cos \mu_x}{\sin \mu_x} \sin [\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)] \cdot \sin [\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)] ;$$

$$M_{xz}^{(2)} = 2 \cos [\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)] \sin [\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)] .$$

Dabei gilt

$$(M_{xz}^{(1)})_{s=0} = (M_{xz}^{(1)})_{s=\frac{C}{2}} ;$$

$$(M_{xz}^{(2)})_{s=0} = -(M_{xz}^{(2)})_{s=\frac{C}{2}} .$$

Im Hinblick auf eine möglichst schwache Störung denken wur uns nun den Arbeitspunkt (Q_x, Q_z) so eingestellt, daß

$$\left(M_{xz}^{(1)} + M_{xz}^{(2)} \right) \quad \text{bzw.} \quad \Delta_W$$

am ersten Kreuzungspunkt (bei s = 0 oder auch bei $s = \frac{C}{2}$) verschwindet und somit eine Kopplung durch Raumladungskräfte nur in der zweiten Wechselwirkungszone auftritt. Für den DESY-Speicherring ergibt sich dann

$$Q_x \approx 9{,}23 \; ;$$

$$Q_z \approx 4{,}23 \; ;$$

$$\left| \left(M_{xz}^{(1)} + M_{xz}^{(2)} \right) \right|_{s=0} \approx 0{,}5$$

und für Δ_W aus Gl. (5.15) wird

$$|\Delta_W|_{s=0} \lesssim 8\pi \cdot |\Delta Q_{II}| \cdot 0{,}5 \cdot n \cdot |\delta Q| \, ,$$

$$|\Delta_W|_{s=\frac{C}{2}} \approx 0 \, .$$

Bedenken wir noch, daß ΔQ_{II} maximal den Wert 0,025 annehmen kann, so erhalten wir schließlich

$$|\Delta_W|_{s=0} \approx 0{,}3 \cdot n \cdot |\delta Q| \, .$$

Die Bedingung (5.10) ist also erfüllt, und die durch Raumladungskräfte verursachte Kopplung der Betatronschwingungen kann selbst an der Luminositätsgrenze des Amman-Ritson-Effektes vernachlässigt werden.

VI. Strahlaufweitung durch Verschiebung der Dämpfungskonstanten

A) Die Dämpfungskonstanten für Synchrotron- und Betatronschwingung

In Kap. IV. und V. wurde gezeigt, daß durch Kopplung allein lediglich die Strahlhöhe vergrößert wird (wenn ohne Kopplung $\sigma_x > \sigma_z$ ist), während sich der Strahl in horizontaler Richtung zusammenzieht. Die vertikale Strahlaufweitung durch Kopplung erfolgt also auf Kosten der Strahlbreite. Bei genügend starker Kopplung ($\varkappa^2 \gg 1$) verkleinert sich die horizontale Strahlausdehnung nach Gl. (4.21) u. (4.32) um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, und der Strahlquerschnitt selbst nimmt in der Wechselwirkungszone (falls $\beta_x = \beta_z$ gilt) nahezu Kreisform an.

Nun wurde schon in der Einleitung erwähnt, daß im Anschluß an die Kopplung der Betatronschwingungen eine weitere Strahlaufweitung, die in x- und z-Richtung gleichzeitig (bei Entkopplung dagegen in x-Richtung allein) auftritt, durch Dämpfung der Synchrotron- und Entdämpfung der Betatronschwingungen erzielt werden kann. Insbesondere ist man auf diese Weise in der Lage, die Strahlbreite auf ihren ursprünglichen Wert (bei Entkopplung) zurückzubringen.

Für den Fall, daß die Betatronschwingungen mit Hilfe eines gedrehten Quadrupols gekoppelt werden, sind die Dämpfungskonstanten α_s, α_I und α_{II} gegeben durch Gl. (2.3) u. (4.1). Anhand dieser Gleichungen bestätigt man leicht die von K.W. Robinson in allgemeiner Form bewiesene Beziehung

(6.1) $$\alpha_s + \alpha_I + \alpha_{II} = 2 \frac{\bar{W}}{E} ,$$

aus der ersichtlich ist, daß Dämpfung der Synchrotron- und Entdämpfung der Betatronschwingung (oder umgekehrt Dämpfung der Betatron- und Entdämpfung der Synchrotronschwingung) sich gegenseitig bedingen.

Für den DESY-Speicherring gilt noch

(6.2) $$| R_z | \ll | R_x |$$

so daß wir anstelle von (2.3) u. (4.1) schreiben können:

(6.3a) $$\alpha_s = \frac{\bar{W}}{E \cdot \langle k^2 \rangle} \left\{ \langle k^2 \rangle + \frac{1}{2} R_x \right\} ;$$

(6.3b)
$$\alpha_{I} = \frac{\bar{W}}{2E \cdot \langle k^2 \rangle} \cdot \left\{ \langle k^2 \rangle - \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} A_x \right\}$$

(6.3c)
$$\alpha_{II} = \frac{\bar{W}}{2E \cdot \langle k^2 \rangle} \cdot \left\{ \langle k^2 \rangle - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} A_x \right\}.$$

Eine Verschiebung der Dämpfungskonstanten im Sinne einer Aufweitung des Strahls bedeutet also, daß die von der Maschinenstruktur abhängige Konstante

$$A_x = \langle k_x^3 (1 - 2n_x) D_x \rangle$$

vergrößert wird. Eine solche Änderung von A_x kann man mit Hilfe eines FODO-Kanals erreichen [1].

B) Berechnung des Strahlquerschnitts

Um nun den neuen Strahlquerschnitt zu berechnen, der sich bei Entdämpfung der Betatronschwingungen einstellt, brauchen wir lediglich zu untersuchen, wie die Größen σ_x, σ_z und σ_{xz}, die die Strahlausdehnung bestimmen, von der Konstanten A_x abhängen.

Zu dem Zweck bedenken wir, daß das Produkt

(6.4)
$$\varepsilon_{x0} = : \varepsilon_x \frac{\langle K^2 \rangle - A_x}{\langle K^2 \rangle} = \frac{\left\langle |K_x|^3 \cdot \left(D_x^2 \cdot \frac{1+\alpha_x^2}{\beta_x} + 2 D_x D_x' \cdot \alpha_x + D_x'^2 \cdot \beta_x \right) \right\rangle}{\langle K^2 \rangle}$$

unabhängig ist von A_x, da der Faktor

$$\left(\langle K^2 \rangle - A_x \right)$$

nach Gl. (4.7) gegen den Nenner von ε_x gekürzt werden kann, und infolgedessen die durch (6.4) definierte Größe ε_{x0} bei einer Verschiebung der Dämpfungskonstanten α_s, α_I u. α_E unverändert bleibt.

Somit können wir nach Gl. (4.21) u. (4.22) unter Berücksichtigung (6.2) schreiben:

(6.4a)
$$\sigma_x^2 = \beta_x \, \varepsilon_{x0} \cdot \left\{ \frac{(\kappa+1)^2}{4\kappa^2} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\kappa+1}{2\kappa} A_x} + \frac{(\kappa-1)^2}{4\kappa^2} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\kappa-1}{2\kappa} A_x} \right\} ;$$

(6.4b)
$$\sigma_z^2 = \beta_z \, \varepsilon_{x0} \cdot \frac{\kappa^2 - 1}{4\kappa^2} \left\{ \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\kappa+1}{2\kappa} A_x} + \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\kappa-1}{2\kappa} A_x} \right\} ;$$

$$\sigma_{xz} = \sqrt{\beta_x \beta_z} \cdot \varepsilon_{x0} \cdot \pi \cdot \delta Q \; \times$$

(6.4c)

$$\times \frac{\Delta \cdot \sin\mu_x}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)\sqrt{1 + \dfrac{\Delta^2 \sin\mu_x \sin\mu_z}{(\cos\mu_x - \cos\mu_z)^2}}} \; \times$$

$$\times \left(M_{xz}^{(1)} + M_{xz}^{(2)} \right) ;$$

$$M_{xz}^{(1)} = -(-1)^n \cdot \frac{1}{4} \; \times$$

$$\times \left\{ \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\Pi_x} + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\Pi_x} \right\}$$

$$- \left\{ \frac{(\varkappa+1)^2}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\Pi_x} - \frac{(\varkappa-1)^2}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\Pi_x} \right\} \times$$

$$\times \frac{\cos\mu_x}{\sin\mu_x} \cdot \sin\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right],$$

$$M_{xz}^{(2)} = \left\{ \frac{(\varkappa+1)^2}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\Pi_x} - \frac{(\varkappa-1)^2}{2\varkappa} \cdot \frac{\langle K^2 \rangle}{\langle K^2 \rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\Pi_x} \right\} \times$$

$$\times \cos\left[\varphi_x(s) - \varphi_x(s_L)\right] \cdot \sin\left[\varphi_z(s) - \varphi_z(s_L)\right]$$

mit

$$\left(M_{xz}^{(1)}\right)_{s=0} = \left(M_{xz}^{(1)}\right)_{s=\frac{C}{2}} ;$$

$$\left(M_{xz}^{(2)}\right)_{s=0} = -\left(M_{xz}^{(2)}\right)_{s=\frac{C}{2}} .$$

Die Abhängigkeit des Strahlquerschnitts von dem Parameter A_x, der auch die Größe der Dämpfungskonstanten bestimmt, ist also gekennzeichnet durch die Faktoren

$$\frac{\langle K^2\rangle}{\langle K^2\rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_x} \quad \text{und} \quad \frac{\langle K^2\rangle}{\langle K^2\rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_x} .$$

Es folgt aus Gl. (6.4), daß die Strahlbreite in den Wechselwirkungszonen ($\beta_x = \beta_z$!) stets größer ist als die Strahlhöhe:

$$\sigma_x > \sigma_z .$$

Für $\varkappa \gg 1$ erhalten wir dort jedoch wieder nahezu einen kreisförmigen Strahlquerschnitt mit dem Radius

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_x \varepsilon_{x0} \cdot \sqrt{\frac{\langle K^2\rangle}{\langle K^2\rangle - \frac{1}{2} A_x}} \tag{6.5}$$

sofern die in (4.20) genannten Voraussetzungen bestehen bleiben.

Soll bei vorgegebener Kopplungsstärke Δ für die halbe Strahlbreite σ_x, die nach Einschaltung der Kopplung allein zusammenschrumpft, wieder der ursprüngliche Wert

$$\sqrt{\beta_x} \sqrt{\varepsilon_{x0}}$$

eingestellt werden, so muß nach Gl. (6.4a) die Beziehung

$$\frac{(\varkappa+1)^2}{4\varkappa^2} \cdot \frac{\langle K^2\rangle}{\langle K^2\rangle - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} A_x} + \frac{(\varkappa-1)^2}{4\varkappa^2} \cdot \frac{\langle K^2\rangle}{\langle K^2\rangle - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} A_x} = 1$$

gelten, aus der sich A_x zu

$$A_x = \langle K^2\rangle \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{3\varkappa^2+1}{\varkappa^2-1} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3\varkappa^2+1}{\varkappa^2-1}\right)^2 - 8} \right\} \tag{6.6}$$

errechnet.

C) Q-Verschiebung

Um die von den Raumladungskräften verursachte Q-Verschiebung zu berechnen, welche sich nach der zusätzlichen Strahlaufweitung bei Entdämpfung der Betatronschwingungen einstellt, können wir auf Gl. (5.3) zurückgreifen, falls die in (4.20) angegebenen Annahmen zutreffen. Dabei sind die in (5.3) auftretenden Größen σ_x und σ_z aus Gl. (6.4) zu entnehmen. Da die Strahlausdehnung bei der Verschiebung der Dämpfungskonstanten vergrößert wird, tritt nochmals eine Anhebung der Luminositätsgrenze auf.

Neben Gl. (5.3) bleibt auch die Beziehung (5.15) bestehen, die eine obere Schranke für die zulässige, von der Strahl-Strahl-Wechselwirkung herrührende Kopplungsstärke angibt.

Um diese durch eine Drehung des Strahls bedingte Kopplung möglichst klein zu halten, ist es wiederum zweckmäßig, die Q-Werte Q_x und Q_z so zu wählen, daß

$$\left(M_{xz}^{(1)} + M_{xz}^{(2)} \right)_{s = \frac{C}{2}} = 0$$

wird und somit Δ_W am Kreuzungspunkt $s = \frac{C}{2}$ verschwindet.

Setzen wir dann

$$\Delta Q_{II} = \alpha \cdot 0{,}025 ,$$

so liefert Gl. (5.3) eine Abschätzung für den Faktor α sowie für die größtmögliche Q-Verschiebung

$$\Delta Q = \alpha \cdot 0{,}025 ,$$

bei der der Strahl noch stabil bleibt, und die zum Amman-Ritson-Effekt gehörende äußerste Luminositätsgrenze mit

$$\Delta Q_{II} = 0{,}025$$

kann nur erreicht werden, wenn die Beziehung (5.3) mit $\alpha = 1$ erfüllbar ist.

Zahlenbeispiel:

Wir setzen wiederum $\varkappa = 1$.

Um wieder den ursprünglichen Wert

$$\sigma_x = \sqrt{\varepsilon_{x0}} \cdot \sqrt{\beta_x}$$

der Strahlbreite zu erreichen, muß dann nach Gl. (6.6)

$$\beta_x = 0{,}5 \cdot \langle \kappa^2 \rangle$$

gewählt werden.

Damit ergeben sich die zugehörigen Dämpfungskonstenten nach (6.3) zu

$$\alpha_s = \frac{5}{4} \cdot \frac{\overline{W}}{E} \; ;$$

$$\alpha_I = \frac{5}{16} \cdot \frac{\overline{W}}{E} \; ;$$

$$\alpha_{II} = \frac{7}{16} \cdot \frac{\overline{W}}{E} \; .$$

Für die halbe Strahlhöhe erhalten wir aus (Gl. (6.4b)

$$\sigma_z = 0{,}72 \cdot \sigma_x \; .$$

Δ_W verschwindet am Kreuzungspunkt $s = \frac{C}{2}$, wenn

$$Q_x \approx 9{,}23$$

$$Q_z \approx 4{,}23$$

gesetzt wird.

Der in (5.15) auftretende Faktor

$$\frac{2 \cdot |\sigma_{xz}|}{(\sigma_x + \sigma_z)^2}$$

nimmt dann bei $s = \frac{C}{2}$ den Wert

$$\frac{2 \cdot |\sigma_{xz}|}{(\sigma_x + \sigma_z)^2} \approx 0{,}5 \cdot \pi \cdot |\delta Q|$$

an, so daß die Bedingung (5.15) als erfüllt angesehen werden kann.

Schließlich ergibt sich aus (5.3), daß die Luminositätsgrenze insgesamt um den Faktor

$$\frac{\Delta Q_{II}}{\Delta Q_z} = \frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{z0}} \cdot 1{,}25$$

angehoben wird.

Die Luminosität steigt also bei Entdämpfung der Betatronschwingungen nochmals um 40 % gegenüber ihrem Wert bei Kopplung allein (vgl. Abschnitt V A.))

Für Anregungen und fördernde Diskussionen möchte ich Herrn Dr. A. Piwinski und Herrn Dr. H. Wiedemann recht herzlich danken.

Literatur:

(1) K. G. Steffen - H. Wiedemann: A FODO-Channel for continuously varying the radiation damping in an electron synchrotron (in Vorbereitung)

(2) G. Leleux: Orsay, Technischer Bericht 14-64 GL-FB

(3) A. Piwinski: Strahlparameter bei Kopplungen, horizontaler und vertikaler Krümmung und Raumladungseffekt (Interner Bericht)

(4) G. Ripken: Untersuchungen zur Strahlführung und Stabilität der Teilchenbewegung in Beschleunigern und Storage-Ringen unter strenger Berücksichtigung einer Kopplung der Betatronschwingungen (DESY R1-70/4).

(5) A. Piwinski: Private Mitteilung (wird veröffentlicht)