

20. 5. 64

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

DESY

DESY 64/5

April 1964

Theorie

PHOTOERZEUGUNG VON π -MESONEN

I. TEIL

VORLESUNG, GEHALTEN IM WINTERSEMESTER 1963/64

von

P. Stichel

Physikalisches Staatsinstitut der
Universität Hamburg

Ausgearbeitet von

H. Blechschmidt, G. Köpp, K. Schilling und D. Schmidt

PHOTOERZEUGUNG VON π -MESONEN

I. TEIL

VORLESUNG, GEHALTEN IM WINTERSEMESTER 1963/64

von

P. Stichel

Physikalisches Staatsinstitut der
Universität Hamburg

Ausgearbeitet von

H. Blechschmidt, G. Köpp, K. Schilling und D. Schmidt

Abstract

This is the first part of a lecture course on "Photoproduction of π -Mesons", given winter 1963/64 at the University of Hamburg. The lecture notes were taken by H. Blechschmidt, G. Köpp, K. Schilling and D. Schmidt.

This first part is concerned with photoproduction of pions in the resonance region ($E_\gamma < 1$ BeV). The main points of view of the theory and some important experimental facts are presented. A detailed discussion of resonance phenomena in the presence of inelastic channels is given in connection with the 2nd resonance.

Vorwort

Das vorliegende Manuskript ist eine Ausarbeitung einer im Wintersemester 1963/64 an der Universität Hamburg gehaltenen zweistündigen Vorlesung. Es handelt sich hierbei um den 1. Teil eines zweisemestrigen Kurses über "Photoerzeugung von π -Mesonen". Dieser Kurs verfolgt in erster Linie den Zweck, den bei Desy auf dem Gebiet der Photoerzeugung tätigen Experimentalphysikern sowie jüngeren Theoretikern das notwendige theoretische Rüstzeug zu verschaffen. Demzufolge wurden mathematische Einzelheiten der Theorie oft nur knapp behandelt und die wichtigsten experimentellen Daten ausführlich diskutiert. Dabei wurde versucht, nur die wesentlichen Gedankengänge und Fakten zu präsentieren. Eine Ausnahme von dieser Regel bilden die Resonanzphänomene bei Anwesenheit inelastischer Kanäle, deren allgemeine Theorie im Zusammenhang mit der 2. Resonanz sehr ausführlich behandelt wurde.

Der 1. Teil dieses Kurses befaßt sich mit der Photoerzeugung von π -Mesonen im Resonanzbereich ($E_{\gamma}^{\text{Lab}} < 1 \text{ BeV}$), während im folgenden 2. Teil der BeV-Bereich behandelt wird.

Frl. Köpp sowie den Herren Blechschmidt, Schilling und Schmidt danke ich für die bei der Ausarbeitung dieser Vorlesung aufgewandte Mühe. Auch Frau Wibel sei für das Schreiben des Manuskriptes gedankt.

Hamburg, April 1964

P. Stichel

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Kapitel 1 Kinematik und Invarianzen =====	1
1.1 Kinematik	1
1.2 Lorentz- und Eichinvarianz	3
1.3 Multipole	8
1.4 Isospinauswahlregeln und G-Parität	11
1.5 Das Watson-Theorem	17
Literaturangaben zum 1. Kapitel	20
Kapitel 2 Einfach-Photoerzeugung im Bereich d. Resonanzen =====	21
<u>2.1</u> <u>Verhalten an der Schwelle</u>	21
Literaturangaben zu Kapitel 2.1	29
<u>2.2</u> <u>Die 1. Resonanz</u>	30
2.2.1 Die Quantenzahlen der 1. Resonanz in der Photoerzeugung	30
2.2.2 Der Zusammenhang zwischen der 1. Resonanz in der π -N-Streuung und der Photo- erzeugung	35
2.2.3 Der Betrag der resonanten Amplitude	41
2.2.4 Zusammenfassung	43
Literaturangaben zu Kapitel 2.2	46

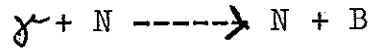
	Seite
<u>2.3</u> <u>Polarisationsmessungen</u>	47
2.3.1 Herstellung linear polarisierter γ -Quanten	47
2.3.2 Messung der Polarisation des Rückstoß- nukleons bei der Photoerzeugung	52
2.3.3 Phänomenologische Beschreibung von Polarisationsexperimenten	56
2.3.4 Bisherige Messungen mit linear polarisierten γ -Quanten	61
Literaturangaben zu Kapitel 2.3	65
<u>2.4</u> <u>Die 2. Resonanz</u>	66
2.4.1 Die Quantenzahlen der 2. Resonanz in der Photoerzeugung	66
2.4.2 Das Isobarenmodell	71
2.4.3 Phänomenologische Diskussionen der 2. Resonanz in der π -N-Streuung	75
2.4.3.1 Die K-Matrix	77
2.4.3.2 Die Eigenphasen der S-Matrix u. die Definition einer Resonanz	87
2.4.3.3 Resonanzen als Pole im 3. Blatt	93
2.4.3.4 Resonanzen und Pole der K-Matrix	96
2.4.3.5 Breit-Wigner-Formel für f	97
2.4.4 Phänomenologische Diskussion der 2. Resonanz in der Photoerzeugung	102
2.4.4.1 Verallgemeinerung des Watson-Theorems	103
2.4.4.2 K-Matrix Formalismus	105
Literaturangaben zu Kapitel 2.4	109

	Seite
<u>2.5</u> <u>Die 3. Resonanz</u>	110
2.5.1 Die Quantenzahlen der 3. Resonanz bei der π -N-Streuung	110
2.5.2 Die Quantenzahlen der 3. Resonanz in der Photoerzeugung	113
Literaturangaben zu Kapitel 2.5	117
 Anhang	 118

1.) Kinematik und Invarianzen.

1.1 Kinematik

Folgende Prozesse werden betrachtet:



Viererimpulse : $k \quad p_1 \quad p_2 \quad q$

B: Beliebiges Teilchen oder Teilchensystem mit verschwindender Strangeness und Nukleonenzahl : $\pi, \rho, \omega \dots \dots 2\pi, 3\pi \dots \dots$

Alle bei dem Prozess ein- und auslaufenden Teilchen sind reell, d.h. ihre Viererimpulse liegen auf der Massenschale :

$$k^2 = 0 ; \quad q^2 = M_B^2 ; \quad p_1^2 = p_2^2 = M^2$$

Für das Skalarprodukt zweier Vierervektoren a und b schreiben wir: (über doppelt vorkommende griechische Indices wird summiert!)

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a_\mu g^{\mu\nu} b_\nu = a_0 b_0 - \underline{a \cdot b}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d.h. wir benutzen die Metrik

Die Übergangsamplitude für den Photoerzeugungsprozess hängt nach Abspaltung der Spinabhängigkeit, definierten Spin für B vorausgesetzt, nur von 2 kinematischen Variablen ab, für die man zweckmässigerweise die Invarianten s und t wählt :

$$s = (k + p_1)^2 = (q + p_2)^2, \text{ das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem (c.m.s.)}$$

$$t = (k - q)^2 = (p_1 - p_2)^2, \text{ das Quadrat des auf das Nukleon übertragenen Viererimpulses.}$$

Schwellenenergie für den Prozess $\gamma + N \longrightarrow N + B$:

$$\text{Forderung : } S \geq (M + M_B)^2$$

d.h. Energie im c.m.s. = Summe der Massen der nach dem Prozess vorhandenen Teilchen, wobei M (M_B) die Masse des Nukleons(B) ist.

$$S = (k + p_1)^2 = M^2 + 2kp_1 \\ = M^2 + 2 E_\gamma^{Lab} M \geq (M + M_B)^2$$

$$E_{\gamma, \text{Schwelle}}^{\text{Lab.}} \equiv E_t = M_B \left(1 + \frac{M_B}{2M} \right) \quad (1.11)$$

z.B. : π - Einfach-Erzeugung :

$$M_B \approx 140 \text{ MeV} ; \quad E_t \approx 150 \text{ MeV}$$

π - Zweifach-Erzeugung :

$$M_B \approx 280 \text{ MeV} ; \quad E_t \approx 320 \text{ MeV}$$

Zusammenhang des übertragenen Impulses mit dem Reaktionswinkel Θ im Schwerpunktsystem (abgekürzt c.m.s.)

$$t = (k - q)^2 = M_B^2 - 2|k| \sqrt{M_B^2 + |q|^2} + 2|k||q| \cos \Theta \quad (1.12)$$

Θ ist also der Winkel zwischen den Impulsen des einfallenden γ -Quants und des Schwerpunkts des Teilchens (oder Teilchensystems) B.

Nach Gl. (1.12) ist $t = (s, \cos \Theta)$ denn $|k|$ und $|q|$ können durch s ausgedrückt werden :

$$s = (k + p_1)^2 = \left[(k_0 + \sqrt{|p_1|^2 + M_1^2})^2 - (k + p_1)^2 \right]$$

im c.m.s. ist $p_1 = -k$, ausserdem gilt $k_0 = |k|$. Daraus folgt

$$s = (|k| + \sqrt{M_1^2 + |k|^2})^2 / \text{c.m.s.}$$

bzw. $|k| = \frac{s - M^2}{2\sqrt{s}} \quad (1.13)$

Analog erhält man aus

$$s = \left(\sqrt{|q|^2 + M^2} + \sqrt{|q|^2 + M_B^2} \right)^2 / \text{c.m.s.}$$

$$|q| = \left(\frac{(s - M^2 + M_B^2)^2 - 4sM_B^2}{4s} \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

Der physikalische Bereich der Impulsübertragung $t(s, \cos \Theta)$ wird bei fester Energie s durch die beiden Werte von t für $\cos \Theta = \pm 1$ (s.1.12) begrenzt :

$$t_{\min}(s) = t \leq t_{\max}(s)$$

mit $t_{\max}(s) \equiv M_B^2 - 2|k||\sqrt{M_B^2 + |q|^2} \pm 2|k||q|$

Wie man durch einfache Rechnungen zeigen kann, hat t_{\max} folgende Eigenschaften :

- 1.) $t_{\max}(s) < 0$
- 2.) $t_{\max}(s)$ ist monoton wachsend
- 3.) $\lim_{s \rightarrow \infty} t_{\max}(s) = 0$
- 4.) $t_{\max}(\text{Schwelle}) = \frac{-M_B^2 \cdot M}{M + M_B}$

Aus 1.) bis 4.) folgt also:

$$5.) \frac{-M_B^2 \cdot M}{M + M_B} \leq t_{\max}(s) < 0$$

1.2 Lorentz- und Eichinvarianz

Infolge der Kleinheit der Feinstrukturkonstanten α genügt es, den Photoerzeugungsprozess in niedrigster Ordnung der Störungstheorie für die elektromagnetische Wechselwirkung zu behandeln. Das S-Matrixelement für den Prozess $\gamma + N_1 \rightarrow N_2 + B$ lässt sich dann schreiben:

$$S_{fi} = \alpha_{us} \langle B N_2 | H_w^{el} | \gamma N_1 \rangle \quad *) \quad (1.21)$$

*) Die Bezeichnung " aus " oder " ein " an einem Zustand bedeutet, dass es sich um einen Streuzustand handelt, der asymptotisch (d.h. für $t \rightarrow \infty$ in der Ortsdarstellung, was natürlich nur im nichtrelativistischen Grenzfall einen Sinn macht) im durch die angegebenen Teilchen charakterisierten Kanal, neben einer ebenen Welle eine ein- bzw. auslaufende Kugelwelle enthält.

Dabei resultiert der Streuzustand für das auslaufende ($B N_2$)-System allein aus der starken Wechselwirkung. Der einlaufende (γN_1)-Zustand ist eine ebene Welle, H_W^{el} ist der Wechselwirkungsoperator für die elektromagnetische Wechselwirkung.

$$H_W^{el} = \int d^4x A^{\mu(0)}(x) j_\mu^{el}(x) \quad (1.22)$$

wobei $A^{\mu(0)}(x)$ das freie Photonenfeld ist und der Strom $j_\mu^{el}(x)$ aus Feldoperatoren für Nukleonen, π -Mesonen usw. aufgebaut ist, die sich aus den Bewegungsgleichungen für die starke Wechselwirkung ergeben.

Explizit gilt :

$$j_\mu^{el}(x) = \frac{e}{2} \left[\bar{\Psi}_N(x) \gamma_\mu (1 + T_3) \Psi_N(x) + \text{Pionenstrom} + \dots \right] \quad (1.23)$$

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \Psi_{\text{Proton}} \\ \Psi_{\text{Neutron}} \end{pmatrix} \quad ; \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

der Pionenstrom :

$$j_\mu^{el}(\pi) \sim e \phi_\pi^\dagger \partial_\mu t_3 \phi_\pi$$

$$\phi_\pi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{aligned} \phi_{\pi^+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi_{\pi^-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) \\ \phi_{\pi^0} &= \phi_3 \end{aligned} \quad ; \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Dabei ist t_3^\dagger bzw. t_3 die 3. Komponente des Isospinoperators für die Nukleonen bzw. π -Mesonen. Die Matrix t_3 wurde in der sphärischen Basis (ϕ_{π^\pm}, ϕ_0) angegeben.

Um die Wirkung von H_W^{el} auf den Anfangszustand $|\gamma N_1\rangle$ zu berechnen, entwickeln wir das Vektorpotential $A_\mu^{(0)}$ zunächst nach ebenen Wellen:

$$A_\mu^{(0)}(x) = \sum_{p=\pm 1} \int \frac{d^3k}{2|k|} (\epsilon_\mu^p a^p(\underline{k}) e^{-ikx} + \text{herm. konj}) \quad (1.25)$$

$a^p(\underline{k})$ ist ein Vernichtungsoperator für ein Photon mit der Polarisation p und dem Impuls \underline{k} .

$$p = \begin{cases} +1 & \text{rechts zirkular polarisiertes } \gamma \\ -1 & \text{links " " " " " " } \end{cases}$$

Da das Photon nur zwei Spineinstellungen hat (s. Gl. (1.25)), muss der Polarisationsvektor $\underline{\epsilon}_\mu$ zwei Nebenbedingungen genügen:

- 1) $\underline{\epsilon} \cdot \underline{k} = 0$ (Lorentzbedingung)
- 2) $\underline{\epsilon} \cdot \underline{a} = 0$ (die Wahl von \underline{a} charakterisiert die verwendete Eichung)

Am meisten gebräuchlich ist die nichtkovariante Coulombeichung:

$$\epsilon_0^p = 0; \quad \underline{k} \cdot \underline{\epsilon}^p = 0, \quad \text{d. h.} \quad \underline{a} = (1, 0, 0, 0)$$

Bilden wir das Dreibein $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{k}/|\underline{k}|)$,

$$\underline{\epsilon}^{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{n}_1 + i \underline{n}_2)$$

so gilt:

$$\underline{\epsilon}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{n}_1 - i \underline{n}_2)$$

Die Formeln (1.25) und (1.22) werden jetzt unter Berücksichtigung von

$$a^{p'}(\underline{k}') | \gamma, \underline{k}, p, N_1 \rangle = 2 |\underline{k}| \delta(\underline{k} - \underline{k}') \delta_{pp'} | N_1 \rangle \quad *)$$

in (1.21) eingesetzt. Man erhält

* Diese Beziehung ergibt sich folgendermassen:

Der Zustand $| \gamma, \underline{k}, p, N_1 \rangle$ kann durch Anwendung eines Erzeugungsoperators $a_p^+(\underline{k})$ auf den Zustand $| N_1 \rangle$ hergestellt werden:

$$| \gamma, \underline{k}, p, N_1 \rangle = a_p^+(\underline{k}) | N_1 \rangle$$

auf beiden Seiten Anwendung des Vernichtungsoperators $a_{p'}(\underline{k}')$:

$$a_{p'}(\underline{k}') | \gamma, \underline{k}, p, N_1 \rangle = a_{p'}(\underline{k}') a_p^+(\underline{k}) | N_1 \rangle$$

Da $a_{p'}^+(\underline{k}') a_{p'}(\underline{k}') | N_1 \rangle = 0$, kann auf der rechten Seite statt $a_{p'}^+(\underline{k}') a_p^+(\underline{k})$ auch der Kommutator $[a_{p'}(\underline{k}'), a_p^+(\underline{k})]$ geschrieben werden. Für diesen gilt aber:

$$[a_{p'}(\underline{k}'), a_p^+(\underline{k})] = \delta_{pp'} \delta(\underline{k} - \underline{k}') \cdot 2 |\underline{k}|$$

Wenn man das einsetzt, erhält man die oben verwendete Beziehung.

$$S_{fi} = \epsilon^{\mu P} \langle B, N_2 | \int d^4x j_{\mu}^{el}(x) e^{-iKx} | N_1 \rangle \quad (1.26)$$

$j_{\mu}(x)$ kann wegen der Translationsinvarianz durch $j_{\mu}(0)$ ausgedrückt werden:

$$j_{\mu}(x) = e^{iPx} j_{\mu}(0) e^{-iPx} \quad (1.27)$$

wobei P_{μ} der Energie - Impulsoperator ist. Jetzt kann die Integration in (1.26) ausgeführt werden; man erhält :

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \int (k + p_1 - p_2 - q) \underbrace{\epsilon^{\mu P_{aus}} \langle B, N_2 | j_{\mu}(0) | N_1 \rangle}_{T_{fi}} \quad (1.28)$$

T_{fi} ist also das reduzierte S-Matrixelement.

Eichinvarianz

Bekanntlich gehört zu jedem Erhaltungssatz ein Invarianzprinzip; der Eichinvarianz entspricht die Erhaltung der Ladung, also die Kontinuitätsgleichung für den elektromagnetischen Strom:

$$\partial^{\mu} j_{\mu}^{el}(x) = 0$$

Welche Konsequenzen hat die Forderung nach Eichinvarianz für unser Matrixelement T_{fi} ?

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\partial^{\mu} \langle B, N_2 | j_{\mu}^{el}(x) | N_1 \rangle = 0$$

Wegen der Translationsinvarianz (s.Gl. (1.27)) kann man dafür schreiben:

$$\partial^{\mu} e^{i(q+p_1-p_2)x_{aus}} \langle B, N_2 | j_{\mu}^{el}(0) | N_1 \rangle = 0 = R^{\mu} e^{iR x_{aus}} \langle B, N_2 | j_{\mu}(0) | N_1 \rangle$$

also gilt :

$$R^{\mu} \langle B, N_2 | j_{\mu}(0) | N_1 \rangle = 0 \quad (1.29)$$

Es war

$$T_{fi} = \epsilon^{\mu P_{aus}} \langle B, N_2 | j_{\mu}(0) | N_1 \rangle = T_{fi}(P_1, P_2, q, \epsilon^P, \text{Spins})$$

Die Aussage der Eichinvarianz ist jetzt folgende : Wird in T_{fi} ϵ^P durch k ersetzt, d.h. ist der Polarisationsvektor ϵ parallel zum

zum Ausbreitungsvektor k (longitudinale Photonen !!), so verschwindet T_{fi} :

$$T_{fi} (P_1, P_2, q, k, \text{Spins}) = 0$$

Lorentzinvarianz

Wir betrachten im folgenden das Beispiel der Pion - Einfacherzeugung. Die allgemeinste Form des Matrixelements T_{fi} ist:

$$T_{fi} = \sum_i A_i (s, t) \bar{u}(N_2) M_i u(N_1)$$

Die u sind Viererspinoren, M_i ist eine (zunächst beliebige) 4×4 - Matrix, aufgebaut aus γ_μ , $P \equiv \frac{P_1 + P_2}{2}$, q , k und ϵ_μ .

Es könnten also zunächst 16 unabhängige Größen M_i existieren.

Diese Anzahl wird durch folgende einschränkende Bedingungen reduziert:

- 1.) Die M_i müssen linear unabhängig sein, wobei die Tatsache, dass die u Lösungen der Dirac-Gleichung sind, mit ausgenutzt wurde, d.h. die $\bar{u} M_i u$ müssen ebenfalls linear unabhängig sein.
- 2.) Die M_i müssen eichinvariant sein und linear in ϵ_μ .
- 3.) Die Größen $\bar{u} M_i u$ müssen Pseudoskalare sein (wegen der Pseudoskalarität des π - Mesons).

Man kann zeigen, dass es genau 4 linear unabhängige Pseudoskalare M_i gibt :

$$M_1 = i \gamma_5 \not{k}$$

$$M_2 = 2i \gamma_5 (P \not{\epsilon} q k - P k q \not{\epsilon})$$

$$M_3 = \gamma_5 (\not{k} q k - \not{k} q \not{\epsilon})$$

$$M_4 = 2\gamma_5 (\not{k} P R - \not{k} P \not{\epsilon} - i M \not{k}) \quad *)$$

Die Tatsache, dass es 4 unabhängige Amplituden gibt, kann man leicht in der Basis der Helizitätsamplituden sehen: Die Helizität eines Nukleons sei λ . Dann ist:

* Das Symbol \not{k} bedeutet $\gamma^\mu k_\mu$

$$\lambda = \begin{array}{l} + 1/2 \text{ Spin des Nukleons} \uparrow \uparrow \text{Impuls} \\ - 1/2 \text{ " " " } \uparrow \downarrow \text{ " } \end{array}$$

λ_1 bzw. λ_2 sind die Helizitäten des ein- bzw. auslaufenden Nukleons.

Dann haben wir als allgemeine Helizitätsamplitude $T_{\lambda_1, \lambda_2}^P(s, t)$

Die Paritätsoperation bewirkt:

$$P \xrightarrow{P_{op}} -P \quad ; \quad \lambda \xrightarrow{P_{op}} -\lambda$$

also $T_{\lambda_1, \lambda_2}^P(s, t) \xrightarrow{P_{op}} T_{-\lambda_1, -\lambda_2}^{-P}(s, t)$

Da λ_1, λ_2 und P je zwei Werte annehmen können, haben wir insgesamt 8 Amplituden $T_{\lambda_1, \lambda_2}^P$. Wegen des Paritätsverhaltens von $T_{\lambda_1, \lambda_2}^P$ sind davon 4 Größen unabhängig.

1.3 Multipole

Die Streuamplitude für die Streuung zweier skalarer Teilchen kann durch die Streuphasen $\delta_\ell(s)$ ausgedrückt werden.

$$T(s, t) = \sum (2\ell + 1) t_\ell(s) P_\ell(\cos \theta)$$

Dabei sind die Partialwellen t_ℓ wie folgt definiert:

$$t_\ell(s) = \frac{\sqrt{s}}{k} e^{i\delta_\ell(s)} \sin \delta_\ell(s)$$

Diese Phasenanalyse ist aus der Potentialstreuung wohlbekannt. Das Analogon im Falle der hier betrachteten Photoerzeugung ist die Multipolzerlegung. Sie wird im folgenden für den Prozess $\gamma + N_1 \rightarrow N_2 + \pi$ ausgeführt.

Das Übergangsmatrixelement hat, wenn wir sämtliche Quantenzahlen mitschreiben, folgende Form (für das Beispiel der Pion-Einfachpion-erzeugung).

$$T_{f_i} = \langle \pi, N_2; q, 0, \lambda_2 | T | \gamma, N_1; \underline{k}, p, \lambda_1 \rangle \quad (1.31)$$

Der Anfangs- und der Endzustand werden nun nach Eigenzuständen zum Gesamtdrehimpuls j des Systems im c.m.s. entwickelt :

Der Endzustand

$$|\pi, N_2; q, 0, \lambda_2\rangle = \sum_{j, l, m} \langle j, l, m | q, 0, \lambda_2 \rangle |j, l, m\rangle \quad (1.32)$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist die den Clebsch-Gordan-Koeffizienten entsprechende Grösse für die Lorentz-Gruppe; es handelt sich also um bekannte, kinematische Grössen.

Der Anfangszustand :

$$|j, N_1; k, P, \lambda_1\rangle = \sum_{j, L, \pi_L, m} \langle j, L, \pi_L, m | k, P, \lambda_1 \rangle |j, L, \pi_L, m\rangle \quad (1.33)$$

Hier wird also wegen der zwei möglichen Spineinstellungen des Photons eine zusätzliche Variable π_L benötigt .

L ist der Gesamtdrehimpuls des Photons im Schwerpunktsystem. Hätte das Photon eine endliche Masse, so könnte man L als Summe des relativen Bahndrehimpulses zwischen Photon und Nukleon und des Spins des Photons ausdrücken. Wegen der verschwindenden Masse des Photons ist diese Betrachtungsweise jedoch unzulässig.

$j = L \pm 1/2$ ist der Gesamtdrehimpuls des Systems.

Während L die Multipolarität angibt, liefert die Parität π_L die Aussage, ob es sich um einen elektrischen oder magnetischen Multipol handelt. Es gilt :

$$\pi_L = (-1)^L \quad \text{für elektrische Multipole}$$

$$\pi_L = (-1)^{L+1} \quad \text{" magnetische Multipole}$$

(1.32) und (1.33) werden jetzt in (1.31) eingesetzt. Wegen der Paritätserhaltung ist $\pi_1 = \pi_f$, d.h. $\pi_L = (-1)^{L+1}$, über π_L braucht also nicht summiert zu werden. Ausserdem ist wegen der Drehinvarianz die T - Matrix diagonal im Drehimpuls (d.h. in j und m)

$$\langle j, m | T | j', m' \rangle = \delta_{j, j'} \delta_{m, m'} T(j)$$

wobei T(j) unabhängig von m ist.

Mit Berücksichtigung dieser Tatsachen folgt:

$$T_f = \sum_{j, l, L} X_{j, l, L} (s, t, \lambda_1, \lambda_2, P) \underbrace{\langle l | T(j, s) | L, \pi_L \rangle}_{\text{Multipolamplitude}} \quad (1.34)$$

Die Summation über m ist hier schon ausgeführt, sie wirkt sich nur auf die $X_{j,1,L}$ aus. Die $X_{j,1,L}$ sind Produkte von Clebsch-Gordan-Koeffizienten, über m summiert, also rein kinematische Grössen.

Auch in der hier betrachteten Basis gibt es natürlich vier unabhängige Amplituden für festes S und j . Das soll an einem Beispiel gezeigt werden:

$$j = 3/2$$

$$a) \pi_L = +1 \begin{cases} M_1 \\ E_2 \end{cases} \quad P_{3/2} \text{ - Endzustand}$$

(das ist die Situation bei der 1. $\pi - N$ - Resonanz)

$$b) \pi_L = -1 \begin{cases} E_1 \\ M_2 \end{cases} \quad D_{3/2} \text{ - Endzustand}$$

Die Multipolzerlegung wird deshalb durchgeführt, weil man bei niedrigen Energien den Photoerzeugungsprozess durch wenige Multipole beschreiben kann. Ihre Anzahl ist dadurch beschränkt, dass nur Drehimpulse wesentlich beitragen können, die kleiner oder gleich dem klassischen Drehimpuls sind. Dieser ist $|q| \cdot r$ (r = Reichweite der Wechselwirkung). Der Drehimpuls hat also wegen der endlichen Reichweite der starken Wechselwirkung eine obere Grenze.

Für die Photoerzeugung eines π - Mesons z.B. ist die Reichweite der für die $\pi - N$ -Streuung verantwortlichen Kräfte massgebend, deren grösste Reichweite $r \approx \frac{1}{2m_\pi}$ ist.

Dieses korrespondenzmässige Bild ist mehr ein qualitatives als ein quantitatives, da es durch Resonanzeffekte gestört werden kann. So würde man z.B. für den Prozess $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ an der Schwelle nur S - Wellen erwarten. Wegen der benachbarten Δ -Resonanzen dominieren jedoch die p - Wellen.

Aufgrund der bei einem Experiment vorliegenden Bedingungen kann man etwa die maximale Multipolordnung angeben und dann versuchen, die

verbliebenen Multipolamplituden an die experimentellen Ergebnisse anzupassen.

Natürlich lassen sich nicht nur die Helizitätsamplituden, sondern auch unsere $A_i(s,t)$ durch die Multipolamplituden ausdrücken:

$$A_i(s,t) = \sum_{j_i, l_i, L} Y_{j_i, l_i, L}^i(s_i, t_i) \langle l_i || T(j_i, s_i) || L_i, \pi_i \rangle \quad (1.35)$$

Die $Y_{j_i, l_i, L}^i$ sind kinematische Grössen, die sich aus Legendre-Polynomen und deren Ableitungen zusammensetzen. Ihre explizite Form ist der Arbeit von CGLN in Phys. Rev. 106 zu entnehmen.

Analog lässt sich die Multipolzerlegung für beliebiges B diskutieren.

1.4 Isospinauswahlregeln und G - Parität.

Trotzdem elektromagnetische Wechselwirkungen nicht invariant gegenüber Drehungen im Isospinraum sind, lassen sich jedoch in jeder Ordnung der Störungsrechnung definierte Isospinauswahlregeln angeben.

In unserem Fall (1. Ordnung der Störungsrechnung) kann der elektromagnetische Strom in einen invarianten isoskalaren Anteil und einen nicht invarianten Iovektoranteil aufgespalten werden:

$$j_\mu^{el} = j_\mu^{(s)} + j_\mu^{(v)} \quad (1.41)$$

Bekanntlich gilt für die Ladung Q :

$$Q = \int d^3x j_0^{el}(x)$$

Q wird durch

$$Q = T_3 + \frac{N + S}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_3 : \text{ Isospin} \\ S = \text{ Strangeness} \\ N = \text{ Baryonenzahl} \end{array} \right.$$

in einen Iovektoranteil (T_3) und einen isoskalaren Anteil ($\frac{N + S}{2}$) aufgespalten. Man kann schreiben :

$$Q = T_3 + \frac{N + S}{2} = \int d^3x j_\mu^{(s)}(x) + \int d^3x j_\mu^{(v)}(x)$$

und definiert jetzt :

$$T_3 = \int d^3x j_\mu^{(V)}(x) \quad ; \quad \frac{N+S}{2} = \int d^3x j_\mu^{(S)}(x) \quad (1.42)$$

Der Pionenanteil zum elektromagnetischen Strom z.B. hat wegen $N = S = 0$ für Pionen nur einen Isovektoranteil.

Aus der Erhaltung des Isospins und der damit verbundenen Zerlegung des Stroms (s.o.) folgt, dass die vier möglichen Amplituden für Photoeinfacherzeugungsprozesse von π -Mesonen sich durch drei Matrixelemente ausdrücken lassen.

Das allgemeine Matrixelement lautet:

$$\langle f | \epsilon_\mu j_\mu^{el} | N_1 \rangle$$

Der Isospin im Endzustand kann bei der Photoeinfacherzeugung

$\gamma + N_1 \rightarrow \pi + N_2$ die Werte $I = 1 \pm 1/2$ annehmen.

$$\langle f | I, I_3 | \epsilon_\mu j_\mu^{el} | N, 1/2, T_3 \rangle$$

Wir betrachten zunächst den vektoriellen Anteil des Stromes für die beiden möglichen Isospinwerte $1/2; 3/2$:

$I = 1/2$:

$$\begin{aligned} \langle f, 1/2, I_3 | \epsilon_\mu j_\mu^{(V)} | N, 1/2, T_3 \rangle &= \\ &= \delta_{I_3 T_3} \cdot C(1/2, 1, 1/2, I_3, 0) \cdot V_1(-3/2) \end{aligned} \quad (1.43)$$

V_1 ist ein reduziertes Matrixelement.

$I = 3/2$:

$$\begin{aligned} \langle f, 3/2, I_3 | \epsilon_\mu j_\mu^{(V)} | N, 1/2, T_3 \rangle &= \\ &= \delta_{I_3 T_3} \cdot C(1/2, 1, 3/2, I_3, 0) \cdot V_3 \cdot 3 \end{aligned} \quad (1.44)$$

Für den skalaren Stromanteil erhält man :

$I = 1/2$:

$$\langle f, 1/2, I_3 | \epsilon_\mu j_\mu^{(S)} | N, 1/2, T_3 \rangle = \delta_{I_3 T_3} \cdot S_1 \cdot \sqrt{3} \quad (1.45)$$

$I = 3/2$:

$$\langle f, 3/2, I_3 | \epsilon_\mu j_\mu^{(S)} | N, 1/2, T_3 \rangle = 0 \quad (1.46)$$

Für diesen Fall verschwindet der Clebsch-Gordan-Koeffizient. Das ist plausibel, denn durch einen isoskalaren Operator kann nicht ein Isospin 1/2 in einen Isospin 3/2 überführt werden.

Alle Photoerzeugungsprozesse lassen sich also als Linearkombination der drei Größen S_1, V_1, V_3 schreiben.

Die Aufspaltung der Matrixelemente in Clebsch-Gordan-Koeffizienten und reduzierte Matrixelemente beruht auf dem Wigner-Eckart-Theorem.

Dies lautet allgemein für einen Tensoroperator T_{JM} :

$$\langle j', m' | T_{JM} | j, m \rangle = C(j, J, j', m, M) \delta_{m+M, m'} \langle j' || T(J) || j \rangle \quad (1.47)$$

Es wird ausführlich in den Büchern von Rose oder Edmonds abgeleitet.

Die vier möglichen Photoerzeugungsprozesse sind :

$\gamma + p \longrightarrow n + \pi^+$: Amplitude	T^+
$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0$	"	T^0
$\gamma + n \longrightarrow p + \pi^-$	"	T^-
$\gamma + n \longrightarrow n + \pi^0$	"	T^{no}

Der Zusammenhang der Amplituden T mit den reduzierten Matrixelementen erhält man folgendermassen :

Das allgemeine Übergangsmatrixelement sieht so aus :

$$\langle \pi, N, t_3, \tau_3 | T_{I', 0} | N, 1/2, \tau_3' \rangle$$

$$T_{I', 0} = \begin{cases} E_p J_p^{(v)} & I' = 0 \\ E_p J_p^{(s)} & I' = 1 \end{cases}$$

Der Endzustand enthält ein Isospingemisch. Wir entwickeln nach Isospinzuständen $| I, t_3 + \tau_3 \rangle$

$$= \sum_{I=1/2, 3/2} C(1/2, 1, I, \tau_3, t_3) \langle I, \tau_3 + t_3 | T_{I', 0} | N, 1/2, \tau_3' \rangle$$

Auf das Matrixelement wird jetzt das Wigner-Eckart-Theorem angewandt:

$$= \sum_I C(1/2, 1, I, \tau_3, t_3) C(1/2, I', I, \tau_3', 0) \delta_{\tau_3', \tau_3 + t_3} \langle I || T_{I'} || 1/2 \rangle \quad (1.48)$$

Dabei besteht folgender Zusammenhang mit den oben definierten

S_1, V_1, V_3

$$\begin{aligned} \langle 1/2 \parallel T_0 \parallel 1/2 \rangle &= S_1 \sqrt{3} \\ \langle 3/2 \parallel T_1 \parallel 1/2 \rangle &= V_3 \sqrt{3} \\ \langle 1/2 \parallel T_1 \parallel 1/2 \rangle &= -V_1 \sqrt{3/2} \end{aligned}$$

Die Werte für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten können Tabellen entnommen werden ; in Zahlen ergibt sich :

$$\begin{aligned} T^+ &= \sqrt{2} V_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} V_1 - \sqrt{2} S_1 \\ T^0 &= 2 V_3 - \frac{1}{2} V_1 + S_1 \\ T^- &= \sqrt{2} V_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} V_1 + \sqrt{2} S_1 \\ T^{n0} &= 2 V_3 - \frac{1}{2} V_1 - S_1 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Daraus können für die Wirkungsquerschnitte der oben angeführten Photoerzeugungsprozesse viele Schlussfolgerungen gezogen werden :

z.B. wenn $S_1 = 0$: $\frac{\sigma(\pi^+)}{\sigma(\pi^-)} = 1$

wenn ein Endzustand einen definierten Isospin hat,

z.B. sei $I = 3/2$, folglich $S_1 = V_1 = 0$

Dann ist $\frac{\sigma^+}{\sigma^0} = 1/2$; $\frac{\sigma^-}{\sigma^0} = 1$

Sei $I = 1/2 \rightarrow V_3 = 0$

Dann ist $\frac{\sigma^+}{\sigma^0} = 2$ $\frac{\sigma^-}{\sigma^0} = 2$

Diese Verhältnisse können in der Nähe von Resonanzen Aufschluss über den Isospin geben.

Analog lassen sich die Isospinauswahlregeln für beliebiges B diskutieren.

Betrachtung der G - Parität :

Die G - Parität ist folgendermassen definiert :

$$G \equiv C e^{-i\pi T_2}$$

C ist der Operator der Ladungskonjugation, $e^{-i\pi T_2}$ bedeutet eine Drehung um die 2 - Achse im Isospinraum um 180° .

Die Nukleonen sind keine Eigenzustände von G, C macht aus Nukleonen Antinukleonen, diese Operation wird von $e^{-i\pi T_2}$ nicht wieder rückgängig gemacht.

Für π - Mesonen gilt :

$$G|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\pm\rangle \quad (1.410)$$

d.h. π - Mesonen haben negative G - Parität.

Für das π^0 ist Gl. (1.410) leicht einzusehen : Daß $C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$, ist evident ; $\phi_{\pi^0} = \phi_3 \approx 3$ -Komponente im Isospinraum, bei einer Drehung um die 2 - Achse um 180° wird das Vorzeichen gewechselt :

$$e^{-i\pi T_2}|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle$$

Durch entsprechende Betrachtungen kann man sich Gl. (1.410) auch für π^\pm klarmachen :

Wir wollen jetzt das Verhalten des elektromagnetischen Stroms gegenüber der G - Parität untersuchen :

Es ist $C j_\mu^{el} C^{-1} = -j_\mu^{el}$,

d.h. der Strom wechselt bei Ladungskonjugation sein Vorzeichen (das ist die Definition von C).

Zur Betrachtung des Verhaltens gegen die Drehung im Isospinraum muss der Strom in seine isoskalare und seine isovektorielle Komponente zerlegt werden. Es gilt

$$e^{-i\pi T_2} j_\mu^{(s)} e^{i\pi T_2} = j_\mu^{(s)} \quad ; \quad e^{-i\pi T_2} j_\mu^{(v)} e^{i\pi T_2} = -j_\mu^{(v)}$$

denn $j_\mu^{(s)}$ ist invariant gegenüber Drehungen im Isospinraum, während sich $j_\mu^{(v)}$ wie das π^0 transformiert.

Also folgt :

$$G j_\mu^{(s)} G^{-1} = -j_\mu^{(s)}$$

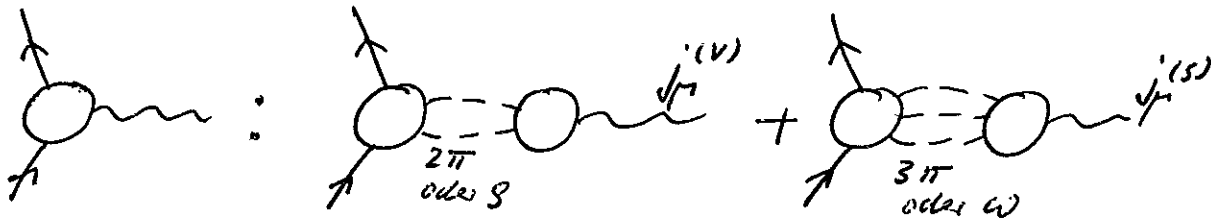
$$G j_\mu^{(v)} G^{-1} = +j_\mu^{(v)}$$

Da die starken Wechselwirkungen invariant gegenüber C und Drehungen im Isospinraum sind, ist auch die G - Parität eine erhaltene Grösse. Die Kopplung des Stromes muss dann so sein, dass der Vektoranteil an ein System mit positiver G - Parität, der Skalaranteil an ein System mit negativer G - Parität gekoppelt wird. Das bedeutet für die Kopplung an π - Mesonen, dass

$j_\mu^{(s)}$ nur an eine ungerade Zahl von π 's gekoppelt wird

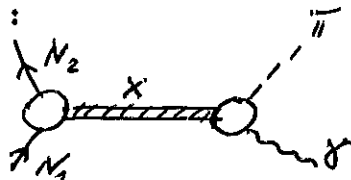
$j_\mu^{(v)}$ " " " gerade " " " " " " " " " " " "

So kann man z.B. den elektromagnetischen Formfaktor des Nukleons in einen vektoriellen und einen skalaren Anteil zerlegen :



wobei die resonante Wechselwirkung des 2π - bzw. 3π -Systems den ρ - bzw. ω -Beitrag zum Formfaktor ergeben.

Die Pion-Photoerzeugung kann u.a. durch folgenden Feynman-Graphen beschrieben werden :



Im Falle $G_x = +1$ trägt nur die isoskalare Amplitude S_1 zu dem Prozess bei, im Falle $G_x = -1$ die isovektoriellen Amplituden V_1, V_3 . Das liefert eine Möglichkeit, den Anteil des Austauschs von ρ -Mesonen (d.h. $X = \rho$) an der Photoproduktion experimentell zu bestimmen. Bekanntlich hat das ρ -Meson positive G - Parität (zerfällt in 2π), während das π - Meson und das ω - Meson (zerfällt in 3π) negative G - Parität besitzen. Wie bereits erwähnt, gilt für $S_1 = 0$ $\sigma^+/\sigma^- = 1$. Durch Messung des Verhältnisses σ^+/σ^- , bzw. seiner Abweichung vom Wert 1 kann der isoskalare Anteil der Photoproduktion, der auf ρ - Austausch zurückgeht, bestimmt werden.

1.5 Das Watson - Theorem

Im Bereich kleiner Energien, unterhalb der Schwelle für die Pion-Zweifacherzeugung, also im Bereich $(M+m_\pi)^2 \leq S < (M+2m_\pi)^2$ dem "elastischen Bereich", gilt für die Pion-Einfacherzeugung das Watson - Theorem

$$\begin{aligned} \langle \ell, I \| T^j(s) \| L, \pi_L \rangle &= \\ &= \pm \left| \langle \ell, I \| T_{fi}^j(s) \| L, \pi_L \rangle \right| e^{i\delta_{\ell, j, I}(s)} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Es liefert einen Zusammenhang zwischen der Pion-Nukleon-Streuung, die ja im Zustand (l, j, I) völlig durch die Streuphase $\delta_{l, j, I}$ charakterisiert wird und der Photoerzeugung.

Zum Beweis des Watsontheorems werden die Unitarität der S-Matrix und die Zeitumkehrinvarianz benutzt. Eine genaue Betrachtung der Zeitumkehr erfolgt im Anhang. Hier sollen nur kurz die Eigenschaften des Operators der Zeitumkehr T_{op} angegeben werden :

1.) T_{op} ist antiunitär (= unitär + antilinear)

$$\text{Unitarität : } T T^\dagger = T^\dagger T = 1,$$

$$\text{AntiLinearität : } T(\lambda_1 |1\rangle + \lambda_2 |2\rangle) = \lambda_1^* T|1\rangle + \lambda_2^* T|2\rangle$$

d.h. T_{op} = unitärer Operator x Übergang zum konjugiert komplexen.

2.) T_{op} macht aus einlaufenden auslaufende Zustände und umgekehrt.

3.) T_{op} dreht die Vorzeichen von Impulsen und Spins um.

Wir kommen jetzt zum Beweis des Watson-Theorems :

Das Matrixelement für Photoerzeugung von π - Mesonen lautet in der Drehimpulsbasis (Multipolamplitude)

$$a^{us} \langle \pi, N, \ell, j, I, m | H_w^{el} | \gamma, N, j, L, \pi_L, m \rangle \quad (1.52)$$

Die Zeitumkehrinvarianz für die elektromagnetische Wechselwirkung bedeutet

$$T_{op} H_w^{el} = H_w^{el} T_{op}$$

da ausserdem $T_{op}^+ T_{op} = 1$ ist, gilt $T_{op}^+ H_W^{el} T_{op} = H_W^{el}$

Das wird in (1.52) eingesetzt; dann werden die Operationen T_{op}^+, T_{op} ausgeführt :

$$\begin{aligned} &^{aus} \langle \dots | T_{op}^+ H_W^{el} T_{op} | \dots \rangle = ^{aus} \langle T_{op} \dots | H_W^{el} | T_{op} \dots \rangle^* \quad (1.53) \\ &= ^{ein} \langle \pi, N, \ell, j, \bar{I}, -m | H_W^{el} | \gamma, N, j, L, \bar{\pi}_L, -m \rangle^* \end{aligned}$$

Weil T_{op} die Vorzeichen von Drehimpulsen umdreht, wird aus m $-m$. j behält sein Vorzeichen, denn mit j ist der Eigenwert von gemeint. Da das Matrixelement nicht von m abhängt, kann $-m$ durch m ersetzt werden:

$$= ^{ein} \langle \pi, N, \ell, j, \bar{I}, +m | H_W^{el} | \gamma, N, j, L, \bar{\pi}_L, m \rangle^*$$

Jetzt wird ein vollständiges System von Drehimpulzeigenzuständen zwischengeschoben :

$$= \sum_{\alpha} ^{ein} \langle \pi, N, \ell, j, \bar{I}, m | \alpha \rangle ^{aus} \langle \alpha | H_W^{el} | \gamma, N, j, L, \bar{\pi}_L, m \rangle^* \quad (1.54)$$

Die Summe muss über alle möglichen Zustände ausgeführt werden.

Da wir in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie arbeiten, kommen keine Zustände (für die elektromagnetische Wechselwirkung) infrage, bei denen Photonen auftreten. Wir betrachten den Energiebereich unterhalb der Schwelle für Pion-Zweifacherzeugung, dabei kommt nur der Zustand $|\pi, N\rangle$ infrage. Berücksichtigen wir noch die Erhaltung von Drehimpuls, Parität und Isospin, so können wir schreiben :

$$\begin{aligned} &= ^{aus} \langle \pi, N, \ell, j, \bar{I}, m | H_W | \gamma, N, j, L, \bar{\pi}_L, m \rangle^* \quad (1.55) \\ &\quad \cdot ^{ein} \langle \pi, N, \ell, j, \bar{I}, m | \pi, N, \ell, j, \bar{I}, m \rangle^* ^{aus} \end{aligned}$$

Damit haben wir also durch Umformung von (1.52) gefunden :

$$\begin{aligned} &\langle \ell, \bar{I} || T_j || L, \bar{\pi}_L \rangle = \\ &= ^{ein} \langle \pi, N, \ell, j, \bar{I} || \pi, N, \ell, j, \bar{I} \rangle ^{aus} \langle \ell, \bar{I} || T_j || L, \bar{\pi}_L \rangle^* \quad (1.56) \end{aligned}$$

(Wir haben die reduzierten Matrixelemente geschrieben)

Der erste Term auf der rechten Seite ist ein S-Matrixelement für die π - N-Streuung im Zustand (l, j, I) . Wegen der Unitarität der S-Matrix ($|S_{l,j,I}|^2 = 1$) gilt :

$$S_{l,j,I}(\pi, N) = e^{2i\delta_{l,j,I}(s)} \quad (1.57)$$

Die reduzierten Matrixelemente werden in Absolutbetrag \times Phasenfaktor ($e^{i\alpha}$) aufgespalten. Dann wird aus (1.56) :

$$|\langle l, I || T_j || L \pi_L \rangle| e^{i\alpha} = e^{2i\delta_{l,j,I}(s)} |\langle l, I || T_j || L \pi_L \rangle| e^{-i\alpha} \quad (1.58)$$

daraus folgt aber :

$$\alpha = \delta_{l,j,I}(s) + n\pi \quad (n \text{ ganze Zahl})$$

Also der Phasenfaktor des bei der Photoerzeugung auftretenden Matrixelements ist gleich der Streuphase bei Pion - Nukleon - Streuung.

Literaturangaben zum 1. Kapitel

Lorentz- und Eichinvarianz (Abschnitt 1,2)

Chew, Goldberger, Low und Nambu (abgekürzt : CGLN)

Phys. Rev. 106 , 1345 (1957)

Dirac - Spinoren (Abschnitt 1.2)

Schweber: " An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory". (New York. 1961)

Multipole (Abschnitt 1.3)

Hamilton: " The Theory of Elementary Particles "
(Oxford, Clarendon Press 1959) S. 32

N.F.Nelipa: " The Relation between the Photoproduction and the Scattering of π - Mesons "
(Pergamon Press, London, 1961)

CGLN : Phys. Rev. 106, 1345 (1957)

Isospinauswahlregeln (Abschnitt 1.4)

Hamilton : s.o. S. 203

K.M.Watson: Phys.Rev. 85, 852 (1952)

Watson-Theorem (Abschnitt 1.5)

K.M.Watson :Phys.Rev. 95, 228 (1954)

G - Parität :(Abschnitt 1.4)

Marshak und Sudarshan: " Introduction to Elementary Particle Physics " (New York 1961) S. 189

2.) Einfach - Photoerzeugung im Bereich der Resonanzen.

Für die Einfach - Photoerzeugung im Bereich der Resonanzen interessiert der Energiebereich
 $150 \text{ MeV} \ll E_{\gamma}^{\text{Lab}} \lesssim 1 \text{ BeV.}$

2.1 Verhalten an der Schwelle

Die Gesamtenergie im CMS an der Schwelle für die Einfach-Pion-Erzeugung ist

$$s = s_t = (M + m_{\pi})^2$$

Für den Schwerpunktsimpuls des Endzustandes gilt an der Schwelle

$$|\vec{q}| = 0$$

In Schwellennähe kann also $s \approx s_t$ und $|\vec{q}| \approx 0$ gesetzt werden.

Das Schwellenverhalten der Multipolamplituden:

Beh. :

$$\langle L, j \| T^j(s) \| L, \pi_L \rangle \approx \underset{s \approx s_t}{\text{const.}} |\vec{q}|^L \quad (2.11)$$

Das bedeutet für den partiellen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(l, s) = \frac{|\vec{q}|}{|\vec{k}|} \cdot |\langle \dots \rangle|^2 \sim \text{const.} |\vec{q}|^{2L+1} \quad (2.12)$$

Plausibilitätsbetrachtung :

Die Multipolamplitude in (2.11) kann entweder in der "post"-Form

$$\langle \pi, N; l, j; |\vec{q}| \| H_w^{\pi N} | \gamma, N; L, \pi_L; |\vec{k}| \rangle^{\text{ein}} \quad (2.13)$$

oder in der "prior"-Form

$$\overset{\text{aus}}{\langle \pi, N; l, j; |\vec{q}| \| H_w^{\text{el}} | \gamma, N; L, \pi_L; |\vec{k}| \rangle} \quad (2.14)$$

geschrieben werden, (welche bisher ausschliesslich benutzt wurde). Die Form (2.13) enthält die πN -Wechselwirkung $H_w^{\pi N}$

im Endzustand explizit. Bei niedrigen Energien (d.h. in Schwellennähe) können das auslaufende Pion und Nukleon nichtrelativistisch behandelt werden. In diesem Fall ist es erlaubt von der Ortsdarstellung der Zustände zu sprechen (vergl. Fussnote Kap. 1.2). Für die "post"-Form ist

$|\pi, N; l, j; |\vec{q}| \rangle$ eine Kugelwelle, deren Ortsdarstellung

$$\begin{aligned} \langle \pi | \pi, N; l, j; |\vec{q}| \rangle &= Y_{l,j,m}^{\mu}(\pi) \\ &= j_l(|\vec{q}|r) \mathcal{Y}_{l,j,m}(\frac{\pi}{r}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

lautet.

$j_l(|\vec{q}|r)$ = sphärische Besselfunktion

$\mathcal{Y}_{l,j,m}(\frac{\pi}{r})$ = Eigenfunktion zu $\vec{J}^2, \vec{L}^2, J_z$.

Für $|\vec{q}|r \ll 1$ gilt

$$j_l(|\vec{q}|r) \xrightarrow{|\vec{q}|r \rightarrow 0} \frac{(|\vec{q}|r)^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} \quad (2.16)$$

Die πN -Wechselwirkung $H_W^{\pi N}$ hat eine endliche Reichweite $R \sim \frac{1}{2m_\pi}$. Die Ortsintegration im Matrixelement (2.13) erstreckt sich also nur über $r \leq R$, so dass in unmittelbarer Nähe der Schwelle ($|\vec{q}| \sim 0$)

$$|\vec{q}|r \ll |\vec{q}|R \ll 1$$

angenommen werden kann. Für $j_l(|\vec{q}|r)$ kann in (2.15) also die Näherung (2.16) eingesetzt werden, womit

$$\langle \pi | \pi, N; l, j; |\vec{q}| \rangle \approx (|\vec{q}|r)^l \mathcal{Y}_{l,j,m}(\frac{\pi}{r}) \quad (2.17)$$

für $s \simeq s_t$

(vergl. hierzu die Betrachtungen von Haag und Brenig¹⁾)

Wir wollen diese Schwellenabhängigkeit nun mit Hilfe der Laborenergie des primären γ -Quants E_γ^{Lab} ausdrücken:

Das Quadrat des Pion-Impulses im CMS

$$|\vec{q}|^2 = \frac{(s - M^2 + m_\pi^2)^2 - 4s m_\pi^2}{4s}$$

lässt sich für

$$s \sim s_t = M^2 + 2M E_\gamma^{\text{Lab}}$$

(siehe Kap. 1)) und

$$E_t \equiv E_\gamma^{\text{Lab}} / \text{Schwelle} = m_\pi \left(1 + \frac{m_\pi}{M} \right)$$

$$E_\gamma^{\text{Lab}} (\text{1}\pi\text{-Schwelle}) \ll M$$

näherungsweise schreiben

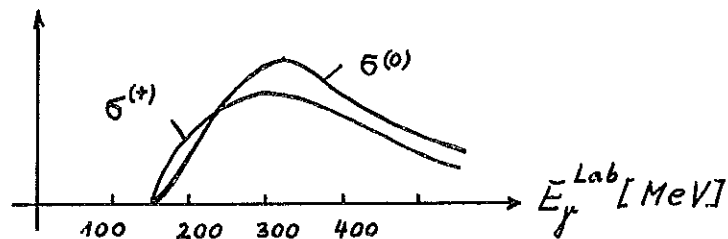
$$|\vec{q}|^2 \frac{\text{-----}}{E^{\text{Lab}} \text{-----} E_t} \rightarrow 2m_\pi (E_\gamma^{\text{Lab}} - E_t)$$

Das ergibt für $\sigma(\ell, s)$ nach (2.12)

$$\sigma(\ell, s) \approx [E_\gamma^{\text{Lab}} - E_t]^{\ell + \frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

an der Schwelle

Experimentell beobachtet man folgenden Verlauf für die Wirkungsquerschnitte bei π^+ und π^0 - Erzeugung:



Dem entsprechen an der Schwelle

$$\begin{aligned} \text{für } \sigma^{(0)} \text{ ein Anstieg} &\sim (E_\gamma^{\text{Lab}} - E_t)^{3/2} \\ \text{" } \sigma^{(+)} \text{ " " " } &\sim (E_\gamma^{\text{Lab}} - E_t)^{1/2} \end{aligned}$$

π^0 sollte also vorwiegend im $\ell = 1$, π^+ im $\ell = 0$ -Zustand erzeugt werden. (ℓ = relativer Bahndrehimpuls im πN -System).

Eine Erklärung für das näherungsweise Verschwinden von s - Wellen an der Schwelle für π^0 -Erzeugung wird durch das Kroll-Rudermann Theorem gegeben.

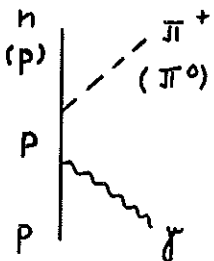
Kroll-Ruderman-Theorem 2)

$$T_{fi}(\text{Schwelle}) = T_{fi}^{\text{Born}}(\text{Schwelle}; m_{\pi}=0) + O\left(\frac{m_{\pi}}{M}\right) \quad (2.19)$$

Born'sche Näherung

In Bornscher Näherung tragen 3 Feynman-Diagramme zum Übergangsmatrixelement bei, die wir "Schütteleffekt", "Angsteffekt", bzw. "Photoeffekt" nennen wollen.

1) Schütteleffekt (π^+, π^0 - Erzeugung)



Nach den Feynman-Regeln erhalten wir für das zum nebenstehenden Graphen gehörige Matrixelement (s. Anhang:Feynman-Regeln)

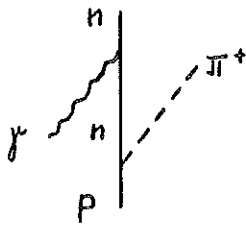
$$\bar{u}(p_2) f \gamma_5 \frac{(\not{p}_1 + \not{k}) - M}{(p_1 + k)^2 - M^2 + i\epsilon} * \left\{ e \gamma_{\mu} - \frac{\mu^a}{2M} k^{\nu} \sigma_{\nu\mu} \right\} \epsilon^{\mu}(k) \tilde{u}(p_1)$$

μ^a = anomales magnetisches Moment des Nukleons. Das elektromagnetische Feld kann also an der elektrischen Ladung und am magnetischen Moment angreifen.

Für die Photoerzeugung am Proton treten beide Beiträge auf, zur Photoerzeugung am Neutron trägt nur der magnetische Term bei.

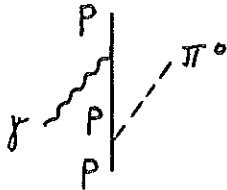
Die der elektrischen Ladung bzw. dem anomalen magnetischen Moment proportionalen Beiträge nennen wir nach CGLN "elektrische" bzw. "magnetische" Bornsterme.

2) Angsteffekt



a) π^+ - Erzeugung:

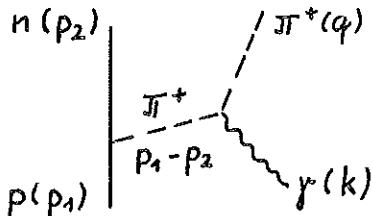
Beim Neutron kann nur eine Wechselwirkung des Photons mit dem magnetischen Moment erfolgen.



b) π^0 - Erzeugung:

magnetischer und elektrischer Term $\neq 0$

3) Photoeffekt



Der Photoeffekt trägt nur zur π^+ -Erzeugung bei, da das π^0 keine Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld hat.

Für den $\gamma\pi\pi$ -Vertex ist nach den Feynman-Regeln einzusetzen:

$$e(p_1 - p_2 + q)^\mu \xi_\mu = e(2q - k)^\mu \xi_\mu = e 2q \cdot \xi$$

$$\text{denn } p_1 + k = p_2 + q \text{ und } k \cdot \xi = 0$$

In der Näherung $m_\pi \rightarrow 0$ wird in Schwellennähe

$$|\vec{q}|^{\text{CMS}} \sim 0 \quad \text{und} \quad q_0^{\text{CMS}} \sim m_\pi \rightarrow 0$$

also $q = (q_0, \vec{q}) \sim (0, 0)$ und

$$q \cdot \xi \sim 0$$

D.h. der Photoeffekt liefert in Schwellennähe für $m_\pi \rightarrow 0$ keinen Beitrag.

Wir bemerken, dass die 3 Bornsterme einzeln nicht eichinvariant sind, sondern nur ihre Summe.

Für die Photoerzeugung am Neutron lassen sich die Bornsterme in analoger Weise diskutieren.

Nach CGLN 3) gilt:

- 1) Für die π^0 -Erzeugung verschwindet im statischen Grenzfall $M \rightarrow \infty$ die Summe der elektrischen Anteile der Bornsterme 1) und 2) :

$$\text{el. Schütteleff.} + \text{el. Angsteff.} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

- 2) Elektrische Bornsterme $\xrightarrow{q \rightarrow 0} \text{El - Absorption}$

$$\text{magnetische Bornsterme} \xrightarrow{q \rightarrow 0} \text{Ml - Absorption}$$

wobei zu beachten ist, dass q der Viererimpuls des Pions ist.

Hinsichtlich El, Ml sind folgende Endzustände möglich (vgl. Kap. 1.3)

$$\text{El} : S_{1/2}, d_{3/2} \text{ Endzustände}$$

$$\text{Ml} : P_{1/2}, P_{3/2} \quad "$$

In Schwellennähe ($T_{fi} \sim |\vec{q}|^2$) kann also nur die El-Absorption zum $S_{1/2}$ -Endzustand beitragen; d.h. es sind nur die elektrischen Bornsterme wesentlich.

Da für die π^0 -Erzeugung die elektrischen Terme für $M \rightarrow \infty$ verschwinden, bedeutet das

$$T_{fi}^{\pi^0} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad \text{keine S - Wellenbeiträge.}$$

für $|\vec{q}| \rightarrow 0$

Nun liefert der Angsteffekt zur π^+ -Erzeugung nur einen magnetischen Term, so dass man für den Bornterm der π^+ -Erzeugung

$$T_{fi}^{\text{Born}}(\pi^+, \mathbf{q} \rightarrow 0) \xrightarrow{\text{el. Schütteleff.}} T_{fi}(\pi^+, \mathbf{q} \rightarrow 0) \sim e f \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.110)$$

erhält.

Da nach dem Kroll-Ruderman-Theorem durch den Bornterm für $m_\pi \rightarrow 0$ an der Schwelle die gesamte Streuamplitude beschrieben wird, folgt also

$$\sigma^{\pi^+}(\text{Schwelle}) = 8 \pi e^2 f^2 \cdot \frac{|\vec{\mathbf{q}}|}{|\vec{\mathbf{k}}|} + O\left(\frac{m_\pi}{M}\right) \quad (2.111)$$

Messungen von σ^{π^+} ermöglichen also bei Extrapolation zur Schwelle eine ungefähre Aussage über die πN -Kopplungskonstante f .

Man erhält (Bernardini, Kiew 1959) nach (2.111)

$$f^2 = 0,081 \pm 0,007$$

Plausibilitätserklärung zum Kroll-Ruderman-Theorem 4)

*)

Betrachtet man die Multipolamplitude $E_{0+}(|\vec{\mathbf{q}}| \rightarrow 0)$, die zum $S_{1/2}$ -Endzustand führt, so ist es plausibel E_{0+} proportional dem elektrischen Dipolmoment des πN -Endzustandes anzunehmen.

*) Im folgenden wird nach CGLN gesetzt :

$$\langle \ell \parallel T^j(\mathbf{s}) \parallel L, \pi_L \rangle = \begin{cases} M_{\ell^\pm} \text{ für } \pi_L = (-1)^{L+1}, j = \ell^\pm - 1/2 \\ E_{\ell^\pm} \text{ " } \pi_L = (-1)^L, j = \ell^\pm - 1/2 \end{cases}$$

Drehimpulserhaltung und Paritätserhaltung ergeben für

$$\begin{aligned} M_{\ell^\pm} : L = \ell, \ell^\pm - 1; & \quad (-1)^{L+1} = (-1)^{\ell+1} \rightarrow L = \ell \\ E_{\ell^\pm} : \text{ " } \text{ " } ; & \quad (-1)^L = (-1)^{\ell+1} \rightarrow L = \ell^\pm - 1 \end{aligned}$$

(Der γ N-Anfangszustand besitzt kein elektrisches Dipolmoment)

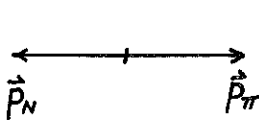
$$E_{0+} (|\hat{q}| \rightarrow 0) \sim |\vec{D}_{N\pi}|$$

Für zwei Punktladungen $e_{1,2}$ ist das elektrische Dipolmoment



$$\vec{D} = e_1 r_1 + e_2 r_2$$

Im CMS des π N-Systems ist



$$\vec{p}_N = -\vec{p}_\pi$$

$$\vec{p}_\pi = m_\pi \dot{r}_\pi \quad \text{mit } \dot{r}_\pi = \text{const.}$$

$$\rightarrow r_\pi = \dot{r}_\pi t$$

$$\vec{p}_N = M \dot{r}_N = -m_\pi \dot{r}_\pi \quad \rightarrow \quad r_N = -\frac{m_\pi}{M} \dot{r}_\pi t = -\frac{m_\pi}{M} r_\pi$$

also
$$\vec{D} = e_\pi r_\pi + e_N r_N = \left(e_\pi - \frac{m_\pi}{M} e_N \right) r_\pi$$

1) $\pi^0 N$:

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0 \quad \rightarrow \quad D_{\pi N} \sim + \frac{m_\pi}{M} e \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

Damit erscheint uns auch die Kompensation von elektrischem Schütteleffekt und elektrischem Angsteffekt für π^0 -Erzeugung plausibel.

2) $\pi^+ N$:

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+ \quad \rightarrow \quad D_{\pi N} \sim -e$$

3) $\pi^- N$:

$$\gamma + n \rightarrow p + \pi^- \quad \rightarrow \quad D_{\pi N} \sim \left(1 + \frac{m_\pi}{M} \right) e$$

Man erwartet somit für das Verhältnis von π^+ und π^- -Erzeugung

$$\frac{\sigma^{(-)}}{\sigma^{(+)}} \Bigg|_{\text{Schwelle}} \sim \left(1 + \frac{m_\pi}{M} \right)^2 = 1,32$$

Dies ist eine nicht zu vernachlässigende Korrektur zum Wirkungsquerschnitt nach dem Kroll-Ruderman-Theorem !

Bazin und Pine (Stanford, preprint Juni 63) haben das Verhältnis bei 15 MeV oberhalb der 1π -Erzeugungsschwelle gemessen. Sie erhielten

$$\frac{\sigma(-)}{\sigma(+)} \Bigg|_{E_{\gamma}^{\text{Lab}} = 165 \text{ MeV}} = 1,39 \pm 0,07$$

65° CMS-Winkel (Winkelverteilung für
S-Wellen symm. !)

Literaturangaben zu Kapitel 2.1

- 1) W. Brenig und R. Haag :
Fortschritte der Physik, 7, 183 (1959), § 5.
- 2) Kroll und Ruderman : Phys. Rev. 93, 233 (1954)
- 3) CGLN : Phys. Rev. 106, 1345 (1957)
- 4) Gell-Man und Watson : Ann. Rev. Nucl. Science, 4, 219 (1954)

2.2 Die 1. Resonanz

Bei der Streuung von Pionen an Protonen fand man bei einer kinetischen Energie der π -Mesonen von 180 MeV eine Resonanz mit den Quantenzahlen $I = 3/2$, $j = 3/2^+$. Dies ist also ein $P_{3/2}$ -Zustand und wird häufig als (3,3)-Resonanz bezeichnet.

2.2.1 Die Quantenzahlen der 1. Resonanz in der Photoerzeugung.

Bei der Photoerzeugung $\gamma + p \rightarrow N + \pi$ fand man ebenfalls eine Resonanz bei vergleichbaren Energien. Die Einschussenergie der Gamma-Quanten, bei der die Resonanz beobachtet wurde, betrug bei der

$$\pi^+ \text{- Erzeugung} \quad : \quad E_\gamma^L \simeq 300 \text{ MeV}$$

$$\pi^0 \text{- Erzeugung} \quad : \quad E_\gamma^L \simeq 330 \text{ MeV}$$

Die Gammaenergie E_γ^L , die derselben Gesamtenergie \sqrt{s} im CMS wie eine gegebene Pionenenergie E_π^L entspricht, ergibt sich nach Kapitel 1.1 zu

$$E_\gamma^L = E_\pi^L + m_\pi \left\{ 1 + \frac{m_\pi}{2M} \right\} \quad (2.21)$$

Nimmt man an, dass es sich um die gleiche Resonanz wie bei der Pion-Nukleon-Streuung handelt, d.h. setzt man $E_\pi^L \simeq 180 \text{ MeV}$ ein, so ergibt sich

$$E_\gamma^L = 180 + 150 \text{ MeV} = 330 \text{ MeV}$$

Der Vergleich mit den angeführten experimentellen Energien zeigt, dass es sich um die gleiche Resonanz handeln kann, falls man die Verschiebung der Resonanz im π^+ -Fall versteht.

Um eine genauere Aussage machen zu können, muss man zunächst einmal die Quantenzahlen dieses Resonanzphänomens in der Photoerzeugung aus den Experimenten bestimmen und mit der πN - Resonanz vergleichen.

Isospin der Resonanz :

Auf Seite 14 wurde die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes vom Isospin untersucht. Es war dort für

$$I = 3/2 \quad \frac{\sigma^+}{\sigma^0} = \frac{1}{2}$$

und für

$$I = 1/2 \quad \frac{\sigma^+}{\sigma^0} = 2$$

Experimentell findet man einen Wert von

$$\frac{\sigma^+}{\sigma^0} \simeq 0.8$$

Daraus schliesst man auf ein Überwiegen des $I = 3/2$ -Endzustandes. Das experimentelle Verhältnis zeigt jedoch, dass es kein reiner $I = 3/2$ - Zustand ist. Bei der π^+ -Erzeugung sind offensichtlich noch $I = 1/2$ Zustände beigemischt. Diese Beimischungen führen u.a. durch Interferenz mit der resonanten Amplitude zur Verschiebung der Resonanz auf der Energieskala. Genaueres wird später behandelt.

Drehimpuls der Resonanz :

Der Drehimpuls der Resonanz kann aus der Winkelverteilung der π 's ermittelt werden. Die Winkelverteilung lässt sich nach Legendre-Polynomen entwickeln.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{m=0}^N a_m P_m(\cos\Theta) \quad (2.22)$$

Jedem Multipol ist eine definierte Winkelverteilung zugeordnet, wobei sich N zu $N = 2j - 1$ ergibt, wie im folgenden plausibel gemacht werden soll : Dazu geht man auf die Entwicklung des Anfangs- bzw. Endzustandes nach Eigenzuständen zum Gesamtdrehimpuls Gl. (1.33) zurück.

$$|j, N, l, P, \lambda\rangle = \sum_{j', L, \pi, m} \langle j', L, \pi, m | l, P, \lambda \rangle |j', L, \pi, m\rangle \quad (2.23)$$

Nimmt man die Quantisierungsachse \underline{M}_z zunächst parallel zu \underline{k} an, so fällt die Summation über m fort, und es ist $m = P \cdot \underline{\lambda}_1$

$$|j, N_1; \underline{k}, \underline{M}_z, P, \lambda_1\rangle = \sum_{j, L, \pi_L} \langle j, L, \pi_L, P - \lambda_1 | \underline{k}, \underline{M}_z, P, \lambda_1 \rangle |j, L, \pi_L, P - \lambda_1\rangle \quad (2.24)$$

Da im allgemeinen \underline{k} nicht parallel zu \underline{M}_z sondern beliebig orientiert ist, müssen wir auf (2.24) eine dreidimensionale Drehung anwenden. Damit erhalten wir die $\hat{\underline{k}}$ - Abhängigkeit auf der rechten Seite von (2.23) explizit :

$$|j, N_1; \underline{k}, P, \lambda_1\rangle = \sum_{j, L, \pi_L} \langle j, L, \pi_L, P - \lambda_1 | \underline{k}, \underline{M}_z, P, \lambda_1 \rangle |j, L, \pi_L, m\rangle D_{m, P - \lambda_1}^j(\hat{\underline{k}}) \quad (2.25)$$

Analoges gilt für den Endzustand

$$|\pi, N_2; q, O, \lambda_2\rangle = \sum_{j, l, m} \langle j, l, -\lambda_2 | q, \underline{M}_z, O, \lambda_2 \rangle |j, l, m\rangle D_{m, -\lambda_2}^j(\hat{\underline{q}}) \quad (2.26)$$

Somit ergibt sich

$$T_{fi} = \sum_m \langle j, L, \pi_L, P - \lambda_1 | \underline{k}, \underline{M}_z, P, \lambda_1 \rangle \langle j, l, -\lambda_2 | q, \underline{M}_z, O, \lambda_2 \rangle \cdot \langle j, l, m | T | j, L, \pi_L, m \rangle D_{m, P - \lambda_1}^j(\hat{\underline{k}}) D_{m, -\lambda_2}^{j*}(\hat{\underline{q}}) \quad (2.27)$$

Da die T-Matrix in der Drehimpulsdarstellung

$\langle j, l, m | T | j, L, \pi_L, m \rangle$ unabhängig von m war (vergl. Kap. 1.3)

lässt sich die Summation über m in (2.27) ausführen :

$$\sum_m D_{m, P - \lambda_1}^j(\hat{\underline{k}}) D_{m, -\lambda_2}^{j*}(\hat{\underline{q}}) = D_{-\lambda_2, P - \lambda_1}^j(\hat{\underline{q}} \rightarrow \hat{\underline{k}})$$

Betrachtet man nun den Fall eines festen Multipols (d.h. festes j, l, L) so erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(j) \sim \sum_{\text{Spins}} \text{kinem. Faktoren} \times D_{-\lambda_2, P - \lambda_1}^j D_{-\lambda_2, P - \lambda_1}^{j*} \quad (2.28)$$

Mit der Clebsch-Gordan-Reihe

$$D_{-\lambda_2, \lambda_1}^j D_{-\lambda_2, \lambda_1}^{j*} = \sum_n (-1)^{-\lambda_2 - \lambda_1 + n} C(j, j, m, -\lambda_2, \lambda_1) C(j, j, m, \lambda_2, -\lambda_1 - n) \cdot P_n(\cos \theta) \quad (2.29)$$

der Dreiecksungleichung für die Argumente der Clebsch-Gordan-Koeffizienten $0 \leq n \leq 2j$ und Paritätserhaltung (d.h. bei Einsatz von (2.29) in (2.28) tragen nur gerade n bei !) erhält man schliesslich das gewünschte Resultat

$$N \equiv n_{\max} = 2j - 1$$

Rechnet man die Koeffizienten aus, so ergibt sich folgendes Bild:

j^{π}	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$	Multipol
$1/2^-$	const	E 1
$3/2^-$	$5 - 3 \cos^2 \theta$	
$1/2^+$	const	M 1
$3/2^+$	$5 - 3 \cos^2 \theta$	
$3/2^+$	$1 + \cos^2 \theta$	E 2
$5/2^+$	$1 + 6 \cos^2 \theta - 5 \cos^4 \theta$	

Wie man aus dieser Tabelle sehen kann, bekommt man aus der Winkelverteilung zwar Aufschluss über j , jedoch die Parität bleibt unbestimmt. Die Parität erhält man z.B. aus Messungen der Winkelverteilung mit linear polarisierten Gammaquanten.

Bei der Untersuchung der experimentell ermittelten Winkelverteilung bei π^0 -Erzeugung, geht man von der Annahme aus, dass nur s und p-Wellen im Endzustand beitragen, d.h. $N = 2$ ist.

Also macht man den Ansatz

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

Man erhielt an der Resonanz 1)

$$\frac{B}{A} \simeq 0 \quad \text{und} \quad \frac{C}{A} \simeq 0,6$$

Das bedeutet, dass eine Winkelverteilung der Form

$$5 - 3 \cos^2 \theta$$

vorliegt. Das wiederum besagt, dass $j = 3/2$ ist.

Die beiden Resonanzen bei der Pion-Nukleon-Streuung und der Photoerzeugung stimmen also in den Quantenzahlen j und I überein und sind als gleiche Resonanzen anzusprechen, falls man annimmt, dass die Parität dieselbe ist.

Aus obiger Tabelle und aus den experimentellen Resultaten der Winkelverteilung ersieht man, dass E2 Anteile, obwohl sie die gleichen Quantenzahlen besitzen ($3/2^+$) nicht beige-mischt sind.

Der geschilderte experimentelle Tatbestand wirft eine Reihe von theoretischen Fragen auf, die in den nächsten Abschnitten beantwortet werden sollen :

1. Wieso hat eine Resonanz für die πN -Streuung eine solche für die Photoerzeugung zur Folge ?
2. Wieso hat man in der Nähe der Resonanz fast ausschliesslich M 1 - Absorption und keine E 2 - Absorption ?
3. Vorhersage des absoluten Betrags der resonanten M 1 - Amplitude.
4. Die Quellen von S - Wellen, $I = 1/2$ - Beitrag und Verschiebung der Resonanz in der π^+ - Erzeugung.

2.2.2 Der Zusammenhang zwischen der Resonanz in der π -N-Streuung und der Photoerzeugung.

Befassen wir uns im folgenden mit der Beantwortung der 1. Frage, die in Kap. 2.2.1 aufgeworfen wurde.

1) π -N-Streuamplitude.

Im elastischen Bereich $(M+m_\pi)^2 \ll s \ll (M+2m_\pi)^2$ gilt für die Partialwellenamplitude die

$$\begin{aligned} \text{Unitaritätsrelation} \quad \sum_l f_l(s) &= q(s) \cdot |f_l(s)|^2 \\ q(s) &= |\vec{q}| \end{aligned} \quad (2.210)$$

Die resonante Partialwellenamplitude $f_{l,j,I} (I=3/2, l=1, J=3/2)$, die im folgenden ohne Indices geschrieben werden soll, lässt sich danach schreiben

$$f(s) = \frac{e^{i\delta(s)} \sin\delta(s)}{q(s)} \quad (2.211)$$

mit $\delta(s)$ reell in $(M+m_\pi)^2 \ll s \ll (M+2m_\pi)^2$.

Als Funktion der komplexen Variablen s soll $f(s)$ folgende Eigenschaften besitzen :

- $f(s)$ sei für Realteil $s \gg (M+m_\pi)^2$ regulär bis auf Verzweigungspunkte an den Erzeugungsschwellen $S_n = (M+nm_\pi)^2, n=1,2,\dots$
- $f^*(s) = f(s^*)$, d.h. $f(s)$ reelle Funktion der komplexen Variablen s
- $f_{\text{phys}}(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} f(s+i\epsilon)$; Die physikalische Streuamplitude sei Randwert der analytischen Funktion $f(s)$.

Diese Eigenschaften einer Streuamplitude $f(s)$ lassen sich in der Kernphysik (Potentialtheorie) bzw. in der Störungsrechnung (Feynman-Graphen) beweisen, so dass ihre Annahme äusserst plausibel ist.

Die Partialwellenamplitude $f(s)$ kann über den elastischen

Verzweigungsschnitt $(M+m_\pi)^2 \leq s < (M+2m_\pi)^2$ in das II. Blatt fortgesetzt werden. Hierzu wird nach W. Zimmermann ²⁾ eine irreduzible Amplitude folgendermassen definiert

$$f(s)^{\text{irr}} = \frac{f(s)}{1 + iq(s) \cdot f(s)} \quad (2.212)$$

$iq(s) \equiv \sqrt{-q^2(s)}$ ist als Wurzelfunktion eine in der für Realteil $s \gg (M+m_\pi)^2$ aufgeschnittenen \textcircled{S} -Ebene reelle Funktion von s , denn es war (vgl. Gl. (1.14))

$$q^2(s) = \frac{[s - (M+m_\pi)^2] \cdot [s - (M-m_\pi)^2]}{4s}$$

Also ist mit $f(s)$ und $iq(s)$ auch $f(s)^{\text{irr}}$ eine reelle Funktion.

Die Unitarität ergibt mit (3) im elastischen Bereich

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m f(s)^{\text{irr}} &= \frac{\mathcal{I}m \{f(s)[1 - iq(s)f^*(s)]\}}{|1 + iq(s)f(s)|^2} \\ &= \frac{\mathcal{I}m f(s) - q(s)/|f(s)|^2}{|1 + iq(s)f(s)|^2} = 0 \end{aligned}$$

Andererseits gilt, da f^{irr} reell

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m f(s+i\epsilon)^{\text{irr}} &\approx \frac{1}{2i} \{f(s+i\epsilon)^{\text{irr}} - f(s+i\epsilon)^{\text{irr}*}\} \\ &= \frac{1}{2i} \{f(s+i\epsilon)^{\text{irr}} - f(s-i\epsilon)^{\text{irr}}\} \end{aligned}$$

Die Diskontinuität über den elastischen Schnitt verschwindet also für $f^{\text{irr}}(s)$. $f^{\text{irr}}(s)$ ist somit eine reelle Funktion, regulär bis auf inelastische Verzweigungsschnitte und Pole für $1 + iq(s) \cdot f(s) = 0$. In $s_1 \ll \text{Realteil } s \ll s_2$ können die Singularitäten also höchstens Pole sein.

Aus (3) ergibt sich durch Umkehrung für $f(s)$ die Darstellung

$$f(s) = \frac{f^{\text{irr}}(s)}{1 - iq(s) f^{\text{irr}}(s)} \quad (2.213)$$

Mit $iq(s) = \sqrt{-q^2(s)}$ hat $f(s)$ bei $s = s_1$ einen Verzweigungspunkt vom Charakter $\sqrt{s - (M+m_\pi)^2}$, $f(s)$ kann somit ^{über den elast. Schnitt} in das

II. Blatt der zweiblättrigen Riemann-Fläche fortgesetzt werden. Dabei ändert die Wurzelfunktion das Vorzeichen ^{*}), so dass

$$f_{II}(s) = \frac{f^{irr}(s)}{1 + iq(s) \cdot f^{irr}(s)} \quad (2.214)$$

Im II. Blatt kann die Partialwellenamplitude $f(s)$ komplexe Pole an der Nullstelle des Nenners in (2.214) besitzen.

Hat $f(s)$ z.B. bei $s = s_0 - i\frac{\gamma}{2}$ einen Pol erster Ordnung, so kann $q(s)f(s)$ in einer kleinen Umgebung von $s = s_0 - i\frac{\gamma}{2}$ auf der Riemann-Fläche in eine Laurent-Reihe entwickelt werden ($q(s)$ regulär in $s = s_0 - i\frac{\gamma}{2}$) :

$$f(s) = \frac{1}{q(s)} \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (s - s_0 + i\frac{\gamma}{2})^n$$

$$= \frac{1}{q(s)} \cdot \frac{a_{-1}}{s - s_0 + i\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{q(s)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0 + i\frac{\gamma}{2})^n$$

für $s \in U(s_0 - i\frac{\gamma}{2})$

Approximiert man $f(s)$ durch den überwiegenden Polterm, so wird

$$f(s) \simeq \frac{1}{q(s)} \frac{a_{-1}}{s - s_0 + i\frac{\gamma}{2}} \quad (2.215)$$

also

$$\text{Im } f(s) = \frac{-a_{-1} \cdot \frac{\gamma}{2}}{q(s) |s - s_0 + i\frac{\gamma}{2}|^2}$$

so dass mit der elastischen Unitarität (2.210)

$$a_{-1} = -\frac{\gamma}{2}$$

Man erhält somit für $f(s)$ eine Breit-Wigner-Formel

$$f(s) = \frac{-\frac{\gamma}{2}}{s - s_0 + i\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{q(s)} \quad (2.216)$$

^{*}) $f_k(z) = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} [L \ln z + 2k\pi i]}$

$f_0(z) = \sqrt{r} e^{i\varphi/2} = \sqrt{z}$

$f_1(z) = -\sqrt{r} e^{i\varphi/2} = -\sqrt{z}$

Hauptwert in $-\pi < \arg z \leq +\pi$

2. Zweig

Aus Gl. (2.216) und dem Zusammenhang zwischen Streuamplitude $f(s)$ und Streuphase $\delta(s)$ Gl. (2.211) entnimmt man, daß $\delta(s)$ in der Umgebung von s_0 monoton anwächst, wobei sie an der Stelle der Resonanzenergie $s = s_0$ den Wert $\pi/2$ annimmt, entsprechend einem Maximum im Streuquerschnitt.

2) γ -N - Multipolamplitude

Sei $T(s)$ eine Multipolamplitude, die zum resonanten Endzustand führt. Entsprechend der π -N-Streuamplitude soll $T(s)$ als Funktion der komplexen Variablen s folgende Eigenschaften haben:

a) $T(s)$ sei für Realteil $s \geq (M+m_\pi)^2$ regulär bis auf Verzweigungspunkte bei $s_n = (M + nm_\pi)^2$; $n = 1, 2, \dots$

b) $T^*(s) = T(s^*)$

Weiter habe die zum resonanten Endzustand gehörende Streuamplitude $f_{II}(s)$ bei $s = s_0 - i\frac{\gamma}{2}$ einen Pol.

Beh.: Mit $f_{II}(s)$ hat auch $T_{II}(s)$ einen Pol bei $s = s_0 - i\frac{\gamma}{2}$

Bew.: Nach dem Watson-Theorem gilt im elastischen Bereich

$$T(s) = \pm |T(s)| e^{i\delta(s)}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T(s) &= \pm |T(s)| \sin \delta(s) \\ &= T(s) e^{-i\delta(s)} \sin \delta(s) \end{aligned}$$

Die Darstellung (2.211) der Partialwellenamplitude liefert somit

$$\operatorname{Im} T(s) = q(s) \cdot T(s) \cdot f^*(s) \quad (2.217)$$

Definiert man eine irreduzible Multipolamplitude durch

$$T^{\text{irr}}(s) = \frac{T(s)}{1 + iq(s) \cdot f(s)} \quad (2.218)$$

so ist mit $T(s)$, $iq(s)$ und $F(s)$ auch $T^{irr}(s)$ eine reelle Funktion von s .

Da nach (2.214) und (2.215)

$$\operatorname{Im} T^{irr}(s) = \frac{\operatorname{Im} T(s) - q(s) \cdot T(s) f^*(s)}{|1 + iq(s) \cdot f(s)|^2} = 0$$

ist $T^{irr}(s)$ wie $f^{irr}(s)$ eine reelle Funktion, regulär bis auf inelastische Verzweigungsschnitte und Pole für $1 + iq(s) \cdot f(s) = 0$.

Für $T(s)$ erhält man nach (2.217) und (2.218)

$$T(s) = \frac{T^{irr}(s)}{1 - iq(s) \cdot f^{irr}(s)} \quad (2.219)$$

Die Fortsetzung von $T(s)$ ins II. Blatt ist somit

$$T_{II}(s) = \frac{T^{irr}(s)}{1 + iq(s) f^{irr}(s)} \quad (2.220)$$

$T_{II}(s)$ hat also wie $f_{II}(s)$ einen komplexen Pol für

$1 + iq(s) f^{irr}(s) = 0$, d.h. nach Voraussetzung bei $s = s_0 - i\frac{\gamma}{2}$.

Aus der Existenz eines Pols für $T_{II}(s)$ ergeben sich folgende mögliche Eigenschaften für die Multipolamplitude :

- 1) $T(s)$ hat eine Resonanz bei $s = s_0$
- 2) $T(s)$ hat eine Nullstelle bei $s = s_0$

Diese Eigenschaften lassen sich aus denen der irreduziblen Streuamplitude verstehen.

$f^{irr}(s)$ kann einen Pol für $1 + iq(s) f(s) = 0$ besitzen. Aus der Definitionsgleichung (2.212) für $f^{irr}(s)$ folgt mit

$$f(s) = \frac{1}{q(s)} e^{i\delta(s)} \sin \delta(s)$$

$$f^{irr}(s) = \frac{1}{q(s)} e^{i\delta(s)} \quad (2.221)$$

$f^{\text{irr}}(s)$ besitzt also im elastischen Bereich auf der reellen Achse einen Pol für $\mathcal{J}(s) = \frac{\pi}{2} = \mathcal{J}(s_0)$. In Resonanznähe $s \sim s_0$ kann also f^{irr} durch den Polbeitrag allein approximiert werden

$$f^{\text{irr}}(s) = \frac{g(s)}{s-s_0} \quad (2.222)$$

mit $g(s)$ regulär in $U(s_0)$.

Für die Multipolamplitude bedeutet das

$$T(s) = \frac{T^{\text{irr}}(s)}{1 - iq(s)f^{\text{irr}}(s)} = \frac{T^{\text{irr}}(s) \cdot (s-s_0)}{s-s_0 - iq(s)g(s)} \quad (2.223)$$

für $s \in U(s_0)$

1) $T^{\text{irr}}(s)$ hat mit $f^{\text{irr}}(s)$ einen Pol bei $s = s_0$

d.h. $T^{\text{irr}}(s) = \frac{v(s)}{s-s_0}$ mit $v(s)$ regulär in $U(s_0)$.

Daraus folgt $T(s) = \frac{v(s)}{s-s_0 - iq(s)g(s)}$

d.h. $T(s)$ zeigt ein Resonanzverhalten bei $s \sim s_0$.

2) $T^{\text{irr}}(s)$ ist regulär in $U(s_0)$

Daraus folgt $T(s) = 0$ für $s = s_0$.

Bedeutung von $f^{\text{irr}}(s)$:

Da nach (2.221) $\frac{1}{f^{\text{irr}}(s)} = q(s) \operatorname{ctg} \mathcal{J}(s)$

und $f^{\text{irr}}(s)$ regulär an der Schwelle $q^2(s) = 0$, kann $\frac{1}{f^{\text{irr}}(s)}$

in Schwellennähe nach Potenzen von q^2 entwickelt werden. Das entspricht aber genau der "effective - range"-Entwicklung für die Potentialstreuung :

$$\frac{1}{f^{\text{irr}}(s)} = q(s) \operatorname{ctg} \mathcal{J}(s) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} r_0 \cdot q^2(s) + \dots$$

mit α = Streulänge

r_0 = effektive Reichweite des Potentials

2.2.3 Der Betrag der resonanten Amplitude

Zum resonanten Endzustand $I = 3/2, J = 3/2^+$ können die Multipolamplituden

$$\begin{aligned} M_{1^+}^{(3/2)} &= M_{1^+, \mu}^{(3/2)} \oplus M_{1^+, e}^{(3/2)} \\ E_{1^+}^{(3/2)} &= E_{1^+, \mu}^{(3/2)} \oplus E_{1^+, e}^{(3/2)} \end{aligned} \quad (2.224)$$

beitragen. In (2.224) sind die Multipolamplituden hinsichtlich ihrer Anteile zur Wechselwirkung mit dem magnetischen Moment und der elektrischen Ladung zerlegt, entsprechend der Zerlegung der Bornsterme in Kap. 2.1 .

Die Dispersionstheorie nach CGLN ³⁾ enthält das Ergebnis, dass nur $M_{1^+, \mu}^{(3/2)}$ wesentlich zur resonanten Amplitude beiträgt

Danach gilt folgende phänomenologische Zuordnung zwischen den verschiedenen Multipolamplituden Gl.(2.224) und ^{dem} nach Kap. 2.2.2 möglichem Verhalten von $T(s)$ für $s \rightarrow s_0$:

- 1) $M_{1^+, \mu}^{(3/2)}$ besitzt die Eigenschaft 1) von $T(s)$, hat also bei $s = s_0$ eine Resonanz.

Exakt gilt $T(s) = \frac{T^{irr}}{f^{irr}} \cdot f(s)$

T^{irr}, f^{irr} haben beide einen Pol ^{(der} an Resonanz~~nähe~~, so dass

$$\frac{T^{irr}}{f^{irr}} \approx \frac{v(s)}{g(s)}$$

in $U(s_0)$ eine mit der Energie langsam veränderliche Grösse ist. Demnach sollte $\frac{T^{irr}}{f^{irr}}$ in $U(s_0)$ in guter

Näherung durch das Verhältnis der entsprechenden Bornamplituden wiedergegeben werden. d.h.

$$\frac{T^{irr}(s)}{f^{irr}(s)} \approx \frac{T^{Born}(s)}{f^{Born}(s)}$$

2) $M_{1^+,e}^{(3/2)}$, $E_{1^+,e}^{(3/2)}$ und $E_{1^+,\mu}^{(3/2)}$ besitzen die Eigenschaft 2) von $T(s)$, haben also bei $s = s_0$ Nullstellen.

Exakt gilt nach Gl. (2.219) und (2.221)

$T(s) = T^{\text{irr}}(s) \cdot \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}$. T^{irr} hat keinen Pol in Resonanznähe, kann also als mit der Energie schwach veränderliche Grösse durch die Bornamplitude approximiert werden :

$$T^{\text{irr}}(s) \approx T^{\text{Born}}(s)$$

Für die Multipolamplitude $E_{1^+,e}^{(3/2)}$ gilt nach CGLN im statischen Grenzfall

$$E_{1^+,e}^{(3/2)\text{Born}} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

und damit verschwindet nach unserer Annahme $E_{1^+,e}^{(3/2)}$ selbst. Diese Ergebnisse für $M_{1^+,e}^{(3/2)}$ und $E_{1^+,e}^{(3/2)}$ stimmen mit den von CGLN ³⁾ gewonnenen Ausdrücken überein,

Innerhalb unserer Überlegungen sind wir allerdings nicht in der Lage zu verstehen, warum $M_{1^+,e}^{(3/2)}$ der Fall 1) und den restlichen Amplituden der Fall 2) zuzuordnen ist;

Diese phänomenologische Zuordnung, nach der

$$\begin{aligned} T(s) &\stackrel{\text{Reson.}}{\approx} M_{1^+,e}^{(3/2)} = \frac{M_{1^+,e}^{(3/2)\text{irr}}}{f_{1^+}^{(3/2)\text{irr}}} \cdot f_{1^+}^{(3/2)} \\ &\approx \frac{M_{1^+,e}^{(3/2)\text{Born}}}{f_{1^+}^{(3/2)\text{Born}}} \cdot f_{1^+}^{(3/2)} \end{aligned}$$

ergibt, wenn wir für die Born-Amplituden die Ausdrücke für $M \rightarrow \infty$ aus CGLN entnehmen:

$$T(s) \stackrel{\text{Reson.}}{\approx} \frac{k}{q} \cdot \frac{(\mu_p - \mu_n)}{2f_{\pi N}} \cdot f_{1^+}^{(3/2)} \quad (2.225)$$

$M \rightarrow \infty$

mit $f_{\pi N} = \pi$ -N-Kopplungskonstante.

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von CGLN ³⁾ bei einer näherungsweise Auswertung der Dispersionsrelation im statischen Grenzwert gewonnenen Ergebnis überein.

Im Fall der π^0 -Erzeugung liefert (2.225) bis zu Energien von 500 MeV gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Mit bekannten Werten von μ_p (totales magnetisches Moment des Protons !), μ_n , $f_{\pi N}$ und $f_{1^+}^{(3/2)}$ erhält man so einen vernünftigen fit für die Erzeugungsquerschnitte, ohne dabei irgendeinen freien Parameter zur Verfügung zu haben.

2.2.4 Photoerzeugung im Bereich der 1. Resonanz

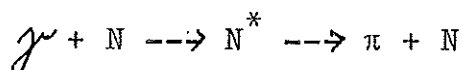
- Zusammenfassung -

Das 33 - Isobar :

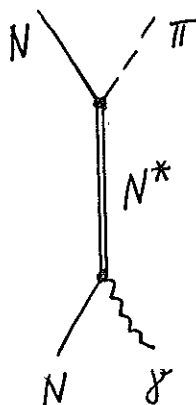
Im letzten Abschnitt (Kap. 2.2.3) wurde die Theorie der zum 33-Endzustand führenden Multipole behandelt, mit dem Ergebnis, dass nur die $M_{1^+, \mu}^{(3/2)}$ - Amplitude ein resonantes Verhalten zeigt.

Dieses Resultat lässt sich in Analogie zu den Compoundkernprozessen in der Kernphysik interpretieren. Dazu führen wir einen metastabilen, angeregten Zustand des Nukleons N^* mit der Masse $M_{N^*} \simeq 1230$ MeV (genauer: Realteil der Masse) entsprechend der totalen Energie \sqrt{s} an der Resonanz und den Quantenzahlen $j^\pi = 3/2^+$, $I = 3/2$ ein. Dieses so definierte N^* nennt man das 33 - Isobar .

Die resonante Amplitude lässt sich dann als Zweistufenprozess behandeln:



Diesen Zweistufenprozess können wir in der Sprache der Feynman - Graphen durch folgendes Diagramm darstellen :



Dabei ist für N^* der Propagator eines Spin 3/2-Teilchens mit komplexer Masse einzusetzen, d.h.

$$\text{Propagator } N^* \sim \frac{1}{s - M_{N^*}^2 + i \Gamma_{N^*} M}$$

Der Nenner dieses Propagators liefert die typische Energieabhängigkeit einer Breit-Wigner-Formel, wobei Γ_{N^*} die Breite der Resonanz ist. Die Kopplungskonstante am $(N^* N \pi)$ -Vertex $f_{N^* N \pi}$ ergibt sich aus der Breite zu $f_{N^* N \pi} \sim \sqrt{\Gamma_{N^*}}$, während am $(N^* N \gamma)$ -Vertex 2 verschiedene Kopplungskonstanten f^{E2} und f^{M1} entsprechend den Möglichkeiten von E2-bzw. M1-Absorption auftreten. Die Ergebnisse von Kap. 2.2.3 liefern uns nun eine Theorie der beiden Kopplungskonstanten f^{E2} und f^{M1} :

$f^{E2} \simeq 0$ und $f^{M1} \neq 0$, wobei der numerische Wert von f^{M1} aus Gl. (2.225) bei bekannten $f_{N^* N \pi}$ zu entnehmen ist. *)

Diese Beschreibung von resonanten Amplituden durch über isobare Zustände des Nukleons führende Prozesse lässt sich auch im Bereich der höheren Resonanzen anwenden und führt zu dem Isobarenmodell, welches im Einzelnen in Kap. 2.4.2 besprochen wird.

Die nichtresonanten Amplituden :

Das Schwellenverhalten sowie die Verschiebung der Resonanz bei der π^+ -Erzeugung deutet auf einen nicht zu vernachlässi -

*) $\frac{f^{E2}}{f^{M1}} \simeq 0$ erscheint plausibel, da das Nukleon zwar ein statisches, magnetisches Moment, aber kein statisches Quadrupolmoment besitzt.

genden nichtresonanten Untergrund hin, der vor allem s-Wellen enthält. Gemäss der in Kap. 2.2.3 entwickelten Vorstellung, wollen wir langsam energieveränderliche Amplituden, also auch den nichtresonanten Untergrund, durch die Born'sche Näherung approximieren. Eine numerische Auswertung der Bornsterme für π^+ -Erzeugung ⁴⁾ zeigt, dass die zum s-Zustand führende E1-Absorption und zwar in beiden Isospin-Zuständen $I = 1/2, 3/2$, überwiegt.

Die totale Amplitude :

Die obigen Betrachtungen lassen folgenden Ausdruck für die totale Amplitude im Bereich der 1. Resonanz plausibel erscheinen :

$$T_{fi} \simeq (1 - P_{33}) T_{fi}^{\text{Born}} \oplus M_{1^+, \mu}^{(3/2)} \oplus \text{Korrekturen}$$

wobei P_{33} die Projektion auf den 33 - Endzustand ist,

$M_{1^+, \mu}^{(3/2)}$ durch Gl.(2.225) gegeben ist und in den Korrekturen

solche Terme wie $E_{1^+, e}^{(3/2)}, M_{1^+, e}^{(3/2)}$ (vgl.Kap. 2.2.3) Rückstoss-

korrekturen u.a. enthalten sind. Für eine detaillierte Diskussion der Korrekturterme sei auf CGLN ³⁾ und die Arbeiten der Karlsruher Gruppe (Ref. ⁴⁾ und die dort zitierte Literatur) verwiesen.

Der obige Ausdruck für T_{fi} führt zu einer qualitativen Übereinstimmung mit den experimentellen Daten :

π^0 - Erzeugung : Wegen der Kompensation der elektrischen Bornsterme (vgl. Kap. 2.1) ist $T_{fi}^{\pi^0}$ praktisch durch die resonante $M_{1^+, \mu}^{(3/2)}$ - Amplitude bestimmt.

π^+ - Erzeugung :

Der E_{0+} - Anteil der Bornsterme führt zum richtigen Schwellenverhalten, zur $I = 1/2$ Beimischung, sowie durch Interferenz mit der resonanten $M_{1^+, \mu}^{(3/2)}$ - Amplitude zur effektiven Verschiebung der Resonanz zu kleineren Energien.

Literaturangaben zu Kapitel 2.2

- 1) Goldansky : Nuclear Physics 12, 327 (1959)
- 2) W. Zimmermann : Nuovo Cim. 21, 249 (1961)
- 3) CGLN : Phys. Rev. 106, 1345 (1957)
- 4) G. Höhler und W. Schmidt : preprint, Nov. 1963

2.3 Polarisationsmessungen

In Kap. 1.2 haben wir gesehen, dass die Amplitude T_{fi} der Einfachpionerzeugung 4 invariante Funktionen $A_i(s,t)$ enthält, welche die gesamte Information über den betrachteten Prozess enthalten. Diese 4 komplexwertigen Funktionen entsprechen 8 reellwertigen Funktionen $|A_i(s,t)|, \varphi_i(s,t)$:

$$A_i(s,t) = |A_i(s,t)| e^{i\varphi_i(s,t)} \quad i = 1, \dots, 4$$

Da die $A_i(s,t)$ aber nur in der Form

$$A_i^*(s,t) \cdot A_j(s,t) = |A_i(s,t)| \cdot |A_j(s,t)| e^{i(\varphi_j(s,t) - \varphi_i(s,t))} \\ i, j = 1, \dots, 4$$

in den Wirkungsquerschnitt eingehen, spielt nur die relative Phase der $A_i(s,t)$ eine physikalische Rolle, so dass eine der Phasenfunktionen $\varphi_i(s,t)$ willkürlich ist. Mithin verbleiben 7 unabhängige Funktionen, zu deren Bestimmung 7 unabhängige Experimente notwendig sind. Wir wollen im folgenden diskutieren, wie man durch Verwendung linear polarisierter γ 's ^{und} _{Messung} der Polarisation der Rückstossnukleonen 6 unabhängige Messungen durchführen kann.

2.3.1 Herstellung linear polarisierter γ -Quanten

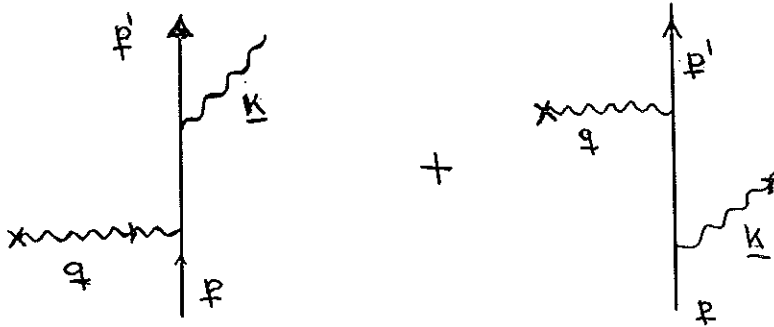
Zur Herstellung linear polarisierter γ -Quanten kann man sich die Tatsache zunutzemachen, dass die bei der Streuung von Elektronen im Coulombfeld eines Kerns entstehende Bremsstrahlung eine Polarisation aufweist.

a) Bremsstrahlung am amorphen Target ¹⁾

Beim Beschuss eines hinreichend dünnen Targets mit Elektronen tritt die Bremsstrahlung als inkohärente Überlagerung von "Elementarprozessen" auf, d.h. ein einfallendes Elektron wird jeweils höchstens einmal am Kern gestreut (Elementarprozess) ; die von verschiedenen Elektronen herrührende

Strahlung interferiert nicht.

Die Berechnung der Elementarprozesse erfolgt durch Berücksichtigung der beiden Feynmandiagramme



Experimentell beobachtet man nur \underline{p} und \underline{k} , so dass man den aus den Feynmangraphen berechneten Wirkungsquerschnitt über \underline{p}' zu summieren und über die Anfangspolarisation zu mitteln hat. Als Ergebnis einer solchen Rechnung folgt, dass die γ 's im extrem relativistischen Fall vorwiegend in Richtung $\vec{p} \times \vec{k}$ polarisiert sind ¹⁾. Dies wird ersichtlich aus untenstehendem Diagramm, in dem der "Polarisationsgrad"

$$P(\alpha, \epsilon) = \frac{d\sigma_{\perp}(\alpha, \epsilon) - d\sigma_{\parallel}(\alpha, \epsilon)}{d\sigma_{\perp}(\alpha, \epsilon) + d\sigma_{\parallel}(\alpha, \epsilon)}$$

aufgetragen ist. Hier bedeutet

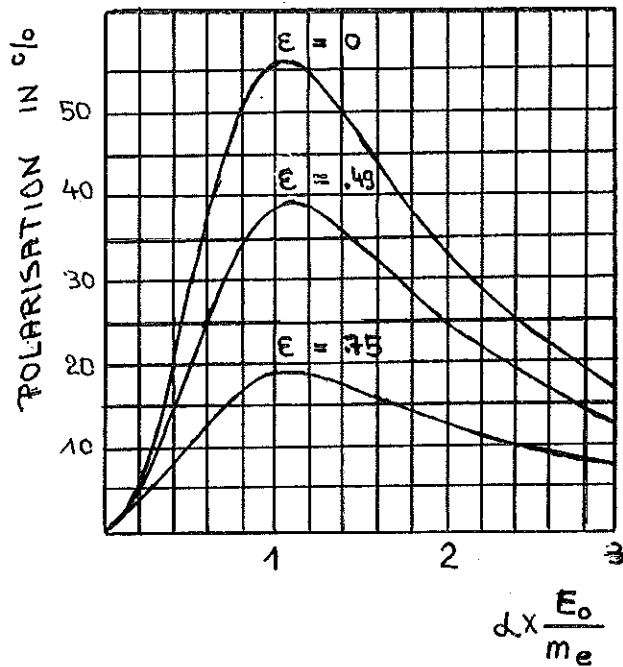
$$\alpha = \chi(\vec{p}, \vec{k})$$

$d\sigma_{\perp}$ = differentieller Wirkungsquerschnitt mit Polarisation senkrecht zur Produktionsebene (\vec{p}, \vec{k})

$d\sigma_{\parallel}$ = differentieller Wirkungsquerschnitt mit γ -Polarisation parallel zur Produktionsebene

$$\epsilon = \frac{k_0}{E_0}$$

E_0 = Primärenergie der Elektronen



Wie man dem Diagramm entnimmt, ist der Polarisationsgrad am grössten für $\alpha_0 \approx \frac{m_e}{E_0}$. Bei diesem α -Wert hat auch der Wirkungsquerschnitt $d\sigma = d\sigma_{\perp} + d\sigma_{\parallel}$ selbst ein ausgeprägtes Maximum. Dies entspricht minimalem Impulsübertrag q .

Der experimentellen Ausnutzung des Polarisations-effektes bei der Bremsstrahlung stehen drei Schwierigkeiten im Wege:

- 1) Die Mehrfachstreuung verkleinert den maximal erreichbaren Polarisationsgrad.
- 2) Man muss den Erzeugungswinkel α der γ 's sehr genau festlegen, da der Polarisationsgrad eine stark schwankende Funktion von α ist (Die Bremsstrahlung geht hauptsächlich in den durch $\alpha < \frac{m_e}{E_0}$ definierten spitzen Kegel um die Einfallsrichtung der Elektronen). Dies erfordert sowohl sehr gute Strahldefinition als auch sehr scharfe Ausblendung der γ 's .
- 3) Die Bremsstrahlung weist ein breites Spektrum auf. Dies bedeutet Verlust an Ausbeute von γ -Quanten bestimmter Energie und führt zur Notwendigkeit von Differenzmessungen.

der Photoproduktionswirkungsquerschnitte durch Variation der Elektroneneinschussenergie.

2)

b) Bremsstrahlung am Kristall (Überall- oder Diambrini-Effekt)

Einen Teil dieser Schwierigkeiten kann man umgehen, indem man kohärente Bremsstrahlung am kristallinen Target erzeugt.

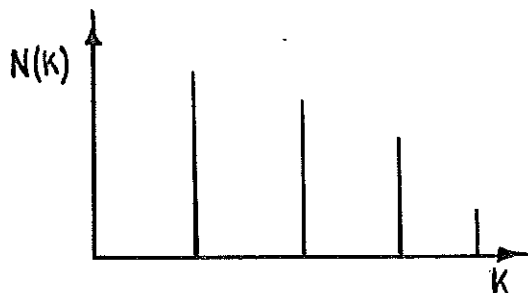
Während der Impulsübertrag \vec{q} im amorphen Target alle Werte in einem durch die Kinematik bestimmten Bereich annimmt, kann ein Kristallgitter mit reziproken Gittervektoren \vec{g}_i nur ganz bestimmte Impulsüberträge aufnehmen :

$$\vec{q}_i = 2\pi \vec{g}_i$$

Da aber, wie man leicht durch Induktion beweist, die Anzahl N der Freiheitsgrade einer Reaktion mit n Teilchen im Ausgangskanal

$$N = 3n - 4$$

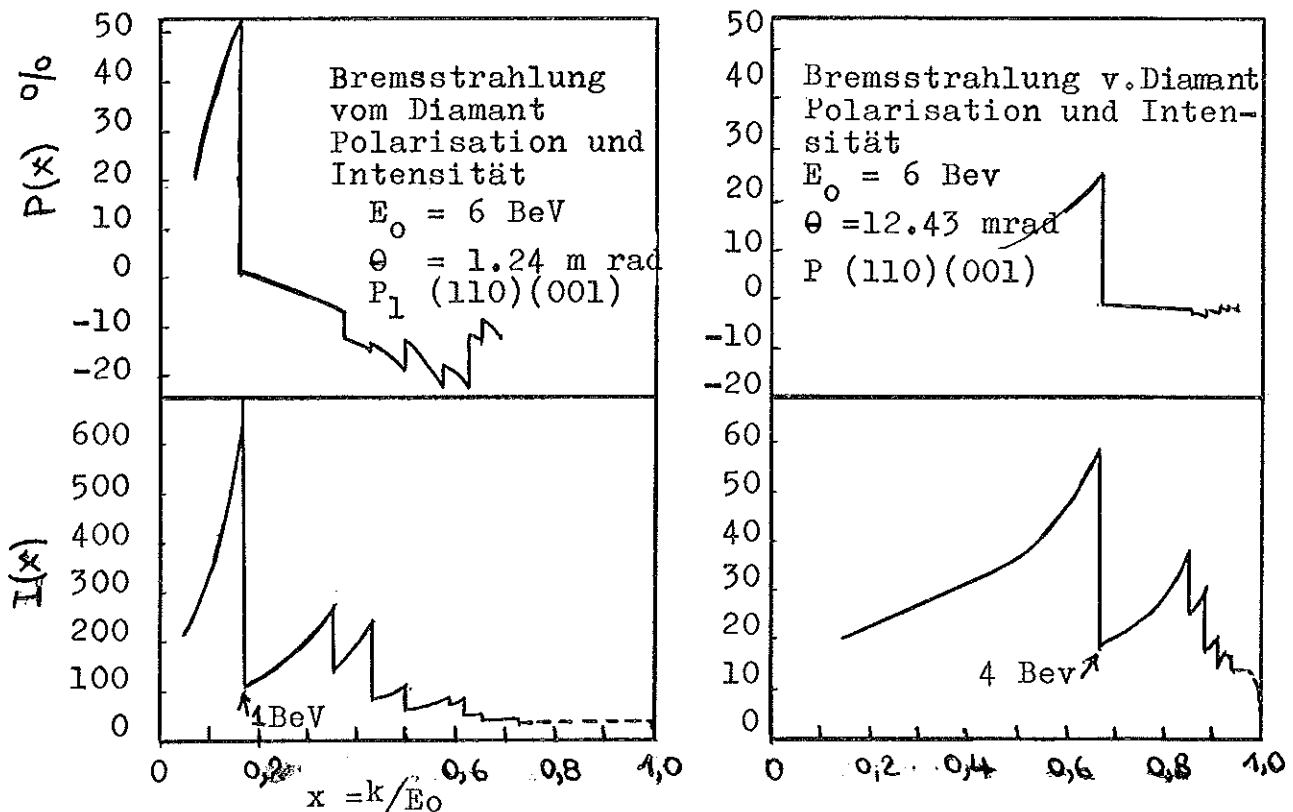
ist, so sieht man, dass wegen $n = 3$ der Prozess der Bremsstrahlung durch 5 unabhängige kinematische Variablen festgelegt ist. Dies bedeutet, dass bei vorgegebener Einschussenergie E_0 , Impulsübertrag \vec{q}_i und Produktionswinkel α die γ -Energie k_0 festliegt. D.h. die kohärente Bremsstrahlung am Kristall liefert bei definierter Elektronenenergie und definiertem Beobachtungswinkel im Prinzip ein diskretes γ -Spektrum $N(k)$



Die einzelnen Linien kommen durch die verschiedenen auftretenden reziproken Gittervektoren zustande. Bei schlechter Winkelauflösung weiten sich die scharfen Linien zu einem

zackenförmigen Spektrum auf. Dies ersieht man aus folgenden Diagrammen, welche Polarisation und Spektrum von Bremsstrahlung am Diamant bei verschiedenen Einschusswinkeln θ gegen die (110) - Achse in der (110)(001)-Ebene und der Einschussenergie $E_0 = 6$ BeV enthalten. Ferner sieht man, dass die Polarisation an den Zacken im Spektrum deutliche Maxima hat. Hier bietet sich also der experimentelle Vorteil, bei weniger hoher Anforderung an Winkeldefinition (die Einstellung von θ erweist sich als weniger kritisch) eine 4-5-fach höhere Ausbeute von γ 's zu erreichen, wenn man die grösste Zacke im Bremspektrum beobachtet (allerdings liegt diese relativ niedrig zu E_0).

Diagramme aus : Proc. Conf. Photon Interactions in the BeV-Energy Range, Cambridge, Jan. 1963



Bei der Verwendung eines Elektronensynchrotrons als Strahlquelle der hochenergetischen Elektronen muss man (s. DESY) mit einer Divergenz des primären Elektronenstrahles von ungefähr 1 mrad rechnen, so dass man nicht mit sehr kleinen Winkeln θ arbeiten kann.

2.3.2 Messung der Polarisierung des Rückstossnukleons bei der Photoerzeugung.

Nachdem wir uns im letzten Kapitel 2.3.1 mit den Methoden zur Herstellung linear polarisierter γ -Quanten befasst haben, wollen wir uns im folgenden mit der Messung der Polarisierung der Rückstossnukleonen bei der Photoerzeugung beschäftigen.

Streut man polarisierte Nukleonen an einem Kern mit Spin=0 (z.B. an C^{12} mit Spin 0^+ im Grundzustand),

$$p + C^{12} \longrightarrow p' + C^{12}$$

$$(\vec{k}) \qquad (\vec{k}')$$

so liefert die Messung der Azimutal-Asymmetrie in der Winkelverteilung eine Aussage über den Betrag der Polarisierung.

Dies kann man wie folgt einsehen: Das Koordinatensystem sei so festgelegt, dass die z - Richtung durch den aus \vec{k} und \vec{k}' gebildeten Einheitsvektor

$$\hat{n} = \frac{\vec{k} \times \vec{k}'}{|\vec{k} \times \vec{k}'|}$$

bestimmt ist.

Dichtematrix:

Die Polarisierung eines Nukleonenstrahles wird in der Quantenmechanik durch eine Dichtematrix³⁾ charakterisiert. Um diesen Formalismus hier einzuführen, soll zunächst der Spezialfall betrachtet werden, dass der Polarisationsvektor \vec{P}_i parallel oder antiparallel zu \hat{n} liegt.

Dann ist die Polarisierung definiert durch

$$\vec{P}_i = \frac{W_+ - W_-}{W_+ + W_-} \hat{n} \qquad (2.31)$$

W_{\pm} sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, den Nukleonenspin parallel (+ Polarisationsrichtung) oder antiparallel

(-Polarisationsrichtung) zur Richtung \hat{n} zu messen.

Definiert man nun die Dichtematrix durch

$$\rho_i = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

so lässt sich die Polarisation offensichtlich schreiben

$$\vec{P}_i = \langle \vec{\sigma} \rangle_i = \frac{\text{Spur}(\rho_i \vec{\sigma})}{\text{Spur}(\rho_i)} \quad (2.33)$$

Für die normierte Dichtematrix ($\text{Spur}(\rho_i) = 1$) ist die Darstellung (2.32) gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\rho_i = \frac{1}{2} (1 \pm |\vec{P}_i| \sigma_z) \quad \text{mit} \quad \pm \text{ für } W_+ - W_- \gtrless 0 \quad (2.33')$$

Im allgemeinen wird die Polarisationsrichtung beliebig zur \hat{n} -Richtung liegen. Aus Gründen der Drehinvarianz ist es plausibel, dass dann die Dichtematrix das Skalarprodukt von \vec{P} und $\vec{\sigma}$ enthält.

$$\rho_i = \frac{1}{2} (1 + \vec{P}_i \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.34)$$

Auch in diesem allgemeinen Fall ist die Polarisation \vec{P} durch Gl. (2.33) gegeben (wie man leicht nachrechnet!).

Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch

$$W(\theta, \varphi) = \text{Spur}(\rho_f) \quad (2.35)$$

Die Dichtematrix ρ_f für den auslaufenden Zustand lässt sich mittels der Streumatrix M durch die Dichtematrix ρ_i ausdrücken:

$$\rho_f = M \rho_i M^\dagger \quad (2.36)$$

Berücksichtigt man Drehinvarianz und Paritätserhaltung, so ist die allgemeinste Form der Streumatrix M

$$M = f(\theta) \cdot 1 + ig(\theta) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \quad (2.37)$$

Berücksichtigt man, dass $\text{Spur}(\sigma_k) = 0$ ($k = 1, 2, 3$), so erhält man für den Wirkungsquerschnitt (2.35), mit (2.36)

(2.37) (2.34)*

$$\begin{aligned} W(\theta, \varphi) &= \text{Spur} (M \rho_i M^\dagger) \\ &= \text{Spur} (\rho_i M^\dagger M) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$W(\theta, \varphi) = |f|^2 + |g|^2 + 2\text{Im}(g^*f)(\vec{P}_i \cdot \hat{n})$$

Azimutal - Asymmetrie

Def.:

$$A(\theta) = \frac{W(\theta, \varphi = 0) - W(\theta, \varphi = \pi)}{W(\theta, \varphi = 0) + W(\theta, \varphi = \pi)} \quad (2.39)$$

Der Azimutalwinkel φ ist definiert durch



Nach (2.38) ergibt sich somit für $A(\theta)$

$$A(\theta) = \frac{2 \text{Im}(g^*f) |\vec{P}_i|}{|f|^2 + |g|^2} \quad (2.310)$$

Wir können also $|\vec{P}_i|$ aus der Messung der Azimutal-Asymmetrie $A(\theta)$ entnehmen, falls $\frac{2 \text{Im}(g^*f)}{|f|^2 + |g|^2}$ bekannt ist. Diese Grösse lässt sich jedoch auf Grund des Wolfenstein-Theorems leicht messen.

Wolfenstein - Theorem :

Für die Streuung von unpolarisierten Protonen ($\rho_i = 1/2$) ergibt sich für die Polarisation \vec{P}_f der Nukleonen nach der Streuung nach (2.33), (2.36) und (2.34)

* Spur AB = Spur BA, aber allg. Spur ABC \neq Spur ACB

$$\vec{P}_{f_0} = \langle \vec{\sigma} \rangle_f = \frac{\text{Spur}(M \rho_i M^+ \vec{\sigma})}{\text{Spur}(M \rho_i M^+)} \Big|_{\rho_i = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \vec{P}_{f_0} = \frac{\text{Spur}(\vec{\sigma} M M^+)}{\text{Spur}(M M^+)}$$

Setzt man die allgemeine Form für M nach (2.37) ein, so wird

$$\vec{P}_{f_0} = \frac{2 \text{Im}(g^* f)}{|g|^2 + |f|^2} \hat{n} \quad (2.311)$$

Die Polarisation, die durch Streuung unpolarisierter Teilchen an einem Target mit Spin 0 erzeugt wird, steht also senkrecht zur Ebene von ein- und auslaufender Impulsrichtung.

Für den Betrag der Polarisation im Endzustand erhält man also

$$|\vec{P}_{f_0}| = \frac{2 \text{Im}(g^* f)}{|f|^2 + |g|^2} \quad (2.312)$$

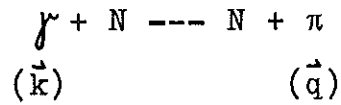
Diese Aussage bezeichnet man als "Wolfenstein-Theorem".

Mit (2.312) ergibt sich für die Azimutal-Asymmetrie nach (2.310)

$$A(\theta) = |\vec{P}_{f_0}| \cdot |\vec{P}_i| \quad (2.313)$$

Dieses $|\vec{P}_{f_0}|$ lässt sich nun gemäss (2.313) leicht durch ein Doppelstreuexperiment am gleichen Target und unter gleichen kinematischen Bedingungen messen : Nach der 1. Streuung liegt eine Polarisation \vec{P}_{f_0} vor, die Asymmetrie nach der 2. Streuung ist dann gemäss (2.313) $A = |\vec{P}_{f_0}|^2$. Bei dieser Überlegung wurde das Target als unendlich schwer angenommen, so dass keine Energieverluste infolge Targetrückstoss bei der 1. Streuung auftreten.

2.3.3 Phänomenologische Beschreibung von
Polarisationsexperimenten 4)



Der Prozess soll im CMS in der Coulomb-Eichung $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ betrachtet werden.

Mit den Einheitsvektoren

$$\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} ; \quad \hat{n} = \frac{\vec{k} \times \vec{q}}{|\vec{k} \times \vec{q}|} \quad \begin{array}{l} \text{Vektor senkrecht zur} \\ \text{Reaktions-Ebene} \end{array}$$

wird folgendes Dreibein definiert :

$$\begin{array}{ll} \text{(V)} & \vec{e}_1 = \hat{n} \times \hat{k} \\ \text{(A)} & \vec{e}_2 = \hat{n} \\ \text{(V)} & \vec{e}_3 = \hat{k} \end{array}$$

(V) = polarer Vektor

(A) = achsialer Vektor

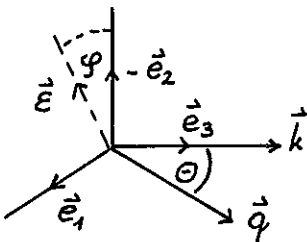
Wegen $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ steht der Polarisationsvektor des einlaufenden Photons senkrecht zur \vec{e}_3 - Richtung.

Der Polarisationswinkel φ wird festgelegt durch

$$\cos \varphi = - \vec{\epsilon} \cdot \hat{n} \quad (2.314)$$

normiert man ausserdem $\vec{\epsilon}^2 = 1$, so gilt für $\vec{\epsilon}$ die Zerlegung

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon} &= - \cos \varphi \vec{e}_2 + \sin \varphi \vec{e}_1 \\ &= - \cos \varphi \hat{n} + \sin \varphi [\hat{n} \times \hat{k}] \end{aligned} \quad (2.315)$$



Winkelverteilung :

Aus Invarianzgründen und unter Berücksichtigung der pseudo-skalaren Natur der π - Mesonen ist die allgemeinste Form des Übergangsmatrixelementes

$$T_{fi} = g \cdot 1 + i (\vec{h} \cdot \vec{\epsilon}) \quad (2.316)$$

mit

$$g = a(s, \theta) (\hat{n} \cdot \vec{\epsilon})$$

$$\vec{h} = b(s, \theta) \vec{\epsilon} + c(s, \theta) (\vec{\epsilon} \cdot \hat{q}) \hat{k} + d(s, \theta) (\vec{\epsilon} \cdot \hat{q}) \hat{q} \quad (2.317)$$

g ist pseudoskalar (PS), \vec{h} ein polarer Vektor (V)

Die Koeffizientenfunktionen a, b, \dots, d sind komplexe Funktionen, so dass zur vollständigen Bestimmung dieser Grössen einschliesslich ihrer relativen Phasen 7 unabhängige Experimente notwendig sind.

Die Winkelverteilung $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}, \hat{k}, \hat{q})$ muss folgende Eigenschaften besitzen:

- 1) $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist ein Skalar
- 2) " " quadratisch in $\vec{\epsilon}$, da $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim M^\dagger M$

Die allgemeinste Form, die diesen Bedingungen genügt, ist

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{\epsilon}, \hat{k}, \hat{q}) &= B_1(s, \cos\theta) \cdot 1 + B_2(s, \cos\theta) \cdot (\vec{\epsilon} \cdot [\hat{n} \times \hat{k}])^2 \\ &= B_1 + B_2 \sin^2\varphi \end{aligned} \quad (2.318)$$

Mit 1 und $(\vec{\epsilon} \cdot [\hat{n} \times \hat{k}])^2$ sind alle möglichen skalaren, in $\vec{\epsilon}$ quadratischen Ausdrücke berücksichtigt.

Arbeitet man mit linear polarisierten Photonen, so liefert also die Winkelverteilung 2 verschiedene Experimente für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Die Messung der Winkelverteilung mit unpolarisierten Photonen liefert keine neue Aussage, denn

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} /_{unpol. \gamma} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\varphi=0) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\varphi=\frac{\pi}{2}) \right]$$

Polarisation

\vec{P} ist mit $\langle \vec{\epsilon} \rangle$ ein Achsialvektor. Es gelten also

- 1) $\frac{d\sigma}{d\Omega} \vec{P}$ ist (A)
- 2) $\frac{d\sigma}{d\Omega} \vec{P}$ " quadratisch in $\vec{\epsilon}$

Die allgemeinste Form für die Polarisation lässt sich dann schreiben :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \vec{P} = & C_1(s, \theta) \hat{n} + C_2(s, \theta) (\vec{E} \cdot \hat{n})^2 \hat{n} + \\ & + C_3(s, \theta) (\vec{E} \cdot \hat{n}) (\vec{E} \cdot [\hat{n} \times \hat{k}]) \hat{k} + \\ & + C_4(s, \theta) (\vec{E} \cdot \hat{n}) (\vec{E} \cdot [\hat{n} \times \hat{k}]) [\hat{n} \times \hat{k}] \end{aligned} \quad (2.319)$$

In Abhängigkeit vom Winkel φ ergibt das

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \vec{P} = C_1 \hat{n} + C_2 \cos^2 \varphi \hat{n} - C_3 \sin \varphi \cos \varphi \hat{k} - C_4 \sin \varphi \cos \varphi [\hat{n} \times \hat{k}] \quad (2.319')$$

Misst man die Polarisation in den verschiedenen Richtungen

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, so liefert

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (\vec{P} \cdot \hat{n}) = C_1 + C_2 \cos^2 \varphi \quad 2 \text{ Exper. für } \varphi = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (\vec{P} \cdot \hat{k}) = -C_3 \sin \varphi \cos \varphi \quad 1 \text{ Exper.}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (\vec{P} \cdot [\hat{n} \times \hat{k}]) = -C_4 \sin \varphi \cos \varphi \quad 1 \text{ Exper.}$$

Insgesamt können also mit linear polarisierten Photonen 6 verschiedene Experimente durchgeführt werden. Ein 7. Experiment ist möglich, wenn zirkular polarisierte Photonen benutzt werden.

Invarianzen für Winkelverteilung und Polarisation.

Entwickelt man die komplexen Funktionen a, b, ... d nach Multipolamplituden, so kann man folgende Invarianzeigenschaften ablesen 4):

a ist invariant bei $(\ell+1)M_{\ell+} \leftrightarrow \ell M_{\ell-}$

b und c sind " " $M_{\ell+} \leftrightarrow -M_{\ell-}$

oder $E_{(\ell-1)+} \leftrightarrow E_{(\ell+1)-}$

d ist invariant bei Vertauschung der Grössen $M_{\ell+}; -M_{\ell-}; -E_{\ell+}; -E_{\ell-}$

untereinander.

Diese Invarianzen übertragen sich in folgender Weise auf

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \vec{P}$$

$$1) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} /_{\varphi=0} \quad \text{invariant unter } E_{(\ell-1)^+} \longleftrightarrow E_{(\ell+1)^-}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \vec{P} /_{\varphi=0} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$2) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} /_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \quad \text{invariant unter } M_{\ell^+} \longleftrightarrow -M_{\ell^-}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \vec{P} /_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$3) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} /_{\varphi=0} \quad \xleftrightarrow{\text{unter } \begin{cases} M_{\ell^+} \leftrightarrow -E_{(\ell+1)^-} \\ M_{\ell^-} \leftrightarrow E_{(\ell-1)^+} \end{cases}} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} /_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

Für unpolarisierte Photonen ist also die Winkelverteilung, die eine Mittelung über die Verteilungen für $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$

ist, invariant mit der Eigenschaft 3), wie wir schon an Beispielen in Kap. 2.2.1 (s. Tabelle) gesehen haben. Diese Invarianz der Winkelverteilung bei Einschuss unpolarisierter Photonen bedeutet, dass man z.B. bei Vorliegen einer Resonanz mit definiertem j^π aus der Winkelverteilung nur j , nicht aber die Parität π entnehmen kann. Erst die Messung der Winkelverteilung mit linear polarisierten Photonen gibt uns die Möglichkeit, auch die Parität zu messen. Diese Aussagen sind völlig äquivalent der Situation bei γ - γ -Winkelkorrelationen in der Kernphysik.

Aussage über die Polarisation

Die Polarisation \vec{P} ist nur dann von Null verschieden, wenn (verschiedene) Multipole mit verschiedenen Phasen am Prozess beteiligt sind.

Deutung :

Für unpolarisierte einlaufende Nukleonen gilt

$$\vec{P} = \frac{\text{Spur} (\vec{\sigma} T_{fi} T_{fi}^{\dagger})}{\text{Spur} (T_{fi} T_{fi}^{\dagger})}$$

Die allgemeine Form (2.316) für T_{fi} ergibt

$$\vec{P} = \frac{2 \text{Im} (g\vec{h}^*) + i[\vec{h} \times \vec{h}^*]}{|g|^2 + (\vec{h} \cdot \vec{h}^*)} \quad (2.320)$$

1) Haben die Multipole gleiche Phasen, so sind \vec{h}, \vec{h}^* linear abhängig und $g\vec{h}^*$ reell. Also wird $\text{Im}(g\vec{h}^*) = 0$,
 $[\vec{h} \times \vec{h}^*] = 0$

2) Trägt nur 1 Multipol in der Entwicklung bei, so gilt wieder

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{h} = \hat{h} e^{i\delta} \\ \vec{h}^* = \hat{h} e^{-i\delta} \end{array} \right\} [\vec{h} \times \vec{h}^*] = 0$$

b) g und \vec{h} haben gleiche Phase,
 $\rightarrow \text{Im} (g\vec{h}^*) = 0$

Also ist die Messung der Polarisation der Rückstossnukleonen in der Photoerzeugung die geeignete Methode, um z.B. in der Umgebung einer Resonanz die Beimischung nichtresonanter Amplituden zu untersuchen, da \vec{P} direkt proportional dieser Beimischung ist. Bei der Untersuchung der Winkelverteilung allein, ist es schwierig, zuverlässige Aussagen über den Untergrund zu erhalten, da die Interferenzterme zwischen resonanter und nichtresonanter Amplitude im allgemeinen klein gegenüber dem Quadrat der resonanten Amplitude sind.

Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ lässt sich obige Aussage über die Polarisation für die Komponente in Richtung \hat{n} noch verschärfen: Damit $(\vec{P} \cdot \hat{n}) \neq 0$ ist, müssen nicht nur die Phasen sondern auch die Paritäten der beitragenden Multipole verschieden sein (Beweis s. Anhang)

2.3.4 Bisherige Messungen mit linear polarisierten

γ -Quanten.

Wie in Kapitel 2.3.3 gezeigt wurde, liefern Messungen der Winkelverteilung im Prozess $\gamma + N_1 \rightarrow N_2 + \pi$ bei Verwendung linear polarisierter γ -Quanten zusätzliche Informationen über die Multipolzusammensetzung der Photoerzeugungsamplitude.

Zwei Gruppen haben bisher solche Experimente im Energiebereich $E_\gamma \leq 340$ MeV durchgeführt.

1. Stanford : R.J. Drickey und R.F. Mozley ⁵⁾. Sie benutzten zur Erzeugung der linear polarisierten γ -Quanten die in Kap. 2.3.1 unter a) angegebene Methode.
2. Frascati : ⁶⁾ Die linear polarisierten γ -Quanten wurden mit Hilfe des Überall-Effekts (s. Kap. 2.3.1) erzeugt.

Die Stanford-Gruppe hat die Photoproduktion von π^0 bei Energien von 235 MeV, 285 MeV und 335 MeV gemessen. In diesem Energiebereich kann man annehmen, (vergl. Kap. 2.2.4) dass nur s- und p-Wellen zum Endzustand beitragen. Unter dieser Voraussetzung hat die Winkelverteilung $W(\theta, \varphi)$ die Form ⁴⁾ :

$$W(\theta, \varphi) = A + B \cos \theta + C \cos^2 \theta + \mathcal{A} \cos 2\varphi \sin^2 \theta$$

(vergl. Kap. 2.3.3 für die Definition von φ).

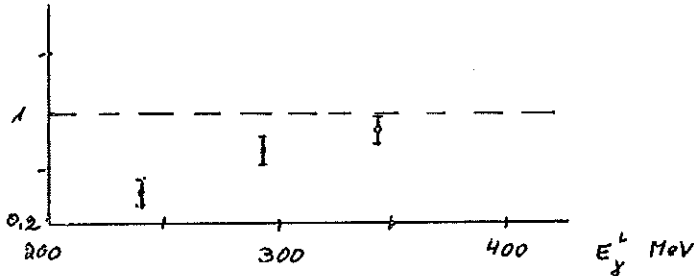
A, B und C sind die gleichen Koeffizienten, die man durch Messungen mit unpolarisierten γ -Quanten erhält.

Macht man die weitere Annahme, dass elektrische Quadrupolterme vernachlässigt werden können, also $E_{1+} = 0$, so ergibt nach ⁴⁾

$$\mathcal{A} = C$$

Diese Annahme ist mit unseren Ergebnissen aus Kap. 2.2.4 verträglich.

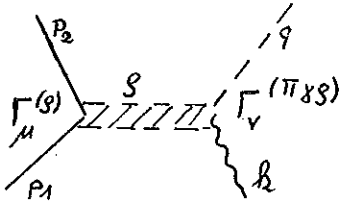
Das Experiment liefert folgendes Ergebnis :



Wie man aus der Figur ersieht, ist das theoretisch erwartete Ergebnis nicht mit den experimentellen Werten in Einklang.

Welche Erklärungen kann man für diese Diskrepanz geben ?

- a) Die lineare Polarisation der γ -Quanten wurde in Ref.⁵⁾ nur berechnet und nicht gemessen. Diese Berechnungen könnten falsch sein (s. Probleme der Vielfachstreuung im Bremsstrahlungstarget etc.) Andererseits ist der Messpunkt bei 335 MeV in Übereinstimmung mit dem in Frascati bei 325 MeV gefundenen Ergebnis ⁶⁾, wo die Polarisation gemessen wurde. Angenommen die angegebenen Messpunkte geben die wahren Werte wieder, so bieten sich zwei theoretische Erklärungen an :
- b) Man muss noch kleine $d_{3/2}$ Beimischungen vom niederenergetischen Ausläufer der 2. Resonanz in Betracht ziehen und ausserdem eine kleine E_{1+} Beimischung zulassen. Dies ist die vom Isobarenmodell nach Gourdin und Salin ⁷⁾ gegebene Erklärung, bei denen eine E_{1+} - Beimischung von 4,5% auftritt und die so eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Experiment erzielen ⁷⁾.
- c) De Tollis und Verganelakis ⁸⁾ geben folgende Erklärung an: Bei der Photoproduktion spielen die beiden Graphen



ebenfalls eine Rolle. Dabei sind die $\Gamma_{\mu}^{(\omega)}$ die im Graphen auftretenden Vertexfunktionen. Nach den Feynman-Regeln erhält man z.B. für den g - Austausch folgendes Matrixelement :

$$T_g\text{-Austausch} = \bar{u}(p_2) \Gamma_{\mu}^{(g)} u(p_1) \cdot \frac{g^{\mu\nu} - \frac{(q-k)^{\mu} (q-k)^{\nu}}{m_g^2}}{t - m_g^2} \Gamma_{\nu}^{(\pi\gamma g)}$$

Berücksichtigt man, dass

$$t(s, \cos\theta) = a(s) + b(s) \cos\theta$$

(nach Gl. 1.12) ist und entwickelt man $\frac{1}{t - m_g^2}$ nach

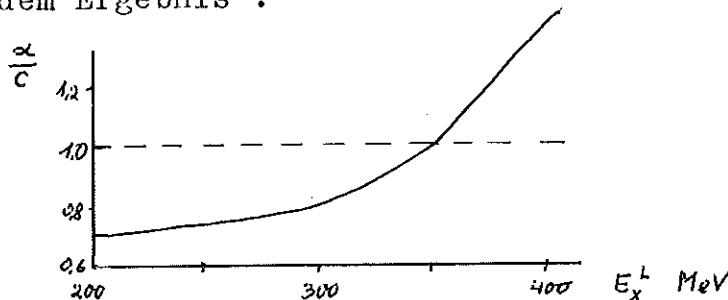
Legendre-Polynomen, so treten alle Potenzen von $\cos\theta$ auf, d.h. man erhält einen Beitrag in allen Multipolen.

Um nun die Winkelverteilung auszurechnen, muss man den absoluten Beitrag dieser Graphen zur Photoerzeugungsamplitude kennen. Man muss also ihre Kopplungsstärke \mathcal{A} bestimmen.

Diese kann z.B. für den g - Austausch aus dem Verhältnis

$$\frac{\sigma^-}{\sigma^+} \text{ ermittelt werden (vgl. Ref. } ^8) \text{ sowie Kap. 1.4 Seite 16)}$$

Die Rechnungen von de Tollis und Verganelakis führen zu folgendem Ergebnis :



Diese Kurve gibt den qualitativen Verlauf der experimentellen Werte wieder, jedoch stimmen die genauen Zahlenwerte nicht überein. Man besitzt also zwei verschiedene theoretische

Erklärungen der experimentellen Tatsache $\frac{\omega}{c} \neq 1$. Eine endgültige Entscheidung, welche der beiden Erklärungen zutrifft, sei weiteren Experimenten überlassen.

Mit dem Austausch von Vektormesonen wie ρ und ω werden wir uns im 2. Teil dieser Vorlesung noch ausführlicher beschäftigen. Die obige Diskussion zeigt jedoch schon, dass man aus niederenergetischen Daten allein keine eindeutige Aussage über ihren Beitrag bekommen kann.

Literaturangaben zu Kapitel 2.3

- 1) M.M. May : Phys.Rev. 84, 265 (1951)
R.E. Taylor und R.F. Mozley : Phys.Rev. 117,835 (1960)
- 2) H. Überall : Phys.Rev. 103, 1055 (1956)
G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini und
G.P. Murtas : Phys.Rev.Lett. 8, 112 (1962);
8, 454 (1962); 9, 396 (1962).
- 3) Blochinzew : "Grundlagen der Quantenmechanik" § 44
Hamilton : " The Theory of Elementary Particles ";
Kapitel VIII.
- 4) G.T. Hoff : Phys.Rev. 122, 665 (1961)
- 5) D.J. Drickey und R.F. Mozley : Phys.Rev.Lett.8,291 (1962)
- 6) G. Diambrini und G. Bologna : Private Mitteilung
- 7) M. Gourdin und Ph. Salin : Nuovo Cim. 27, 193 (1963)
- 8) B. de Tollis und A. Verganelakis : Nuovo Cim. 22,406(1961)

2.4. Die 2. Resonanz

Bei der Streuung von Pionen an Nukleonen fand man eine weitere Resonanz bei einer Pionenenergie von $E_{\pi}^L \simeq 600$ MeV. Die Quantenzahlen dieser Resonanz ergaben sich zu ¹⁾ $I = 1/2$; $J = 3/2^-$. D.h. es handelt sich um die resonante Streuung im $d_{3/2}$ Zustand.

Diese 2. Resonanz ist jedoch wesentlich komplexer, als die in Kapitel 2.2 beschriebene 1. Resonanz. Man muss viele nicht-resonante Beimischungen zulassen, um das experimentelle Ergebnis theoretisch interpretieren zu können (z.B. der hochenergetische Ausläufer der (3.3) Resonanz). Weitere Interpretationsschwierigkeiten ergeben sich durch das Vorhandensein inelastischer Kanäle, im wesentlichen $\pi\pi N$.

2.4.1 Die Quantenzahlen der 2. Resonanz in der Photoerzeugung.

Nehmen wir an, dass es sich tatsächlich bei der $\pi - N$ -Streuung bei $E_{\pi}^L \simeq 600$ MeV um eine Resonanz handelt, und dass diese Resonanz $J = 3/2^-$; $I = 1/2$ auch bei der Photoproduktion auftritt, so kann man analog wie in Kapitel 2.2.1 die Energie der eingeschossenen Photonen ermitteln, bei der diese Resonanz auftreten soll. Man erhält

$$E_{\gamma}^L \simeq 750 \text{ MeV}$$

Wenn es sich um einen reinen $d_{3/2}$ -Endzustand handelt, so können nur die Multipolamplituden E_2^- und M_2^- beitragen. Aus der Winkelverteilung kann man dann wieder entscheiden, welche der beiden Amplituden dominiert. Aus der Tabelle in Kapitel

2.2.1 entnimmt man, dass

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 5 - 3 \cos^2\theta \quad \text{für } E_2^-$$

und

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2\theta \quad \text{für } M_2^-$$

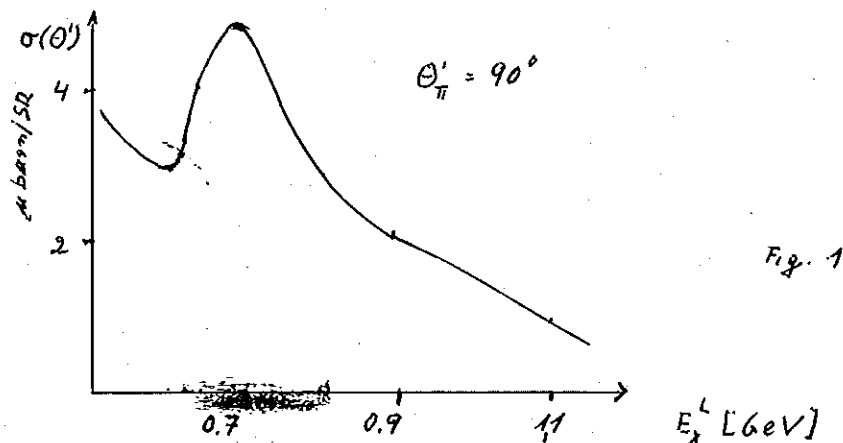
ist.

(Wobei wir uns daran erinnern, dass eine M_2 - Amplitude dieselbe Winkelverteilung wie eine E_1 + Amplitude erzeugt. Die letztere finden wir aber in unserer Tabelle).

Welche experimentellen Ergebnisse liegen bisher bei der Photoerzeugung von Pionen vor ?

π^0 -Erzeugung

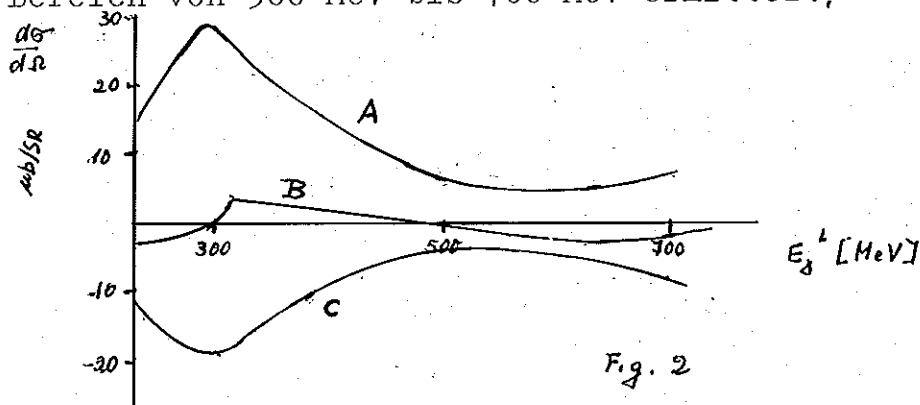
Nach neueren Messungen von Diebold ²⁾ findet man bei dem Prozess $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ bei einer γ -Energie von $E_\gamma^L \approx 750$ MeV ein Maximum im Wirkungsquerschnitt, wie aus der nachstehenden Figur zu entnehmen ist.



Aussagen über die Multipolamplitude erhält man aus der Analyse der Winkelverteilungsmessungen von Higland und DeWire ³⁾. Sie haben die Konstanten der Winkelverteilung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

im Bereich von 300 MeV bis 700 MeV ermittelt,



Extrapoliert man die Werte für die γ -Energie der Resonanz $E_\gamma^L \approx 750$ MeV, so erhält man

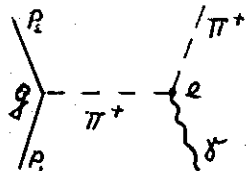
$$B \approx 0 ; \frac{A}{C} = -5/6.$$

Aus der Tatsache, dass der höchste benötigte Exponent N von $\cos \theta$ in der Analyse von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gleich 2 ist und C zur Resonanzenergie hin ansteigt, folgt, dass $j_{Res.} = 3/2$ ist. Nimmt man nun an, dass es sich um den $d_{3/2}$ -Endzustand handelt, so folgt aus obigem Ergebnis für A/C, dass man es mit einer E_2 -Absorption zu tun hat, da das Vorzeichen von A/C negativ ist. Andererseits muss man im Hinblick auf den Zahlenwert noch andere Beimischungen zur E_2 -Multipolamplitude zulassen. Würde die Parität positiv sein, so müsste man die M_{1+} -Amplitude betrachten, da die Winkelverteilung für beide Amplituden gleich ist. Eine Entscheidung über die Parität des Endzustands muss also durch andere Experimente erfolgen.

π^+ -Erzeugung

Die Messungen von Hand und Schaerf ⁴⁾ zeigen bei der Photoerzeugung der π^+ ebenfalls ein Maximum im Wirkungsquerschnitt. Ähnlich wie bei der 1. Resonanz liegt die Energie hier etwas niedriger als bei der π^0 -Erzeugung. Man fand $E_\gamma^L \approx 700$ MeV. Hinzu kommt aber hier noch, dass diese Energie winkelabhängig ist. Die Winkelabhängigkeit versucht man durch Interferenz der resonanten Amplitude mit nichtresonanten Prozessen zu verstehen.

Betrachten wir den Photoeffekt



so erhält man für das Matrixelement mit Hilfe der Feynmann-Regeln

$$eg \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \frac{(q-k+q)\epsilon}{t - \mu^2}$$

Unter Benutzung der Lorentzbedingung $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$, der Coulombgleichung für $\vec{\epsilon}$ und der Gleichung 1.12 für t ergibt sich, dass dieser Ausdruck proportional zu

$$\frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{q}}{1 - v_{\pi} \cos \theta}$$

ist.

Da bei der Energie im Bereich der 2. Resonanz die Geschwindigkeit der π -Mesonen v_{π} im c.m.s. schon sehr nahe an den Grenzwert 1 kommt, spielt der Photoeffekt hier eine wesentliche Rolle. Er gibt einmal zur Vorwärtsasymmetrie der Winkelverteilung ⁵⁾

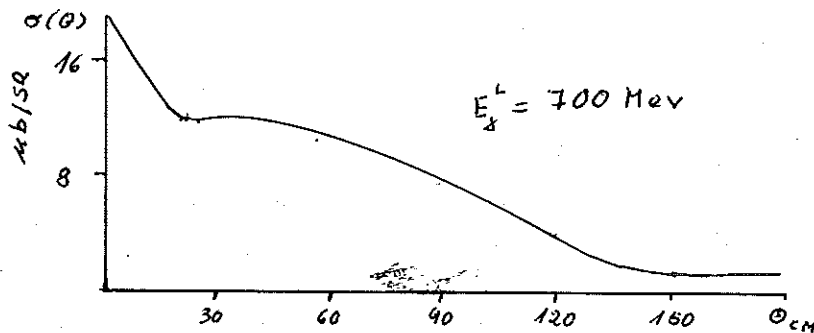


Fig. 3

Anlass und führt durch Interferenz mit der resonanten Amplitude zur effektiven Verschiebung der Resonanzenergie.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass für Vorwärts- bzw. Rückwärtswinkel, d.h. $\theta = 0, \pi$ der photoelektrische Term verschwindet, da $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ und $\vec{q} \sim \vec{k}$ für $\theta = 0, \pi$. Die Verschiebung der Resonanz bei $\theta = \pi$ (vgl. Ref. 4) muss also durch Interferenz der resonanten Amplitude mit anderen Termen zustande kommen. Man ⁶⁾ macht hierfür den magnetischen Anteil des Angsteffekts verantwortlich, der $\sim \frac{1}{1 + v_{N_2} \cos \theta}$

ist und deswegen für $\theta = \pi$ ein Maximum aufweist (v_{N_2} = Geschwindigkeit des Rückstoßnukleons im c.m.s.).

Aussagen über den Isospin erhält man wieder aus dem Verhältnis $\frac{\sigma_0^+}{\sigma_0^-}$, das zu nahezu 2 bestimmt wurde, d.h. $I = 1/2$.

Experimente zur Polarisierung der Rückstoßprotonen bei der π^0 -Erzeugung.

Messungen der Polarisierung der Rückstoßprotonen sind bisher so ungenau, dass man keine theoretischen Aussagen machen kann (siehe Tabelle) ⁷⁾

E_γ^L	$P (\theta_{\text{cms}} = \frac{\pi}{2})$
560 ± 70	$-0,4 \pm 0,14$
610 ± 84	$-0,63 \pm 0,23$
650 ± 90	$-0,6 \pm 0,25$
700 ± 95	$-0,57 \pm 0,12$
750 ± 110	$-0,38 \pm 0,09$

Auffallend ist, dass die Polarisierung an der 2. Resonanz kein Maximum aufweist, wie man es für Interferenzphänomene zwischen resonanten und nichtresonanten Amplituden erwarten würde.

Bei Einschuss linear polarisierter γ -Quanten erwartet man bei reinen Multipolen für

$$E_{2-} \quad \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\sigma_{\perp}} = 4$$

und für

$$M_{1+} \quad \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\sigma_{\perp}} = 1/4$$

Die Verhältnisse unterscheiden sich um einen Faktor 16, und somit ist ein solches Experiment eine gute Methode, um zwischen diesen Multipolen zu unterscheiden und damit Aussagen über die Parität des resonanten Multipols zu erhalten.

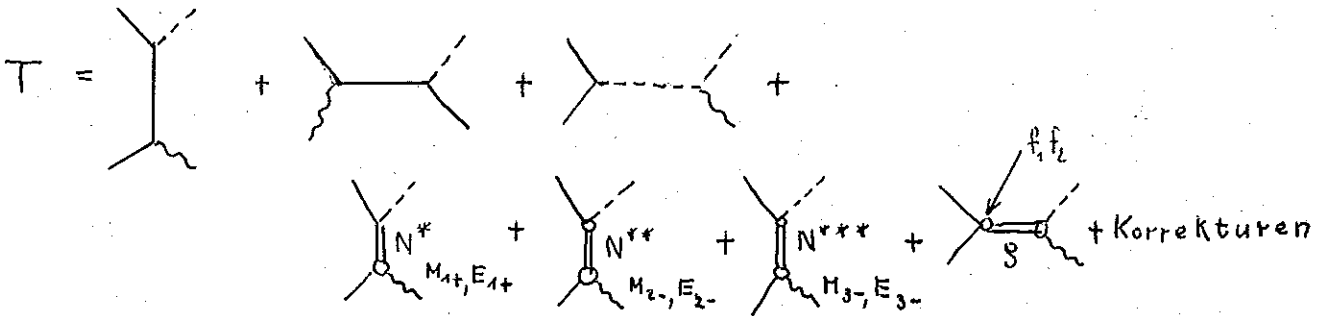
2.4.2 Das Isobarenmodell

In Kapitel 2.2.4 hatten wir gesehen, dass die Photoproduktion im Bereich der ersten Resonanz als Überlagerung eines Compoundprozesses (mit dem N^* -Isobar als Zwischenzustand) mit einem nichtresonanten Untergrund, der durch die Bornsche Näherung approximiert wurde, beschrieben werden kann. Dabei war die Kopplung am $(N^* \gamma N)$ -Vertex im Hinblick auf die statische Theorie als eine magnetische angenommen und ihr absoluter Wert von der Theorie vorhergesagt. Im Isobarenmodell wird dieses Bild zu höheren Energien hin verallgemeinert, indem auch die höheren Resonanzen des π -N-Systems in analoger Weise in die Betrachtung einbezogen werden, wobei allerdings die Kopplungskonstanten am Isobar-Nukleon-Photon Vertex als durch das Experiment zu bestimmende Parameter angesehen werden.

Liste der Resonanzen im \bar{W} -N-System

Resonanz	l_j	I	Masse ²	s_n (MeV ²)
N^*	p 3/2	3/2	1237 ²	
N^{**}	d 3/2	1/2	1517 ²	
N^{***}	f 5/2	1/2	1683 ²	

Die Erzeugungsamplitude wird demnach als die Summe der drei resonanten Amplituden (mit N^* , N^{**} und N^{***} als Zwischenzustand) und dem nichtresonanten Untergrund angesetzt. Im letzteren berücksichtigt man Schüttel-, Angst- und Photoeffekt sowie den Betrag des s -Austauschs. Ferner lässt man noch weitere nichtresonante Korrekturen (s.u.) offen:



Leider ist die Theorie bisher nicht in der Lage, alle in diesem "Isobarenmodell" auftretenden Parameter, wie z.B. die Kopplungskonstanten der Nukleon-Isobare an das γ -N-System anzugeben. Da diese Isobare sowohl elektrisch als auch magnetisch angeregt werden können, stecken also in jeder resonanten Amplitude zwei freie Parameter (Im Prinzip gibt es natürlich jeweils noch eine weitere Kopplungskonstante am oberen Vertex, diese ist aber aus der π -N-Streuung, also dem Zerfall Isobar $\rightarrow N + \pi$, bekannt). Auch der zunächst in die Betrachtung einbezogene g -Austausch enthält einen freien Parameter $\Lambda \cdot f_1$ (wenn man das Verhältnis von Pauliterm- zu Stromtermbeitrag, f_2/f_1 , aus den elektromagnetischen Formfaktoren der Nukleonen festlegt).

Auf die zu den angegebenen Graphen noch hinzuzufügenden Korrekturen gehen wir im folgenden noch näher ein.

Vergleich des Isobarenmodells mit dem Experiment

Salin ⁸⁾ passte die im Modell enthaltenen Parameter Schritt für Schritt an die experimentellen Daten, d.h. die differentiellen Produktionsquerschnitte bei verschiedenen Energien an, indem er den gesamten Energiebereich in zwei Intervalle einteilte.

A) π^+ -Erzeugung für $E_\gamma \leq 470$ MeV

Von den π -N-Resonanzen wird nur N^* berücksichtigt. Damit erhält man insgesamt vier freie Parameter: zwei entstammen dem N^* -Beitrag, einer dem g -Beitrag und ein vierter einem nicht-resonanten s-Wellen-Beitrag in der Form $A \cdot M_1$ (für M_1 siehe Kap. 1.2.), wobei $A = \text{konstant}$.

Ergebnis:

- 1) Die experimentellen Daten können nicht ohne den Korrekturterm mit A beschrieben werden, der einer nichtresonanten s-Welle entspricht.
- 2) Der ρ -Beitrag ist vernachlässigbar klein.
- 3) Der angepasste M_{1+} -Wert ist etwa gleich dem theoretischen Wert nach der statischen Näherung von CGLN (siehe Kap. 2.2.3). Der gefittete E_{1+} -Wert beträgt etwa -4,5 % des M_{1+} -Anteils, in Übereinstimmung mit den Messungen Drickeys und Mozleys mit polarisierten γ 's in der Nähe der ersten Resonanz (siehe Kap. 2.3.4). Die verschiedene Lage der Maxima von π^+ - und π^0 -Erzeugung kann als eine Folge der Interferenz des resonanten M_{1+} -Beitrags mit dem Photoeffekt verstanden werden.

B) π^0 -Erzeugung für $E_\gamma \leq 470$ MeV

Salin fittete die π^0 -Daten unabhängig vom π^+ -Fit und fand Übereinstimmung der optimalen Parameter für die beiden Fälle π^+ und π^0 .

C) π^+ -Erzeugung für 600 MeV $\leq E_\gamma \leq 1$ GeV

Salin geht aus von den unter A) bestimmten Parametern für die erste Resonanz. Dann bleiben zunächst sechs freie Parameter zu bestimmen: die vier zu N^{**} und N^{***} , die Grösse $\Lambda \cdot f_1$ des ρ -Austauschs und der nichtresonante s-Wellen-Beitrag A. Ferner lässt Salin aber noch die Breite der zweiten und dritten Resonanz als freie Parameter zu (obwohl diese eigentlich aus $\sigma_{\text{tot}}(\pi-N)$ gegeben sind !!!) und fittet schliesslich mit acht Parametern.

Sein Ergebnis

- 1) $\Lambda \cdot f_1 \sim 0$ (konsistent mit A).
- 2) Kein s-Wellen-Beitrag (nicht konsistent mit A)!).

- 3) Der Beitrag der zweiten Resonanz erfolgt hauptsächlich via $E_{2-} : M_{2-} / E_{2-} \sim 2,5 \%$. Für die dritte Resonanz ergibt sich $E_{3-} : M_{3-} = -3$, ein Wert, der in offensichtlichem Widerspruch zu der Tatsache steht, dass der differentielle π^0 -Produktionsquerschnitt nach Experimenten von Talman im Bereich der dritten Resonanz in Vorwärtsrichtung verschwindet (siehe Kap. 2.5.2).
- 4) Die "beste" Breite der zweiten und dritten Resonanz beträgt $\Gamma_{N^{**}/2} = \Gamma_{N^{***}/2} = 120$ MeV, also eindeutig mehr als in der π -N-Streuung (60 bzw. 80 MeV). Das Maximum des totalen Wirkungsquerschnitts wird in Übereinstimmung mit dem Experiment bei $E_\gamma = 700$ MeV reproduziert.
- 5) Oberhalb von $E_\gamma = 900$ MeV muss ein starker p-Wellen-Beitrag angenommen werden, den Salin einer $3/2$ - $3/2$ -Resonanz bei $E = 1300$ MeV zuschreibt.

D) π^0 -Erzeugung für $E_\gamma \geq 600$ MeV

Unter Verwendung der Parameter für die niederenergetische π^0 -Erzeugung (einschliesslich s-Wellen-Beitrag) und bei Berücksichtigung der zweiten und dritten Resonanz aus der Analyse der π^+ -Produktion kann Salin die π^0 -Daten bis zu einer Energie von etwa 800 MeV nur unter Einführung eines schwach energieabhängigen, nichtresonanten p-Wellen-Beitrags richtig wiedergeben (mit Amplituden M_{1-} , $M_{1+} = E_{1+}$, $M_{1-} / M_{1+} \sim -12$).

Auch wenn man mit dem Isobarenmodell mit wenigen freien Parametern die Messergebnisse der π -Produktion einigermaßen reproduzieren kann, so ist der Stand der Dinge doch eigentlich sehr wenig zufriedenstellend, da eine Theorie ja doch letzten Endes eine Aussage über diese bislang noch rein phänomenologischen Parameter machen müsste.

Wenig befriedigend ist auch die ad-hoc-Einführung nichtresonan-
ter s- und p-Wellen zur Beschreibung des nichtresonanten Unter-
grunds. Dass die Untergrundamplitude via Interferenz mit reso-
nanten Amplituden einen grossen Einfluss auf den Produktions -
querschnitt hat, wurde bereits aus der verschiedenen Lage des
ersten Maximums von π^0 - und $\bar{\pi}^+$ - Produktionsquerschnitt ersicht-
lich. Auch bei der $\bar{\pi}$ -N-Streuung selbst spielt der Untergrund
bei den Resonanzphänomenen eine wichtige Rolle, wie eine genaue
Analyse im folgenden zeigen wird.

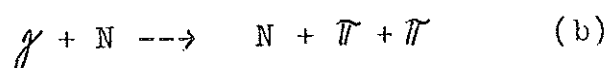
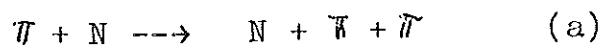
2.4.3 Phänomenologische Diskussion der zweiten Resonanz in der $\bar{\pi}$ -N - Streuung

In Abschnitt 2.2.2 hatten wir eine Resonanz im elastischen
Bereich dadurch charakterisiert, dass die in der S-Matrix
auftretende Phase $\delta_{\bar{\pi}N}(s)$

$$S_{\bar{\pi}N} = e^{i\delta_{\bar{\pi}N}(s)} ; |S_{\bar{\pi}N}| = 1$$

an der Resonanzstelle s_0 den Wert $\pi/2$ annimmt, wobei die Streu-
amplitude f einen Pol im zweiten Blatt der komplexen s-Ebene an
der Stelle $\tilde{s} = s_0 - i\gamma/2$ mit dem Residuum $\gamma/2$ aufweist. Den
Zusammenhang zwischen den Resonanzerscheinungen bei der
 $\bar{\pi}$ -N - Streuung und denjenigen in der Photoproduktion hatten
wir mit Hilfe des Watson-Theorems und den analytischen Eigen-
schaften von Streuamplitude und Photoerzeugungsamplitude
gefunden.

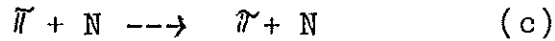
Da die zweite Resonanz oberhalb der Schwellenenergie für die
inelastischen Prozesse



liegt, stellen sich bei der Behandlung dieser Resonanz zunächst

die folgenden Fragen :

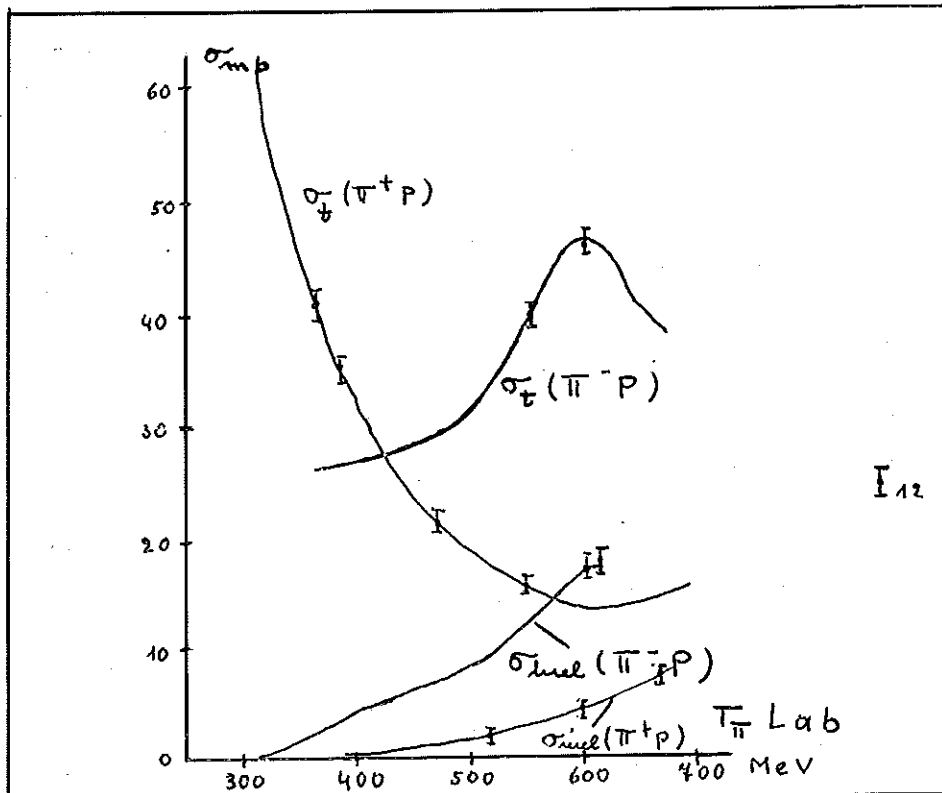
1) Bei Vorhandensein des inelastischen Prozesses (a) ist das S-Matrixelement für den elastischen Prozess



vom Betrage kleiner eins, d.h. die Phase $\delta_{\pi N}$ hat einen positiven Imaginärteil.

Frage: Wie ist die Resonanzbedingung im Prozess (c) bei komplexem δ präzise zu formulieren?

2) Aus folgendem Diagramm (nach neuesten Messungen in Saclay 9)) ersieht man, dass sowohl der elastische als auch der inelastische Wirkungsquerschnitt für π^- -N-Streuung bei $E_{\pi \text{ Lab}} = 600$ MeV ein Maximum im $I = 1/2$ -Zustand aufweisen.



Frage : Wie ist der Zusammenhang zwischen den Maxima in Prozess (c) und (a) zu beschreiben?

Zur Beantwortung dieser Fragen bedienen wir uns im folgenden der K-Matrix, die wir nun einführen wollen.

2.4.3.1 Die K - Matrix ¹⁰⁾

In der Drehimpulsdarstellung ist ein Zustand des Dreikörper-systems (N + π + $\bar{\pi}$) nicht eindeutig durch die Angabe von ℓ und j charakterisiert. Dies erhellt sich aus der Tatsache, dass man bei gegebenem j das Nukleon N mit einem der $\bar{\pi}$ -Mesonen zu einem beliebigen halbzahligen Gesamtdrehimpuls j_1 koppeln kann :

$$\left[\underbrace{(\underbrace{\pi + N}_{\ell_1, j_1})}_{\ell'} + \bar{\pi} \right]$$

Denn zu beliebigem j_1 gibt es stets einen relativen Bahndrehimpuls ℓ' des verbliebenen $\bar{\pi}$ -Mesons relativ zum Schwerpunkt des (N + π)-Systems, so dass durch Vektoraddition

$$\vec{j}_1 + \vec{\ell}' = \vec{j}$$

gebildet werden kann.

Da es uns hier nur auf den grundsätzlichen Zusammenhang zwischen dem elastischen und dem inelastischen Kanal ankommt, vereinfachen wir zunächst die Betrachtung, indem wir annehmen, dass das (N+ $\bar{\pi}$)-System im N + π + $\bar{\pi}$ - Kanal nur im 33 - Isobarzustand auftritt. Diese Annahme ist auf Grund der Experimente weitgehend gerechtfertigt. Da auch diese Vereinfachung noch verschiedene ℓ' -Werte zulässt, gehen wir in der Vereinfachung noch einen Schritt weiter und behandeln die N*-Resonanz als Teilchen mit Spin Null. Dann ist

$$j = \ell' = \ell,$$

d.h. das Drei-Körperproblem ist auf ein effektives Zweikörperproblem mit skalaren Teilchen zurückgeführt. Die im folgenden zu treffenden Aussagen sind unabhängig vom Spin der Teilchen, so dass die Vernachlässigung der Spins von N und N* keine Einschränkung bedeutet. Wir haben es also nur mit einem gekoppelten System von zwei Zweiteilchen-Kanälen zu tun, die wir wie folgt numerieren:

		Schwelle
Kanal 2 :	$\tilde{\gamma} N$	$s_2 = (M+\mu)^2 \sim 7,7^2 \mu^2$
Kanal 3 :	$\tilde{\gamma} N^*$	$s_3 = (M^*+\mu)^2 \sim 9,8^2 \mu^2$

Im folgenden verstehen wir die S-Matrixelemente immer stillschweigend in der Drehimpulsdarstellung gebildet, und zwar zu gegebenem ℓ . Die Indizierung der Matrixelemente bezieht sich auf den Anfangs- bzw. Endkanal, also explizite

<u>ℓ fest</u>	<u>S-Matrixelement</u>	<u>Reaktion</u>
	S_{22}	$\tilde{\gamma} N \rightarrow \tilde{\gamma} N$
	S_{23}	$\tilde{\gamma} N \rightarrow \tilde{\gamma} N^*$
	S_{32}	$\tilde{\gamma} N^* \rightarrow \tilde{\gamma} N$
	S_{33}	$\tilde{\gamma} N^* \rightarrow \tilde{\gamma} N^*$

Wegen Zeitumkehrinvarianz (Kap. 1.5) sind die S_{ik} symmetrisch:

$$S_{23} = S_{32},$$

so dass wir sie zu einer symmetrischen 2 x 2 Matrix zusammenfassen können :

$$S = \begin{pmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}$$

Unterhalb der Schwelle für die 3- Pion-Erzeugung

$$s_T = (M^* + 2\mu)^2 \sim 10,7^2 \mu^2$$

muss diese S-Matrix unitär sein (Erhaltung der Wahrscheinlichkeit !) :

$$SS^+ = 1,$$

oder explizite

$$|S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

$$|S_{33}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

$$S_{23} S_{33}^* + S_{22} S_{23}^* = 0$$

für $s_3 \leq s \leq s_T$.

Diese Unitaritätsrelationen sind eine natürliche Verallgemeinerung der Unitarität im elastischen Bereich (vgl. Gl. 1.57).

Da wir uns auch im Zwei-Kanal-Fall der Partialwellenamplitude f und der K -Matrix (im Ein-Kanal-Fall war $K = f^{irr}$) bedienen wollen, müssen wir deren ursprüngliche Definition (siehe Kap. 2.2.2) für den Zwei-Kanal-Fall auf (2×2) -Matrizen erweitern. Die folgende Tabelle enthält eine Gegenüberstellung der Definitionsgleichungen für f und K sowie die Unitaritätsbeziehung für f im Ein- und Zwei-Kanal-Fall.

	Ein-Kanal-Fall	Zwei-Kanal-Fall
f-Matrix	$f = \frac{1}{2iq} (S-1) = \frac{e^{i\delta} \sin \delta}{q}$	$f = \frac{1}{2i} (q^{-\frac{1}{2}} S q^{\frac{1}{2}} - q^{-1})$
Unitarität	$\text{Im} f = q f ^2$	$\frac{1}{2i} (f - f^\dagger) = f q f^\dagger$
K-Matrix	$f = \frac{K}{1 - iKq} ; K = f^{irr}$	$f = (1 - iKq)^{-1} K$

Während die Grösse q im Ein-Kanal-Fall den CMS-Impuls darstellt, der im Eingangs- und Ausgangskanal gleich ist, ist q im Zwei-Kanal-Fall eine positive Diagonalmatrix

$$q = \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_3 \end{pmatrix}, \text{ wo}$$

q_2 = CMS-Impuls im Kanal 2

q_3 = CMS-Impuls im Kanal 3.

Dabei ist $q^{-\frac{1}{2}}$ definiert als

$$q^{-\frac{1}{2}} = q^{-1} \cdot q^{\frac{1}{2}} = q^{-1} \begin{pmatrix} q_2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & q_3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Die in der Tabelle angegebene Unitaritätsbeziehung ist noch zu beweisen. Wir müssen also zeigen, dass

$$SS^+ = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2i} (f - f^+) = f \eta f^+$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (f - f^+) &= -\frac{1}{4} \left\{ (\eta^{-\frac{1}{2}} S \eta^{-\frac{1}{2}} - \eta^{-1}) + (\eta^{-\frac{1}{2}} S^+ \eta^{-\frac{1}{2}} - \eta^{-1}) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ -2\eta^{-1} + \eta^{-\frac{1}{2}} (S + S^+) \eta^{-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} f \eta f^+ &= +\frac{1}{4} \left\{ (\eta^{-\frac{1}{2}} S \eta^{-\frac{1}{2}} - \eta^{-1}) \eta (\eta^{-\frac{1}{2}} S^+ \eta^{-\frac{1}{2}} - \eta^{-1}) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \eta^{-\frac{1}{2}} S S^+ \eta^{-\frac{1}{2}} + \eta^{-1} - \eta^{-\frac{1}{2}} (S + S^+) \eta^{-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

a) Sei $SS^+ = 1$. Dann ist, wie man leicht sieht

$$f \eta f^+ = \frac{1}{2i} (f - f^+), \quad \text{q.e.d.}$$

b) Sei $f \eta f^+ = \frac{1}{2i} (f - f^+)$. Dann ist

$$\eta^{-1} = \eta^{-\frac{1}{2}} S S^+ \eta^{-\frac{1}{2}}$$

Hieraus durch Links- und Rechtsmultiplikation mit $\eta^{\frac{1}{2}}$:

$$SS^+ = 1, \quad \text{q.e.d.}$$

Die Unitarität der S-Matrix ist der Hermitizität der K-Matrix äquivalent:

$$K = K^+ \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2i} (f - f^+) = f \eta f^+$$

Beweis:

a) Sei $K = K^+$. Dann ist

$$\frac{1}{2i} (f - f^+) = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1 - iK\eta} K - K \frac{1}{1 + i\eta K} \right] =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1-iKq} K(1+iqK) \frac{1}{1+iqK} - \frac{1}{1-iKq} (1-iKq) K \frac{1}{1+iqK} \right]$$

$$= \frac{1}{1-iKq} KqK \frac{1}{1+iqK} = f_q f^+, \text{ q. e. d.}$$

b) Sei

$$\frac{1}{2i} (f-f^+) = f_q f^+.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2i} (f-f^+) = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1-iKq} K - K^+ \frac{1}{1+iqK^+} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1-iKq} K(1+iqK^+) \frac{1}{1+iqK^+} - \frac{1}{1-iKq} (1-iKq) K^+ \frac{1}{1+iqK^+} \right]$$

Andererseits

$$f_q f^+ = \frac{1}{1-iKq} KqK^+ \frac{1}{1+iqK^+}$$

d.h.

$$\frac{1}{2i} [K(1+iqK^+) - (1-iKq)K^+] = KqK^+$$

oder

$$\frac{1}{2i} [K - K^+ + 2iKqK^+] = KqK^+$$

also

$$K - K^+ = 0, \text{ q. e. d.}$$

Aus der Symmetrie der S-Matrix ($S_{23}=S_{32}$) folgt wegen der Diagonalität der q-Matrix, dass auch f symmetrisch ist. Damit gilt $K=K^T$:

$$f = (1-iKq)^{-1} K = f^T = K^T (1-iqK^T)^{-1}$$

oder

$$K(1-iqK^T) = (1-iKq)K^T$$

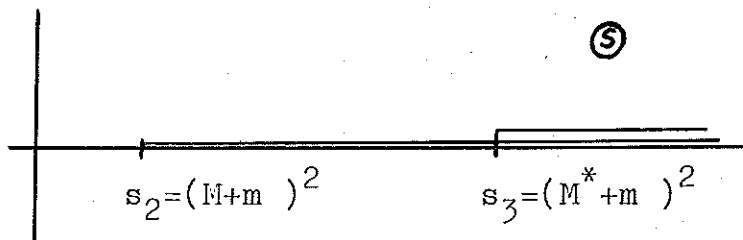
$$K = K^T$$

Somit ist K eine reelle symmetrische Matrix.

Analytische Eigenschaften der Streumatrix (Postulat)

Im Kapitel 2.2.2 wurden für die Partialstreuamplitude im 1-Kanal-Fall auf Grund der Erfahrungen der Potentialtheorie und der Störungsrechnung analytische Eigenschaften postuliert, die hier für den 2-Kanal-Fall für die Streumatrix f (bei festem ℓ) entsprechend erweitert werden.

- 1) $f(s)$ sei für Realteil $s \geq s_2$ regulär bis auf Verzweigungspunkte an den physikalischen Schwellen s_i ($i=2,3$)



- 2) $f^*(s) = f(s^*)$ Realitätseigenschaft.

Diese postulierten Eigenschaften der Streumatrix sind auf die durch

$$K = f(1+iq)^{-1} \quad (2.4.11)$$

definierte K-Matrix zu übertragen.

K besitzt mit f dieselbe

Realitätseigenschaft

$$K^*(s) = K(s^*).$$

Es bleibt zu untersuchen, ob die K-Matrix mit f auch die Verzweigungspunkte s_i ($i=2,3$) besitzt.

Im 1-Kanal-Fall (dort gilt $K_{22} = f^{irr}$) ergab sich als Folge der Realität von f^{irr} und der elastischen Unitarität, dass f^{irr} keinen elastischen Verzweigungspunkt besitzt. Für den 2-Kanal-Fall kann gezeigt werden:

Beh.: $K(s)$ ist regulär für $s \rightarrow s_3$.

Bew.: Die Realität der K-Matrix ergibt für die Diskontinuität über die Verzweigungsschnitte

$$K(s+i\epsilon) - K(s-i\epsilon) = K(s+i\epsilon) - K^*(s+i\epsilon) = 2i \operatorname{Im} K(s+i\epsilon).$$

Unitarität und Symmetrie der S-Matrix hatten zur Folge, dass für $s \gg s_3$ K eine reelle, symmetrische Matrix ist.

$$K(s+i\epsilon) = K^*(s+i\epsilon) \quad \text{für } s \gg s_3.$$

Die Diskontinuität über dem unelastischen Schnitt verschwindet, K hat keinen Verzweigungspunkt an der Schwelle s_3 .

Für das Verhalten der K-Matrix an der elastischen Schwelle s_2 soll folgende Behauptung bewiesen werden:

Beh.: K ist regulär für $s \rightarrow s_2$,

falls im elastischen Bereich

$$s_2 \leq s \leq s_3 \quad \text{das}$$

Unitaritätspostulat

$$\frac{1}{2i} (f - f^+) = f \tilde{q} f^+ \quad (2.4.12)$$

$$\text{mit } \tilde{q} = \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } s_2 \leq s \leq s_3$$

aufgestellt wird.

Die durch (2.4.12) postulierte Unitarität liefert für die in $s_2 \leq s \leq s_3$ physikalische Streuamplitude f_{22}

$$\operatorname{Im} f_{22} = q_2 |f_{22}|^2$$

also die übliche Form der elastischen Unitarität. Das Verhalten der Amplituden f_{23} , f_{33} wird durch (2.4.12) postuliert zu

$$\operatorname{Im} f_{23} = q_2 f_{22} f_{23}^*$$

$$\operatorname{Im} f_{33} = q_2 |f_{23}|^2.$$

Bew.: Die Diagonalmatrix $q = \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_3 \end{pmatrix}$ ist im elastischen Bereich nicht mehr hermitesch, da der CMS-Impuls q_3 im Endzustand von Kanal 3

$$q_3^2 = \frac{(s - [M^* + m]^2)(s - [M^* - m]^2)}{4s}$$

für $s_2 \leq s \leq s_3$ rein imaginär wird. Man hat also im elastischen Bereich zu setzen

$$q^+ = q^* = \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & -q_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.13)$$

Bilden wir nun nach (2.4.11)

$$\begin{aligned} K-K^+ &= f(1+iqf)^{-1} - (1-if^+q^*)^{-1}f^+ \\ &= \frac{1}{(1-if^+q^*)} (1-if^+q^*)f \frac{1}{(1+iqf)} - \\ &\quad - \frac{1}{1-if^+q^*} f^+ (1+iqf) \frac{1}{1+iqf} \\ &= \frac{1}{1-if^+q^*} (f-f^+ -if^+(q^++q)f) \frac{1}{1+iqf} \end{aligned}$$

so wird mit (2.4.13)

$$K-K^+ = \frac{1}{(1-if^+q^*)} (f-f^+-2if^+qf) \frac{1}{(1+iqf)}$$

Die K-Matrix ist also genau dann hermetisch, wenn die Unitarität in der Form (2.4.12) postuliert wird. Berücksichtigt man noch die Symmetrie der S-Matrix, so kann in ganz analoger Weise wie beim inelastischen Schnitt gefolgert werden, dass die K-Matrix für $s \rightarrow s_2$ regulär ist.

Zusammenfassend ergeben sich also folgende

Analytizitätseigenschaften der K-Matrix

$K = f(1+iqf)^{-1}$ ist für Realteil $s \geq s_2$ regulär bis auf Pole an den Nullstellen von

$$\text{Det} (1+iqf) = 0 \quad *)$$

Die Verzweigungspunkte der Streumatrix $f = (1-iKq)^{-1}K$ werden also allein durch die Elemente q_i ($i = 2,3$) der q -Matrix bestimmt. Sie sind vom Charakter

$$\sqrt{s-(M+m)^2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{s-(M^*+m)^2}.$$

Man erhält somit für $f(s)$ eine 4-blättrige Riemann-Fläche, in deren einzelne Blätter die Streuamplitude fortgesetzt werden kann.

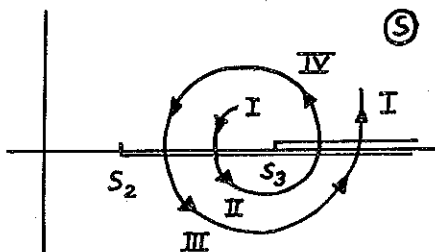
Die explizite Gestalt der f -Matrix ist

$$f = (1-iKq)^{-1}K = \quad (2.4.14)$$

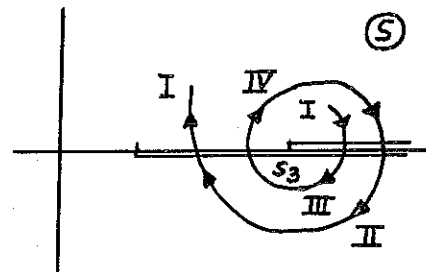
$$= \frac{\begin{pmatrix} K_{22}(1-iq_3K_{33})+iq_3K_{23}^2 & K_{23} \\ K_{23} & K_{33}(1-iq_2K_{22})+iq_2K_{23}^2 \end{pmatrix}}{\text{Det} (1-iKq)}$$

mit $\text{Det} (1-iKq) = (1-iq_2K_{22})(1-iq_3K_{33})+q_2q_3K_{23}^2$.

Eine Vorstellung über die Lage der verschiedenen Blätter der Riemannfläche von $f(s)$ zueinander ergeben folgende Skizzen. Sie zeigen die Fortsetzungen aus dem physikalischen Blatt I über den elastischen bzw. den inelastischen Schnitt.



Forts.über elast.Schnitt



Forts.über inelast.Schnitt

*) Für das Inverse einer Matrix A gilt

$$(A^{-1})_{ik} = \frac{\alpha_{ki}}{\text{Det}(A)} \quad ; \quad \alpha_{ki} = \text{Matrixelemente der Adjunkten von } A.$$

Den Elementen der q -Matrix sind auf der reellen Achse der s -Ebene in den verschiedenen Blättern folgende Vorzeichen zuzuordnen:

Blatt	$\text{sgn } q_2$	$\text{sgn } q_3$	
I	+	+	physik. Blatt
II	-	+	
III	-	-	
IV	+	-	

Aus den Skizzen entnimmt man

für $s_2 < s < s_3$ ist das physikl. Blatt I längs des Schnittes mit dem II. Blatt der Riemann-Fläche verbunden,

für $s > s_3$ ist das physikl. Blatt I längs des Schnittes mit dem III. Blatt der Riemann-Fläche verbunden.

Für die Diskussion der Resonanzen interessieren somit die möglichen Pole im II. und III. Blatt der Riemann-Fläche. Pole im II. Blatt ergeben die im Kapitel 2.2.2 diskutierten Resonanzen bei der elastischen πN -Streuung. Sind ausser dem elastischen Kanal auch inelastische Kanäle der πN -Streuung offen, so sind Pole im III. Blatt Resonanzen der elastischen bzw. inelastischen πN -Streuung (vgl. Kap. 2.4.3.3) zuzuordnen.

Um mit Gl. (2.4.14) einen Anschluss an die Ergebnisse von Kap. 2.2.2 zu erhalten, soll speziell definiert werden

Kanal 2: πN -System

Kanal 3: γN -System.

Bei dieser Definition entsprechen die S -Matrixelemente S_{23} , S_{33} der Photoerzeugung eines Pions bzw. dem Compton-Effekt. Im Fall der niedrigsten störungstheoretischen Näherung in der elektromagnetischen Kopplung wird also:

$$K_{23} \sim e \quad \rightarrow \quad K_{23}^2 \sim 0$$

$$K_{33} \sim e^2 \sim 0$$

Damit nimmt die Streumatrix die Form an

$$f \approx \begin{pmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{23} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{1 - iq_2 K_{22}} ;$$

$K_{22} = f_{22}^{\text{irr}}$, und wir identifizieren: $K_{23} = T^{\text{irr}}$.

Man erhält also die bekannten Ergebnisse der Photoerzeugung.

2.4.3.2 Die Eigenphasen der S-Matrix und die Definition einer Resonanz

Da die 2×2 S-Matrix symmetrisch und unitär ist, kann man sie mit Hilfe einer reellen orthogonalen Transformation O auf Hauptachse transformieren ¹¹⁾:

$$O^T S O = S_D = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

Dies entspricht genau der Lösung des Eigenwertproblems

$$S |\bar{i}\rangle = \lambda_i |\bar{i}\rangle \quad (2.4.16)$$

Denn entwickelt man die "Kanal"-Basis $\{|i\rangle\} = \{|2\rangle, |3\rangle\}$ nach dem vollständigen System der Eigenvektoren $|\bar{i}\rangle$, so ist

$$S_{ij} = \langle i | S | j \rangle = \langle i | \bar{i} \rangle \langle \bar{i} | S | \bar{j} \rangle \langle \bar{j} | j \rangle$$

mit

$$\langle \bar{i} | S | \bar{j} \rangle = \delta_{ij} \lambda_i$$

Ein Vergleich mit (2.4.15) lehrt, dass

$$O_{ii} = \langle i | \bar{i} \rangle,$$

also

$$|\bar{i}\rangle = |i\rangle \langle i | \bar{i} \rangle = O_{ii} |i\rangle$$

oder

$$|\bar{i}\rangle = O^T |i\rangle$$

Wegen $SS^+ = 1$ folgt nun

$$S_D S_D^+ = S_D S_D^* = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 \\ 0 & |\lambda_3|^2 \end{pmatrix} = OSO^T OS^+ O^T = OSS^+ O^T = OO^T = 1$$

d.h. $|\lambda_i|^2 = 1$, oder

$$\lambda_i = e^{2i\varphi_i}, \quad \varphi_i \text{ reell, } i = 2, 3. \quad (2.4.17)$$

Die so eingeführten φ_i sind die Eigenphasen der S-Matrix. Indem wir die Matrix O durch Einführung des Mischungsparameters Ψ in der Form^{*)}

$$O = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi \\ -\sin\Psi & \cos\Psi \end{pmatrix} \quad 0 \leq \Psi \leq \pi/2 \quad (2.4.18)$$

darstellen, erhalten wir schliesslich drei reelle Parameter: die beiden Eigenphasen φ_2, φ_3 und die Grösse Ψ , die wegen

$$S = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi \\ -\sin\Psi & \cos\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \sin\Psi & \cos\Psi \end{pmatrix} \quad (2.4.19)$$

die Kopplung der beiden Kanäle 2 und 3 beschreibt ($\Psi = 0$ heisst: entkoppelte Kanäle). Wir bemerken, dass wir auch im K-Matrix-Formalismus drei reelle Parameter hatten:

$$K_{22}, K_{33}, K_{23}.$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozess

$$j' \rightarrow j \quad j', j = 2, 3$$

^{*)} Man kann den Wertebereich von Ψ auf $0 \leq \Psi \leq \pi/2$ beschränken, denn es gilt $S(\Psi) = O(\Psi) S_D(\lambda_2, \lambda_3) O^T(\Psi) = S(\Psi + \pi)$, und die Ersetzung $\Psi \rightarrow \Psi + \pi/2$ entspricht der Vertauschung $\lambda_2 \rightarrow \lambda_3, \lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ der beiden physikalisch gleichwertigen Eigenwerte.

lautet

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{jj'}}{d\Omega} &= \frac{q_j^i}{q_{j'}^i} |f_{jj'}^i|^2 = \frac{1}{4q_{j'}^2} |\delta_{jj'} - S_{jj'}|^2 \\ &= \frac{1}{4q_{j'}^2} \left| \delta_{jj'} - \sum_{l=2}^3 e^{2i\varphi_l} o_{jl} o_{j'l} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Als Resonanz definiert man nun das Phänomen, dass eine der zwei oder auch alle beiden Eigenphasen durch $\pi/2$ gehen. Die Stelle s_R , an der dies der Fall ist, nennen wir eine Resonanzstelle.

Um die physikalischen Konsequenzen einer Resonanz einzusehen, nehmen wir an, dass der Kopplungsparameter $\varphi(s)$ für reelle s in der Nähe der Resonanzstelle s_R konstant sei. Dann folgt aus (2.4.20), dass der elastische Querschnitt

$$\frac{d\sigma_{jj}}{d\Omega} = \frac{1}{4q_j^2} \left| 1 - \sum_{l=2}^3 e^{2i\varphi_l} o_{jl} \right|^2 \quad (2.4.21)$$

bei s_R ein Maximum hat. Für den inelastischen Prozess erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{32}}{d\Omega} &= \frac{1}{4q_2^2} \left| \sum_{l=2}^3 e^{2i\varphi_l(s)} o_{2l} o_{3l} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4q_2^2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left| e^{2i\varphi_2(s)} + e^{2i\varphi_3(s)} \right|^2 = \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{4q_2^2} \sin^2(\varphi_3(s) - \varphi_2(s)) \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Aus Gl. (2.4.22) ersehen wir, dass der inelastische Querschnitt im Falle $\varphi_3(s) = \varphi_2(s) \bmod \pi$ verschwindet. Da an der Resonanzstelle $s = s_R$ experimentell $d\sigma_{32} \neq 0$ gilt, müssen wir insbesondere den Fall $\varphi_3(s_R) = \varphi_2(s_R) = \pi/2$ ausschliessen, es kann also nur eine der beiden Eigenphasen durch $\pi/2$ gehen. Wir wollen im folgenden annehmen, dass o.B.d.A. $\varphi_2(s_R) = \pi/2$ gilt und $\varphi_3(s)$ in einer gewissen Umgebung $U(s_R)$ als konstant anzusehen ist. In diesem Fall könnte es

ein $s_0 \in U(s_R)$ geben, so dass $\varphi_3(s_0) - \varphi_2(s_0) = \pi/2 \bmod \pi$ ist und daher σ_{23} für $s \rightarrow s_0$ nach Gl. (2.4.22) ein resonanzartiges Maximum aufweist.

Die Resonanz für den inelastischen Prozess kann also (falls überhaupt eine auftritt!) gegenüber dem elastischen Prozess verschoben sein.

Aus dem Experiment wissen wir, dass $s_0 = s_R$ ist (vgl. Kap. 2.4.3), also muss

$$\varphi_2(s_R) = \pi/2 ; \quad \varphi_3(s_R) = 0 \bmod \pi \quad (2.4.23)$$

gelten. Diesen Fall werden wir im folgenden ausschliesslich diskutieren.

Man kann den inelastischen Kanal zum Prozess $2 \rightarrow 2$ auch in Form einer komplexen Phasenverschiebung (s. Kap. 2.4.3)

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_2 &= \operatorname{Re} \tilde{\delta}_2 + i \operatorname{Im} \tilde{\delta}_2 \\ \delta_2 &= \operatorname{Re} \tilde{\delta}_2 \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

in der S-Matrix berücksichtigen :

$$S_{22} = e^{2i\tilde{\delta}_2} = \eta_2 e^{2i\delta_2} \quad (2.4.25)$$

mit dem "Inelastizitätsparameter" η_2 , wo

$$0 \leq \eta_2 = e^{-2\operatorname{Im} \tilde{\delta}_2} \leq 1 \quad (2.4.26)$$

gilt. Diese Bezeichnungsweise rechtfertigt sich aus der Tatsache, dass wegen

$$|S_{22}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

der unelastische Querschnitt

$$d\sigma_{23} \sim 1 - \eta_2^2 \quad (2.4.27)$$

ist.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie sich die Resonanzbeziehungen (2.4.23) auf die komplexe Phasenverschiebung δ_2 auswirken.

Mit (2.4.25) erhalten wir an der Resonanzstelle s_R

$$S_{22} = \eta_2 e^{2i\delta_2} = \sum_l e^{2i\varphi_l} O_{2l}^2 = \cos^2 \varphi e^{2i\varphi_2} + \sin^2 \varphi e^{2i\varphi_3} \\ = -\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = -\cos 2\varphi \quad (2.4.23)$$

Damit ist S_{22} reell, also $2\delta_2 = m\pi$ oder $\delta_2 = 0, \pi/2 \text{ mod } \pi$. Da η_2 positiv ist, muss δ_2 so gewählt werden, dass gemäss (2.4.23)

$$\eta_2 = |\cos 2\varphi|$$

Wir unterscheiden die drei Fälle:

1.) $0 \leq \varphi < \pi/4$. Damit ist $\cos 2\varphi > 0$, also $\delta_2 = \pi/2$. Dies entspricht einer schwachen Kopplung wegen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.) $\varphi = \pi/4$. Dann ist $\eta_2 = 0$ oder $\text{Im} \tilde{\delta}_2 = \infty$ (d.h. $S_{22} = 0$); dies ist der Fall der reinen Schattenstreuung.

3.) $\pi/4 < \varphi \leq \pi/2$: Wegen $\cos 2\varphi < 0$ ist $\delta_2 = 0$.

Die Experimente deuten darauf hin, dass der Fall 1.) vorliegt. Dies ergibt sich nach Hühler¹²⁾ aus der Betrachtung der Non-spinflip - Vorwärtsstreuamplitude $F_b^{(1/2)}$ (s) des π -N-Systems im $I = 1/2$ - Zustand im Schwerpunktsystem.

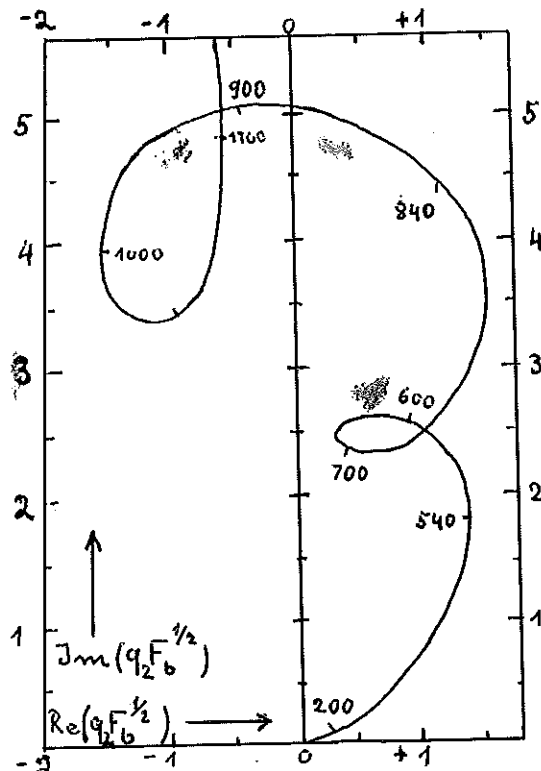
Diese hat die Form

$$F_b^{(1/2)}(s) = \frac{1}{4iq_2} \sum_{j,l} (2j+1) (e^{2i\delta_2^{(j,l)}} - 1) \quad (2.4.29)$$

Nimmt man nur die resonante Partialamplitude mit, so wird hieraus

$$q_2 F_b^{(1/2)}(s) \sim \frac{1}{2} (j_R + \frac{1}{2}) (\gamma_2 e^{2i\delta_2^R - i\frac{\pi}{2}} + i) \quad (2.4.30)$$

Für konstantes γ_2 wäre dies in der komplexen F - Ebene ein Teil eines Kreises um den Mittelpunkt $\frac{1}{2} (j_R + \frac{1}{2})i$ mit dem Radius $\frac{1}{2} (j_R + \frac{1}{2})\gamma_2$. Für $\delta_2^R(s_R) = \frac{\pi}{2}$ ist $F_b^{(1/2)}(s_R)$ rein imaginär, für $\delta_2(s_R) = 0$ hingegen nahe bei Null. Höhler berechnete $F_b^{(1/2)}(s)$ aus Dispersionsrelationen. Sein Ergebnis ist die $E_{\pi\text{Lab}}$ -parametrisierte Kurve in der komplexen F-Ebene:



Qualitativ kann man aus diesem Diagramm für die zweite Resonanz bei $E_{\pi\text{Lab}} = 600$ MeV auf den Fall 1.) schliessen. Die Tatsache, daß $\text{Re}F_b^{(1/2)}(E_{\pi\text{Lab}} = 600 \text{ MeV}) \neq 0$ ist, deutet auf einen nichtresonanten Untergrund hin. Die Frage nach dessen Zustandekommen sei dahingestellt. Wir vermerken am Rande, dass auch bei der dritten Resonanz an der Stelle $E_{\pi\text{Lab}} = 900$ MeV die Streuphase durch $\pi/2$ geht.

2.4.3.3 Resonanzen als Pole im dritten Blatt

Aus der Beziehung

$$f^{\text{III}} = (1+iKq)^{-1}K$$

folgt, dass f^{III} an einer Nullstelle von $\det(1+iKq)$ einen Pol hat. Wir nehmen eine solche Nullstelle im dritten Blatt bei $\tilde{s} = s_R - i\Gamma/2$ ($s_R, \Gamma > 0$) an:

$$\det(1+iK(\tilde{s})q(\tilde{s})) = 0 \quad (2.4.31)$$

Aus (2.4.31) folgt, dass mindestens einer der Eigenwerte $\lambda_i(s)$ der S-Matrix bei \tilde{s} einen Pol aufweist.

Beweis: Die Eigenwerte λ_i lauten als Lösung der Säkulargleichung

$$0 = \det(s - \lambda) = \lambda^2 - \lambda S_p S + \det S \quad (2.4.32)$$

explizite:

$$\lambda_{+,-} = \frac{1}{2} S_p S \pm \sqrt{\frac{1}{4} S_p^2 S - \det S} \quad (2.4.33)$$

Unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen S und K:

$$S = 1 + 2i q^{\frac{1}{2}} (1 - iKq)^{-1} K q^{\frac{1}{2}}$$

wird aus (2.4.32) im ersten Blatt

$$\det(2i q^{\frac{1}{2}} (1 - iKq)^{-1} K q^{\frac{1}{2}} - (\lambda - 1)) = 0$$

d.h.

$$(\lambda_{+,-} - 1) = i S_p (q(1 - iKq)^{-1} K) \pm \sqrt{-S_p^2 (q(1 - iKq)^{-1} K) + \frac{4 \det K q}{\det(1 - iKq)}} \quad (2.4.34)$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$S_p (q(1 - iKq)^{-1} K) = \frac{1}{\det(1 - iKq)} \left\{ S_p K q - 2i \det K q \right\} \quad (2.4.35)$$

und

$$\det (i-iKq) = 1- \det Kq - i\text{Sp}Kq \quad (2.4.36)$$

Durch Einsetzen von (2.4.35), (2.4.36) in (2.4.34) erhält man

$$\lambda_{+,-}^{\text{I}} = \frac{1}{\det(1-iKq)} \left[1 + \det Kq \pm \sqrt{-\delta_p^2 Kq + 4 \det Kq} \right] \quad (2.4.37)$$

Aus (2.4.37) folgt die Behauptung, dass $\lambda_{+,-}^{\text{III}}$ einen Pol an der Stelle \tilde{s} hat, falls der Ausdruck in eckigen Klammern bei $s = \tilde{s}$ von Null verschieden ist. Bevor wir das Verhalten der Zählerfunktion im dritten Blatt untersuchen, wollen wir die Zuordnung der Lösungen $\lambda_{+,-}^{\text{I}}$ zu den Eigenwerten $\lambda_{2,3}$ der S-Matrix klären. Durch Übergang zum Ein-Kanal-Fall (d.h. zu $K_{33} = K_{23} = 0$) folgt aus (2.4.37)

$$\lambda_{+,-}^{\text{I}} = \frac{1 \pm i K_{22} q_2}{1 - i K_{22} q_2} \quad (2.4.38)$$

Im Ein-Kanal-Fall hatten wir aber den Zusammenhang

$$S_{22} = \lambda_2^{(0)} = \frac{1 + i K_{22} q_2}{1 - i K_{22} q_2}$$

woraus wir schliessen, dass im ersten Blatt die gesuchte Zuordnung lautet

$$\begin{aligned} \lambda_2^{\text{I}} &\longleftrightarrow \lambda_+^{\text{I}} \\ \lambda_3^{\text{I}} &\longleftrightarrow \lambda_-^{\text{I}} \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

Beim Übergang vom ersten ins dritte Blatt ist die Zuordnung zwischen Kanalindex und Vorzeichen in der Lösung der Säkulargleichung nicht mehr eindeutig, da die Funktionen $\lambda_{+,-}$ einen Wurzelverzweigungsschnitt infolge der in (2.4.37) auftretenden Wurzel aufweisen. Bis auf die genannte Zuordnung lautet die

Fortsetzung von λ^I ins dritte Blatt aber

$$\lambda_{(+,-)}^{III} = \frac{1}{\det(1+iK\varphi)} \left[1 + \det K\varphi \pm \sqrt{-s_p^2 \det K\varphi + 4 \det K\varphi} \right] \quad (2.4.40)$$

Mit

$$\det(1+iK\varphi)|_{s=\tilde{s}} = 1 - \det K\varphi + i s_p \det K\varphi |_{s=\tilde{s}} = 0$$

ergibt sich

$$\lambda_{(+,-)}^{III}(s) \det(1+iK\varphi)|_{s=\tilde{s}} = 1 + \det K\varphi \pm (2+i s_p \det K\varphi) \quad (2.4.41)$$

Also ist

$$\lambda_{(-,-)}^{III}(s) \det(1+iK\varphi)|_{s=\tilde{s}} = -\det(1+iK\varphi)|_{s=\tilde{s}} = 0$$

und

$$\lambda_{(+,+)}^{III}(s) \det(1+iK\varphi)|_{s=\tilde{s}} = 2(1 + \det K\varphi)|_{s=\tilde{s}}$$

Wir kommen daher zu dem Ergebnis, dass $\lambda_{(+)}^{III}(s)$ bei $s = \tilde{s}$ einen Pol hat. Über $\lambda_{(-)}^{III}$ lässt sich in dieser Hinsicht nichts aussagen.

Wir machen an dieser Stelle o.B.d.A. die Annahme, dass die Fortsetzung von $\lambda_2^I = \lambda_2^I$ ins dritte Blatt so getroffen ist, dass $\lambda_2^{III} = \lambda_2^{III+}$. Das mathematisch zunächst unbestimmte Polverhalten von $\lambda_3^{III} = \lambda_3^{III-}$ legen wir im nächsten Abschnitt aus der physikalischen Forderung fest, dass K an der Stelle s_R nur einen Pol erster Ordnung hat. Man sieht nun wie im Ein-Kanal-Fall, dass $\lambda_2(s_R) = -1$, d.h. $\varphi_2(s_R) = \pi/2$.

2.4.3.4 Resonanzen und Pole der K-Matrix

Die K-Matrix hat auf der reellen Achse bei $s = s_R$ einen Pol.

Beweis: Wegen

$$K = f (1 + iqf)^{-1} \quad (2.4.42)$$

ist zu zeigen, dass

$$\det (1 + iqf) \Big|_{s = s_R} = 0 \quad (2.4.43)$$

Diese Beziehung folgt aber aus

$$\begin{aligned} \det (1+iqf) &= \det \left(1 + \frac{1}{2} (q^{\frac{1}{2}} S q^{-\frac{1}{2}} - 1) \right) \\ &= \det \left(\frac{1}{2} q^{\frac{1}{2}} (S+1) q^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \det (S+1) = \frac{1}{4} (\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1) \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

Somit ergibt sich, dass die K-Matrix einen Pol erster (zweiter) Ordnung hat, falls λ_2 oder (und) $\lambda_3 = -1$ sind.

Wir wollen nur einen Pol erster Ordnung zulassen, d.h. wir setzen $\lambda_3 \Big|_{s=s_R} \neq -1$ und nehmen damit $\lambda_3^{\text{III}} = \lambda_-^{\text{III}}$ bei \tilde{s} als regulär an. Dann ergibt sich für die K-Matrix die Darstellung

$$K_{ij}(s) = \frac{a_{ij}}{s - s_R} \quad (2.4.45)$$

für s aus einer gewissen Umgebung der Stelle s_R . Die a_{ij} nehmen wir als s -unabhängig an. Damit der Ansatz (2.4.45) mit $f(s_R) < \infty$ verträglich ist, müssen die a_{ij} wegen der aus

$$K = f(1+iqf)^{-1} = (1-iKq)f$$

für $\det f \neq 0$ in trivialer Weise folgenden Relation

$$\det (1+iqf)^{-1} = \det(1-iKq) = 1-\det K \det q-i\text{Sp}Kq$$

noch der Bedingung genügen

$$\det a = 0. \quad (2.4.46)$$

(2.4.46) ist gleichbedeutend mit

$$\det K = 0 \text{ und } \det f = 0 \quad (2.4.46a)$$

Hieraus gewinnen wir mit Hilfe von (2.4.36) und (2.4.37) auf der reellen Achse

$$\lambda_3^q = \frac{1 \pm i \text{Sp} K q}{1 - i \text{Sp} K q} = \frac{s-s_R \pm i(\varphi_2 a_{22} + \varphi_3 a_{33})}{(s-s_R) - i(\varphi_2 a_{12} + \varphi_3 a_{33})} \quad (2.4.47)$$

Aus der Forderung, dass $K(s)$ in s_R nur einen Pol erster Ordnung hat, erhalten wir so automatisch die auch experimentell bestätigte Beziehung

$$\lambda_3 = 1, \text{ d.h. } \varphi_3(s) = \text{konst.} = 0 \text{ mod } \pi.$$

Dies bedeutet, wie wir bereits in Kap. 2.4.3.2 gesehen haben, dass das inelastische Maximum nicht gegen das elastische Maximum verschoben ist. Für λ_2 hingegen erhalten wir eine Breit-Wigner-Formel.

2.4.3.5 Breit-Wigner-Formel für f

Aus

$$f = (1 - iKq)^{-1} K \quad (2.4.48)$$

folgt bei der Polapproximation

$$K_{ij} = \frac{a_{ij}}{s-s_R} \quad \text{mit} \quad \det K = \frac{\det a}{(s-s_R)^2} = 0 \quad (2.4.49)$$

unter Verwendung von (2.4.36)
der Ausdruck

$$f_{ij} = \frac{a_{ij}}{(s-s_R) - i(q_2 a_{22} + q_3 a_{33})} \quad (2.4.50)$$

Durch Definition

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= 2q_2 a_{22} \\ \Gamma_3 &= 2q_3 a_{33} \\ \Gamma &= \Gamma_2 + \Gamma_3 \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

erhalten wir die übliche Breit-Wigner-Formel für f

$$f_{ij} = \frac{1}{2iq_j \Gamma_j} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(s-s_R) - i\Gamma/2} \quad (2.4.52)$$

Die Tatsache, dass die Übergangswahrscheinlichkeit $2 \rightarrow 3$ in der Form $\Gamma_2 \cdot \Gamma_3$ faktorisiert erscheint, ist charakteristisch für ein Compound-Modell, in dessen Rahmen die Übergangswahrscheinlichkeit via Isobar stets als Produkt der Bildungswahrscheinlichkeit des Compoundzustands aus dem Anfangskanal und dessen Zerfallswahrscheinlichkeit in den Endkanal auftritt.

*) Wir wollen an dieser Stelle noch eine interessante Verknüpfung zwischen dem Kopplungsparameter Ψ und den "Kanalbreiten" Γ_2, Γ_3 geben. Wegen

$$q^{\frac{1}{2}} f q^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{q_i} \left\{ S - 1 \right\}$$

und

$$\begin{aligned} q^{\frac{1}{2}} f q^{\frac{1}{2}} &= q^{\frac{1}{2}} (1 - i K q)^{-1} K q^{\frac{1}{2}} \\ &= q^{\frac{1}{2}} (1 - i K q)^{-1} q^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[q^{\frac{1}{2}} (1 - i K q) q^{-\frac{1}{2}} \right]^{-1} q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 - i q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

sind die Matrizen $S, q^{\frac{1}{2}} f q^{\frac{1}{2}}$ und $q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}}$ mittels derselben reellen orthogonalen Transformation O auf Hauptachse transformierbar, d.h.

$$q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}} = O q^{\frac{1}{2}} K_D q^{\frac{1}{2}} O^T$$

oder

$$K = q^{-\frac{1}{2}} O q^{\frac{1}{2}} K_D q^{\frac{1}{2}} O^T q^{-\frac{1}{2}} \quad (2.4.53)$$

mit

$$K_D = \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

Mit Gl. (2.4.18) lautet (2.4.53) explizite

$$K = \begin{pmatrix} k_2 \cos^2 \Psi + k_3 \frac{q_3}{q_2} \sin^2 \Psi & ; & \sin \Psi \cos \Psi \left(-k_2 \sqrt{\frac{q_2}{q_3}} + k_3 \sqrt{\frac{q_3}{q_2}} \right) \\ \sin \Psi \cos \Psi \left(-k_2 \sqrt{\frac{q_2}{q_3}} + k_3 \sqrt{\frac{q_3}{q_2}} \right) & ; & k_2 \frac{q_2}{q_3} \sin^2 \Psi + k_3 \cos^2 \Psi \end{pmatrix}$$

*) Die Lektüre dieses letzten Teils von Kap. 2.4.3.5 ist zum Verständnis der folgenden Kapitel nicht unbedingt erforderlich.

Aus $\det K = 0$ folgt, dass mindestens einer der Eigenwerte k_2 , k_3 verschwindet. Wir nehmen o.B.d.A. $k_3 = 0$ an. Dann lautet K :

$$K = k_2 \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & ; & -\sqrt{\frac{q_2}{q_3}} \cos \psi \sin \psi \\ -\sqrt{\frac{q_2}{q_3}} \cos \psi \sin \psi & ; & \frac{q_2}{q_3} \sin^2 \psi \end{pmatrix} \quad (2.4.54)$$

Mit

$$k_2 = \frac{\alpha_2}{s - s_R} \quad (2.4.55)$$

stellen wir den Zusammenhang mit den in (2.4.50) eingeführten a_{ij} her:

$$\begin{aligned} a_{22} &= \alpha_2 q_2 \cos^2 \psi \frac{1}{q_2} \\ a_{33} &= \alpha_2 q_2 \sin^2 \psi \frac{1}{q_3} \\ a_{23} &= -\alpha_2 q_2 \sin \psi \cos \psi \frac{1}{\sqrt{q_2 q_3}} \end{aligned} \quad (2.4.56)$$

Damit haben wir auch die gesuchte Verknüpfung von ψ , α_2 und Γ_2 , Γ_3 , Γ aus (2.4.51):

$$\begin{aligned} \Gamma_{2/2} &= q_2 \alpha_2 \cos^2 \psi \\ \Gamma_{3/2} &= q_2 \alpha_2 \sin^2 \psi \\ \Gamma/2 &= \alpha_2 q_2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi &= \Gamma_{2/2} / \Gamma \\ \sin^2 \psi &= \Gamma_{3/2} / \Gamma \end{aligned} \quad (2.4.57)$$

Da die Eigenvektoren $|\bar{1}\rangle$ von S nach Kap. 2.4.3.2 in der Basis $|2\rangle$, $|3\rangle$ als

$$\begin{aligned} |\bar{2}\rangle &= \cos \psi |2\rangle - \sin \psi |3\rangle \\ |\bar{3}\rangle &= \sin \psi |2\rangle + \cos \psi |3\rangle \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

darstellbar sind, können wir die Matrix $q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}}$ damit in der dyadischen Form

$$q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}} = k_2 \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} x_2 \cdot x_2 & , & x_2 \cdot x_3 \\ x_3 \cdot x_2 & , & x_3 \cdot x_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.59)$$

schreiben, wo $x_2 = \cos \psi$, $x_3 = -\sin \psi$ die Komponenten des Eigenvektors $|\bar{2}\rangle$ zum nichtverschwindenden Eigenwert des Operators $q^{\frac{1}{2}} K q^{\frac{1}{2}}$ in der Basis $\{ |2\rangle, |3\rangle \}$ sind.

2.4.4 Phänomenologische Diskussion der 2. Resonanz in der Photoerzeugung

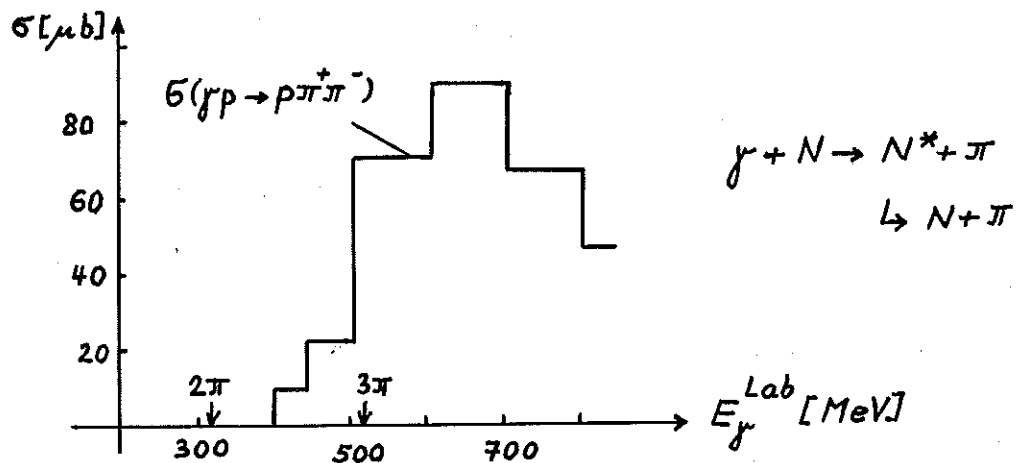
Wie im Falle der πN -Streuung (vgl. Kap. 2.4.3.1) gehen wir bei der Diskussion der 2. Resonanz in der Photoerzeugung von einer Modellvorstellung aus. Wir betrachten die 3 Kanäle

- Kanal 1: γN
- Kanal 2: πN
- Kanal 3: πN^*

Hinsichtlich der elektromagnetischen Wechselwirkung wird die Kopplung von Kanal 1 an die Kanäle 2 bzw. 3 nur in niedrigster störungstheoretischer Ordnung berücksichtigt.

Unsere Modellvorstellung, dass der inelastische Kanal $2\pi + N$ vornehmlich über die primäre Erzeugung von $N^* + \pi$ gebildet wird, findet durch verschiedene Experimente eine Bestätigung:

Nach Messungen in Cornell ¹³⁾ ist es experimentell evident, dass die Zweifach-Photopionerzeugung $\gamma + N \rightarrow N + \pi + \pi$ vornehmlich über das Isobar $N_{++}^* = (p\pi^+)$ des Protons verläuft.



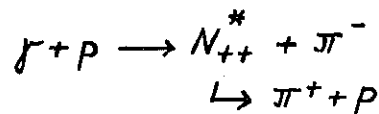
Bei einer Laborenergie des Photons von $500 \text{ MeV} \leq E^{\text{Lab}} \leq 550 \text{ MeV}$ beobachtet man einen steilen Anstieg des totalen Erzeugungsquerschnittes $\sigma(\gamma + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-)$. Die Schwellenenergie für die Photoerzeugung von $N^* + \pi$ mit einer Isobarenmasse $M^* \sim 1240 \text{ MeV}$

ist

$$E_{\gamma}^{\text{Lab}} = \frac{(M^* + m_{\pi})^2 - M^2}{2M} \sim 545 \text{ MeV}$$

Messungen in Frascati (Bericht von Beneventano, Sienna 63) ergaben für $\sigma(\gamma + p \rightarrow N_{++}^* + \pi^-)$ eine Resonanz bei $E_{\gamma}^{\text{Lab}} = (675 \pm 75) \text{ MeV}$. Damit ist zweierlei gezeigt:

- 1) die 2. Resonanz tritt auch in der Reaktion $\gamma + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-$ auf
- 2) die Bildung des Dreiteilchen-Endzustandes ist ein Zweistufenprozess



Der nichtresonante Untergrund, der im Bereich der 2. Resonanz nicht mehr vernachlässigbar ist, führt auch in diesem Fall zu einer Verschiebung der effektiven Resonanzenergie (vgl. Kap. 2.4.1).

2.4.4.1 Verallgemeinerung des Watson-Theorems

Das Watson-Theorem lieferte für Energien unterhalb der Erzeugungsschwelle für 2π (also im Fall des Kanal (1+2)-Problems; Kap. 1.5) für die Multipolamplitude die Aussage

$$\begin{aligned} T &= \pm |T| e^{i\delta_{\ell,j,I}(s)} \\ &\equiv ST^* \\ S &= e^{2i\delta_{\ell,j,I}(s)} \end{aligned} \tag{2.4.60}$$

Dieser Zusammenhang zwischen der πN -Streuung und der Photoerzeugung soll für den $\bar{3}$ -Kanalfall verallgemeinert werden.

Dazu definieren wir einen 2-dimensionalen Vektor

$$T = \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \tag{2.4.61}$$

dessen Komponenten T_i ($i = 2, 3$) den Multipolamplituden folgender Reaktionen zugeordnet werden:

$$T_2: \gamma + N \rightarrow \pi + N$$

$$T_3: \gamma + N \rightarrow \pi + N^*$$

Die Multipolamplituden werden in der Drehimpulsbasis definiert durch

$$T_i \sim \frac{1}{\sqrt{q_i}} \overset{\text{aus}}{\langle i | H_w^{el} | \gamma, N_1 \rangle} \quad (i=2,3)^{+)} \quad (2.4.62)$$

Beh.:

$$\frac{1}{2i} (T - T^*) = f q T^* \quad (2.4.63)$$

Mit der Definition der Streumatrix für den 3-Kanal-Fall

$$f = \frac{1}{2i} (q^{-1/2} S q^{1/2} - q^{-1})$$

kann die Beh. (2.4.63) auch geschrieben werden

$$T = q^{-1/2} S q^{1/2} T^* \quad (2.4.63')$$

Die Gleichungen (2.4.63) bzw. (2.4.63') stellen die Verallgemeinerung des Watson-Theorems dar. In der Form (2.4.63') lässt sich die Verallgemeinerung des Watson-Theorems nach (2.4.60) in Matrixform erkennen.

^{+) Im Kanal (1+2)-Problem wurde T ohne den Faktor $q^{-1/2}$ definiert (s. Gl. 1.52). Das ist für den Beweis des Watson-Theorems unwesentlich, da q im "eleastischen" Bereich keinen Matrixcharakter hat.}

Bew.: In niedrigster Ordnung der elektromagnetischen Wechselwirkung kann das Matrix-Element (2.4.62) geschrieben werden

$$\overset{\text{aus}}{\langle i | H_w^{\text{el}} | \gamma, N_1 \rangle} = \sum_j \overset{\text{aus}}{\langle i | j \rangle} \overset{\text{ein ein}}{\langle j | H_w^{\text{el}} | \gamma, N_1 \rangle} \quad (2.4.64)$$

Dabei enthält das vollständige System der $|j\rangle^{\text{ein}}$ nur die stark wechselwirkenden Zustände, so dass

$$\overset{\text{aus}}{\langle i | j \rangle}^{\text{ein}} = S_{ij}$$

die S-Matrixelemente aus Kap. 2.4.3 sind.

Berücksichtigt man die Invarianz der Multipolamplitude gegen Zeitumkehr (vgl. Kap. 1.5), so wird

$$\overset{\text{aus}}{\langle i | H_w^{\text{el}} | \gamma, N_1 \rangle} = \sum_j S_{ij} \overset{\text{aus}}{\langle j | H_w^{\text{el}} | \gamma, N_1 \rangle}^*$$

und mit (2.4.62)

$$T_i = q_i^{-1/2} \sum_j S_{ij} q_j^{1/2} T_j^* \quad (2.4.65)$$

Aus (2.4.65) folgt für den Spaltenvektor (2.4.61) die Matrixgleichung

$$T = q^{-1/2} S q^{1/2} T^*$$

2.4.4.2 K-Matrix-Formalismus

In Verallgemeinerung des Kanal (1+2)-Problems, für das eine irreduzible Multipolamplitude definiert wurde durch

$$T^{\text{irr}} \equiv \frac{T}{1+iqf} = (1-iqf^{\text{irr}})T$$

definiert man im 3-Kanal-Fall einen irreduziblen 2-dimensionalen Vektor

$$T^{\text{irr}} = \begin{pmatrix} T_2^{\text{irr}} \\ T_3^{\text{irr}} \end{pmatrix} \quad (2.4.66)$$

mit

$$T^{\text{irr}} = (1 - iKq)T \quad (2.4.67)$$

Beh.: T^{irr} ist regulär für $s \rightarrow s_3$.

Bew.: In Kap. 2.4.3.1 wurde gezeigt, dass für $s \geq s_3$ die K-Matrix reell, symmetrisch ist. Ausserdem ist für $s \geq s_3$ q eine reelle Diagonalmatrix.

Unter Berücksichtigung des verallgemeinerten Watson-Theorems erhält man nach (2.4.67)

$$\begin{aligned} T^{\text{irr}} - T^{\text{irr}*} &= (1 - iKq)T - (1 + iKq)T^* \\ &= [(1 - iKq)q^{-\frac{1}{2}}Sq^{\frac{1}{2}} - (1 + iKq)]T^* \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2i} [q^{-\frac{1}{2}}Sq^{\frac{1}{2}} - q^{-1}] \\ &= (1 - iKq)^{-1}K \end{aligned}$$

folgt

$$q^{-\frac{1}{2}}Sq^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - iKq} (1 + iKq)$$

d.h. $T^{\text{irr}} = T^{\text{irr}*}$ für $s \geq s_3$.

Beh.: T^{irr} ist regulär für $s \rightarrow s_2$, falls im Bereich $s_2 \leq s \leq s_3$ die Unitarität von T wie folgt postuliert wird

$$\frac{1}{2i} (T - T^*) = f\tilde{q}T^* \quad (2.4.68)$$

mit $\tilde{q} = \begin{pmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $s_2 \leq s \leq s_3$.

Das Postulat (2.4.68) lässt sich mit dem Unitaritätspostulat (2.4.12) vergleichen, das in $s_2 \leq s \leq s_3$ zur

Regularität der K-Matrix for $s \rightarrow s_2$ führte (vgl. Kap. 2.4.3.1).

Bew.: In $s_2 \leq s \leq s_3$ gilt

$$\dot{q}^+ = q^* = 2 \cdot \tilde{q} - q.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} T^{\text{irr}} - T^{\text{irr}*} &= (1 - iKq)T - (1 + iKq^*)T^* \\ &= (1 - iKq)(T - T^*) - 2iK\tilde{q}T^* \end{aligned}$$

da $K = (1 - iKq)f$

$$T^{\text{irr}} - T^{\text{irr}*} = (1 - iKq)(T - T^* - 2if\tilde{q}T^*).$$

T^{irr} ist also genau dann regulär für $s \rightarrow s_2$, wenn das verallgemeinerte Watson-Theorem in $s_2 \leq s \leq s_3$ in der Form (2.4.68) postuliert wird.

Analytische Fortsetzung

Aus der Definition von T^{irr} nach (2.4.67) folgt

$$T = (1 - iKq)^{-1} T^{\text{irr}} \quad (2.4.69)$$

Die Verzweigungspunkte von T werden wie die der Streumatrix

$$f = (1 - iKq)^{-1} K$$

allein durch die Elemente der q-Matrix bestimmt (s. Kap. 2.4.3.1). T kann also explizit in die höheren Blätter der 4-blätterigen Riemann-Fläche fortgesetzt werden.

T und f haben denselben Nenner. Hat die Streuamplitude im III. Blatt an der Nullstelle des Nenners $\text{Det}(1 + iKq) = 0$ einen Pol bei $s = s_R - i \frac{\epsilon}{2}$, so hat auch T_{III} einen Pol an derselben Stelle.

Im Kanal (1+2)-Problem hatten wir gesehen, dass die Multi-
polamplitude T dann bei $s = s_R$ entweder eine Resonanz oder
eine Nullstelle haben kann, je nachdem, ob T^{irr} bei
 $s = s_R$ einen Pol hat oder in $U(s_R)$ regulär ist (sh. Kap.
2.2.2). Entsprechend ist auch im 3-Kanal-Fall zwischen ver-
schiedenen Möglichkeiten zu unterscheiden.

Explizit ergibt sich für den Vektor T nach (2.4.69)

$$T = \frac{\begin{pmatrix} (1-iq_3 K_{33}) T_2^{irr} + iq_3 K_{23} T_3^{irr} \\ (1-iq_2 K_{22}) T_3^{irr} + iq_2 K_{23} T_2^{irr} \end{pmatrix}}{(1-iq_2 K_{22})(1-iq_3 K_{33}) + q_2 q_3 K_{23}^2} \quad (2.470)$$

Das Verhalten von T für $s \rightarrow s_R$ wird also nicht mehr allein
durch T^{irr} bestimmt, sondern hängt noch wesentlich von dem
Verhalten der K -Matrix-Elemente im Zähler ab. Auch wenn
 T^{irr} regulär für $s \rightarrow s_R$ ist, kann in T durch die Kopp-
lungsglieder eine Resonanz auftreten.

Hat T^{irr} bei $s = s_R$ einen Pol erster Ordnung, so gilt

$$T_i^{irr} = \frac{b_i(s)}{s - s_R} ; \quad b_i(s) \text{ regulär in } U(s_R) \quad (2.471)$$

T ist auf der reellen Achse bei $s = s_R$ endlich. Da anderer-
seits nach Gl. (2.4.45) die K -Matrix bei $s = s_R$ einen Pol
erster Ordnung hat

$$K_{ij} = \frac{a_{ij}}{s - s_R} \quad \text{mit } \mathbf{Det}(a) = 0$$

müssen die in $\frac{1}{s - s_R}$ quadratischen Glieder im Zähler von
(2.4.70) verschwinden (der Nenner in (2.4.70) hat nur einen
Pol 1. Ordnung wegen $\mathbf{Det}(a) = 0!$), d.h. die b_i müssen der
Bedingung

$$a_{22} b_3 = a_{23} b_2 \quad (2.4.71)$$

genügen.

Literatur zu Kapitel 2.4

- 1) B. J. Moyer : Rev.Mod.Phys. 33, 367 (1961)
- 2) R. Diebold : Phys.Rev. 130, 2089 (1963)
- 3) Highland und De Wire : Phys.Rev. 132, 1293 (1963)
- 4) Hand und Schaerf: Phys.Rev.Lett. 6, 229 (1961)
- 5) Dixon und Walker : Phys.Rev.Lett. 1, 142, 458 (1958)
Beneventano et al. : Nuovo Cimento 17, 274 (1960)
"Aix" - Konferenz 1961, S. 21
Boyden und Walker : Rochester Konferenz 1960, S. 17
- 6) Ph. Salin : Nuovo Cim. 28, 1294 (1963)
- 7) Querzoli, Salvini, Silverman : Nuovo Cim. 19, 53 (1961)
- 8) M. Gourdin und Ph. Salin : Nuovo Cim- 27, 193 und 309 (1963)
Ph. Salin : Nuovo Cim. 28, 1294 (1963)
- 9) P. Bareyre et al. : Phys. Lett. 8, 137 (1964)
- 10) R. Oehme : Nuovo Cim. 20, 334 (1961)
R. Oehme : Zeitschr. f. Physik 162, 426 (1961)
Dalitz und Tuan : Ann. of Phys. 3, 307 (1960)
- 11) T. Fulton : Brandeis University, Summer Institute 1962,
Vol. I, Seite 30 (1963)
- 12) G. Höhler und G. Ebel : Nucl.Phys. 48, 470 (1963)
- 13) Cornell - Gruppe : Phys.Rev. 119, 811 (1960)

2.5 Die 3. Resonanz

2.5.1 Die Quantenzahlen der 3. Resonanz bei der π -N-Streuung.

Bei der Pion-Nukleon-Streuung fand man bei Energien $E_{\pi} \sim 890-900 \text{ MeV}$ eine weitere Resonanz, die sog. 3. Resonanz. Die Quantenzahlen dieser Resonanz wurden experimentell gefunden zu

$$I = 1/2 ; \quad j^{\pi} = 5/2 (+)$$

Die experimentellen Resultate, die zu den angegebenen Quantenzahlen führen, sollen im folgenden kurz aufgeführt werden.

Der Isospin der 3. Resonanz:

Der Isospin $I = 1/2$ folgt aus der Tatsache, dass die 3. Resonanz nur bei der $\pi^{-} - p$ - Streuung ($I = 3/2, 1/2$), nicht aber bei der $\pi^{+} - p$ - Streuung ($I = 3/2$) gefunden wurden. Bild 1 zeigt den experimentellen Verlauf des Wirkungsquerschnitts ¹⁾

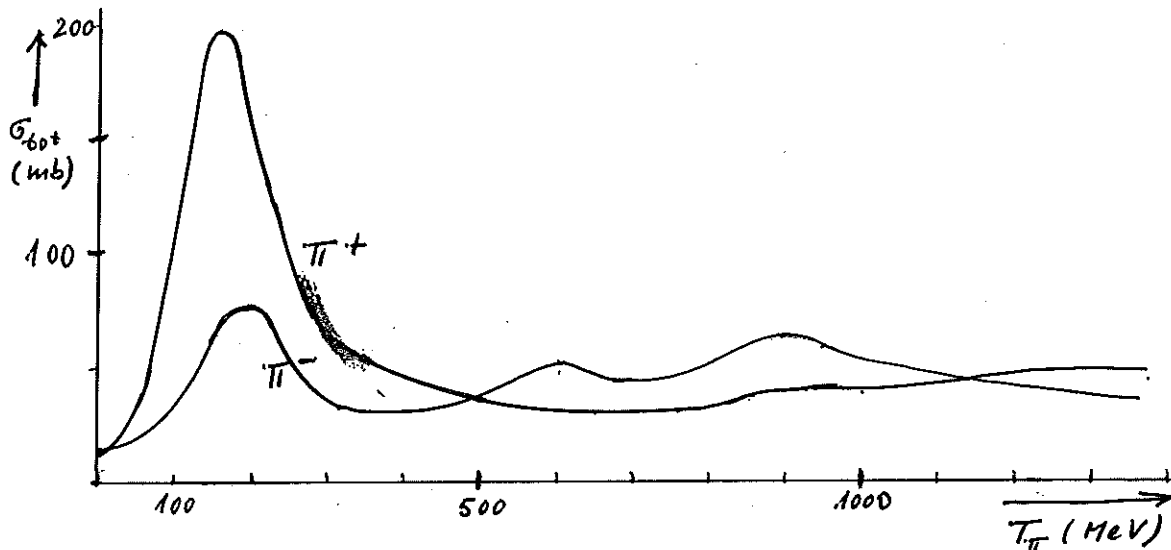


Abb. 1

Der Spin der 3. Resonanz:

Aussagen über den Spin der 3. Resonanz gewinnt man aus Winkelverteilungsmessungen der gestreuten Pionen. Die gemessene Winkelverteilung wird bekanntlich an die Funktion

$$\sigma(\Theta) = \sum_{n=0}^N a_n \cos^n \Theta$$

angepasst. Das maximal auftretende N ist in dem Fall, dass nur ein (j, ℓ) , also keine weiteren Beimischungen auftreten, durch $N = 2j - 1$ mit dem Spin verknüpft. Im gemischten Fall, wenn ausser (j, ℓ) auch noch (j', ℓ') auftritt, gilt

$$N = \text{Min} (\ell + \ell', j + j')$$

Messungen von Wood et al. ²⁾ ergaben, dass $N_{\text{max}} = 5$ ist. Bild 2 zeigt den Verlauf von a_4 und a_5 mit der Energie

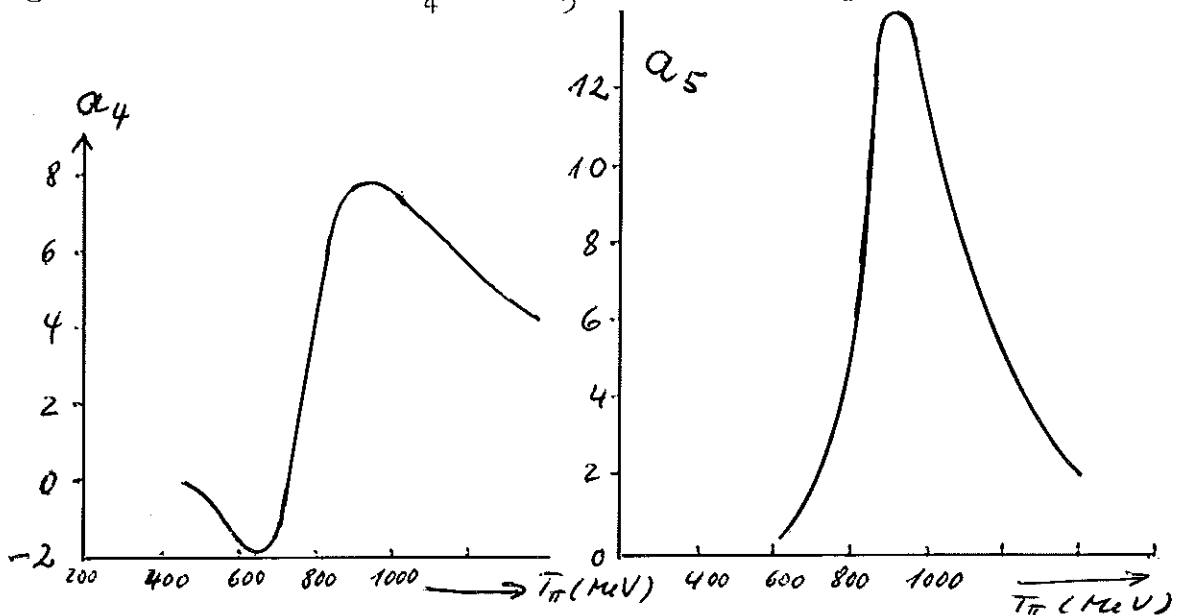


Abb. 2

Man sieht, dass a_4 bei $E_\pi^I \approx 900$ MeV ein Maximum hat. Daraus folgt, dass $j_{\text{res}} = 5/2$ ist.

Aus der Tatsache, dass $a_5 \neq 0$ ist und ebenfalls bei $E_\pi^I \approx 900$ MeV ein Maximum hat, folgt, dass eine starke Interferenz zwischen zwei Partialamplituden verschiedener Parität, in diesem Falle von $d_{5/2}$ und $f_{5/2}$ auftritt.

Bei der ganzen Diskussion der experimentellen Ergebnisse geht man davon aus, dass es sich bei den betrachteten Phänomenen um eine einfache Resonanz handelt, folglich eine der beiden Partialamplituden eine nicht-resonante Beimischung ist.

Welche der beiden Amplituden resonant ist, kann nicht mit Hilfe des qualitativen Verlaufs der Winkelverteilung entschieden werden. Die dazu erforderlichen genauen Phasenanalysen wurden von Feld ³⁾ durchgeführt, jedoch sind die Ergebnisse bisher nicht publiziert worden.

Die Parität der 3. Resonanz:

Diese eben erwähnten Phasenanalysen liefern natürlich auch Aussagen über die Parität der 3. Resonanz.

Die bisherige Vermutung, dass die 3. Resonanz positive Parität hat, stützt sich auf experimentelle Ergebnisse bei der π^0 -Photoerzeugung im Energiebereich zwischen der 2. und der 3. Resonanz. Die hier gefundene Polarisierung der Rückstossprotonen unter 90° (CMS) - vergl. Kap. 2.4.1 - weist darauf hin, dass in diesem Energiebereich zwei interferierende Partialwellen entgegengesetzter Parität auftreten (s. Kap. 2.3.3, S. 60)

Da man weiss, dass die 2. Resonanz negative Parität hat, kann man auf positive Parität der 3. Resonanz schliessen. Dieser Schluss ist aber unsicher, da es sich auch um Interferenzen mit einem nicht-resonanten Untergrund handeln kann.

Genauere Polarisationsmessungen und Untersuchungen der Photoerzeugung mit linear polarisierten Gamma - Quanten können diese Frage klären.

Aussagen über das Spin der 3. Resonanz sowie den nichtresonanten Untergrund erhält man auch aus dem Studium des komplexen Diagramms für die πN - Vorwärtsstreuamplitude, das in Kap. 2.4.3.2 bereits diskutiert wurde. Für die 3. Resonanz konnte man aus diesem

Diagramm entnehmen, dass $j_{res} = 5/2$ ist, der Realteil der resonanter Streuphase in der Resonanz durch $\pi/2$ geht und ein stark nichtresonanter Untergrund, in Übereinstimmung mit den Winkelverteilungsmessungen, auftritt.

2.5.2 Die Quantenzahlen der 3. Resonanz in der Photoerzeugung.

Auf Grund der Daten bei der $\pi - N -$ Streuung erwartet man die 3. Resonanz bei der Photoerzeugung bei $E_\gamma = 1040 - 1050$ MeV, man findet sie aber, sowohl für π^0 - als auch für π^\pm - Erzeugung, bei ~ 1 GeV ⁵⁾

π^+ - Erzeugung :

Zur Bestimmung des Spins der Resonanzerscheinung bei 1 GeV kann nicht, wie bei der $\pi - N -$ Streuung, eine Analyse der Winkelverteilung nach Potenzen von $\cos\theta$ durchgeführt werden. Das kann man folgendermassen einschätzen:

Das Matrixelement für die π^+ - Photoerzeugung enthält u.a. den photoelektrischen Effekt

$$M \sim q \cdot \epsilon \cdot \bar{u}(P_2) \gamma_5 u(P_1) \frac{1}{t - m_\pi^2}$$

Es ist $t = (k-q)^2 = m_\pi^2 - 2k_0 q_0 + 2k_0 |q| \cos \theta$,

also $t - m_\pi^2 = - 2k_0 q_0 (1 - \mathbf{v}_\pi \cos \theta)$,

d.h. $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{(1 - \mathbf{v}_\pi \cos \theta)^2}$
Photoeffekt

Da im Energiebereich der 3. Resonanz $\mathbf{v}_\pi \approx 1$ ist, kann $t - m_\pi^2$ für kleine θ sehr kleine Werte annehmen. Das bedeutet, dass bei einer Entwicklung von M nach Potenzen von $\cos \theta$ sehr viele Glieder

auftreten. Eine Analyse dieser Art wäre also äusserst unzweckmässig.

Die Analyse wird deshalb auf eine andere, auf Moravcik zurückgehende Weise durchgeführt.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt, der sich aus den verschiedensten Beiträgen zusammensetzen kann, kann man allgemein schreiben :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{F_1(\Theta)}{(1 - v_\pi \cos \Theta)^2} + \frac{F_2(\Theta)}{1 - v_\pi \cos \Theta} + F_3(\Theta)$$

F_1, F_2, F_3 sind jetzt Funktionen, die in der Nähe von $\cos \Theta = \frac{1}{v_\pi}$ regulär sind und sich deshalb i.A. nach Potenzen von $\cos \Theta$ mit einer endlichen Anzahl von Gliedern entwickeln lassen.

Bei der Analyse der gemessenen Winkelverteilungen wird demgemäss nicht $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, sondern das Produkt $(1 - v_\pi \cos \Theta)^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}$ nach Potenzen von $\cos \Theta$ entwickelt, d.h.

$$(1 - v_\pi \cos \Theta)^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{n=0}^{N'} b_n \cos^n \Theta$$

Für den höchsten vorkommenden Drehimpuls j_{\max} gilt jetzt :

$$N' - 2 = 2j_{\max} - 1$$

Die Winkelverteilung für π^+ -Photoerzeugung wurde von Kilner ⁵⁾ bei Energien von 1,1; 1,2; 1,3 GeV gemessen. Mit Hilfe eines Moravcik-Fits ergab sich aus den Messungen $N' = 6$, also $j = 5/2$.

Dieses Ergebnis ist also konsistent mit $j = 5/2$ für die Resonanzerscheinung bei $E_\gamma \sim 1$ GeV und weist darauf hin, dass es sich hier um dasselbe Phänomen wie die 3. Resonanz in der πN -Streuung handelt.

Eine genaue Multipolanalyse der $T_i(0)$ ist bei Kilner im Gange, die sich jedoch wegen der bei 1 GeV grossen Bornsterme ⁶⁾ als schwierig erweist.

Mit $j = 5/2$ sind also die Multipolamplituden M_3^- (M 3 - Absorption) und E_3^- (E 2 - Absorption) möglich, wenn man voraussetzt, dass die 3. Resonanz positive Parität hat. (s.o.).

π_0 - Erzeugung:

Eindeutige Aussagen über j können im Fall der π_0 -Photoerzeugung nicht gemacht werden, da zu wenig experimentelles Material vorliegt.

Diebold ⁵⁾ hat den differentiellen Wirkungsquerschnitt für π_0 -Erzeugung nur bei drei Winkeln ($60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$) gemessen. Er konnte seine Ergebnisse mit der Theorie in Übereinstimmung bringen, wenn er bei der 3. Resonanz **reine** E 2 - Absorption und neben der 1. und 2. Resonanz eine Beimischung von nichtresonanten S-Wellen annahm. Die Bornsterme wurden völlig vernachlässigt. Da diese nach Höhler ⁶⁾ in dem betrachteten Energiebereich recht beträchtlich sind, ist die von Diebold durchgeführte Analyse seiner Messergebnisse wenig glaubhaft.

$$\text{Das Mischungsverhältnis } R = \frac{E_3^-}{M_3^-}$$

Wie bereits erwähnt, sind mit dem Spin $5/2$ und der positiven Parität der 3. Resonanz die Multipolamplituden M_3^- und E_3^- verträglich. Über das Mischungsverhältnis dieser Amplituden liegen widersprechende Resultate vor.

Diebold ⁵⁾ (s.o.) konnte seine Ergebnisse für den Fall **reiner** E 2 - Absorption, also $R \rightarrow \infty$ fitten.

Im Isobarenmodell von Gourdin und Salin (vgl. Kap. 2.4.2 und die dort zitierte Literatur) wurde die π^0 - Erzeugung bis 950 MeV analysiert. Für R erhielten sie den Wert $R = -3$. Sie mussten bei ihrem Fit allerdings im Bereich der 3. Resonanz noch eine zusätzliche Beimischung von nichtresonanten p - Wellen einführen. Das steht im Widerspruch zu der Analyse von Diebold, der ja nichtresonante S - Wellen einführte.

Talman et al.⁷⁾ haben den differentiellen Wirkungsquerschnitt für π^0 -Erzeugung bei kleinen Winkeln, u.a. bei einer Energie von 1150 MeV gemessen. Sie fanden, dass für $\Theta \rightarrow 0$ $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow 0$ geht. Daraus folgt ^{für} das Mischungsverhältnis R, wenn man neben der 2. und 3. Resonanz nur noch p bzw. ω - Austausch in Betracht zieht, die Bedingung ⁸⁾ $R = 2$.

Die Ergebnisse von Talman et al. stimmen insofern mit den Messungen von Kilner (s.o.) überein, als dieser Autor bei π^+ - Erzeugung ebenfalls bei $\Theta = 0^\circ$ keine Resonanz fand.

Aus den eben angeführten Ergebnissen ist ersichtlich, dass die Situation für R im Augenblick noch völlig offen ist.

Literatur zu Kapitel 2.5

- 1) vgl. Fig. 1 in:
G. Höhler und G. Ebel: Nuclear Physics 48, 470 (1963)
- 2) Wood et al. : Phys. Rev.Lett., 6 481 (1961)
Omnes u. Vallados : "Aix - en - Provence"-Konferenz 1961
- 3) Feld : Siena - Konferenz 1963
- 4) Referenz 1)
- 5) Diebold : Phys.Rev. 130, 2089 (1963)
Kilner : Caltech - Thesis (1963)
- 6) Höhler : Nuovo Cimento 21, 187 (1961)
- 7) Talman : Phys. Rev.Lett. 9, 177 (1962)
- 8) Schilling : private Mitteilung
D.S. Beder : Caltech - preprint Januar 1964

Anhang

A) Zeitumkehr:

Im Zusammenhang mit dem Watson-Theorem (Kap. 1.5) wurde der Zeitumkehroperator T eingeführt, der im einzelnen im Anhang diskutiert werden sollte. Da jedoch die Zeitumkehr ausführlich in der Literatur behandelt wurde (vgl. z.B.: Stichel, P.: Z.Physik 157, 89 (1959) und die dort zitierte Literatur), wird auf eine Diskussion an dieser Stelle verzichtet.

B) Feynman-Regeln:

Auf eine Diskussion der Feynman-Regeln kann an dieser Stelle ebenfalls verzichtet werden, da hierüber in letzter Zeit einmal eine Vorlesungsausarbeitung von F. Penzlin (Fortschr.Phys. 11, 357 (63)) erschienen ist und auch die Feynman-Regeln für Teilchen mit beliebigem Spin in einer neueren Arbeit von St. Weinberg (Phys.Rev. 133, B 1318 (64)) ausführlich diskutiert werden.

C) Polarisation der Rückstoßnukleonen bei $\theta = \frac{\pi}{2}$

Bei Behandlung der Polarisationsphänomene in Kap. 2.3.3 wurde bemerkt, daß die Komponente $(\underline{P} \cdot \underline{n})$ des Polarisationsvektors der Rückstoßnukleonen senkrecht zur Reaktionsebene im Falle von $\theta = \frac{\pi}{2}$ nur dann von Null verschieden ist, wenn Multipole mit verschiedener Phase und verschiedener Parität beitragen.

Dies kann man fast unmittelbar aus der bei G.T. Hoff (Phys.Rev. 122, 665 (61)) angegebenen Multipolzerlegung von den in $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\underline{P} \cdot \underline{n})$ eingehenden Amplituden entnehmen.

