

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

DESY

DESY 65/1

Februar 1965
Beschleuniger

WINKEL- UND STRECKENMESSUNGEN BEIM
DEUTSCHEN ELEKTRONEN-SYNCHROTRON D E S Y

von

Franz Löffler

Winkel- und Streckenmessungen beim
Deutschen Elektronen-Synchrotron D E S Y
von
Franz Löffler

Z u s a m m e n f a s s u n g :
=====

Der Bericht behandelt die für den Betrieb des Synchrotrons notwendigen geodätischen Lagevermessungen. Die erreichten Genauigkeiten werden aufgezeigt.

Abstract:

The following article deals with the geodetic measurements for horizontal position, which are necessary for running the synchrotron. The accuracy obtained is shown.

Oktober 1964

1.) Genauigkeitsanforderungen

Bei DESY sorgen 48 Elektromagnete (20 to schwer, 4,15 m lang) dafür, daß die Elektronen während des Beschleunigungsvorgangs ihre Sollbahn beibehalten, bis sie gezielt ausgelenkt und den Experimenten zugeführt werden. Diese Magnete sollten so justiert werden, daß ihre radialen Abweichungen von einem mittleren Sollkreis mit 50,42 m Radius normal verteilt sind und deren quadratischer Mittelwert 0,1 mm nicht überschreitet. Ähnliche Forderungen wurden für die vertikalen Abweichungen gestellt, wogegen für die tangentialen keine Toleranzen vorgeschrieben wurden.

2.) Das Vermessungssystem

Diese Genauigkeitsanforderungen wurden bei der Planung der Vermessungsarbeiten zugrunde gelegt. Als übergeordneten Rahmen wählte man ein regelmäßiges Achteck von 48 m Speichenlänge, dessen Eckpunkte und Schwerpunkt durch tieffundierte, wärmeisolierte Betonpfeiler vermarktet wurden. Die Achteckseiten wurden durch 2 Nebenseitenpfeiler in 3 gleich große Abschnitte unterteilt. Die Pfeiler stehen in besonders gut verdichtetem Untergrund und sind unabhängig vom umgebenden Gebäude. Sie sind mit Spezialvermessungsplatten der Firma Kern versehen, die eine Zwangszentrierung von $\pm 0,015$ mm gewährleisten und in ihrer Mittelbohrung außerdem einen Stehbolzen enthalten, der als Höhenfestpunkt dient.

Dieses Vermessungsachteck hat die Form der Beschleunigeranlage wesentlich mitbestimmt. Um den Zentrumspfeiler

wurde ein Gebäude errichtet, das außer dem Vermessungsgeschoß die Klimaanlage und den Hauptkontrollraum enthält. Der eigentliche Beschleunigerring ist mit diesem dreistöckigen Zentralgebäude durch 8 Radialkanäle verbunden, die eine Sicht zu den Eckpfeilern ermöglichen und 2 m breit sind. Sie dienen neben der Vermessung zur Rückluftführung der Klimaanlage. Die Innenwand des Ringgebäudes wurde der Achteckform angepaßt, so daß die Sichten zwischen den Eckpfeilern in etwa 1 m Abstand parallel zur Wand verlaufen.

3. Winkelmessungen im Achteck

Die erste Vermarkung der Pfeiler wies eine Punktgenauigkeit von ± 3 mm auf. Durch vollständige Richtungsmessungen im Achteck ließen sich die weiteren Verschiebungsbeträge für die Pfeilerplatten ohne Streckenmessungen ermitteln. Nach einer Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen konnten sie mit Hilfe der verbesserten Richtungen als Abweichungen von einem Achteck in vermittelnder Lage mit festem Zentrum berechnet werden, dessen Speichenlänge ja nicht unbedingt genau 48 m sein mußte. Nach mehrmaligen Verschiebungen waren alle unregelmäßigen Abweichungen dann am 5.2.62 kleiner als 0,4 mm.

Beobachtet wurde mit DKM 3 Theodoliten der Firma Kern, die als Sonderanfertigung für DESY mit zentrischen DKM 2 Fernrohren versehen sind. Wegen der sehr unterschiedlichen Zielweiten bei der Magnetvermessung legte man dabei besonderen Wert auf eine sehr gute Führung der Fokussierlinse. Bei der Auslieferung der Instrumente

wurden ihre Kollimationsfehler bei verschiedenen Entfernungen gründlich untersucht. Dabei zeigte sich, daß die Reproduzierbarkeit der Ziellinie allen Anforderungen genügt.

Zur Signalisierung der Ziele dienten die nach Angaben von Prof. Marzahn durch die Firma Kern angefertigten Zielmarken. Es sind dies kegelige Spitzen mit 30° Öffnungswinkel, die von oben so beleuchtet werden, daß sie im Fernrohr als flächenhafte Dreiecke erscheinen. Durch Drehen um 200° können sie jederzeit auf Exzentrizität geprüft und wenn notwendig mit Justierschrauben berichtigt werden. Eine Überprüfung mehrerer Zielmarken ergab jedoch einen quadratischen Mittelwert für die Exzentrizität von nur $\pm 6\mu$, wobei der größte Wert 13μ betrug. Dabei sind in diesen Ergebnissen bereits Anteile aus der Zwangszentrierung enthalten, wodurch deren Qualität bestätigt wird.

Die zur Vermarkung des Achtecks ausgeführten Winkelmessungen geben Aufschluß über die erreichbaren Genauigkeiten. In der Tabelle 1 sind die mittleren Fehler einer in einem Satz beobachteten Richtung m_r , einer aus mehreren Sätzen gemittelten Richtung μ_r und der aus der Ausgleichung erhaltene mittlere Gewichtseinheitsfehler m_0 gegenübergestellt. Dabei stellt m_r jeweils das quadratische Gesamtmittel aus neun Stationsausgleichungen dar. Eine Betrachtung der vergleichbaren Werte μ_r und m_0 zeigt, daß m_0 fast immer erheblich größer ist. Testet man die mittleren Fehler mit der F-Verteilung, so stellt man fest, daß der Wert $F = \frac{m_0^2}{\mu_r^2}$ in 5 Fällen sogar den theoretischen Wert für die Wahrschein-

lichkeit $P = 0,001$ bei den entsprechenden Freiheitsgraden übersteigt. In einem Fall liegt er außerhalb des Sicherungspunktes für $P = 0,01$. Die Unterschiede in den mittleren Fehlern sind also statistisch gesichert, d.h. es müssen systematische Fehlereinflüsse vorliegen. Zwei Arten von solchen systematischen Fehlern sind zu unterscheiden

1.) Fehlereinflüsse, die sich von einer Messung zur nächsten in ihrer Größe ändern z.B. Zentrierfehler oder unregelmäßige Refraktionseinflüsse, die aber doch so lange anhalten, daß sie noch nicht in den mittleren Fehlern μ_r enthalten sind.

2.) Fehlereinflüsse, die über längere Zeit konstant sind, z.B. systematische Refraktionsanomalien.

Unregelmäßige Refraktionseinflüsse spielen sicher bei den Messungen seit dem 25.9.61 eine Rolle. Dafür spricht, daß während dieser Zeit systematische Fehler auftreten, aber genau so oft ein Unterschied zwischen μ_r und m_0 statistisch nicht nachgewiesen werden kann. Außerdem wechseln systematisch verfälschte und nicht verfälschte Meßreihen einander in gleichmäßigem Turnus ab.

Dagegen sind die 3 ersten Meßreihen ohne Zweifel auch systematischen Refraktionseinflüssen unterworfen. Allerdings waren die Meßverhältnisse zu dieser Zeit recht ungünstig, da zwei Radialkanäle und eine Halle noch nicht existierten und die Außenluft dort ungehindert Zutritt zu den Gebäuden hatte. Die Abhängigkeit von der Witterung zeigt den Vergleich der Fehlerwerte zwischen den beiden ersten Messungen und der dritten. Bei den Messungen 1 und 2 herrschte warmes, sonniges Wetter, bei der Messung 3 da-

gegen war es naß und kühl. Die mittleren Fehler bei der Messung 3 sind bedeutend kleiner, trotzdem liegt der Wert F noch weit über dem Sicherungspunkt für $P = 0,001$. Der Gewichtseinheitsfehler m_0 enthält also trotz der besseren Meßbedingungen noch einen deutlichen systematischen Fehleranteil, der nur als Folge der fehlenden Gebäudeteile erklärt werden kann. Die Ergebnisse der folgenden Meßreihen, die ja nach Fertigstellung der Radialkanäle durchgeführt wurden, bestätigen diese Annahme. Wären hier noch systematische Refraktionseinflüsse vorhanden, dann müßte in jedem Falle nachgewiesen werden können, daß $m_0 > \mu_r$.

Schon nach den ersten Messungen wurde deutlich, daß es angesichts der auftretenden systematischen Fehlereinflüsse wenig Sinn hätte, die Beobachtungsgenauigkeit durch größere Satz zahlen zu verbessern. Anhand der kurz aufeinanderfolgenden Messungen in 5 Sätzen im Juni 61 läßt sich dies sehr gut zeigen. Beide Messungen weisen denselben Gewichtseinheitsfehler $m_0 = \pm 2,2^{cc}$ auf. Faßt man sie zusammen, so daß man für jeden Punkt eine Messung in 10 Sätzen erhält, und gleicht das Achteck wieder aus, so ergibt sich für m_0 erneut $\pm 2,2^{cc}$. Der entsprechende Wert für μ_r dagegen beträgt $\pm 0,7^{cc}$. Man erreicht also nicht die geringste Verbesserung des Gewichtseinheitsfehlers, der allein ja ein verbindliches Maß für die Genauigkeit darstellt. Führt man die Ausgleichung für Messungen aus einem bzw. mehreren Sätzen durch, so erhält man

bei 1 gemess.Satz auf jedem Punkt	$m_0 = \pm 2,4^{cc}$	$\mu_1 = \pm 2,3^{cc}$
bei 2 gemess.Sätzen " " "	$m_0 = \pm 2,1^{cc}$	$\mu_2 = \pm 1,6^{cc}$
bei 3 gemess.Sätzen " " "	$m_0 = \pm 1,7^{cc}$	$\mu_3 = \pm 1,3^{cc}$
bei 4 gemess.Sätzen " " "	$m_0 = \pm 2,2^{cc}$	$\mu_4 = \pm 1,2^{cc}$

Demnach lohnt es sich nicht, mehr als 3 Sätze auf einem Standpunkt zu messen. Das wurde in der Folgezeit berücksichtigt.

Seit der Fertigstellung der Radialkanäle erreichten wir als quadratischen Gesamtmittelwert einen mittleren Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung von

$$\bar{m}_r = \pm 1,79^{cc}$$

=====

und für den Gewichtseinheitsfehler

$$\bar{m}_0 = \pm 1,70^{cc}$$

=====

Beide Fehler bewegen sich in derselben Größenordnung. Dadurch bietet sich eine Möglichkeit, um m_0 auf Grund der Stationsausgleichungen einigermaßen abzuschätzen.

Sämtliche in Tabelle 1 aufgeführten Richtungsmessungen im Achteck wurden noch vor Inbetriebnahme der Klimaanlage durchgeführt. Die Halle 2 wurde erst im Frühjahr 1962 fertiggestellt, die Zuluftkanalöffnungen in den Mitten der Sektoren waren zum Teil noch nicht geschlossen. Auch die innere Experimentierfläche im Sektor 5 war noch offen. Aus diesen Umständen erklärt sich sicher das Auftreten der kurzfristigen systematischen Fehlereinflüsse seit Vollendung der Radialkanäle. Es ist möglich, daß nach Vollendung des Gebäudes und seiner Klimatisierung eine Verminderung dieser Einflüsse und damit eine Verbesserung des Gewichtseinheitsfehlers zu verzeichnen war. Ganz auszuschließen werden sie aber nie sein, da mit Temperaturanomalien im Ringgebäude immer zu rechnen ist.

Legt man den mehrfach erhaltenen mittleren Gewichtseinheitsfehler $m_0 = \pm 2,2^{cc}$ als Grenzwert des mittleren Fehlers zu-

grunde, so bekommen die tangentialen und radialen Abweichungen der Pfeilerplatten von einem Achteck in vermittelnder Lage streng auf Grund der Funktionsgewichte die mittleren Fehler

$$m_{\Delta t} = \pm 0,058 \cdot m_0 = \pm 0,13 \text{ mm}; m_{\Delta r} = \pm 0,051 m_0 = \pm 0,11 \text{ mm}$$

Die verlangte Genauigkeit läßt sich also schon mit der Winkelmessung fast erreichen.

4.) Streckenmessungen im Achteck

Die Streckenmessungen im Achteck erfolgen mit Invarbändern bei einem Zug von 10 kg. Die nötigen Spannvorrichtungen werden direkt an den Pfeilern befestigt. Beim Einhängen der Gewichte wurden Lageänderungen der Vermarkungen von $(3 \pm 1) \mu$ festgestellt, die gegenüber den Meßfehlern vernachlässigt werden können. Die Teilungen der Bänder werden an Strichmikroskopen der Firma Hensoldt abgelesen, die auf Zielmarkenunterteilen von Kern montiert sind. Dadurch wird die benötigte hohe Zentrierengenauigkeit gewährleistet.

Bei allen Bandmessungen wird grundsätzlich in 2 Mikroskoplagen gemessen. Kleine Exzentrizitäten und der Einfluß der Aufstellungsfehler werden dadurch ausgeschaltet. In jeder Lage erfolgen an den Bandenden je 4 Ablesungen auf Zuruf. Dazwischen wird das Band um geringe Beträge verschoben, jedoch immer derselbe, markierte Teilstrich benutzt.

Für die Ablesegenauigkeit spielt es kaum eine Rolle, ob es sich bei der gemessenen Strecke um eine Speiche S oder das Teilstück einer Seite handelt. Dies geht aus einigen Messungen hervor, die in Tabelle 2 dargestellt sind. Im quadratischen Mittel ergibt sich daraus für den mittleren Fehler

einer Differenz zweier zusammengehöriger Mikroskopablesungen an den Bandenden

$$\bar{m}' = \pm 1,2 \frac{\text{mm}}{100}$$

und damit für den Fehler einer in 2 Lagen gemessenen Strecke

$$\bar{m}'_{S'} \text{ bzw. } \bar{m}'_{\Delta} = \pm 0,4 \frac{\text{mm}}{100}$$

Die Einzelwerte weichen davon nur unwesentlich ab!

Sie sind allerdings nicht sehr repräsentativ, da die Streckenmeßgenauigkeit ja nicht nur von den Ablesefehlern abhängt.

Zur Messung der Achteckspeichen sind 8 Bänder mit 48 m Länge vorhanden. Gemessen wird normalerweise nur mit einem Band, die anderen dienen zur Maßstabsüberwachung zwischen den Eichungen auf dem Interferenzkomparator des DGFJ in München. Für den Betrieb der Maschine sind kleine Maßstabsänderungen der Bänder zwar nicht von Bedeutung, für die Bauüberwachung ist es aber doch von Nutzen, solche Änderungen rechtzeitig festzustellen. Die Eichungen beim DGFJ werden in regelmäßigen Abständen durchgeführt und sollen Aufschluß über das langfristige Verhalten der Bänder geben.

Die linearen Ausdehnungskoeffizienten liegen zwischen 17 und 21 μ für die Gesamtlänge bei einer Temperaturänderung von 1° C. Erfasst man bei der Messung die Bandtemperatur auf $\pm 0,5^{\circ}$, so sind die thermischen Längenfehler nicht größer als $\pm 0,01$ mm. Zwar muß die Klimaanlage vor jeder Messung abgeschaltet werden, da wegen der Luftführung durch die Radialkanäle die Bänder nicht zur Ruhe kommen würden und somit eine Ablesung unmöglich wäre. Die Thermometerablesungen an den Pfeilern und in der Mitte der Meßstrecke bewegen sich aber fast immer innerhalb eines Grades. Da die Bänder

zwischen den Messungen im klimatisierten Ringgebäude aufbewahrt werden, kann vorausgesetzt werden, daß Band- und Lufttemperatur übereinstimmen.

Die 48 m Bänder werden in der Mitte unterstützt, so daß der Durchhang auf ein erträgliches Maß reduziert wird. Die Ablesestellen und die Oberkante der Rolle in der Mitte der Meßstrecke liegen auf ± 5 mm auf gleicher Höhe, wodurch Streckenreduktionen überflüssig werden.

Die einzelnen Speichen werden kurz hintereinander gemessen, wobei es nicht erforderlich ist das Band beim Wechsel aufzurollen. Die erste Speiche wird am Schluß ein zweitesmal bestimmt, um eine eventuelle Längenänderung des Bandes während der Messung aufzudecken und außerdem die tatsächlich erreichte Genauigkeit der Streckenmessung zu zeigen. Die Ergebnisse der bisherigen Messungen sind der Tabelle 3 zu entnehmen. Eine Zusammenfassung der dort dargestellten Differenzen zwischen 2 kurz aufeinanderfolgenden Messungen (Abstand ~ 2 Std.) ergibt für den mittleren Fehler einer Speichenmessung

$$\bar{m}_S = \pm 2,3 \frac{\text{mm}}{100}$$

Anhand der im Laufe der Zeit durchgeführten Bandvergleiche konnte dieser Wert überprüft werden. Dabei wurde dieselbe Strecke kurz hintereinander mit verschiedenen Bändern gemessen und deren Länge mit Hilfe der linearen Eichkorrekturen aus den Eichungen des DGFJ bestimmt. Aus den Abweichungen der einzelnen Messungen von ihrem Mittel erhielt man für den mittleren Fehler einer Messung mit einem beliebigen Band.

$$\bar{m}_S = \pm 2,6 \frac{\text{mm}}{100} \quad \underline{\text{(siehe Tabelle 4)}}$$

Dieser Wert stimmt mit dem aus Doppelmessungen mit demselben

Band ausgezeichnet überein, obwohl er auch den Einfluß der Eichfehler enthält. Es ist also in keiner Weise übertrieben, wenn man als mittleren Fehler einer Speichenmessung angibt

$$\bar{m}_S = \pm 0,03 \text{ mm}$$

=====

Die Bestimmung der Seitenlängen des Achtecks erfolgt durch Messung der 3 Teilstrecken mit Invarbändern von 12,25 m Länge. Die dabei erzielten Genauigkeiten sind kaum geringer, als bei der Speichenmessung. Das geht aus der Gegenüberstellung einiger kurz hintereinander gemessenen Teilstrecken in Tabelle 5 hervor. Die Unterschiede in den Werten [dd] sind nicht signifikant (F-Verteilung), so daß man sie ohne weiteres zusammenfassen kann und für den mittleren Fehler einer Messung Δ erhält

$$\bar{m}_\Delta = \pm 1,4 \frac{\text{mm}}{100},$$

woraus sich der mittlere Fehler einer einmal gemessenen Seite nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu

$$\bar{m}_S = \bar{m}_\Delta \cdot \sqrt{3} = \pm 2,4 \frac{\text{mm}}{100}$$

errechnet. Betrachtet man die beiden in einwöchigem Abstand durchgeführten Meßreihen in Tabelle 6 und nimmt man an, daß sich die einzelnen Seiten während dieser Zeit in sich verschieden geändert haben, so kommt man zu den Differenzen δ zwischen 2 Messungen. Die Unterschiede in den Werten [dd] sind wiederum nicht signifikant, der mittlere Fehler einer Messung wird deshalb

$$\bar{m}_\Delta = \pm 1,7 \frac{\text{mm}}{100}$$

und der Fehler einer einmal gemessenen Seite

$$\bar{m}_S = \pm 2,9 \frac{\text{mm}}{100} .$$

Man erhält also eine gute Übereinstimmung mit dem Wert aus unmittelbar aufeinanderfolgenden Messungen und kann demnach für eine aus 3 Teilstücken zusammengesetzte Achteckseite einen mittleren Fehler von ebenfalls

$$\bar{m}_S = \pm 0,03 \text{ mm,}$$

=====

wie bei den Speichen, veranschlagen. Der mittlere Fehler einer einmal gemessenen Teilstrecke wird

$$\bar{m}_\Delta = \pm 0,02 \text{ mm}$$

=====

sicher nicht überschreiten.

Die für die Seitenmessung verwendeten Bänder brauchen nicht geeicht zu werden. Bei der Messung aller Speichen und Seiten des Achtecks erhält man eine Überbestimmung, die es ermöglicht, die Länge der 12,25 m-Bänder im Maßstab der 48 m-Bänder zu bestimmen. Die Maßstabskorrektion errechnet sich aus

$$\Delta l = l - \frac{1}{3} s_0 = 0,25512 \cdot \Delta S_m - 0,04166 \cdot \sum \Delta$$

wenn l = Länge des 12,25 m-Bandes zwischen den markierten Teilstrichen

s_0 = Ausgangsseite des regelmäßigen Achtecks = 36.727659 m

ΔS_m = Arithmetisches Mittel der Abweichungen der gemessenen Speichenlängen vom Ausgangswert $S_0 = 47.987$ m

Δ = gemessener Längenunterschied zwischen Invarband und **Teilstrecke**

Die Abweichungen der Teilstrecken von der Ausgangslänge $\frac{1}{3} s_0$ betragen dann $\Delta a = \Delta + \Delta l$. Mit diesen Werten und den Abweichungen der Speichenlängen vom Ausgangswert S_0 lassen sich die Winkelabweichungen $\Delta \gamma$ der Zentriwinkel vom Sollwert 50° nach Differentialformeln ableiten. Unter Verwendung der mittleren Fehler $m_S = \pm 0,03$ mm und $m_\Delta = \pm 0,02$ mm erhalten

wir dabei nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz als mittleren Fehler der Winkelabweichungen

$$m_{\Delta\gamma} = \pm 0,51^{\text{cc}}$$

und als mittleren Fehler der tangentialen Abweichung eines Pfeilers vom regelmäßigen Achteck

$$m_{\Delta t} = \pm 0,034 \text{ mm.}$$

Das heißt also, daß die Abweichungen von einem Achteck in vermittelnder Lage mit Hilfe der Streckenmessung sowohl in tangentialer als radialer Richtung mit einer Genauigkeit bestimmt werden können, die sehr viel höher liegt, als bei der Winkelmessung. Setzt man den aus Winkelmessungen im Achteck erhaltenen Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung von $\bar{m}_r = 1,79^{\text{cc}}$ voraus, so müßte man $n = \left(\frac{1,79 \cdot \sqrt{2}}{0,51} \right)^2 = 25$ Sätze messen, um an diese Beobachtungsgenauigkeit heranzukommen. Daß ein derartiger Aufwand vollkommen sinnlos ist, weil immer mit Refraktionsstörungen gerechnet werden muß, die länger dauern, als die Beobachtung, wurde bei der Besprechung der Winkelmessungen bereits erläutert. Hinzukommt, daß für eine komplette Streckenmessung nicht viel mehr Zeit benötigt wird, als für eine vollständige Richtungsmessung in nur 3 Sätzen.

In Anbetracht dessen verzichten wir auf eine gemeinsame Ausgleichung von Strecken- und Winkelmessungen und verwenden zur Bestimmung der Pfeilerpositionen ausschließlich Streckenmessungen.

5.) Lagemessungen für die Nebenpfeiler

Die Abweichungen der Nebenpfeiler von ihrer Soll-Lage können in Richtung der Achteckseiten in einfacher Weise aus den Streckenmessungen mit dem 12,25 m - Band ermittelt werden.

Zur Bestimmung der Querabweichungen dienen Winkelmessungen auf den Nebenpfeilern zu den benachbarten Hauptpfeilern. In beiden Fällen müssen bei der Berechnung die Verschiebungsbeträge der Hauptpfeiler in Bezug auf das Soll-Achteck berücksichtigt werden.

Die bei den Winkelmessungen erhaltenen mittleren Fehler liegen in der Regel unter denen bei den vollständigen Richtungsmessungen im Achteck. Im quadratischen Mittel ergab sich für den mittleren Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung

$$\bar{m}_r = \pm 1,50^{\text{cc}} \quad (\text{siehe Tabelle 7})$$

gegenüber $\bar{m}_r = 1,79^{\text{cc}}$ bei der Achteckmessung. Die Erklärung für diese Genauigkeitssteigerung ist sicher darin zu suchen, daß sämtliche Messungen auf den Nebenpfeilern schon zu einer Zeit erfolgten, als das Eindringen von Außenluft in den Ring nicht mehr stattfinden konnte. Es ist allerdings erstaunlich, daß die Fehler sich auch nach Inbetriebnahme der Klimaanlage im November 62 kaum verschlechterten. Das spricht dafür, daß die Klimaanlage auf die horizontale Temperaturschichtung der Luft zwischen den Pfeilern während der Messung kaum einen Einfluß ausübt. Deshalb ist nicht auszuschließen, daß beim Übergang der Visur aus einer wandnahen in die Zone vor den Radialkanälen noch verschiedene Temperaturschichten durchlaufen werden, die eine systematische Verfälschung der Beobachtung zur Folge haben können, ohne daß sie in den Meßfehlern zu Tage tritt.

6.) Magnetvermessung.

Von den Hauptvermessungspfeilern ausgehend können die Magnete eingemessen werden. Sie erhielten dafür je 2 Vermessungsmarken, die den Pfeilerplatten entsprechen und genau über dem Sollkreis am Ende der Magnete eingerichtet werden. Die Magnete selbst wurden gleichmäßig über den Umfang verteilt so auf dem Betonringträger aufgestellt, daß in der Verlängerung der Achteckspeichen über den Eckpfeiler hinaus jeweils eine linke Magnetmarke, vom Zentrum aus gesehen, liegt.

6.1) Winkelmessung auf dem Zentrum

Die tangentialen Abweichungen dieser Marken bei den Pfeilern werden durch Winkelmessung vom Zentrum aus bestimmt. Dabei wird der Betrieb der Klimaanlage nicht unterbrochen. Durch die starke Luftbewegung in den Kanälen erhält man im Fernrohr ein sehr unruhiges Bild der Zielpunkte. Die mittleren Fehler aus der Stationsausgleichung werden dadurch sichtlich verschlechtert, die Einflüsse systematischer Fehler in den Kanälen aber weitgehend erfaßt. Mit gewissen Refraktionsstörungen ist natürlich trotz Klimaanlage zu rechnen. Man denke dabei nur an Temperaturanomalien, die dadurch zustande kommen, daß in einem Achtecksektor für kurze Zeit gekühlt, im benachbarten aber geheizt wird. Die beiden unterschiedlichen Temperaturen durchdringen sich vor und in der Mündung des Radialkanals beim Hauptpfeiler, in einer Zone also, in der der Zug der Rücklüfter sehr gering ist und ein gewisser Temperaturstau herrscht (Die Rückluft aus dem Kellergeschoß wird in etwa 10 m Entfernung vom Pfeiler in den Radialkanal geblasen und vom Zentrum her angesaugt, die Lüfter im Ringgebäude wirken in der entgegengesetzten

Richtung und transportieren die Zuluft an den Magneten vorbei in den Keller). Die Folge ist eine systematische Verbiegung des Zielstrahls, die auch durch die starke Luftbewegung im übrigen Kanal nicht wieder wettgemacht wird und im Richtungsmittel enthalten ist. Man kann aber damit rechnen, daß diese Verfälschung sich innerhalb der Grenzen bewegt, die durch den erhöhten mittleren Fehler gegeben sind. Leider war es uns bisher nicht möglich, die systematischen Fehlereinflüsse während des Betriebs der Klimaanlage durch vollständige Richtungsmessungen im Achteck zu untersuchen. Es ist aber auf keinem Fall anzunehmen, daß sie größer sind, als bei den Messungen der Jahre 61/62 (Tabelle 1). Dort bewegte sich der mittlere Gewichtseinheitsfehler in derselben Größenordnung, wie der mittlere Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung. Setzen wir das auch für unsere jetzigen Messungen vom Zentrum zu den Magneten (zum Teil auch zu den Hauptpfeilern) voraus, dann gibt uns der erhaltene quadratische Mittelwert aus Messungen seit August 63

$$\bar{m}_r = \pm 2,37^{cc} \quad (\text{Tabelle 8})$$

eine gute Möglichkeit, die erreichten Genauigkeiten abzuschätzen. Zwar weichen die aus den Stationsausgleichungen erhaltenen Einzelwerte zum Teil erheblich davon ab, doch sind diese Abweichungen sicher nicht eine Folge von anhaltenden, sondern von sehr kurzfristigen Refraktionseinflüssen. Es ist möglich, daß durch die Notausstiege kalte oder wärmere Luft in die Kanäle eindringt. Die entstehenden Temperaturanomalien werden aber durch den starken Zug der Lüfter an diesen Stellen schnellstens ausgeglichen, so daß bei

mehreren, zeitlich etwas auseinanderliegenden Zielungen zwar unterschiedliche Eindrücke entstehen können, die arithmetischen Mittel aber weitgehend frei von solchen Einflüssen sind. Gewisse Resteinflüsse werden natürlich auch hier bleiben, sie sind aber in dem mittleren Fehler \bar{m}_r mit Sicherheit enthalten. Dieser Fehler ist größer, als alle in den Jahren 1961/62 aus den Achteckausgleichungen erhaltenen Gewichtseinheitsfehler, wo doch die Beobachtungsbedingungen sehr viel ungünstiger waren. Es ist kaum anzunehmen, daß der Gewichtseinheitsfehler diesen Wert erreicht.

Wir können demnach den mittleren Richtungsfehler \bar{m}_r als Grenzwert der auftretenden Fehler betrachten. Ihm entspricht in einer Entfernung von 50,41 m vom Zentrum bei den Magnetmarken eine tangentielle Unsicherheit

$$m_{\Delta t} = 7,919 \bar{m}_r = \pm 18,8 \frac{\text{mm}}{100}$$

6.2) Strecken- und Winkelmessungen zur Bestimmung der radialen Abweichungen der Magnete.

Die Abstände der Magnetmarken in Speichenverlängerung vom Hauptpfeiler können mit einem Stahlband von 2,42 m Länge gemessen werden, das an seinen Enden mit Millimeterteilung versehen ist und mit einer Federwaage von Hand auf 3 kg Zug gespannt wird. Die Ablesung erfolgt mit bloßem Auge an Strichmarken, die in die zentrische Bohrung der Vermessungsplatten eingesetzt werden. Die Länge des Bandes wurde ausgehend von der Teilstrecke einer Achteckseite über genaue Winkelmessungen auf $\pm 0,1$ mm bestimmt. Diese Genauigkeit wäre allerdings nicht erforderlich, da Maßstabsfehler nur eine systematische Verfälschung des Sollkreis-Radius be-

bewirken, also für die Justierung der Maschine keine Rolle spielen, solange es sich nicht um größere Beträge handelt.

Bei der Messung erfolgen jeweils 5 Ablesungen an beiden Enden, wobei auf 0,1 mm geschätzt wird. Der mittlere Fehler einer Differenz zweier zusammengehöriger Ablesungen ergab sich aus den Abweichungen vom Mittel unter Verwendung aller bisherigen Messungen zu

$$\bar{m}'_s = \pm 0,97 \frac{\text{mm}}{10};$$

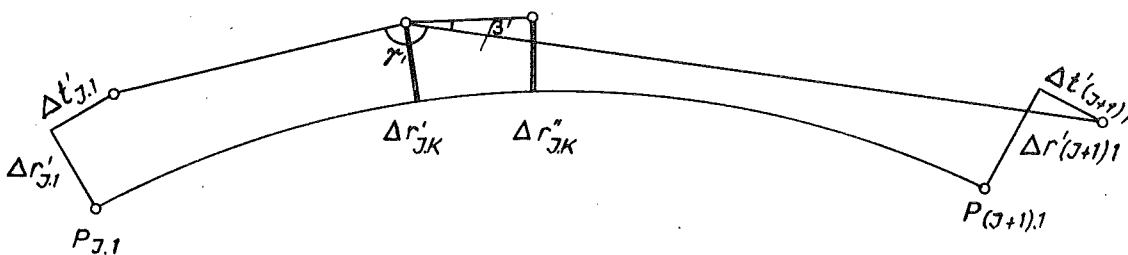
Der mittlere Fehler eines Mittels aus 5 Differenzen betrug

$$\bar{\mu}'_{s(5)} = \pm 0,43 \frac{\text{mm}}{10} \quad (\text{Tabelle 9})$$

Die erreichten Ablesegenauigkeiten reichen also zur Bestimmung der radialen Pfeilerabweichungen aus.

Während nun die übrigen Verschiebungsbeträge ausgehend von den Marken bei den Pfeilern in tangentialer Richtung durch Streckenmessungen zwischen den linken Marken benachbarter Magnete ermittelt werden, lassen sie sich in radialer Richtung aus Winkelmessungen auf den Magnetmarken errechnen. Für die tangentialen Messungen wird ein Band ähnlich dem für die radialen Abstände benutzt. Es braucht nicht geeicht zu werden, da es sich um eine reine Interpolationsmessung zwischen den Marken bei den Hauptpfeilern handelt und die Magnete auf dem Ring gleichmäßig verteilt sind. Die angelegte Spannung beträgt 5 kg, die Ablesegenauigkeit bewegt sich in derselben Größenordnung, wie bei der Messung Pfeiler-Magnetmarke.

Zur Bestimmung der radialen Abweichungen werden auf den linken Magnetmarken die Richtungen zu den Punkten in Speichenverlängerung und zu den rechten Marken der betreffenden Magnete gemessen



Aus den Abweichungen der gemessenen von den Sollwinkeln $\Delta \gamma_{JK} = 175^\circ - \gamma'_{JK}$ und $\Delta \beta_{JK} = \beta_s - \beta'_{JK}$ und den Verschiebungsbeträgen $\Delta r'$ und $\Delta t'$ der Marken $P_{J,1}$ und $P_{(J+1),1}$ bei den Hauptpfeilern lassen sich die radialen Verschiebungen $\Delta r'_{JK}$ für die linke und $\Delta r''_{JK}$ für die rechte Marke des Magneten J.K berechnen. Es gilt, wenn K die Werte von 2 bis 6 durchläuft und J die Nummer des Achtecksektors darstellt

$$\Delta r'_{JK} = A_K \cdot \Delta \gamma_{JK} + B_K \cdot \Delta r'_{J,1} + C_K \cdot \Delta t'_{J,1} + D_K \cdot \Delta r'_{(J+1),1} + E_K \cdot \Delta t'_{(J+1),1}$$

$$\Delta r''_{JK} = a_K \cdot \Delta \beta_{JK} + b_K \cdot \Delta \gamma_{JK} + c_K \cdot \Delta r'_{J,1} + d_K \cdot \Delta t'_{J,1} + e_K \cdot \Delta r'_{(J+1),1} + f_K \cdot \Delta t'_{(J+1),1}$$

Wegen der Symmetrie in der Magnetanordnung sind die Faktoren A bis E und a bis f in den verschiedenen Sektoren für entsprechende Magnete gleich. In Tabelle 10 sind sie zusammengestellt.

Bei der Magnetvermessung kommt es darauf an, den benötigten Zeitaufwand auf ein Minimum zu begrenzen. Deshalb werden die Winkelmessungen auf den Magneten nur in 2 Halbsätzen durchgeführt, nachdem eine erste Beobachtung in 2 Sätzen am 9.8.63 gezeigt hatte, daß die Genauigkeiten ausreichen. Da die Sichten in der Mitte des Ringgebäudes verlaufen, sind systematische Fehlereinflüsse durch seitliche Refraktion kaum zu befürchten, zumal Standpunkt und Zielpunkt im Strahlbereich derselben Lüfter liegen, so daß selbst bei extremer Zuluft für schnellen Temperatenausgleich gesorgt ist. Dafür spricht auch, daß meistens unruhige Bilder anzu- zielen sind, wenn es sich um größere Zielweiten handelt.

Der mittlere Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung wurde mit Ausnahme der Messung vom 9.8.63 aus Abweichungen der Halbsätze von ihrem Mittel berechnet. In Tabelle 11 sind die pro Standpunkt erhaltenen Fehlerquadratsummen zusammengestellt und die mittleren Fehler für die einzelnen Magnetvermessungen als quadratische Mittel entsprechender Marken der 8 Sektoren angegeben. Die drei ersten Beobachtungen erscheinen am Schluß der Tabelle, da sie erst nachträglich in die Rechnung einbezogen wurden.

Die mittleren Fehler bewegen sich fast ausnahmslos in derselben Größenordnung. Nur bei den 2 letzten Messungen sind sie deutlich größer, als bei den vorhergegangenen. Das kommt allerdings nicht unerwartet, da diese Beobachtungen fast ausschließlich von einem neu hinzugekommenen Vermessungsingenieur ausgeführt wurden, der mit den Verhältnissen erst vertraut werden mußte. Man sieht daraus, daß Ziel- und

Ablesefehler bei diesen Winkelmessungen die größte Rolle spielen und kann verstehen, daß auch bei einem geübten Beobachter auf manchen Standpunkten sehr große Fehlerquadratsummen zustande kommen. Die maximalen Werte vor dem Beobachterwechsel sind bei der Messung vom 17.12.63 zu finden und betragen $[vv] = 185$ bei 3 Freiheitsgraden und $[vv] = 109$ bei 2 Freiheitsgraden. In denselben Spalten sind aber auch Minimalwerte von der Größe $[vv] = 1$ zu verzeichnen, was am besten zeigt, wie wenig solch ein Einzelwert über die Beobachtungsgenauigkeit aussagen kann.

Man könnte annehmen, daß die Genauigkeit sehr stark durch die unterschiedlichen Zielweiten auf den einzelnen Ständen beeinflußt wird. Die Ergebnisse der Fehlerrechnung widerlegen es. Faßt man sämtliche Beobachtungen zusammen und berechnet daraus die mittleren Fehler für die 5 Vermessungsmarken im Sektor, auf denen eine Winkelmessung durchgeführt wird, so erhält man fast genau dieselben Werte. Der kleinste Wert beträgt $2,27^{\text{cc}}$, der größte $2,51^{\text{cc}}$. Eine bevorzugte Stellung für irgendeine der Marken läßt sich also nicht nachweisen. Dagegen wird deutlich, daß durch die Zusammenfassung aller Fehlerquadratsummen und der betreffenden Freiheitsgrade ein sehr zuverlässiges Genauigkeitsmaß zu gewinnen ist.

Wir erhalten somit als mittleren Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung

$$\overline{m}_r = \pm 2,39^{\text{cc}}$$

=====

und für den mittleren Fehler eines in einem Satz gemessenen Winkels

$$\bar{m}_W = \pm 3.39^{cc}$$

=====

Würde man auf die beiden letzten Magnetvermessungen verzichten, so erhielten wir für \bar{m}_r sogar nur $\pm 2,03^{cc}$. Berücksichtigt man, daß dieser Fehler für sämtliche auf einer Marke gemessenen Richtungen gilt, also auch für die auf jedem Standpunkt beobachtete Visur von nur 3,65 m zur rechten Magnetmarke, so wird offenkundig, daß die erreichte Genauigkeit für unsere Zwecke klar ausreicht.

Zur Durchführung der Winkelmessungen auf den Magneten für eine vollständige Vermessung der Maschine reicht ein Arbeitstag in der Regel nicht aus. Nur wenn gleichzeitig zwei Meßtrupps eingesetzt werden können, ist mit einer Beobachtungsdauer von 7^h zu rechnen. Dies war aber bisher nur ein einziges Mal möglich, da es uns an ausgebildeten Hilfskräften mangelt. Im Augenblick besteht die Vermessungsabteilung bei DESY aus 2 Ingenieuren und einem Gehilfen, die durch die Meß- und Umbauarbeiten voll ausgelastet sind.

Normalerweise müssen die Winkelmessungen an 2 aufeinander folgenden Tagen erledigt werden. Nun sind die Magnete auf einem Betonring aufgestellt, der auf Pendelstützen verschiebbar gelagert ist, um Deformationen durch seitliche Kräfte zu verhindern. Es ist deshalb durchaus möglich, daß der Ring während der Messung seine Position in Bezug auf das Zentrum ändert. Die Gefahr solcher Ringschwankungen wird umso größer, je länger die Messung dauert. Sie sind nur da-

durch festzustellen, daß die Entfernungen von den Hauptpfeilern zu den benachbarten linken Magnetmarken mehrmals gemessen werden. Wir sind dazu übergegangen, sie vor und nach den Winkelmessungen zu bestimmen, so daß wir bei Beobachtungen an 2 Tagen über 4 Streckenmessungen verfügen, die uns ein verlässliches Bild über das Verhalten des Ringes geben. In die Berechnung der radialen Verschiebungen werden dann die arithmetischen Mittel eingeführt und so sämtliche Winkelmessungen auf eine vermittelnde Lage des Ringträgers bezogen.

Die Abweichungen der Einzelmessungen von ihrem Mittel waren am Anfang des Jahres 64 erheblich größer, als in der Folgezeit. Das geht aus Tabelle 12 hervor, in der die mittleren Fehler einer einmaligen Messung $\mu_s(5)$ mit den zugehörigen Freiheitsgraden und Fehlerquadratsummen aufgeführt sind. Daneben sind auch die zwischen der ersten und letzten Messung vergangene Zeit und die mittleren Fehler der arithmetischen Mittel angegeben. Ein Test mit der F-Verteilung ergibt, daß die Genauigkeitssteigerung seit März statistisch gesichert ist. Die Werte F liegen in jedem Fall über dem für die Wahrscheinlichkeit $P = 0,05$. Demnach ist anzunehmen, daß die Schwankungen des Betonringes zwischen den Messungen vom Februar und März nachgelassen haben. Die Ursache dafür konnte nicht eindeutig geklärt werden. Die Vermutung liegt allerdings nahe, daß durch Montagearbeiten, etwa neue Kabelanschlüsse, eine gewisse Versteifung eingetreten ist. Für die weiteren Genauigkeitsbetrachtungen werden deshalb nur die 3 Messungen seit März herangezogen. Durch Zusammen-

fassung erhalten wir als mittleren Fehler einer einmal gemessenen Strecke Pfeiler-Magnetmarke

$$\overline{m_{s(5)}} = \pm 8,3 \frac{\text{mm}}{100}$$

und für den mittleren Fehler des Mittels aus mehreren Messungen

$$\overline{m_s} = \pm 4,3 \frac{\text{mm}}{100}$$

=====

Diese mittleren Fehler enthalten sowohl den Einfluß der verbliebenen Ringschwankungen, als auch der Ablese- und Zentrierfehler bei der Bandmessung.

6.3.) Genauigkeit der radialen Abweichungen

Unter Berücksichtigung des mittleren Fehlers einer Speichenlänge $m_s = \pm 0,03$ mm kann nun auch der mittlere Fehler der radialen Verschiebungen $\Delta r'_{j1}$ der Marken bei den Pfeilern ermittelt werden. Es ist

$$m_{\Delta r'_{j1}} = \sqrt{m_s^2 + m_s^2} = \pm 5.2 \frac{\text{mm}}{100}$$

Die Fehler der radialen Abweichungen der übrigen Magnete lassen sich aus den Bestimmungsgleichungen mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ableiten.

$$m_{\Delta r'_{jK}}^2 = A_K^2 \cdot m_{\Delta \gamma_{jK}}^2 + B_K^2 \cdot m_{\Delta r'_{j1}}^2 + C_K^2 \cdot m_{\Delta t'_{j1}}^2 + D_K^2 \cdot m_{\Delta r'_{(j+1)1}}^2 + E_K^2 \cdot m_{\Delta t'_{(j+1)1}}^2$$

$$m_{\Delta r'_{jK}}^2 = a_K^2 \cdot m_{\Delta \beta_{jK}}^2 + b_K^2 \cdot m_{\Delta \gamma_{jK}}^2 + c_K^2 \cdot m_{\Delta r'_{j1}}^2 + d_K^2 \cdot m_{\Delta t'_{j1}}^2 + e_K^2 \cdot m_{\Delta r'_{(j+1)1}}^2 + f_K^2 \cdot m_{\Delta t'_{(j+1)1}}^2$$

Mit den Beobachtungsfehlern

$$\begin{aligned} m_{\Delta \gamma} &= m_{\Delta \beta} = \pm 3.39 \text{ cc} \\ m_{\Delta r'_{j1}} &= m_{\Delta r'_{(j+1)1}} = \pm 5.2 \frac{\text{mm}}{100} \\ m_{\Delta t'_{j1}} &= m_{\Delta t'_{(j+1)1}} = \pm 18.8 \frac{\text{mm}}{100} \end{aligned}$$

kommen wir zu den Ergebnissen, die in den letzten Zeilen der Tabelle 10 aufgeführt sind. Daraus ist zu entnehmen, daß die radialen Abweichungen der Magnete zwischen den Hauptpfeilern durch die Winkelmessung mit einer Genauigkeit erhalten werden können, die der für die Magnete bei den Pfeilern kaum nachsteht. Der Maximalwert des mittleren Fehlers beträgt sowohl für die linken als auch die rechten Marken

$$m_{\Delta r} = \pm 0.07 \text{ mm}$$

=====

und liegt damit einwandfrei innerhalb der geforderten Grenzen. Die Zweckmäßigkeit des Verfahrens der Magnetvermessung wird dadurch hinlänglich bewiesen.

Richtungsmessungen im Achteck

Mittlerer Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{\sum [vv]}{\sum N}}$$

wobei $[vv]$ aus Richtungsmessungen in n Sätzen auf den einzelnen Pfeilern, N die zugehörigen Freiheitsgrade, $\sum [vv]$ und $\sum N$ = Summe über alle 9 Pfeiler

Datum	$\sum N$	$\sum [vv]$	m_r^{cc}	n	μ_r^{cc}	m_0^{cc}	$F = \frac{m_0^2}{n^2}$	
19. 6. 61	92	459,56	$\pm 2,23$	5	$\pm 1,00$	$\pm 2,20$	4,84	$F_{0,001} = 3,46$
23. 6. 61	92	531,87	$\pm 2,41$	5	$\pm 1,08$	$\pm 2,24$	4,30	
6. 7. 61	46	64,08	$\pm 1,18$	3	$\pm 0,68$	$\pm 1,74$	6,55	
25. 9. 61	46	156,24	$\pm 1,84$	3	$\pm 1,06$	$\pm 2,17$	4,19	$F_{0,05} = 2,09$ $F_{0,01} = 2,82$ $F_{0,001} = 3,89$ Radial- Kanäle zu
2. 11. 61	46	127,89	$\pm 1,66$	3	$\pm 0,96$	$\pm 1,02$	1,13	
16. 1. 62	46	150,77	$\pm 1,81$	3	$\pm 1,05$	$\pm 2,13$	4,12	
23. 1. 62	46	111,05	$\pm 1,55$	3	$\pm 0,90$	$\pm 1,10$	1,49	
30. 1. 62	46	211,01	$\pm 2,14$	3	$\pm 1,23$	$\pm 2,19$	3,17	
5. 2. 62	46	131,82	$\pm 1,69$	3	$\pm 0,98$	$\pm 0,99$	1,02	
ab 25.9.	276	888,78	$\pm 1,79$			$\pm 1,70$		Halle 2 zu

μ_r = mittlerer Fehler einer aus n Sätzen gemittelten Richtung

m_0 = mittlerer Gewichtseinheitsfehler aus der Ausgleichung mit 9 Freiheitsgraden

Quadratisches Gesamtmittel

$$\bar{m}_r = \pm 1,79^{cc}$$

$$\bar{m}_0 = \pm 1,70^{cc}$$

Mittlerer Fehler einer Streckenmessung aus Mikroskopablesungen

m' = mittlerer Fehler einer Differenz aus 2 Ablesungen

m'_S bzw. m'_Δ = mittlerer Fehler einer in 2 Lagen gemessenen Strecke

$m'_S = m'_\Delta \cdot \sqrt{3}$ = mittlerer Fehler einer aus 3 Teilstücken zusammengesetzten Seite

Datum	$\Sigma [vv]$	ΣN	m' [0,01mm]	m'_Δ [0,01mm]	m'_S [0,01mm]	m'_S [0,01mm]	
4. 10. 61	69.32	30	± 1.5	± 0.5		± 0.5	48 m - Band
7. 12. 61	25.56	36	± 0.8	± 0.3	± 0.5		12.25 - Band
12. 12. 61	26.60	36	± 0.9	± 0.3	± 0.5		"
12. 12. 61	27.84	36	± 0.9	± 0.3	± 0.5		"
7. 2. 62	128.16	144	± 0.9	± 0.3	± 0.6		"
8. 2. 62	133.60	54	± 1.6	± 0.6		± 0.6	48 m - Band
6. 4. 64	203.48	150	± 1.2	± 0.4	± 0.7		12.25 - Band
7. 4. 64	160.84	72	± 1.5	± 0.5		± 0.5	48 m - Band
26. 4. 64	65.56	48	± 1.2	± 0.4		± 0.4	"
31. 7. 64	75.60	54	± 1.2	± 0.4		± 0.4	"
	916.56	660					

$$\bar{m}' = \pm 1,2 \frac{\text{mm}}{100}$$

$$\bar{m}'_\Delta = \frac{\bar{m}'}{\sqrt{3}} = \pm 0,4 \frac{\text{mm}}{100}$$

Die Werte $[vv]$ der Tabelle errechnen sich aus Abweichungen der 4 Einzelmessungen einer Lage von ihrem Mittel, die Zahl der Freiheitsgrade $N=3$. Die Summen $\Sigma [vv]$ und ΣN umfassen alle Messungen eines Tages.

Genauigkeit der Speichenmessungen im Achteck

aus Differenzen d zwischen kurz aufeinander folgenden Messungen mit dem gleichen Band.

Datum	I	II	d [0,01mm]	n
4. 10. 61	+ 5.5	+ 3.5	- 2.0	1
8. 2. 62	- 14 51.4	- 14 51.5	- 0.1	2
28. 5. 62	- 13 76.1	- 13 78.3	- 2.2	3
28. 5. 62	- 14 07.8	- 14 05.8	+ 2.0	4
4. 6. 62	- 14 18.3	- 14 11.5	+ 6.8	5
9. 7. 62	- 88.8	- 87.6	+ 1.2	6
20. 8. 62	- 62.2	- 59.5	+ 2.7	7
16. 10. 62	- 84.7	- 91.1	- 6.4	8
4. 4. 63	- 44.7	- 48.2	- 3.5	9
5. 6. 63	+ 4.3	+ 6.1	+ 1.8	10
12. 8. 63	+ 37.6	+ 33.7	- 3.9	11
7. 4. 64	+ 14.4	+ 12.3	- 2.1	12
7. 4. 64	+ 139.2	+ 141.5	+ 2.3	13
7. 4. 64	+ 292.9	+ 297.3	+ 4.4	14
7. 4. 64	+ 110.4	+ 114.4	+ 4.0	15
26. 4. 64	- 20.5	- 18.9	+ 1.6	16
31. 7. 64	- 34.4	- 31.2	+ 0.2	17
	- 5 381.6	- 5 374.8	+ 6.8	

$$[dd] = 187,14$$

Mittlerer Fehler einer einmaligen Speichenmessung

$$\bar{m}_S = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \pm 2,3 \frac{\text{mm}}{100}$$

Genauigkeit der Speichenmessungen im Achteckaus kurz aufeinander folgenden Messungen mit verschiedenen Bändernunter Berücksichtigung linearer Eichkorrekturen

	Bd.		K		v	$[vv]$	$N=n-1$	$m = \sqrt{\frac{\sum [vv]}{\sum N}}$	
4.10.61	1	- 1169	+ 13	- 1156	- 4.2				
	2	- 1171	+ 6	- 1165	+ 4.8				
	3	- 1171	+ 11	- 1160	- 0.2				
	4	- 1175	+ 15	- 1160	- 0.2				
					- 1160.2		40.76	3	$\pm 3,7 \frac{mm}{100}$
22. 2. 62	1	- 1465	+ 16	- 1449	+ 1.8				
	2	- 1457	+ 8	- 1449	+ 1.8				
	3	- 1460	+ 14	- 1446	- 1.2				
	4	- 1463	+ 18	- 1445	- 2.2				
					- 1447.2		12.76	3	
						53.52	6	$\pm 3,0 \frac{mm}{100}$	
28. 5. 62	3	- 1375	0	- 1375	- 1.0				
	4	- 1377	0	- 1377	+ 1.0				
					- 1376.0		2.00	1	
						55.52	7	$\pm 2,8 \frac{mm}{100}$	
25. 2. 63	2	+ 107	+ 9	+ 116	- 0.3				
	3	+ 106	+ 11	+ 117	- 1.3				
	4	+ 90	+ 24	+ 114	+ 1.7				
					+ 115.7		4.67	2	
							60.19	9	$\pm 2,6 \frac{mm}{100}$

Mittlerer Fehler einer Messung

$$\bar{m}_s = \pm 2,6 \frac{mm}{100}$$

Genauigkeit der Seitenmessungen im Achteck auskurz aufeinander folgenden Messungen der Teilstrecken mit demselben Band

Datum	Strecke	Δ_1 [0,01mm]	Δ_2 [0,01mm]	d [0,01mm]	[dd]	n
7. 12.61	7-8 a	- 68,7	- 65,3	+ 3,4	12,24	1
	8a-8 b	+ 133,6	+ 133,8	+ 0,2		2
	8b-8	- 310,3	- 309,5	+ 0,8		3
12. 12.61	8-1 a	+ 116,6	+ 117,5	+ 0,9	4,27	4
	1a-1 b	- 340,2	- 341,3	- 1,1		5
	1b-1	- 134,7	- 133,2	+ 1,5		6
	1-2a	- 16,8	- 19,7	- 2,9		7
	2a-2 b	- 77,0	- 73,4	+ 3,6		8
	2b-2	- 104,0	- 104,8	- 0,8		9
6. 4.64	4-5 a	+ 69,2	+ 69,4	+ 0,4	0,16	10
					$\Sigma [dd]$ = 38,68	

Mittlerer Fehler einer Messung Δ

$$\bar{m}_\Delta = \frac{\sqrt{\Sigma [dd]}}{2n} = \pm 1,4 \frac{\text{mm}}{100}$$

Mittlerer Fehler einer einmal gemessenen Seite

$$\bar{m}_s = \bar{m}_\Delta \cdot \sqrt{3} = \pm 2,4 \frac{\text{mm}}{100}$$

Genauigkeit der Seitenmessung im Achteck aus Messungen
der Teilstrecken in einwöchigem Abstand.

Pfeiler Nr.	Δ_1 [0,01mm]	Δ_2 [0,01mm]	d [0,01mm]	d_m	$\delta =$ $d - d_m$	[$\delta\delta$]	n
8							
1a	- 115.9	- 120.6	- 4.7		- 2.6		1
1b	+ 30.8	+ 29.4	- 1.4	- 2.1	+ 0.7		2
1	- 10.1	- 10.3	- 0.2		+ 1.9	10.86	3
2a	- 56.2	- 58.4	- 2.2		- 1.9		4
2b	+ 65.9	+ 68.0	+ 2.1	- 0.3	+ 2.4		5
2	- 98.8	- 99.5	- 0.7		- 0.4	9.53	6
3a	- 25.1	- 24.9	+ 0.2		+ 3.4		7
3b	- 33.3	- 40.3	- 7.0	- 3.2	- 3.8		8
3	+ 10.3	+ 7.5	- 2.8		+ 0.4	26.16	9
4a	- 31.9	- 37.6	- 5.7		- 2.6		10
4b	- 31.9	- 36.2	- 4.3	- 3.1	- 1.2		11
4	- 64.1	- 63.4	+ 0.7		+ 3.8	22.64	12
5a	+ 26.1	+ 25.2	- 0.9		+ 2.3		13
5b	- 129.1	- 132.8	- 3.7	- 3.2	- 0.5		14
5	+ 96.5	+ 91.4	- 5.1		- 1.9	9.15	15
6a	+ 18.7	+ 11.5	- 7.2		- 0.4		16
6b	- 18.1	- 25.9	- 7.8	- 6.8	- 1.0		17
6	+ 29.1	+ 23.8	- 5.3		+ 1.5	3.41	18
7a	- 127.1	- 127.1	0		+ 2.1		19
7b	+ 51.6	+ 49.1	- 2.5	- 2.1	- 0.4		20
7	- 4.1	- 7.8	- 3.7		- 1.6	7.13	21
8a	- 113.2	- 113.2	0		- 1.1		22
8b	+ 24.0	+ 25.0	+ 1.0	+ 1.1	- 0.1		23
8	- 15.0	- 12.8	+ 2.2		+ 1.1	2.43	24
			- 59.0		+ 0.1	91.31	

Mittlerer Fehler einer Messung Δ

$$\bar{m}_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum [\delta\delta]}{2 \cdot (n-8)}} = \pm 1,7 \frac{\text{mm}}{100}$$

Mittlerer Fehler einer einmal gemessenen Seite

$$\bar{m}_{\Delta} = \pm 2,9 \frac{\text{mm}}{100}$$

Winkelmessung auf den Nebenseitern

Mittlerer Fehler eines in einem Satz gemessenen Winkels

$$m_{\omega} = \pm \sqrt{\frac{\sum [vv]}{N}}$$

wenn $[vv]$ aus Abweichungen der gemessenen Winkel vom Mittel eines Pfeilers, $\sum [vv]$ = Summe über alle 16 Pfeiler und N die zugehörigen Freiheitsgrade.

Datum	$\sum [vv]$	N	m_{ω}^{cc}	m_r^{cc}	$\sum \sum [vv]$	$\sum N$	\bar{m}_{ω}^{cc}
30. 5.62	183	32	± 2.4	± 1.7			
5. 6.62	138	32	± 2.1	± 1.5	321	64	± 2.24
10. 7.62	126	32	± 2.0	± 1.4	447	96	± 2.16
21. 8.62	86	32	± 1.6	± 1.1	533	128	± 2.04
17.10.62	81	32	± 1.6	± 1.1	614	160	± 1.96
5. 4.63	181	32	± 2.4	± 1.7	795	192	± 2.03
6. 6.63	161	32	± 2.2	± 1.6	956	224	± 2.07
6. 4.64	192	32	± 2.4	± 1.7	1148	256	± 2.12

Mittlerer Fehler aus sämtlichen Messungen

$$\bar{m}_{\omega} = \pm 2,12^{cc}$$

Mittlerer Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung

$$\bar{m}_r = \frac{\bar{m}_{\omega}}{\sqrt{2}} = \pm 1,50^{cc}$$

Richtungsmessungen auf dem Zenitrum

Mittlerer Fehler m_r einer in einem Satz gemessenen Richtung

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{N}}, \text{ wobei } [vv] \text{ aus Richtungbeobachtungen in mehreren Sätzen}$$

und $N \rightarrow$ Freiheitsgrade

Mittlerer Fehler μ_r einer aus mehreren Sätzen gemittelten Richtung

$$\mu_r = \frac{m_r}{\sqrt{n}}, \text{ wenn } n = \text{Anzahl der gemessenen Sätze}$$

Datum	[vv]	N	m_r ^{cc}	$\Sigma [vv]$	ΣN	\bar{m}_r ^{cc}	n.N	μ_r ^{cc}
7. 8. 63	38.11	14	± 1.6				42	± 1.0
19. 9. 63	78.84	28	± 1.7	116.95	42	± 1.67	140	± 0.8
8. 11. 63	48.46	14	± 1.9	165.41	56	± 1.72	42	± 1.1
3. 12. 63	190.00	18	± 3.2	355.41	74	± 2.19	54	± 1.9
3. 12. 63	129.00	14	± 3.0	484.41	88	± 2.34	42	± 1.8
19. 12. 63	237.20	28	± 2.9	721.61	116	± 2.49	140	± 1.3
14. 1. 64	143.00	14	± 3.2	864.61	130	± 2.58	42	± 1.8
22. 1. 64	173.00	28	± 2.5	1037.61	158	± 2.56	140	± 1.1
28. 1. 64	119.00	28	± 2.1	1156.61	186	± 2.49	140	± 0.9
16. 2. 64	88.00	28	± 1.8	1244.61	214	± 2.41	140	± 0.8
13. 3. 64	155.00	28	± 2.4	1399.61	242	± 2.41	140	± 1.1
26. 4. 64	165.16	36	± 2.1	1564.77	278	± 2.37	180	± 1.0
29. 7. 64	195.00	36	± 2.3	1759.77	314	± 2.37	180	± 1.0

Mittlerer Fehler aus sämtlichen Messungen

$$\bar{m}_r = \pm 2.37 \text{ cc}$$

Abstandsmessung zwischen Pfeiler und Magnetmarke in SpeichenverlängerungMittlere Fehler aus Messungen mit mehreren Ablesungen

$[v]$ aus Abweichungen der Einzelwerte (Differenzen zweier Bandablesungen) vom jeweiligen Mittel, N = Anzahl der Freiheitsgrade

Datum	$\sum [v]$	$\sum N$	m_s' [0,1mm]	$\mu_{s(5)}'$ [0,1mm]
26. 9. 63	42,40	36	$\pm 1,1$	$\pm 0,49$
7. 11. 63	28,40	32	$\pm 0,9$	$\pm 0,42$
9. 12. 63	31,20	32	$\pm 1,0$	$\pm 0,44$
18. 12. 63	53,20	36	$\pm 1,2$	$\pm 0,54$
21. 1. 64	23,20	32	$\pm 0,8$	$\pm 0,38$
23. 1. 64	24,40	32	$\pm 0,9$	$\pm 0,39$
23. 1. 64	23,20	32	$\pm 0,9$	$\pm 0,38$
27. 1. 64	28,00	32	$\pm 0,9$	$\pm 0,42$
27. 1. 64	30,00	32	$\pm 1,0$	$\pm 0,43$
28. 1. 64	22,40	32	$\pm 0,8$	$\pm 0,37$
28. 1. 64	17,20	32	$\pm 0,7$	$\pm 0,33$
15. 2. 64	33,60	32	$\pm 1,0$	$\pm 0,46$
15. 2. 64	38,80	32	$\pm 1,1$	$\pm 0,49$
16. 2. 64	28,00	32	$\pm 0,9$	$\pm 0,42$
16. 2. 64	22,80	32	$\pm 0,8$	$\pm 0,38$
12. 3. 64	24,80	32	$\pm 0,9$	$\pm 0,39$
12. 3. 64	14,00	32	$\pm 0,7$	$\pm 0,30$
13. 3. 64	35,60	32	$\pm 1,1$	$\pm 0,47$
13. 3. 64	19,60	32	$\pm 0,8$	$\pm 0,35$
25. 4. 64	45,20	36	$\pm 1,1$	$\pm 0,50$
25. 4. 64	59,20	41	$\pm 1,2$	$\pm 0,54$
29. 7. 64	29,60	36	$\pm 0,9$	$\pm 0,41$
29. 7. 64	55,20	36	$\pm 1,2$	$\pm 0,55$
30. 7. 64	32,40	36	$\pm 0,9$	$\pm 0,42$
30. 7. 64	24,80	36	$\pm 0,8$	$\pm 0,37$
	787,20	837	$\pm 0,97$	$\pm 0,43$

Mittlerer Fehler einer Streckenmessung (Fehler einer Differenz zweier Ablesungen)

$$\bar{m}_s' = \pm 0,97 \frac{\text{mm}}{10}$$

Mittlerer Fehler eines Mittels aus 5 Messungen (aus 5 Differenzen)

$$\bar{\mu}_{s(5)}' = \pm 0,43 \frac{\text{mm}}{10}$$

.K	.2	.3	.4	.5	.6
A	0,870	1,398	1,575	1,398	0,870
B	0,838	0,671	0,499	0,330	0,162
C	0,055	0,088	0,099	0,088	0,055
D	0,162	0,330	0,499	0,671	0,838
E	-0,055	-0,088	-0,099	-0,088	-0,055
$m_{\Delta r'_{j,k}}^2$	30,515	43,021	48,901	43,021	30,515
$m_{\Delta r'_{j,k}}$ [0,01mm]	$\pm 5,5$	$\pm 6,6$	$\pm 7,0$	$\pm 6,6$	$\pm 5,5$

$$m_{10} = \pm 3,39^{cc}$$

$$m_{\Delta r'} = \pm 5,2 \frac{mm}{100}$$

$$m_{\Delta t'} = \pm 18,8 \frac{mm}{100}$$

.K	.2	.3	.4	.5	.6
a	0,573	0,573	0,573	0,573	0,573
b	0,776	1,207	1,287	1,012	0,389
c	0,748	0,579	0,408	0,239	0,072
d	0,049	0,076	0,081	0,064	0,025
e	0,251	0,420	0,590	0,760	0,927
f	-0,085	-0,112	-0,117	-0,100	-0,061
$m_{\Delta r''_{j,k}}^2$	30,919	40,817	43,863	37,689	30,408
$m_{\Delta r''_{j,k}}$ [0,01mm]	$\pm 5,6$	$\pm 6,4$	$\pm 6,6$	$\pm 6,1$	$\pm 5,5$

Faktoren der Bestimmungsgleichungen für Δr

Schloß J	Marke J.2		Marke J.3		Marke J.4		Marke J.5		Marke J.6	
	[v _r]	m _r "	[v _r]	m _r "	[v _r]	m _r "	[v _r]	m _r "	[v _r]	m _r "
	<u>28. 1. 64</u>									
1	59.75		16.67		24.67		47.33		3.33	
2	34.00		1.33		6.67		16.67		14.67	
3	24.00		12.67		6.67		1.33		8.67	
4	39.00		72.67		25.33		8.00		5.33	
5	12.75		21.33		16.00		6.67		38.00	
6	16.75		4.67		3.33		8.67		21.33	
7	66.00		6.67		24.67		16.67		12.67	
8	2.75	N ₀ = 48	25.33	N ₀ = 32	28.00	N ₀ = 32	30.67	N ₀ = 32	13.33	N ₀ = 32
[J	255.00	± 2.3	161.34	± 2.2	135.34	± 2.1	136.01	± 2.1	117.33	± 1.9
	840.75		384.82		497.34		373.34		558.01	
	"									
	Σ[v _r]									
	<u>15. 2. 64</u>									
1	69.50		2.67		7.33		10.67		4.67	
2	11.50		1.33		1.33		2.67		6.33	
3	1.75		2.67		21.33		7.33		8.67	
4	13.50		7.33		4.00		1.33		12.67	
5	11.50		7.33		2.67		9.33		12.67	
6	14.75		1.33		1.33		3.33		8.67	
7	35.50		52.00		22.67		0.67		17.63	
8	21.50	N ₀ = 48	3.33	N ₀ = 32	22.67	N ₀ = 32	12.67	N ₀ = 32	2.67	N ₀ = 32
[J	179.50	± 1.9	77.99	± 1.6	85.33	± 1.6	48.00	± 1.2	93.98	± 1.5
	1020.25		462.81		580.67		421.34		631.99	
	"									
	Σ[v _r]									
	<u>13. 3. 64</u>									
1	10.00		1.33		20.00		16.67		6.67	
2	23.50		7.33		2.67		4.67		40.67	
3	7.75		9.33		10.67		7.33		5.33	
4	20.75		6.67		26.00		5.33		45.33	
5	51.50		16.00		56.67		3.33		9.33	
6	2.75		2.67		32.00		25.33		10.67	
7	34.00		0.67		9.33		10.67		3.33	
8	23.75	N ₀ = 48	9.33	N ₀ = 32	7.33	N ₀ = 32	4.67	N ₀ = 32	24.67	N ₀ = 32
[J	174.00	± 1.9	53.33	± 1.3	164.67	± 2.3	78.00	± 1.6	146.00	± 2.1
	1194.25		516.14		745.34		499.34		777.99	
	"									
	Σ[v _r]									

J	Marke J.2		Marke J.3		Marke J.4		Marke J.5		Marke J.6	
	[vv]	m _r ^{cc}	[vv]	m _r ^{cc}	[vv]	m _r ^{cc}	[vv]	m _r ^{cc}	[vv]	m _r ^{cc}
	<u>25. 4. 64</u>									
1	79.75		97.33		21.33		44.67		4.00	
2	28.75		76.00		41.33		50.67		43.33	
3	60.00		14.67		61.33		76.00		25.33	
4	6.00		86.67		52.00		14.67		9.33	
5	21.50		36.00		17.33		186.67		27.33	
6	53.50		21.33		19.33		201.33		2.67	
7	70.75		87.67		49.33		96.67		24.67	
8	1.75	N ₀ = 48	1.33	N ₀ = 32	58.67	N ₀ = 32	120.67	N ₀ = 32	6.67	N ₀ = 32
[J]	322.00	± 2.6	421.00	+ 3.6	320.65	+ 3.2	791.35	± 5.0	143.33	± 2.1
	1516.25		937.14		1065.99		1290.69		921.32	
	Σ [vv]									
	<u>29. 7. 64</u>									
1	13.50		83.33		121.33		73.33		17.33	
2	80.00		44.67		7.33		134.67		20.67	
3	161.50		13.33		80.67		17.33		37.33	
4	47.75		170.00		32.00		31.33		10.00	
5	26.67		49.33		38.00		3.33		13.33	
6	164.75		25.33		12.67		9.33		149.33	
7	90.00		16.67		67.33		22.67		77.33	
8	65.00	N ₀ = 48	21.33	N ₀ = 32	9.33	N ₀ = 32	57.33	N ₀ = 32	51.67	N ₀ = 32
[J]	649.17	± 3.7	423.99	± 3.6	368.66	± 3.4	349.32	± 3.3	376.99	± 3.4
	2165.42		1361.13		1434.65		1640.01		1298.31	
	"									
	Σ [vv]									
Mittlerer Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung (ohne die Messungen vom 25. 4. und 29. 7. 64)										
	Σ [vv] = 1794,50	± 2,2 N = 360	775,49	± 1,8 N = 240	1025,99	± 2,1 N = 240	782,00	± 1,8 N = 240	1048,65	± 2,1 N = 240
			<u>m_r</u>	=	$\sqrt{\frac{5427}{1320}}$	=	<u>± 2.03^{cc}</u>			

J	Marke J.2		Marke J.3		Marke J.4		Marke J.5		Marke J.6	
	[vv]	m ^{cc}	[vv]	m ^{cc}	[vv]	m ^{cc}	[vv]	m ^{cc}	[vv]	m ^{cc}
	<u>25. 4. 64</u>									
1	79.75		97.33		21.33		44.67		4.00	
2	28.75		76.00		41.33		50.67		43.33	
3	60.00		14.67		61.33		76.00		25.33	
4	6.00		86.67		52.00		14.67		9.33	
5	21.50		36.00		17.33		186.67		27.33	
6	53.50		21.33		19.33		201.33		2.67	
7	70.75		87.67		49.33		96.67		24.67	
8	1.75	N ₀ = 48	1.33	N ₀ = 32	58.67	N ₀ = 32	120.67	N ₀ = 32	6.67	N ₀ = 32
[J]	322.00	± 2.6	421.00	+ 3.6	320.65	+ 3.2	791.35	± 5.0	143.33	± 2.1
	1516.25		937.14		1065.99		1290.69		921.32	
	"									
	Σ [vv]									
	<u>29. 7. 64</u>									
1	13.50		83.33		121.33		73.33		17.33	
2	80.00		44.67		7.33		134.67		20.67	
3	161.50		13.33		80.67		17.33		37.33	
4	47.75		170.00		32.00		31.33		70.00	
5	26.67		49.33		38.00		3.33		13.33	
6	164.75		25.33		12.67		9.33		149.33	
7	90.00		16.67		67.33		22.67		77.33	
8	65.00	N ₀ = 48	21.33	N ₀ = 32	9.33	N ₀ = 32	57.33	N ₀ = 32	51.67	N ₀ = 32
[J]	649.17	± 3.7	423.99	± 3.6	368.66	± 3.4	349.32	± 3.3	376.99	± 3.4
	2165.42		1361.13		1434.65		1640.01		1298.31	
	"									
	Σ [vv]									
Mittlerer Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung (ohne die Messungen vom 25. 4. und 29. 7. 64)										
	Σ [vv] = 1794,50	± 2,2 N = 360	775,49	± 1,8 N = 240	1025,99	± 2,1 N = 240	782,00	± 1,8 N = 240	1048,65	± 2,1 N = 240
			$\bar{m}_r = \sqrt{\frac{5427}{1320}}$				$\pm 2.03^{cc}$			

J	Marke J.2		Marke J.3		Marke J.4		Marke J.5		Marke J.6	
	[vv]	m _r ''	[vv]	m _r ''	[vv]	m _r ''	[vv]	m _r ''	[vv]	m _r ''
	<u>9.8.63</u>									
1	12.00		12.67		2.67		1.33		13.33	
2	5.50		0.67		4.67		4.00		4.00	
3	11.75		1.33		3.33		16.67		10.67	
4	14.75		27.33		9.33		9.33		3.33	
5	17.00		10.00		6.67		9.33		4.00	
6	7.50		8.67		2.67		0.67		1.33	
7	3.50		2.67		1.33		4.00		3.33	
8	4.75	N = 24	6.67	N = 16	4.00	N = 16	20.67	N = 16	1.33	N = 16
[Σ]	76.75	± 1.8	70.01	± 2.1	34.67	± 1.5	66.00	± 2.0	41.32	± 1.6
	2242.17		1431.14		1469.32		1706.01		1339.63	
	Σ [vv]									
	<u>23.9.63</u>									
1	50.00		2.67		5.33		27.33		4.67	
2	76.00		3.33		21.33		5.33		2.00	
3	10.00		10.67		9.33		6.67		16.00	
4	35.50		9.33		26.67		0.67		2.67	
5	1.00		16.00		19.33		16.67		3.33	
6	6.75		8.00		9.33		66.67		24.67	
7	58.75		16.67		15.33		4.00		16.00	
8	41.50	N ₀ = 48	2.67	N ₀ = 32	9.33	N ₀ = 32	13.33	N ₀ = 32	28.00	N ₀ = 32
[Σ]	279.50	± 2.4	69.34	± 1.5	115.98	± 1.9	140.67	± 2.1	97.34	± 1.7
	2521.67		1500.48		1585.30		1846.68		1436.97	
	Σ [vv]									
	<u>7.11.63</u>									
1	55.75		17.33		7.33		2.67		6.67	
2	16.75		19.33		1.33		6.67		19.33	
3	29.50		14.67		14.67		7.33		5.33	
4	18.75		26.67		21.33		11.33		27.33	
5	65.50		5.33		4.67		19.33		19.33	
6	10.75		22.67		43.33		25.33		4.67	
7	26.00		4.67		4.67		1.33		16.67	
8	21.00	N ₀ = 48	9.33	N ₀ = 32	32.67	N ₀ = 32	2.00	N ₀ = 32	32.67	N ₀ = 32
[Σ]	244.00	± 2.3	120.00	± 1.9	130.00	± 2.0	75.99	± 1.5	132.00	± 2.0
	2766.67	± 2.46	1620.48	± 2.31	1715.30	± 2.37	1922.67	± 2.51	1568.97	± 2.27
	Σ [vv]	N = 456		N = 304		N = 304		N = 304		N = 304
	Mittlerer Fehler einer in einem Satz gemessenen Richtung (aus sämtlichen Beobachtungen)									
					$\bar{m}_r = \sqrt{\frac{\Sigma [vv]}{\Sigma N + \Sigma N_0}} = \sqrt{\frac{9593}{1672}}$				$\bar{m}_r = \pm 2,39''$	
	Mittlerer Fehler eines in einem Satz gemessenen Winkels									
					$\bar{m}_w = \bar{m}_r \cdot \sqrt{2} = \pm 3,39''$					

Abstandsmessungen zwischen Pfeiler und Magnetmarke
in Speichenverlängerung.

Mittlere Fehler aus Messungen in mehrstündigem Abstand

- n = Anzahl der Messungen, wovon jede aus mindestens 5 Ableisungen des Bandes resultiert
- h = Zeit in Stunden zwischen der ersten und letzten Messung
- [σ] aus Abweichungen der Einzelmessungen vom jeweiligen Mittel
- N = Anzahl der Freiheitsgrade

Datum	$\Sigma [\sigma^2]$	n	ΣN	$\mu_{s(5)}$ [0,1mm]	n · N	μ_s [0,1mm]	h
27./28. 1. 64	76,32	4	24	$\pm 1,78$	96	$\pm 0,89$	27
15./16. 2. 64	100,92	4	24	$\pm 2,05$	96	$\pm 1,03$	26
12./13. 3. 64	7,16	4	24	$\pm 0,55$	96	$\pm 0,27$	22
25. 4. 64	6,12	2	8	$\pm 0,87$	16	$\pm 0,62$	8
29./30. 7. 64	24,87	4	24	$\pm 1,04$	96	$\pm 0,51$	28
seit 12.3.64	38,15		56		208		

Mittlerer Fehler einer einmal gemessenen Strecke (seit 12.3.64)

$$\overline{\mu_{s(5)}} = \pm 0,83 \frac{\text{mm}}{10}$$

Mittlerer Fehler eines arithmetischen Mittels

$$\overline{\mu_s} = \pm 0,43 \frac{\text{mm}}{10}$$
