

Bibliothek

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON **DESY**

DESY 67/8
März 1967

DESY-Bibliothek

19. APR. 1967 ✓

T-Verletzung und Comptonstreuung am Proton

von

Barbara Otto

Physikalisches Staatsinstitut
II. Institut für Experimentalphysik, Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

T-VERLETZUNG UND COMPTONSTREUUNG AM PRÖTON

von

Barbara Otto

Physikalisches Staatsinstitut

II. Institut für Experimentalphysik, Hamburg

Abstract

The requirement of T invariance reduces the number of independent scattering amplitudes of P invariant proton Compton scattering from eight to six and correspondingly the number of independent polarization coefficients from 64 to 36. The 64 polarization coefficients are calculated in terms of the eight scattering amplitudes. The relations between them resulting from the T-invariance requirement are given in terms of general analytic expressions.

These relations offer possibilities of experimentally testing T invariance by intensity or polarization measurement. However, a single measurement either of a left-right asymmetry of cross sections or of a polarization will not suffice, since none of the polarization coefficients are brought to vanish by the T-invariance requirement. In almost all of these possible tests, two scattering experiments are compared. They have identical kinematics, but in the second experiment the imposed polarizations of the primary particles must be exchanged for the measured polarization components of the secondary particles with respect to the first experiment (i.e. the polarization conditions are time reversed). A few of the more elementary tests are discussed in greater detail. Some of them require polarized proton targets.

It is shown how experimental tests can be simplified considerably in a well known manner at energies below the π -meson production threshold in the e^2 -approximation of the scattering amplitude. No significant results can be expected from these tests, however, since the T invariant Born approximation determines the behaviour of the scattering amplitude in this energy range.

INHALTSVERZEICHNIS:

	Seite
I Einleitung	1
II Die diskreten Symmetrieoperationen und das TCP - Theorem	5
III Kinematik und Konventionen	7
IV Die Amplituden der Comptonstreuung am Proton	
1) Die Helizitätsamplituden	11
2) Die invariante Zerlegung des Streumatrixelementes	14
V Die Dichtematrix	
1) Die Dichtematrix im Spinraum eines Teilchens	20
2) Die Dichtematrizen des Protons und des Photons (nichtrelativistisch)	22
3) Der Dichtematrixformalismus in der Comptonstreuung am Proton	24
4) Relativistische Korrekturen	27
5) Der Dichtematrixformalismus in der Helizitätsdarstellung	30
VI Der einschränkende Einfluss der Symmetrieprinzipien auf die Polarisationskoeffizienten	
1) Zahl der jeweils linear unabhängigen Polarisations- koeffizienten	32
2) Einfluss der Raumspiegelungsinvarianz	33
3) Einfluss der Zeitumkehrinvarianz	35
4) Berücksichtigung der Unitarität unterhalb der Erzeugungsschwelle für π - Mesonen	37
5) Experimentelle Bestimmung der Streumatrix	38
VII Vorschläge für Experimente zum Test der Zeitumkehrinvarianz bei der Comptonstreuung am Proton	38
Anhang I: Eine Tabelle sämtlicher Polarisationskoeffizienten der Comptonstreuung am Proton (unter der Voraussetzung der Raumspiegelungsinvarianz berechnet)	48
Anhang II: Beschreibung des Photons durch eine irreduzible, unitäre Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe	58
Zusammenfassung	60
Literaturverzeichnis	62

I EINLEITUNG:

Die Beobachtung des $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ - Zerfalls der langlebigen Komponente des K^0 -Mesons ¹⁾ lässt sich nur unter der Annahme der CP-Verletzung, d.h. der Verletzung der Invarianz unter dem Produkt aus der Teilchen - Antiteilchenkonjugation C und der Raumspiegelung P, befriedigend erklären ²⁾. Es stellt sich nun die Frage, welche Art der Wechselwirkung für diese CP-Verletzung mit dem kleinen Verletzungsparameter

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\text{Rate} (K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\text{Rate} (K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}} \approx 2,2 \cdot 10^{-3} \quad 3)$$

verantwortlich ist.

Die schwache Wechselwirkung selbst könnte CP-verletzend sein, allerdings nur sehr gering, denn sowohl der kleine Verletzungsparameter des $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ - Zerfalls als auch die sonstige experimentelle Situation in der schwachen Wechselwirkung ist nur mit kleinen CP-verletzenden Amplituden verträglich ³⁾. Die schwache Wechselwirkung kann jedoch auch CP-invariant sein; der $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ - Zerfall wäre dann verursacht durch die Einwirkung einer anderen CP-verletzenden Wechselwirkung.

Sämtliche Typen der Wechselwirkung (starke, elektromagnetische und schwache) können als invariant unter dem Produkt TCP angesehen werden (T ist der diskrete Operator der Zeitumkehr, genauer der Bewegungsumkehr). Abgesehen von der theoretisch fundierten Allgemeingültigkeit des TCP-Theorems ist dieses Invarianzprinzip experimentell bis jetzt noch nie widerlegt worden; man konnte Differenzen in den Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen nicht nachweisen ³⁾. Unter der Voraussetzung der TCP-Invarianz ist die CP-Verletzung der T-Verletzung äquivalent. Ausser der TCP-Invarianz ist sowohl in der starken als auch in der elektromagnetischen Wechselwirkung die Raumspiegelungsinvarianz experimentell in hohem Mass gesichert. ³⁾

Experimente zum Test der C-Invarianz in der starken Wechselwirkung (z.B. die Messung der Energieverteilung von π^+ und π^- bzw. von K^+ und K^- in der Paarvernichtung von p und \bar{p}) lassen bestenfalls eine C-verletzende Amplitude zu, die 1%-2% der C-invarianten Amplitude ausmacht ³⁾. Die Annahme einer geringen CP-Verletzung der starken Wechselwirkung, die wegen der grossen Kopplungskon-

stanten ausreichen würde, den $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ - Zerfall zu erklären, ist zwar möglich aber nicht sehr befriedigend.

Es wurden noch zwei weitere Modelle zur Erklärung des $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ - Zerfalls in Betracht gezogen:

- 1) CP ist verletzt durch eine Wechselwirkung H_V mit einer Kopplungskonstanten $g < 10^{-2}$, die P und S erhält und C stark verletzt. Die CP-Verletzung im $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ - Zerfall wäre dann erklärbar durch einen Effekt zweiter Ordnung, herrührend von der Wechselwirkung von H_V mit der C-invarianten, schwachen Wechselwirkung.
- 2) Die CP-Verletzung in schwachen Wechselwirkungen liegt an Beiträgen erster Ordnung einer superschwachen Wechselwirkung ($\Delta S = 2$) zur Massenmatrix, die die Zerfallszustände des K^0, \bar{K}^0 - Systems, die langlebige und die kurzlebige Komponente des K^0 - Mesons, beschreibt.

Am aussichtsreichsten erscheint bis jetzt jedoch der Vorschlag, dass sowohl die starke als auch die schwache Wechselwirkung invariant unter CP sind, dass aber die elektromagnetische Wechselwirkung stark wechselwirkender Teilchen die C- bzw. die T-Invarianz stark verletzt ^{3) 4)}. Dieser Vorschlag ist der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

Lee, Feinberg und Bernstein ⁴⁾ haben nämlich gezeigt, dass die bisherige experimentelle Situation eine solche starke C-Verletzung prinzipiell zulässt, da sie nur sehr geringfügig ins Gewicht fallen würde.

Z.B. wird der T-verletzende dritte Nukleonformfaktor der $N\gamma N'$ - Vertexfunktion durch die Bedingung der Erhaltung des elektromagnetischen Stromes am Vertex bereits ausgeschlossen, so dass die bisherigen $e^- + p \rightarrow e^- + p$ - Experimente keinen Aufschluss über eine eventuelle T-Verletzung geben können. Ebensovienig aufschlussreich sind die nuklearen γ - Übergänge, da der Effekt maximaler T-Verletzung von der Grössenordnung \approx Bindungsenergie des Nukleons/Nukleonenmasse ist.

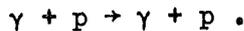
Ein Vorteil der Annahme einer C-verletzenden, elektromagnetischen Wechselwirkung liegt darin, dass kleine C- bzw. CP-verletzende Amplituden in allen Prozessen der starken bzw. schwachen Wechselwirkung auf Grund von virtueller Emission und Absorption von Photonen verständlich wären. Speziell im Fall des $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ - Zerfalls wäre auch eine Erklärung für die Grössenordnung des CP-Verletzungsparameters gefunden, denn es ist:

$\epsilon \cong \frac{\alpha}{\pi}$, wo $\alpha = \frac{1}{137}$ die Feinstrukturkonstante ist.

Im Zuge der Untersuchung der möglichen C-Verletzung in der elektromagnetischen Wechselwirkung stark wechselwirkender Teilchen wurde in ⁵⁾ im Rahmen des Isobarmodells maximale T-Verletzung in die Photoproduktion von π -Mesonen im niederenergetischen Bereich eingeführt. In der Nähe der N^* -Resonanz bringt diese Annahme eine starke Abweichung vom Experiment, bei kleineren Energien ist eine maximale T-Verletzung jedoch vereinbar mit den Experimenten. Über den $\eta^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ -Zerfall werden widersprüchliche Ergebnisse veröffentlicht. Nach ⁶⁾ sind die Experimente vereinbar mit einer starken C-Verletzung der elektromagnetischen Wechselwirkung, nach ⁷⁾ sind sie es nicht.

Ähnlich liegt der Fall bei den neuesten Experimenten zum Test der CP-Invarianz bei dem $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ -Zerfall. In ⁸⁾ wurde auf Grund einer Asymmetrie in der Energieverteilung von π^+ und π^- eine CP-Verletzung gefolgert; in ⁹⁾ wurde dieses Messergebnis unter anderen Versuchsbedingungen experimentell widerlegt.

Ein weiteres Beispiel für eine elektromagnetische Wechselwirkung stark wechselwirkender Teilchen ist die Comptonstreuung am Proton



In der vorliegenden Arbeit sollen die Möglichkeiten für experimentelle Tests einer eventuellen C- bzw. T-Verletzung in dieser Reaktion untersucht werden.

Möglichkeiten zu solchen Tests bieten Intensitäts- und Polarisationsmessungen. Diese Tests haben den Vorteil, dass sie modellunabhängig sind und für beliebig hohe Energien gültig bleiben. (Heute ist es möglich, Comptonstreuexperimente mit Photonlaborenergien bis zu 1 GeV und höher durchzuführen ¹⁰⁾, da es ein hinreichend gutes Verfahren gibt ¹¹⁾, die Comptonstreuung vom Untergrund der Photoproduktion von π -Mesonen zu trennen).

Die in dieser Arbeit als Testmöglichkeiten vorgeschlagenen Experimente setzen zum Teil die Verwendung von polarisierten Protontargets voraus. In ¹²⁾ findet sich eine Zusammenstellung von Arbeiten, die bereits durchgeführte Experimente mit polarisierten Protontargets beschreiben. Hiernach stehen heute polarisierte Protontargets mit einem Polarisationsgrad von ca 60% durchaus

zur experimentellen Verfügung.

Die Berechnungen in der vorliegenden Arbeit werden unter der Voraussetzung der TCP- und der P-Invarianz durchgeführt. Die experimentellen Tests, die am Ende der Arbeit vorgeschlagen werden, sind jedoch qualitativ unabhängig von der Gültigkeit der P-Invarianz.

In Kapitel II dieser Arbeit soll kurz auf die diskreten Operationen T, C und P eingegangen werden. Kapitel III enthält die Kinematik der Comptonstreuung am Proton. In Kapitel IV werden die Comptonhelizitätsamplituden berechnet und andererseits wird die invariante Zerlegung des Streumatrixelementes durchgeführt; in beiden Fällen wird die einschränkende Wirkung der T-Invarianz aufgezeigt.

In Kapitel V wird der Dichtematrixformalismus entwickelt, der zur Berechnung des Einflusses der P-Invarianz und der T-Invarianz auf die Polarisationskoeffizienten in Kapitel VI und zur Zusammenstellung sämtlicher Polarisationskoeffizienten in einer Tabelle im Anhang I benötigt wird.

Kapitel VII enthält als Ergebnis dieser Arbeit die Vorschläge für experimentelle Tests einer eventuellen T-Verletzung bei der Comptonstreuung am Proton und ihre Diskussion.

Die Herleitungen und Berechnungen werden in zwei Formalismen fast parallel durchgeführt:

- 1) in der Helizitätsdarstellung,
- 2) in der Darstellung, in der die invariante Zerlegung des Streumatrixelementes durchgeführt wird.

Dieser doppelte Aufwand ist zwar nicht notwendig zur Ableitung der Ergebnisse; die zweifache unabhängige Rechnung ermöglicht jedoch eine Überprüfung der Richtigkeit der Tabellen im Anhang I. Ausserdem ist damit die Möglichkeit gegeben, zur Beschreibung der einzelnen Phänomene jeweils den geeigneteren Formalismus zu wählen. So wird z.B. zur Einführung der Dichtematrix in Kapitel V der zweite Formalismus bevorzugt, da die Komponentendarstellung des Helizitätsformalismus' weniger übersichtlich ist. Den Einfluss der Symmetrieprinzipien auf die Polarisationskoeffizienten sieht man jedoch wesentlich einfacher in der Helizitätsdarstellung.

II DIE DISKRETEN SYMMETRIEOPERATIONEN UND DAS TCP - THEOREM:

Im Hinblick auf die Behandlung einer eventuellen Symmetrieverletzung (T, C, TP, CP) soll hier kurz auf die Wirkung der Operatoren C, P und T auf die Basis $|Q, p_0, \vec{p}, s_3; m, s\rangle$ im Einteilchenhilbertraum eingegangen werden; $m \neq 0$ steht für die Masse des Teilchens, s für den Spin, p_0 für die Energie, \vec{p} für den Impuls, s_3 für die Spinprojektion auf eine raumfeste Koordinatenachse und Q für sämtliche Quantenzahlen ("Ladungen"), die unter der Teilchen - Antiteilchenkonjugation ihr Vorzeichen wechseln.

Die Operatoren C und P sind unitär:

$$CC^\dagger = C^2 = 1, \quad PP^\dagger = P^2 = 1. \quad (1)$$

Der Operator T ist jedoch antiunitär, denn ein unitärer Zeitumkehroperator würde zu negativen Energien führen:

$$T(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha^* T|\psi\rangle + \beta^* T|\phi\rangle; \quad (\text{Antilinearität}) \quad (2)$$

$$TT^\dagger = 1; \quad \langle T\psi | T\phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle.$$

Es gilt nun:

$$C|Q, p_0, \vec{p}, s_3\rangle = \eta_Q^C |Q, p_0, \vec{p}, s_3\rangle \text{ mit } |\eta_Q^C| = 1. \quad (3)$$

Für selbstkonjugierte Teilchen wird $\eta_Q^C = \pm 1$.

$$P|Q, p_0, \vec{p}, s_3\rangle = \eta_Q^P |Q, p_0, -\vec{p}, s_3\rangle \text{ mit } |\eta_Q^P| = 1;$$

$$T|Q, p_0, \vec{p}, s_3\rangle = \eta_Q^T (-1)^{s-s_3} |Q, p_0, -\vec{p}, -s_3\rangle \text{ mit } |\eta_Q^T| = 1; \quad (4)$$

$$T^2|Q, p_0, \vec{p}, s_3\rangle = (-1)^{2s} |Q, p_0, \vec{p}, s_3\rangle.$$

Auf Grund der Antilinearität von T ist der Phasenfaktor η_Q^T beliebig wählbar (d.h. nicht messbar); alle drei Phasenfaktoren sind unabhängig von p_0, \vec{p} und s_3 .

Ähnliche Beziehungen gelten für das Photon als masseloses Teilchen in der Helizitätsbasis; eine kurze Diskussion findet man im Anhang II. Gewöhnlich gibt man statt dessen das Transformationsverhalten des Viererpotentials $A_\mu(x)$ des elektromagnetischen Feldes an:

$$\begin{aligned}
 C^\dagger A_\mu(x) C &= -A_\mu(x); \quad (\text{Das Photon ist selbstkonjugiert}); \\
 P^\dagger A_0(x_0, \vec{x}) P &= A_0(x_0, -\vec{x}); \quad P^\dagger \vec{A}(x_0, \vec{x}) P = -\vec{A}(x_0, -\vec{x}); \\
 T^\dagger A_0(x_0, \vec{x}) T &= A_0(-x_0, \vec{x}); \quad T^\dagger \vec{A}(x_0, \vec{x}) T = -\vec{A}(-x_0, \vec{x}).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Der Streuoperator S , der die asymptotisch freien Zustände der einlaufenden und der auslaufenden Teilchensysteme miteinander verknüpft:

$$|\psi\rangle^{\text{aus}} = S |\psi\rangle^{\text{ein}} \quad (6)$$

setzt auch die entsprechenden diskreten Operatoren, die auf die einlaufenden bzw. die auslaufenden freien Zustände wirken, zueinander in Beziehung:

$$\begin{aligned}
 S^\dagger C_{\text{ein}} S &= C_{\text{aus}}, \\
 S^\dagger P_{\text{ein}} S &= P_{\text{aus}}, \\
 S^\dagger T_{\text{ein}} S^\dagger &= T_{\text{aus}}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Invarianz der Wechselwirkung unter der Teilchen - Antiteilchenkonjugation bzw. unter der Raumspiegelung bedeutet, dass die Phasen η_{aus}^C bzw. η_{aus}^P der einzelnen Reaktionsteilnehmer derart gewählt werden können, dass

$$C_{\text{ein}} \equiv C_{\text{aus}} \equiv C \quad \text{bzw.} \quad P_{\text{ein}} \equiv P_{\text{aus}} \equiv P \quad \text{ist.} \quad (8)$$

Die Invarianz der Wechselwirkung liegt also begründet in der Existenz der Symmetrieoperatoren C und P , die mit dem Streuoperator kommutieren:

$$[S, C] = 0 \quad \text{bzw.} \quad [S, P] = 0 \quad \text{nach (7).} \quad (9)$$

Die Zeitumkehrinvarianz der Wechselwirkung setzt entsprechend die Existenz des Symmetrieoperators $T_{\text{ein}} \equiv T_{\text{aus}} \equiv T$ voraus, so dass nach (7) gilt:

$$S T = T S^\dagger, \quad (10)$$

Die Beziehungen (9) und (10) gelten analog auch für den t -Operator $t = \frac{1}{i}(S-1)$. Die Operatorbeziehung (10) hat für die t -Matrix $\langle \psi^{\text{aus}} | t | \psi^{\text{ein}} \rangle$ die sog. "Reziprozitätsrelation" zur Folge:

$$\langle \psi^{\text{aus}} | t | \psi^{\text{ein}} \rangle = \langle T \psi^{\text{ein}} | t | T \psi^{\text{aus}} \rangle. \quad (11)$$

Aus (4) ist ersichtlich, dass im Fall der PT -Invarianz die Beziehung des "detaillierten Gleichgewichts" gültig ist: ¹³⁾

$$\sum_{\text{Spins}} |\langle \psi^{\text{aus}} | t | \psi^{\text{ein}} \rangle|^2 = \sum_{\text{Spins}} |\langle \psi^{\text{ein}} | t | \psi^{\text{aus}} \rangle|^2 \quad (12)$$

Diese Beziehung ist nicht hinreichend für PT-Invarianz; sie gilt auch nur unter der Voraussetzung der Selbstadjungiertheit des t-Operators: $t = t^\dagger$, unabhängig vom Verhalten der Wechselwirkung unter PT.

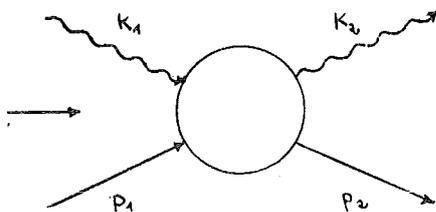
Invarianz unter der antiunitären Produktoperation $\Theta = TCP$ bedeutet gleiche Amplituden für die beiden Zweiteilchenreaktionen:

$$A + B \longrightarrow C + D \quad \text{und} \quad \bar{C} + \bar{D} \longrightarrow \bar{A} + \bar{B} \quad (13)$$

("crossing" für alle Teilchen); mit \bar{A} wird das Antiteilchen von A bezeichnet. Diese Invarianz ist feldtheoretisch gesichert durch das TCP - Theorem. Es besagt, dass alle lokalen, lorentzinvarianten Lagrangetheorien automatisch invariant gegenüber der Transformation Θ sind, vorausgesetzt dass der übliche Zusammenhang zwischen Spin und Statistik der freien Felder besteht ¹⁴⁾. Die experimentelle Beobachtung einer T-, C- oder P-Verletzung bedeutet eine Reduktion der Symmetrieeigenschaften der S - Matrix; eine Verletzung des TCP-Theorems würde jedoch die Grundlagen sowohl der Quantenfeldtheorie als auch der S-Matrixtheorie in Frage stellen.

III KINEMATIK UND KONVENTIONEN:

Es wird die Metrik $a_\mu \cdot a^\mu = a^0^2 - \vec{a}^2$ mit $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$ gewählt.



Comptonstreuung am Proton

Der Viererimpuls des Protons wird mit p , der des Photons mit k bezeichnet. Damit ist $k^2 = 0$ und $p^2 = m^2$, wenn m die Masse des Protons ist. Die Größen vor der Streuung werden mit dem Index "1" gekennzeichnet, diejenigen nach der Streuung mit dem Index "2".

Auf Grund der Energie - Impulserhaltung

$$k_1 + p_1 = k_2 + p_2 \quad (14)$$

sind nur drei der Vierervektoren linear unabhängig. Drei linear unabhängige Linearkombinationen sind:

$$P' = \frac{1}{2} (p_1 + p_2); \quad Q = \frac{1}{2} (k_1 - k_2) = \frac{1}{2} (p_2 - p_1); \quad R = \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \quad (15)$$

Mit Hilfe der drei Vektoren P' , Q und R lässt sich im Minkowskiraum ein Orthogonalsystem bilden ¹⁵⁾:

$$Q, R, P = P' - \frac{P' \cdot R}{R^2} R, \quad N \text{ mit } N^\mu = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} P_\nu R_\sigma Q_\tau; \quad \epsilon^{0123} = 1. \quad (16)$$

Die drei kinematischen Mandelstamvariablen

$$s = (k_1 + p_1)^2; \quad t = (k_1 - k_2)^2 = 4Q^2; \quad u = (k_1 - p_2)^2 \quad (17)$$

hängen über die Beziehung $s+t+u = 2m^2$ zusammen.

Im Schwerpunktsystem, kurz cms, gilt definitionsgemäss:

$$\vec{k}_1 + \vec{p}_1 = \vec{k}_2 + \vec{p}_2 = \vec{0}. \quad (18)$$

Damit ergeben sich die einfachen kinematischen Verhältnisse für die Comptonstreuung am Proton im cms:

$$\begin{aligned} |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k_1^0 = k_2^0 = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = R^0 =: K; \\ p_1^0 = p_2^0 = P^{10} =: E; \quad \text{mit} \\ E^2 - K^2 = m^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Im Hinblick auf die Beschreibung von Experimenten ist es günstiger, im cms statt mit zwei der Variablen s , t , u mit den zwei unabhängigen kinematischen Variablen:

Schwerpunktsenergie : $W = \sqrt{s} = K + E \quad (20)$

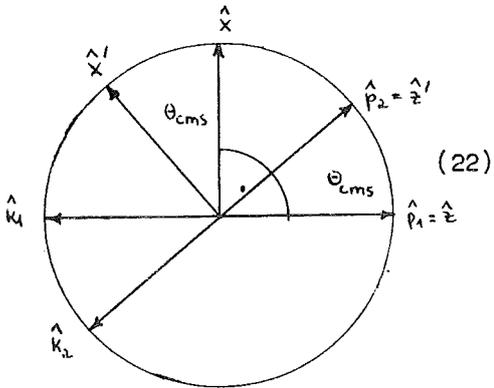
und Streuwinkel im cms: $\cos \Theta = \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{K^2} = \frac{2st}{(s-m^2)^2} + 1$

zu rechnen. Aus (19) und (20) ergibt sich:

$$K = \frac{W^2 - m^2}{2W} = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} \quad \text{und} \quad E = \frac{W^2 + m^2}{2W} = \frac{s + m^2}{2\sqrt{s}}. \quad (21)$$

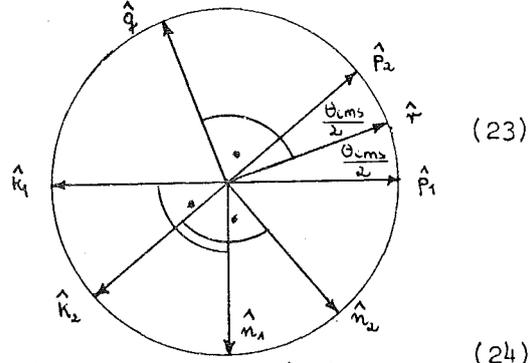
In den folgenden Kapiteln werden sich verschiedene Koordinatensysteme im cms als günstig erweisen:

a) für die Helizitätsdarstellung: ¹⁶⁾ b) für die invariante Zerlegung des



(22)

Streumatrixelementes:



(23)

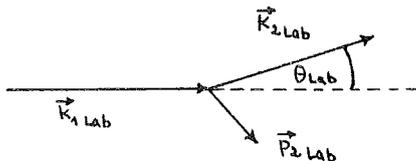
Zu b) Zur Beschreibung der Protonen: $\hat{q} = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$, $\hat{m} = \hat{r} \times \hat{q} = \frac{\hat{p}_1 \times \hat{p}_2}{\sin \theta}$, $\hat{r} = \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$ (24)

(Dieses Koordinatensystem wird üblicherweise zur Beschreibung der Nukleon-Nukleonstreuung benutzt ^{12) 17)}). Der Vektor \hat{q} hat in nichtrelativistischer Näherung, d.h. im Fall einer Galileitransformation, die Richtung des Laborimpulses des Rückstossprotons.

Zur Beschreibung der Photonen: $\hat{k}_1, \hat{m}, \hat{m} \times \hat{k}_1 = \hat{n}_1$ (25)
und $\hat{k}_2, \hat{m}, \hat{m} \times \hat{k}_2 = \hat{n}_2$.

In beiden Figuren stellt die Zeichenebene die Streuebene dar; allgemein kennzeichnet $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ den Einheitsvektor in Richtung von \vec{a} .

Im Laborsystem ruht das Proton vor der Streuung: $\vec{p}_{1 \text{ Lab}} = \vec{0}$.



Die Einschussenergie der Photonen

$$E_{\text{Lab}} = k_{1 \text{ Lab}}^0 = \frac{s - m^2}{2m} = \frac{\sqrt{s}}{m} K_{\text{Cms}}$$

und der Laborstreuwinkel θ_{Lab} : (26)

$$\cos \theta_{\text{Lab}} = 1 - \frac{2m^2 t}{(s - m^2)(u - m^2)} = \frac{(s + m^2) \cos^2 \left(\frac{\theta_{\text{Cms}}}{2} \right) - m^2}{(s - m^2) \cos^2 \left(\frac{\theta_{\text{Cms}}}{2} \right) + m^2}$$

sind hier die geeigneten zwei unabhängigen, kinematischen Variablen.

Die Diracgleichung des Protons im Impulsraum lautet:

$$(\not{p} - m) u(p) = 0. \quad (27)$$

Für die spezielle Wahl der Diracmatrizen: (28)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} ; \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} ; \gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

mit den drei hermiteschen Paulimatrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

erhält der Lösungsspinor $u(p)$ im cms folgende Gestalt:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \\ \sqrt{E-m} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \chi \quad \text{mit der Normierung:} \quad \begin{aligned} \bar{u}(p) u(p) &= \\ u^\dagger(p) \gamma^0 u(p) &= 2m, \end{aligned} \quad (30)$$

χ ist ein zweikomponentiger Paulispinor, der von der Spineinstellung des Protons abhängt.

Das freie Photon mit dem Impuls k wird durch die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen, das Viererpotential

$$A_\mu(x) = e_\mu(k) e^{-ikx}, \quad (31)$$

bzw. im Impulsraum durch den Polarisationsvierervektor $e_\mu(k)$ beschrieben.

Die Invarianz der Maxwellgleichungen gegen Eichtransformationen $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu G(x)$ mit beliebigem $G(x)$ reduziert sich im Impulsraum bei Wahl der Lorentzrichtung $e_\mu(k) \cdot k^\mu = 0$ auf die Invarianz gegen die Eichtransformationen:

$$e_\mu(k) \longrightarrow e_\mu(k) + \alpha k_\mu \quad / \quad k^2 = 0. \quad (32)$$

Die zusätzliche Transversalitätsbedingung (Strahlungseichung)

$$\hat{e}(k) \cdot \vec{k} = 0 \quad (\text{d.h. } e^0(k) \equiv 0) \quad (33)$$

legt die Eichung vollständig fest; sie ist jedoch nicht lorentzinvariant, sondern nur unter einer Kombination von Lorentztransformation und Eichtransformation invariant. Die Strahlungseichung wird in dieser Arbeit gewählt werden, sobald im speziellen Lorentzsystem, dem cms, gerechnet wird.

Die Bedingung (33) schliesst die unphysikalischen Polarisierungen, die skalare und die longitudinale Polarisation, aus. Sie trägt der Tatsache Rechnung, dass das Photon ein masseloses Teilchen mit Spin 1 ist, das nur zwei Spineinstellungen hat. Die physikalischen, d.h. die transversalen Polarisationsvektoren sind folgendermassen normiert: $e_\mu^*(k) \cdot e^\mu(k) = -\hat{e}^*(k) \cdot \hat{e}(k) = -1$. (34)

IV DIE AMPLITUDEN DER COMPTONSTREUUNG AM PROTON:

1) Die Helizitätsamplituden:

Die zwei Helizitäten des Protons werden mit $\lambda = \pm \frac{1}{2}$, die des Photons mit $\mu = \pm 1$ bezeichnet (siehe Anhang II). Der Zweiteilchenhelizitätszustand $|p, k, \lambda, \mu\rangle$ sei im Gegensatz zu dem von Jacob und Wick ¹⁶⁾ definierten lorentzinvariant normiert:

$$\langle p' k'; \lambda' \mu' | p k, \lambda \mu \rangle = (2\pi)^6 2p_0 \cdot 2k_0 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (35)$$

Sämtliche Phasenkonventionen aus ¹⁶⁾ sollen auch hier übernommen werden. Da die Helizitätsamplituden der Comptonstreuung am Proton im cms angegeben werden sollen, werden die folgenden Betrachtungen gleich im cms angestellt.

Führt man Polarkoordinaten θ und ϕ zur Kennzeichnung der Richtung des Relativimpulses $\vec{p} = -\vec{k}$ ein, dann lässt sich folgender Zusammenhang feststellen:

$$\langle p' k'; \lambda' \mu' | p k, \lambda \mu \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \langle \theta' \phi'; \lambda' \mu' | \theta \phi, \lambda \mu \rangle$$

mit $\langle \theta' \phi'; \lambda' \mu' | \theta \phi, \lambda \mu \rangle = \frac{(4\pi)^2 W}{K} \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (36)$

Die Beziehung zu den Eigenzuständen zum Gesamtdrehimpuls J und dessen z-Komponente M nimmt mit der lorentzinvarianten Normierung folgende Gestalt an:

$$|W, JM, \lambda \mu\rangle = \sqrt{\frac{K}{(4\pi)^2 W}} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(J)*}(\phi, \theta, -\phi) | \theta \phi, \lambda \mu \rangle d\Omega. \quad (37)$$

Dabei ist $\nu = \lambda - \mu$ und $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(J)}(\phi, \theta, -\phi) = e^{-i(M-\nu)\phi} d_{\mu\nu}^{(J)}(\theta)$ die Darstellungsmatrix der $2J+1$ -dimensionalen, irreduziblen Darstellung der Gruppe der dreidimensionalen Drehungen mit den drei Euler'schen Winkeln als Parameter: $\alpha = \phi$, $\beta = \theta$ und $\gamma = -\phi$.

Wählt man für die Beschreibung der Comptonstreuung am Proton im cms das $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ -Koordinatensystem aus (22) entsprechend ¹⁶⁾, dann wird: $\phi_1 \equiv \phi_2 \equiv \theta_1 \equiv 0$ und $\theta_2 \equiv \theta$ gleich dem Streuwinkel im cms.

Der Streuoperator S ist invariant unter allen eigentlichen, orthochronen Lorentztransformationen. Aus der Translationsinvarianz von S folgt die Energie - Impulserhaltung:

$$\langle p_2, k_2, \lambda_2, \mu_2 | S | p_1, k_1, \lambda_1, \mu_1 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \langle \theta, 0, \lambda_2, \mu_2 | S(W) | 0, 0, \lambda_1, \mu_1 \rangle, \quad (38)$$

aus der Rotationsinvarianz die Drehimpulserhaltung:

$$\langle W, \vec{J}_2, M_2, \lambda_2, \mu_2 | S(W) | W, \vec{J}_1, M_1, \lambda_1, \mu_1 \rangle = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \langle \lambda_2, \mu_2 | S^{\vec{J}}(W) | \lambda_1, \mu_1 \rangle, \quad (39)$$

($J = J_1$)

Analoge Beziehungen gelten auch für den t - Operator.

Beachtet man ausserdem (37) und (39), dann erhält man entsprechend ¹⁶⁾ die Partialwellenentwicklung des t - Operators im cms:

$$\langle \theta, 0, \lambda_2, \mu_2 | t(W) | 0, 0, \lambda_1, \mu_1 \rangle = \frac{8\pi W}{K} \sum_{\vec{J}} \left(\vec{J} + \frac{1}{2}\right) \langle \lambda_2, \mu_2 | t^{\vec{J}}(W) | \lambda_1, \mu_1 \rangle d_{\nu_1 \nu_2}^{\vec{J}}(\theta) \quad (40)$$

mit $\nu_1 = \lambda_1 - \mu_1$ und $\nu_2 = \lambda_2 - \mu_2$.

Der lorentzinvariante differentielle Wirkungsquerschnitt (mit unpolarisierten Teilchen im Anfangszustand) errechnet sich zu:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \frac{1}{4\sqrt{(p_1, k_1)^2}} \sum_{\text{Spins}} |\langle \theta, \phi, \lambda_2, \mu_2 | t(W) | \theta, \phi, \lambda_1, \mu_1 \rangle|^2 \frac{d^3 p_2}{2 p_2^0} \cdot \frac{d^3 k_2}{2 k_2^0}. \quad (41)$$

\sum_{Spins} steht für die Mittelung über die Helizitäten der einfallenden Teilchen und die Summation über die Helizitäten der ausfallenden Teilchen. Im cms erhält man nach der Integration über $p_2 + k_2$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cms}} = \frac{1}{(8\pi W)^2} \sum_{\text{Spins}} |\langle \theta, 0, \lambda_2, \mu_2 | t(W) | 0, 0, \lambda_1, \mu_1 \rangle|^2 = \sum_{\text{Spins}} |f_{\lambda_2, \mu_2; \lambda_1, \mu_1}(W, \theta)|^2. \quad (42)$$

Diese Definitionsgleichung für die bei ¹⁶⁾ definierten Helizitätsamplituden $f_{\lambda_2, \mu_2; \lambda_1, \mu_1}(W, \theta)$ stellt folgenden Zusammenhang her (die Wahl der Phase steht frei):

$$8\pi W f_{\lambda_2, \mu_2; \lambda_1, \mu_1}(W, \theta) = \langle \theta, 0, \lambda_2, \mu_2 | t(W) | 0, 0, \lambda_1, \mu_1 \rangle. \quad (43)$$

Entsprechend den zwei Helizitäten der einzelnen Reaktionsteilnehmer in der Comptonstreuung am Proton wird diese ohne die Anwendung von Symmetrieprinzipien durch 16 unabhängige Helizitätsamplituden beschrieben:

$$f_{\lambda_2, \mu_2; \lambda_1, \mu_1}(W, \theta) \text{ oder kurz } f_{\nu_2, \nu_1}(W, \theta) \text{ mit } \nu_1, \nu_2 = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \quad (44)$$

da die Paare λ, μ eindeutig durch ihre Differenz $\nu = \lambda - \mu$ festgelegt sind.

Paritätsinvarianz bedeutet nach (9) $P^\dagger SP = S$ bzw. $P^\dagger tP = t$. Für die reduzierten Matrixelemente hat dies entsprechend ¹⁶⁾ zur Folge, dass

$$\langle -\lambda_2 - \mu_2 \| S^\ddagger(W) \| -\lambda_1 - \mu_1 \rangle = \langle \lambda_2 \mu_2 \| S^\ddagger(W) \| \lambda_1 \mu_1 \rangle \quad (45)$$

gilt. Analog bewirkt Zeitumkehrinvarianz, nach (10) gleichbedeutend mit $T^\dagger ST = S^\dagger$ bzw. $T^\dagger tT = t^\dagger$, die Symmetrie der reduzierten Matrixelemente:

$$\langle \lambda_1 \mu_1 \| S^\ddagger(W) \| \lambda_2 \mu_2 \rangle = \langle \lambda_2 \mu_2 \| S^\ddagger(W) \| \lambda_1 \mu_1 \rangle. \quad (46)$$

Mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft der Kreiselfunktionen:

$$d_{\nu_1 \nu_2}^{(\mp)}(\theta) = (-1)^{\nu_1 - \nu_2} d_{-\nu_1, -\nu_2}^{(\mp)}(\theta) = (-1)^{\nu_1 - \nu_2} d_{\nu_2 \nu_1}^{(\mp)}(\theta); \quad (-1)^{\nu_1 - \nu_2} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (47)$$

kann man die Wirkung der P- und T-Invarianz auf die Helizitätsamplituden ersehen. Die P-Invarianz reduziert die Zahl der unabhängigen Helizitätsamplituden auf acht, da (45) und (47), in (40) eingesetzt, folgenden Zusammenhang vermitteln:

$$f_{\nu_2 \nu_1}(W, \theta) = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_2} f_{-\nu_2, -\nu_1}(W, \theta). \quad (48)$$

Diese acht unabhängigen Amplituden seien etwa diejenigen $f_{\nu_2 \nu_1}(W, \theta)$ für die $\nu_1 < 0$ ist.

Mit Hilfe der T-Invarianz lassen sich weitere zwei Amplituden aus der Zahl der unabhängigen ausscheiden. Setzt man nämlich (46) und (47) in (40) ein und beachtet ausserdem (48), dann folgt:

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}^{(P)} &= f_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{(T)} = f_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} \\ \text{und} \quad f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} &= -f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Folgende Numerierung der Helizitätsamplituden im cms wird benutzt:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}; & f_2 &= f_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}; & f_3 &= f_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}; & f_4 &= f_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}; \\ f_5 &= f_{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}; & f_6 &= f_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}; & f_7 &= f_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; & f_8 &= f_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Die Bedingung für T-Invarianz lautet: $f_3 \equiv f_4$ und $f_5 \equiv -f_6$. (51)

2) Die invariante Zerlegung des Streumatrixelementes:

Eine zweite Möglichkeit, die t - Matrix für die Comptonstreuung am Proton darzustellen, wird bei Prange ¹⁵⁾ beschrieben. Die t - Matrix lässt sich schreiben als

$$M(p_1, k_1, p_2, k_2) = \tilde{u}(p_2) e^{\mu*}(k_2) M_{\mu\nu} u(p_1) e^\nu(k_1). \quad (52)$$

Diese Schreibweise ist im Sinn eines Tensorproduktes $\tilde{u}(p_2) \otimes e^{\mu*}(k_2)$ zu verstehen, $M_{\mu\nu}$ ist ein 16×16 - Tensor im Produktraum.

Setzt man speziell die Helizitätseigenfunktionen für $u(p)$ und $e_\mu(k)$ ein ($u(p)$ und $e_\mu(k)$ sind entsprechend (30) und (34) normiert), dann ist die Beziehung zum Wirkungsquerschnitt durch den Zusammenhang im cms:

$$M(p_1, k_1, p_2, k_2) = - \langle \Theta 0, \lambda_2 \mu_2 | t(W) | 0 0, \lambda_1 \mu_1 \rangle; \text{ siehe (42)} \quad (53)$$

festgelegt. (Das Minuszeichen rührt von der Normierung $e_\mu^*(k) \cdot e^\mu(k) = -1$ her).

Die Invarianz des Streuprozesses unter allen eigentlichen, orthochronen Lorentztransformationen ermöglicht die Durchführung der invarianten Zerlegung der kausalen Amplitude:

$$M(p_1, k_1, p_2, k_2) = \sum_{i=1}^N A_i(s, t) \Gamma_i(p_1, k_1, p_2, k_2) \quad \text{mit} \quad (54)$$

$$\Gamma_i(p_1, k_1, p_2, k_2) = \tilde{u}(p_2) e^{\mu*}(k_2) \Gamma_{\mu\nu}^i u(p_1) e^\nu(k_1) \quad (55)$$

Die gesamte Dynamik der Streuung ist in den lorentzskalaren Amplituden $A_i(s, t)$ enthalten. In den $\Gamma_i(p_1, k_1, p_2, k_2)$ steckt die ganze Spinabhängigkeit. Es muss aus den Impulsen und den Diracmatrizen die höchstmögliche Zahl N von linear unabhängigen 16×16 - Matrizen $\Gamma_{\mu\nu}^i$ konstruiert werden, die sich unter eigentlichen, orthochronen Lorentztransformationen wie Tensoren zweiter Stufe verhalten.

Im Minkowskiraum bleiben von den Tensoren zweiter Stufe, die sich aus den vier orthogonalen Basisvektoren $N_\mu, P_\mu, Q_\mu, R_\mu$ aus (16) bilden lassen, auf Grund der Forderung der Eichinvarianz der t - Matrix ($e_\mu(k) \cdot k^\mu = 0$ und Invarianz gegenüber Eichtransformationen: $e_\mu(k) \rightarrow e_\mu(k) + \alpha k_\mu$) nur noch vier linear unabhängige Tensoren übrig, etwa:

$$\frac{P_\mu P_\nu}{P^2}; \quad \frac{N_\mu N_\nu}{N^2}; \quad \frac{P_\mu N_\nu \pm N_\mu P_\nu}{2\sqrt{P^2 N^2}}. \quad (56) \quad 15) \quad 19)$$

Im Diracspinorraum lassen sich ebenfalls vier linear unabhängige, lorentz-invariante Matrizen bilden, z.B.

$$1; \quad \gamma \cdot R; \quad \gamma_5; \quad \gamma_5 \gamma \cdot R. \quad (57) \quad 15)$$

Die 16 unabhängigen Tensorprodukte aus den Tensoren in (56) und (57) bilden einen vollständigen Satz von Tensoren $\Gamma_{\mu\nu}^i$. Die Tensoren sind so gewählt, dass die zugehörigen invarianten Amplituden $A_1(s,t), \dots, A_{16}(s,t)$ frei von kinematischen Singularitäten sind ^{19) 20)}.

Paritätsinvarianz reduziert die Zahl der linear unabhängigen Tensoren auf 8, da sich $e^{\mu*}(k_2) P_\mu P_\nu e^\nu(k_1)$, $e^{\mu*}(k_2) N_\mu N_\nu e^\nu(k_1)$ bzw. $1, \gamma R$ wie Skalare und $e^{\mu*}(k_2) (P_\mu N_\nu \pm N_\mu P_\nu) e^\nu(k_1)$ bzw. $\gamma_5, \gamma_5 \gamma R$ wie Pseudoskalare unter der Paritätsoperation verhalten.

Die Bedingung der PT-Invarianz ist gleich der Forderung der Invarianz unter dem Produkt $C \cdot (CPT) = PT$, da $C^2 = 1$ ist. Diese Bedingung bedeutet nach (13) für die selbstkonjugierten Photonen nur "crossing", für die Protonen "crossing" und Teilchen - Antiteilchenkonjugation. Aus der Invarianzforderung gegenüber PT resultiert also für den Tensor $M_{\mu\nu}$ folgende Eigenschaft:

$$M_{\mu\nu}(p_1, k_1, p_2, k_2) = C M_{\nu\mu}^T(-p_2, -k_2, -p_1, -k_1) C^{-1}. \quad (58)$$

Die Transposition bezieht sich auf die Diracmatrizen; c ist die Darstellungsmatrix des Teilchen - Antiteilchenkonjugationsoperators C im Raum der Diracmatrizen und erfüllt folgende Eigenschaften:

$$c c^\dagger = 1; \quad c^T = -c; \quad c^{-1} \gamma_\mu c = -\gamma_\mu^T. \quad (59)$$

Die beiden Tensoren:

$$\begin{aligned} & \gamma_5 (P_\mu N_\nu + N_\mu P_\nu); \\ & \gamma_5 \gamma \cdot R (P_\mu N_\nu - N_\mu P_\nu) \end{aligned} \quad (60)$$

erweisen sich als T- bzw. C-verletzend, da sie die Eigenschaft (58) nicht erfüllen. Es bleiben also im Fall der T-Invarianz nur sechs unabhängige Amplituden für die Comptonstreuung am Proton übrig.

Die P-invariante kausale Amplitude $M(p_1, k_1, p_2, k_2)$ lautet also in der invarianten Zerlegung:

$$\begin{aligned}
 M(p_1, k_1, p_2, k_2) = & \tilde{u}(p_2) \left\{ \frac{e^*(k_2) \cdot P e(k_1) \cdot P}{P^2} (A_1(s, t) + \frac{\gamma^R}{m} A_2(s, t)) \right. \\
 & + \frac{e^*(k_2) \cdot N e(k_1) \cdot N}{N^2} (A_3(s, t) + \frac{\gamma^R}{m} A_4(s, t)) \\
 & + \frac{e^*(k_2) \cdot P e(k_1) \cdot N - e^*(k_2) \cdot N e(k_1) \cdot P}{2\sqrt{P^2 N^2}} \gamma_5 (A_5(s, t) + i \frac{\gamma^R}{m} A_6(s, t)) \\
 & \left. + \frac{e^*(k_2) \cdot P e(k_1) \cdot N + e^*(k_2) \cdot N e(k_1) \cdot P}{2\sqrt{P^2 N^2}} i \gamma_5 (A_7(s, t) + i \frac{\gamma^R}{m} A_8(s, t)) \right\} u(p_1).
 \end{aligned} \quad (61)$$

Im Fall der T-Invarianz gilt dann: $A_6(s, t) \equiv 0$ und $A_7(s, t) \equiv 0$. (62)

Im cms nimmt $M(p_1, k_1, p_2, k_2)$ eine einfachere Form an:

Mit Hilfe der speziellen Wahl der Diracmatrizen (28) und der entsprechenden Lösungsspinoren der Diracgleichung (30) ergibt sich in dem in (23) eingeführten Koordinatensystem \hat{q} , \hat{m} , \hat{r} :

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(p_2) u(p_1) &= \chi_2^\dagger (E+m - (E-m) \cos \theta + (E-m) \sin \theta i \vec{\sigma} \hat{m}) \chi_1, \\
 \tilde{u}(p_2) \frac{\gamma^R}{m} u(p_1) &= \frac{W}{m} u^\dagger(p_2) u(p_1) - \tilde{u}(p_2) u(p_1) \\
 &= \frac{K}{m} \chi_2^\dagger (W+m + (W-m) \cos \theta - (W-m) \sin \theta i \vec{\sigma} \hat{m}) \chi_1, \\
 \tilde{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) &= 2 \sin \frac{\theta}{2} K \chi_2^\dagger (i \vec{\sigma} \hat{q}) \chi_1, \\
 \tilde{u}(p_2) \gamma_5 \frac{\gamma^R}{m} u(p_1) &= -\frac{W}{m} u^\dagger(p_2) \gamma_5 u(p_1) \\
 &= 2 \cos \frac{\theta}{2} K \frac{W}{m} \chi_2^\dagger (i \vec{\sigma} \hat{r}) \chi_1.
 \end{aligned} \quad (63)$$

Dabei wurde die für die Paulimatrizen gültige Beziehung $(\vec{\sigma} \hat{a})(\vec{\sigma} \hat{b}) = \hat{a} \hat{b} + i \vec{\sigma}(\hat{a} \times \hat{b})$ benutzt.

Wählt man im cms die Strahlungseichung $\hat{e}(k) \cdot \vec{k} = 0$ (33), dann liegt der Vektor $\hat{e}(k_1)$ in der von \hat{n}_1 und \hat{m} bzw. der Vektor $\hat{e}(k_2)$ in der von \hat{n}_2 und \hat{m} aufgespannten Ebene senkrecht zu \hat{k}_1 bzw. zu \hat{k}_2 . Dabei wurde Gebrauch von den in

(23) eingeführten Koordinatensystemen $\hat{k}_1, \hat{m}, \hat{n}_1$ und $\hat{k}_2, \hat{m}, \hat{n}_2$ gemacht. Damit wird im cms:

$$\frac{\vec{P}}{\sqrt{-P^2}} = -\frac{1}{\sin\theta} (\hat{k}_1 + \hat{k}_2); \quad \frac{\vec{N}}{\sqrt{-N^2}} = \hat{m}. \quad (64)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{e^*(k_2) \cdot P}{\sqrt{-P^2}} &= -\hat{e}^*(k_2) \cdot \hat{m}_2; & \frac{e^*(k_2) \cdot N}{\sqrt{-N^2}} &= -\hat{e}^*(k_2) \cdot \hat{m} \\ \frac{e(k_1) \cdot P}{\sqrt{-P^2}} &= \hat{e}(k_1) \cdot \hat{m}_1; & \frac{e(k_1) \cdot N}{\sqrt{-N^2}} &= -\hat{e}(k_1) \cdot \hat{m}. \end{aligned} \quad (65)$$

Die Helizitätspolarisationsvektoren $e_{\mu}^{(\pm)}(k)$ des Photons sind in Übereinstimmung mit ¹⁶⁾ gegeben durch

$$e_{\mu}^{(\pm)}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \hat{m}_{\mu} + i \hat{n}_{\mu}); \quad e_{\mu}^{(0)}(k) \equiv 0. \quad (66)$$

Dieses System von zwei orthogonalen Vektoren im Minkowskiraum lässt sich durch zwei weitere Vektoren $e_{\mu}^{(0)}(k)$ und $e_{\mu}^{(1)}(k)$ (z.B. durch die skalare und die longitudinale Polarisation) zu einer orthonormierten Basis im Minkowskiraum derart ergänzen, dass die Vollständigkeitsrelation lautet:

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(0)}(k) e_{\nu}^{(0)*}(k) - e_{\mu}^{(1)}(k) e_{\nu}^{(1)*}(k) - e_{\mu}^{(+)}(k) e_{\nu}^{(+)*}(k) - e_{\mu}^{(-)}(k) e_{\nu}^{(-)*}(k). \quad (67)$$

Auf Grund der Eichinvarianz der Streuamplitude gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(p_2) e^{\mu*}(k_2) M_{\mu\nu} e^{\nu}(k_1) u(p_1) &= \tilde{u}(p_2) e^{\mu*}(k_2) g_{\mu\rho} M^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} e^{\nu}(k_1) u(p_1) \\ &= \tilde{u}(p_2) e^{\mu*}(k_2) (e_{\mu}^{(+)}(k_2) e_{\rho}^{(+)*}(k_2) + e_{\mu}^{(-)}(k_2) e_{\rho}^{(-)*}(k_2)) M^{\rho\sigma} \times \\ &\times (e_{\sigma}^{(+)}(k_1) e_{\nu}^{(+)*}(k_1) + e_{\sigma}^{(-)}(k_1) e_{\nu}^{(-)*}(k_1)) e^{\nu}(k_1) u(p_1) \\ &= (\eta_+^*(k_2), \eta_-^*(k_2)) \begin{pmatrix} M_{++} & M_{+-} \\ M_{-+} & M_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_+(k_1) \\ \eta_-(k_1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (68)$$

wobei $\eta_{\alpha}(k) = e_{\mu}^{(\alpha)*}(k) e^{\mu}(k)$ mit $\alpha = \pm$ die Komponenten eines Zweivektors η , $M_{\alpha\beta} = \tilde{u}(p_2) e_{\rho}^{(\alpha)*}(k_2) M^{\rho\sigma} e_{\sigma}^{(\beta)}(k_1) u(p_1)$, $\alpha, \beta = \pm$, die Komponenten einer 2×2 -Matrix $M_{\alpha\beta}$ im Polarisationsraum des Photons sind.

In dieser Schreibweise lassen sich die Anteile der zweidimensionalen Matrix $M_{\alpha\beta}$ nach dem vollständigen Satz von Basismatrizen: $1, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, der Einheitsmatrix und den Paulimatrizen, im Polarisationsraum des Photons folgen-

dermassen entwickeln:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}^{(\alpha)*}(k_2) \cdot \hat{m}_2 \quad \hat{m}_1 \cdot \hat{e}^{(\beta)}(k_1) &= \frac{1}{2} (1 - \Sigma_1), \\
 \hat{e}^{(\alpha)*}(k_2) \cdot \hat{m} \quad \hat{m} \cdot \hat{e}^{(\beta)}(k_1) &= \frac{1}{2} (1 + \Sigma_1), \\
 \hat{e}^{(\alpha)*}(k_2) \cdot \hat{m}_2 \quad \hat{m} \cdot \hat{e}^{(\beta)}(k_1) &= -\frac{1}{2} (\Sigma_2 - i \Sigma_3), \\
 \hat{e}^{(\alpha)*}(k_2) \cdot \hat{m} \quad \hat{m}_1 \cdot \hat{e}^{(\beta)}(k_1) &= -\frac{1}{2} (\Sigma_2 + i \Sigma_3).
 \end{aligned} \tag{69}$$

Setzt man (63), (65) und (69) in (61) ein, so erhält man die kausale Amplitude im cms, ausgedrückt vermittels einer 4×4 - Matrix \mathcal{M} , die sich aus einer Linearkombination von Tensorprodukten von 2×2 - Matrizen aus den Spinräumen des Protons und des Photons zusammensetzt:

$$\begin{aligned}
 M(p_1, k_1, p_2, k_2) &= \chi_2^\dagger \eta_2^\dagger \mathcal{M}(p_1, k_1, p_2, k_2) \chi_1 \eta_1 \quad \text{mit} \\
 \mathcal{M}(p_1, k_1, p_2, k_2) &= (B_1 + B_2 i \vec{\sigma} \cdot \hat{m}) + (B_3 + B_4 i \vec{\sigma} \cdot \hat{m}) \Sigma_1 \\
 &\quad + (B_5 i \vec{\sigma} \cdot \hat{q} + B_6 \vec{\sigma} \cdot \hat{q}) \Sigma_2 + (B_7 i \vec{\sigma} \cdot \hat{q} + B_8 \vec{\sigma} \cdot \hat{q}) \Sigma_3
 \end{aligned} \tag{70}$$

mit

$$\begin{aligned}
 B_{1/3} &= \cos \theta \frac{(W-m)^2}{4W} (A_3 \mp A_1 - \frac{W+m}{m} (A_4 \mp A_2)) - \frac{(W+m)^2}{4W} (A_3 \mp A_1 + \frac{W-m}{m} (A_4 \mp A_2)), \\
 B_{2/4} &= -\sin \theta \frac{(W-m)^2}{4W} (A_3 \mp A_1 - \frac{W+m}{m} (A_4 \mp A_2)), \\
 B_{5/7} &= -\sin \frac{\theta}{2} \frac{W^2 - m^2}{2W} A_{5/7}, \\
 B_{6/8} &= \cos \frac{\theta}{2} \frac{W^2 - m^2}{2m} A_{6/8}.
 \end{aligned} \tag{71}$$

Das obere Vorzeichen bezieht sich auf den ersten Index, das untere auf den zweiten. Die Parametrisierung der Streuamplitude durch die skalaren Amplituden $B_1(s,t), \dots, B_8(s,t)$ ist das Analogon zur Wolfenstein - Parametrisierung der Streuamplitude für die elastische Nukleon - Nukleonstreuung²¹⁾. In dieser Form eignet sie sich besser für die Berechnung von Intensitäten und Polarisationen als in der Form (61).

Der Zusammenhang zwischen den skalaren Amplituden $A(s,t)$ bzw. $B(s,t)$ und den Helizitätsamplituden $f(s,t)$ ist schnell hergestellt, indem man in (70) die

Helizitätseigenvektoren für χ und η einsetzt und dann $M(p_1, k_1, p_2, k_2)$ explizit berechnet. Man erhält aus (68):

$$\eta(\mu_1) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \mu_1 \\ 1 - \mu_1 \end{pmatrix}; \quad \eta^\dagger(\mu_2) = -\frac{1}{2} (1 + \mu_2, 1 - \mu_2). \quad (72)$$

Wählt man das $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ - Koordinatensystem (22), das der Berechnung der Helizitätsamplituden zugrunde liegt, dann bestimmen sich die Helizitätseigen-spinoren $\chi(\lambda_{1/2})$ aus den Eigenwertgleichungen

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p}_{1/2} \chi(\lambda_{1/2}) = 2\lambda_{1/2} \chi(\lambda_{1/2}) \quad (73)$$

zu

$$\chi(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \lambda_1 \\ \frac{1}{2} - \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

und

$$\chi(\lambda_2) = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \lambda_2 \\ \frac{1}{2} - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} (\frac{1}{2} + \lambda_2) - \sin\frac{\theta}{2} (\frac{1}{2} - \lambda_2) \\ \sin\frac{\theta}{2} (\frac{1}{2} + \lambda_2) + \cos\frac{\theta}{2} (\frac{1}{2} - \lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \eta^\dagger(\mu_2) \eta(\mu_1) &= \frac{1}{2} |\mu_1 + \mu_2|; & \eta^\dagger(\mu_2) \Sigma_1 \eta(\mu_1) &= \frac{1}{2} |\mu_1 - \mu_2|; \\ \eta^\dagger(\mu_2) \Sigma_2 \eta(\mu_1) &= \frac{i}{2} (\mu_1 - \mu_2); & \eta^\dagger(\mu_2) \Sigma_3 \eta(\mu_1) &= \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) \end{aligned} \quad (75)$$

und

$$\begin{aligned} \chi^\dagger(\lambda_2) \chi(\lambda_1) &= |\lambda_1 + \lambda_2| \cos\frac{\theta}{2} + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin\frac{\theta}{2}; \\ \chi^\dagger(\lambda_2) i\vec{\sigma} \cdot \hat{m} \chi(\lambda_1) &= -|\lambda_1 + \lambda_2| \sin\frac{\theta}{2} + (\lambda_2 - \lambda_1) \cos\frac{\theta}{2}; \\ \chi^\dagger(\lambda_2) i\vec{\sigma} \cdot \hat{q} \chi(\lambda_1) &= i|\lambda_1 - \lambda_2|; \\ \chi^\dagger(\lambda_2) \vec{\sigma} \cdot \hat{z} \chi(\lambda_1) &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned} \quad (76)$$

erhält man aus (70) und (71):

$$\begin{aligned} 8\pi W f_{1/2} &= \pm (B_3 \sin\frac{\theta}{2} + B_4 \cos\frac{\theta}{2}) + B_5; \\ 8\pi W f_{3/4} &= - (B_3 \cos\frac{\theta}{2} - B_4 \sin\frac{\theta}{2}) \mp iB_6; \\ 8\pi W f_{5/6} &= \pm (B_1 \sin\frac{\theta}{2} + B_2 \cos\frac{\theta}{2}) - iB_7; \\ 8\pi W f_{7/8} &= - (B_1 \cos\frac{\theta}{2} - B_2 \sin\frac{\theta}{2}) \mp B_8; \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned}
 8\pi W f_{1/2} &= \mp \sin \frac{\Theta}{2} (E(A_1 + A_3) + K(A_2 + A_4 \pm A_5)); \\
 8\pi W f_{3/4} &= \cos \frac{\Theta}{2} (m(A_1 + A_3) + K \frac{W}{m} (A_2 + A_4 \mp i A_6)); \\
 8\pi W f_{5/6} &= \pm \sin \frac{\Theta}{2} (E(A_1 - A_3) + K(A_2 - A_4 \pm i A_7)); \\
 8\pi W f_{7/8} &= - \cos \frac{\Theta}{2} (m(A_1 - A_3) + K \frac{W}{m} (A_2 - A_4 \pm A_8)).
 \end{aligned} \tag{78}$$

Der durch $S^{-1} = i t$ definierte Operator t genügt auf Grund der Unitarität des Streuoperators

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1 \tag{79}$$

der Beziehung: $i(t^\dagger - t) = t t^\dagger = t^\dagger t. \tag{80}$

Für Photonlaborenergien unterhalb der Eipionerzeugungsschwelle (≈ 150 MeV) gilt bis auf störungstheoretische Korrekturen höherer Ordnung ($\alpha(e^2)$):

$$t t^\dagger = 0 \iff t = t^\dagger \iff \langle \psi^{aus} | t | \psi^{ein} \rangle = \langle \psi^{ein} | t | \psi^{aus*} \rangle. \tag{81}$$

In diesem Fall der Hermitezität der t - Matrix werden alle acht Amplituden $A_1(s,t), \dots, A_8(s,t)$ und $B_1(s,t), \dots, B_8(s,t)$ reell; für die Helizitätsamplituden folgt: f_1, f_2, f_7, f_8 werden reell und es bestehen folgende Zusammenhänge: $f_3 = f_4^*$ und $f_5 = -f_6^*$ (d.h. nur im Fall der T-Invarianz werden alle Helizitätsamplituden in der angegebenen Näherung reell). (82)

V DIE DICHEMATRIX:

1) Die Dichtematrix im Spinraum eines Teilchens: 22) 23)

In einem Streuexperiment werden Teilchenstrahlen identischer Teilchen (Masse m , Spin s) mit i.A. hinreichend scharfem Impuls p verwendet. Im Allgemeinen wird ein solches Teilchenensemble beschrieben durch einen "gemischten" Spinzustand, die inkohärente Superposition der reinen Spinzustände $|\psi_i\rangle$ der einzelnen im Ensemble enthaltenen Teilchensysteme, die jeweils alle Teilchen mit demselben Spinzustand umfassen.

Die Maximalinformation, die über den Spinzustand des Ensembles experimentell zugänglich ist, ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeiten P_i , mit denen sich alle Teilchen des Ensembles in jedem der vorkommenden, reinen, normierten Spinzustände $|\psi_i\rangle$ befinden. Zur Beschreibung einer solchen "gemischten Gesamtheit" eignet sich der Dichteoperator im Spinraum

$$R(p) = \sum_i |\psi_i\rangle P_i \langle \psi_i| \quad (83)$$

und die $2s+1$ - bzw. 2 - dimensionale Dichtematrix mit den Elementen

$$\rho_{s_3 s'_3}(p) = \sum_i \langle p, s, s_3 | \psi_i \rangle P_i \langle \psi_i | p, s, s'_3 \rangle \quad (84)$$

bezüglich einer Basis $|p, s, s_3\rangle$ mit $s_3 = -s, \dots, +s$ für $m \neq 0$ bzw. mit $s_3 = \pm s$ für $m = 0$. Mit Hilfe der Dichtematrix lässt sich der Erwartungswert einer Observablen A im Spinraum einfach berechnen zu

$$\langle A \rangle_p = \text{Sp} (A \rho(p)). \quad (85)$$

Auf Grund der Bedingungen:

$$\sum_i P_i = 1 ; \quad P_i \text{ reell und } P_i \geq 0 \text{ für alle } i, \quad (86)$$

die durch die Statistik gegeben sind, hat die Dichtematrix $\rho(p)$ folgende Eigenschaften:

- 1) sie ist hermitesch: $\rho(p) = \rho^\dagger(p)$.
- 2) $\text{Sp}(\rho(p)) = 1$.
- 3) $\rho_{s_3 s_3}(p) \geq 0$ für alle s_3 .
- 4) $\text{Sp}(\rho^2(p)) \leq 1$.

(Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn sich das gesamte Ensemble in einem reinen Spinzustand befindet).

Auf Grund dieser Eigenschaften ist die Dichtematrix und damit der Spinzustand des Teilchenstrahls bestimmt durch $4s(s+1)$ bzw. 3 reelle Parameter, z.B. durch die Erwartungswerte von $4s(s+1)$ bzw. 3 unabhängigen Observablen im Spinraum, je nachdem ob die Teilchen eine von Null verschiedene Masse haben oder masselos sind.

Die nun folgende Entwicklung des Dichtematrixformalismus' für die Comptonstreuung am Proton wird zunächst in der Darstellung durch die Paulimatrizen

σ_i bzw. Σ_i durchgeführt, die auch zur Beschreibung des Streumatrixelementes in (70) benutzt wurde. Eine kurze Übertragung in die Helizitätsdarstellung findet man im Kapitel V,5.

2) Die Dichtematrix des Protons und des Photons (nichtrelativistisch):

Sowohl das Proton als auch das Photon haben einen zweidimensionalen Spinraum (siehe Anhang II). Die allgemeinste 2×2 - Matrix, die die Eigenschaften 1) bis 4) erfüllt, lässt sich folgendermassen aus einem Satz von Basismatrizen, den drei spurlosen, hermiteschen Paulimatrizen und der Einheitsmatrix, aufbauen:

für das Proton:

$$\rho_{pr}(p) = \frac{1}{2} (1 + \vec{a}(\hat{p}) \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 a_k(\hat{p}) \sigma_k \text{ mit } \sigma_0 = 1, a_0 = 1 \quad (88)$$

bzw. für das Photon:

$$\rho_f(k) = \frac{1}{2} (1 + \vec{\xi}(k) \cdot \vec{\Sigma}) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^3 \xi_\ell(k) \Sigma_\ell \text{ mit } \Sigma_0 = 1, \xi_0 = 1 \quad (89)$$

mit dem Polarisationsgrad $|\vec{a}(\hat{p})| \leq 1$ bzw. $|\vec{\xi}(k)| \leq 1$. Im Fall $|\vec{a}| = 0$ bzw. $|\vec{\xi}| = 0$ ist der Teilchenstrahl unpolarisiert, im Fall $|\vec{a}| = 1$ bzw. $|\vec{\xi}| = 1$ ist er vollständig polarisiert. Die Parametrisierung der Dichtematrix durch den reellen Vektor \vec{a} bzw. $\vec{\xi}$ erweist sich sowohl für das Proton als auch für das Photon als physikalisch sinnvoll:

$\frac{\vec{a}(\hat{p})}{2}$ ist der Erwartungswert des Spinoperators $\frac{\vec{\sigma}}{2}$ des Protons:

$$\vec{a}(\hat{p}) = \langle \vec{\sigma} \rangle_p = \text{Sp}_{pr} (\vec{\sigma} \rho_{pr}(p)) \text{ ist} \quad (90)$$

der sogenannte Polarisationsvektor. Die Polarisation des Protons heisst longitudinal oder transversal, je nachdem ob \vec{a} parallel oder senkrecht zur Bewegungsrichtung steht. Im Folgenden wird der Polarisationsvektor \vec{a} stets durch seine Projektionen auf die Achsen eines orthonormierten Dreibeins, z.B.

$$\hat{q}, \hat{m}, \hat{n} \text{ (siehe (23)) oder } \hat{m} \times \hat{p} = \hat{x}, \hat{m} = \hat{y}, \hat{p} = \hat{z} \text{ (siehe (22))}$$

gegeben sein.

Befinden sich alle Photonen eines Photonenstrahles im reinen Spinzustand

$$\eta = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{\eta}| = |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1 \quad (91)$$

- im Minkowskiraum dargestellt durch den Polarisationsvektor $e_\mu(k)$ mit

$$\hat{e}(k) = - (a_+ \hat{e}^{(+)}(k) + a_- \hat{e}^{(-)}(k)), \quad e^0(k) \equiv 0 \quad (92)$$

dann wird

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 2 \operatorname{Re}(a_+^* a_-), \\ \zeta_2 &= 2 \operatorname{Im}(a_+^* a_-), \\ \zeta_3 &= |a_+|^2 - |a_-|^2. \end{aligned} \quad (93)$$

Diese drei Parameter, die eine reine Gesamtheit beschreiben, sind die sogenannten "Stokes'schen" Parameter²⁴⁾. Für sie gilt:

$$\vec{\zeta}(k) = \langle \vec{\Sigma} \rangle_k = \operatorname{Sp}_\gamma \left(\vec{\Sigma} \rho_\gamma(k) \right), \quad (94)$$

Folgende drei unabhängige Spezialfälle sind möglich:

a) $\zeta_1 = \pm 1$: ist erfüllt für $\eta = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dies entspricht den Polarisationsvektoren

$$\hat{e}(k) = \hat{m} \quad \text{bzw.} \quad \hat{e}(k) = \hat{n}. \quad (95)$$

b) $\zeta_2 = \pm 1$: ist erfüllt für $\eta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}$, dies entspricht den Polarisationsvektoren

$$\hat{e}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{n} \mp \hat{m}) \quad (96)$$

(dieses Paar von Vektoren ist um 45° gegen das aus a) verdreht).

c) $\zeta_3 = \pm 1$: ist erfüllt für $\eta = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\eta = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dies entspricht den Helizitätspolarisationsvektoren

$$\hat{e}^{(\pm)}(k) = - \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \hat{n} + i \hat{m}). \quad (97)$$

Im Fall $\zeta_1 = \pm 1$ bzw. $\zeta_2 = \pm 1$ ist der Photonenstrahl linear und transversal polarisiert entsprechend der Tatsache, dass der Polarisationsvektor reell ist

und senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. Im Fall $\zeta_3 = \pm 1$ ist er zirkular polarisiert. Dabei entspricht die positive Helizität der linkszirkularen Polarisation, die negative Helizität entsprechend der rechtszirkularen. Stets steht der zu $\vec{\zeta}$ gehörige Polarisationsvektor $\hat{e}_1(k)$ senkrecht auf dem zu $-\vec{\zeta}$ gehörigen $\hat{e}_2(k)$. Dementsprechend sind die Stokes'schen Parameter einer gemischten Gesamtheit

$$\vec{\zeta}' = (w_1 - w_2) \vec{\zeta}, \quad (98)$$

wenn das Ensemble von Photonen sich mit der Wahrscheinlichkeit w_1 bzw. w_2 im reinen Spinzustand $\hat{e}_1(k)$ bzw. $\hat{e}_2(k)$ befindet.

3) Der Dichtematrixformalismus in der Comptonstreuung am Proton:

Auf Grund der experimentellen Ausgangsposition kann angenommen werden, dass keinerlei Beziehung (Kohärenz) zwischen den Spineinstellungen der einfallenden Photonen und denen der Protontargets besteht. Unter dieser Voraussetzung ist die 4×4 - Dichtematrix des Anfangszustandes der Comptonstreuung das direkte Produkt der beiden Dichtematrizen $\rho_{pr}(p_1)$ und $\rho_\gamma(k_1)$:

$$\rho_{pr}^{ein}(p_1, k_1) = \rho_{pr}(p_1) \otimes \rho_\gamma(k_1) = \frac{1}{4} \sum_{k, \ell=0}^3 a_k(\hat{p}_1) \rho_\ell(k) \sigma_k \otimes \Sigma_\ell \quad (99)$$

$$\text{mit } \text{Sp} \rho^{ein} = (\text{Sp}_{pr} \rho_{pr}) (\text{Sp}_\gamma \rho_\gamma) = 1. \quad (100)$$

(Sp_{pr} : Spurbildung im Protonenspinraum, Sp_γ : im Photonenspinraum, Sp : im Tensorproduktraum).

Die Dichtematrix des Endzustandes der Comptonstreuung ist dann im cms:

$$\rho_{pr}^{aus}(p_1, k_1, p_2, k_2) = \frac{\mathcal{M} \rho_{pr}^{ein}(p_1, k_1) \mathcal{M}^\dagger}{\text{Sp} (\mathcal{M} \rho_{pr}^{ein}(p_1, k_1) \mathcal{M}^\dagger)}. \quad (101)$$

\mathcal{M} ist die in (70) hergeleitete Darstellungsmatrix des t - Operators der Comptonstreuung im vierdimensionalen Proton - Photonenspinraum. $\rho_{pr}^{aus}(p_1, k_1, p_2, k_2)$ ist derart normiert, dass

$$\text{Sp} \rho_{pr}^{aus}(p_1, k_1, p_2, k_2) = 1 \quad (102)$$

gilt. Es ist

$$\mathcal{M} g^{\text{ein}}(p_1, k_1) \mathcal{M}^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{\kappa, \ell=0}^3 a_\kappa(\hat{p}_1) g_\ell(k_1) \mathcal{M} \sigma_\kappa \otimes \Sigma_\ell \mathcal{M}^\dagger. \quad (103)$$

Andererseits lässt sich $\rho^{\text{aus}}(p_1, k_1, p_2, k_2)$ schreiben als

$$g^{\text{aus}}(p_1, k_1, p_2, k_2) = \frac{1}{4} \sum_{\ell, j=0}^3 A_{ij}(p_1, k_1, p_2, k_2) \sigma_i \otimes \Sigma_j \quad (104)$$

mit

$$A_{ij}(p_1, k_1, p_2, k_2) = \langle \sigma_i \otimes \Sigma_j \rangle' = \text{Sp} \{ (\sigma_i \otimes \Sigma_j) g^{\text{aus}} \}, \quad (105)$$

dabei ist $A_{00} = 1$; $a_i' = A_{i0} = \langle \sigma_i \rangle'$ ($i = 1, 2, 3$) sind die Komponenten des Polarisationsvektors des ausfallenden Protonenstrahles. (106)

$\Sigma_j' = A_{0j} = \langle \Sigma_j \rangle'$ mit $j = 1, 2, 3$ sind die Stokes'schen Parameter der gestreuten Photonen. (107)

Die restlichen neun Parameter A_{ij} für $i, j = 1, 2, 3$ stehen in Beziehung zu den Korrelationen der Spinerwartungswerte der beiden auslaufenden Teilchenstrahlen. (108)

Die Dichtematrix des ausfallenden Protonenstrahles ist also:

$$g_{\text{pr}}^{\text{aus}} = \frac{\text{Sp}_{\text{pr}}(\mathcal{M} g^{\text{ein}}(p_1, k_1) \mathcal{M}^\dagger)}{\text{Sp}(\mathcal{M} g^{\text{ein}}(p_1, k_1) \mathcal{M}^\dagger)}, \quad (109)$$

die der gestreuten Photonen:

$$g_{\text{st}}^{\text{aus}} = \frac{\text{Sp}_{\text{pr}}(\mathcal{M} g^{\text{ein}}(p_1, k_1) \mathcal{M}^\dagger)}{\text{Sp}(\mathcal{M} g^{\text{ein}}(p_1, k_1) \mathcal{M}^\dagger)}. \quad (110)$$

Die Beziehung zwischen Anfangs- und Endpolarisationen ist mit (101), (103) und (105):

$$A_{ij} = \frac{1}{\text{Sp}(\mathcal{M} g^{\text{ein}} \mathcal{M}^\dagger)} \sum_{\kappa, \ell=0}^3 a_\kappa(\hat{p}_1) g_\ell(k_1) S_{ij; \kappa \ell}(s, t), \quad (111)$$

wobei die 256 lorentzskalaren Grössen

$$S_{ij;kl}(s,t) = \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ (\sigma_i \otimes \Sigma_j) \mathcal{M} (\sigma_k \otimes \Sigma_l) \mathcal{M}^\dagger \right\}, \quad (112)$$

die sogenannten Polarisationskoeffizienten, unabhängig von den Polarisatio-
nen sind. Sie enthalten die gesamte Information über den Streumechanismus.
Gibt man sich die Anfangspolarisationen vor und misst man die Endpolarisa-
tionen, dann können prinzipiell sämtliche $S_{ij;kl}(s,t)$ bei festem s und t
experimentell bestimmt werden.

In der Sprechweise von Wolfenstein ²¹⁾, der die Nukleon - Nukleonstreuung
analysierte, sind

$$\begin{aligned} S_{io;ko} \text{ und } S_{oj;ol} & \text{ für } i,j,k,l = 1,2,3 \text{ die sogenannten Depolarisationstensoren,} \\ S_{io;ol} \text{ und } S_{oj;ko} & \text{ für } i,j,k,l = 1,2,3 \text{ die sogenannten Tensoren der Polari-} \\ & \text{sationsübertragung. } \quad 12) \end{aligned} \quad (113)$$

In diesem Formalismus ist es am günstigsten, die Polarisationsvektoren
der beiden Protonen durch ihre Projektionen auf die Achsen \hat{q} , \hat{m} , \hat{r} ein und
desselben Koordinatensystems anzugeben. Es ist also (siehe (23)):

$$\sigma_1 = \vec{\sigma} \cdot \hat{q}; \quad \sigma_2 = \vec{\sigma} \cdot \hat{m}; \quad \sigma_3 = \vec{\sigma} \cdot \hat{r}. \quad (114)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Comptonstreuung am Proton im cms
ist nach (42) und (53) für unpolarisierte Eingangsteilchen ($\vec{a}(\hat{p}_1) = 0$,
 $\vec{\zeta}(k_1) = 0$)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cms}} = \frac{1}{(8\pi W)^2} \frac{1}{4} \text{Sp} \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger = \frac{1}{(8\pi W)^2} S_{00;00}(s,t). \quad (115)$$

Für polarisierte Anfangsteilchen erhält man analog:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cms}} = \frac{1}{(8\pi W)^2} \text{Sp} \mathcal{M} \rho^{\text{ein}} \mathcal{M}^\dagger \Big/_{p_1+k_1=p_2+k_2}. \quad (116)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt im Laborsystem sieht dann folgender-
massen aus:

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{s}{m^2} \cdot \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} \left(\frac{d\vec{\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{cms}} = \frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_p \mathcal{M} \mathcal{S}^{\text{ein}} \mathcal{M}^{\text{T}}. \quad (117)$$

$\frac{s}{m^2} \cdot \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2}$ wird, in den kinematischen Variablen (26) des Laborsystems ausgedrückt:

$$\frac{s}{m^2} \cdot \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} = \frac{m(m+2E_{\text{Lab}})}{(m+E_{\text{Lab}}(1-\cos\Theta_{\text{Lab}}))^2}. \quad (118)$$

4) Relativistische Korrekturen:

Der Polarisationsgrad $|\vec{a}| = a$ und $|\vec{\zeta}| = \zeta$ ist invariant gegenüber allen eigentlichen Lorentztransformationen.

Hier interessieren vor allem die relativistischen Korrekturen des Polarisationsvektors des Protons bzw. der Stokes'schen Parameter des Photons, die für die reine Lorentztransformation anzubringen sind, die vom cms ins Laborsystem transformiert (die ja die Streuebene in sich transformiert).

Die Stokes'schen Parameter des Photons bleiben unter dieser Lorentztransformation invariant. Das liegt daran, dass - in der Schreibweise des Anhangs II - der unitäre Darsteller der Folge von Lorentztransformationen

$$L^{-1}(\Lambda K) \wedge L(K),$$

die alle den Dreiervektor senkrecht zur Streuebene invariant lassen, auf die Helizitätsbasis wie der Einheitsoperator wirkt.

Anders liegt der Fall beim Proton. In keinem Lorentzsystem ausser dem Ruhesystem lässt sich ein energieunabhängiger relativistischer Spinoperator definieren; deshalb hat das Konzept eines energieunabhängigen Polarisationsvektors \vec{a} als Erwartungswert des Spinoperators nur im Ruhesystem einen Sinn. Es lässt sich jedoch ein kovarianter (energieabhängiger) Polarisationsvektor a_μ definieren ^{25) 26)}, für den gilt

$$a_{\mu} p^{\mu} = 0, \text{ wo } p^{\mu} \text{ der Viererimpuls des Protons ist.} \quad (119)$$

Als "eigentlichen" Polarisationsdreiervektor definiert Stapp²⁵⁾ denjenigen Vektor \vec{a}_{Lab} , den man erhält, wenn man den kovarianten Polarisationsvektor im Laborsystem mit Hilfe einer drehungsfreien Lorentztransformation in das Ruhesystem des Protons transformiert. (Im Hinblick auf die Beschreibung von Mehrfachstreuexperimenten ist diese Definition die einzig sinnvolle).

Die entsprechende kovariante Dichtematrix im Diracspinorraum des Protons lautet

$$g_{pr} = \frac{1}{2} (1 + i \gamma_5 \gamma \cdot a) \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (120)$$

Die Ausführungen von Stapp²⁵⁾ beschränken sich auf die elastische Streuung von Spin $\frac{1}{2}$ - Teilchen an Spin 0 - bzw. Spin $\frac{1}{2}$ - Teilchen; sie lassen sich jedoch ohne weiteres auf die Comptonstreuung am Proton übertragen. Dementsprechend gilt die Gleichung (70) mit den nichtrelativistischen Dichtematrizen relativistisch exakt. Die darin auftretenden Dreierpolarisationsvektoren \vec{a} und \vec{a}' sind dabei diejenigen Vektoren, die man aus a_{μ} bzw. a'_{μ} durch eine drehungsfreie Lorentztransformation aus dem cms in das Ruhesystem des Anfangs - bzw. des Endprotons erhält. Sie unterscheiden sich also von den eigentlichen Polarisationsvektoren \vec{a}_{Lab} bzw. \vec{a}'_{Lab} durch eine Wignerrotation R bzw. R', die das Ergebnis der drei aufeinanderfolgenden, drehungsfreien Lorentztransformationen

$$\text{Ruhesystem } \begin{matrix} (a) \\ \rightarrow \end{matrix} \text{ cms } \begin{matrix} (b) \\ \rightarrow \end{matrix} \text{ Laborsystem } \begin{matrix} (c) \\ \rightarrow \end{matrix} \text{ Ruhesystem} \quad (121)$$

sind. Diese Drehung um eine Achse senkrecht zur Streuebene lässt Polarisationsvektoren senkrecht zur Streuebene invariant. Als Drehwinkel Ω gibt Stapp²⁵⁾

an:

$$\sin \Omega = \left| \vec{\beta}^{(a)} \times \vec{\beta}^{(b)} \right| \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} \frac{1 + \gamma^{(a)} + \gamma^{(b)} + \gamma^{(c)}}{(1 + \gamma^{(a)})(1 + \gamma^{(b)})(1 + \gamma^{(c)})}. \quad (122)$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ist der jeweilige Lorentzkontraktionsfaktor, $\vec{\beta}$ ist die Geschwindigkeit in natürlichen Einheiten. Für die Comptonstreuung mit Protontargets im Laborsystem ergibt sich mit

$$\gamma^{(a)} = \gamma^{(b)} = \frac{E}{m} = \frac{s+m^2}{2\sqrt{s} m}; \quad \gamma^{(c)} = 1 + \frac{K^2}{m^2} (1 - \cos \theta_{\text{cms}}) = 1 - \frac{t}{2m^2}; \quad (123a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cms}} &= \sum_{(\lambda, \mu)} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1} \overset{\text{ein}}{S}_{\lambda_1 \lambda'_1; \mu_1 \mu'_1} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda'_1 \mu'_1}^* \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k, l=0}^3 \tilde{a}_k f_e \sum_{(\lambda, \mu)} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1} (S_k)_{\lambda_1 \lambda'_1} (T_l)_{\mu_1 \mu'_1} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda'_1 \mu'_1}^* \end{aligned} \quad (131)$$

Σ bedeutet die Summation über alle vorkommenden Helizitäten, und (λ, μ)

$$\tilde{A}_{ij}(p_{1/2}, k_{1/2}) (8\pi W)^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cms}} = \sum_{k, l=0}^3 \tilde{a}_k (\hat{p}_1) f_e(k_l) \tilde{S}_{ij;kl}(s, t) \quad \text{mit} \quad (132)$$

$$\frac{1}{(8\pi W)^2} \tilde{S}_{ij;kl} = \frac{1}{4} \sum_{(\lambda, \mu)} (S_i)_{\lambda_2 \lambda'_2} (T_j)_{\mu_2 \mu'_2} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1} (S_k)_{\lambda_1 \lambda'_1} (T_l)_{\mu_1 \mu'_1} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda'_1 \mu'_1}^* \quad (133)$$

Entsprechend den verschiedenen benutzten Koordinatensystemen zur Kennzeichnung der Polarisationsvektoren der Protonenstrahlen ist:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \cos \frac{\Theta}{2} a_1 + \sin \frac{\Theta}{2} a_3; \\ \tilde{a}_0 &= a_0 = 1; \quad \tilde{a}_2 = a_2; \\ \tilde{a}_3 &= -\sin \frac{\Theta}{2} a_1 + \cos \frac{\Theta}{2} a_3; \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1j} &= \cos \frac{\Theta}{2} A_{1j} - \sin \frac{\Theta}{2} A_{3j}; \\ \tilde{A}_{0j} &= A_{0j}; \quad \tilde{A}_{2j} = A_{2j}; \\ \tilde{A}_{3j} &= \sin \frac{\Theta}{2} A_{1j} + \cos \frac{\Theta}{2} A_{3j}. \end{aligned} \quad (135)$$

Entsprechende Zusammenhänge bestehen zwischen den $S_{ij;kl}$ und den $\tilde{S}_{ij;kl}$.

VI DER EINSCHRÄNKENDE EINFLUSS DER SYMMETRIEPRINZIPIEN AUF DIE
POLARISATIONSKOEFFIZIENTEN:

1) Zahl der jeweils linear unabhängigen Polarisationskoeffizienten:

Wird ein Zweiteilchenstreuprozess bei fest vorgegebenen Werten für s und t durch n komplexe, lorentzinvariante, unabhängige Amplituden $U_1(s,t), \dots, U_n(s,t)$, d.h. durch $2n$ reelle Größen beschrieben, dann gibt es genau n^2 linear unabhängige Messgrößen (Wirkungsquerschnitte, Polarisierungen der gestreuten Teilchen und deren Korrelationen). Denn aus n komplexen Größen U_1, \dots, U_n lassen sich genau n^2 unabhängige, reelle Terme der Form

$$\sum_{\alpha, \beta} U_{\alpha}(s,t) U_{\beta}^*(s,t) \quad (136)$$

mit n Summanden bilden, wo α und β jeden Wert von 1 bis n genau einmal in der Summe annehmen.

Im Fall der Comptonstreuung am Proton bedeutet diese Aussage, dass bei 16 unabhängigen, lorentzinvarianten Amplituden 256 linear unabhängige Messgrößen existieren, solange keine weiteren Symmetrien deren Zahl reduzieren, z.B. die 256 Polarisationskoeffizienten $S_{ij;kl}(s,t)$. Die Paritätsinvarianz reduziert die Zahl der unabhängigen Amplituden auf 8; damit sind nur noch 6^4 der $S_{ij;kl}(s,t)$ linear unabhängig. Gilt P- und T-Invarianz, dann bleiben nur noch 6 Amplituden und damit 36 linear unabhängige Messgrößen $S_{ij;kl}(s,t)$.

Will man unter der Voraussetzung der P-Invarianz experimentell testen, ob eine Verletzung der T-Invarianz beim Comptoneffekt am Proton vorliegt, dann kann dies prinzipiell völlig modellunabhängig geschehen, indem man diese "lineare Unabhängigkeit" der entsprechenden Polarisationskoeffizienten $S_{ij;kl}(s,t)$ bei festem s und t testet. D.h. man bestimmt experimentell eine geeignete Auswahl von Messgrößen aus einem Satz von $6^4 S_{ij;kl}(s,t)$, die im Fall der T-Verletzung linear unabhängig sind, und bildet aus ihnen diejenigen Linearkombinationen, die im Fall der T-Invarianz identisch verschwinden (im Fall der T-Verletzung können sie nur in kinematisch "pathologischen" Fällen verschwinden).

Zum Nachweis der T-Verletzung reicht eine einzige derartige Kombination von Messungen bei fester Energie und bei festem Streuwinkel α , falls sie die

Bestätigung bringt. Umgekehrt ist der Nachweis der T-Invarianz erst dann gewährleistet, wenn eine solche Anordnung von Experimenten bei hinreichend vielen Energien und Streuwinkeln durchgeführt wird.

Im Anhang I sind sämtliche Polarisationskoeffizienten $S_{ij;kl}(s,t)$ und $\tilde{S}_{ij;kl}(s,t)$ der Comptonstreuung am Proton, unter der Voraussetzung der P-Invarianz berechnet, in je einer Tabelle zusammengestellt. Dabei sind die $S_{ij;kl}(s,t)$ durch die skalaren Amplituden $B_1(s,t), \dots, B_8(s,t)$, die $\tilde{S}_{ij;kl}(s,t)$ durch die Helizitätsamplituden $f_1(s,t), \dots, f_8(s,t)$ ausgedrückt.

Die Beziehungen, die sich für die Polarisationskoeffizienten $\tilde{S}_{ij;kl}(s,t)$ aus den Bedingungen der P-Invarianz und der T-Invarianz ergeben, werden in den folgenden Abschnitten in der Helizitätsdarstellung hergeleitet, da die entsprechenden Beziehungen für die Helizitätsamplituden besonders einfach sind: (siehe Kapitel III,1)

$$f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1}(s,t) \stackrel{(P)}{=} (-1)^{\lambda_1 - \lambda_2} f_{-\lambda_2 - \mu_2; -\lambda_1 - \mu_1}(s,t),$$

$$f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1}(s,t) \stackrel{(T)}{=} (-1)^{\lambda_1 - \lambda_2} f_{\lambda_1 \mu_1; \lambda_2 \mu_2}(s,t).$$

2) Einfluss der Raumpiegelungsinvarianz auf die Polarisationskoeffizienten:

a) Die Hälfte der $\tilde{S}_{ij;kl}(s,t)$ verschwindet identisch, denn mit

$$f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1} f_{\lambda_2' \mu_2'; \lambda_1' \mu_1'}^* = (-1)^{\lambda_2 - \lambda_2'} (-1)^{\lambda_1 - \lambda_1'} f_{-\lambda_2 - \mu_2; -\lambda_1 - \mu_1} f_{-\lambda_2' - \mu_2'; -\lambda_1' - \mu_1'}^* \quad (137)$$

und

$$(S_i)_{\lambda_2' \lambda_2} = (-1)^{\lambda_2 - \lambda_2'} (-1)^i (S_i)_{-\lambda_2' - \lambda_2} ; (S_k)_{\lambda_1 \lambda_1'} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_1'} (-1)^k (S_k)_{-\lambda_1 - \lambda_1'} \quad (138)$$

$$(T_j)_{\mu_2' \mu_2} = (-1)^{\delta_{j,2} + \delta_{j,3}} (T_j)_{-\mu_2' - \mu_2} ; (T_\ell)_{\mu_1 \mu_1'} = (-1)^{\delta_{\ell,2} + \delta_{\ell,3}} (T_\ell)_{-\mu_1 - \mu_1'} \quad (139)$$

folgt aus (133): $\tilde{S}_{ij;kl} = (-1)^{i+k} (-1)^{\delta_{j,2} + \delta_{j,3} + \delta_{\ell,2} + \delta_{\ell,3}} \tilde{S}_{ij;kl} \quad (140)$

d.h. $\tilde{S}_{ij;ke}(s,t) \equiv \sigma$ und $S_{ij;ke}(s,t) \equiv \sigma$ (141)

für ungerades $i+k + \delta_{i,2} + \delta_{j,3} + \delta_{e,2} + \delta_{l,3}$.

In wichtigen Spezialfällen hat die P-Invarianz die bekannten Wirkungen: schreibt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt im cms als Summe

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{unpolarisiert}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{polarisiert}} \text{ mit } \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{unpolarisiert}} = \frac{1}{(8\pi W)^2} S_{00,00},$$

dann lassen sich für $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{pol.}}$ folgende Folgerungen ziehen: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{pol.}}$ ist identisch Null, falls

- a) die Protontargets unpolarisiert und der einfallende Photonenstrahl zirkular oder linear unter 45° bzw. unter 135° gegen die Streuebene polarisiert sind ;
- β) die einfallenden Photonen unpolarisiert und die Protontargets in der Streuebene polarisiert sind.

Die Messung der Polarisation der ausfallenden Teilchenstrahlen vermittelt folgendes Ergebnis: bei unpolarisierten oder längs \hat{m} bzw. \hat{n} polarisierten, einfallenden Photonen und bei unpolarisierten oder senkrecht zur Streuebene polarisierten Protontargets tritt

- γ) nur eine Polarisation der gestreuten Photonen entweder längs \hat{m} oder längs \hat{n} auf;
- δ) nur eine Polarisation der Rückstossprotonen senkrecht zur Streuebene auf.

b) Unter den restlichen 128 nichtverschwindenden $\tilde{S}_{ij;kl}(s,t)$ sind einander je zwei dem Betrage nach gleich, denn mit

$$f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1}^* f_{\lambda_2' \mu_2'; \lambda_1' \mu_1'} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_2} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1} f_{-\lambda_2' - \mu_2'; -\lambda_1' - \mu_1'}^* \quad (142)$$

und mit

$$f_{S_{ij}} \lambda_2' \lambda_2 (S_{kl})_{\lambda_1 \lambda_1'} = (-1)^{\frac{1}{2}(\delta_{k,1} - \delta_{k,3} - \delta_{l,1} + \delta_{l,3})} (-1)^{\lambda_1' - \lambda_2'} (S_{i,2})_{-\lambda_2' \lambda_2} (S_{k,2})_{\lambda_1 - \lambda_1'} \quad (143)$$

(in "i±2" und "k±2" ist genau dasjenige Vorzeichen zu wählen, das nicht aus dem Indexbereich {0,1,2,3} herausführt)

$$\begin{aligned}
 (T_{j=0,1,2,3})_{\mu_2', \mu_2} &= (-1)^{\frac{1}{2}(\delta_{j,2} - \delta_{j,3})} (T_{j'=1,0,3,2})_{-\mu_2', \mu_2}; \\
 (T_{\ell=0,1,2,3})_{\mu_1, \mu_1'} &= (-1)^{\frac{1}{2}(\delta_{\ell,3} - \delta_{\ell,2})} (T_{\ell'=1,0,3,2})_{\mu_1, -\mu_1'}
 \end{aligned}
 \tag{144}$$

folgt aus (133):

$$\tilde{S}_{ij;kl}(s,t) = (-1)^{\frac{1}{2}(\delta_{k,1} - \delta_{k,3} - \delta_{i,1} + \delta_{i,3} + \delta_{j,2} - \delta_{j,3} - \delta_{\ell,2} + \delta_{\ell,3})} \tilde{S}_{i'j';k'\ell'}(s,t)$$

(145)

mit

$i, j, k, \ell =$	0	1	2	3
$i', k' =$	2	3	0	1
$j', \ell' =$	1	0	3	2

Dieselbe Beziehung gilt auch für die $S_{ij;kl}(s,t)$.

3) Einfluss der Zeitumkehrinvarianz auf die Polarisationskoeffizienten:

Es werden hier diejenigen Beziehungen zwischen den Polarisationskoeffizienten hergeleitet, die einerseits auf Grund von nur T-Invarianz gelten (die also auch gelten, wenn P verletzt ist), die andererseits jedoch genau ausreichen, um die 64 linear unabhängigen $\tilde{S}_{ij;kl}(s,t)$ im Fall der P-Invarianz auf 36 linear unabhängige zu reduzieren. (Experimentelle Tests der T-Invarianz, die auf diesen Beziehungen basieren, haben den zwar recht akademischen Vorteil, dass sie auch im Fall einer eventuellen P-Verletzung gültig bleiben).

Mit

$$f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1} f_{\lambda_2' \mu_2'; \lambda_1' \mu_1'}^* = (-1)^{\lambda_2 - \lambda_2'} (-1)^{\lambda_1 - \lambda_1'} f_{\lambda_1 \mu_1; \lambda_2 \mu_2} f_{\lambda_1' \mu_1'; \lambda_2' \mu_2'}^*$$

(146)

und

$$\begin{aligned}
 (S_i)_{\lambda_2' \lambda_2} &= (-1)^{\lambda_2 - \lambda_2'} (-1)^{\delta_{i,1}} (S_i)_{\lambda_2 \lambda_2'}; \\
 (S_k)_{\lambda_1 \lambda_1'} &= (-1)^{\lambda_1 - \lambda_1'} (-1)^{\delta_{k,1}} (S_k)_{\lambda_1' \lambda_1};
 \end{aligned}$$

(147a)

$$(T_j)_{\mu_2' \mu_2} = (-1)^{\delta_{j,2}} (T_j)_{\mu_2 \mu_2'}; \quad (147b)$$

$$(T_e)_{\mu_1 \mu_1'} = (-1)^{\delta_{e,2}} (T_e)_{\mu_1' \mu_1}$$

folgt aus (133):

$$\tilde{S}_{ij;kl}(s,t) = (-1)^{\delta_{i,1} + \delta_{k,1} + \delta_{j,2} + \delta_{e,2}} \tilde{S}_{kl;ij}(s,t). \quad (148)$$

Ausserdem gelten die Zusammenhänge:

$$a) \tilde{S}_{00,00} - \tilde{S}_{03,03} + \tilde{S}_{30,30} - \tilde{S}_{33,33} = \tilde{S}_{01,01} - \tilde{S}_{02,02} + \tilde{S}_{31,31} - \tilde{S}_{32,32};$$

$$b) \tilde{S}_{00,00} + \tilde{S}_{03,03} - \tilde{S}_{30,30} - \tilde{S}_{33,33} = -\tilde{S}_{10,10} + \tilde{S}_{20,20} - \tilde{S}_{13,13} + \tilde{S}_{23,23};$$

$$c) \tilde{S}_{00,21} - \tilde{S}_{33,12} = \tilde{S}_{01,20} + \tilde{S}_{32,13}; \quad (149)$$

$$d) \tilde{S}_{03,22} + \tilde{S}_{30,11} = -\tilde{S}_{02,23} + \tilde{S}_{31,10}.$$

Im Fall der zusätzlichen P-Invarianz vereinfachen sich die Aussagen unter a) und b) mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{01,01} &= \tilde{S}_{20,20} ; & \tilde{S}_{02,02} &= \tilde{S}_{23,23}; \\ \tilde{S}_{31,31} &= \tilde{S}_{10,10} ; & \tilde{S}_{32,32} &= \tilde{S}_{13,13} \text{ aus (145)} \end{aligned}$$

$$\text{zu} \quad \tilde{S}_{00,00} - \tilde{S}_{33,33} = \tilde{S}_{01,01} - \tilde{S}_{32,32} \quad (150)$$

$$\text{und} \quad \tilde{S}_{30,30} - \tilde{S}_{03,03} = \tilde{S}_{10,10} - \tilde{S}_{23,23}.$$

Die Beziehungen (148), (149) und (150) gelten ebenfalls für die $S_{ij;kl}(s,t)$. Im Gegensatz zur P-Invarianz bringt die T-Invarianzbedingung keine der Messgrössen $\tilde{S}_{ij;kl}$ bzw. $S_{ij;kl}$ zum Verschwinden.

Diese Aussagen über den Einfluss der T-Invarianz auf die Polarisationskoeff-

fizienten sind teilweise in dem Theorem von Satchler ²⁷⁾ mitenthalten. Dieses Theorem stellt ganz allgemein für Zweiteilchenreaktionen bei beliebigen Spins der Reaktionsteilnehmer den durch die T-Invarianz vermittelten Zusammenhang zwischen den Messgrößen (Intensitäten und Polarisierungen) der beiden Reaktionen $A + B \rightarrow C + D$ und $C + D \rightarrow A + B$ her. Für die Comptonstreuung als elastische Reaktion ist die Umkehrung der Bewegungsrichtung nicht nötig. Die kovariante Verallgemeinerung des Theorems findet sich bei ²⁸⁾.

4) Berücksichtigung der Unitarität unterhalb der Erzeugungsschwelle für π - Mesonen:

Prinzipiell werden, wie in der Einleitung begründet wurde, nur T-verletzende Amplituden von der Ordnung e^2 gesucht. Berücksichtigt man dementsprechend unterhalb der Einpionerzeugungsschwelle nur die störungstheoretische Approximation zweiter Ordnung in e für die Comptonstreuung, dann wird diese auf Grund der Unitarität (siehe (82)) beschrieben durch reelle, skalare Amplituden $A_1(s,t), \dots, A_8(s,t)$ bzw. $B_1(s,t), \dots, B_8(s,t)$ oder durch die Helizitätsamplituden $f_1(s,t), \dots, f_8(s,t)$, wo f_1, f_2, f_7, f_8 reell sind und zwischen f_3, f_4, f_5, f_6 folgende Zusammenhänge bestehen: $f_3 = f_4^*$ und $f_5 = -f_6^*$. Aus den Tabellen im Anhang I liest man ab, dass diese Eigenschaft der Hermitizität der t-Matrix im Fall der T-Verletzung nur das Verschwinden von 4 der 64 linear unabhängigen Polarisationskoeffizienten bewirkt, im Fall der T-Invarianz jedoch das Verschwinden von 15 der 36 linear unabhängigen Polarisationskoeffizienten. Dieses Ergebnis lässt sich zu günstigen Tests der T-Invarianz unterhalb der Einpionerzeugungsschwelle ausnützen. Sollte ein solcher experimenteller Test eine T-Verletzung anzeigen, dann muss dieser Effekt hinreichend gross sein. Denn man muss die Sicherheit haben, eine T-Verletzung und nicht die Abweichung von der störungstheoretischen Näherung gemessen zu haben.

Die günstigen Verhältnisse unterhalb von 150 MeV liegen daran, dass nur mit $t = t^\dagger$ die Beziehung $|\langle \psi^{\text{aus}} | t | \psi^{\text{ein}} \rangle| = |\langle T\psi^{\text{aus}} | t | T\psi^{\text{ein}} \rangle|$ gilt, in der nicht wie in (11) die Bewegungsumkehr berücksichtigt werden muss. Nur in diesem Fall trifft die (z.B. in der Kernphysik übliche) Argumentation zu, dass die "experimentelle Beobachtung" von Skalarprodukten wie z.B. $\langle \vec{\sigma} \rangle (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$ eine T-Verletzung anzeigen ^{14) 30)}.

5) Die experimentelle Bestimmung der Streumatrix:

Will man die Streumatrix für festes s und t , d.h. bei vorgegebener Energie und bei vorgegebenem Streuwinkel experimentell bestimmen, dann benötigt man bei n komplexen Amplituden $2n-1$ Experimente: n zur Bestimmung der Beträge der Amplituden und $n-1$ zur Bestimmung der Phasen; denn die Gesamtphase der Streumatrix kann experimentell nicht bestimmt werden.

Im Fall der T-Verletzung benötigt man 15 Experimente, im Fall der T-Invarianz nur 11 Experimente zur Bestimmung der Streumatrix der Comptonstreuung am Proton bei festen Werten der kinematischen Variablen. (P-Invarianz ist dabei vorausgesetzt).

VII VORSCHLÄGE FÜR EXPERIMENTE ZUM TEST DER T-INVARIANZ BEI DER COMPTONSTREUUNG AM PROTON:

Die Polarisation \vec{a} der Protontargets und die Stokes'schen Parameter $\vec{\zeta}$ des einfallenden Photonenstrahles seien bekannt. Der einlaufende Photonenstrahl könnte z.B. durch Bremsstrahlung an einem Kristall mit bekannter polarisierender Wirkung erzeugt werden ²⁹⁾.

Die Messung der Polarisation der Rückstossprotonen \vec{a}' bzw. der Stokes'schen Parameter $\vec{\zeta}'$ der gestreuten Photonen nach der Comptonstreuung am Proton erfolgt mit Hilfe von anschliessenden Streuexperimenten, die die Rolle des Analysators spielen. Zur Bestimmung der Korrelationsparameter der Polarisation nach der Comptonstreuung, der $A_{ij}(p_1, k_1, p_2, k_2) = \langle \sigma_i \otimes \Sigma_j \rangle$ für $i, j = 1, 2, 3$, wird mit beiden Teilchenstrahlen, den Rückstossprotonen und den gestreuten Photonen, je ein geeignetes Analysatorexperiment vorgenommen. Betrachtet man zu diesem Zweck beide Teilchenstrahlen als ein System ¹⁷⁾, dann wird eine solche Kombination von zwei unabhängigen Streuexperimenten beschrieben durch die Produktmatrix

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2,$$

wenn \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 die Streumatrizen der beiden Analysatorexperimente sind.

Die Dichtematrix des Systems der beiden Teilchenstrahlen vor der Analysatorstreuung ist gleich der Ausgangsdichtematrix der Comptonstreuung, die die A_{ij} enthält. Durch geeignete Wahl der beiden verschiedenen Streuebenen und durch geeignete Kombination von Wirkungsquerschnittsmessungen lassen sich die A_{ij} bestimmen.

Für alle diese Primär- und Tertiäreexperimente mit bekannter polarisierender bzw. analysierender Wirkung werden natürlich möglichst einfache, T-invariante Reaktionen gewählt.

Die in (61) eingeführten, skalaren Amplituden $A_1(s,t), \dots, A_8(s,t)$ sind nach einem Beweis von Hearn²⁰⁾ frei von kinematischen Singularitäten sowohl in s als auch in t (im Gegensatz zu den Amplituden $B_1(s,t), \dots, B_8(s,t)$ und den Helizitätsamplituden). Deshalb eignen sie sich am besten zur Beschreibung der theoretischen Grundlagen für experimentelle Tests.

Die im Folgenden auftretenden Polarisationskoeffizienten werden zunächst ausgedrückt durch die Amplituden $B_1(s,t), \dots, B_8(s,t)$, wie sie in der Tabelle im Anhang I zu finden sind. Mit Hilfe der Beziehung (71) zwischen den $B(s,t)$ und den $A(s,t)$ gewinnt man dann die Ergebnisse ausgedrückt durch die Amplituden $A_1(s,t), \dots, A_8(s,t)$.

Ausgangspunkt für sämtliche Tests ist die Beziehung (148), die experimentell entweder verifiziert oder widerlegt werden muss. Die nächstliegenden und einfachsten Tests der T-Invarianz sind folgende vier Kombinationen von Experimenten:

$$1) \text{ Aus } S_{00,20}(s,t) \equiv \tilde{S}_{00,20}(s,t) = \frac{1}{4} \text{Sp } \vec{\sigma} \hat{m} \vec{\sigma} \hat{m}^\dagger \quad (151)$$

$$= 2 \text{Im} (B_1 B_2^* + B_3 B_4^*) - 2 \text{Re} (B_5 B_6^* + B_7 B_8^*)$$

$$\text{und } S_{20,00}(s,t) \equiv \tilde{S}_{20,00}(s,t) = \frac{1}{4} \text{Sp } \vec{\sigma} \hat{m} \vec{\sigma} \hat{m}^\dagger \quad (152)$$

$$= 2 \text{Im} (B_1 B_2^* + B_3 B_4^*) + 2 \text{Re} (B_5 B_6^* + B_7 B_8^*)$$

$$\text{folgt: } \frac{1}{(8\pi W)^2} (S_{00,20} - S_{20,00}) = - \frac{4}{(8\pi W)^2} \text{Re} (B_5 B_6^* + B_7 B_8^*) \quad (153)$$

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{(W-m^2)^2}{2mW^3} \sin \theta_{\text{cms}} \cdot \text{Re} (A_5 A_6^* + A_7 A_8^*) \quad \text{im cms bzw.}$$

$$\frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} \frac{1}{4\pi^2 m^2} (S_{00,20} - S_{20,00}) = \frac{1}{(8\pi)^2} \sin \theta_{\text{Lab}} \frac{2m E_{\text{Lab}}^2}{(m + E_{\text{Lab}}(1 - \cos \theta_{\text{Lab}}))^3} \text{Re} (A_5 A_6^* + A_7 A_8^*)$$

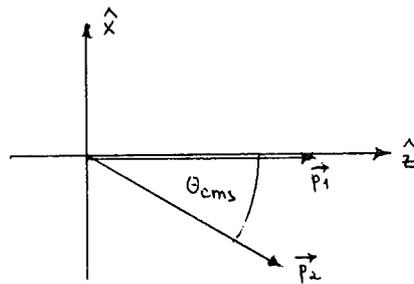
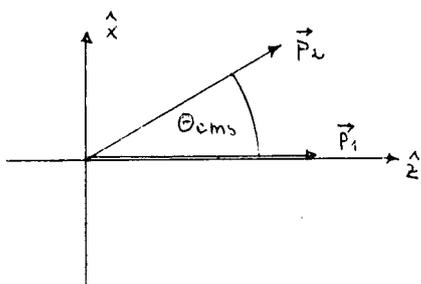
in der Terminologie des Laborsystems (siehe (117) und (118)).

Es ist:

$$\text{Re} (A_5 A_6^* + A_7 A_8^*) \begin{cases} \equiv 0 & \text{für T-Invarianz, da dann } A_6(s,t) \equiv 0 \\ & \text{und } A_7(s,t) \equiv 0 \text{ sind.} \\ \neq 0 & \text{für T-Verletzung.} \end{cases} \quad (154)$$

Der experimentelle Test der T-Invarianz besteht aus zwei Messungen; in beiden Experimenten ist der einfallende Photonenstrahl unpolarisiert.

- a) Die Protontargets sind senkrecht zur Streuebene (längs der positiven y - Achse) polarisiert mit dem Polarisationsgrad $0 \leq a \leq 1$. Zu messen ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der Links- und der Rechtsstreuung bei fester Energie und bei festem Streuwinkel:



Linksstreuung mit $\hat{m} = \frac{\hat{p}_1 \times \hat{p}_2}{|\hat{p}_1 \times \hat{p}_2|} = \hat{y}$; Rechtsstreuung mit $\hat{m} = \frac{\hat{p}_1 \times \hat{p}_2}{|\hat{p}_1 \times \hat{p}_2|} = -\hat{y}$.

$$\sigma_{L,R} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{lab}}} \right)_{L,R} = \frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} (S_{00,00} \pm a S_{00,20}). \quad (155)$$

Mit Hilfe dieser "Links - Rechtsasymmetriemessung" werden nun $S_{00,00}(s,t)$ und $S_{00,20}(s,t)$ bestimmt:

$$\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{00,00} = \frac{\bar{\sigma}_L + \bar{\sigma}_R}{2} ; \quad (156)$$

$$\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{00,20} = \frac{1}{a} \frac{\bar{\sigma}_L - \bar{\sigma}_R}{2} .$$

b) Die Protontargets sind unpolarisiert; zu messen ist der Polarisationsgrad $\vec{a}' \cdot \hat{m}$ der Rückstossprotonen senkrecht zur Streuebene:

$$\vec{a}' \cdot \hat{m} = \frac{S_{20,00}}{S_{00,00}} ; \quad \text{mit (156) folgt daraus:}$$

$$\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{20,00} = \vec{a}' \cdot \hat{m} \frac{\bar{\sigma}_L + \bar{\sigma}_R}{2} . \quad (157)$$

Mit Hilfe der Ergebnisse (156) und (157) aus den beiden Messungen a) und b) kann nun die Differenz

$$\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} (S_{00,20} - S_{20,00}) = \frac{\bar{\sigma}_L}{2} \left(\frac{1}{a} - \vec{a}' \cdot \hat{m} \right) - \frac{\bar{\sigma}_R}{2} \left(\frac{1}{a} + \vec{a}' \cdot \hat{m} \right)$$

gebildet werden.

2) Es handelt sich um das Analogieexperiment zu 1) für Photonen.

Aus

$$S_{00,01}(s,t) \equiv \tilde{S}_{00,01}(s,t) = \frac{1}{4} S_p \sum_1 \pi \pi^\dagger \quad (158)$$

$$= 2 \operatorname{Re} (B_1 B_3^* + B_2 B_4^*) + 2 \operatorname{Im} (B_5 B_7^* + B_6 B_8^*)$$

und

$$S_{01,00}(s,t) \equiv \tilde{S}_{01,00}(s,t) = \frac{1}{4} S_p \sum_1 \pi \pi^\dagger \quad (159)$$

$$= 2 \operatorname{Re} (B_1 B_3^* + B_2 B_4^*) - 2 \operatorname{Im} (B_5 B_7^* + B_6 B_8^*)$$

folgt:

$$\frac{1}{(8\pi W)^2} (S_{00,01} - S_{01,00}) = \frac{4}{(8\pi W)^2} \operatorname{Im} (B_5 B_7^* + B_6 B_8^*) \quad (160)$$

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} (1 + \cos \Theta_{\text{cms}}) \frac{(W^2 - m^2)^2}{2m^2 W^2} \operatorname{Im} \left(\frac{m^2}{W^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta_{\text{cms}}}{2} A_5 A_7^* + A_6 A_8^* \right) \text{ im cms}$$

bzw. im Laborsystem

$$\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} (S_{00,01} - S_{01,00}) = \frac{1}{(8\pi)^2} (1 + \cos \Theta_{\text{Lab}}) \frac{2m E_{\text{Lab}}^2}{(m + E_{\text{Lab}}(1 - \cos \Theta_{\text{Lab}}))^3} \operatorname{Im} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\Theta_{\text{Lab}}}{2} A_5 A_7^* + A_6 A_8^* \right) .$$

Es ist:

$$\Im_m \left(\frac{1}{2} \frac{\theta_{lab}}{z} A_5 A_7^* + A_6 A_8^* \right) \begin{cases} \equiv 0 & \text{für T-Invarianz, da dann} \\ & A_6(s,t) \equiv 0 \text{ und } A_7(s,t) \equiv 0 \text{ sind.} \\ \neq 0 & \text{für T-Verletzung.} \end{cases} \quad (161)$$

Der experimentelle Test der T-Invarianz besteht ebenfalls aus zwei Messungen; in beiden sind die Protontargets unpolarisiert.

- a) Der einfallende Photonenstrahl sei α) senkrecht zur Streuebene längs \hat{m} (d.h. längs der positiven \hat{y} - Achse) und β) in der Streuebene längs \hat{n} (d.h. längs der negativen \hat{x} - Achse) polarisiert und zwar jeweils mit demselben Polarisationsgrad $0 \leq \zeta \leq 1$. Zu messen sind die zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitte bei einer Energie und einem Streuwinkel (Asymmetriemessung):

$$\sigma_{\alpha, \beta} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{lab}} \right)_{\alpha, \beta} = \frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} (S_{00,00} \pm \zeta S_{00,01}) \quad (162)$$

Daraus bestimmen sich $\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{00,00}$ und $\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{00,01}$ zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{00,00} &= \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2}; \\ \frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{00,01} &= \frac{1}{\zeta} \frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{2}. \end{aligned} \quad (163)$$

- b) Die einfallenden Photonen sind ebenfalls unpolarisiert; gemessen wird der Polarisationsgrad ζ' der gestreuten Photonen senkrecht zur Streuebene längs \hat{m} (bzw. parallel zur Streuebene längs \hat{n})

$$\zeta' = \pm \frac{S_{01,00}}{S_{00,00}};$$

mit (163) folgt daraus:

$$\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} S_{01,00} = \pm \zeta' \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} \quad (164)$$

Mit Hilfe der Ergebnisse (163) und (164) aus den beiden Messungen a) und b) kann nun die Differenz

$$\frac{1}{(8\pi m)^2} \frac{(u-m^2)^2}{(s-m^2)^2} (S_{00,01} - S_{01,00}) = \frac{v_{00}}{2} \left(\frac{1}{y^{(+)} f'} \right) - \frac{v_{01}}{2} \left(\frac{1}{y^{(-)} f'} \right)$$

gebildet werden.

3) Hier werden zwei Elemente des Depolarisationstensors des Protons miteinander verglichen:

Aus

$$S_{30,10}(s,t) = \frac{1}{4} S_p(\vec{\sigma} \hat{q} \pi \vec{\sigma} \hat{q} \pi^\dagger) \quad (165)$$

$$= 2 \operatorname{Re}(B_1 B_2^* + B_3 B_4^*) - 2 \operatorname{Im}(B_5 B_6^* + B_7 B_8^*)$$

und

$$S_{10,30}(s,t) = \frac{1}{4} S_p(\vec{\sigma} \hat{q} \pi \vec{\sigma} \hat{q} \pi^\dagger) \quad (166)$$

$$= -2 \operatorname{Re}(B_1 B_2^* + B_3 B_4^*) - 2 \operatorname{Im}(B_5 B_6^* + B_7 B_8^*)$$

folgt:

$$S_{30,10} + S_{10,30} = -4 \operatorname{Im}(B_5 B_6^* + B_7 B_8^*). \quad (167)$$

Dieses Ergebnis ist dem Imaginärteil der Grösse, deren Realteil im Experiment 1) unter (153) bestimmt wird, proportional und ist deshalb aus denselben Gründen

$$\begin{cases} \equiv 0 & \text{für T-Invarianz} \\ \neq 0 & \text{für T-Verletzung.} \end{cases}$$

Allgemeiner noch gilt:

$$S_{30,10} + S_{10,30} = \frac{1}{4} S_p(\vec{\sigma} \hat{g} \pi \vec{\sigma} \hat{f} \pi^\dagger) + \frac{1}{4} S_p(\vec{\sigma} \hat{g}' \pi \vec{\sigma} \hat{f}' \pi^\dagger) \quad (168)$$

wenn

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \cos \psi \hat{q} - \sin \psi \hat{r} & ; & \quad \hat{g} = -\sin \psi \hat{q} + \cos \psi \hat{r} & ; \\ \hat{f}' &= \sin \psi \hat{q} + \cos \psi \hat{r} & ; & \quad \hat{g}' = \cos \psi \hat{q} + \sin \psi \hat{r} \end{aligned} \quad (169)$$

mit beliebigem Winkel ψ sind; (es ist $\hat{f} \perp \hat{f}'$; $\hat{g} \perp \hat{g}'$).

Für $\psi = -\frac{\theta_{\text{cms}}}{2}$, d.h. $\hat{f} = \hat{m} \times \hat{p}_{1\text{cms}} = \hat{x}$, $\hat{g} = \hat{p}_{2\text{cms}} = \hat{z}'$, $\hat{f}' = \hat{p}_{1\text{cms}} = \hat{z}$ und $\hat{g}' = \hat{m} \times \hat{p}_{2\text{cms}} = \hat{x}'$ erhält man mit (165), (166), (168) und (169):

$$S_{30;10} + S_{10;30} = \tilde{S}_{30;10} + \tilde{S}_{10;30}. \quad (170)$$

Auf Grund der Ergebnisse aus Kapitel V 4) sieht man ein, dass für $\Psi = \frac{\Omega}{2}$ bei der Lorentztransformation aus dem cms in das Laborsystem unter Berücksichtigung der relativistischen Korrekturen für die einzelnen Polarisationsrichtungen der Rückstossprotonen folgende Verhältnisse vorliegen:

$$\begin{aligned} \hat{f} &\equiv \hat{p}_{2\text{Lab}}; & \hat{f}' &\equiv \hat{p}_{2\text{Lab}} \times \hat{m}; \\ \hat{g} &\xrightarrow{\text{Drehung um } \Omega} \hat{p}_{2\text{Lab}} \times \hat{m}; & \hat{g}' &\xrightarrow{\text{Drehung um } \Omega} \hat{p}_{2\text{Lab}}. \end{aligned} \quad (171)$$

Man kann sich also bei dem Ausdruck $S_{30;10} + S_{10;30}$ unter der "1" - Achse anstatt \hat{q} im cms den Einheitsvektor $\hat{p}_{2\text{Lab}}$ im Laborsystem bzw. unter der "3" - Achse anstatt $\hat{r} = \hat{q} \times \hat{m}$ im cms den Einheitsvektor $\hat{p}_{2\text{Lab}} \times \hat{m}$ im Laborsystem vorstellen, ohne dass sich dabei am Ergebnis etwas ändert. (Das ist einsichtig, da ja die Beziehungen (148) und (149), die im Fall der T-Invarianz bestehen, kovariant gegenüber allen Lorentztransformationen sind).

Der experimentelle Test besteht aus zwei Messungen; in beiden Fällen ist der primäre Photonenstrahl unpolarisiert.

- a) Die Protontargets sind längs $\hat{p}_{2\text{Lab}}$, der Laborimpulsrichtung der Rückstossprotonen, mit dem Polarisationsgrad $0 \leq a \leq 1$ polarisiert; gemessen wird die transversale Polarisation längs $\hat{p}_{2\text{Lab}} \times \hat{m}$ (also in der Streuebene) der Rückstossprotonen:

$$\vec{a}'_{\text{Lab}} \cdot (\hat{p}_{2\text{Lab}} \times \hat{m}). \quad (172)$$

- b) Die Protontargets sind längs $\hat{p}_{2\text{Lab}} \times \hat{m}$ polarisiert mit dem Polarisationsgrad $0 \leq b \leq 1$; gemessen wird die longitudinale Polarisation längs $\hat{p}_{2\text{Lab}}$ der Rückstossprotonen:

$$\vec{b}'_{\text{Lab}} \cdot \hat{p}_{2\text{Lab}}. \quad (173)$$

Es ist dann

$$\frac{\vec{a}'_{\text{Lab}} \cdot (\hat{p}_{2\text{Lab}} \times \hat{m})}{a} + \frac{\vec{b}'_{\text{Lab}} \cdot \hat{p}_{2\text{Lab}}}{b} = \frac{S_{30;10} + S_{10;30}}{S_{00;00}} \quad (174)$$

die betrachtete Summe.

Wichtig ist sowohl in a) als auch in b), dass die Protontargets ausser der vorgeschriebenen keine andere Polarisationskomponente in der Streuebene besitzen.

4) Hier werden analog zu 3) zwei Elemente des Depolarisationstensors des Photons miteinander verglichen.

Aus

$$S_{02,03}(s_1,t) = \tilde{S}_{02,03}(s_1,t) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\Sigma_2 \mathcal{M} \Sigma_3 \mathcal{M}^\dagger) \quad (175)$$

$$= -2 \text{Im}(B_1 B_3^* + B_2 B_4^*) + 2 \text{Re}(B_5 B_7^* + B_6 B_8^*)$$

und

$$S_{03,02}(s_1,t) = \tilde{S}_{03,02}(s_1,t) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\Sigma_3 \mathcal{M} \Sigma_2 \mathcal{M}^\dagger) \quad (176)$$

$$= +2 \text{Im}(B_1 B_3^* + B_2 B_4^*) + 2 \text{Re}(B_5 B_7^* + B_6 B_8^*)$$

folgt

$$(S_{02,03} + S_{03,02}) = 4 \text{Re}(B_5 B_7^* + B_6 B_8^*); \quad (177)$$

dieses Ergebnis ist dem Realteil derjenigen Grösse, deren Imaginärteil im Experiment 2) unter (160) bestimmt wird, proportional und ist deshalb aus denselben Gründen

$$\begin{cases} \equiv 0 & \text{für T-Invarianz,} \\ \neq 0 & \text{für T-Verletzung.} \end{cases}$$

Der experimentelle Test besteht ebenfalls aus zwei Messungen, die beide mit unpolarisierten Protontargets durchgeführt werden.

a) Der einfallende Photonenstrahl ist linear unter 45° gegen die Streuebene polarisiert mit einem Polarisationsgrad $0 \leq \zeta_2 \leq 1$; zu messen ist die linkszirkulare (bzw. rechtszirkulare) Polarisation der gestreuten Photonen:

$$\eta_3^{\pm} = \zeta_2 \frac{S_{03,02}}{S_{00,00}}. \quad (178)$$

b) Der einfallende Photonenstrahl ist linkszirkular polarisiert mit einem Polarisationsgrad $0 \leq \eta_3 \leq 1$; zu messen ist die lineare Polarisation der gestreuten Photonen unter 45° (bzw. unter 135°) gegen die Streuebene:

$$\eta_2^{\pm} = \eta_3 \frac{S_{02,03}}{S_{00,00}}. \quad (179)$$

Es ist

$$\frac{+}{(-)} \frac{\eta_3'}{\eta_2} + \frac{+}{(-)} \frac{\eta_2'}{\eta_3} = \frac{S_{03,02} + S_{02,03}}{S_{00,00}} \quad (180)$$

die betrachtete Summe.

Ähnliche Experimente wie unter 3) und 4) lassen sich aus dem Vergleich von Elementen der Tensoren der Polarisationsübertragung ableiten. Die Summen:

$$\begin{aligned} 5) S_{02,10} - S_{10,02} ; & \quad 6) S_{03,10} + S_{10,03} \\ 7) S_{02,30} + S_{30,02} ; & \quad 8) S_{03,30} - S_{30,03} \end{aligned} \quad (181)$$

verschwinden alle nur im Fall der T-Invarianz identisch. Für jedes dieser Experimente sind ebenfalls nur zwei Messungen erforderlich.

Die Bestimmung der Summe der Betragsquadrate der beiden T-verletzenden Amplituden B_6 und B_7

$$\begin{aligned} |B_6|^2 + |B_7|^2 & \sim \left\{ |A_6|^2 + \frac{1}{2} \frac{\theta_{Lab}}{2} |A_7|^2 \right\} (1 + \cos \theta_{Lab}) \\ & \sim S_{00,00} - S_{01,01} - S_{33,33} + S_{32,32} \end{aligned} \quad (182)$$

erfordert schon einen erheblich grösseren experimentellen Aufwand, da unter anderem die Bestimmung von Korrelationsparametern der Polarisation notwendig wird.

Diskussion der zum Test der T-Invarianz vorgeschlagenen Experimente:

Die Experimente 2), 3), 6) und 8) werden erst sinnvoll für Energien oberhalb der Einpionerzeugungsschwelle, da unterhalb der Schwelle alle Amplituden $A(s,t)$ bzw. $B(s,t)$ in der e^2 - Näherung reell sind und deswegen auf Grund der Hermitizität die entscheidenden Terme

$$\begin{aligned} \text{Im} (B_5 B_7^* + B_6 B_8^*) \text{ in 2) ; } & \quad \text{Im} (B_5 B_6^* + B_7 B_8^*) \text{ in 3) ;} \\ \text{Im} (B_1 B_7^* - B_4 B_6^*) \text{ in 6) ; } & \quad \text{Im} (B_2 B_7^* + B_3 B_6^*) \text{ in 8) } \end{aligned} \quad (183)$$

identisch verschwinden.

Im Fall der Hermitezität unterhalb der Einpionschwelle vereinfachen sich auch die Experimente 1), 4), 5) und 7) wesentlich; die Polarisationskoeffizienten

$$\begin{array}{cccc} S_{00;20} & ; & S_{20;00} & ; & S_{03;02} & ; & S_{02;03} & ; \\ S_{02;10} & ; & S_{10;02} & ; & S_{02;30} & ; & S_{30;02} & \end{array} \quad (184)$$

verschwinden einzeln in der e^2 - Näherung identisch nur im Fall der T-Invarianz. Ein experimenteller Nachweis der T-Verletzung in der e^2 - Näherung unterhalb der Einpionerzeugungsschwelle wäre damit erbracht, wenn die Messung eines der in (184) aufgezählten Polarisationskoeffizienten einen erheblich von Null abweichenden Wert ergäbe. In diesem Zusammenhang ist die Bestimmung von $S_{00;20}$, $S_{02;10}$ und $S_{02;30}$ weniger empfehlenswert, da dazu polarisierte Protontargets benötigt werden. Die Polarisationskoeffizienten $S_{20;00}$, $S_{03;02}$, $S_{02;03}$, $S_{10;02}$ und $S_{30;02}$ sind jeweils durch eine einzige Polarisationsmessung mit unpolarisierten Protontargets im Anfangszustand bestimmt. Den Vorschlag für das günstigste dieser Experimente, die Bestimmung des Polarisationskoeffizienten $S_{20;00}$, d.h. die Bestimmung von $\langle \vec{\sigma} \rangle (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$, findet man auch in ²⁹⁾. Ein überzeugendes Ergebnis ist jedoch wahrscheinlich unterhalb der Einpionerzeugungsschwelle nicht zu erwarten, da die Comptonwirkungsquerschnitte unterhalb von 150 MeV sehr klein sind ^{10) 36)}. Ausserdem bestimmt die T-invariante Bornapproximation unterhalb der Schwelle das Verhalten der Streuamplitude.

Im Allgemeinfall beliebiger Energien erfordert Experiment 1) von allen Experimenten bis auf die Polarisation der Protontargets den geringsten Aufwand und ist deshalb am ehesten verifizierbar. Es empfiehlt sich, das Experiment bei einem cms-Streuwinkel von 90° durchzuführen, denn erstens ist

$$(S_{00;20} - S_{20;00}) \sim \sin \Theta_{\text{cms}} \operatorname{Re} (A_5 A_6^* + A_7 A_8^*) \quad (185)$$

und zweitens ist die Messung der Polarisation der Rückstossprotonen wegen ihrer kleinen Energie bei kleinen Winkeln

$$p_{z \text{ Lab}}^0 = m - \frac{t}{2m} = m + \frac{E_{\text{Lab}}^2 (1 - \cos \Theta_{\text{Lab}})}{E_{\text{Lab}} (1 - \cos \Theta_{\text{Lab}}) + m} \quad (186)$$

sehr schwierig.

ANHANG I: Eine Tabelle sämtlicher Polarisationskoeffizienten der Compton-
streuung am Proton (unter der Voraussetzung der P - Invarianz
berechnet).

In den folgenden Tabellen sind die beiden 16×16 - Matrizen $S_{ij;kl}(s,t)$ und $\tilde{S}_{ij;kl}(s,t)$ zusammengestellt.

$$S_{ij;kl}(s,t) = \frac{1}{4} \text{Sp} \left\{ (\sigma_i \otimes \Sigma_j) \mathcal{M} (\sigma_k \otimes \Sigma_l) \mathcal{M}^\dagger \right\}, \quad i,j,k,l = 0,1,2,3$$

mit

$$\mathcal{M} = B_1 + B_2 i \vec{\sigma} \hat{m} + (B_3 + B_4 i \vec{\sigma} \hat{m}) \Sigma_1 + (B_5 i \vec{\sigma} \hat{q} + B_6 \vec{\sigma} \hat{r}) \Sigma_2 + (B_7 i \vec{\sigma} \hat{q} + B_8 \vec{\sigma} \hat{r}) \Sigma_3;$$

$\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = \vec{\sigma} \hat{q}$, $\sigma_2 = \vec{\sigma} \hat{m}$, $\sigma_3 = \vec{\sigma} \hat{r}$ sind die Paulimatrizen im Protonspinraum, $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ die im Photonenspinraum. (Das Koordinatensystem ist unter (23) angegeben).

$$\tilde{S}_{ij;kl}(s,t) = (8\pi W)^2 \frac{1}{4} \sum_{(\lambda_1, \mu_1)} (s_i)_{\lambda_2 \lambda_1} (T_j)_{\mu_2 \mu_1} f_{\lambda_2 \mu_2; \lambda_1 \mu_1} \times \\ \times (S_k)_{\lambda_1 \lambda_1'} (T_l)_{\mu_1 \mu_1'} f_{\lambda_2' \mu_2'; \lambda_1' \mu_1'}$$

$i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$.

Die Matrizen $(T_j)_{\mu_2 \mu_1}$ bzw. $(T_l)_{\mu_1 \mu_1'}$ sind die Σ - Matrizen in der Helizitätsdarstellung, die $(S_k)_{\lambda_1 \lambda_1'}$ sind die σ - Matrizen in der Helizitätsdarstellung bezogen auf das $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ - Koordinatensystem (22), die $(s_i)_{\lambda_2 \lambda_1}$ sind entsprechend auf das $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ - Koordinatensystem (22) bezogen ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).

Infolge der Raumpiegelungsinvarianz verschwindet je die Hälfte der Elemente identisch (siehe (141)). Von den restlichen Elementen sind einander je zwei dem Betrag nach gleich (siehe (145)).

Die Konsequenzen der Zeitumkehrinvarianz können direkt aus den Tabellen abgelesen werden, wenn $B_6(s,t) \equiv 0$ und $B_7(s,t) \equiv 0$ bzw. $f_3(s,t) \equiv f_4(s,t)$ und $f_5(s,t) \equiv -f_8(s,t)$ gesetzt werden.

Zur Spurbildung sind folgende Beziehungen nützlich:

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_{PR} \vec{a} \cdot \vec{a} = 0;$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_{PR} (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad (187)$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_{PR} (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b}) (\vec{c} \cdot \vec{c}) = i \det (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_{PR} (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b}) (\vec{c} \cdot \vec{c}) (\vec{d} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) + (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_f \Sigma_i = 0;$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_f \Sigma_i \Sigma_j = \delta_{ij};$$

(188)

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_f \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k = i \epsilon_{ijk};$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_f \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k \Sigma_l = \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}.$$

$S_{ij;k}$	$k = 0 ; l = 0$	$k = 0 ; l = 1$	$k = 0 ; l = 2$	$k = 0 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	$ B_1 ^2 + B_2 ^2 + B_3 ^2 + B_4 ^2 + B_5 ^2 + B_6 ^2 + B_7 ^2 + B_8 ^2$	$2\text{Re}(B_1B_3^* + B_2B_4^*) + 2\text{Im}(B_5B_7^* + B_6B_8^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 1$	$2\text{Re}(B_1B_3^* + B_2B_4^*) - 2\text{Im}(B_5B_7^* + B_6B_8^*)$	$ B_1 ^2 + B_2 ^2 + B_3 ^2 + B_4 ^2 - B_5 ^2 - B_6 ^2 - B_7 ^2 - B_8 ^2$	0	0
$i = 0$ $j = 2$	0	0	$ B_1 ^2 + B_2 ^2 - B_3 ^2 - B_4 ^2 + B_5 ^2 + B_6 ^2 - B_7 ^2 - B_8 ^2$	$-2\text{Im}(B_1B_3^* + B_2B_4^*) + 2\text{Re}(B_5B_7^* + B_6B_8^*)$
$i = 0$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_3^* + B_2B_4^*) + 2\text{Re}(B_5B_7^* + B_6B_8^*)$	$ B_1 ^2 + B_2 ^2 - B_3 ^2 - B_4 ^2 - B_5 ^2 - B_6 ^2 + B_7 ^2 + B_8 ^2$
$i = 2$ $j = 0$	$2\text{Im}(B_1B_2^* + B_3B_4^*) + 2\text{Re}(B_5B_6^* + B_7B_8^*)$	$2\text{Im}(B_1B_4^* - B_2B_3^* + B_5B_8^* + B_6B_7^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 1$	$2\text{Im}(B_1B_4^* - B_2B_3^* - B_5B_8^* - B_6B_7^*)$	$2\text{Im}(B_1B_2^* + B_3B_4^*) - 2\text{Re}(B_5B_6^* + B_7B_8^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 2$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_2^* - B_3B_4^*) + 2\text{Re}(B_5B_6^* - B_7B_8^*)$	$2\text{Re}(B_1B_4^* - B_2B_3^* + B_5B_8^* + B_6B_7^*)$
$i = 2$ $j = 3$	0	0	$-2\text{Re}(B_1B_4^* - B_2B_3^* - B_5B_8^* - B_6B_7^*)$	$2\text{Im}(B_1B_2^* - B_3B_4^*) - 2\text{Re}(B_5B_6^* - B_7B_8^*)$
$i = 1$ $j = 0$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_5^* + B_4B_8^*) - 2\text{Re}(B_2B_6^* - B_3B_7^*)$	$2\text{Im}(B_1B_7^* - B_4B_6^*) - 2\text{Re}(B_2B_8^* + B_3B_5^*)$
$i = 1$ $j = 1$	0	0	$2\text{Re}(B_1B_7^* - B_4B_6^*) + 2\text{Im}(B_2B_8^* + B_3B_5^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_5^* + B_4B_8^*) - 2\text{Im}(B_2B_6^* - B_3B_7^*)$
$i = 1$ $j = 2$	$2\text{Im}(B_1B_5^* - B_4B_8^*) - 2\text{Re}(B_2B_6^* + B_3B_7^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_7^* + B_4B_6^*) - 2\text{Im}(B_2B_8^* - B_3B_5^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 3$	$2\text{Im}(B_1B_7^* + B_4B_6^*) - 2\text{Re}(B_2B_8^* - B_3B_5^*)$	$2\text{Re}(B_1B_5^* - B_4B_8^*) + 2\text{Im}(B_2B_6^* + B_3B_7^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 0$	0	0	$2\text{Re}(B_1B_6^* + B_4B_7^*) + 2\text{Im}(B_2B_5^* - B_3B_8^*)$	$2\text{Re}(B_1B_8^* - B_4B_5^*) + 2\text{Im}(B_2B_7^* + B_3B_6^*)$
$i = 3$ $j = 1$	0	0	$-2\text{Im}(B_1B_8^* - B_4B_5^*) + 2\text{Re}(B_2B_7^* + B_3B_6^*)$	$2\text{Im}(B_1B_6^* + B_4B_7^*) - 2\text{Re}(B_2B_5^* - B_3B_8^*)$
$i = 3$ $j = 2$	$2\text{Re}(B_1B_6^* - B_4B_7^*) + 2\text{Im}(B_2B_5^* + B_3B_8^*)$	$2\text{Im}(B_1B_8^* + B_4B_5^*) - 2\text{Re}(B_2B_7^* - B_3B_6^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 3$	$2\text{Re}(B_1B_8^* + B_4B_5^*) + 2\text{Im}(B_2B_7^* - B_3B_6^*)$	$-2\text{Im}(B_1B_6^* - B_4B_7^*) + 2\text{Re}(B_2B_5^* + B_3B_8^*)$	0	0

$S_{ij;k}$	$k = 2 ; l = 0$	$k = 2 ; l = 1$	$k = 2 ; l = 2$	$k = 2 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	$2\text{Im}(B_1B_2^*+B_3B_4^*)-2\text{Re}(B_5B_6^*+B_7B_8^*)$	$2\text{Im}(B_1B_4^*-B_2B_3^*-B_5B_8^*-B_6B_7^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 1$	$2\text{Im}(B_1B_4^*-B_2B_3^*+B_5B_8^*+B_6B_7^*)$	$2\text{Im}(B_1B_2^*+B_3B_4^*)+2\text{Re}(B_5B_6^*+B_7B_8^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 2$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_2^*-B_3B_4^*)-2\text{Re}(B_5B_6^*-B_7B_8^*)$	$2\text{Re}(B_1B_4^*-B_2B_3^*-B_5B_8^*-B_6B_7^*)$
$i = 0$ $j = 3$	0	0	$-2\text{Re}(B_1B_4^*-B_2B_3^*+B_5B_8^*+B_6B_7^*)$	$2\text{Im}(B_1B_2^*-B_3B_4^*)+2\text{Re}(B_5B_6^*-B_7B_8^*)$
$i = 2$ $j = 0$	$ B_1 ^2+ B_2 ^2+ B_3 ^2+ B_4 ^2- B_5 ^2- B_6 ^2- B_7 ^2- B_8 ^2$	$2\text{Re}(B_1B_3^*+B_2B_4^*)-2\text{Im}(B_5B_7^*+B_6B_8^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 1$	$2\text{Re}(B_1B_3^*+B_2B_4^*)+2\text{Im}(B_5B_7^*+B_6B_8^*)$	$ B_1 ^2+ B_2 ^2+ B_3 ^2+ B_4 ^2+ B_5 ^2+ B_6 ^2+ B_7 ^2+ B_8 ^2$	0	0
$i = 2$ $j = 2$	0	0	$ B_1 ^2+ B_2 ^2- B_3 ^2- B_4 ^2- B_5 ^2- B_6 ^2+ B_7 ^2+ B_8 ^2$	$-2\text{Im}(B_1B_3^*+B_2B_4^*)-2\text{Re}(B_5B_7^*+B_6B_8^*)$
$i = 2$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_3^*+B_2B_4^*)-2\text{Re}(B_5B_7^*+B_6B_8^*)$	$ B_1 ^2+ B_2 ^2- B_3 ^2- B_4 ^2+ B_5 ^2+ B_6 ^2- B_7 ^2- B_8 ^2$
$i = 1$ $j = 0$	0	0	$-2\text{Im}(B_1B_6^*+B_4B_7^*)+2\text{Re}(B_2B_5^*-B_3B_8^*)$	$-2\text{Im}(B_1B_8^*-B_4B_5^*)+2\text{Re}(B_2B_7^*+B_3B_6^*)$
$i = 1$ $j = 1$	0	0	$-2\text{Re}(B_1B_8^*-B_4B_5^*)-2\text{Im}(B_2B_7^*+B_3B_6^*)$	$2\text{Re}(B_1B_6^*+B_4B_7^*)+2\text{Im}(B_2B_5^*-B_3B_8^*)$
$i = 1$ $j = 2$	$-2\text{Im}(B_1B_6^*-B_4B_7^*)+2\text{Re}(B_2B_5^*+B_3B_8^*)$	$2\text{Re}(B_1B_8^*+B_4B_5^*)+2\text{Im}(B_2B_7^*-B_3B_6^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 3$	$-2\text{Im}(B_1B_8^*+B_4B_5^*)+2\text{Re}(B_2B_7^*-B_3B_6^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_6^*-B_4B_7^*)-2\text{Im}(B_2B_5^*+B_3B_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 0$	0	0	$-2\text{Re}(B_1B_5^*+B_4B_8^*)-2\text{Im}(B_2B_6^*-B_3B_7^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_7^*-B_4B_6^*)-2\text{Im}(B_2B_8^*+B_3B_5^*)$
$i = 3$ $j = 1$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_7^*-B_4B_6^*)-2\text{Re}(B_2B_8^*+B_3B_5^*)$	$-2\text{Im}(B_1B_5^*+B_4B_8^*)+2\text{Re}(B_2B_6^*-B_3B_7^*)$
$i = 3$ $j = 2$	$-2\text{Re}(B_1B_5^*-B_4B_8^*)-2\text{Im}(B_2B_6^*+B_3B_7^*)$	$-2\text{Im}(B_1B_7^*+B_4B_6^*)+2\text{Re}(B_2B_8^*-B_3B_5^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 3$	$-2\text{Re}(B_1B_7^*+B_4B_6^*)-2\text{Im}(B_2B_8^*-B_3B_5^*)$	$2\text{Im}(B_1B_5^*-B_4B_8^*)-2\text{Re}(B_2B_6^*+B_3B_7^*)$	0	0

$S_{ij;k}$	$k = 1 ; l = 0$	$k = 1 ; l = 1$	$k = 1 ; l = 2$	$k = 1 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_5^*-B_4B_8^*)+2\text{Re}(B_2B_6^*+B_3B_7^*)$	$2\text{Im}(B_1B_7^*+B_4B_6^*)+2\text{Re}(B_2B_8^*-B_3B_5^*)$
$i = 0$ $j = 1$	0	0	$2\text{Re}(B_1B_7^*+B_4B_6^*)-2\text{Im}(B_2B_8^*-B_3B_5^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_5^*-B_4B_8^*)+2\text{Im}(B_2B_6^*+B_3B_7^*)$
$i = 0$ $j = 2$	$2\text{Im}(B_1B_5^*+B_4B_8^*)+2\text{Re}(B_2B_6^*-B_3B_7^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_7^*-B_4B_6^*)+2\text{Im}(B_2B_8^*+B_3B_5^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 3$	$2\text{Im}(B_1B_7^*-B_4B_6^*)+2\text{Re}(B_2B_8^*+B_3B_5^*)$	$2\text{Re}(B_1B_5^*+B_4B_8^*)-2\text{Im}(B_2B_6^*-B_3B_7^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 0$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_6^*-B_4B_7^*)+2\text{Re}(B_2B_5^*+B_3B_8^*)$	$2\text{Im}(B_1B_8^*+B_4B_5^*)+2\text{Re}(B_2B_7^*-B_3B_6^*)$
$i = 2$ $j = 1$	0	0	$2\text{Re}(B_1B_8^*+B_4B_5^*)-2\text{Im}(B_2B_7^*-B_3B_6^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_6^*-B_4B_7^*)+2\text{Im}(B_2B_5^*+B_3B_8^*)$
$i = 2$ $j = 2$	$2\text{Im}(B_1B_6^*+B_4B_7^*)+2\text{Re}(B_2B_5^*-B_3B_8^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_8^*-B_4B_5^*)+2\text{Im}(B_2B_7^*+B_3B_6^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 3$	$2\text{Im}(B_1B_8^*-B_4B_5^*)+2\text{Re}(B_2B_7^*+B_3B_6^*)$	$2\text{Re}(B_1B_6^*+B_4B_7^*)-2\text{Im}(B_2B_5^*-B_3B_8^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 0$	$B_1 ^2 - B_2 ^2 + B_3 ^2 - B_4 ^2 + B_5 ^2 - B_6 ^2 + B_7 ^2 - B_8 ^2$	$2\text{Re}(B_1B_3^*-B_2B_4^*)+2\text{Im}(B_5B_7^*-B_6B_8^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 1$	$2\text{Re}(B_1B_3^*-B_2B_4^*)-2\text{Im}(B_5B_7^*-B_6B_8^*)$	$B_1 ^2 - B_2 ^2 + B_3 ^2 - B_4 ^2 - B_5 ^2 + B_6 ^2 - B_7 ^2 + B_8 ^2$	0	0
$i = 1$ $j = 2$	0	0	$B_1 ^2 - B_2 ^2 - B_3 ^2 + B_4 ^2 + B_5 ^2 - B_6 ^2 - B_7 ^2 + B_8 ^2$	$-2\text{Im}(B_1B_3^*-B_2B_4^*)+2\text{Re}(B_5B_7^*-B_6B_8^*)$
$i = 1$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_3^*-B_2B_4^*)+2\text{Re}(B_5B_7^*-B_6B_8^*)$	$B_1 ^2 - B_2 ^2 - B_3 ^2 + B_4 ^2 - B_5 ^2 + B_6 ^2 + B_7 ^2 - B_8 ^2$
$i = 3$ $j = 0$	$2\text{Re}(B_1B_2^*+B_3B_4^*)-2\text{Im}(B_5B_6^*+B_7B_8^*)$	$2\text{Re}(B_1B_4^*+B_2B_3^*+B_5B_8^*-B_6B_7^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 1$	$2\text{Re}(B_1B_4^*+B_2B_3^*-B_5B_8^*+B_6B_7^*)$	$2\text{Re}(B_1B_2^*+B_3B_4^*)+2\text{Im}(B_5B_6^*+B_7B_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 2$	0	0	$2\text{Re}(B_1B_2^*-B_3B_4^*)-2\text{Im}(B_5B_6^*-B_7B_8^*)$	$-2\text{Im}(B_1B_4^*+B_2B_3^*+B_5B_8^*-B_6B_7^*)$
$i = 3$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_4^*+B_2B_3^*-B_5B_8^*+B_6B_7^*)$	$2\text{Re}(B_1B_2^*-B_3B_4^*)+2\text{Im}(B_5B_6^*-B_7B_8^*)$

$S_{ij;kl}$	$k = 3 ; l = 0$	$k = 3 ; l = 1$	$k = 3 ; l = 2$	$k = 3 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	0	0	$2\text{Re}(B_1B_6^* - B_4B_7^*) - 2\text{Im}(B_2B_5^* + B_3B_8^*)$	$2\text{Re}(B_1B_8^* + B_4B_5^*) - 2\text{Im}(B_2B_7^* - B_3B_6^*)$
$i = 0$ $j = 1$	0	0	$-2\text{Im}(B_1B_8^* + B_4B_5^*) - 2\text{Re}(B_2B_7^* - B_3B_6^*)$	$2\text{Im}(B_1B_6^* - B_4B_7^*) + 2\text{Re}(B_2B_5^* + B_3B_8^*)$
$i = 0$ $j = 2$	$2\text{Re}(B_1B_6^* + B_4B_7^*) - 2\text{Im}(B_2B_5^* - B_3B_8^*)$	$2\text{Im}(B_1B_8^* - B_4B_5^*) + 2\text{Re}(B_2B_7^* + B_3B_6^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 3$	$2\text{Re}(B_1B_8^* - B_4B_5^*) - 2\text{Im}(B_2B_7^* + B_3B_6^*)$	$-2\text{Im}(B_1B_6^* + B_4B_7^*) - 2\text{Re}(B_2B_5^* - B_3B_8^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 0$	0	0	$2\text{Re}(B_1B_5^* - B_4B_8^*) - 2\text{Im}(B_2B_6^* + B_3B_7^*)$	$2\text{Re}(B_1B_7^* + B_4B_6^*) - 2\text{Im}(B_2B_8^* - B_3B_5^*)$
$i = 2$ $j = 1$	0	0	$-2\text{Im}(B_1B_7^* + B_4B_6^*) - 2\text{Re}(B_2B_8^* - B_3B_5^*)$	$2\text{Im}(B_1B_5^* - B_4B_8^*) + 2\text{Re}(B_2B_6^* + B_3B_7^*)$
$i = 2$ $j = 2$	$2\text{Re}(B_1B_5^* + B_4B_8^*) - 2\text{Im}(B_2B_6^* - B_3B_7^*)$	$2\text{Im}(B_1B_7^* - B_4B_6^*) + 2\text{Re}(B_2B_8^* + B_3B_5^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 3$	$2\text{Re}(B_1B_7^* - B_4B_6^*) - 2\text{Im}(B_2B_8^* + B_3B_5^*)$	$-2\text{Im}(B_1B_5^* + B_4B_8^*) - 2\text{Re}(B_2B_6^* - B_3B_7^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 0$	$-2\text{Re}(B_1B_2^* + B_3B_4^*) - 2\text{Im}(B_5B_6^* + B_7B_8^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_4^* + B_2B_3^* - B_5B_8^* + B_6B_7^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 1$	$-2\text{Re}(B_1B_4^* + B_2B_3^* + B_5B_8^* - B_6B_7^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_2^* + B_3B_4^*) + 2\text{Im}(B_5B_6^* + B_7B_8^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 2$	0	0	$-2\text{Re}(B_1B_2^* - B_3B_4^*) - 2\text{Im}(B_5B_6^* - B_7B_8^*)$	$2\text{Im}(B_1B_4^* + B_2B_3^* - B_5B_8^* + B_6B_7^*)$
$i = 1$ $j = 3$	0	0	$-2\text{Im}(B_1B_4^* + B_2B_3^* + B_5B_8^* - B_6B_7^*)$	$-2\text{Re}(B_1B_2^* - B_3B_4^*) + 2\text{Im}(B_5B_6^* - B_7B_8^*)$
$i = 3$ $j = 0$	$ B_1 ^2 - B_2 ^2 + B_3 ^2 - B_4 ^2 - B_5 ^2 + B_6 ^2 - B_7 ^2 + B_8 ^2$	$2\text{Re}(B_1B_3^* - B_2B_4^*) - 2\text{Im}(B_5B_7^* - B_6B_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 1$	$2\text{Re}(B_1B_3^* - B_2B_4^*) + 2\text{Im}(B_5B_7^* - B_6B_8^*)$	$ B_1 ^2 - B_2 ^2 + B_3 ^2 - B_4 ^2 + B_5 ^2 - B_6 ^2 + B_7 ^2 - B_8 ^2$	0	0
$i = 3$ $j = 2$	0	0	$ B_1 ^2 - B_2 ^2 - B_3 ^2 + B_4 ^2 - B_5 ^2 + B_6 ^2 + B_7 ^2 - B_8 ^2$	$-2\text{Im}(B_1B_3^* - B_2B_4^*) - 2\text{Re}(B_5B_7^* - B_6B_8^*)$
$i = 3$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(B_1B_3^* - B_2B_4^*) - 2\text{Re}(B_5B_7^* - B_6B_8^*)$	$ B_1 ^2 - B_2 ^2 - B_3 ^2 + B_4 ^2 + B_5 ^2 - B_6 ^2 - B_7 ^2 + B_8 ^2$

$\sum_{i,j,k} S_{ij;k}$	$k = 0 ; l = 0$	$k = 0 ; l = 1$	$k = 0 ; l = 2$	$k = 0 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	$ f_1 ^2 + f_2 ^2 + f_3 ^2 + f_4 ^2 + f_5 ^2 + f_6 ^2 + f_7 ^2 + f_8 ^2$	$-2\text{Re}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* - f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 1$	$2\text{Re}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* + f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* + f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 2$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* - f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* + f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$
$i = 0$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* - f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$	$-(f_1 ^2 + f_2 ^2 + f_3 ^2 + f_4 ^2 - f_5 ^2 - f_6 ^2 - f_7 ^2 - f_8 ^2)$
$i = 2$ $j = 0$	$2\text{Im}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* + f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* + f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 1$	$2\text{Im}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* - f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* + f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 2$	0	0	$-2\text{Im}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* - f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* - f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$
$i = 2$ $j = 3$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* + f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* - f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$
$i = 1$ $j = 0$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* - f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* + f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$
$i = 1$ $j = 1$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* + f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* + f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$
$i = 1$ $j = 2$	$2\text{Im}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* + f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* - f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 3$	$-2\text{Re}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* - f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* - f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 0$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* + f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$	$-(f_1 ^2 - f_2 ^2 - f_3 ^2 + f_4 ^2 + f_5 ^2 - f_6 ^2 - f_7 ^2 + f_8 ^2)$
$i = 3$ $j = 1$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* + f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* - f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$
$i = 3$ $j = 2$	$-2\text{Im}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* - f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* - f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 3$	$ f_1 ^2 - f_2 ^2 - f_3 ^2 + f_4 ^2 - f_5 ^2 + f_6 ^2 + f_7 ^2 - f_8 ^2$	$-2\text{Re}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* + f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$	0	0

$\sum_{i,j,k,l}^{(8 \times 8)}$	$k = 2 ; l = 0$	$k = 2 ; l = 1$	$k = 2 ; l = 2$	$k = 2 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	$2\text{Im}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* + f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* - f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 1$	$2\text{Im}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* + f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* + f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 2$	0	0	$-2\text{Im}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* - f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* + f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$
$i = 0$ $j = 3$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* - f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* - f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$
$i = 2$ $j = 0$	$-2\text{Re}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* + f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* + f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 1$	$-2\text{Re}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* - f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$	$ f_1 ^2 + f_2 ^2 + f_3 ^2 + f_4 ^2 + f_5 ^2 + f_6 ^2 + f_7 ^2 + f_8 ^2$	0	0
$i = 2$ $j = 2$	0	0	$-(f_1 ^2 + f_2 ^2 + f_3 ^2 + f_4 ^2 - f_5 ^2 - f_6 ^2 - f_7 ^2 - f_8 ^2)$	$-2\text{Im}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* - f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$
$i = 2$ $j = 3$	0	0	$-2\text{Im}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* + f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* - f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$
$i = 1$ $j = 0$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* - f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* + f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$
$i = 1$ $j = 1$	0	0	$ f_1 ^2 - f_2 ^2 - f_3 ^2 + f_4 ^2 + f_5 ^2 - f_6 ^2 - f_7 ^2 + f_8 ^2$	$2\text{Im}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* + f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$
$i = 1$ $j = 2$	$-2\text{Re}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* + f_3 f_8^* - f_4 f_7^*)$	$ f_1 ^2 - f_2 ^2 - f_3 ^2 + f_4 ^2 - f_5 ^2 + f_6 ^2 + f_7 ^2 - f_8 ^2$	0	0
$i = 1$ $j = 3$	$-2\text{Im}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* - f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* - f_3 f_7^* + f_4 f_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 0$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* + f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* + f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$
$i = 3$ $j = 1$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* + f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* - f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$
$i = 3$ $j = 2$	$2\text{Re}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* - f_3 f_6^* - f_4 f_5^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* - f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 3$	$2\text{Im}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* - f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* + f_3 f_5^* + f_4 f_6^*)$	0	0

$\sum_{(i,j,k)} S_{ij;k}$	$k = 1 ; l = 0$	$k = 1 ; l = 1$	$k = 1 ; l = 2$	$k = 1 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* - f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* + f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$
$i = 0$ $j = 1$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* + f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* + f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$
$i = 0$ $j = 2$	$2\text{Im}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* + f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* - f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 3$	$-2\text{Re}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* - f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* - f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 0$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* + f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* + f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$
$i = 2$ $j = 1$	0	0	$f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 - f_4^2 + f_5^2 - f_6^2 + f_7^2 - f_8^2$	$2\text{Im}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* - f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$
$i = 2$ $j = 2$	$-2\text{Re}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* - f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$	$f_1^2 - f_2^2 + f_3^2 - f_4^2 - f_5^2 + f_6^2 - f_7^2 + f_8^2$	0	0
$i = 2$ $j = 3$	$-2\text{Im}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* - f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* + f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 0$	$2\text{Re}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* + f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* - f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 1$	$2\text{Re}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* + f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$	$-(f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - f_4^2 + f_5^2 + f_6^2 - f_7^2 - f_8^2)$	0	0
$i = 1$ $j = 2$	0	0	$f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 - f_4^2 - f_5^2 - f_6^2 + f_7^2 + f_8^2$	$2\text{Im}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* + f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$
$i = 1$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* - f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* - f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$
$i = 3$ $j = 0$	$-2\text{Re}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* + f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* + f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 1$	$-2\text{Re}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* - f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* + f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 2$	0	0	$2\text{Re}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* - f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* - f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$
$i = 3$ $j = 3$	0	0	$2\text{Im}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* + f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* - f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$

$\sum_{i,j,k} S_{ij;k}$	$k = 3 ; l = 0$	$k = 3 ; l = 1$	$k = 3 ; l = 2$	$k = 3 ; l = 3$
$i = 0$ $j = 0$	0	0	$-2\text{Im}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* - f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$	$ f_1 ^2 - f_2 ^2 + f_3 ^2 - f_4 ^2 + f_5 ^2 - f_6 ^2 + f_7 ^2 - f_8 ^2$
$i = 0$ $j = 1$	0	0	$-2\text{Im}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* + f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* + f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$
$i = 0$ $j = 2$	$2\text{Im}(f_1 f_5^* - f_2 f_6^* + f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_2^* - f_3 f_4^* - f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$	0	0
$i = 0$ $j = 3$	$\{ f_1 ^2 - f_2 ^2 + f_3 ^2 - f_4 ^2 - f_5 ^2 + f_6 ^2 - f_7 ^2 + f_8 ^2\}$	$2\text{Re}(f_1 f_6^* - f_2 f_5^* - f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 0$	0	0	$-2\text{Re}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* + f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* + f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$
$i = 2$ $j = 1$	0	0	$-2\text{Re}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* + f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* - f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$
$i = 2$ $j = 2$	$-2\text{Re}(f_1 f_7^* + f_2 f_8^* - f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_4^* + f_2 f_3^* - f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	0	0
$i = 2$ $j = 3$	$-2\text{Im}(f_1 f_3^* + f_2 f_4^* - f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_8^* + f_2 f_7^* + f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 0$	$2\text{Re}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* + f_5 f_7^* - f_6 f_8^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* - f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 1$	$2\text{Re}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* + f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* + f_5 f_8^* - f_6 f_7^*)$	0	0
$i = 1$ $j = 2$	0	0	$-2\text{Re}(f_1 f_4^* - f_2 f_3^* - f_5 f_8^* + f_6 f_7^*)$	$2\text{Im}(f_1 f_7^* - f_2 f_8^* + f_3 f_5^* - f_4 f_6^*)$
$i = 1$ $j = 3$	0	0	$-2\text{Im}(f_1 f_8^* - f_2 f_7^* - f_3 f_6^* + f_4 f_5^*)$	$-2\text{Re}(f_1 f_3^* - f_2 f_4^* - f_5 f_7^* + f_6 f_8^*)$
$i = 3$ $j = 0$	$\{ f_1 ^2 + f_2 ^2 - f_3 ^2 - f_4 ^2 + f_5 ^2 + f_6 ^2 - f_7 ^2 - f_8 ^2\}$	$2\text{Re}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* + f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 1$	$-2\text{Re}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* - f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$	$2\text{Re}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* + f_5 f_6^* + f_7 f_8^*)$	0	0
$i = 3$ $j = 2$	0	0	$-2\text{Re}(f_1 f_2^* + f_3 f_4^* - f_5 f_6^* - f_7 f_8^*)$	$-2\text{Im}(f_1 f_5^* + f_2 f_6^* - f_3 f_7^* - f_4 f_8^*)$
$i = 3$ $j = 3$	0	0	$-2\text{Im}(f_1 f_6^* + f_2 f_5^* + f_3 f_8^* + f_4 f_7^*)$	$ f_1 ^2 + f_2 ^2 - f_3 ^2 - f_4 ^2 - f_5 ^2 - f_6 ^2 + f_7 ^2 + f_8 ^2$

ANHANG II: Beschreibung des Photons durch eine irreduzible, unitäre Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe:

Ein freies Teilchen mit der Ruhemasse $m \neq 0$, dem Spin s und mit positiver Energie $p_0 > 0$ wird durch eine irreduzible, unitäre Darstellung $D(m, s, \frac{p_0}{|p_0|} = +1)$ der eigentlichen, orthochronen, inhomogenen Lorentzgruppe iLg_+^\uparrow beschrieben ³¹⁾. Der Spinraum des Teilchens ist $2s+1$ - dimensional. Die Erweiterung zur vollen inhomogenen Lorentzgruppe iLg durch die zwei diskreten Lorentztransformationen der Raum- und der Zeitspiegelung ist ohne die Erweiterung des Darstellungsraumes möglich, da die zwei diskreten Transformationen mit den drei Gruppeninvarianten der iLg_+^\uparrow vertauschen ³¹⁾. Die Parität des Teilchens ist ein Charakter der irreduziblen, unitären Darstellung der iLg und ist entsprechend absolut messbar oder zumindest relativ zu den Paritäten anderer Teilchen messbar.

Zur Beschreibung eines freien Teilchens mit der Masse $m = 0$, dem Spin s und mit positiver Energie $k_0 > 0$ stehen jedoch zwei irreduzible, unitäre Darstellungen $D(m = 0, \mu = \pm s, \frac{k_0}{|k_0|} = +1)$ der iLg_+^\uparrow mit je einem eindimensionalen Spinraum zur Verfügung. Der Grund dafür ist, dass die Helizität $\mu = \pm s$ eine Gruppeninvariante der iLg_+^\uparrow ist (im Gegensatz zum Fall $m \neq 0$).

Die Konstruktion der Helizitätsbasis $|k; \mu = \pm s, m = 0, \frac{k_0}{|k_0|} = +1\rangle = |k, \mu\rangle$ in den beiden Darstellungsräumen erfolgt analog zum Fall $m \neq 0$ nach der Methode der kleinen Gruppe von Wigner ³²⁾. Die kleine Gruppe wird gebildet aus denjenigen Lorentztransformationen, die den Vierervektor $\hat{k} = (1, 0, 0, 1)$ invariant lassen; diese sind die räumlichen Drehungen R_{kg} um den Dreiervektor $(0, 0, 1)$ als Achse. Die kleine Gruppe ist also der Gruppe der Drehungen im zweidimensionalen euklidischen Raum isomorph: ^{32) 33)}

$$U(R_{kg}) |\hat{k}, \mu\rangle = e^{i\mu\psi(R_{kg})} |\hat{k}, \mu\rangle; \quad (189)$$

$\psi(R_{kg})$ ist der zugehörige Drehwinkel, $U(R_{kg})$ ist der unitäre Darsteller von R_{kg} .

Den Helizitätszustand $|k, \mu\rangle$ zu einem beliebigen Impulsvektor k erhält man auf die bekannte Weise:

$$|k, \mu\rangle = U(L(k)) |\hat{k}, \mu\rangle; \quad (190)$$

$U(L(k))$ ist der unitäre Darsteller der Folge von Lorentztransformationen:

$$L(k): \hat{k} = (1, 0, 0, 1) \xrightarrow{\text{drehungsfrei}} (k_0, 0, 0, k_0) \xrightarrow{\text{reine Drehung}} k = (k_0, \vec{k}), \quad (191)$$

die \hat{k} in k überführt. Dieser Zustand ist ein Eigenzustand zum Impulsoperator K_μ :

$$K_\mu |k, \mu\rangle = k_\mu |k, \mu\rangle. \quad (192)$$

Sein Transformationsverhalten unter homogenen Lorentztransformationen Λ der iLg_+ folgt aus (189):

$$U(\Lambda) |k, \mu\rangle = e^{i\mu\psi(\Lambda, k)} |\Lambda k, \mu\rangle, \quad (193)$$

da $L^{-1}(\Lambda k)\Lambda L(k)$ eine Transformation der kleinen Gruppe ist.

Der Raumpiegelungsoperator P antikommutiert mit dem Helizitätsoperator, der Zeitumkehroperator kommutiert mit ihm. Deshalb ist eine irreduzible, unitäre Darstellung der iLg für Teilchen mit Masse $m = 0$ gegeben durch die direkte Summe

$$D(0, \mu = +s, +1) \oplus D(0, \mu = -s, +1). \quad (194)$$

Die Wirkung der Operatoren P und T auf die Helizitätsbasis dieses erweiterten Darstellungsraumes ist z.B. für das Photon mit dem Spin $s = 1$:

$$\begin{aligned} P |k, \mu\rangle &= \eta_P |k_0, -\vec{k}, -\mu\rangle; \quad \eta_P = \pm 1, \\ T |k, \mu\rangle &= \eta_T |k_0, -\vec{k}, \mu\rangle; \quad |\eta_T| = 1 \end{aligned} \quad (195)$$

(η_P und η_T sind unabhängig von k und μ).

Im Unterschied zum Fall $m \neq 0$ sind die irreduziblen Darstellungen der iLg mit $\eta_P = \pm 1$ äquivalent³⁴⁾. Dies entspricht der Tatsache, dass die Eigenparität eines masselosen Teilchens nicht messbar ist, weder absolut noch relativ zu der irgendeines Teilchens.

Da die elektromagnetische Wechselwirkung die Parität erhält, kann das Photon durch die irreduzible Darstellung (194) der iLg mit $s = 1$ beschrieben werden

und deshalb als Teilchen mit einem zweidimensionalen Spinraum aufgefasst werden. Die übliche Konvention in der Wahl der Phase η_P für das Photon, die auch von Jacob und Wick ¹⁶⁾ getroffen wurde, ist:

$$\eta_P = -1 . \quad (196)$$

ZUSAMMENFASSUNG:

Die 64 unabhängigen Polarisationskoeffizienten, mit deren Hilfe sich sämtliche differentiellen Wirkungsquerschnitte und Polarisierungen der P-invarianten Comptonstreuung am Proton bei beliebigen Polarisierungen der Primärteilchen angeben lassen, werden berechnet. Und zwar werden sie einmal durch acht unabhängige, lorentzskalare Amplituden, einmal durch acht unabhängige Helizitätsamplituden ausgedrückt.

Die zusätzliche Bedingung der T-Invarianz reduziert die Zahl der unabhängigen Amplituden auf sechs, die der unabhängigen Polarisationskoeffizienten dementsprechend auf 36. Ohne zusätzliche Annahmen verschwindet jedoch keiner der 64 Polarisationskoeffizienten (im Gegensatz zur Wirkung der P-Invarianz, denn diese bringt die Hälfte von 256 Polarisationskoeffizienten zum Verschwinden); für das Experiment bedeutet dieses Ergebnis, dass es keinen exakten Test der T-Invarianz gibt, der aus einer einfachen Asymmetriemessung im differentiellen Wirkungsquerschnitt oder aus einer einfachen Polarisationsmessung besteht. Die Beziehungen, die sich jedoch aus der Forderung der T-Invarianz zwischen den Polarisationskoeffizienten ergeben, werden allgemein hergeleitet. Es wird gezeigt, wie sich aus diesen Beziehungen prinzipielle, experimentelle Tests der T-Invarianz in Form von Vergleichen von Intensitäts- und Polarisationsmessungen ableiten lassen: die Messergebnisse zweier bestimmter Experimente, die bei derselben Energie und bei demselben Streuwinkel durchgeführt werden, müssen gleich sein, falls T-Invarianz herrscht und verschieden ausfallen (bis auf durch die Dynamik bestimmte Ausnahmefälle), falls T verletzt ist. Es handelt sich bei diesen Tests letztlich immer um den Vergleich je zweier Streuex-

perimente., für die die Polarisationsverhältnisse " zeitlich spiegelbildlich " zueinander liegen, für die die Kinematik jedoch dieselbe ist.

Als einfachste Tests werden explizit herausgehoben der Vergleich

- | | | |
|-----------|--|------------------------|
| 1) von a) | $\gamma + p^\perp \rightarrow \gamma + p$ | (Asymmetriemessung) |
| mit b) | $\gamma + p \rightarrow \gamma + p^\perp$ | (Polarisationsmessung) |
| 2) von a) | $\gamma^\perp + p \rightarrow \gamma + p$ | (Asymmetriemessung) |
| mit b) | $\gamma + p \rightarrow \gamma^\perp + p$ | (Polarisationsmessung) |
| 3) von a) | $\gamma + p_{\parallel\text{longitudinal}} \rightarrow \gamma + p_{\parallel\text{transversal}}$ | (Polarisationsmessung) |
| mit b) | $\gamma + p_{\parallel\text{transversal}} \rightarrow \gamma + p_{\parallel\text{longitudinal}}$ | (Polarisationsmessung) |
| 4) von a) | $\gamma_{45^\circ, \text{linear}} + p \rightarrow \gamma_{\text{zirkular}} + p$ | (Polarisationsmessung) |
| mit b) | $\gamma_{\text{zirkular}} + p \rightarrow \gamma_{45^\circ, \text{linear}} + p$ | (Polarisationsmessung) |

und andere mehr.

Zur Erläuterung der Bezeichnungen: " \perp " bedeutet Polarisation senkrecht zur Streuebene, " \parallel " parallel zur Streuebene, " 45° " unter 45° gegen die Streuebene geneigt. Die Bezeichnungen " longitudinal " bzw. " transversal " beziehen sich im Laborsystem auf die Impulsrichtung des Rückstossprotons, im Schwerpunktsystem auf die Impulsrichtung desjenigen Protons, das jeweils indiziert ist.

Unterhalb der Einpionerzeugungsschwelle ist der t - Operator $t = \frac{1}{1} (S-1)$ in der e^2 - Näherung selbstadjungiert. In diesem Energiebereich und in dieser Näherung ergeben sich weitgehende Vereinfachungen für die experimentellen Tests: Die Messergebnisse a) und b) der Experimente 2) und 3) sind schon auf Grund der Hermitezität gleich und bieten deshalb keine Möglichkeit zum Test der T-Invarianz; die einzelnen Messungen 1a), 1b), 4a) und 4b) werden je zum Test der T-Invarianz, da sie im Fall der T-Invarianz identisch verschwinden, im Fall der T-Verletzung jedoch nicht. So darf z.B. im Fall der T-Invarianz keine Polarisation des Rückstossprotons senkrecht zur Streuebene auftreten, wenn die Primärteilchen unpolarisiert sind.

Allerdings ist ein überzeugendes Ergebnis unterhalb der Einpionerzeugungsschwelle nicht zu erwarten, da die Comptonwirkungsquerschnitte unterhalb von 150 MeV sehr klein sind; ausserdem bestimmt die T-invariante Bornapproximation unterhalb der Schwelle das Verhalten der Streuamplitude.

Herrn Professor Dr. G. Kramer möchte ich für die Themenstellung und für seine freundliche Unterstützung während dieser Arbeit vielmals danken. Ebenso danke ich Herrn Dr. D. Schildknecht für einige nützliche Diskussionen.

LITERATURVERZEICHNIS:

- 1) J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch, R. Turlay;
Phys. Rev. Letters 13, 138, (1964)
- 2) J. Prentki; Oxford International Conference on Elementary Particles
19/25 Sept. 1965, Proceedings, 47 und die dort zitierte Literatur
- 3) T.D. Lee; wie Ref. 2), 225 und die dort zitierte Literatur
- 4) J. Bernstein, G. Feinberg, T.D. Lee; Phys. Rev. 139, B1650, (1965)
- 5) F.T. Hadjioannou, J. Iliopoulos, G. Mennessier; Preprint 1966
- 6) Le Roy R. Price, F.S. Crawford; Phys. Rev. Letters 15, 123, (1965)
- 7) D. Berley, E.L. Hart, B.C. Rahm, D.L. Stonehill, B. Thevenet, W.J. Willis,
S.S. Yamamoto; Phys. Rev. 142, 893, (1966)
- 8) C. Baltay, P. Franzini, J. Kim, L. Kirsch, D. Zanello, J. Lee-Franzini,
R. Loveless, J. Mc Fadyen, H. Yarger; Phys. Rev. Letters 16, 1224, (1966)
- 9) A.M. Cnops, G. Finocchiaro, J.C. Lassalle, P. Mittner, P. Zanella, J.P.
Dufey, B. Gobbi, M.A. Pouchon, A. Muller; Phys. Letters 22, 546, (1966)
- 10) D.R. Rust, E. Eisenhandler, P.J. Mostek, A. Silverman, C.K. Sinclair,
R.M. Talman; Proceedings of the International Symposium on Electron and
Photon Interactions at High Energies, Hamburg June 8-12, Vol. II, 352, (1965)
- 11) R.F. Stiening, E. Loh, M. Deutsch; Phys. Rev. Letters 10, 536, (1963)
- 12) S.M. Bileńkij, L.I. Lapidus, R.M. Ryndin; Fortschr. der Phys. 13, 1, (1965)
- 13) J.J. Sakurai; Konf. Boulder, Lectures in Theor. Phys., Vol. II, 31, (1959)
- 14) G. Grawert, G. Lüders, H. Rollnik; Fortschr. der Phys. 7, 291, (1959)

- 15) R.E. Prange; Phys. Rev. 110, 240, (1958)
- 16) M. Jacob, G.C. Wick; Annals of Phys. 7, 404, (1959)
- 17) M.H. MacGregor, M.J. Moravcsik, H.P. Stapp; Annual Review of Nucl. Science 10, 291, (1960)
- 18) L. Durand; Konf. Boulder, Lectures in Theor. Phys. Vol. IV, 524, (1961)
- 19) A.C. Hearn, E. Leader; Phys. Rev 126, 789, (1962)
- 20) A.C. Hearn; Nuovo Cim. 21, 333, (1961)
- 21) L. Wolfenstein; Phys. Rev. 96, 1654, (1954)
- 22) U. Fano; Rev. of Mod. Phys. 29, 74, (1957)
- 23) T. Fulton; Brandeis Summer Institute in Theor. Phys. 1962, Vol. I, 1
- 24) B. Neumcke; Diplomarbeit München, (1962)
- 25) H.P. Stapp; Phys. Rev. 103, 425, (1956)
- 26) H.J. Meister; Bayrische Akademie der Wissenschaften, Sonderdruck 9 aus den Sitzungsberichten 1962
- 27) G.R. Satchler; Nuclear Phys. 8, 65, (1958)
- 28) P. Stichel; Zeitschr. für Physik 157, 89, (1959)
- 29) G. Barbiellini, G. Capon, G.P. Murtas; Proceedings of the International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Vol. II, Hamburg, June 8-12, 343, (1965)
- 30) H.S. Mani, G. Mohan, L.K. Pande; Phys. Rev. 140, B1584, (1965)
- 31) H. Joos; Fortschr. der Phys. 10, 65, (1962)
- 32) E.P. Wigner, Annals of Math. 40, 149, (1939)
- 33) S. Weinberg; Brandeis Summer Institute in Theor. Phys. 1964, Vol. II, 405
- 34) Iu.M. Shirokov; Soviet Physics JETP 7, 493, (1958)
- 35) J.S. Zmuidzinas; Annals of Phys. 27, 227, (1964)
- 36) V.F. Müller; Zeitschr. für Phys. 170, 114, (1962).

