DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON DESY

DESY 67/39
November 1967

Synchrotronfrequenz und Stabilitätsgrenze im Elektronensynchrotron in Abhängigkeit von der Zahl der Beschleunigungseinheiten

von

A. Piwinski

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

Synchrotronfrequenz und Stabilitätsgrenze

im Elektronensynchrotron in Abhängigkeit

von der Zahl der Beschleunigungseinheiten

von

A. Piwinski

Summary

In very high energy electron synchrotrons or storage rings, the synchrotron frequency may well be of the same order as the revolution frequency. In such cases, a calculation of synchrotron frequency must take into account the subdivision into sections with acceleration and synchrotron radiation, respectively. Performing this calculation by solving for the eigen-frequency of the transfer matrix, a more correct value for the synchrotron frequency and also a limit for the stability of the synchrotron oscillation is obtained.

1. Einleitung

Die Frequenz der Synchrotronschwingung wird gewöhnlich berechnet nach der Formel (1,2,3)

$$f_{syn} = f_o \sqrt{\frac{k\ \alpha\ e\ U\ \cos\phi_s}{2\pi E_s}}$$

Hierbei bedeuten

f_o = Umlauffrequenz

k = Harmonischenzahl

ϕ_s = Sollphase

α = momentum compaction-factor

U = Scheitelwert der Umfangsspannung

E = Sollenergie

Bei der Ableitung dieser Formel wird die vereinfachende Annahme gemacht, dass die Beschleunigungsspannung nicht in kurzen Beschleunigungsstrecken konzentriert ist, sondern gleichmässig über den ganzen Umfang verteilt ist. Diese Annahme ist nur dann zulässig, wenn die Dauer der Synchrotronschwingung gross ist im Vergleich zur Zeit, die ein Teilchen zum Durchlaufen einer Beschleunigungsstrecke und des gekrümmten Stückes zwischen zwei Beschleunigungsstrecken braucht, d.h.

$$f_{syn} << f_o \cdot N \quad ,$$

wobei N die Zahl der Beschleunigungsstrecken auf dem Umfang bedeutet.

Die Umfangsspannung wird bestimmt durch die Strahlungsverluste und durch den gewünschten Energiezuwachs pro Zeiteinheit (3,4,5)

$$f_o e U \sin\phi_s = \overline{W}_{Str} + \frac{dE_s}{dt} = \frac{2}{3}\, r_e c \gamma_s^3 \frac{E_s}{R \cdot \overline{R}} + \frac{dE_s}{dt}$$

mit

r_e = Elektronenradius,

$\overline{R} = \frac{\text{Gesamtumfang}}{2\pi}$,

R = Krümmungsradius der Teilchenbahn

$\gamma_s = \frac{E_s}{m_o c^2}$

Das magnetische Ablenkfeld in den gekrümmten Stücken wird normalerweise mit Hilfe eines Schwingkreises erzeugt, so dass der zeitliche

Verlauf der Sollenergie folgende Form hat:

$$E_s(t) = \frac{1}{2}(E_{max} - E_{min})(1 - \cos \omega t) + E_{min} \approx \frac{1}{2} E_{max}(1 - \cos \omega t)$$

$\frac{\omega}{2\pi} = f$ = Pulsfrequenz

Damit ergibt sich die Synchrotronfrequenz zu

$$f_{syn} = f_o \sqrt{k\,\alpha \cot \phi_s \left(\frac{2}{3}\frac{r_e}{R}\gamma^3_{max} \sin^6 \frac{\omega t}{2} + \frac{f}{f_o} \cot \frac{\omega t}{2}\right)}$$

Das Maximum von f_{syn} wird durch den ersten Summanden unter der Wurzel bestimmt. Damit erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$f_{HF} = \frac{kc}{2\pi\bar{R}}, \qquad \langle D\rangle_M = \alpha\bar{R} = \text{Dispersion in den Magneten}$$

für das kritische Verhältnis f_{syn}/f_o den Ausdruck

$$\left(\frac{f_{syn}}{f_o}\right)_{max} = \sqrt{\frac{4\pi r_e}{3c}\frac{\gamma_{max}}{R}} \cdot \sqrt{f_{HF}\,\langle D\rangle_M} \cdot \gamma_{max}$$

Während die erste Wurzel ungefähr konstant ist, geben die drei übrigen Faktoren die wesentlichen Parameter für die Synchrotronfrequenz an.

Bei einem Synchrotron zum Beispiel mit den Parametern E_{max} = 50 GeV, R = 190 m, f_{HF} = 1 GHz, $\langle D\rangle_M$ = 2 m hat das Verhältnis $(f_{syn}/f_o)_{max}$ den Wert 0.64, so daß die Voraussetzung

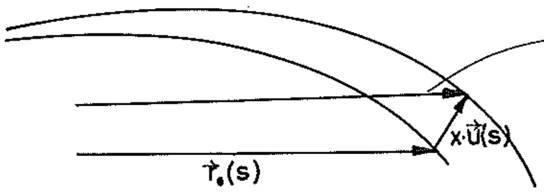
$$\frac{f_{syn}}{f_o} = 0{,}64 \ll N$$

für kleine N nicht mehr erfüllt ist. Im folgenden soll deshalb die Synchrotronfrequenz ohne diese einschränkende Annahme bestimmt werden.

2. Die Übertragungsmatrix für die Synchrotronschwingung

Die ebene Bewegung eines Teilchens, das keine Betatronschwingungen ausführen möge, läßt sich durch die beiden Parameter s und x beschreiben. Hierbei bedeutet s die Länge auf einer festen Sollbahn, die durch

$\vec{r} = \vec{r}_o(s)$ vorgegeben ist, und x den Abstand von dieser Sollbahn in Richtung der nach außen zeigenden Normalen $\vec{u}(s)$. Für jede Funktion $x = x(s)$ wird eine bestimmte Bahn festgelegt.



$$\vec{r}(s) = \vec{r}_o(s) + x(s) \cdot \vec{u}(s)$$

$$\frac{d\vec{r}_o}{ds} = \vec{t} \qquad |\vec{t}| = 1$$

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = K \cdot \vec{t} \qquad |\vec{u}| = 1 \qquad K = \frac{1}{R}$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen möge auf allen Bahnen gleich sein, nämlich gleich der Lichtgeschwindigkeit c. Daraus ergibt sich eine Beziehung für die zeitliche Änderung der Koordinate s.

$$c = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| \cdot \frac{ds}{dt} = \left|(1 + Kx)\,\vec{t} + x'\vec{u}\right|\frac{ds}{dt} = \sqrt{(1 + Kx)^2 + x'^2} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c}{\sqrt{(1 + Kx)^2 + x'^2}} \approx c(1 - Kx)$$

Die Differenz zwischen der Koordinate s eines beliebigen Teilchens und der Koordinate s_s eines Teilchens auf der Sollbahn läßt sich auch durch ihren zeitlichen Abstand und damit durch die Differenz der Hochfrequenzphasen ausdrücken.

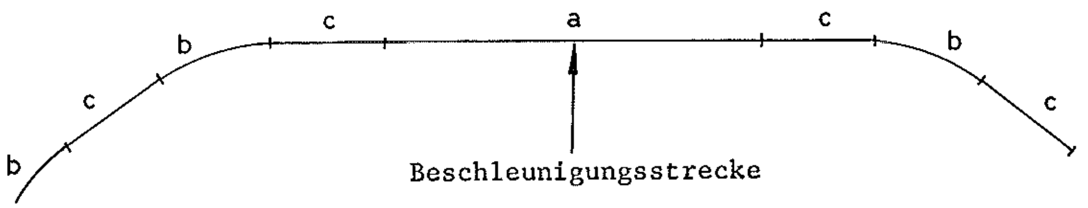
$$s - s_s = c\Delta t = c\,\frac{\Delta\phi}{\omega_{HF}} = c\,\frac{\Delta\phi}{2\pi k \cdot f_o} = \frac{\overline{R}}{k} \cdot \Delta\phi$$

$$\frac{ds}{dt} - \frac{ds_s}{dt} = -\,cKx = -\,\frac{\overline{R}}{k}\,\frac{d\Delta\phi}{dt}$$

Mit $x = D\,\frac{\Delta E}{E_s}$, D = Dispersion, erhält man schliesslich

$$\frac{d\Delta\phi}{dt} = -\,\frac{ck}{\overline{R}}\,KD\,\frac{\Delta E}{E_s}$$

Auf dem Umfang lassen sich drei verschiedene Bereiche unterscheiden



Bereich a: $K = 0$

$$\frac{dE}{dt} = ce|\vec{E}|\sin\phi \quad ; \quad \frac{d\Delta E}{dt} = \frac{d}{dt}(E - E_s) = ce|\vec{E}|(\sin\phi - \sin\phi_s)$$

Für kleine Phasenabweichungen $\Delta\phi = \phi - \phi_s$ gilt

$$\frac{d\Delta E}{dt} = ce|\vec{E}|\cos\phi_s\Delta\phi$$

Aus $K = 0$ folgt $\frac{d\Delta\phi}{dt} = 0$

und $\quad \Delta E = \Delta E_1 + ce|\vec{E}|\cos\phi_s\,\Delta\phi_1 \cdot t$

Am Ende der Beschleunigungsstrecke gilt mit $U_n = c\int|\vec{E}|dt$

$$\Delta E_2 = \Delta E_1 + eU_n\cos\phi_s\Delta\phi_1 \qquad \Delta\phi_2 = \Delta\phi_1$$

Führt man für die Beschleunigungsstrecke eine Übertragungsmatrix ein, so lassen sich die beiden letzten Gleichungen folgendermassen zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix}\Delta E_2\\ \Delta\phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & A_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta E_1\\ \Delta\phi_1\end{pmatrix} \qquad A_n = eU_n\cos\phi_s$$

Bereich b: $\vec{E} = 0$

Die durch die Änderung des Magnetfeldes induzierte Spannung und damit die adiabatische Dämpfung werden nicht berücksichtigt.

$$W(\vec{r}) = -\frac{dE}{dt} = -\frac{dE}{ds}\frac{ds}{dt} = -(1 - K\cdot x)\,c\,\frac{dE}{ds}$$

$$\frac{d\Delta E}{ds} = \frac{d}{ds}(E - E_s) = -\frac{1}{c}(1 + Kx)W + \frac{1}{c}W_s$$

Mit $W = W_s + \left(\frac{dW}{dE}\right)_s \Delta E$ und bei Vernachläßigung des quadratischen Gliedes $x\Delta E = D\frac{\Delta^2 E}{E}$ erhält man

$$\frac{d\Delta E}{ds} = -\frac{1}{c}\left\{KD\frac{W_s}{E_s} + \left(\frac{dW}{dE}\right)_s\right\}\Delta E$$

$$\frac{dW}{dE} = W_s \frac{d}{dE}\frac{E^2B^2}{E_s^2B_s^2} = 2W_s\left(\frac{1}{E_s} + \frac{1}{B_s}\frac{dB}{dE}\right) = 2W_s\left(\frac{1}{E_s} + \frac{1}{B_s}\frac{dB}{dx}\frac{dx}{dE}\right)$$

$$\frac{dB}{dx} = -nKB_s \qquad x = D\frac{\Delta E}{E_s} \rightarrow \frac{dx}{dE} = \frac{D}{E_s}$$

$$\left(\frac{dW}{dE}\right)_s = 2\frac{W_s}{E_s}(1 - nKD)$$

Die Verlustleistung W_s hängt sowohl von der Koordinate s als auch von der Sollenergie E_s ab. Die Sollenergie hängt ebenfalls von der Koordinate s ab, jedoch kann diese Abhängigkeit vernachlässigt werden, denn es gilt

$$\frac{W_s(s)}{E_s(s)} = \frac{2}{3} r_e cK^2(s)\gamma_s^3(s) = \frac{2}{3} r_e cK^2(s)\left[\gamma_s^3(0) + 3\gamma_s^2(0)\frac{d\gamma}{ds}\cdot s + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{3} r_e cK^2(s)\gamma_s^3(0)\left[1 + 3\frac{W_s}{E_s}\frac{s}{c} + \ldots\right] \approx \frac{2}{3} r_e cK^2(s)\cdot\gamma_s^3(0)$$

Die Differentialgleichung für ΔE lautet

$$\frac{d\Delta E}{ds} = -\frac{2}{3} r_e K^2(s)\gamma_s^3(0)\left(2 + (1-2n)KD\right)\Delta E$$

und hat die Lösung

$$\Delta E = \Delta E_1 \cdot \exp\left[-\frac{2}{3} r_e \gamma_s^3 \int_o^s K^2(s)\cdot\left(2 + (1-2n)KD\right)ds\right]$$

Für die Grösse ΔE_2 am Ende des gekrümmten Stückes erhält man

$$\Delta E_2 = \Delta E_1\, e^{-2rT_i}$$

T_i ist die Zeit, die ein Teilchen zum Durchlaufen des i-ten gekrümmten Stückes braucht, und r die bekannte Dämpfungskonstante:

$$r = \frac{1}{3} r_e \gamma_s^3 \frac{1}{T_i} \int_o^{cT_i} K^2(2 + (1 - 2n)\, KD)\, ds$$

$$= \frac{1}{3} r_e c \gamma_s^3 < K^2(2 + (1 - 2n)\, KD>_{Mag}$$

Für $\Delta\phi_2$ erhält man das Integral

$$\Delta\phi_2 = - \frac{ck}{\overline{R}} \frac{\Delta E_1}{E_s} \int_o^{cT_i} KD\exp[- \frac{2}{3} r_e \gamma_s^3 \int_o^s K^2(2 + (1-2n)KD)ds]ds + \Delta\phi_1$$

oder

$$\Delta\phi_2 = - G_i(r)\Delta E_1 + \Delta\phi_1$$

Das mit $G_i(r)$ abgekürzte Integral hängt von der Dämpfungskonstanten r ab und nimmt im Grenzfall, wenn r, d.h. der Exponent unter dem Integral, gegen Null geht, folgenden Wert an.

$$G_i(0) = \frac{c^2 kT_i}{\overline{R}\, E_s} < KD >_{Mag} \qquad \text{mit} \quad < KD >_{Mag} = \frac{1}{cT_i} \int_o^{cT_i} KDds$$

Dabei ergibt sich mit Hilfe der Übertragungsmatrix für ein gekrümmtes Stück die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \Delta E_2 \\ \Delta\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2rT_i} & 0 \\ -G_i(r) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta E_1 \\ \Delta\phi_1 \end{pmatrix}$$

Bereich c: $K \equiv 0$, $\vec{E} \equiv 0$

In diesem Bereich ändern sich ΔE und $\Delta\phi$ nicht, die Übertragungsmatrix ist infolgedessen gleich der Einheitsmatrix.

Alle benachbarten Stücke können deshalb durch eine Matrix zusammengefasst werden, die aus der Matrix für ein gekrümmtes Stück durch Ersetzen von T_i durch ΣT_i hervorgeht. Dasselbe folgt auch aus der Multiplikation der Matrizen, wenn man berücksichtigt, daß

$$G_2(r)e^{-2rT_1} + G_1(r) = G_g(r)$$

ist, wobei sich das Integral in $G_g(r)$ auf die Bereiche 1 und 2 erstreckt.

Die Übertragungsmatrix für eine Beschleunigungsstrecke und alle folgenden gekrümmten Stücke lautet dann:

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & A_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2rT_n} & 0 \\ -G_n(r) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2rT_n} - A_n G_n(r) & A_n \\ -G_n(r) & 1 \end{pmatrix}$$

3. N gleiche Beschleunigungsabschnitte

Wenn alle N Bescheunigungsabschnitte auf dem Umfang gleich sind, läßt sich die Synchrotronschwingung durch die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix $H = H_n$ beschreiben:

$$\begin{pmatrix} \Delta E \\ \Delta\phi \end{pmatrix} = C_1 \vec{Y}_1 + C_2 \vec{Y}_2$$

mit

$$H\vec{Y}_{1,2} = \lambda_{1,2} \vec{Y}_{1,2}$$

Die Bewegung ist dann stabil, wenn für beide Eigenwerte gilt

$$|\lambda_{1,2}| < 1$$

Diese Forderung führt mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}H \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}^2 H - \det H}$$

zu der Ungleichung

$$|\mathrm{Sp}H| < 1 + \det H$$

oder, da $\det H = e^{-2rT_n} = 1 - 2rT_n + .. \approx 1$ gilt

$$|\mathrm{Sp}H| < 2$$

Die Spur ergibt sich zu

$$\mathrm{SpH} \approx 2 - A_n \cdot G_n(0) = 2 - \frac{2\pi k e\, U_n \cos\phi_s\, D}{N E_s \overline{R}}$$

$$= 2 - \frac{4\pi^2}{N^2} \cdot \frac{f_{syn}^2}{f_o^2}$$

f_{syn} ist die anfangs definierte Synchrotronfrequenz, für die nun die Stabilitätsbedingung gilt:

$$f_{syn} < \frac{N}{\pi} \cdot f_o$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, sind die beiden Eigenwerte konjugiert komplex und nehmen die Form an

$$\lambda_{1,2} = e^{-rT_n}\, e^{\pm i\mu}$$

Sie beschreiben eine gedämpfte Schwingung mit der Dämpfungskonstanten $\overline{r} = r \frac{R}{\overline{R}}$, die durch Mittelung über den ganzen Umfang zu bilden ist und mit der Dämpfungskonstanten für langsame Synchrotronschwingungen übereinstimmt (3). Die durch μ gegebene Frequenz stimmt jedoch nicht mehr mit der anfangs angegebenen Synchrotronfrequenz überein. Mit Hilfe der beiden Beziehungen

$$F_{syn} = f_o \frac{N\mu}{2\pi} \qquad \text{und} \qquad \cos\mu = \mathrm{SpH}$$

erhält man einen Zusammenhang zwischen der genauen Synchrotronfrequenz F_{syn} und der für eine kontinuierliche Verteilung der Beschleunigungsspannung abgeleiteten Synchrotronfrequenz f_{syn}

$$\frac{F_{syn}}{f_o} = \frac{N}{\pi} \arcsin\left(\frac{\pi}{N} \frac{f_{syn}}{f_o}\right)$$

Bei langsamen Schwingungen oder bei grossem N sind die Frequenzen einander gleich.

4. Zwei ungleiche Beschleunigungsabschnitte

Die Übertragungsmatrix für zwei ungleiche Beschleunigungsabschnitte lautet bei Vernachlässigung der Dämpfung, die sich nicht ändert,

$$H_1 \cdot H_2 = \begin{pmatrix} (1-A_1G_1)(1-A_2G_2)-A_1G_2 & (1-A_1G_1)A_2+A_1 \\ (A_2G_2-1)\cdot G_1-G_2 & -G_1A_2 +1 \end{pmatrix}$$

und $Sp(H_1H_2) = 2 - (A_1+A_2)(G_1+G_2) + A_1A_2G_1G_2$

Es sei $A_1+A_2 = 2A = \text{konst}$, $G_1+G_2 = 2G = \text{konst}$, $T_1+T_2 = 2T = \text{konst}$

und $\frac{A_1-A}{A} = \frac{A_1-A_2}{2A} = x$, $\frac{G_1-G}{G} = \frac{T_1-T_2}{2T} = y$

$$-1 \leq x, \quad y \leq 1$$

Mit der Abkürzung

$$1 - q^2 = (1-x^2)(1-y^2) \qquad 0 \leq q \leq 1$$

wird aus der Stabilitätsbedingung

$$|Sp(H_1 \cdot H_2)| < 2$$

die Ungleichung

$$-4 < -4 \cdot AG + G^2A^2(1-q^2) < 0$$

Aus der rechten Ungleichung erhält man

$$AG < \frac{4}{1-q^2}$$

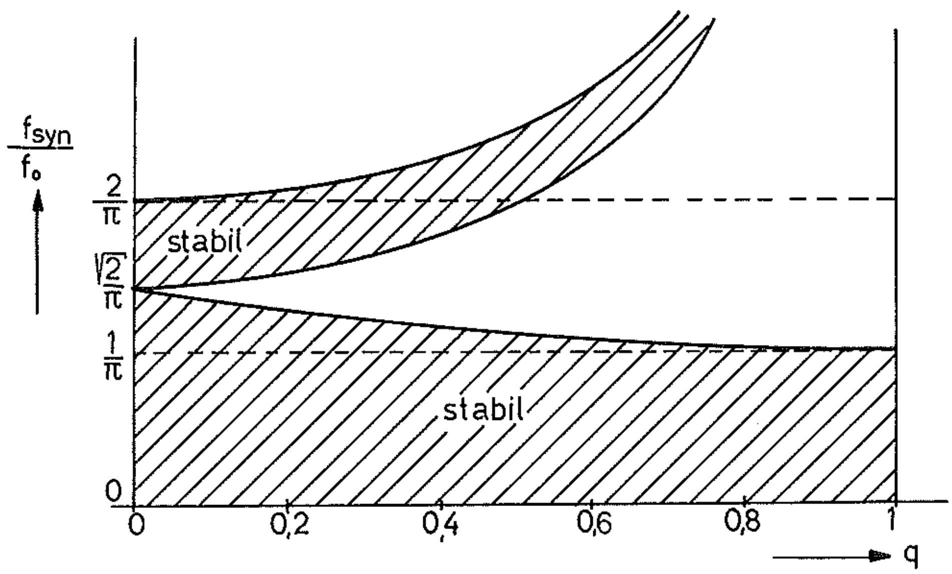
Aus der linken Ungleichung erhält man Für AG<2

$$AG < \frac{2}{1+q}$$

und für AG>2

$$AG > \frac{2}{1-q}$$

Mit $f_{syn} = \frac{f_o}{\pi} \sqrt{AG}$ ergeben sich die in der Skizze gezeigten Stabilitätsbereiche für die Synchrotronfrequenz f_{syn}.



Mein Dank gilt Herrn Dr. Wüster für die Anregung zu dieser Arbeit.

Literatur

1. D. Bohm, L. Foldy, Phys. Rev. 70, 249 (1946)
2. E.D. Courant, H.S. Snyder, Ann. of Phys. 3, 1 (1958)
3. A.A. Kolomensky, A.N. Lebedev, "Theory of Cyclic Accelerators", North Holland (1966)
4. M. Sands, Phys. Rev. 97, 470 (1955)
5. J. Schwinger, Phys. Rev. 70, 798 (1946)