

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

DESY - Bibliothek
29. APR. 1968

DESY 68/10
February 1968

DESY-Bibliothek

29. APR. 1968

Zur Anwendung des Statistischen Modells
mit Drehimpulserhaltung

von

Günter van Keuk

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

ZUR ANWENDUNG DES STATISTISCHEN MODELLS
MIT DREHIMPULSERHALTUNG

von

Günter van Keuk

II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

Abstract

A statistical model with energy-momentum and angular-momentum conservation is described and discussed taking into account different masses, spins and isospins of the outgoing particles. The phase-spaces are evaluated approximately by the use of asymptotic expansions for large particle numbers. The probability of "fireball formation" is assumed to vanish at high energy for each partial wave as a consequence of the Lorentz contraction of the interaction volume. Describing fireball formation and decay separately, we derive cross-sections for all central events. Including statistical ρ -production our numerical results are, in nearly all cases, in good agreement with the experimental data on pp -annihilation into pions from 1.6 to 7.0 GeV/c.

Gliederung

1.	Einleitung	1
2.	Konstruktion von Phasenräumen	
2.1	Galilei-invariantes klassisches Modell	7
2.2	Poincaré-invariantes klassisches Modell	8
2.3	Quantenmechanisch relativistische Formulierung	11
2.4	Berücksichtigung von Spin und Isospin	17
3.	Zur Näherungsberechnung von Phasenräumen	
3.1	Erläuterung der benutzten Näherung	21
3.2	Modifikation zur Berücksichtigung von Quanteneffekten	26
3.3	GWS-Näherung für den Poincaré-invarianten quantenmechanischen Phasenraum	29
4.	Statistischer Ansatz	
4.1	Ausreduktion der S-Matrix	38
4.2	Ansatz für die inelastischen Partialwellen	41
4.3	Ladungsanalyse	46
5.	Qualitative Züge des Modells	
5.1	Verhalten der Querschnitte	49
5.2	Asymptotische mittlere Teilchenzahl	58
6.	Anwendung auf Experimente am $p\bar{p}$ -System	
6.1	Bereitstellung der Ausgangsformeln	60
6.2	Anpassung der Parameter	63
6.3	Einfluss der Drehimpulserhaltung	65
	Anhang	70
	Literatur	76
	Beschreibung der Abbildungen	78
	Abbildungen	

1. Einleitung

Bei einem Stossprozess zweier hochenergetischer Teilchen findet man die Erscheinung der Vielfacherzeugung, die zunächst in der Höhenstrahlung gefunden wurde und heute mit Beschleunigern bei verschiedenen Eingangsenergien sehr präzise studiert werden kann. Trotz des inzwischen reichhaltigen experimentellen Materials gibt es aber bisher noch keine gut begründbare Theorie, die Aussagen über Wirkungsquerschnitte, mittlere Teilchenzahlen, Inelastizitäten und Winkelverteilungen bei Erzeugungsprozessen machen kann. Diese Reaktionen setzen an der aus Energieerhaltung gegebenen Schwelle allmählich ein, und man stellt fest, dass bis zu den höchsten gemessenen Energien der dann nahezu konstante inelastische Wirkungsquerschnitt, in dem Kanäle mit grossen Teilchenzahlen überwiegen, den grössten Teil des totalen Wirkungsquerschnitts ausmacht. Es ist daher zu erwarten, dass auch die elastische Streuung, deren integrierter Querschnitt ebenfalls konstant zu werden scheint, bei hohen Energien nicht ohne Berücksichtigung der Erzeugungsprozesse beschrieben werden kann, da die Endzustände eines Streuvorganges durch Wahrscheinlichkeitserhaltung (Unitarität des S-Operators) verkoppelt sind. Das drückt sich dann auch darin aus, dass elastische sowie inelastische Reaktionen, soweit man sie mit Störungstheorie zu beschreiben versucht, entscheidend für höhere Energien von Absorptionskorrekturen abhängig werden, für die man dann phänomenologische Ansätze macht. Umgekehrt ist es sogar möglich, viele Eigenschaften der elastischen Streuung direkt als Konsequenz der konkurrierenden inelastischen Vorgänge zu deuten, so dass in diesem Sinne die Diskussion der letztgenannten Phänomene im Vordergrund steht.

In einer Theorie skalarer Teilchen drückt sich nun allge-

mein der Querschnitt zur Erzeugung von $N \geq 3$ auslaufenden aus zwei einlaufenden Teilchen mit den Impulsen q_1, q_2 ($P = q_1 + q_2$) bei der CMS-Energie $W^2 = P^2$ (CMS-Impuls K) mit den Matrixelementen des Streuoperators S in folgender Weise aus

$$(1.1) \quad \sigma_N(W) = \frac{\pi^2}{KW} \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} \right\} \delta^{(4)} \left(\sum_1^N p_i - P \right) | \langle p_1 \dots p_N | S | q_1, q_2 \rangle |^2$$

mit $\langle p_1 \dots p_N | S | q_1, q_2 \rangle = \delta^{(4)} \left(\sum_1^N p_i - P \right) \langle p_1 \dots p_N | S | q_1, q_2 \rangle$.

Während nun in dem Lorentz-invarianten, unitären Operator S die gesamte Dynamik des Systems steckt, geht in die Formel für den über alle Winkel integrierten Querschnitt nur das invariante Impulsraummittel ein:

$$(1.2) \quad \sigma_N(W) = \frac{\pi^2}{KW} \overline{|S_N(W)|^2} \cdot \Omega_N(W)$$

$$\Omega_N(W) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} \right\} \delta^{(4)} \left(\sum_1^N p_i - P \right)$$

Darin zählt Ω gleichsam die Menge der möglichen Endzustände des N -Teilchensystems bei konstanter Wichtung auf der Energie-Impuls-Schale. Dieser Impulsraum stellt bei höheren Energien selbst eine stark in W und N veränderliche Funktion dar.

Will man nun Einblick in die Dynamik des Prozesses gewinnen, so schaut man gerade nach Abweichungen der Querschnitte vom "Phasenraumverhalten". Je detaillierter man die spezielle Reaktion dann betrachtet - d.h. wenn man die S -Funktion nur über möglichst wenige Variable integriert - um so deutlicher sollten dann solche Abweichungen erkennbar sein.

In diesem Sinne leitet man aus (1.2) das sogenannte "kovariante Statistische Modell" (SM) ab, indem man $\overline{|S_N(W)|^2}$ proportional setzt zu einem Volumen V erhoben zur Potenz

der auslaufenden Teilchenzahl. Die Anwendung eines SM zur Beschreibung von Vielfacherzeugungsprozessen wurde zunächst von E. Fermi¹⁾ vorgeschlagen, der aber den Wirkungsquerschnitt $\sigma_N(W)$ proportional setzte zu einem Impulsraum mit dem Mass $\prod d^3 p_i$. Man nennt daher Modelle, die von diesem Impulsraum ausgehen auch "nicht-kovariante-Modelle". Die von den verschiedenen Autoren²⁻⁵⁾ benutzten Ausgangsformeln sind auch insofern wenig einheitlich als man zur Beschreibung der Experimente manchmal noch eine Energieabhängigkeit in das Volumen V aufnimmt (Lorentzkontraktion) und die Symmetrie des Endzustands identischer Teilchen auf verschiedene Weise berücksichtigt.

Als anschauliche Interpretation des Modells hat man das folgende Bild: In einem Stossprozess hoher Energie geben die beiden einlaufenden Teilchen ihre Energie ab, nachdem sie in einem kleinen Volumen, dessen Ausdehnung der Reichweite der starken Wechselwirkung entspricht, aufeinander geprallt sind. Es bildet sich wegen der Stärke der Wechselwirkung schnell ein Gleichgewicht, welches erlaubt, den Zerfall des Zwischenzustands (Feuerball) mit statistischen Mitteln unabhängig vom Anfangszustand zu beschreiben. In Analogie zur Thermodynamik wird dann die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall in einen bestimmten Endzustand proportional gesetzt dem zur Verfügung stehenden Phasenraum, wobei genau alle in der starken Wechselwirkung bekannten Erhaltungssätze zu berücksichtigen sind. Die Ergebnisse dieses Modells (mittlere Teilchenzahlen, Verzweigungsverhältnisse, Spektren) werden daher entscheidend abhängig von dem Radius R des Wechselwirkungsvolumens, und es kann als Stütze der anschaulichen Interpretation angesehen werden, dass man tatsächlich nur mit einem R in der Größenordnung einer inversen Pionmasse (wir benutzen hier und im folgenden die Einheiten $\hbar=c=1$) die physikalischen Verhältnisse beschreiben kann.

Eine strengere Begründung dieses Ansatzes, insbesondere die Frage nach der Einstellung des Gleichgewichts (konstante Dichte auf der Energieschale) bleibt dabei offen, ja steht sogar im Widerspruch zur Erfahrung. Man stellt nämlich bei inelastischen Prozessen mit Vielfacherzeugung⁶⁻⁷⁾, bei denen die einlaufenden Teilchen wieder emittiert werden, eine deutliche Abweichung von der Gleichverteilung der Energie und starke Anisotropie in der Winkelverteilung fest, wie das zunächst nicht dem Bild einer "Explosion" entspricht.

Um die Anisotropie, die nicht nur bei den auslaufenden Nukleonen, sondern auch bei den erzeugten Mesonen beobachtet wird, zu erklären, hat man Zwei-Zentren-Modelle vorgeschlagen⁸⁾. Zwei angeregte, sich voneinander entfernende Feuerbälle zerfallen danach in ihrem eigenen CMS isotrop nach statistischen Gesetzen, nachdem die erzeugenden Nukleonen unter geringer Ablenkung und Energieabgabe die Zentren verlassen haben. Im CMS des Gesamtsystems ergibt sich dann eine Bündelung der Zerfallsrichtungen um die Verbindungsachse beider Feuerbälle. Man kann aber auch im Rahmen des gewöhnlichen SM eine Abweichung von der isotropen Winkelverteilung dadurch erhalten, dass man ein durch Lorentz-Kontraktion abgeplattetes Wechselwirkungsvolumen annimmt und die Impulsverteilung der daraus emittierten Teilchen dann als Fouriertransformierte dieses Ortsraumgewichts ansetzt. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses und dessen Komponente in Flugrichtung j_3 widerspricht ein solches Vorgehen nicht dem angenommenen Informationsverlust. In diesem Sinne bleibt dann aber eine Asymmetrie der Winkelverteilung unerklärlich. Man findet aber⁹⁾, dass gerade bei höheren Einschussenergien die einlaufenden Teilchen ohne wesentliche Ablenkung und mit überwiegend geringer Energieabgabe (Inelastizität etwa 1/2) das Zentrum der Wechselwirkung verlassen. Damit im Zusammenhang sehen wir auch das unterschiedliche Verhalten der mittleren erzeugten Teilchenzahl bei pp -Stößen und $p\bar{p}$ -Annihilationen⁹⁾.

Um diesen Fakten Rechnung zu tragen, erscheint es zweckmässig, die "durchlaufenden" Teilchen aus dem statistischen Gleichgewicht der erzeugten Teilchen herauszulösen. Eine Modifikation des SM durch Einführung gleichsam "peripherer Feuerballanregung" wird hier aber nicht weiter erörtert.

Im Rahmen des SM überwindet man diese Schwierigkeit durch Einschränkung des Anwendungsbereichs auf zentrale Stösse. In diesem Zusammenhang stellt sich dann die Frage nach der Anwendbarkeit des SM im Grenzfall hoher Energien. Verwendet man das Verhältnis symmetrischer zu asymmetrischen Ereignissen zur Bestimmung des Bruchteils vom zentralen Querschnitt σ_c aus dem Gesamtquerschnitt, so scheint σ_c asymptotisch zu verschwinden¹⁰⁾.

Ein natürlicher Weg zur Beschreibung der Zentralität eines inelastischen Prozesses scheint uns die Beschränkung im Drehimpuls bzw. Stossparameter. Streng steht dem Zerfallsprodukt nur ein Teil des Phasenraums zur Verfügung. So wird zum Beispiel bei Vernichtungsreaktionen in Ruhe J auf 0 oder 1 festgelegt, während bei pp -Stössen vergleichbarer CMS-Energie der mittlere Drehimpuls wesentlich höher liegt. Wir werden zeigen, dass die quantenmechanische Berücksichtigung der Drehimpulserhaltung auf eine Wichtung im Impulsraum (1.2) führt, die unter anderem bewirkt, dass zentrale Stösse im Mittel eine grössere Zahl erzeugter Teilchen ergeben als weniger zentrale (vergl. auch 4 und 11). Andererseits führt das SM mit Drehimpulserhaltung auf ein von dem üblichen SM abweichendes Energieverhalten der Verzweigungsverhältnisse¹²⁾.

Wir wollen nun in der vorliegenden Arbeit das SM mit Drehimpulserhaltung, wie es im wesentlichen schon abstrakt formuliert vorliegt⁷⁾¹²⁾, auf die Vernichtungsprozesse im $p\bar{p}$ -System bei verschiedenen Energien anwenden in der Annahme, dass diese Reaktionen am ehesten als zentral angesehen werden können.

Dazu ist zunächst das Konzept des Poincaré-invarianten Phasenraums mit voller Kinematik zu rekapitulieren¹²⁾⁷⁾ und zur Beschreibung verschiedener Teilchensorten (Resonanzen), Massen, Spins und Isospins (Ladungsanalyse) fortzusetzen. Bei quantenmechanischer Berücksichtigung der Drehimpulskopplung liefert uns die gruppentheoretische Projektion auf definierte Energie und bestimmten Drehimpuls j, j_3 eine Integraldarstellung der Zustandssumme, deren numerische Auswertung wir hier im einzelnen mit Methoden der asymptotischen Entwicklung¹³⁾ nach grossen Teilchenzahlen, die im wesentlichen den Grenzwertsatzmethoden (GWS) der mathematischen Statistik entsprechen, vornehmen werden. Da die Berechnung von Phasenräumen - insbesondere bei Drehimpulserhaltung und hoher Teilchenzahl - nichttriviale Probleme aufgibt, halten wir es für zweckmässig, diese hier benutzten Verfahren zu erörtern und die dann zur Beschreibung von Experimenten noch unumgänglichen numerischen Rechnungen vollständig durchzuführen.

Ausgehend von den Phasenräumen $\Omega_N(W, j)$ machen wir dann für jedes j einen statistischen Ansatz für den Zerfall des Zwischenzustands und summieren die einzelnen Beiträge mit einer Gewichtsfunktion $H(W, j)$, welche die Bildung des Feuerballs beschreibt. Wir setzen H im wesentlichen proportional zum Zweiteilchenphasenraum und beschreiben die Energieabhängigkeit des gesamten Pionisationsquerschnitts mit dem Einfluss der Lorentz-Kontraktion des Wechselwirkungsvolumens. Auf diese Weise erhalten wir für das Energieverhalten und für die Werte der einzelnen über alle Winkel integrierten Querschnitte gute Übereinstimmung mit den vorliegenden Experimenten.

2. Konstruktion von Phasenräumen.

2.1 Galilei-invariantes klassisches Modell

Klassisch versteht man unter einem Phasenraum ein multiples Integral über das Produkt von Orts- und Impulsraum, eingeschränkt (bei mikrokanonischer Verteilung) durch Funktionen in den zu berücksichtigenden Erhaltungsgrößen und im Ortsraum durch einen "Kasten" bzw. als Näherung eine entsprechend verschmierte Ortsraumwichtung. In einem klassischen nichtrelativistischen Modell¹⁴⁾ benutzt man zur Konstruktion des Phasenraums die Galilei-invariante Wichtung

$$(2.1) \quad \exp \left\{ -\frac{1}{2NR^2} \sum_{i,j} (\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2 \right\}$$

in einem N-Teilchensystem mit den Ortskoordinaten \vec{x}_i (R ist ein Parameter der Dimension Länge). Damit wird bei der "Abzählung" der mit den Erhaltungsgrößen verträglichen Konstellationen eine Unterdrückung solcher Systeme vorgenommen, in denen grosse Relativabstände von Teilchen vorkommen. Diese Funktion beschreibt also die räumliche Lokalisierung und trägt damit der Idee des Feuerballs Rechnung. Als Galilei-invarianten Phasenraum definiert man nun

$$(2.2) \quad \Omega_N(T, \vec{P}, \vec{M}, Q) = \int \prod_{i=1}^N \{d^3p_i d^3q_i\} \exp \left\{ -\frac{1}{2NR^2} \sum (\vec{q}_i - \vec{q}_j)^2 \right\} \\ \times \delta \left(\sum_1^N p_i^2 / 2m - T \right) \delta^{(3)} \left(\sum_1^N \vec{p}_i - \vec{P} \right) \delta^{(3)} \left(\sum_1^N m \vec{q}_i - \vec{Q} \right) \delta^{(3)} \left(\sum_1^N \vec{p}_i \times \vec{q}_i - \vec{M} \right),$$

wobei die Bedeutung der Variablen aus den δ -Funktionen ersichtlich ist (m ist die Masse der N Teilchen). Wie man durch Variablensubstitution erkennt, ist $\Omega(A) = \Omega(B)$, wenn der mit A abgekürzte Satz von Variablen durch eine Galileitransformation mit B verbindbar ist. Daher hängt Ω als Galileiinvarianter Phasenraum nur ab von den Invarianten

$$(2.3) \quad E = T - \frac{\vec{P}^2}{2M} \quad ; \quad \vec{L}^2 = \left\{ \vec{M} - \frac{\vec{Q} \times \vec{P}}{Nm} \right\}^2$$

Darin hat E die Bedeutung der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem, und \vec{L} ist der Spin. Im CMS verschwindet die durch die Ortsraumwichtung verursachte Korrelation wieder und man erhält

$$(2.4) \quad \Omega_N(E, L^2) = \int \prod_{i=1}^N \{ d^3 p_i d^3 q_i e^{-\vec{q}_i^2/R^2} \} \delta \left(\sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - E \right) * \\ * \delta^{(3)} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) \delta^{(3)} \left(\sum_i m \vec{q}_i \right) \delta^{(3)} \left(\sum_i \vec{p}_i \times \vec{q}_i - \vec{L} \right)$$

Diese Form ist nun der Ausgangspunkt der relativistischen Verallgemeinerung⁷⁾.

2.2 Poincaré-invariantes klassisches Modell

Die Poincarétransformationen Λ, a seien infinitesimal erzeugt durch

$$(2.5) \quad P_\mu = \sum_i p_\mu^i \quad ; \quad M_{\mu\nu} = \sum_i m_{\mu\nu}^i \quad ; \quad m_{\mu\nu}^i = x_\mu^i p_\nu^i - x_\nu^i p_\mu^i$$

Mit Hilfe des verallgemeinerten Schwerpunktvektors

$$(2.6) \quad K_\mu = \frac{1}{W} M_{\mu\nu} P^\nu \quad ,$$

der sich im Ruhesystem $\vec{P}=0$ auf

$$(2.7) \quad K_\mu = (0, \sum_i \tilde{x}_i p_{i0} - x_{i0} \vec{p}_i)$$

reduziert, konstruiert man den antisymmetrischen Spintensor $L_{\mu\nu}$, der dem Spinvektor \vec{L} der Gleichung (2.3) entspricht

$$(2.8) \quad L_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} - \frac{1}{W} [K_\mu P_\nu - K_\nu P_\mu]$$

Die Gruppeninvariante

$$(2.9) \quad L^2 = - \Gamma_\mu \Gamma^\mu \quad ; \quad \Gamma_\mu = \frac{1}{2W} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} M^{\sigma\tau} P^\nu$$

lässt sich dann mit dem translationsinvarianten L ausdrücken als

$$(2.10) \quad L^2 = \frac{1}{2} L_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \quad ; \quad L_{\mu\nu} P^\nu = 0$$

Statt des Phasenraummasses $d^3 p d^3 x$ setzen wir nun an

$$(2.11) \quad d\mu(p, x) = d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) d^4 x \delta(E_\mu x^\mu - \tau) 2 p_\mu E^\mu .$$

Damit entspricht der nichtrelativistischen Gleichzeitigkeit jetzt die Bindung der Teilchen an eine raumartige Hyperfläche, definiert durch den zeitartigen Vektor E und τ . Wir werden später den Vektor E geeignet festlegen, um das Transformationsverhalten des Phasenraumes übersichtlich zu machen. Die Konstruktion der relativistischen "Lokalisierungsfunktion" analog zu (2.1) ist nicht eindeutig. Wir wollen hier eine Abschneidung im Ortsraum einführen, die anschaulich ein in Flugrichtung der einlaufenden Teilchen Lorentz-kontrahiertes Wechselwirkungsvolumen beschreibt. In der Sicht des SM wird dadurch eine Eingangsinformation auf den Endzustand übertragen, die im Zusammenhang mit der erhaltenen 3-Komponente des Drehimpulses (Flugrichtung ist Quantisierungsachse) zu sehen ist.

Wir führen nun den normierten Vektor e_μ parallel zu $q_1 - q_2$ ein, wenn q_1, q_2 die Viererimpulse der beiden einlaufenden Teilchen sind. Im CMS ($e_0 = 0$) soll dann die Abschneidefunktion die Form

$$(2.12) \quad \exp \left\{ - \frac{1}{R^2} \sum_1^N [\gamma^2 \bar{x}_{i\parallel}^2 + \bar{x}_{i\perp}^2] \right\}$$

haben mit $\bar{x}_{\parallel}^2 = (\vec{x} \cdot \vec{e})^2$; $\bar{x}_{\perp}^2 = (\vec{x} \times \vec{e})^2$; $\gamma = W/2M$

Im CMS des Gesamtsystems zur Eigenzeit $x_{i0} = 0$ aller N Teilchen reduziert sich die folgende Funktion $F(x_i, p_i, e)$ auf

$$(2.13) \quad F = \exp \left[- \frac{1}{R^2} \sum_1^N \left\{ (e_\mu y_\mu^i)^2 + \frac{1}{2} (e_\mu y_\mu^i - e_\nu y_\nu^i)^2 \right\} \right]$$

mit $y_\mu^i = x_\mu^i - K_\mu / W - E_\mu x_\nu E^\nu$,

wenn wir den Vektor E parallel zu P, dem Gesamtimpuls, wählen. Man kann zeigen, dass bei dieser Festlegung von E

$$(2.14) \quad F(x_i, p_i, e) = F(\Lambda x_i + a, \Lambda p_i, \Lambda e)$$

gilt. Mit dieser Funktion F definieren wir nun als Phasenraum

$$(2.15) \quad \Omega_N(P_\mu, M_{\mu\nu}, e_\mu)_\tau = \int \prod_{i=1}^N \{d\mu(\rho_i, x_i)\} F(x_i, \rho_i, e) \\ * \delta^{(4)}\left(\sum_1^N \rho_\mu^i - P_\mu\right) \cdot \delta^{(6)}\left(\sum_1^N \mu_{\mu\nu}^i - M_{\mu\nu}\right)$$

Gehen wir nun durch Transformation des Arguments zu einem neuen Bezugssystem über $P_\mu, M_{\mu\nu}, e_\mu \rightarrow P'_\mu, M'_{\mu\nu}, e'_\mu$, so können wir wegen der Invarianz von F durch Variablentransformation im Integral die Änderung rückgängig machen. Insbesondere können wir also in das CMS gehen und erhalten dort

$$(2.16) \quad \Omega_N(P_\mu, M_{\mu\nu}, e_\mu)_\tau = \int \prod_{i=1}^N \{d^3 p_i d^4 x_i \delta(x_{i0} - \tau)\} * \\ * F(x_i, p_i, e) \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) \delta^{(3)}(\sum p_{i0} \vec{x}_i) \\ * \delta(\sum p_{i0} - W) \delta^{(3)}(\sum \vec{x}_i \times \vec{p}_i - \vec{L}),$$

wobei wir Gebrauch davon gemacht haben, dass wegen der δ -Funktionen die Zeiten für alle Teilchen gleich werden. Wegen der Zeittranslationsinvarianz von F hängt nun Ω auch nicht mehr von τ ab und ist daher eine invariante Funktion ihrer Argumente. Als Eingangsinformation gilt im CMS $\vec{L}e=0$, da eine einlaufende ebene Welle skalarer Teilchen den Drehimpuls 0 in Flugrichtung \vec{e} hat. $\Omega_N(W, L^2)$ unter der NB $\vec{L}e=0$ hängt dann nur von den Invarianten W, L^2 ab und hat analog zu (2.4) die Form

$$(2.17) \quad \Omega_N(W, L^2) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^3 p_i d^3 x_i e^{-\frac{1}{R^2}[(\vec{x}_i e)^2 \gamma^2 + (\vec{x}_i \times \vec{e})^2]} \right\} \\ * \delta(\sum p_{i0} - W) \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) \delta^{(3)}(\sum p_{i0} \vec{x}_i) \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i \times \vec{x}_i - \vec{L}).$$

Dieses Integral reduziert sich im NR-limes auf (2.4) und stellt eine natürliche Erweiterung des dem üblichen SM zugrundeliegenden Impulsraums dar. Wir sehen allerdings, dass die Konstruktion eines solchen Phasenraums nicht eindeutig ist, da beliebige Funktionen von pE , d.h. beliebige Funktionen von p_0 im CMS in das Integral eingeschrieben das Trans-

formationsverhalten nicht ändern.

2.3 Quantenmechanisch relativistische Formulierung

Quantenmechanisch⁷⁾ soll die Lokalisierung der Teilchen im Wechselwirkungsvolumen durch einen noch zu spezifizierenden Operator Q , der von dem Vektor e abhängt, beschrieben werden. Für Poincarétransformationen Λ, a soll gelten

$$(2.18) \quad U(\Lambda, a) Q(e) U^{-1}(\Lambda, a) = Q(\Lambda e) .$$

Den zehn δ -Funktionen in den Erhaltungsgrößen entspricht jetzt eine mikrokanonische Dichtematrix. Sie projiziert auf Zustände definierter Masse und festen Spins, d.h. auf eine irreduzible Darstellung der Poincarégruppe. Dem Phasenraum entspricht nun eine Spur des Produktes $Q \cdot P^{Wj}$, die wir in einem Bezugssystem mit Gesamtimpuls \vec{P} und $j_3=0$ (\vec{e} ist Quantisierungsachse) bilden wollen. Das bedeutet, wir projizieren in der irreduziblen Darstellung W, j noch auf einen speziellen Vektor \vec{P}, j_3 . Durch Vorgabe dieser Quantenzahlen ist ein $N \geq 3$ -Teilchenzustand noch nicht eindeutig beschrieben, sondern es bedarf noch der Festlegung der sogenannten Entartungsparameter η_N , die die innere Konfiguration des Vielteilchensystems angeben. Da in der Spur nur W, j, \vec{P}, j_3 festgehalten werden, liegt dort eine verallgemeinerte Abzählung der η_N -Parameter vor, die aber durch die von dem Operator Q bewirkte Wichtung verkompliziert ist.

Die Spur von $Q \cdot P^{Wj}$, mit dem Projektor auf die besprochenen Quantenzahlen, hängt zunächst von $W, j, \vec{P}, j_3, \vec{e}$ ab. Da aber die Spur des Operators A über den Impulsraum

$$(2.19) \quad Sp A = \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} \right\} \langle p_1 \dots p_N | A | p_1 \dots p_N \rangle$$

invariant gegen Poincarétransformationen ist und

$$(2.20) \quad U(1, \alpha) P^{W_{ij}, \vec{P}, j_3} U^{-1}(1, \alpha) = P^{W_{ij}, 1\vec{P}, j_3'}$$

(3' ist die transformierte Quantisierungsachse) gilt, hängt die Spur nur ab von den Invarianten W, j und kann daher in einem geeigneten Lorentzsystem ausgewertet werden. Physikalisch ist e die in allen Bezugssystemen definierte Richtung der Strahlachse. Daher genügt es, bei einlaufenden skalaren Teilchen den Projektor auf die irreduzible Darstellung W, j im Ruhesystem $\vec{P}=0$ und $j_3=0$ zu konstruieren. Mit dem Charakter der inhomogenen Lorentzgruppe¹⁵⁾ zu W, j

$$(2.21) \quad X^{W, j}(1, \alpha) = \int d^3\rho e^{i\alpha\rho} \delta^{(3)}(\vec{1}\rho - \vec{P}) X^j(h_\rho \uparrow h_\rho^{-1})$$

(h_ρ sind drehungsfreie Lorentztransformationen, die \vec{P} in 0 überführen, und $X^j(\varphi)$ ist der Drehgruppencharakter zum Drehwinkel φ) bilden wir analog zum Vorgehen bei der Konstruktion der Galilei-invarianten Zustandssumme¹⁶⁾ den Projektor

$$(2.22) \quad P^{W, j} = \frac{(2j+1)}{(2\pi)^4} \int d\mu(g) X^{*W, j}(g) U(g)$$

mit den Darstellern $U(g)$. Als invariantes Mass verwenden wir $d\mu(g) = d^4\text{ad}^6\Lambda$. Man kann formal für die Charaktere Fal-tungseigenschaften

$$(2.23) \quad X^{W, j} * X^{W', j'} = \delta(W-W') \delta_{j, j'} X^{W, j}$$

zeigen, und daher ist $P^{W, j}$ ein uneigentlich normierter Pro-jektor mit

$$(2.24) \quad P^{W, j} \cdot P^{W', j'} = \delta(W-W') \delta_{j, j'} P^{W, j}$$

$$\int dW \sum_j P^{W, j} = \text{„} \mathbb{1} \text{“}$$

Wir betrachten nun zunächst die Matrixelemente von $Q \cdot P^{W, j}$. Da beide Operatoren translationsinvariant sind, erwarten wir, dass vor der Spurbildung von dem Matrixelement

$$(2.25) \quad \langle p_1 \dots p_N | Q \cdot P^{W_j} | p'_1 \dots p'_N \rangle$$

eine dreifache δ -Funktion $\delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i - \sum \vec{p}'_i)$ abzuspalten ist. Wir möchten zudem die Spur ausdrücken mit Matrixelementen von Q genommen zwischen zur Zeit τ maximal lokalisierten N -Teilchenzuständen, sogenannten Newton-Wigner-Zuständen (NW).

Einen Einteilchenzustand, charakterisiert durch Angabe des Ortes der Lokalisierung q (Zeit τ) beschreibt man durch

$$(2.26) \quad |\vec{q}, \tau\rangle = \int \frac{d^3 p}{2p_0} \frac{\sqrt{2p_0}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i p q} a^\dagger(p) |0\rangle.$$

Wir bezeichnen nun im folgenden das N -fache direkte Produkt solcher Zustände mit $|q_1, \dots, q_N\rangle_\tau$, wobei wir als Normierung wählen

$$(2.27) \quad \langle q_1 \dots q_N | q'_1 \dots q'_N \rangle_\tau = \delta_{NN'} \prod_{i=1}^N \delta^{(3)}(\vec{q}_i - \vec{q}'_i),$$

so dass die folgende Zerlegungseigenschaft gilt

$$(2.28) \quad \sum_N \int \prod_{i=1}^N \{d^3 q_i\} |q_1 \dots q_N\rangle_\tau \cdot \langle q_1 \dots q_N| = \mathbb{1}.$$

Wir sehen also von einer korrekten Symmetrisierung unseres N -Teilchenzustands ab, d.h. wir rechnen mit einem System unterscheidbarer Teilchen. Wir wollen nun auf beiden Seiten des Operators Q im Matrixelement (2.25) Einsen einschreiben:

$$(2.29) \quad \langle p_1 \dots p_N | Q P^{W_j} | \bar{p}_1 \dots \bar{p}_N \rangle = \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^3 q_i d^3 \bar{q}_i \frac{\sqrt{2p_{i0}}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i \vec{p}_i \cdot \vec{q}_i} \right\}$$

$$* \langle \dots q_i \dots | Q | \dots \bar{q}_i \dots \rangle_\tau \cdot \langle \dots \bar{q}_i \dots | P^{W_j} | \bar{p}_1 \dots \bar{p}_N \rangle.$$

Dann verwenden wir die Gruppendarstellung von P^{W_j} und benutzen dazu die Wirkung des Darstellers U in folgender Form

$$(2.30) \quad U(U, a) |p_1 \dots p_N\rangle = e^{i a \sum p_i} |p_1 \dots p_N\rangle.$$

Damit kann man das Matrixelement ausschreiben und erhält

$$\begin{aligned}
 \langle \dots p_i \dots | Q P^{W_j} | \dots \bar{p}_i \dots \rangle &= \prod_{i=1}^N \left\{ \int d\vec{q}_i d\vec{\bar{q}}_i \frac{\sqrt{2p_{i0}}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{p}_i \vec{q}_i} \right\} * \\
 (2.31) \quad * \int d\mu(g) \bar{\chi}^{W_j}(g) \frac{\sqrt{2\bar{p}_{i0}}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ia\sum \bar{p}_i + i\sum \Lambda \bar{p}_i \vec{q}_i}
 \end{aligned}$$

wobei schon benutzt wurde, dass im Charakter eine δ -Funktion steht, die Λ auf solche Lorentztransformationen festlegt, für die es einen räumlichen Fixvektor gibt $\Lambda \vec{P} = \vec{P}$, d.h. auf Drehungen im Ruhesystem. Entsprechend kann man auch schreiben

$$\begin{aligned}
 \langle \dots p_i \dots | Q P^{W_j} | \dots \bar{p}_i \dots \rangle &= \int \prod_{i=1}^N \{ d\vec{q}_i \} \int d\mu(g) \bar{\chi}^{W_j}(g) * \\
 (2.32) \quad * e^{ia\sum \bar{p}_i + i\sum (\Lambda \bar{p}_i - p_i) \vec{q}_i} * W(p_i; \bar{p}_i; \vec{q}_i; \tau) \\
 W &= \int \prod_{i=1}^N \{ d\vec{q}_i \} \sqrt{\frac{p_{i0} \bar{p}_{i0}}{(2\pi)^3}} e^{i\sum p_i (\vec{q}_i - \bar{q}_i)} \int d\mu(g) \chi^{W_j}(g) * \langle \dots \bar{q}_i \dots | Q | \dots \vec{q}_i \dots \rangle
 \end{aligned}$$

wobei wir die Bedeutung der Funktionen W hier nicht weiter diskutieren werden ⁷⁾.

Um nun die oben erwähnte Singularität abzuspalten, schreiben wir in das Integral (2.32) die folgende Eins ein:

$$(2.33) \quad 1 = \int d^3 N \delta^{(3)} \left(\sum_i p_{i0} \vec{q}_i - \vec{N} \right)$$

Dann führen wir im $d^3 q_i d^3 p_i$ Integral Translationen aus und erhalten unter Berücksichtigung der Translationsinvarianz von Q die folgende Umformung

$$\begin{aligned}
 \langle \dots p_i \dots | Q P^{W_j} | \dots \bar{p}_i \dots \rangle &= \int d^3 N \int \prod_{i=1}^N \{ d\vec{x}_i \} \int d\mu(g) \bar{\chi}^{W_j}(g) \\
 (2.34) \quad * e^{ia\sum \bar{p}_i + i\sum (\Lambda \bar{p}_i - p_i) \vec{x}_i} \cdot e^{i\sum (\Lambda \bar{p}_i - p_i) \frac{\vec{N}}{W}} \delta(\sum p_{i0} \vec{x}_i) \cdot W.
 \end{aligned}$$

Wir führen nun einen Teil der Gruppenintegration formal aus und erhalten bei der Integration über die Raumtranslationen

am folgendes Zwischenergebnis

$$(2.35) \quad \int d^3 a e^{i a \vec{\Sigma} \vec{p}_i} e^{-i a \vec{P}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{\Sigma} \vec{p}_i - \vec{P}).$$

Nach Ausführung der $d^3 N$ -Integration unter Benutzung von $\delta^{(3)}(\vec{A} \vec{P} - \vec{P})$, d.h. $\vec{A} \vec{\Sigma} \vec{p}_i = \vec{A} \vec{P} = \vec{Z} \vec{p}_i$ spaltet dann die gesuchte δ -Funktion in der folgenden Form ab

$$(2.36) \quad \langle p_1 \dots p_N | Q P^{W_j} | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_N \rangle \sim (2\pi)^3 W^3 \delta^{(3)}(\vec{\Sigma} \vec{p}_i - \vec{\Sigma} \vec{p}_i)$$

Wir gehen nun zum reduzierten Matrixelement über, was wir in dieser Form erhalten

$$(2.37) \quad \langle \dots p_i \dots || Q P^{W_j} || \dots p_i \dots \rangle = \int_{\tau} \prod_{i=1}^N \{ d^3 \bar{x}_i \} \int d^6 \lambda d^4 a \int d^3 p e^{-i a p} * \\ * \delta^{(3)}(\vec{A} \vec{P} - \vec{P}) \chi^j(\vec{h}_p \wedge \vec{h}_p^{-1}) e^{i a \vec{\Sigma} p_i + i \vec{\Sigma}(\lambda p_i - p_i) \bar{x}_i} \delta^{(3)}(\vec{\Sigma} p_{i0} \vec{x}_i) W(p_i; \bar{x}_i, \tau)$$

mit

$$W = \int_{\tau} \prod_{i=1}^N \left\{ d^3 x_i \frac{2 p_{i0}}{(2\pi)^{3/2}} \right\} e^{i \vec{\Sigma} p_i (x_i - \bar{x}_i)} \tau \langle \dots x_i \dots | Q | \dots \bar{x}_i \dots \rangle_{\tau}$$

Wir wollen nun annehmen, dass Q in der NW-Ortsdarstellung diagonal ist, d.h.

$$\tau \langle \dots x_i \dots | Q | \dots \bar{x}_i \dots \rangle_{\tau} = \prod_{i=1}^N \delta^{(2)}(x_i - \bar{x}_i) \tau \langle \dots x_i \dots || Q || \dots \bar{x}_i \dots \rangle_{\tau},$$

wobei der Zeitindex unterdrückt werden kann wegen der Zeittranslationsinvarianz von Q.

Bevor wir nun die Impulsraumspur bilden, haben wir auf definiertes \vec{P} und j_3 zu projizieren. Wir können wegen der Invarianz der Spur dazu $\vec{P} = 0$ wählen und erhalten dann nach Ausführung der Gruppenintegration bis auf Drehungen

$$(2.38) \quad \Omega_N(W, j) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} \right\} \delta^{(3)}(\vec{\Sigma} \vec{p}_i) \langle \dots p_i \dots || Q P^{W_j j_3} || \dots p_i \dots \rangle$$

also

$$\Omega_N(W, j) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} d^3 x_i \right\} \delta(\vec{\Sigma} p_{i0} - W) \delta^{(3)}(\vec{\Sigma} \vec{p}_i) \delta(\vec{\Sigma} p_{i0} \vec{x}_i)$$

$$* \int d\mu(R) D_{00}^{*j}(R) e^{i \vec{\Sigma}(R \vec{p}_i - \vec{p}_i) x_i} W(p_i | x_i)$$

mit
$$W(p_i/x_i) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^3 \vec{x}_i \frac{2p_{i0}}{(2\pi)^{3/2}} \right\} e^{i \sum p_i (x_i - \bar{x}_i)} \langle x_i | Q | x_i \rangle$$

($D_{mn}^j(R)$ sind hier die Darstellungsmatrizen der durch R parametrisierten Drehungen). Wir wählen nun in Analogie zum klassischen Bild für die reduzierten Matrixelemente des Operators Q die folgende Form im CMS

$$(2.39) \quad \langle x_i | Q | x_i \rangle_{CMS} = \exp \left\{ -\frac{1}{R^2} \sum_i^N x_{i\parallel}^2 x_{i\perp}^2 \right\} (2\pi)^{-3N}$$

In dieser Gestalt stimmt unser Phasenraumintegral mit dem bei F.Cerulus⁴⁾ angegebenen überein bis auf die geänderte Form der Ortsraumabschneidung und eine relativistische Schwerpunkts- δ -Funktion. Neben der quantenmechanischen Berücksichtigung der Drehimpulserhaltung, die hier zu einem komplexwertigen Gewicht auf dem Impulsraum führt, ist dieses der Phasenraum in (2.17), und zwar

$$(2.40) \quad \Omega_N(W, J) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3N} \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2p_{i0}} \right\} \delta(\sum p_{i0} - W) \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) F_J(p_1 \dots p_N)$$

$$F_J(p_i) = \int d\mu(R) D_{\infty}^{*J}(R) \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^3 x_i \frac{2p_{i0}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{R^2}(x_{i\parallel}^2 + x_{i\perp}^2) + i(R\vec{p}_i - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}_i} \right\}^* \delta^{(3)}(\sum p_{i0} \vec{x}_i)$$

Wir erhalten also den üblichen Impulsraum des kovarianten SM (1.2), modifiziert durch eine hauptsächlich von der Drehimpulserhaltung herrührende Wichtung. Wegen der restlichen Drehinvarianz der Raumabschneidung gilt $F_J(\vec{p}_i) = F_J(T\vec{p}_i)$ mit einer beliebigen Drehung T um die Strahlachse. Während der Integrand von F nach Fourierdarstellung der δ -Funktion faktorisiert, bewirkt insbesondere die Drehimpulserhaltung eine Korrelation unter den N auslaufenden Teilchen, so dass F nicht mehr faktorisiert.

2.4 Berücksichtigung von Spin und Isospin

Zur Berücksichtigung der Spins bei auslaufenden Teilchen machen wir zunächst eine allgemeine Bemerkung. Wenn der Gesamtdrehimpuls sich nicht nur aus den "Bahnteilen" zusammensetzt - es sei angenommen, dass jedes der Teilchen den Spin $s=1/2$ hat -, so ist zu erwarten, dass bei hohen Energien der "Spinteil" zu vernachlässigen ist gegen den "Bahnteil" wegen der grossen Geschwindigkeit der Teilchen im Wechselwirkungsvolumen. Andererseits ist wegen des zusätzlichen Freiheitsgrades jedes Teilchens mit einer N -abhängigen Vergrösserung der Zustandssumme, herrührend von den möglichen Spineinstellungen der auslaufenden Teilchen, zu rechnen. Die notwendigen Abänderungen des obigen Konzepts zur Diskussion dieses Effektes lassen sich nun wie folgt übersehen.

Der Impulsraumspur für skalare Teilchen, mit der wir in (2.19) den quantenmechanischen Phasenraum konstruierten, entspricht jetzt eine zusätzliche Summation über die Spineinstellungen λ_p , wobei es in der Spur irrelevant ist, welche Basis im Spinraum benutzt wird. Wir schreiben dann die Spur des Operators A

$$(2.41) \quad \text{Spur } A = \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_N} \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} \right\} \langle \dots p_i \lambda_i \dots | A | \dots p_i \lambda_i \dots \rangle .$$

Analog zu dem Vorgehen für skalare Teilchen konstruiert man mit Viererspinoren $u_\lambda(\vec{p})$ lokalisierte NW-Zustände¹⁷⁾ und betrachtet dann das direkte Produkt

$$(2.42) \quad |q_1 \lambda_1 \dots q_N \lambda_N \rangle_{\pm} = \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} \frac{\sqrt{2 p_{i0}}}{(2\pi)^{3/2}} u_{\lambda}(\vec{p}_i) e^{-i \vec{p}_i \cdot \vec{q}_i} a^{\pm}(p_i \lambda_i) \right\} |0\rangle$$

$$[a(\vec{p} \lambda), a^{\dagger}(\vec{p}' \lambda')]_{\pm} = 2 p_0 \delta_{\lambda \lambda'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') ,$$

wobei die folgende Normierung der Spinoren $\bar{u}_{\lambda}(\vec{p}) \cdot u_{\lambda'}(\vec{p}) = \delta_{\lambda \lambda'}$ für positive Energien gelten soll. Bei Teilchen mit Spin ist nun das Transformationsverhalten der Zustände in (2.30) abzuändern, da der Darsteller U der inhomogenen Lorentz-

gruppe auch auf die $u_\lambda(\vec{p})$ zu wirken hat; man erhält

$$(2.43) \quad \tau \langle \dots q_i \lambda_i | U(\Lambda, a) | \dots p_i \lambda_i' \dots \rangle = \prod_{i=1}^N \otimes \frac{\sqrt{2p_{i0}}}{(2\pi)^{3/2}} S(\Lambda) u_{\lambda_i}(\vec{p}_i) e^{i a p_i + i \Lambda p_i \cdot \vec{q}_i} \delta_{\lambda_i \lambda_i'}$$

Hier wirken die Matrizen $S(\Lambda)$ auf die Viererspinoren. Die Forderung nach der Forminvarianz der Diracgleichung ergibt für $S(\Lambda)$ die Gleichung $S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$. Im Falle räumlicher Drehungen (\vec{n}, ϑ) erhält man dann ¹⁸⁾

$$S(R) = \mathbb{1} \cos \vartheta/2 + i \vec{n} \cdot \vec{\Sigma} \sin \vartheta/2$$

Demzufolge hat man in Formel (2.37) zu ersetzen

$$(2.44) \quad \begin{aligned} e^{i a p + i (\Lambda p - p) x} &= e^{-i p x} U(\Lambda, a) e^{i p x} \\ \longrightarrow e^{-i p x} \bar{u}_\lambda(\vec{p}) S(\Lambda) u_\lambda(\vec{p}) e^{i a p + i \Lambda p x} \end{aligned}$$

während unter der Annahme, dass der Operator Q , der die Lokalisierung beschreibt, nicht auf die Spinindizes wirkt, die W -Funktion in (2.37) ungeändert bleibt. Die weiteren Erörterungen der Abspaltung von Singularitäten und Ausführung der Gruppenintegrationen bis auf die Raumdrehungen $R(\vec{n}, \varphi)$ bleiben von den $u_\lambda(\vec{p})$ unberührt. Man erhält daher mit

$$(2.45) \quad \sum_\lambda \bar{u}_\lambda(\vec{p}) S(R) u_\lambda(\vec{p}) = \sum_\lambda \chi_{\lambda\lambda}^{1/2}(R) = \chi^{1/2}(\varphi)$$

nach der Spurbildung auf der Diagonalen im CMS:

$$(2.46) \quad \begin{aligned} \Omega_N(W, \vec{j}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3N} \int \prod_{i=1}^N \{ d^3 p_i d^3 \vec{q}_i e^{-\frac{1}{R^2} [\vec{q}_i^2 \delta^2 + \vec{q}_i^2 L]} \} \delta(\sum p_{i0} - W) \\ &\times \delta^{(3)}(\sum \vec{p}_i) \delta^{(1)}(\sum p_{i0} \vec{q}_i) \int d\mu(R) D_{00}^{*j}(R) [\chi^{1/2}(\varphi)]^N e^{i Z(R p_i - p_i) \cdot \vec{q}_i} \end{aligned}$$

Wir werden in Abschnitt 3 zeigen, dass die Auswertung dieses Integrals für grosse N im Vergleich zum Fall skalarer Teilchen einen Faktor 2^N und daneben noch eine für höhere Energien geringfügige Veränderung des Drehimpulsverhaltens von $\Omega_N(W, j)$ ergibt, wie das erwartet wurde.

Der Einschluss des Spins der auslaufenden Teilchen in das SM mit Drehimpulserhaltung ist so vorgenommen worden, dass sich als Zustandssumme für ein System von N ruhenden Teil-

chen mit $s=1/2$ gerade die Anzahl der möglichen Kopplungen der Einzelspins zum Gesamtdrehimpuls j ergibt. Wir wollen diese Verhältnisse nun ausführlicher am Beispiel des Isospinphasenraums studieren.

Beschreibt man die Teilchen nicht nur durch auf den Raum bezogene Variable, sondern lässt man noch innere Isospinfreiheitsgrade zu, so liegt als Zustandsraum das Produkt des bislang betrachteten Raums mit dem diskreten Isoraum vor. Zur Definition des gesamten Phasenraums ist dann die Spur über den ganzen Zustandsraum zu erstrecken. Entsprechend haben wir statt auf eine irreduzible Darstellung W, j und einen darin liegenden Vektor jetzt noch zusätzlich auf definierten Gesamtisospin I und dessen 3-Komponente I_3 zu projizieren. Falls man nun aber keine Wirkung des Lokalisierungsoperators Q auf den Isospin verlangt, zerlegt sich die Spur von $Q \cdot P^{Wj} \cdot P^I$ in Einzelspuren über Orts- bzw. Isoraum. Die Isoraumspur des Projektors P^{I, I_3} , die wir zukünftig als Isospinphasenraum bezeichnen $\Omega_N(I, I_3)$, faktorisiert also ab und kann gesondert diskutiert werden. Wir sehen zunächst, dass

$$(2.47) \quad \Omega_N(I, I_3) = \text{Spur } P^{I, I_3} = \sum_{I_3^1 \dots I_3^N} \langle I_1 I_3^1 \dots I_N I_3^N | P^{I, I_3} | \dots \rangle$$

wegen der Invarianz der Spur unter Rotationen im Isoraum nicht von I_3 abhängt. Wir werden daher im folgenden nur auf I projizieren (und dann durch die Vielfachheit $2I+1$ dividieren). Man kann nun die N -Teilchen-Isospinzustände auch klassifizieren nach ihrem Drehverhalten (also nach der irreduziblen Darstellung I , Vektor I_3 und Entartungsparametern η_N) und dann die Spur umschreiben auf diese Basis

$$(2.48) \quad \Omega_N(I) = \frac{1}{2I+1} \sum_{\eta_N} \sum_{I, I_3} \langle I I_3 | \eta_N | P^I | \dots \rangle = \sum_{\eta_N} 1$$

Wir sehen so, dass $\Omega_N(I)$ eng zusammenhängt mit der Multiplizität der irreduziblen Darstellung zu I im N -fachen

direkten Produkt von Darstellungen zu I_p , d.h. die Anzahl der möglichen Kopplungen zum Gesamtisospin I angibt.

Bislang sind alle Teilchen als unterscheidbar angenommen worden, so dass keine Symmetrisierung nötig war. Im Falle identischer Teilchen stellt allein die Forderung nach der Symmetrie des Gesamtzustands bereits eine schwer zu überblickende Verkopplung von Raum und Isoraumteilen der Basisvektoren in unserer Spurformel dar. Wir berücksichtigen die Identität der Teilchen jetzt nachträglich in üblicher Weise durch einen Faktor $1/N!$ vor dem Gesamtphasenraum und schreiben (korrekte Boltzmann Abzählung)

$$(2.49) \quad \Omega_N(W, \beta, I) = \frac{1}{N!} \Omega_N(W, \beta) \cdot \Omega_N(I).$$

Bei Abzählproblemen in der Quantenstatistik ergibt sich die korrekte Boltzmann Abzählung als Grenzfall der Fermi- und Dirac-Statistik, wenn der überwiegende Teil der Zustandszellen höchstens einfach besetzt ist. Insofern sollte der Einfluss der korrekten Symmetrisierung im Grenzfall hoher Energien verschwinden. Im Anhang C studieren wir diese Frage an einem nicht-relativistischen Potentialmodell unter Berücksichtigung von Energie und Drehimpulserhaltung.

Wir haben nun als Ausgangspunkt für spätere Rechnungen einen relativistischen, quantenmechanischen Phasenraum (unter Berücksichtigung von Spin und Isospin), der natürlich auch für verschiedene Teilchenmassen der betrachteten Sorten definiert ist, angegeben. Dabei stellen wir fest, dass die Phasenräume im allgemeinen nicht geschlossen darstellbar sind. Wir wollen daher im nächsten Abschnitt Methoden zu deren Näherungsberechnung angeben und diskutieren.

3. Zur Näherungsberechnung von Phasenräumen

3.1 Erläuterung der benutzten Näherung

Phasenräume zu mikrokanonischer Verteilung sind bekanntlich im allgemeinen nicht geschlossen analytisch auswertbar. Zu deren Berechnung werden daher heute rekursive Darstellungen (Zweiteilchenphasenraum ist oft auf elementare Funktionen zurückführbar) oder Integrationsmethoden, die sich wesentlich auf schnelle Rechenanlagen stützen, benutzt. Die Auswertung von Phasenräumen mit Drehimpulserhaltung scheint allerdings bislang auch mit den gewohnten Methoden nicht durchführbar zu sein. Einen Ausweg aus der für höhere Teilchenzahlen hoffnungslosen Situation zeigten F. Lurçat und P. Mazur¹⁹⁾ - in einer Fortsetzung der Arbeiten von A. Khinchin²⁰⁾ -, die zur Näherungsberechnung von Phasenräumen grosser Teilchenzahlen Grenzwertsatzmethoden aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung heranzogen. Es zeigt sich dann, dass man bei Annahme einer Gleichverteilung auf der durch die Erhaltungsgrössen definierten Hyperfläche GWS-Methoden für die multiple Faltung von nicht normierbaren Dichten braucht. Die solchen Verfahren zugrundeliegenden Beweismethoden lassen sich fortsetzen auch auf den Fall von quantenmechanischer Drehimpulserhaltung, wobei allerdings - wie stets bei Drehimpulserhaltung - die Frage nach der Gültigkeit der asymptotischen Entwicklung für sehr grosse J noch offen ist. Man erhält jedoch Einblick in die Struktur der benutzten Näherungsverfahren durch Diskussion eines zweidimensionalen geschlossen lösbareren, klassischen Phasenraums mit voller Kinematik. Es zeigt sich dabei⁷⁾, dass der führende term in der $1/N$ -Entwicklung schon das exakte Ergebnis bis auf Stirlingapproximation von Fakultäten ist, während das Verhalten der höheren Näherungen ein Zusammenbrechen der Entwicklung für grosse Drehimpulse andeutet.

Bevor wir uns der Näherungsberechnung der oben beschriebenen Phasenräume zuwenden, zeigen wir das benutzte Verfahren zunächst am Beispiel des Impulsraums¹⁹⁾

$$(3.1) \quad \Omega_N(W) = \int \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2 p_{i0}} \right\} \delta^{(4)}(\sum p_i - P)$$

Aus Invarianzgründen hängt Ω nur von $W^2 = P^2$ ab. Wir schieben eine Eins in das Integral ein von der Form

$$(3.2) \quad 1 = \exp \left\{ \alpha_\mu \left(P^\mu - \sum_{i=1}^N p_i^\mu \right) \right\} ; \operatorname{Re} \alpha_0 > 0$$

mit zeitartigem α . Danach können wir die δ -Funktionen nach Fourier darstellen und erhalten eine Entkopplung der N Teilchen

$$(3.3) \quad \Omega_N(W) = e^{\alpha P} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d^4 t e^{itP} \left[\int \frac{d^3 p}{2 p_0} e^{-(\alpha + it)p} \right]^N$$

Wir definieren nun die Funktion $\varphi(\alpha) = \varphi(\lambda\alpha)$:

$$(3.4) \quad \varphi(\alpha) = \int \frac{d^3 p}{2 p_0} e^{-\alpha p} = \frac{2\pi m}{\sqrt{\alpha^2}} K_1(m\sqrt{\alpha^2})$$

und schreiben damit den Impulsraum um

$$(3.5) \quad \Omega_N(W) = e^{\alpha P} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \varphi^N(\alpha) \cdot F_N^\alpha(P)$$

$$(3.6) \quad F_N^\alpha(P) = \int d^4 t e^{itP} [g^\alpha(t)]^N$$

mit

$$g^\alpha(t) = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int \frac{d^3 p}{2 p_0} e^{-(\alpha + it)p}$$

Mit diesen Umformungen haben wir eine Standardform zur Anwendung der asymptotischen Entwicklung für grosse N der Funktion $F_N^\alpha(P)$ erhalten. Wir gehen nun zur Näherung über. Die Funktion $g^\alpha(t) = g^{\lambda\alpha}(\lambda t)$ ist für $t=0$ normiert und es gilt $|g^\alpha(t)| < g^\alpha(0) = 1 \neq t \neq 0$. Mit Hilfe der Abfallseigenschaften von g in t ausserhalb der Stelle $t=0$ kann man

zeigen, dass bei festem α und fester Umgebung O um $t=0$ der Beitrag

$$\int_{O} d^4t e^{itP} [g^\alpha(t)]^N$$

mit wachsendem N exponentiell verschwindet. Da wir später eine Wahl von α so vornehmen werden, dass der Rest des Integrals (3.6) nur wie $1/N^2$ verschwindet, können wir uns auf eine Umgebung O in der t -Integration beschränken, in der $\ln g^\alpha(t)$ eine Taylorentwicklung um $t=0$ von der Form

$$(3.7) \quad \ln g^\alpha(t) = A_\mu^\alpha t^\mu + \frac{1}{2} B_{\mu\nu}^\alpha t^\mu t^\nu + \frac{1}{6} C_{\mu\nu\sigma}^\alpha t^\mu t^\nu t^\sigma + \dots$$

besitzt. Wir substituieren im Integral (3.3) $t \rightarrow t/\sqrt{N}$ und erhalten bis auf additive Korrekturterme $E(N)$, die exponentiell verschwinden:

$$(3.8) \quad F_N^\alpha(P) = N^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4t e^{it_\mu \frac{P^\mu}{\sqrt{N}} + N A_\mu^\alpha \frac{t^\mu}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2} B_{\mu\nu}^\alpha t^\mu t^\nu} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1}{N} D_{\mu\nu\sigma}^\alpha t^\mu t^\nu t^\sigma + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} + E(N)$$

Im Sinne der oben erwähnten Optimalisierung der Näherung wählen wir α als Lösung der sog. Chinchin-Gleichung (CHGL)

$$(3.9) \quad -it_\mu P^\mu = N A_\mu^\alpha t^\mu,$$

d.h. wir setzen

$$(3.10) \quad P_\mu = -N \partial_{\alpha^\mu} \ln \varphi(\alpha).$$

Man kann zeigen, dass diese Gleichung für jedes zeitartige P mit $P_0 > 0$ eine eindeutige zeitartige Lösung α definiert. So hat man im Ruhesystem $\vec{\alpha} = 0$, und $\alpha_0 > 0$ kann aus der CHGL

$$(3.11) \quad W = -N \partial_\alpha \ln \left[\frac{1}{\alpha} K_1(N\alpha) \right]$$

ermittelt werden. Diese Gleichung enthält die modifizierte Besselfunktion K_1 und muss numerisch gelöst werden. Wir erhalten nun nach Ausführung der restlichen Integrationen in

der Gleichung (3.3):

$$(3.12) \quad F_N^\alpha(P) = \frac{4\pi^2}{N^2 \sqrt{\det B^\alpha}} \cdot \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\} + E(N).$$

Aufgrund der CHGL ist unsere Näherung eine asymptotische Entwicklung für $N \rightarrow \infty$ unter Nebenbedingung $W/N = \text{const.}$, und sie lässt sich verbessern durch Berücksichtigung der höheren Näherungen in $1/N$.

Im Falle verschiedener Teilchenmassen erhält man statt der N -ten Potenz in (3.3) ein Produkt

$$(3.13) \quad F_N^\alpha(P)_{m_1 \dots m_N} = \int d^4t e^{itP} \prod_{i=1}^N g_i^\alpha(t)$$

mit

$$g_i^\alpha(t) = \frac{1}{\varphi_i(\alpha)} \int \frac{d^3 p_i}{2p_{i0}} e^{-(\alpha + it)p_i},$$

wobei jeweils in der Definition von p_{i0} die verschiedenen Teilchenmassen zu berücksichtigen sind. Ebenso ist die Funktion $\varphi(\alpha)$ in der Ausgangsgleichung (3.5) zu ersetzen durch das Produkt: $\varphi(\alpha) \rightarrow \prod \varphi_i(\alpha)$, und somit wird der Tensor der zweiten partiellen Ableitungen $N \cdot B_{\mu\nu}^\alpha$ in (3.7) ersetzt durch eine Summe der entsprechenden Ableitungen von $\varphi_i(\alpha)$.

Wir wollen nun zu einer anschliessenden Diskussion noch das Ergebnis für verschiedene Teilchenmassen m_ξ (Besetzungszahlen N_ξ) bereitstellen.

$$(3.14) \quad \Omega_{N_\xi}(W) = e^{\alpha W} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \prod_{\xi} [\varphi_\xi(\alpha)]^{N_\xi} \cdot \left(\frac{W}{\alpha}\right)^{-3} \times \\ \times \left\{ \frac{3}{\alpha} W + \sum_{\xi} N_\xi m_\xi^2 [1 - Q^2(m_\xi, \alpha)] \right\}^{-1/2};$$

mit

$$\varphi_\xi(\alpha) = 2\pi m_\xi \frac{K_1(m_\xi \alpha)}{\alpha}$$

$$Q(x) = 2/x + K_0(x)/K_1(x) = -\partial_x \ln \varphi(x)$$

mit den modifizierten Besselfunktionen K_0 und K_1 .

Der Parameter α hängt nun neben W auch noch von den N_ξ ab

und wird aus der allgemeinen CHGL

$$(3.15) \quad W = \sum_{\xi} N_{\xi} m_{\xi} Q(m_{\xi} \alpha)$$

festgelegt. $Q(x)$ aus (3.14) ist eine monoton fallende Funktion, die sich für kleine x wie $3/2x$ verhält, während sie für grosse x gegen 1 konvergiert. Daher ist bei fester Konstellation N_{ξ} α antiton in W , so dass wir den ER (NR) Grenzfall erhalten durch Diskussion von (3.15) für $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$). Es ergibt sich dann

$$(3.16) \quad \alpha^{ER} = 2N/W \quad ; \quad \alpha^{NR} = 3N/2E \quad ; \quad N = \sum_{\xi} N_{\xi} \quad ,$$

wobei im ER-limes, d.h. für $W \gg \sum_{\xi} m_{\xi} N_{\xi}$, alle Massenabhängigkeit verschwindet und im NR-Grenzfall $E=W - \sum_{\xi} N_{\xi} m_{\xi}$ definiert ist. Der sich damit aus (3.14) ergebende Grenzfall des Phasenraumes (ER) stimmt dann wiederum bis auf Stirlingapproximationen mit dem bekannten Ergebnis³⁾ des extrem-relativistischen Grenzfalls von (3.1) überein.

Wir diskutieren noch kurz die Bedeutung der CHGL am Beispiel des Impulsmittelwertes eines Teilchens der Sorte $\xi=1$ im CMS des Gesamtsystems. Man definiert den Mittelwert des Impulses p_{10} als

$$(3.17) \quad \bar{\omega}(W, N_{\xi}) = \frac{1}{Norm} \int \frac{d^3 p_1}{2p_{10}} p_{10} \int \frac{d^3 p_2}{2p_{20}} \dots \int \frac{d^3 p_N}{2p_{N0}} \delta^{(4)}(\sum p_i - W)$$

also

$$= \int \frac{d^3 p_1}{2p_{10}} p_{10} \Omega_{N_{\xi}-1}(\sqrt{W^2 - 2p_{10}W + m_1^2}) / \Omega_{N_{\xi}}(W) \quad .$$

Wir haben hier nur die Integration über $d^3 p_1$ durch das eingefügte p_{10} - über das gemittelt werden soll - verändert, so dass alle restlichen Integrale zu einem neuen Phasenraum zusammengefasst werden konnten. Wir sehen, dass das Gewicht für die Energiemittelung gegeben ist durch

$$(3.18) \quad \frac{\Omega_{N_{\xi}-1}(W - p_0)}{\Omega_{N_{\xi}}(W)} \quad ,$$

wobei wir schon angenommen haben, dass $p_0 \ll W$ ist. Beide Phasenräume erlauben die Berechnung mittels unserer Näherungsverfahren, die wiederum von zwei Lösungen $\bar{\alpha}$ zu $W-p_0$ und α zu W bestimmt werden. Entwickelt man nun nach $\delta\alpha = \bar{\alpha} - \alpha$ - $\delta\alpha$ ist nach Voraussetzung klein - so erhält man für grosse N_ξ

$$(3.19) \quad \bar{\omega}(W, N_\xi) = \int \frac{d^3\rho}{2\rho_0} e^{-\alpha\rho_0} \cdot \rho_0 = -\partial_\alpha \varphi_{\xi=1}(\alpha),$$

wobei jetzt α die Lösung der CHGL (3.15) ist. Das Ergebnis (3.19) zeigt an, dass die mikrokanonische Verteilung näherungsweise ersetzt werden kann durch eine kanonische, in der $1/\alpha$ die Bedeutung einer Temperatur hat. Die CHGL (3.15) sagt dann offenbar aus: Die Summe der Mittelwerte der Energien der einzelnen Teilchen ist die Gesamtenergie, da die im Mittel auf ein Teilchen der Sorte ξ entfallende Energie nach (3.19) $\bar{\omega}(\xi)$ gleich $m_\xi Q(m_\xi \alpha)$ ist. Man sieht weiterhin, dass die Energieverteilung im ER für $\alpha \rightarrow 0$ massenunabhängig wird, während für endliche α auf schwere Teilchen eine grössere CMS-Energie entfällt. Da aber $[K_0(x)/K_1(x)]' < 1$ ist, erhält man

$$(3.20) \quad \frac{\bar{p}_0(M)}{\bar{p}_0(m)} < M/m,$$

so dass die schwereren Teilchen doch weniger "kinetische" Energie erhalten. Der Gesamtphasenraum ist zudem in der Masse der Teilchen antiton.

3.2 Modifikation zur Berücksichtigung von Quanteneffekten

Als Erläuterung der bei quantenmechanischer Drehimpulskopplung verwendeten Näherungsmethode studieren wir jetzt den Isospinphasenraum, der später in Abschnitt 5 benutzt wird. Bekanntlich (vergl. etwa 4) konstruiert man mit dem normierten invarianten Drehgruppenmass $d\mu(g)$ den Projektor

$$(3.21) \quad P^I = (2I+1) \int d\mu(g) \cdot \chi^I(g) \cdot \mathcal{U}(g)$$

mit dem Charakter der irreduziblen Darstellung $\chi^I(g)$ und dem Darsteller der Isospindrehungen

$$(3.22) \quad U(g) = \exp i \vec{\omega} \vec{I}$$

Hier ist die Drehgruppe mit \vec{n}, φ parametrisiert: $\vec{\omega} = \vec{n} \varphi$.
Mit (2.47) gewinnen wir dann die Integraldarstellung

$$(3.23) \quad \Omega_N(I) = (2I+1) \int d\mu(g) \cdot \chi^I(g) \cdot \sum_{m_1, \dots, m_N} \langle m_1, \dots, m_N | e^{i\varphi \vec{n} \vec{I}} | m_1, \dots, m_N \rangle$$

Da die Spur invariant ist bei Drehungen im Isoraum, hängt die Summe in (3.23) nur von dem Drehwinkel φ ab. Demnach können wir die Gruppenintegration vereinfachen und erhalten mit $\exp i\varphi I_3 |m_1, \dots, m_N\rangle = \exp i\varphi \sum_i m_i |m_1, \dots, m_N\rangle$

$$(3.24) \quad \Omega_N(I) = \frac{2I+1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \sin^2 \varphi/2 \cdot \frac{\sin(I+1/2)\varphi}{\sin \varphi/2} [\chi^I(\varphi)]^N$$

Diese Gleichung ist natürlich auch unmittelbar aus den Fal- tungseigenschaften der Charaktere nach Benutzung der For- mel (2.48) ableitbar. Wir spezialisieren nun auf den Fall von N Teilchen mit den Isospins $j_\nu = 1$

$$(3.25) \quad \Omega_N(I) = (2I+1) \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \sin \varphi \sin(2I+1)\varphi \left[\frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi} \right]^N$$

Man kann zeigen, dass es im Sinne einer asymptotischen Entwicklung für $N \rightarrow \infty$ genügt, wiederum nur die zur N-ten Potenz erhobene Funktion im Integral um die Stelle ihres Maximums bis zu der zweiten Ordnung in φ zu entwickeln. Allerdings ist jetzt im Gegensatz zu dem oben angeführten Vorgehen auch noch die von dem Gruppenmass herrührende Winkelfunktion bei der Entwicklung mitzuberücksichtigen, was ebenfalls zu Korrekturtermen in $1/N$ Anlass gibt. Wir geben nun das Ergebnis der vollständigen ersten Näherung an:

$$(3.26) \quad \Omega_N(I) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{4N}\right)^{3/2} \cdot 3^N \cdot (2I+1)^2 e^{-\frac{(2I+1)^2}{16N}} \cdot \left\{ 1 - \frac{15}{16} \frac{1}{N} + \frac{15}{64} \frac{1}{N} \left(\frac{2I+1}{\sqrt{N}}\right)^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{N} \left(\frac{2I+1}{4\sqrt{N}}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\}$$

Wir sehen, dass unsere Näherung nach Massgabe der Korrekturterme sicher gut bleibt, solange man nicht zu grosse Gesamtisospins I einsetzt. Im Sinne einer $1/N$ -Näherung ist lediglich $I \lesssim \sqrt{N}$ zulässig. Das Volumen des ganzen Isoraums ist offenbar 3^N , d.h. wir erwarten die exakte Normierung

$$(3.27) \quad \sum_I \Omega_N(I) = 3^N$$

Der führende term unserer Näherung zeigt diese Normierungseigenschaft nach Integralapproximation der Summe über I , so dass die Näherung gut sein wird in den I -Bereichen der maximalen Beiträge. Andererseits divergiert der absolute Fehler der Näherung (3.26) für $I \approx N$ offenbar exponentiell. Vorweggreifend bemerken wir, dass dieses Verhalten der höheren Näherungen, was den Gesamtisospin anbelangt, auch bei den noch zu diskutierenden Phasenräumen mit Drehimpulserhaltung vorliegt. Man findet dort, dass die $1/N$ -Korrekturen zusammenbrechen für grosse Drehimpulse $J \gg \sqrt{N} \cdot WR/N$. Eine rigorose Klärung dieses Problems ist noch offen. Aus der Integraldarstellung (3.26) leitet man leicht folgende für numerische Rechnungen geeignete Rekursionsformel ab

$$\Omega_2(I) = \delta_{I,0} + \delta_{I,1} + \delta_{I,2}$$

und für $I \geq 1$; $N \geq 2$
$$\Omega_{N+1}(0) = \Omega_N(1)$$

$$\Omega_{N+1}(I) = \Omega_N(I-1) + \Omega_N(I) + \Omega_N(I+1)$$

Wir geben nun zwei numerische Beispiele an zum Vergleich der Grössen $\Omega_N(I)$ mit unseren Näherungen (3.26)

Tabelle zum Vergleich von $\Omega_N(I)$ mit unserer Näherung

		<u>N = 3</u>				
I		0	1	2	3	4
0-te Näh.		1.78	3.25	2.00	0.62	0.10
1-te Näh.		1.25	3.12	2.45	0.85	0.09
exakt		1.	3.	2.	1.	0.

		<u>N = 6</u>							
I		0	1	2	3	4	5	6	7
0-te Näh.		18.5	41.0	41.5	27.4	13.0	4.50	1.18	0.20
1-te Näh.		14.8	37.0	41.0	28.0	14.5	4.71	0.92	0.05
exakt		15.	36.	40.	29.	15.	5.	1.	0.

Man erkennt, dass mit wachsendem N die Näherung in diesen Beispielen für alle I besser wird und dass für grosse I die höheren Korrekturen in Richtung einer Verbesserung wirken.

3.3 GWS-Näherung für den Poincaré-invarianten quantenmechanischen Phasenraum

Wir gehen nun über zur Näherungsberechnung des in (2.40) definierten relativistischen Phasenraums, den wir im CMS mit dem normierten Drehgruppenmass $d\mu(g)$ anschreiben, wobei $\mathbb{R}(g)$ eine dreidimensionale Drehung bezeichnet.

$$(3.28) \quad \Omega_N(W, j) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3N} \int \prod_{i=1}^N \left\{ d^3 p_i d^3 q_i e^{-\frac{1}{R^2}(\gamma^2 q_{3i}^2 + q_{1i}^2 + q_{2i}^2)} \right\} * \\ * \delta\left(\sum_{i=0}^N p_{i0} - W\right) \delta^{(3)}\left(\sum \vec{p}_i\right) \delta^{(3)}\left(\sum p_{i0} \vec{q}_i\right) (2j+1) \int d\mu(g) \mathbb{D}_{00}^{*j} e^{i\sum (R\vec{p}_i - \vec{p}_i) \vec{q}_i}$$

Nach Integraldarstellung der δ -Funktionen mit den Hilfsvariablen \vec{x}, \vec{y}, t , die wir auch gelegentlich mit ξ abkürzen wollen, gilt dann mit positivem α

$$\Omega_N(W, j) = \frac{e^{\alpha W}}{(2\pi)^{3N}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^7 (2j+1) \int d\mu(g) D_{00}^{j*}(g) \int d^3x \int d^3y * \\ (3.29) \quad * \int dt e^{-iWt} \{ F^\alpha(\vec{x}, \vec{y}, t; g) \}^N ;$$

mit

$$F^\alpha(\vec{x}, \vec{y}, t; R) = \int d^3p d^3q e^{i(t+i\alpha)p_0 + i\vec{x}\vec{q} + i\vec{y}\vec{p} + i(R\vec{p}-\vec{p})\vec{q}} * \\ * \exp \left\{ -\frac{1}{R^2} (\gamma^2 q_3^2 + q_1^2 + q_2^2) \right\}$$

Die Ortsraumintegration in F ist ausführbar und ergibt mit der Matrix

$$\Gamma = \frac{R^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\gamma^2 \end{pmatrix} \\ (3.30) \quad F = \pi^{3/2} \frac{R^3}{\gamma} \int d^3p \cdot e^{i(t+i\alpha)p_0 + i\vec{y}\vec{p} - i\eta\Gamma\eta} \\ \eta = \{ \vec{x}\vec{p}_0 + R\vec{p} - \vec{p} \} ;$$

für $t=\vec{x}=\vec{y}=0$ und $R(g)=1$ reduziert sich F^α auf $\varphi(\alpha)$ mit

$$(3.31) \quad \varphi(\alpha) = \pi^{3/2} R^3 / \gamma \int d^3p e^{-\alpha p_0}$$

Wir parametrisieren nun die Drehgruppe mit den Euler-Winkeln $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$, wobei im raumfesten System der Reihe nach $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ Rotationen um die 3, 1, 3-Achsen bezeichnen, wenn zur Quantisierung des Drehimpulses die 3-Achse gewählt wird. Dabei nimmt die Gruppenintegration die einfachste Form an

$$(3.32) \quad \int d\mu(g) D_{00}^{j*}(g) \rightarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\hat{\alpha} \int_0^\pi d\hat{\beta} \int_0^{2\pi} d\hat{\gamma} \sin\hat{\beta} P_j(\cos\hat{\beta})$$

mit den Legendre-Polynomen P_j . Um die Gruppenintegration zu vereinfachen, betrachten wir die Symmetrie der über die Winkel zu integrierenden Funktion (vergl. 3.29)

$$(3.33) \quad G(\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}) = \int d^3x d^3y dt e^{-iWt} \left\{ \int d^3p e^{i(t+i\alpha)p_0 + i\vec{y}\vec{p} - \eta\Gamma\eta} \right\}^N$$

Wir setzen $R(g) = D_3(\hat{\alpha}) D_1(\hat{\beta}) D_3(\hat{\gamma})$ und führen mit einer festen

Drehung $D_3(\varphi)$ eine Substitution im $d^3x d^3y$ und d^3p -Integral durch, so dass

$$(3.34) \quad G(\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}) = \int d^3x d^3y dt e^{-iWt} \left\{ \int d^3p e^{i(t+i\alpha)\rho_0 + i\vec{y}\vec{p} - \vec{\eta}\Gamma\vec{y}} \right\}^N$$

wird. Da Γ mit den Rotationen um die 3-Achse vertauscht wegen der Restsymmetrie in der Raumabschneidung, gilt

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \vec{\eta}\Gamma\vec{\eta} &= (D\vec{x}\rho_0 + RD\vec{p} - D\vec{p})\Gamma(D\vec{x}\rho_0 + RD\vec{p} - D\vec{p}) \\ &= (\vec{x}\rho_0 + D^{-1}RD\vec{p} - \vec{p})\Gamma(\vec{x}\rho_0 + D^{-1}RD\vec{p} - \vec{p}) \end{aligned}$$

Die Konjugation auf der Drehgruppe schreibt sich nun ausführlich $D_3^{-1}(\varphi)R(\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma})D_3(\varphi) = R(\hat{\alpha}-\varphi)\hat{\beta}, \hat{\gamma}+\varphi$. Daher gilt

$$(3.36) \quad G(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = G(0, \hat{\beta}, \hat{\alpha} + \hat{\gamma})$$

G ist eine periodische Funktion in den Argumenten, daher hängt

$$(3.37) \quad \int_0^{2\pi} d\hat{\alpha} G(\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma})$$

nicht von $\hat{\gamma}$ ab, weswegen wir darüber integrieren können, um nachher $\hat{\gamma}=0$ zu setzen.

Nach dieser Umformung gehen wir nun zur Näherung über und bemerken dazu, dass die Funktion $F^\alpha(t, \vec{x}, \vec{y}; \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ aus (3.29) ihr Maximum $\varphi(\alpha)$ innerhalb der Integrationsgrenzen nur an den Punkten $\vec{x}=\hat{\beta}=0$ und $\hat{\alpha}=0$ oder 2π annimmt. Wir entwickeln nun zufolge der obigen Ausführungen $\ln F$ um diese Stellen. Zur Optimalisierung der angestrebten Näherung fordern wir dann die CHGL $N \cdot \partial_t \ln F^\alpha(0) = -i\partial_\alpha \ln \varphi^N(\alpha) = iW$. Alsdann haben wir noch den Tensor der zweiten partiellen Ableitungen von $\ln F$ nach $\vec{x}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ zu berechnen. Dieser wird aber in allen Variablen diagonal, da in

$$\eta\Gamma\eta = \vec{x}\Gamma\vec{x}\rho_0^2 + \vec{x}\Gamma(R-1)\vec{p}\rho_0 + (R-1)\Gamma\vec{p}\cdot\vec{x}\rho_0 + (R\vec{p}-\vec{p})\Gamma(R\vec{p}-\vec{p})$$

die Matrixelemente von $R_{ij}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ in $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ bilinear sind.

Wir setzen

$$(3.38) \quad \{F^\alpha(\xi, \hat{\alpha}, \hat{\beta})\}^N = e^{N \ln \varphi(\alpha) + iNt - \frac{N}{2} B_{\xi\xi} \cdot \xi^2 - \frac{N}{2} B_{\hat{\alpha}} \hat{\alpha}^2 - \frac{N}{2} B_{\hat{\beta}} \hat{\beta}^2}$$

worin wir die positiven B-Komponenten vollständig durch Ableitungen von $\varphi(\alpha)$ aus (3.31) nach α ausdrücken können.

$$(3.39) \quad \begin{aligned} B_t &= \varphi''/\varphi - [\varphi'/\varphi]^2 \\ B_{y_i} &= [\varphi''/\varphi - m^2] / 3 \\ B_{x_3} &= \frac{1}{2} R^2 / \gamma^2 \cdot \varphi''/\varphi \\ B_{x_1} &= B_{x_2} = \gamma^2 B_{x_3} \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Tensorkomponenten $B_{\hat{\alpha}}, B_{\hat{\beta}}$ brauchen wir nur das Skalarprodukt $\vec{p}A\vec{p}$ mit der Matrix $A = (R-1)^{-1} \cdot \Gamma \cdot (R-1)$ bis zur zweiten Ordnung in $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ zu kennen. Es gilt

$$(3.40) \quad \vec{p}A\vec{p} = \frac{R^2}{4} (p_i^2 \hat{\alpha}^2 + [\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 / \gamma^2] p_3^2 + p_3^2 \hat{\beta}^2) +$$

terme, die in $p_i \cdot p_k$ gemischt sind, so dass sie nach zweifacher partieller Ableitung nach $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ im d^3p -Integral (3.29) an der Stelle des Maximums von F nicht beitragen. Wir geben nun noch $B_{\hat{\alpha}}$ und $B_{\hat{\beta}}$ an:

$$(3.41) \quad \begin{aligned} B_{\hat{\alpha}} &= \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int d^3p e^{-\alpha p_0} \frac{R^2}{2} 2 p_i^2 = \frac{R^2}{3} \left[\frac{\varphi''}{\varphi} - m^2 \right] \\ B_{\hat{\beta}} &= \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int d^3p e^{-\alpha p_0} \left[R^2 p_3^2 + \frac{R^2}{\gamma^2} p_3^2 \right] = \frac{R^2}{6} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \left[\frac{\varphi''}{\varphi} - m^2 \right] \end{aligned}$$

Die Auswertung des Integrals (3.29) mit der Entwicklung (3.38) ist nun bis auf das Vorgehen bei der $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ -Integration analog zu den Rechnungen (3.6) bis (3.11).

Wegen der Abfallseigenschaften der Funktion F aus (3.29) um die Stelle $\xi = \hat{\alpha} = \hat{\beta} = 0$ brauchen wir in (3.32) die Legendre-Polynome nur in einer kleinen Umgebung $U(0)$ um $\hat{\beta} = 0$. Im Sinne einer $1/N$ -Entwicklung können wir dann schreiben

$$(3.42) \quad 2 \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\alpha e^{-\frac{1}{2} N B_{\hat{\alpha}} \hat{\alpha}^2} \int_{U(0)} d\hat{\beta} \cdot \hat{\beta} \cdot P_j(1 - \frac{\hat{\beta}^2}{2}) e^{-\frac{1}{2} N B_{\hat{\beta}} \hat{\beta}^2}$$

Benutzt man die bekannte Näherung

$$(3.43) \quad P_e (1 - \hat{\beta}^2/2) \xrightarrow{\hat{\beta} \rightarrow 0} J_0 \left(\left[e + \frac{1}{2} \right] \hat{\beta} \right),$$

so erhält man für den führenden term der 1/N-Entwicklung

$$(3.44) \quad \Omega_N(W, \beta) \cong \frac{e^{\alpha W}}{(2\pi)^{3N}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{7(2\beta+1)} \varphi^N(\alpha) \left(\frac{2\pi}{N} \right)^{7/2} * \\ * \left\{ B_t B_{x_{\parallel}} B_{x_{\perp}}^2 B_y^3 \right\}^{-1/2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} (NB_{\alpha})^{-1/2} (NB_{\beta})^{-1} e^{-\left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 / 2NB_{\beta}}$$

mit

$$\varphi(\alpha) = -2\pi^{3/2} \frac{R^3}{\gamma} \partial_{\alpha} \left[\frac{2\pi m}{\alpha} K_1(m\alpha) \right]$$

α ist wiederum die Lösung der CHGL

$$(3.45) \quad W = Nm \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ 3 + \frac{\alpha^2 m^2}{2 + \alpha m Q(\alpha m)} \right\} = Nm \hat{F}(\alpha) \\ Q(x) = K_0(x) / K_1(x).$$

Die Funktion $\hat{F}(\alpha)$ ist monoton fallend in α , und man erhält daher in den beiden Grenzfällen (ER und NR)

$$(3.48) \quad \hat{F}(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 1 + \frac{3}{2\alpha m} \Rightarrow \alpha^{NR} = 3N/2E \\ \hat{F}(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{3}{\alpha m} \Rightarrow \alpha^{ER} = \frac{3N}{W}$$

Im nichtrelativistischen limes geht unser Ergebnis (3.44) - wie wir hier nicht zeigen wollen - über in den quantenmechanischen Galilei-invarianten Phasenraum, wie er in 16) abgehandelt wurde.

Übersichtlich lässt sich Ω nur im ER-Grenzfall angeben:

$$(3.49) \quad \Omega_N(W, \beta) \cong (2\beta+1) e^{-\left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 / \left(N \left[1 + \frac{1}{\beta^2} \right] \frac{4}{9} R^2 \frac{W^2}{N^2} \right)} \\ * \frac{\left[R^2 \frac{R}{8} \frac{\pi^{5/2}}{(2\pi)^3} \left(\frac{2W}{3} \right)^3 \right]^N}{(N!)^3} \cdot \frac{\frac{\gamma^3}{1+\gamma^2} N^{3/2} (2\pi)^{-5/2}}{(WR)^6 \cdot W^4}$$

Hier ist also W, J, N jeweils Gesamtenergie, CMS-Drehimpuls und Teilchenzahl; R ist der Radius des Wechselwirkungsvolumens, welches eine Lorentz-Kontraktion mit $\gamma = W/2M$ erfährt (M =Masse der einlaufenden Teilchen). Bezüglich der Darstellung des allgemeinen Phasenraumes mit verschiedenen Massen, wie er später bei numerischen Rechnungen verwandt wird, verweisen wir auf den Anhang A.

Wir bemerken hier noch, dass man bei klassischer Behandlung des Drehimpulses (2.17) und Auswertung des Phasenraumes mit unseren Näherungsmethoden ein Ergebnis erhält, welches von diesem nur abweicht durch die Ersetzung $(J+1/2)^2 \rightarrow \vec{L}^2$ mit dem klassischen Drehimpulsvektor \vec{L} . Daher kann bei höheren Teilchenzahlen und nicht zu kleinen J Quantenzahlen stets die Drehimpulskopplung in den Zustandssummen klassisch vorgenommen werden¹¹⁾. Der Einfluss der Drehimpulserhaltung macht sich für höhere J in einer teilchenzahlabhängigen Verkleinerung (Drehimpulsabschneidung) des Phasenraumes bemerkbar, die für grössere N wesentlich stärker in Erscheinung tritt. Systeme mit höheren Teilchenzahlen werden also in unserem Modell bevorzugt bei niedrigen J -Werten auftreten, im Gegensatz zum Fall bei niedrigeren Teilchenzahlen. Weiterhin sehen wir, dass das lorentzkontrahierte Wechselwirkungsvolumen zur N -ten Potenz erhoben sich von dem Phasenraum abspalten lässt, dass daneben aber der Effekt der Kontraktion auch in die Drehimpulsabschneidung, wenn auch nur schwach, eingeht. Man erhält für höhere Energien nur eine um den Faktor 2 in der Dispersion stärkere Drehimpulsabschneidung. Das drückt den Sachverhalt aus, dass der Drehimpuls, weil er senkrecht zur Kontraktionsrichtung steht, nur schwach beeinflusst wird von der Verformung des Wechselwirkungsvolumens.

Wir studieren jetzt noch den Grenzfall unseres GWS-Ergebnisses (3.44) im Falle $\gamma=1$ (ohne Kontraktion), wenn also

die Raumabschneidung invariant unter der vollen Drehgruppe ist, Wir wollen dann eine Normierungseigenschaft ableiten und prüfen. Zunächst zeigt man durch Substitution im Integral (3.34), dass gilt

$$(3.50) \quad G(t, R) = \int d^3x d^3y \{ F(\vec{x}, \vec{y}, t; R) \}^N = G(t, T^{-1} R T)$$

mit F aus (3.29). G hängt also nur vom Drehwinkel φ der durch R parametrisierten Raumdrehung ab. Zur Konstruktion des Phasenraumes (wir schreiben jetzt die Quantenzahl der 3-Komponente von $J : j$ explizit mit) ist dann nach (3.29) das folgende Gruppenintegral auszuführen

$$(3.51) \quad \Omega_N(W, 3, j) = \text{const} \int d\mu(R) D_{jj}^3(R) G(t, \varphi),$$

und man zeigt mit den Orthogonalitätsrelationen der D-Matrizen²¹⁾, dass Ω unabhängig von j wird. Die mit den Vollständigkeitsrelationen²¹⁾ der Drehgruppendarsteller ableitbare allgemeine Normierung

$$(3.52) \quad \Omega_N(W) = \sum_{3j} \Omega_N(W, 3, j)$$

($\Omega_N(W)$ ist der Phasenraum ohne Drehimpulserhaltung) reduziert sich also auf

$$(3.53) \quad \Omega_N(W) = \sum_3 (23+1) \Omega_N(W, 3, 0)$$

Diese Relation wird nach Integralapproximation der J-Summe von unserem GWS-Ergebnis (3.44) erfüllt, so dass die Drehimpulsabhängigkeit unserer Näherung im wesentlichen richtig sein wird. Als Folge der geringeren Symmetrie der Raumabschneidung ist auch der Zweiteilchenphasenraum nur noch für $J=1$ geschlossen angebbbar

$$(3.54) \quad \Omega_2(W, 3) = \frac{8\pi K}{W^2} \left(\frac{\pi R^2}{2}\right)^{3/2} F_N(W, 3)$$

mit

$$F_N(W, 3) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-K^2 R^2}}{KR} I_{3+1/2}(K^2 R^2) \cdot (23+1)$$

($I_\nu(z)$ sind die modifizierten Besselfunktionen zu rein imaginären Argumenten). Für $2j < K^2 R^2$ geht daraus mit der sogenannten Debye-Approximation (vergl. dazu Anhang B) die Näherung hervor

$$(3.55) \quad F_N(W, \mathfrak{J}) \approx \frac{1}{2K^2R^2} e^{-\frac{(J+1/2)^2}{2K^2R^2}} \cdot (2J+1)$$

Ersetzt man hier $(J+1/2)^2$ durch \vec{L}^2 (klassischer Drehimpuls), so ergibt sich wiederum das Ergebnis der klassischen Drehimpulserhaltung⁷⁾.

Bislang haben wir uns auf den Fall skalarer Teilchen beschränkt. Wir wollen nun den Einfluss des Spins ($s=1/2$) der N Teilchen erörtern und gehen dazu auf das Ergebnis (2.46) zurück. Wie man aus dem Vergleich mit (2.40) erkennt, liegt der Unterschied zum Fall skalarer Teilchen nur in dem zusätzlichen Auftreten der entsprechenden Potenz des Charakters $\chi^{1/2}(\mathfrak{E})$, wenn \mathfrak{E} der Gesamtdrehwinkel bei der durch $\alpha\beta\gamma$ parametrisierten Drehung ist

$$\cos \frac{\mathfrak{E}}{2} = \cos \beta/2 \cdot \cos (\alpha + \gamma)/2$$

Im Falle einer geraden Anzahl von Teilchen mit Spin $1/2$, auf den wir uns hier zwecks späterer Anwendung beschränken, ist $[\chi^{1/2}(\mathfrak{E})]^N$ eine periodische (2π) Funktion in $\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}$, so dass wir wieder die Integration über die Drehgruppe vereinfachen können. Nun nimmt auch $|\cos \frac{\mathfrak{E}}{2}|$ offenbar nur für $\mathfrak{E}=0$ oder 2π ein Maximum an, weswegen alle sich daraus ergebenden Konsequenzen des oben beschriebenen Näherungsverfahrens hier übertragen werden können. Nach einer Taylorentwicklung um die besagte Stelle erhalten wir demnach nur Änderungen der Tensorkomponenten $B_{\hat{\alpha}}, B_{\hat{\beta}}$, und zwar

$$(3.56) \quad B_{\hat{\alpha}} \rightarrow B_{\hat{\alpha}} + \frac{1}{4} \quad ; \quad B_{\hat{\beta}} \rightarrow B_{\hat{\beta}} + \frac{1}{4}$$

mit $B_{\hat{\alpha}}, B_{\hat{\beta}}$ aus (3.41). Andererseits ist der Wert der Funktion $\chi^{1/2}(\mathfrak{E})$ an der Stelle des Maximums gleich 2, so dass der Gesamtphasenraum durch den Multiplizitätsfaktor 2^N wesentlich beeinflusst wird, während die Abänderung des B-Tensors unwesentlich bleibt, solange $B_{\hat{\alpha}}, B_{\hat{\beta}} \gg 1$ sind. Wir

diskutieren diese Bedingung im Falle des ER-Ergebnisses (3.49). Die Forderung $B_i \gg 1$ bedeutet dann nach Ausweis der Gleichung (3.41)

$$(3.57) \quad \frac{W}{N} R \gg 1 \quad \text{also} \quad \bar{p}_0 R \approx \overline{|\vec{p}|} R \gg 1$$

Diese Ungleichungen lassen sich anschaulich interpretieren, denn $\overline{|\vec{p}|} R$ ist der mittlere Bahndrehimpuls eines Teilchens im Wechselwirkungsvolumen der Grössenordnung R^3 . Wenn dieser den Spinbetrag wesentlich überwiegt, geht in die Drehimpulsabhängigkeit nur der "Bahndrehimpuls" ein. Nur der für jedes Teilchen offene Spinfreiheitsgrad führt dann also zu einem Einfluss auf die Zustandssumme, da die Bedingung (3.57) stets erfüllt ist, wenn bei höheren Energien die mittlere Teilchenzahl schwächer als linear mit W anwächst.

Nachdem wir nun in diesem Abschnitt die unserem Modell zugrundeliegenden Formeln bereitgestellt haben, wollen wir im nächsten Abschnitt den für die folgenden Ausführungen verbindlichen statistischen Ansatz einführen und diskutieren.

4. Statistischer Ansatz

4.1 Ausreduktion der S-Matrix

Bevor wir unseren statistischen Ansatz einführen, wollen wir zunächst die Wirkungsquerschnitte so ausdrücken, dass die Symmetrie unseres Modells unter der Gruppe \mathcal{G} (s.u.) explizit berücksichtigt ist. Wir betrachten dazu die Produktion von N auslaufenden Teilchen, die beschrieben werden durch $m, \vec{p}, s, s_3, I, I_3$ und B (Masse, Impuls, Spin, Helizität, Isospin, dessen 3-Komponente und Baryonenzahl) aus zwei einlaufenden skalaren Teilchen bei der CMS-Energie W . Zwecks späterer Anwendung denke man etwa an die Sorten π, ρ, N und \bar{N} . Wir erhalten dann für den Wirkungsquerschnitt zur Erzeugung einer durch die Besetzungszahlen N_{ξ} angegebenen Konfiguration $(N_{\pi}, N_{\rho}, N_N, N_{\bar{N}})$ ohne vorgeschriebene Ladungsverteilung, Spinrichtung und Impulsrichtung der einzelnen Teilchen ausgedrückt durch die Matrixelemente des Streuoperators

$$\sigma_{N_{\xi}}(W) = \frac{\pi^2}{KW} \prod_i \left\{ \sum_{S_{3i}, I_{3i}} \int \frac{d^3 p_i}{2\rho_{i0}} \right\} \delta^{(4)}(\sum p_i - P) |S(f/i)|^2$$

(4.1) $S(f/i) \delta^{(4)}(\sum p_i - P) = \langle \dots \vec{p}_i I_{3i} \dots | S | \hat{p}_1 \hat{I}_{31}, \hat{p}_2 \hat{I}_{32} \rangle,$

(\wedge kennzeichnet einl. Syst.)

wobei die restlichen Indizes zur Teilchenbeschreibung der Übersichtlichkeit halber unterdrückt wurden.

Wir nehmen nun an, dass der Streuoperator S mit den Erzeugenden der Poincarégruppe und denen der $U(2)$ -Transformationen vertauscht, so dass neben Energie, Impuls und Spin auch der Isospin und die Baryonenzahl erhalten werden. Die Symmetriegruppe \mathcal{G} unseres Modells ist dann das direkte Produkt der Poincarégruppe mit der $U(2)$. Um diese Symmetrie nun auszudrücken, wollen wir die S-Matrix formal ausreduzieren nach \mathcal{G} durch das Einschleiben eines vollständigen

Systems von N-Teilchenzuständen. Diese beschreiben wir nach ihrem Transformationsverhalten unter \mathcal{G} mit $|X, K, \eta_N\rangle$, wobei wieder $X=W, J, I, B$ die Zugehörigkeit zur irreduziblen Darstellung von \mathcal{G} und $K=\vec{P}, J_3, I_3$ den Vektor in der Darstellung angibt (η_N sind Entartungsparameter). Bei dieser Beschreibung seien die Zustände bezüglich der kontinuierlichen Variablen auf δ -Funktionen normiert. Es gilt dann die Vollständigkeitsrelation

$$(4.2) \quad \sum_{N \in \mathcal{N}} \int_{X, K, \eta_N} |X, K, \eta_N\rangle \langle X, K, \eta_N| = 1$$

Das Symbol der Summation bedeutet hier eine Summe bzw. Integration über alle Teilchenzahlen und Beschreibungsparameter. Wenn wir den einlaufenden Zustand mit i abkürzen, erhalten wir formal

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \langle \dots \vec{p}_i, I_{3i} \dots | S | i \rangle &= \int_{X, K, \eta_N} \int_{X', K', \eta'_N} \langle \dots \vec{p}_i, I_{3i} \dots | X, K, \eta_N \rangle \\ & * \langle X, K, \eta_N | S | X', K', \eta'_N \rangle \langle X', K', \eta'_N | i \rangle \dots \end{aligned}$$

S kommutiert nun mit allen Erzeugenden in \mathcal{G} , was sich in der Diagonalität der folgenden Matrixelemente ausdrückt

$$(4.4) \quad \langle X, K, \eta_N | S | X', K', \eta'_N \rangle = \delta(X-X') \delta(K-K') \langle X, \eta_N || S || X', \eta'_N \rangle$$

Dabei haben wir abgekürzt

$$\delta(X-X') \delta(K-K') = \delta^{(9)}(P_\mu - P'_\mu) \delta_{J_3, J'_3} \delta_{I_3, I'_3} \delta_{B, B'} \delta_{J_3, J'_3} \delta_{I_3, I'_3} \dots$$

Nun folgt mit (4.3)

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \langle \dots \vec{p}_i, I_{3i} \dots | S | i \rangle &= \int_{X, K} \int_{\eta_N} \langle \dots \vec{p}_i, I_{3i} \dots | X, K, \eta_N \rangle \\ & * \langle X, K | i \rangle \cdot \langle X, \eta_N || S || X \rangle \dots \end{aligned}$$

Wir können nun das Zweiteilchen-Matrixelement $\langle X, K | i \rangle$ noch angeben. Es zerfällt in ein Produkt zweier Clebsch-Gordan-Koeffizienten²²⁾ (CGK)

$$(4.6) \quad \langle XK/i \rangle = \sqrt{\frac{4W}{K}} \delta^{(4)}(\hat{P}_\mu - \hat{P}'_\mu) Y_{33_3}(\vec{e}) \langle \hat{I}_1 \hat{I}_{31} \hat{I}_2 \hat{I}_{32} / I I_3 \rangle$$

mit den abfaktorisierten CGK der Isospingruppe und dem Vektor \vec{e} der Richtung des Relativimpulses vom Eingangssystem. Nach Abspaltung einer $\delta^{(4)}$ -Funktion der Energie-Impuls-Erhaltung von dem S-Matrixelement (4.6) gehen wir zu der S-Funktion über bzw. zu deren Betragsquadrat

$$|S(f/i)|^2 = \sum_{XK} \sum_{X'K'} \sum_{\eta_N \eta_{N'}} \langle \dots \vec{p}_i I_{3i} \dots / XK \eta_N \rangle \times \langle X'K' \eta_{N'} / \dots \vec{p}_i I_{3i} \dots \rangle \langle X \eta_N // S // X' \rangle \langle X' \eta_{N'} // S // X \rangle^*$$

(4.7)

$$* \frac{4W}{K} Y_{33_3}(\vec{e}) \cdot Y_{33_3}^*(\vec{e}') \langle \hat{I}_1 \hat{I}_{31} \hat{I}_2 \hat{I}_{32} / I I_3 \rangle \langle \hat{I}'_1 \hat{I}'_{31} \hat{I}'_2 \hat{I}'_{32} / I' I'_3 \rangle$$

Bei dem Einsetzen dieses Ausdrucks in die Querschnittsformel (4.1) berücksichtigen wir noch die folgende Vollständigkeitsrelation

$$(4.8) \quad \prod_i \left\{ \sum_{s_{3i} I_{3i}} \int \frac{d^3 p_i}{2\rho_{i0}} \right\} | \dots p_i I_{3i} \dots \rangle \langle \dots \vec{p}_i I_{3i} \dots | = 1$$

Damit gewinnen wir das Zwischenergebnis

$$(4.9) \quad \sigma_{N_f}(W) = \frac{\pi^2}{KW} \sum_{33_3 I I_3} \sum_{\eta_N} |\langle X \eta_N // S // \rangle|^2 \frac{4W}{K} Y_{33_3}(\vec{e}) Y_{33_3}^*(\vec{e}') * |\langle \hat{I}_1 \hat{I}_{31} \hat{I}_2 \hat{I}_{32} / I I_3 \rangle|^2 ;$$

mit $\sum_j Y_{3j}(\vec{e}) \cdot Y_{3j}^*(\vec{e}') = \frac{2j+1}{4\pi} P_j(\vec{e} \cdot \vec{e}')$

ist nun die Summe über J_3 ausführbar und wegen der Erhaltung des Isospins auch die über I_3 , so dass wir unseren Querschnitt mit den Beträgen der ausreduzierten S-Matrixelemente in folgender Weise übersichtlich ausdrücken können

$$(4.10) \quad \sigma_{N_f}(W) = \frac{\pi}{K^2} \sum_{I,3} (2j+1) |\langle \hat{I}_1 \hat{I}_{31} \hat{I}_2 \hat{I}_{32} / I I_3 \rangle|^2 \cdot \sum_{\eta_N} |K W 3 I B \eta_N // S //|^2$$

Da der einlaufende Zustand stets definierte Baryonenzahl hat, entfällt die Summation über B. Damit haben wir jetzt alle Erhaltungsgrößen des Systems, die unmittelbar aus der Symmetrie des Modells folgen, berücksichtigt. Man kann nun für die sogenannten inelastischen Partialwellen (vergl. auch 23)

$$(4.11) \quad |S_{N_f}(W, \mathfrak{J}, I, B)|^2 = \sum_{\gamma_N} |\langle W \mathfrak{J} I B \gamma_N || S || i \rangle|^2$$

phänomenologisch motivierte Ansätze machen, wobei man die aus der Unitarität von S folgende Relation

$$(4.12) \quad \sum_{N_f} |S_{N_f}(X)|^2 = 1$$

einzuhalten hat. Wir sehen weiterhin, dass der Gesamtwirkungsquerschnitt sich als inkohärente Überlagerung von Drehimpuls und Isospinzuständen schreibt, so dass man keine weiteren Annahmen über Interferenzterme zu machen braucht.

4.2 Ansatz für die inelastischen Partialwellen

Wegen der Normierung (4.12) können wir physikalisch die $|S_N(X)|^2$ als über die Teilchenzahlkonfigurationen des Endzustands normierte Übergangswahrscheinlichkeiten eines Zwischenzustands (Feuerballs) zu definierten Werten von X ansehen. Wir setzen nun diese Wahrscheinlichkeiten für inelastische Prozesse dem zur Verfügung stehenden und im Sinne (4.12) normierten Phasenraum proportional, d.h. wir nehmen für den Zerfall in einen durch N_f beschriebenen Zustand an

$$(4.13) \quad |S_{N_f}(X)|^2 \sim \frac{\Omega_{N_f}(X)}{\Omega(X)}; \quad \Omega(X) = \sum_{N_f} \Omega_{N_f}(X).$$

Wir sehen, dass in dieser Form die Phasenräume nur bis auf eine beliebige, von N_f unabhängige Funktion der Invarianten eingehen. Durch die vorgenommene Normierung beschreiben wir automatisch das Konkurrieren und gegenseitige Unter-

drücken der mit den Phasenräumen gewichteten Reaktionen in den einzelnen Zerfallskanälen.

Neben dem Zerfall des Zwischenzustands ist nun auch noch die Wahrscheinlichkeit seiner Bildung aus den beiden einlaufenden Teilchen zu berücksichtigen. $|S|^2$ in (4.13) ist also ausserdem noch proportional zu einer Funktion, die wir zukünftig als Feuerballanregungsfunktion (Feuerballfunktion H) bezeichnen wollen. H muss vom Drehimpuls abhängen, da zum Beispiel die Restriktion des Gesamtspins bei Vernichtungsreaktionen in Ruhe oder bei mässigen Energien auf $J=0$ oder 1 niemals allein durch die Drehimpulsabschneidung der Phasenräume $\Omega_N(W, J)$ der auslaufenden Mesonen bewirkt werden kann. Im Sinne unserer Interpretation kann H aber nicht vom Endzustand abhängen und wird zukünftig als in I, B konstant angenommen. Physikalisch wollen wir mit H die insbesondere vom Stossparameter abhängige Bildungswahrscheinlichkeit des Feuerballs beschreiben. Bezüglich der Abhängigkeit vom Drehimpuls sollte H daher im wesentlichen proportional dem Erwartungswert der ebenen Welle (der Relativbewegung im Wechselwirkungsvolumen) der einlaufenden Teilchen projiziert auf definierten Drehimpuls sein.

In der Funktion H verdichtet sich eine Menge dynamischer Information, die unseres Erachtens wohl nicht allein aus statistischen Gesichtspunkten ableitbar ist. Daher müssen wir für H Ansätze machen und deren theoretische Konsequenzen mit dem Experiment vergleichen. Wir stellen aber zunächst zusammen, worauf diese Funktion wesentlich Einfluss nimmt.

Wir sehen zunächst nach Summation über alle inelastischen Kanäle, dass der gesamte Querschnitt σ^{in} - soweit er durch dieses Modell gegeben ist - bei höheren Energien wegen der Normierung (4.12) allein von H abhängt. Das bedeutet in unserem Bild: Der einmal gebildete Feuerball zerfällt stets,

so dass σ^{in} dem Querschnitt zur Erzeugung des Feuerballs gleich wird

$$(4.14) \quad \sigma^{in}(W) \cong \frac{\pi}{k^2} \sum_{\mathcal{J}} (2\mathcal{J}+1) H(W, \mathcal{J})$$

oder

$$\sigma^{in}(W, \mathcal{J}) \cong \frac{\pi}{k^2} (2\mathcal{J}+1) H(W, \mathcal{J}) .$$

Wenn wir den Ansatz $H(W, \mathcal{J}) = f(W) \cdot g(\mathcal{J}/KR)$ machen, dann gilt also für nicht zu niedrige Energien

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \sigma^{in} &\cong \frac{\pi}{k^2} \int_0^\infty 2\mathcal{J} d\mathcal{J} \cdot f(W) \cdot g(\mathcal{J}/KR) \\ &\cong f(W) \pi R^2 \int_0^\infty 2b db g(b) . \end{aligned}$$

Damit wird das Energieverhalten lediglich von $f(W)$ bestimmt, während die Stossparameterbeschränkung $g(b)$ energieunabhängig ist, so dass aus Unitaritätsgründen σ^{in} für grosse W beschränkt bleibt. Wir werden in Abschnitt 5 zeigen, dass bei diesem Ansatz für H die Verzweigungsverhältnisse asymptotischer Kanäle energieunabhängig werden, wenn man für $g(x)$ eine Gaussform in x ansetzt. Dieses Ergebnis kann mit Experimenten verglichen werden. Findet man diese Aussage im Widerspruch zur Erfahrung, so könnte man eine Energieabhängigkeit in der Stossparametereinschränkung g vorsehen, so dass im limes hoher Energien der effektive Radius für die Feuerballbildung verschwindet. In der Literatur sind solche Vorstellungen entwickelt worden²⁾, um den Energieabfall des vom SM beschriebenen zentralen Querschnitts bei inelastischen Reaktionen zu erklären. Wir wollen hier aber darauf verzichten und stützen uns dabei auf die aus der elastischen Diffraktionsstreuung gefundene Abhängigkeit der inelastischen Partialwellen vom Stossparameter (vergl. etwa 12).

Wir möchten die Energieabhängigkeit von σ^{in} in unserem Modell in Zusammenhang bringen mit der Lorentz-Kontraktion des Wechselwirkungsvolumens im einlaufenden System. Ähnli-

che Ansätze sind von R.Hagedorn²⁾ gemacht worden, der die Abnahme der Wahrscheinlichkeit für die Ausbildung eines Gleichgewichts (Feuerballentstehung) mit der wegen Lorentz-Kontraktion abnehmenden Kontaktzeit der einlaufenden Nukleonen erklärt.

Zur Bestimmung der H-Funktion gehen wir daher auf (4.14) zurück und setzen die partiellen inelastischen Querschnitte $\sigma^{in}(W, J)$ unserem Zweiteilchenphasenraum proportional. Dabei berücksichtigen wir die gegebene Flugrichtung der beiden einlaufenden Teilchen parallel zu der Strahlachse \vec{e} durch eingeschriebene δ -Funktionen in den Impulskomponenten. Wie wir im Anhang B zeigen, erhalten wir dann

$$(4.16) \quad \Omega_2(W, J) = \bar{y}^1 g(W) \cdot (2J+1) e^{-k^2 R^2} I_{J+1/2}(k^2 R^2),$$

wobei K, R, \bar{y} jeweils CMS-Impuls der beiden einlaufenden Teilchen, Radius des Wechselwirkungsvolumens und Kontraktionsparameter ist, während die modifizierte Besselfunktionen $I_p(z)$ in (3.54) eingeführt wurden. Mit (4.14) haben wir dann

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \sigma^{in}(W, J) &= \bar{y}^1 g(W) \Omega_2(W, J) \quad \text{also} \\ H(W, J) &= \bar{y}^1 f(W) \cdot e^{-k^2 R^2} I_{J+1/2}(k^2 R^2). \end{aligned}$$

Grundsätzlich könnte man nun die vom Endzustand unabhängige Funktion $f(W)$, die also multiplikativ in alle inelastischen Querschnitte eingeht, an das Experiment anpassen. Wir wollen hier aber $f(W)$ durch die Forderung bestimmen, dass in einem Modell ohne Kontraktion der inelastische Wirkungsquerschnitt asymptotisch ($W \rightarrow \infty$) konstant werden sollte und erhalten dann mit der Formel $\frac{\pi}{K^2} \sum_J (2J+1) W e^{-k^2 R^2} I_{J+1/2}(k^2 R^2) = R \sqrt{2\pi} W/K \xrightarrow{W \rightarrow \infty} \text{const.}$

$$(4.18) \quad H(W, J) = \text{const.} \cdot RW \cdot \bar{y}^1 \cdot e^{-k^2 R^2} I_{J+1/2}(k^2 R^2).$$

Für exotherme Reaktionen, wie etwa die uns interessierenden Vernichtungsprozesse im $\bar{N}\bar{N}$ -System ergibt sich dann das

übliche Schwellenverhalten ($K \rightarrow 0$, einl. skalare Teilchen)

$$(4.19) \quad \sigma^{in}(W, \beta) \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{\text{const}}{K} \delta_{\beta,0} + O(\text{const})$$

Für höhere Energien dagegen gilt in guter Näherung

$$(4.20) \quad H(W, \beta) \cong \text{const} \cdot \bar{\gamma}^{-1} \cdot \frac{W}{2K} \cdot e^{-(\beta + 1/2)^2 / 2K^2 R^2}$$

so dass wir mit dieser Gewichtsfunktion eine Beschränkung auf kleine Stossparameter in (4.14) erhalten. Bislang haben wir die Lorentz-Kontraktion vernachlässigt und in diesem Falle einen endlichen konstanten Wirkungsquerschnitt für Feuerballproduktion im limes hoher Energie gefordert.

$$(4.21) \quad \sigma^{in}(W \rightarrow \infty) = \text{const} \cdot 1/\bar{\gamma} \cdot 2\pi R^2$$

Die Energieabhängigkeit des Querschnitts $p\bar{p} \rightarrow$ Pionen, den die Abbildung 1 zeigt, und den wir als zentralen Querschnitt bezeichnen wollen, legt es aber nahe $\bar{\gamma}^{-1} = 2M/W$ zu setzen. Damit erhalten wir dann in guter Näherung für den von unserem Modell beschriebenen inelastischen Querschnitt

$$(4.22) \quad \sigma^{in}(W) \cong \text{const} \cdot \frac{M}{K} \cdot 2\pi R^2$$

weswegen die Energieabhängigkeit von σ^{in} unabhängig von den Parametern const, R festgelegt ist. Die Bestimmung der beiden verbleibenden Konstanten in der H-Funktion werden wir in Abschnitt 6 vornehmen.

Zusammenfassend machen wir also für inelastische Prozesse den Ansatz

$$(4.23) \quad |S_{N_f}(W, \beta, I)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{const} \cdot WR \cdot \bar{\gamma}^{-1} \cdot e^{-K^2 R^2} \cdot I_{\beta+1/2}(KR^2) \frac{\Omega_{N_f}(W, \beta, I)}{\Omega(W, \beta, I)}$$

mit den in Abschnitt 2 definierten Phasenräumen Ω_{N_f} .

4.3 Ladungsanalyse

Im Prinzip ist es nun möglich, mit diesen Formeln Wirkungsquerschnitte bei bestimmten Reaktionen als Funktion der Energie zu berechnen, allerdings ist in diesem Rahmen dann noch keine Ladungsanalyse möglich. Da aber experimentell die hier berechneten Grössen im allgemeinen nicht gemessen sind, bedarf es noch einer weiteren Annahme über die Zerlegung eines Querschnitts z.B. $\sigma(p\bar{p} \rightarrow 4\pi)$ in die einzelnen Ladungskanäle der auslaufenden Mesonen.

Zur Konstruktion der statistischen Gewichte für die Ladungszustände²³⁾ gehen wir auf die Definition der Phasenräume zurück. Nach Formel 4.10 gilt

$$(4.24) \quad \sigma(p\bar{p} \rightarrow n\pi) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{I_3} (2I_3+1) H(W, I_3) \cdot \frac{\Omega_{n\pi}(W, I_3)}{\Omega(W, I_3)}$$

In unserem Modell zerlegt sich der Phasenraum $\Omega_{n\pi}$ in ein Produkt, so dass der Isospinphasenraum abspalten kann

$$(4.25) \quad \Omega_{n\pi}(I) = \sum_{I_{31} \dots I_{3n}} \langle I, I_{31} \dots I_n, I_{3n} | P^I / \dots \rangle.$$

Wenn wir den N-Teilchenzustand wiederum mit den Entartungsparametern η ausdrücken, erhalten wir

$$(4.26) \quad \Omega_{n\pi}(I) = \sum_{I_{31} \dots I_{3n}} \left\{ \sum_{\eta_n} |\langle I, I_{31} \dots I_n, I_{3n} | I, I_3, \eta_n \rangle|^2 \right\}.$$

Die Ausführung der Summe über die Ladungszustände, beschrieben durch I_{3i} , liefert also die Multiplizität. Die einzelnen Summanden

$$(4.27) \quad \sum_{\eta_n} |\langle \dots I_i, I_{3i} \dots | I, I_3, \eta_n \rangle|^2$$

lassen sich durch CGK der Drehgruppe ausdrücken und sind auch näherungsweise für höhere Teilchenzahlen mit Sattelpunktmethode berechenbar²⁵⁾. Sie sind invariant unter Ladungskonjugation und unter Vertauschung der Teilchen zu gleichem Isospin und gleicher Ladungseinstellung. Sie hängen also z.B. bei N auslaufenden Mesonen nur ab von dem

Vektor n_+, n_0, n_- der Ladungsbesetzungszahlen, d.h. von der Anzahl der Teilchen mit $I_3 = +1, 0, -1$. Bei Ladungsanalyse hat man nun nicht nur auf I, I_3 im Isophasenraum zu projizieren, sondern zudem noch auf bestimmte Werte der n_i . Es ist daher zweckmässig, (4.23) so umzuschreiben, dass die Abhängigkeit von den Ladungsbesetzungszahlen deutlich ist

$$(4.28) \quad \Omega_{n\pi}(I) = \sum_{\substack{n_+, n_0, n_- \\ n_+ + n_0 + n_- = n}} \frac{n!}{n_+! n_0! n_-!} \sum_{\eta_n} |\langle n_+, n_0, n_- | I, I_3, \eta_n \rangle|^2,$$

worin dann $\langle n_+, n_0, n_- | I, I_3, \eta_n \rangle$ ein Repräsentant von der Form $\langle I_1, I_{31}, \dots, I_n, I_{3n} | I, I_3, \eta_n \rangle$ ist zu n_+, n_0, n_- . Wir sehen nun, wie der Gesamtphasenraum zerfällt in Unterphasenräume zu vorgegebenen Werten von n_i . Dabei bezeichnen wir mit

$$(4.29) \quad P_n(n_+, n_0, n_-; I, I_3) = \frac{n!}{n_+! n_0! n_-!} \left[\sum_{\eta_n} |\langle n_+, n_0, n_- | I, I_3, \eta_n \rangle|^2 \right]$$

das statistische Gewicht des auslaufenden n -Teilchenzustands im Isoraum. Wir werden nun zunächst Wirkungsquerschnitte ohne Ladungsberücksichtigung berechnen und erst anschließend daran die Zerlegung in die Ladungskanäle vornehmen. Letztere sind dann nach Massgabe der oben eingeführten Gewichte P_n zu zerlegen mit solchen Ladungskoeffizienten, die durch Summation über alle möglichen Ladungskonfigurationen n_+, n_0, n_- normiert sind. Diese nennen wir P_n^*

$$(4.30) \quad P_n^*(n_+, n_0, n_-; I, I_3) = P_n(n_+, n_0, n_-; I, I_3) / \Omega_n(I).$$

Zumindest für höhere Teilchenzahlen wird das Verhalten von P_n^* hauptsächlich durch den am stärksten veränderlichen Symmetrisierungsfaktor bestimmt, so dass man grob erhält

$$(4.31) \quad P_n^*(n_+, n_0, n_-) \cong \frac{Norm}{n_+! n_0! n_-!}$$

mit der Normierung

$$(4.32) \quad \sum_{n_+, n_0, n_-} \delta_K(n_+ + n_0 + n_- - n) \delta_K(n_+ - n_- - I_3) P_n^*(\dots) = 1,$$

Man sieht aus (4.31), dass bevorzugt in einem Rohquerschnitt solche Endzustände vorliegen, die eine gleiche Anzahl von positiven, negativen und ungeladenen Pionen aufweisen und dass Kanäle mit unverhältnismässig vielen ungeladenen Mesonen z.B. stark unterdrückt werden. Die Koeffizienten P_n^* sind zumindest für höhere Mesonenzahlen näherungsweise von I unabhängig, während für niedrigere Teilchenzahlen die Verhältnisse verwickelter sind. Hat man mehrere Teilchensorten zu gleichen Isospins im Endzustand, so bleibt der obige Gedankengang derselbe, nur müssen wegen der Unterscheidbarkeit von π und ρ z.B. andere Symmetrisierungsfaktoren vorgesehen werden.

Wir können nun das so präzisierte Modell, in welchem alle gemessenen (über die Winkel integrierten) inelastischen Querschnitte berechenbar sind, testen. Das werden wir im Abschnitt 6 durchführen. Im nächsten Abschnitt studieren wir einige allgemeine Folgerungen unseres Ansatzes.

5. Qualitative Züge des Modells

5.1 Verhalten der Querschnitte

Bevor wir unser Modell auf die Vernichtungsprozesse im $p\bar{p}$ -System anwenden, wollen wir gewisse allgemeine Eigenschaften des Ansatzes (4.23) hier diskutieren. Dazu werden wir das π, ρ, N, \bar{N} -System als abgeschlossen betrachten. Der Wirkungsquerschnitt zur Erzeugung von N_π - π -Mesonen, N_ρ - ρ -Mesonen, u.s.f. im $p\bar{p}$ -System hat dann nach (4.1) die Form

$$(5.1) \quad \sigma(N_\pi, N_\rho, N_N) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{I, J} (J + 1/2) H(W, J) \frac{\Omega_{N_\pi N_\rho N_N}(W, J, I)}{\Omega(W, J, I)}$$

Darin ist Ω eine Summe über die Phasenräume zu allen möglichen Endzuständen. Wie in (5.1) zum Ausdruck kommt, haben wir die ρ -Mesonen bei dem statistischen Ansatz als Elementarteilchen betrachtet (vergl. dazu auch 27 und 28). Diese Betrachtungsweise verstehen wir als eine Näherung, die im limes verschwindender Breite der Resonanz oder im Hochenergielimes (ER) exakt werden sollte. Um das zu verdeutlichen, gehen wir auf das Impulsraumintegral (P_μ -Erhaltung) des kovarianten SM zurück und beschreiben phänomenologisch das statistische Gewicht für die Erzeugung von N Teilchen der Masse μ , von denen Teilchen 1 und 2 eine "Resonanz" der Masse $M > 2\mu$ bilden, durch den modifizierten Phasenraum

$$(5.2) \quad \Omega_N^{M, \epsilon}(W) = \int \frac{d^3 p_1}{2p_{10}} \int \frac{d^3 p_2}{2p_{20}} \frac{\epsilon}{[(p_1 + p_2)^2 - M^2]^2 + \epsilon^2} * \\ * \int \prod_{i=3}^N \left\{ \frac{d^3 p_i}{2p_{i0}} \right\} \delta^{(4)} \left(\sum_{i=3}^N p_i + p_\mu - \tilde{p}_\mu \right)$$

Die eingeschriebene Impulsraumwichtung beschreibt das Massenspektrum der Resonanz und $w^2 = \tilde{p}^2$. Durch Substitution folgt daraus

$$(5.3) \quad \Omega_N^{M, \epsilon}(W) = \text{const} \int_{2\mu}^{\infty} dQ \frac{\epsilon}{[Q^2 - M^2]^2 + \epsilon^2} * \Omega_{N-1}^a(W),$$

worin $\Omega_{N-1}^Q(W)$ der kovariante Impulsraum für N-2 Teilchen der Masse μ und ein Teilchen der Masse Q ist. Wir sehen, dass bei endlicher Breite ϵ der Gewichtsfunktion der Impulsraum mit Resonanz sich ausdrücken lässt als gewichtete Überlagerung von Impulsräumen mit elementaren Teilchen, während im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ offenbar

$$(5.4) \quad \Omega_N^{M, \epsilon}(W) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \text{const.} \cdot \Omega_{N-1}^M(W)$$

gilt. Im limes hoher Energie $W \gg M$ wird in (5.3) $\Omega_{N-1}^Q(W)$ praktisch massenunabhängig, so dass wegen der relativ stark konzentrierten Gewichtsfunktion im dQ-Integral ebenfalls $\Omega_{N-1}^Q(W)$ an der Stelle $Q=M$ vor das Integral gezogen werden kann. Diese Überlegung betrifft natürlich auch in ähnlicher Weise den Isospinphasenraum. Um das kurz auszuführen, gehen wir auf die Definition (2.47) zurück und schreiben

$$(5.5) \quad \Omega_N(I_1, \dots, I_N; I, I_3) = \sum_{I_{3i}} \langle I_1 I_{31} \dots I_N I_{3N} | P^{I, I_3} | I_1 I_{31} \dots I_N I_{3N} \rangle,$$

wobei wir ausführlich die Einzelisospins I_i der zu koppeln- den Teilchen mitgeführt haben. Der Projektor P^{I, I_3} projiziert auf definiertes I, I_3 , sodass in der Bezeichnungsweise der Gleichung (2.48) gilt

$$(5.6) \quad \Omega_N(I_1, \dots, I_N; I, I_3) = \sum_{I_{3i}} \sum_{\eta_N} |\langle I_1 I_{31} \dots I_N I_{3N} | I, I_3 \eta_N \rangle|^2.$$

Nun wählen wir zweckmässig als Entartungsparameter die Unterisospins J_1 im 1,2-System, J_2 im (1,2)-3-System u.s.f. und erhalten daher mit den CGK der Drehgruppe durch Iteration

$$(5.7) \quad \Omega_N(\dots) = \sum_{I_{3i}} \sum_{J_1 \dots J_{N-2}} \left| C_{I_{31} I_{32} M_1}^{I_1 I_2 J_1} \cdot C_{M_1 I_{31} M_2}^{J_1 I_3 J_2} \dots C_{M_{N-2} I_{3N} I_3}^{J_{N-2} I_N I} \right|^2,$$

Wir setzen nun voraus, dass etwa Teilchen 1 und 2 die Iso-spinresonanz j bildet. Mit anderen Worten, wir halten bei der Konstruktion des Isoraums mit "Resonanz" j in der η -Summe den Unterparameter $J_1=j$ fest und erhalten analog zu der Schreibweise in (5.2)

$$\begin{aligned}
 \Omega_N^j(I_1 \dots I_N; I, I_3) &= \sum_{I_{3i}} \sum_{J_1 \dots J_{N-2}} \delta_{J_1, j} |CGK|^2 \\
 (5.8) \quad &= \sum_{I_{3i}} \sum_{J_2 \dots J_{N-2}} |C_{I_1 I_2 j}^{I_1 I_2 j}|^2 |C_{m I_{33} M_2}^{j I_3 J_2 \dots}|^2 \\
 &= \Omega_{N-1}(j, I_3, \dots, I_N; I, I_3) .
 \end{aligned}$$

Der Phasenraum mit resonanter Festlegung eines Unterparameters führt also auch hier wieder auf eine Zustandssumme mit $N-1$ "elementaren" Teilchen, was sich auch in den Rekursionsformeln für $\Omega_N(I)$ niederschlägt. Ähnliche Überlegungen kann man auch zur Bestimmung der statistischen Gewichte in der Ladungsanalyse benutzen, was hier aber nicht ausgeführt wird.

Eine rigorose Durchführung dieses Ansatzes (bei endlicher Breite der Resonanz) liegt unter anderem auch wegen der Korrelation im Impulsraum, die die Anwendbarkeit unserer Näherungsverfahren in Frage stellt, bisher nicht vor. Daher werden wir bei dem statistischen Ansatz Resonanzen in üblicher Weise als Elementarteilchen ansehen.

Wir nehmen daher an, dass die mit obigem Querschnitt erzeugten ρ -Mesonen nach Verlassen des Wechselwirkungsvolumens mit Sicherheit in zwei Pionen zerfallen. Das heisst, wir setzen den Querschnitt zu der Erzeugung von z.B. drei Pionen im Endzustand additiv aus zwei Teilen zusammen, und zwar

$$(5.9) \quad \sigma_{ges}(3\pi) = \sigma(3\pi, 0, 0) + \sigma(1\pi, 1\pi, 0) .$$

Daher zerlegt sich der gesamte Wirkungsquerschnitt der Pionisation σ^P in zwei Teile σ^{PP} und σ^{SP} , wobei PP bedeutet: ohne Beteiligung von Resonanzen (primäre Pionisation).

Wir betrachten nun einen durch die Besetzungszahlen N_{ξ} beschriebenen Endzustand. Die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung einer solchen Konfiguration setzen wir in einem partiellen W,J,I-Kanal dem zur Verfügung stehenden Phasenraum proportional. Ohne weitere Annahmen würden wir damit implizieren, dass die relativen Erzeugungsstärken der betrachteten Teilchen nur von den jeweiligen Massen abhängen. Es ist aber a priori nicht sicher, ob im Sinne des Feuerballbildes die Bildungswahrscheinlichkeit der einzelnen Teilchensorten im Wechselwirkungsvolumen gleich ist. Um dem Rechnung zu tragen, führen wir für jede Sorte eine dimensionslose Konstante ein, die wir zukünftig auch als Kopplungskonstante G_{ξ} bezeichnen wollen und setzen die Wahrscheinlichkeit eines Endzustands N_{ξ} dem Produkt $\prod_{\xi} G_{\xi}^{N_{\xi}}$ Phasenraum proportional.

Im üblichen SM spaltet man von dem Phasenraum eine entsprechende Potenz des Wechselwirkungsvolumens ab und führt zur Anpassung an Experimente für verschiedene Teilchensorten unterschiedliche Wechselwirkungsradien ein. Dort ist also formal nicht zwischen "Kopplungskonstante" und Radius zu unterscheiden. Auch in unserem Modell geht nach (3.44) das durch R bestimmte, verschmierte Volumen zur Potenz der auslaufenden Teilchenzahl multiplikativ in den Gesamtphasenraum ein. Eine Änderung von R bedeutet hier aber auch eine Änderung in der Drehimpulsabschneidung, so dass damit zwischen R und G_{ξ} unterschieden ist. Da wir nun annehmen, dass das Volumen durch das einlaufende System definiert wird und R nur die Reichweite der Kernkräfte beschreibt, erscheint eine Einführung verschiedener Radien unmotiviert.

Wir wollen nun anhand eines vereinfachten Modells einige allgemeine Konsequenzen unseres Ansatzes für verschiedene Teilchensorten (zwecks analytischer Durchführung bei hohen Energien W) ziehen und setzen dazu für die Phasenräume an:

$$(5.10) \quad \Omega_{N_\pi, N_S, N_N}(W, e, I) = \frac{(g_\pi)^{N_\pi}}{N_\pi!} \frac{(g_S)^{N_S}}{N_S!} \left\{ \frac{g_N^{N_N}}{N_N!} \right\}^2 \tilde{\Omega}_{N_\pi, N_S, N_N}(W, e, I),$$

wobei die angegebenen Fakultäten die Ununterscheidbarkeit der Teilchen gleicher Sorte berücksichtigen, so dass $\tilde{\Omega}_{N_i}$ frei wird von allen Symmetrisierungsfaktoren und Kopplungskonstanten.

Um nun das Verhalten der in (5.1) definierten Wirkungsquerschnitte als Funktion der Energie und in Abhängigkeit vom Endzustand zu diskutieren, genügt es nicht mehr, nur den Phasenraumquotienten zu betrachten, da ja die Summe über die Drehimpulse mit der durch die H-Funktion gegebenen Wichtung die Verhältnisse verzerrt. Wir gewinnen Einblick in diese Zusammenhänge, wenn wir die Phasenräume benutzen wie sie im ER vorliegen (3.49). Man kann dann zeigen, dass die so abgeleiteten Ergebnisse auch den Hochenergielimes unseres Modells darstellen. Wir bemerken, dass es dann genügt, nur die in den Teilchenzahlen am stärksten veränderlichen Teile der Zustandssummen mitzubetrachten. In diesem Sinne geht der Einfluss der Spins s_i der auslaufenden Teilchen nur durch die Multiplizität $(2s_i+1)^{N_i}$ und der Isospin nur durch den entsprechenden Faktor $(2I_i+1)^{N_i}$ ein. Der Grund für dieses Verhalten ist die Form der Spin- und Isospinabhängigkeit in der zugehörigen Zustandssumme (3.26)

$$(5.11) \quad 3^N \cdot \exp \left\{ - (I + 1/2)^2 / \text{const} \cdot N \right\}.$$

Daher bewirkt offenbar der Spin- und Isospineinfluss nur eine Modifikation unserer "Kopplungskonstanten", da die Multiplizitäten zur Potenz der entsprechenden Teilchenzahl eingehen. Die für unser Vorhaben relevanten Phasenräume haben dann die Form

$$(5.12) \quad \Omega_{N_\pi, N_S, N_N}(W, \beta) = \frac{(g_\pi)^{N_\pi}}{N_\pi!} \frac{(g_S)^{N_S}}{N_S!} \left\{ \frac{g_N^{N_N}}{N_N!} \right\}^2 \frac{[MR^3 W^2 e^{-\beta^2/aR^2 W^2}]^N}{N! N! N!},$$

wobei $N=N_\pi+N_S+2N_N$ die Gesamtteilchenzahl, $a=4/9$ und M die

Protonmasse ist. Gleichzeitig haben wir Gebrauch davon gemacht, dass für unsere asymptotischen Überlegungen der Zweiteilchenphasenraum irrelevant ist. Weiterhin nehmen wir eine Normierung des inelastischen Querschnitts auf $2\pi R^2$ vor, indem wir die Hochenergienäherung der H-Funktion (4.20) ohne Kontraktion ansetzen: $H = \exp(-l^2/2K^2R^2)$. Nach Integralapproximation der l-Summe folgt dann aus (5.1)

$$(5.13) \quad \sigma(N_\pi, N_S, N_N) = \frac{\pi}{k^2} S \cdot \int_0^\infty d\ell^2 e^{-2\ell^2/R^2W^2} \frac{[MR^3W^2 e^{-\ell^2/aR^2W^2}]^N}{\Omega(GMR^3W^2 e^{-\ell^2/aR^2W^2})}$$

mit der Abkürzung

$$S = \left(\frac{1}{N!}\right)^3 \cdot \frac{(g_\pi)^{N_\pi}}{N_\pi!} \cdots \frac{(g_N)^{N_N}}{N_N!}$$

Die Normierungssumme Ω lässt sich im ER-limes in folgender Weise nähern (Multinomialformel)

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \Omega(W, \ell) &\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{N_\pi} \sum_{N_S} \sum_{N_N} \cdot S [MR^3W^2 e^{-\ell^2/aR^2W^2}]^N \\ &\rightarrow \sum_N \frac{1}{N!} \left(\frac{1}{N!}\right)^3 [GMR^3W^2 e^{-\ell^2/aR^2W^2}]^N \end{aligned}$$

mit $G = g_\pi + g_S + g_N$. Wir erhalten zudem¹²⁾

$$(5.15) \quad \Omega(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (2\pi)^{-3/2} x^{-3/8} e^{4x^{1/4}}$$

Nach Substitution im Integral gilt dann

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \sigma(N_\pi, N_S, N_N) &= 4\pi a R^2 \cdot S \cdot [MR^3W^2]^{-2a} * \\ &* \int_0^{MR^3W^2} dz \cdot z^{N-1+2a} / \Omega(Gz) \end{aligned}$$

Für höhere Gesamtteilchenzahlen, für die diese Diskussion nur gilt, erhalten wir also im Grenzfall $W \rightarrow 0$ (hier sind die Massen vernachlässigt, daher Verzerrung an der Schwelle) ein Schwellenverhalten, während im asymptotischen Bereich $W \rightarrow \infty$ (bei festem Kanal) ein Energieabfall des einzelnen

Prozesses wie

$$(5.17) \quad \sigma^{as}(N_{\pi}, N_S, N_N) \sim 4\pi R^2 [MR^3 W^2]^{-8/9}$$

vorliegt. Die Verzweigungsverhältnisse werden hier also unabhängig von den Konstanten G_f asymptotisch konstant⁷⁾¹²⁾ im Gegensatz zum gewöhnlichen SM. Um dieses Verhalten in unserem Modell zu erklären, wollen wir zunächst den mittleren Drehimpuls $\langle l \rangle_N(W)$ in einem inelastischen Prozess mit N auslaufenden Mesonen berechnen

$$(5.18) \quad \langle l \rangle_N(W) = \frac{1}{\sigma_N(W)} \sum_e l \cdot \sigma_N(W, e) \\ \approx \frac{1}{\sigma(N, 0, 0)} \int_0^\infty dl^2 e^{-2e^2/R^2 W^2} \cdot e \cdot \frac{\Omega_{N\pi}(W, e)}{\Omega(W, e)}$$

Wir führen nun dieselbe Substitution durch wie in Gleichung 5.16 und erhalten das Zwischenergebnis

$$\langle l \rangle_N(W) = \frac{4\pi a R^2 [MR^3 W^2]^{-2a}}{\sigma(N, 0, 0)} \cdot S \cdot \int_0^\infty dz \frac{z^{N-1+2a}}{\Omega(Gz)} \sqrt{a R^2 e_N W^2 / z}$$

Man kann zeigen, dass im Integral die folgende Entwicklung der Wurzel vorgenommen werden darf $\sqrt{\ln W^2/z} = \sqrt{\ln W^2} \cdot (1 - \ln z / 2 \ln W^2)$. Damit erhalten wir bei festem N für grosse W

$$(5.19) \quad \langle l \rangle_N(W) \rightarrow RW \sqrt{2a e_N W} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{e_N W}\right) \right\}$$

Wir sehen, dass in den asymptotischen Kanälen Partialwellen hoher Ordnung l dominieren, denn der auf σ^{in} bezogene mittlere Drehimpuls wächst nur mit WR . Die grosse Zustandssumme, welche durch ihr starkes Energiewachstum im gewöhnlichen SM den schnellen Abfall asymptotischer Querschnitte (Normierung des gesamten inelastischen Querschnitts) ergibt, wirkt in unserem Modell mit wachsenden Energien bei immer höheren l/WR -Werten. Der effektive Wert von Ω wächst dann also wegen der Drehimpulsabschneidung in den Phasenräumen schwächer und somit fällt der jeweilige Querschnitt auch langsamer ab. Je schwächer die Feuerballfunktion im Stossparameter abschnei-

det, umso schwächer wird auch der Hochenergieabfall asymptotischer Querschnitte. Zudem bleiben auch, wie wir hier nicht im einzelnen zeigen wollen, die Verzweigungsverhältnisse energieunabhängig. Ganz andere Ergebnisse erhält man allerdings bei schärferer Stossparameterabschneidung in der H-Funktion. Wie man leicht sieht, ergibt ein dem optischen Modell ähnlicher Ansatz für H, und zwar

$$(5.20) \quad H = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } l < \text{const} \cdot WR \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} ,$$

exponentiell verschwindende asymptotische Querschnitte in unserem Modell. Auch die Verzweigungsverhältnisse werden nicht mehr konstant, sondern fallen mit $W \rightarrow \infty$ ab, wobei das Energieverhalten dann noch von den betrachteten Teilchenzahlen abhängt.

Wir erwähnen noch, dass die Energieabhängigkeit der Quotienten $\sigma_N(W)/\sigma_{N'}(W)$, welche sich im üblichen SM zu $W^{2(N-N')}$ ergibt⁷⁾, hier weitgehend unabhängig von der Raumabschneidung in unseren Phasenräumen ist.

Obwohl die zu einem Endzustand (N_T, N_S, N_U) gehörenden Phasenräume für $W \rightarrow \infty$ divergieren, kommt ein asymptotischer Energieabfall jedes Querschnitts zustande, da in der Normierungssumme Ω in wachsendem Masse Kanäle mit grösseren Teilchenzahlen überwiegen. Für grössere Drehimpulse l verschiebt sich der Hauptbeitrag in Ω mehr zu kleineren Teilchenzahlen (Drehimpulsabschneidung), deren Beiträge zum gesamten Wirkungsquerschnitt dann aber durch unsere Feuerballfunktion stark unterdrückt werden. Demnach macht sich die Wirkung der H-Funktion am stärksten in den asymptotischen Bereichen (Schwänzen) der einzelnen Wirkungsquerschnitte bemerkbar, deren asymptotische Energieabhängigkeit dann eben durch das Zusammenspiel von Phasenraum und Feuerballfunktion bestimmt wird. Einen allgemeinen Eindruck des Verhaltens unserer Querschnitte (exakte GWS-Formeln vorausgesetzt)

vermittelt die Abbildung 21. Zwischen dem Schwellgebiet und dem asymptotischen Bereich nimmt jeder Querschnitt als Funktion der Energie ein Maximum an. Dieses fällt mit wachsender Teilchenzahl und wird flacher. Daher erstreckt sich der wesentliche Teil von σ^{in} bei höheren Energien über eine mehr und mehr wachsende Zahl von Kanälen.

Wir betrachten nun den Pionisationsquerschnitt $\sigma^{\text{P}}(W)$

$$(5.21) \quad \sigma^{\text{P}} = \sum_{N_{\pi}, N_{\text{S}}} \sigma(N_{\pi}, N_{\text{S}}, 0) ,$$

für den asymptotisch gilt

$$(5.22) \quad \sigma^{\text{P}}(W) = \frac{\pi}{k^2} \int_0^{\infty} d\ell^2 e^{-2\ell^2/R^2 W^2} \frac{\Omega(gMR^3 W^2 e^{-\ell^2/aR^2 W^2})}{\Omega(GMR^3 W^2 e^{-\ell^2/aR^2 W^2})}$$

mit $g=g_{\pi}+g_{\rho}$; $G=g+g_{\text{N}}$. Dieses Ergebnis können wir auch so ausdrücken

$$(5.23) \quad \sigma_{\text{as}}^{\text{P}}(W) = 4\pi a^2 W^{-4a} \int_0^{\infty} dz \cdot z^{2a-1} \frac{\Omega(gz)}{\Omega(Gz)}$$

Während also die Grösse des Querschnitts von der Form der grossen Zustandssumme Ω abhängt, ist das Hochenergieverhalten wiederum durch W^{-4a} gegeben. Die Vielfacherzeugung von Mesonen (ohne auslaufende Nukleonen) wird also im limes hoher Energie unterdrückt durch Nicht-Vernichtungsprozesse. Unsere numerischen Ergebnisse zeigen aber, dass wegen der grossen Masse des $\text{N}\bar{\text{N}}$ -Paares die bisher erreichbaren Energien im $\text{p}\bar{\text{p}}$ -System nicht ausreichen, um diesen Effekt zu studieren. Wir sehen weiterhin, dass der Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\text{P}}(W)$ nur von $g_{\pi}+g_{\rho}$ abhängt, so dass hier nicht zwischen einem Modell mit und ohne Resonanzen unterschieden ist.

5.2 Asymptotische mittlere Teilchenzahl

Wir wenden uns nun den mittleren erzeugten Teilchenzahlen einer Sorte ξ bezogen auf den normierten inelastischen Wirkungsquerschnitt zu

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \langle N_{\xi} \rangle (W) &= \frac{1}{\sigma^{in}(W)} \sum_{N_{\pi}, N_{\rho}, N_{\omega}} N_{\xi} \sigma(N_{\pi}, N_{\rho}, N_{\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi R^2} \frac{\pi}{k^2} \int_0^{\infty} d\rho^2 e^{-2\rho^2/R^2 W^2} \frac{\sum_{N_{\pi}, N_{\rho}, N_{\omega}} N_{\xi} S \cdot [MR^3 W^2 e^{-\rho^2/2aR^2 W^2}]^N}{\Omega(GMR^3 W^2 e^{-\rho^2/aR^2 W^2})} \end{aligned}$$

Das N_{ξ} in der Summe über die Teilchensorten wollen wir durch Differentiation $g_{\xi} \frac{\partial}{\partial g_{\xi}}$ erzeugen:

$$(5.25) \quad \langle N_{\xi} \rangle (W) = \frac{1}{2k^2 R^2} g_{\xi} \frac{d}{dg_{\xi}} \int_0^{\infty} d\rho^2 e^{-2\rho^2/R^2 W^2} \frac{\sum_{N_{\pi}, N_{\rho}, N_{\omega}} \Omega(GMR^3 W^2 e^{-\rho^2/aR^2 W^2})}{\Omega(GMR^3 W^2 e^{-\rho^2/aR^2 W^2})}$$

Die mittlere Anzahl der erzeugten Teilchen der Sorte ξ wird also praktisch der zugehörigen Kopplungskonstante g_{ξ} proportional. Das ist konsistent mit dem Begriff der "Erzeugungsstärke", den wir zur Einführung der Konstanten G_{ξ} in Abschnitt 4 diskutierten. Um das Energieverhalten von $\langle N \rangle$ einzusehen, braucht man die asymptotische Form von Ω aus Gleichung (5.15)

$$(5.26) \quad \langle N_{\xi} \rangle (W) \xrightarrow{W \rightarrow \infty} \text{const.} \cdot \sqrt{W} \times \frac{g_{\xi}}{G^{3/4}} .$$

Die hier mit g abgekürzten Grössen sind zufolge des Ansatzes (5.12) näherungsweise proportional zu $G(2s+1)(2I+1)$, wenn s, I den Spin bzw. Isospin der Teilchensorte bezeichnet. Bei gleicher "Erzeugungsstärke" G haben also Teilchen höheren Spins und Isospins grössere Multiplizitäten.

Abschliessend wollen wir noch das Verhalten der mittleren auf σ^P bezogenen Mesonenzahl bestimmen

$$(5.27) \quad \langle N_{\pi} \rangle^P (W) = \frac{1}{\sigma^P} \sum_{N_{\rho}} N_{\pi} \sigma(N_{\rho}, 0, 0)$$

Wir erhalten dann

$$(5.28) \quad \langle N_{\pi} \rangle^P(W) \xrightarrow{W \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma^P} g_{\pi}^2 \gamma_{\pi} a R^2 W^{-4a} \int_0^{W^2} dz z^{2a-1} \frac{d}{d\gamma_{\pi}} \frac{\Omega(g_{\pi} z)}{\Omega(Gz)} .$$

Setzen wir darin (5.23) ein, so ergibt sich, dass im li-
 mes $W \rightarrow \infty$ $(N_{\pi})^P$ konstant wird. Auch dieser Effekt liegt
 erst dann vor, wenn die Vielfachpionerzeugung durch die
 Nicht-Vernichtungskanäle unterdrückt wird und kann daher
 noch nicht mit Experimenten verglichen werden.

Da wir gesehen haben, dass zur Beschreibung von Experimen-
 ten genauere Berechnungen unter Berücksichtigung der end-
 lichen Massen bei kleineren Energien unumgänglich sind,
 wollen wir diese in dem folgenden Abschnitt erörtern.

6. Anwendung auf Experimente am $p\bar{p}$ -System

6.1 Bereitstellung der Ausgangsformeln

Wir wollen unser Modell anwenden auf das physikalische System, welches am ehesten eine konsistente, erfolgreiche Beschreibung mit statistischen Mitteln erhoffen lässt. Dazu wählen wir die Vernichtungsprozesse im $p\bar{p}$ -System, da diese einmal wegen der grossen Masse der Nukleonen eine relativ hohe mittlere erzeugte Mesonenzahl aufweisen und zum anderen "durchlaufende Teilchen" (im Sinne der Einleitung) hier fehlen. Als experimentelles Material liegen Messungen der wichtigsten Wirkungsquerschnitte über einen Energiebereich von 1.6 bis 7.0 GeV/c (das entspricht einer CMS-Energie von 16.6 bis $28.2m_\pi$) vor³⁰⁾.

Wir wollen nun Aussagen aus unserem Modell für diese gemessenen integrierten Querschnitte ableiten. Dabei beschränken wir uns auf drei Teilchensorten π, ρ, N und \bar{N} . Zu jedem Satz von Besetzungszahlen N_{ξ} der Sorten ξ haben wir dann zunächst die Phasenräume $\Omega_{N_{\xi}}(W, J, I)$ zu berechnen, deren Integraldarstellung in Abschnitt 2 angegeben wurde. Mit den in Abschnitt 3 abgehandelten GWS-Methoden gewinnen wir Näherungsausdrücke für die Phasenräume $\Omega_{N_{\xi}}(W, J)$, die für grosse Besetzungszahlen bei festem J und W/N exakt werden. Den Isospinphasenraum $\Omega_{N_{\xi}}(I)$ berechnen wir rekursiv nach den in Abschnitt 3 angegebenen Formeln. Die für unsere numerischen Rechnungen benutzten Ausgangsformeln der Zustandssummen sind vollständig in Anhang A angegeben, wo auch die wichtigsten Formeln zur Lösung der transzendenten CHGL (vergl. 3.10), die mit hoher Präzision behandelt werden muss, stehen.

Für die in Abschnitt 4 eingeführte H-Funktion (Feuerballanregungsfunktion) kann man in dem hier betrachteten Energiebereich als gute Näherung die folgende Formel verwenden

$$(6.1) \quad H(W, \beta) = \text{const.} \cdot \frac{M}{K} e^{-\frac{(\beta + 1/2)^2}{2K^2 R^2}},$$

wobei die Unitaritätsschranke $H \leq 1$ (4.12) einzuhalten ist. Hier bedeutet J, K jeweils Drehimpulsquantenzahl und Relativimpuls im CMS, während R, M Radius und Nukleonmasse bezeichnen; const ist dann eine dimensionslose, anzupassende Zahl.

Mit dieser Funktion und den Phasenräumen $\Omega_{N_f}(W, J, I)$ konstruieren wir nach (4.10) und (4.23) die inelastischen Wirkungsquerschnitte nach Summation über den Isospin I in folgender Weise

$$(6.2) \quad \sigma_{N_f}(W) = \frac{\pi}{2K^2} \sum_{I, \beta} (2\beta + 1) H(W, \beta) \frac{\Omega_{N_f}(W, \beta, I)}{\sum_{N_f'} \Omega_{N_f'}(W, \beta, I)},$$

Alsdann zerlegen wir den Querschnitt $\sigma_{N_f}(W)$ gemäss der in Abschnitt 4 ausgeführten Ladungsanalyse in die einzelnen beobachteten Kanäle und summieren über die nicht beobachteten ungeladenen Teilchen. Da im Endzustand direkt keine ρ -Resonanzen gemessen werden, ersetzen wir die Wirkungsquerschnitte z.B. $(\pi^+\pi^-\rho^0)$ durch $(2\pi^+2\pi^-)$ und addieren alle möglichen Beiträge zu einem betrachteten Kanal auf.

Da $\Omega(W, J, I) = \sum_{N_f} \Omega_{N_f}(W, J, I)$ bei festgehaltenen J, I eine Summe von in W stark anwachsenden Funktionen ist, erwarten wir, dass ein Querschnitt bei hohen Energien unterdrückt wird durch die konkurrierenden Prozesse grösseren statistischen Gewichts, deren Zustandssummen in Ω eingehen. Andererseits liegt für jeden Querschnitt bei hinreichend niedrigen Energien ein Schwellenverhalten vor. In einem Modell identischer Teilchen ohne innere Freiheitsgrade demonstrieren wir dieses allgemeine Verhalten am Beispiel einiger Querschnitte bei Normierung von σ^{in} auf $2\pi R^2$ in Abbildung 21. Auch die Experimente scheinen diese groben Züge im Energieverhalten widerzuspiegeln: Kanäle mit wenigen (verglichen

mit der mittleren Mesonenzahl) auslaufenden Teilchen fallen mit der Energie W ab und können grob in dem Sinne als asymptotisch bezeichnet werden als ihr Energieverhalten durch die Formel (5.17) beschrieben wird. Geht man zu höheren Mesonenzahlen über, so liegt erwartungsgemäss ein noch nicht asymptotisches Verhalten vor. Man stellt die Andeutung eines Maximums im Wirkungsquerschnitt als Funktion von W fest, während zu höheren Energien die Einmündung in das asymptotische Gebiet sich ankündigt. Insbesondere zeigt dann der Querschnitt zur höchsten gemessenen Teilchenzahl $3\pi^+ 3\pi^- \pi^0$ ein deutliches, weites Maximum, wie das grundsätzlich aus dem Energieverhalten der Phasenräume zu fester Teilchenzahl (nach Normierung (4.23)) verständlich ist. Bei niedrigerer Energie erwarten wir einen Anstieg der Querschnitte wie $1/K$ mit dem CMS-Impuls der einlaufenden Nukleonen, so dass dort eine Verzerrung des reinen Phasenraumverhaltens vorliegt. Das drückt sich dann insbesondere im Energieverlauf von σ^P aus, der zu kleinen K -Werten hin ansteigt, während er bei der höchsten Einschussenergie nur noch etwa 40% des inelastischen Querschnitts ausmacht.

Umgekehrt weist das Verhalten der Querschnitte für Nicht-Vernichtungsreaktionen $\sigma^{NV} = \sigma^{in} - \sigma^P$ durchweg einen Anstieg über das ganze Energieintervall auf. Wegen der ausgeprägten Asymmetrie in der Winkelverteilung der Nukleonen bei Prozessen ohne Vernichtung scheint der statistische (vorwärts-rückwärts-symmetrische) Anteil dieser Reaktionen gering zu sein, wie sich das auch in unserem Modell ergibt (vergl. Abb.: 16).

In dieser Form enthält nun unser Modell noch einige Parameter, die festgelegt werden müssen. Wir stellen sie zusammen: $const, R, G_\pi, G_\rho, G_N$. Man sieht aus (6.1), dass $const$ lediglich multiplikativ in die H -Funktion und damit in alle inelastischen Querschnitte eingeht, während die Kopplungs-

konstanten $G_{\mathbb{Z}}$ nur in den Phasenräumen stehen und die relative "Erzeugungsstärke" der Sorten beeinflussen (5.23). Der Radius unseres Wechselwirkungsvolumens R erscheint jedoch sowohl in der Feuerballfunktion als auch in den Ω_N . Zur Vereinfachung der Anpassung versuchen wir den Ansatz $G_{\pi} = G_{\mathbb{Z}} = G_N = G$ und haben daher die Parameter const, R, G anzupassen.

6.2 Anpassung der Parameter

Wie aus Messungen der elastischen Streuung im $p\bar{p}$ -System bei 1.6 GeV/c hervorgeht³⁰⁾, erreicht die Opazität praktisch die Unitaritätsgrenze, d.h. es findet maximale Absorption bei niedrigen Partialwellen statt. Daher wählen wir den Parameter const so, dass unsere H-Funktion bei dieser Energie und $J=0$ ebenfalls maximale Absorption beschreibt und erhalten $\text{const}=0.7$. Wir bemerken, dass wegen (6.1) die Wahl von const zu dieser Anpassung unabhängig ist von den verbleibenden Parametern R, G . Der gesamte inelastische Wirkungsquerschnitt

$$(6.3) \quad \sigma^{in}(p\bar{p}) \cong 0.7 \cdot \frac{M}{K} 2\pi R^2 \cong \sigma^P(p\bar{p})$$

hängt nun nach (4.23) lediglich noch von der multiplikativen Konstante R^2 ab. Aus unseren numerischen Ergebnissen folgt, dass für die hier betrachteten Energien $W < 30m_{\pi}$ der inelastische Wirkungsquerschnitt unseres Modells praktisch nur aus dem Pionisationsquerschnitt besteht, so dass R angepasst werden kann zur Festlegung des Querschnitts $p\bar{p} \rightarrow$ Pionen bei einer Energie. Mit $\text{const}=0.7$ hängt diese Wahl des Parameters R nicht von G ab. Wir wählten $R=0.63m_{\pi}^{-1}$ und erhalten dann sehr gute Übereinstimmung von $\sigma^P(W)$ von 1.6 bis 7.0 GeV/c wie die Abbildung 1 veranschaulicht.

Wir machen zur Bestimmung von R noch eine Bemerkung. Obwohl die elastische Vorwärtsstreuung im $p\bar{p}$ -System bei höheren Energien sehr gut als Diffraktionsstreuung beschrieben

werden kann³⁰⁾³¹⁾ - dabei wird analog zu unserer H-Funktion bei einer Gaussfunktion im Stossparameter für die inelastischen Partialwellen ein R von etwa $0.5m_{\pi}^{-1}$ benutzt - haben wir in diesem Modell nicht mehr die Möglichkeit, die zu den inelastischen Prozessen gehörige Schattenstreuung auf das Experiment anzuwenden. Das liegt daran, dass wir nur einen Bruchteil aller auftretenden inelastischen Reaktionen zu beschreiben beanspruchen.

Zu kleinen Energien hin überwiegt aber der exotherme Vernichtungsprozess in σ^{in} , so dass wir versuchen können, wenigstens bei der Energie von $1.6 \text{ GeV}/c$ die unserem Modell entsprechende Diffraktionsstreuung mit dem Experiment zu vergleichen. Wir finden dann gute Übereinstimmung in der t -Abhängigkeit von $d\sigma_{el}/dt$ mit $R=0.6m_{\pi}^{-1}$, erhalten dann aber ein um einen Faktor 2 zu kleines Verhältnis von σ_{el}/σ_{tot} . Nach J.Kokkedee³¹⁾ wissen wir, dass dieser Quotient stark abhängt von der genauen J -Abhängigkeit der inelastischen Partialwellen, so dass sich wechselseitige Absorptionskorrekturen zwischen Vernichtungs- und Nichtvernichtungskanälen hier noch stark bemerkbar machen.

Es bleibt nun noch der Parameter G zu bestimmen. Da dieser hauptsächlich auf die Beschreibung der Multiplizität erzeugter Teilchen Einfluss nimmt, wollen wir G festlegen durch Anpassung der mittleren geladenen Mesonenzahl bei $5.7 \text{ GeV}/c$ auf den experimentellen Wert. Dazu wählen wir $G=20$. Dieser Wert ergibt auch zugleich die günstigste Übereinstimmung aller übrigen Querschnitte wie wir an einem Beispiel in Abbildung 18 demonstrieren. Mit diesem G ergeben sich auch etwa die richtigen Resonanzproduktionsquerschnitte (siehe Tabelle auf Seite 68).

Nach dieser Anpassung der Parameter können wir jetzt die Berechnung aller gemessenen Querschnitte vornehmen, deren Resultate wir zum Vergleich mit Experimenten in den Abbildungen angeben und in einer Abbildungsbeschreibung erläutern.

6.3 Einfluss der Drehimpulserhaltung

Wir haben in Abschnitt 5 diskutiert, dass sich im Energieverhalten fester Querschnitte $\sigma_N(W)$ für höhere W die Drehimpulserhaltung widerspiegelt und führten dies darauf zurück, dass in solchen Querschnitten in zunehmendem Masse Partialwellen der Ordnung $j \gg KR$ dominieren (5.19). Im Gegensatz zum Fall bei grossem N sollten also Zustände niedriger Teilchenzahl bevorzugt mit hohen Drehimpulsen erzeugt werden - ein Sachverhalt, der mit den Experimenten insofern im Einklang steht, als Konfigurationen hoher Teilchenzahl $N \gg \bar{N}$ mehr isotrop erzeugt werden, während in Endzuständen kleiner Mesonenzahl stärkere Anisotropie beobachtet wird. Wir demonstrieren dieses Verhalten an den partiellen inelastischen Querschnitten $\sigma_N(W, j)$ in der Abbildung 17, wo wir bei einer Energie die Beispiele $N=3$ und $N=7$ anführen. Man erkennt deutlich, dass beide Kurven als Funktion von j kaum überlappen, weil der Prozess der Teilchenzahl 3 (\bar{N} ist bei dieser Energie etwa 7) praktisch nur Drehimpulse $j \gg KR$ enthält.

Insbesondere macht sich dieses Verhalten auch in der mittleren erzeugten Mesonenzahl in Abhängigkeit vom Eingangsdrehimpuls

$$(6.4) \quad \langle N \rangle (W, j) = \frac{1}{\sigma^{in}(W, j)} \sum_N N \sigma_N(W, j)$$

mit
$$\sigma^{in}(W, j) = \sum_{N \geq 2} \sigma_N(W, j)$$

bemerkbar. In Abbildung 20 erkennt man, dass $\langle N \rangle (W, j)$ eine in j stark fallende Funktion ist. Wir haben dazu in Abbildung 19 die Zerlegung des gesamten Pionisationsquerschnitts in seine partiellen Anteile $\sigma^P(W, j)$ vorgenommen. Aus beiden Darstellungen geht hervor, dass sich die beobachtete mittlere Teilchenzahl bei der betreffenden Energie erst nach gewichteter Mittelung über j einstellt. Da im Gegensatz

zum Energie-Impuls-Vierervektor P_μ der Drehimpuls j im allgemeinen vom einlaufenden System her nicht festgelegt ist, verwischen sich jedoch solche Effekte. Jedenfalls sollte die mittlere Teilchenzahl bei Vernichtungsreaktionen zur Schwelle hin etwas angehoben sein, da dort ja der Gesamtdrehimpuls j auf 0 oder 1 festgelegt ist. Das zeigt sich deutlich in dem Verlauf der mittleren Teilchenzahl als Funktion der Energie in Abbildung 11. Auch die allerdings mit grossen Fehlern behafteten Messwerte lassen ein solches Verhalten erkennen. Während für höhere W ein Anwachsen der mittleren erzeugten Teilchenzahl $\bar{N} \sim W^{1/2}$ erwartet wird (5.26), deutet sich in den Messwerten in der Nähe der Schwelle eher ein stärker als linearer Anstieg von \bar{N} mit W an.

Deutlich erkennbar ist der Einfluss der Drehimpulserhaltung aber im Energieverhalten asymptotischer Querschnitte, die nach (5.17) mit W^{-4a} unabhängig von der Anzahl der Mesonen verschwinden. Daher wird für grosse Energien W jedes Verzweigungsverhältnis energieunabhängig, was mit den Experimenten verglichen werden kann. Wir erwähnten schon, dass dieses Ergebnis dem des üblichen SM widerspricht. Die numerischen Ergebnisse der Quotienten $\sigma_N(W)/\sigma_{N'}(W)$, deren Energieverlauf wir für die wichtigsten Beispiele in den Abbildungen 12 bis 14 angeben, zeigen, dass zumindest für nicht zu grosse verglichene N die Verzweigungsverhältnisse auch schon bei den bislang erreichbaren Energien wenig variieren. In den Abbildungen 22 und 23 haben wir unsere Ergebnisse den Aussagen des gewöhnlichen SM (kovariante Form mit Lorentz-Kontraktion⁵⁾) gegenübergestellt. Man stellt darin eine stärkere Energieabhängigkeit - wir erwarten einen Energieabfall mit $W^{2(N-N')}$ nach 7) - der Kurven aus dem üblichen SM (Kurve A) fest. Da aber die Messfehler der Quotienten gross sind, ist mit den vorliegenden Experimenten noch keine

sichere Entscheidung zwischen beiden Modellen möglich.

Sollten Experimente bei höheren Energien der Voraussage konstanter Verzweigungsverhältnisse widersprechen, so kann man daraus im Rahmen unseres Modells Konsequenzen für die "Feuerballanregungsfunktion" H ziehen. Wie wir in Abschnitt 5 ausgeführt haben, könnte eine solche Energieabhängigkeit und ein stärkerer Abfall asymptotischer Querschnitte durch eine mit der Energie schärfer werdende Stossparameter einschränkung für die Feuerballbildung erklärt werden.

Wir haben noch den Einfluss der Resonanzproduktion auf die Güte der Übereinstimmung mit den Daten studiert und sahen, dass ohne ϱ -Produktion eine ungünstigere Beschreibung der speziellen Querschnitte (ohne aufsummierte π^0 -Teilchen) resultiert. Weiterhin ergab sich ein schwächerer Anstieg der mittleren geladenen Teilchenzahl mit der Energie. Ersteres ist eine unmittelbare Konsequenz der Ladungsanalyse, während letzteres sich zwanglos aus der relativ grossen Masse der ϱ -Mesonen erklären lässt. Von den drei Ladungszuständen der ϱ -Teilchen führen zwei bekanntlich zu Zerfällen mit ungeladenen Mesonen. Wir erwarten daher, dass die "Prong-Querschnitte" durch Berücksichtigung der Resonanzen zu Ungunsten der speziellen Querschnitte erhöht werden, wie sich das auch im einzelnen aus der in Abschnitt 4 erörterten Ladungsanalyse ergibt. Um bessere Übereinstimmung zu erreichen, scheint man noch weitere Mesonenresonanzen einbeziehen zu müssen.

Wir geben in der folgenden Tabelle einen Vergleich der experimentell abgeschätzten bzw. gemessenen ϱ -Produktionsquerschnitte mit unseren Ergebnissen an.

Tabelle der Resonanzproduktion bei 5.7 GeV/c

		Th.	Exp.
ϱ^0 -Beitrag in	$2\pi^+ 2\pi^- 1\pi^0$	20%	$26 \pm 5\%$
ϱ^\pm -Beitrag in	$2\pi^+ 2\pi^- 1\pi^0$	26%	$45 \pm 7\%$
ϱ^0 -Beitrag in	$3\pi^+ 3\pi^-$	40%	90%
ϱ^0 -Beitrag in	$3\pi^+ 3\pi^- 1\pi^0$	43%	34%
ϱ^\pm -Beitrag in	$3\pi^+ 3\pi^- 1\pi^0$	35%	24%
ϱ^0 -Beitrag in	$2\pi^+ 2\pi^- m \geq 2\pi^0$	18%	13%
ϱ^0 -Beitrag in	$3\pi^+ 3\pi^- m \geq 2\pi^0$	39%	20%

Die schlechte Übereinstimmung in dem Kanal $3\pi^+ 3\pi^-$ sehen wir im Zusammenhang mit der sehr ungünstigen Reproduktion des zugehörigen Querschnitts in Abbildung 9. In Übereinstimmung mit Messungen der Resonanzproduktion bei niedrigeren Energien stellen wir fest, dass die ϱ^0 -Produktion in diesem Kanal nicht gut mit unserem Modell wiedergegeben werden kann. Ein Grund dafür könnte unser statistischer Ansatz für die Erzeugung der ϱ sein.

Abschliessend stellen wir fest, dass mit unserem phänomenologischen Ansatz im Zusammenhang mit den benutzten Näherungsverfahren für die Phasenräume die Experimente im wesentlichen richtig beschrieben werden. Zumindest das Energieverhalten der einzelnen gemessenen Querschnitte wird nach Ladungsanalyse stets gut reproduziert.

Eine vordringliche Aufgabe scheint uns nun die Fortsetzung unseres Modells zur Berücksichtigung der einleitend diskutierten Effekte bei Nichtvernichtungsreaktionen (leading-particles, Energieaufteilung unter den Sekundärteilchen) zu sein. Das SM mit Drehimpulserhaltung wird dazu ein geeigneter Ausgangspunkt sein, da wir eine natürliche Beschreibung der Zentralität eines inelastischen Prozesses haben und weil später in einem erweiterten Modell eine Verknüpfung der inelastischen Kanäle über die Partialwellen-Unitaritätsrelation mit der elastischen Diffraktionsstreuung möglich sein wird.

Herrn Professor Dr. H.Joos gilt mein aufrichtiger Dank für den Vorschlag zu dieser Arbeit. Ich danke Herrn Dr. H.Satz herzlich für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen. Weiterhin bin ich dem Rechenzentrum vom DESY für die Benutzung der IBM 7044 bzw. 360 zu Dank verpflichtet.

Anhang A

Wir stellen hier die für unsere numerischen Rechnungen benutzten Ausgangsformeln für die Phasenräume zusammen. Dabei bezeichnen wir mit N_ξ die Besetzungszahlen der Sorten ξ (von Teilchen der Masse m_ξ mit $N = \sum N_\xi$). W, J, R sind invariante Energie, Gesamtdrehimpuls und Radius, während $\gamma = W/2M$ der Kontraktionsparameter ($M = \text{Protonmasse}$) ist. Mit den Kopplungskonstanten G_ξ gilt dann

$$\Omega_{N_\xi}(W, J) = \text{const} \cdot (2J+1) e^{\alpha W} \prod_\xi \left\{ \frac{G_\xi}{(2\pi)^3} \varphi_\xi(\alpha) \right\}^{N_\xi} \frac{1}{N_\xi!} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{3}{\alpha} W + \sum_\xi N_\xi \left\{ m_\xi^2 + \frac{3}{\alpha^2} - \left[\frac{\varphi'_\xi(m_\xi \alpha)}{\varphi_\xi(m_\xi \alpha)} \right]^2 \right\} \right)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{3}{\alpha} W + \sum_\xi N_\xi \left\{ m_\xi^2 + \frac{3}{\alpha^2} \right\} \right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{N}{\alpha^2} + \frac{W}{\alpha} \right)^{-3}$$

$$\cdot \exp \left\{ - (3 + 1/2)^2 / \left(\left[\frac{N}{\alpha^2} + \frac{W}{\alpha} \right] \cdot [1 + 1/\gamma^2] R^2 \right) \right\}$$

mit

$$\varphi_\xi(\alpha) = 4\pi^{5/2} \frac{(R m_\xi)^3}{\gamma} \frac{1}{m_\xi \alpha} \left\{ \frac{2 K_1(m_\xi \alpha)}{m_\xi \alpha} + K_0(m_\xi \alpha) \right\}$$

$$\text{const} = \sqrt{32} \left[\gamma^3 / (1 + \gamma^2) R^6 \right] (2\pi)^{-4}$$

Darin ist α die Lösung der CHGL

$$-W + \sum_\xi N_\xi F_\xi(\alpha) = 0$$

$$F_\xi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left\{ 3 + \frac{\alpha^2 m_\xi^2}{2 + \alpha m_\xi Q(\alpha m_\xi)} \right\}$$

$Q(x) = K_0(x)/K_1(x)$ mit den Hankelfunktionen K_0 und K_1 . Deren Rekursionsformeln erlauben zur Lösung der CHGL ein Iterationsverfahren (Newton), da $Q'(x) = -(1 - Q^2 - Q/x)$ sich wieder mit Q ausdrücken lässt. Wir benutzen ferner den Zweiteilchenphasenraum

$$\Omega_2(W, J) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{4\pi R}{K W^2} e^{- (3 + 1/2)^2 / 2K^2 R^2} \quad \text{für } \gamma = 1$$

Anhang B

Wir geben hier den Zweiteilchenphasenraum mit Richtungsfestlegung der einlaufenden Teilchen an, den wir zur Konstruktion unserer H-Funktion benutzten. Ausgehend von (2.40) erhalten wir nach Ausführung einiger Integrationen

$$\Omega_2(W, \beta) = (2\beta+1) \left(\frac{2}{W}\right)^3 \int d^3\rho \delta(\rho_1) \delta(\rho_2) \int d^3q e^{-\frac{2}{R^2}(\gamma^2 q_3^2 + q_1^2 + q_2^2)} \\ \times \delta(2\rho_0 - W) \int d\mu(\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}) P_3(\cos\hat{\beta}) e^{2i\vec{q} \cdot (R\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\vec{\rho} - \vec{\rho})}$$

Die $d^3\rho d^3q$ -Integrationen sind elementar ausführbar

$$\Omega_2(W, \beta) = \text{const} \int d\mu(\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}) P_3(\cos\hat{\beta}) e^{-\frac{1}{2}K^2R^2 \vec{e} \cdot \mathcal{U} \vec{e}}$$

$$\text{const} = (2\beta+1) \left(\frac{2}{W}\right)^3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} R^3 / \gamma \quad ; \quad \vec{e} = (0, 0, 1)$$

mit

$$\mathcal{U} = R^{-1} \Gamma R + \Gamma - R^{-1} \Gamma - \Gamma R$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\gamma^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad R = D_3(\hat{\alpha}) D_1(\hat{\beta}) D_3(\hat{\gamma})$$

Wegen $[D_{\hat{\alpha}}, \Gamma] = [D_{\hat{\gamma}}, \Gamma] = 0$ ist sofort über $\hat{\gamma}$ zu integrieren.

Man erhält dann nach Ausführung einiger Winkelintegrationen

$$\Omega_2(W, \beta) = (2\pi)^2 \text{const} \int_0^\pi d\hat{\beta} \sin\hat{\beta} P_3(\cos\hat{\beta}) e^{-\frac{1}{2}K^2R^2 \left(\sin^2\hat{\beta} + \frac{\cos^2\hat{\beta}}{\gamma^2} - \frac{2\cos\hat{\beta}}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right)}$$

Im Grenzfall $\gamma=1$ (ohne Kontraktion) folgt dann

$$\int_{-1}^1 dz e^{az} P_j(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} I_{j+1/2}(a)$$

$$\Omega_2(W, \beta) = \text{const} (2\pi)^{5/2} \frac{e^{-K^2R^2}}{KR} I_{3+1/2}(K^2R^2)$$

Man leitet nun für grössere KR die Näherung her

$$\Omega_2(W, \beta) \cong \text{const} (2\pi)^2 \int_0^\infty t dt J_0\left(\left[\beta + \frac{1}{2}\right]t\right) e^{-\frac{1}{2}K^2R^2 t^2} \Rightarrow \\ \cong \text{const} (2\pi)^2 \frac{1}{K^2R^2} e^{-(\beta + 1/2)^2 / 2K^2R^2}$$

Im allgemeinen Fall gehen wir zur näherungsweise Bestimmung aus von

$$\Omega_2(W, \beta) = (2\pi)^2 \text{const} \int_{-1}^1 dz P_j(z) e^{-\frac{R^2 M^2}{2}(1-z)^2 - \frac{R^2 W^2}{8}(1-z)(1+z)}$$

Für grosse WR kommt der Hauptbeitrag im Integral von den Stellen $z^2=1$, so dass wir dann den term $(1-z)^2$ im Exponenten vernachlässigen können

$$\Omega_2(W, \beta) \approx (2\pi)^2 \text{const} \int_{-1}^1 dz P_j(z) e^{-\frac{R^2 W^2}{8}(1-z^2)}$$

Es verschwindet also das Integral asymptotisch für gerade J, während sich für ungerade Werte von J dann das Doppelte des Ergebnisses ohne Kontraktion ergibt. Im Drehimpuls-mittel entfällt also der Einfluss der Kontraktion in der J-Abschneidung.

Anhang C

Wir studieren hier den Einfluss der Ununterscheidbarkeit der N Teilchen einer Sorte auf die Zustandssumme eines gebundenen Systems. Wir wählen als Potentialmodell den harmonischen Oszillator, da dann die räumliche Dichteverteilung der stationären Zustände unserer verschmierten Ortsraumabschneidung ähnlich ist. Der Zustand eines Teilchens wird definiert durch drei Quantenzahlen i, j, k (Energie, Drehimpuls, dessen z -Komponente). Dann gelte nach Umnormierung der Energieskala $E = \epsilon i$.

Wir bezeichnen im folgenden die Zustandssumme mit

$$\Omega_N^\pm(E, \vec{J}) = \text{Spur}_{\mathcal{R}_N^\pm} P^{E, \vec{J}}$$

Darin ist \mathcal{R}_N^\pm der Zustandsraum des N-Teilchensystems von korrekt symmetrisierten (+) bzw. antisymmetrisierten (-) Wellenfunktionen, während $P^{E, \vec{J}}$ einen Projektor auf die Gesamtenergie und auf den Gesamtdrehimpuls bezeichnet. Es ist nun zweckmässig, das Basissystem durch einen vollständigen Satz von Besetzungszahlen zu charakterisieren. Dazu sei n_{ijk} die Anzahl von Teilchen in dem Niveau i, j, k . Die Spur über \mathcal{R}_N^\pm lässt sich nun umschreiben auf eine solche über die Basisvektoren $|\{n_{ijk}\}\rangle^\pm$. Wobei im Falle (-) $n_{ijk} \leq 1$ gelten soll.

Wir drücken nun in der Bezeichnungsweise des Abschnitts 3 den Projektor in folgender Weise mit dem Hamilton- (H) und Drehimpulsoperator \vec{J} aus:

$$P^{E, \vec{J}} = \frac{2\vec{J}+1}{2\pi} \int d\mu(\vec{\omega}) \int_{-\pi}^{\pi} dt \chi^{\vec{J}}(\omega) e^{iEt} \cdot e^{iHt + i\vec{\omega}\vec{J}}$$

Dann nimmt unsere Zustandssumme die Form ($\alpha > 0$) an

$$\Omega_N^\pm(E, \vec{J}) = \frac{2\vec{J}+1}{(2\pi)^2} e^{\alpha E} \int d\mu(\vec{\omega}) \chi^{\vec{J}}(\omega) \int_{-\pi}^{\pi} dt e^{i\frac{E}{\epsilon}t} \int_{-\pi}^{\pi} ds e^{iNs} \quad *$$

$$* \sum_{\{n_{ijk}\}}^{\pm} \langle \{n_{ijk}\} | e^{iNs} \cdot e^{\frac{1}{\epsilon} H(\alpha\epsilon + it) + i\omega\vec{J}} | \{n_{ijk}\} \rangle^{\pm}$$

Hier ist $\sum_{\{i,j,k\}}^{\pm} = \prod_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{k=-j}^j \sum_{n_{ijk}=0}^{(\infty)}$

Die Basiszustände sind offenbar Eigenzustände zu H und J_3 mit $E = \sum_{ijk} \epsilon n_{ijk}$; $J_3 = \sum_{ijk} k n_{ijk}$. Daher gilt

$$\Omega_N^{\pm}(E, \vec{J}) = (2J+1) \frac{\epsilon}{4\pi^2} e^{\alpha E} \int d\mu(\vec{\omega}) \chi^{\vec{J}}(\varphi) \int_{-\pi/\epsilon}^{\pi/\epsilon} dt e^{iEt} \int_{-\pi}^{\pi} ds e^{iNs} G^{\pm}$$

$$G^{\pm}(s, t, \varphi; \alpha, \epsilon) = \prod_{\nu,j,k} f_{\nu,j,k} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (1 - e^{-\epsilon(\alpha+it)\nu - i\omega k - is})^{-1} \\ (1 + e^{-\epsilon(\dots)})^{+1} \end{array} \right\}$$

$f_{\nu,j,k} = 1$ falls $\nu \geq j$; $|k| \leq j$; $(-)^{\nu} = (-)^j$ und 0 sonst.

Man zeigt ferner, dass

$$G^{\pm} = e^{\mp} \sum_{\nu,j,k} f_{\nu,j,k} \ln [1 \mp e^{-\epsilon(\alpha+it)\nu - i\omega k - is}]$$

ist. Entwickelt man den ln mit $\ln(1+x) = \sum_{\nu} x^{\nu}/\nu$ ($|x| < 1$), so folgt nach einigen Umformungen

$$G^{\pm} = \sum_{\lambda=0}^N \frac{1}{\lambda!} \left\{ \sum_{\mu=1}^N (\pm)^{\mu+1} \frac{1}{\mu} e^{-is\mu} g_{\mu} \right\}^{\lambda}$$

$$g_{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\epsilon(\alpha+it)\mu\nu} \frac{\sin(\nu+1)\frac{\omega\mu}{2} \sin(\nu+2)\frac{\omega\mu}{2}}{\sin\frac{\omega\mu}{2} \cdot \sin\omega\mu}$$

Bei festen Werten von t, ω, α verhält sich

$$g_{\mu} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\alpha + it)^{\mu}} \right]^3 \frac{1}{\epsilon^3}$$

Man kann dann mit der Multinomialformel die zur Potenz erhobene Klammer $\{ \dots \}^{\lambda}$ entwickeln. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds e^{iNs} G^{\pm} = \frac{1}{N!} g_1^N \{ 1 + O(N^2 \epsilon^3) \}$$

Betrachtet man dieses Ergebnis für kleine Energieabstände, so gilt als Näherung

$$\Omega_N^{\pm}(E, \beta) = \frac{1}{N!} (2\beta + 1) \frac{\epsilon}{2\pi} e^{\alpha E} \int d\mu(\bar{\omega}) \chi^{\beta}(\varphi) * \\ * \int_{-\pi/\epsilon}^{\pi/\epsilon} dt e^{iEt} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\epsilon(\alpha + it)\nu} \frac{\sin(\nu+1)\frac{\omega}{2} \sin(\nu+2)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2} \sin\omega} \right\}^N$$

Wir verweisen nun auf 16), wo dieses Ergebnis erhalten wurde (bis auf den Faktor $1/N!$) als quantenmechanische Zustandssumme des Ausgangssystems für unterscheidbare Teilchen. Wir sehen also, dass im Limes kleiner Energieniveaudifferenzen der Einfluss der BE- und FD-Statistik verschwindet und die sogenannte korrekte Boltzmann Abzählung resultiert. Dieses Ergebnis wird also nicht beeinflusst von der Drehimpulserhaltung.

Literatur

- 1) E. Fermi, Progr. Theor. Phys. (Japan) 1, 510 (1950)
E. Fermi, Phys. Rev. 81, 115 (1951)
- 2) R. Hagedorn, Nuovo Cimento 15, 246 (1960)
R. Hagedorn, Fortschr. d. Phys. 9, 1 (1961)
- 3) P.P. Srivastava, G. Sudarshan, Phys. Rev. 110, 765 (1958)
R. Milburn, Rev. Mod. Phys. 27, 1 (1955)
- 4) F. Cerulus, Nuovo Cimento 22, 958 (1961)
- 5) J. Mc Connell, J. Shapiro, Nuovo Cimento 28, 1272 (1963)
- 6) K. Böckmann et al., Nuovo Cimento 42A, 954 (1966)
Für weitere Literatur siehe
L. Bertocchi und E. Ferrari, High Energy Strong Inter-
actions of Elementary Particles, CERN (1966)
- 7) H. Satz, Über die Statistische Beschreibung hochener-
getischer Vielteilchenreaktionen, DESY (1967)
- 8) G. Cocconi, Phys. Rev. 111, 6 (1958)
A. Gierula, Z. Koba, Fortschr. d. Phys. 11, 4 (1963)
- 9) V.S. Barashenkov et al., Fortschr. d. Phys. 14, 357 (1966)
V.S. Barashenkov et al., Fortschr. d. Phys. 15, 435 (1967)
- 10) Vergl. O. Czyzewski, XIII International Conference on
High Energy Physics, Berkeley 1966, Proceedings
- 11) T. Ericson, Nuovo Cimento 21, 605 (1961)
- 12) H. Satz, G. van Keuk, Nuovo Cimento 50, 272 (1967)
- 13) E.T. Copson: Asymptotic Expansions, Cambridge
University Press 1965

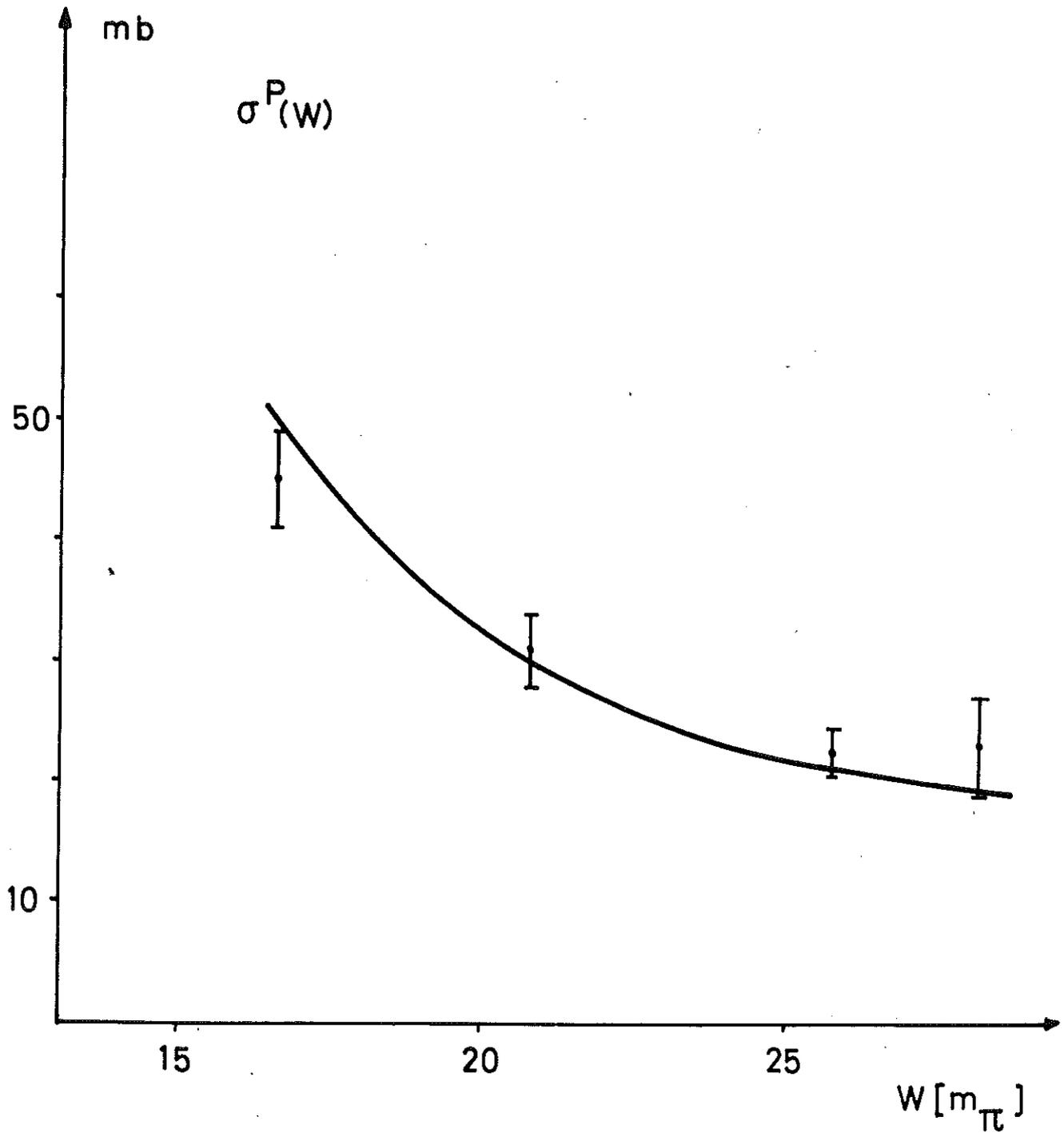
- 14) H. Joos, H. Satz, Nuovo Cimento 34, 619 (1964)
- 15) R. Schrader, Diplomarbeit Hamburg 1964
- 16) G. van Keuk, Diplomarbeit Hamburg 1965
- 17) R.D. Kohaupt, Diplomarbeit Hamburg 1962
- 18) S.S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York 1961
- 19) F. Lurcat, P. Mazur, Nuovo Cimento 31, 140 (1964)
- 20) A.I. Khinchin, Math. Found. of Stat. Mechanics
Dover 1949
- 21) A.R. Edmonds, Drehimp. in der Quantenmechanik
Bibliogr. Inst. Mannheim 1964
- 22) H. Joos, Fortschr. d. Phys. 10, 65 (1962)
- 23) H. Satz, Fortschr. d. Phys. 11, 445 (1963)
- 24) J. Shapiro, Nuovo Cimento Suppl. 18, 41 (1960)
- 25) K. Zalewski, Acta Physica Polon. 28, 207 (1965)
- 26) L. Van Hove, Rev. Mod. Phys. 36, 655 (1964)
L. Van Hove, K. Zalewski, Nuovo Cimento 46 A, 806 (1966)
- 27) F. Cerulus, Nuovo Cimento 14, 827 (1959)
- 28) H. Pilkuhn, Arkiv för Fysik 23, Nr. 25 (1962)
- 29) J.S. Kovacs, Progr. Theor. Phys. 28, 6 (1962)
- 30) G. Balthay et al., Columbia Univ. Prepr. CU 1932-248
G.R. Lynch et al., Phys. Rev. 131, 1276 (1963)
T. Ferbel et al., Phys. Rev. 143, 1096 (1966)
T. Ferbel et al., Nuovo Cimento 38, 12 (1965)
J.A. Danysz et al., Nuovo Cimento 51, 801 (1967)
siehe auch 6)
- 31) J.J. Kokkedee, Nuovo Cimento 43, 919 (1966)

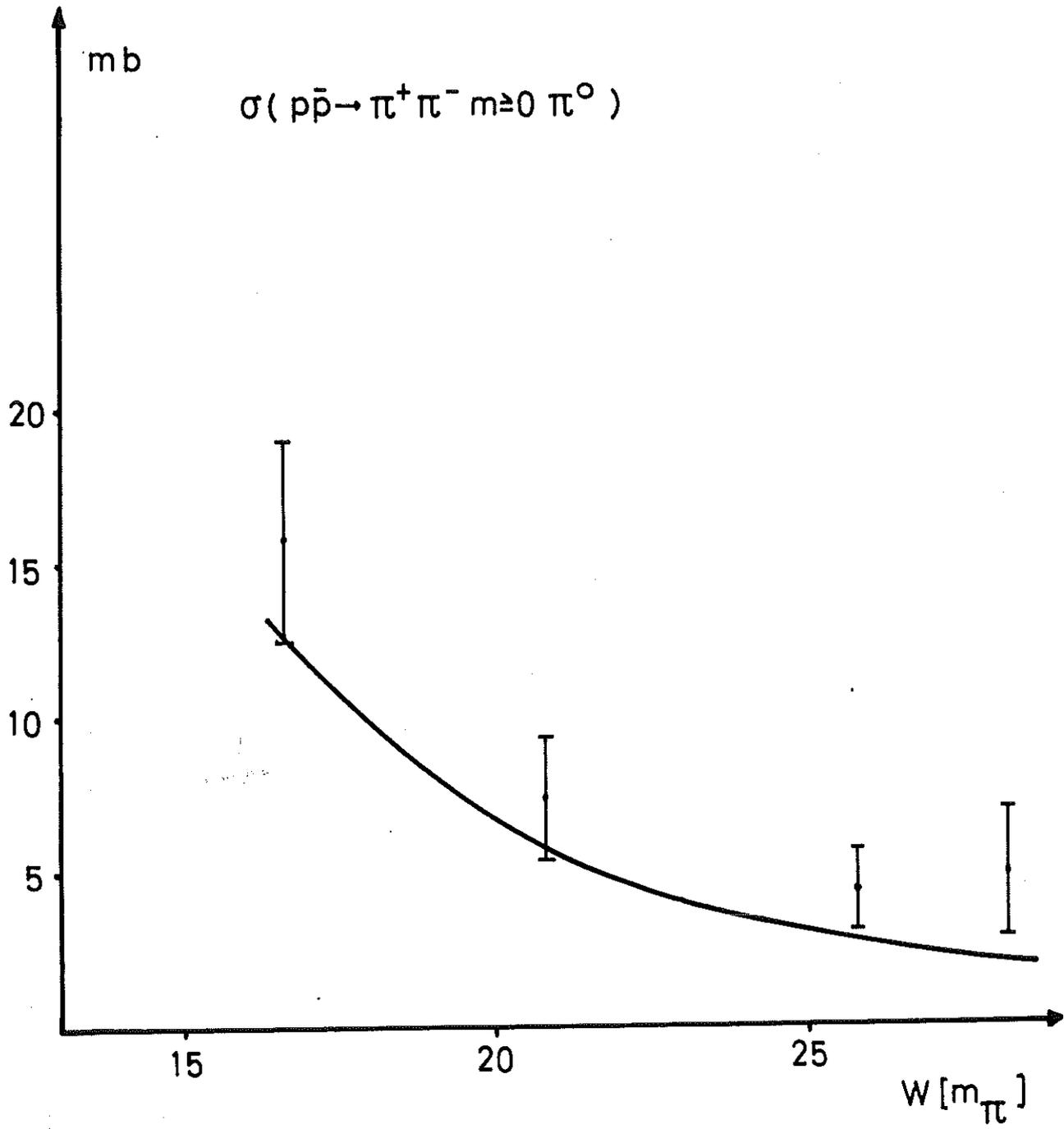
Beschreibung der Abbildungen

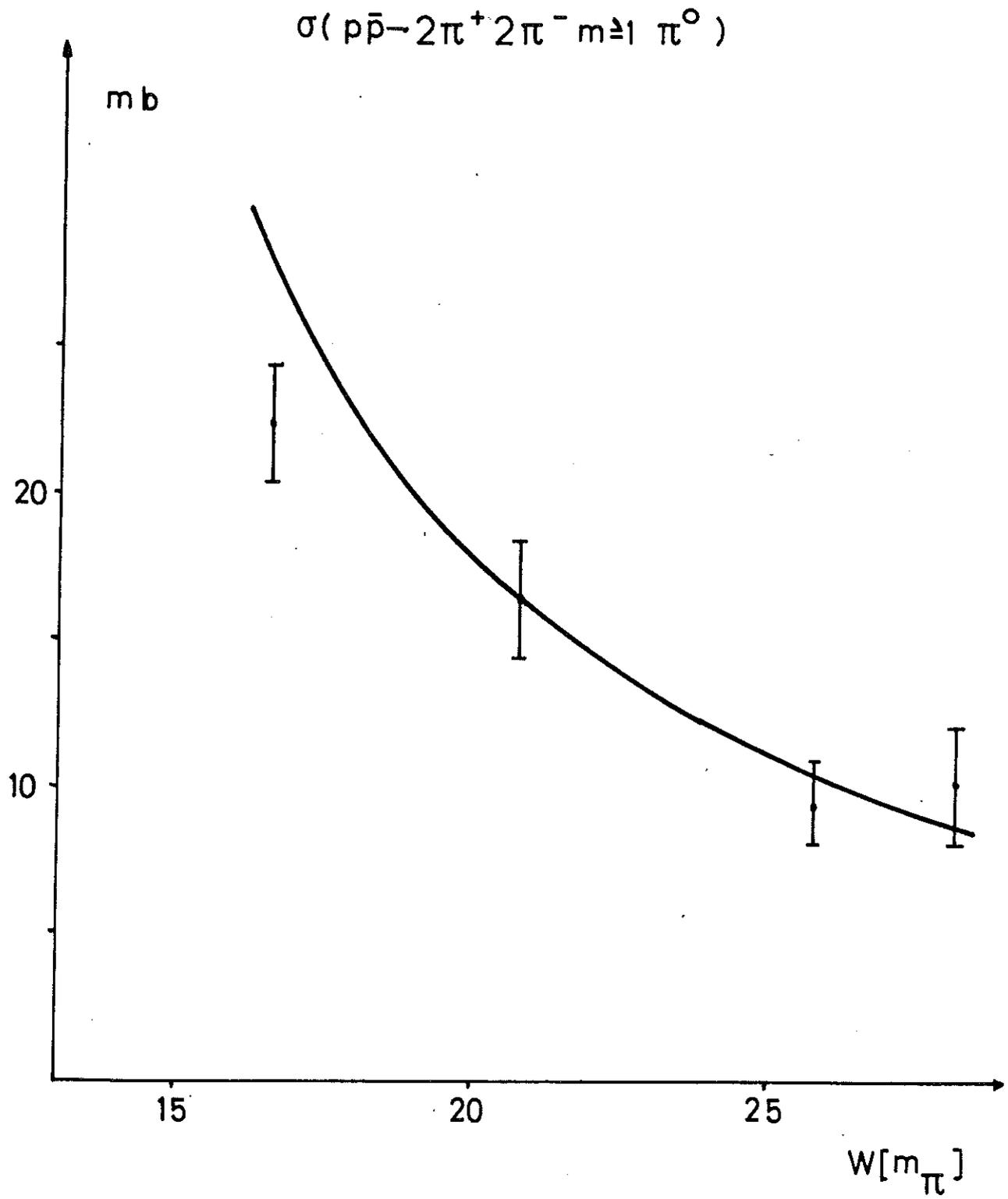
Die folgenden Abbildungen zeigen die numerischen Ergebnisse unseres Modells zu den in Abschnitt 6 festgelegten drei Parametern const , R und G . Alle Wirkungsquerschnitte (in mb) sind über die Winkel integriert und enthalten schon die aus unserem Modell folgenden Resonanzbeiträge. Sie sind gegen die CMS-Energie W in Pionmassen aufgetragen. Die zum Vergleich eingetragenen Messpunkte haben wir 6) und 30) entnommen.

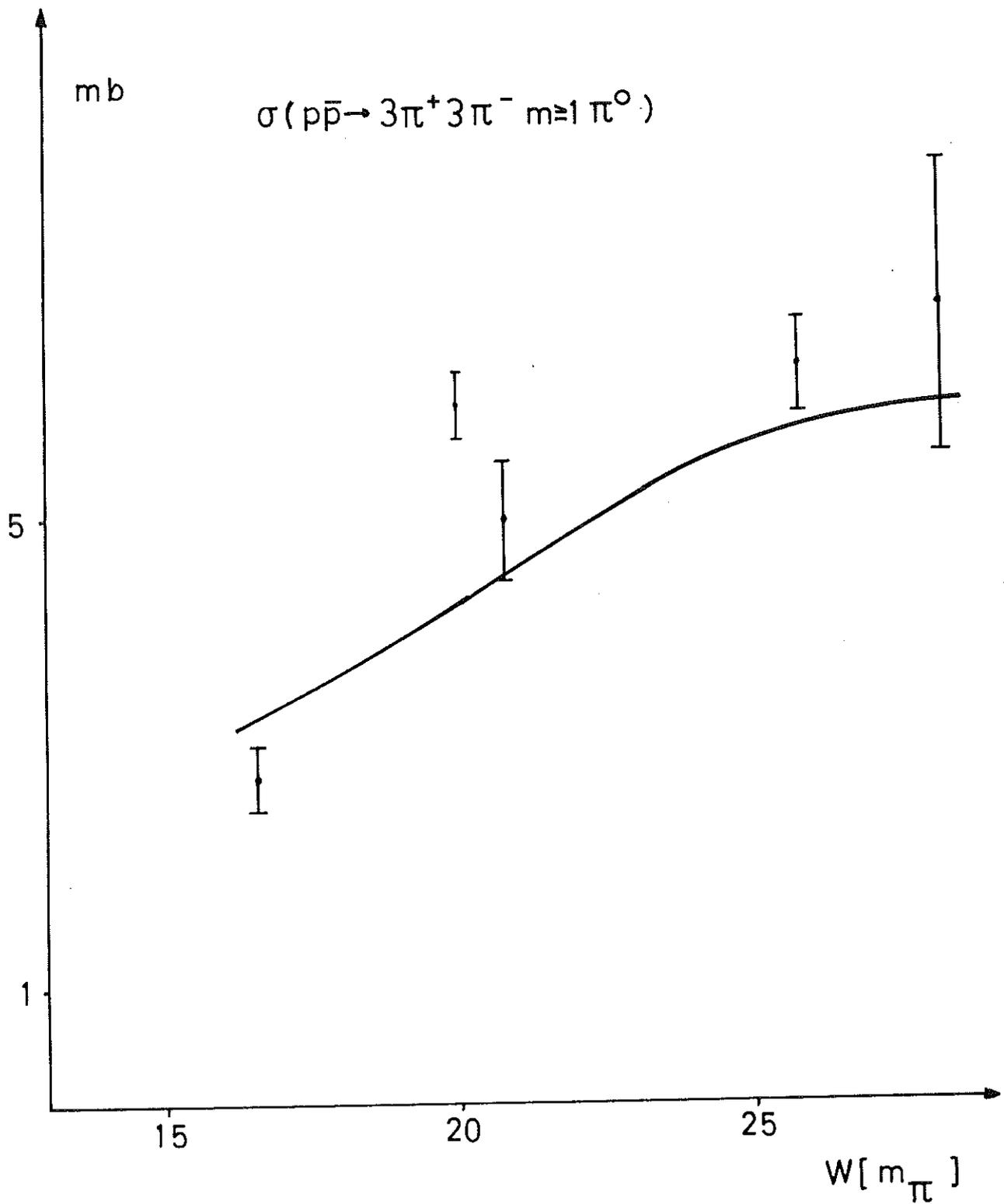
- 1: Dargestellt ist der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $p\bar{p} \rightarrow \text{Pionen}$, $\sigma^P(W)$.
- 2 bis 5: Angegeben sind die Querschnitte $p\bar{p} \rightarrow n\pi^+ n\pi^- m \geq 1 \pi^0$ für $n=1$ bis 4, wie sie sich nach Summation über die ungeladenen π^0 ergeben.
- 6 bis 10: Gezeichnet sind die speziellen Querschnitte bei Vernichtungsreaktionen ohne aufsummierte π^0 .
- 11: Dargestellt ist der Verlauf der mittleren geladenen Mesonenzahl gegen die CMS-Energie von der Schwelle bis $W=29m_\pi$.
- 12 bis 14: Verzweigungsverhältnisse der wichtigsten Kanäle, deren einzelne Querschnitte in den Abb. 6 bis 10 angegeben sind.
- 15: Angegeben ist das prozentuale Verhältnis der Querschnitte $p\bar{p} \rightarrow \text{Pionen}$ mit mind. einer Resonanz (SP) zum gesamten Pionisationsquerschnitt (SP+PP).
- 16: Statistischer Anteil des Querschnitts $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p} + \text{Pionen}$
- 17: Dargestellt sind die partiellen inelastischen Pionisationsquerschnitte zu 3 bzw. 7 ausl. Mesonen als Funktion des Drehimpulses j bei der Energie $25.8m_\pi$.
- 18 : Einfluss einer Abweichung in der Koppl.Konst. G von dem in den übrigen Kurven benutzten Wert 20 auf den Querschnitt $p\bar{p} \rightarrow 3\pi^+ 3\pi^- m \geq 1 \pi^0$.

- 19: Zerlegung des Querschnitts $p\bar{p} \rightarrow$ Pionen in seine Partialquerschnitte definierten Drehimpulses j bei $W=25.8m_{\pi}$. Zum Vergleich ist KR der Wert des klassischen Drehimpulses für einl. Teilchen des Stosspar. $R=0.63m_{\pi}^{-1}$, wie er in allen Kurven als Parameter benutzt wurde.
- 20: Mittlere erzeugte Mesonenzahl in Abhängigkeit vom Drehimpuls j bei $W=25.8$ für die Quantenzahlen $j=0$ bis 30.
- 21: Das Verhalten der Querschnitte in willkürlichen Einheiten zur Produktion von N identischen Teilchen der Masse 1 bei der CMS-Energie W .
- 22: Vergleich der Verzweigungsverhältnisse unseres Modells (B) mit denen des üblichen SM (A). Die eingezeichneten Punkte der Kurve A sind 5) entnommen, die Interpolation erfolgte per Hand.

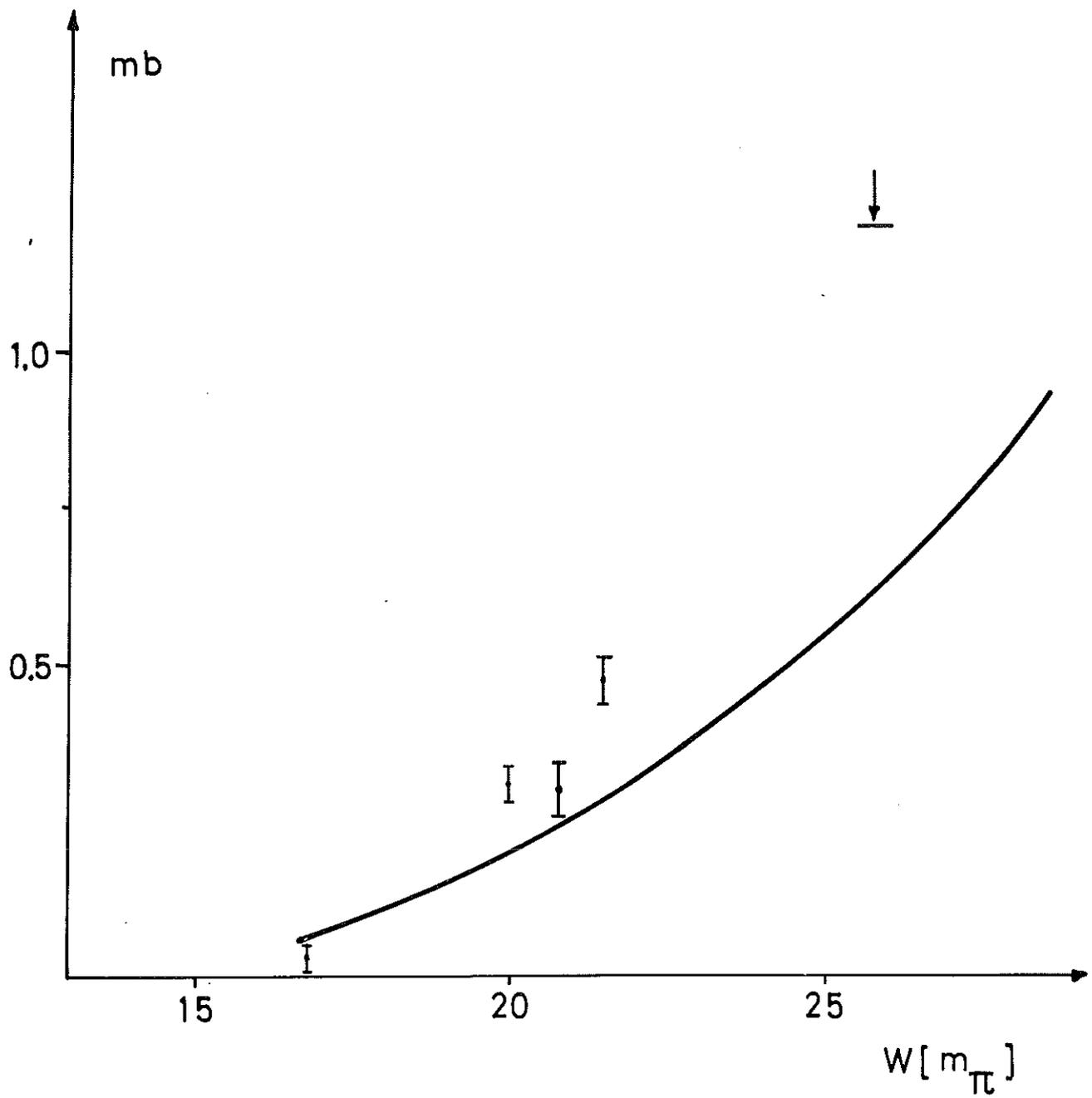


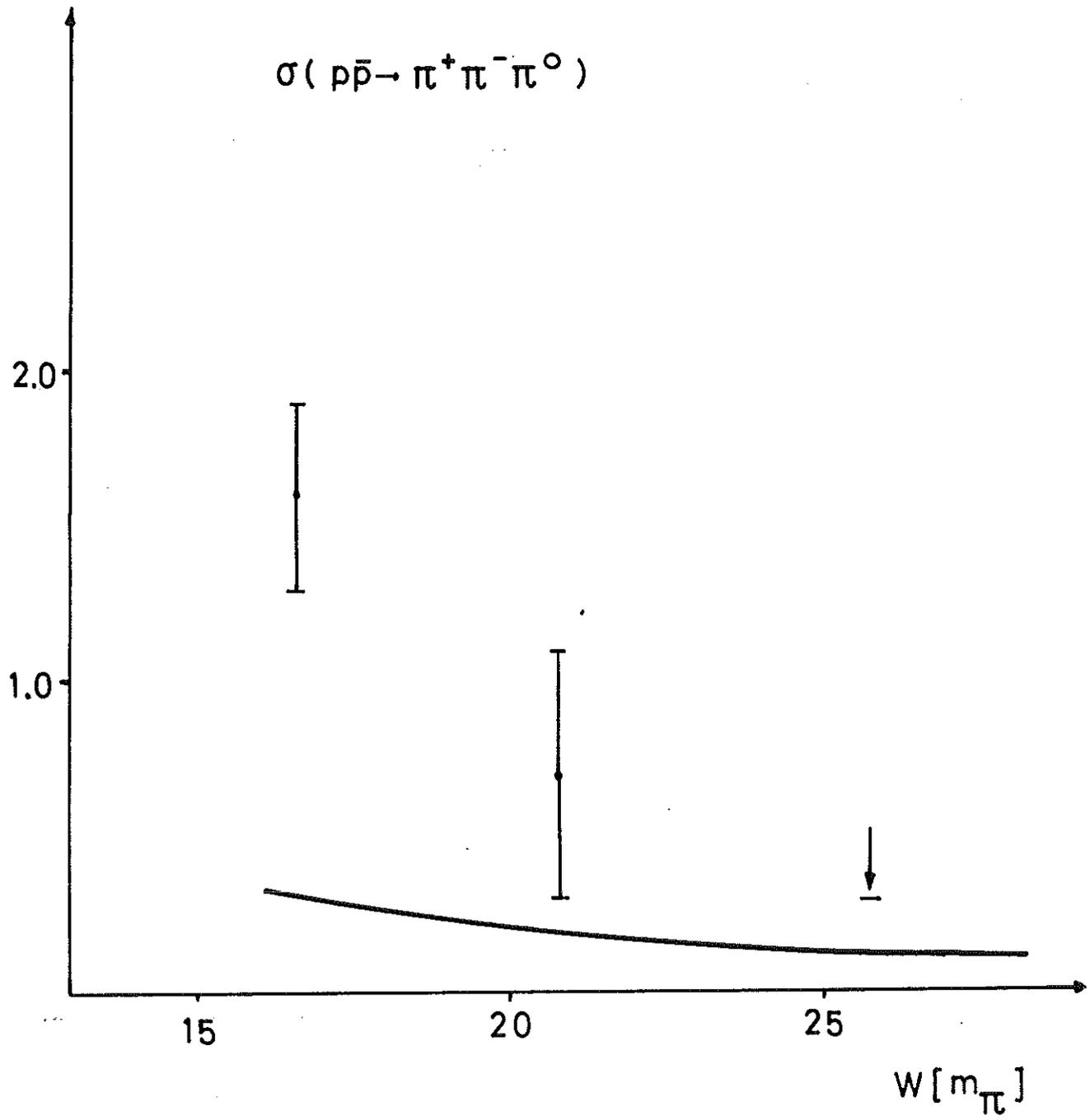


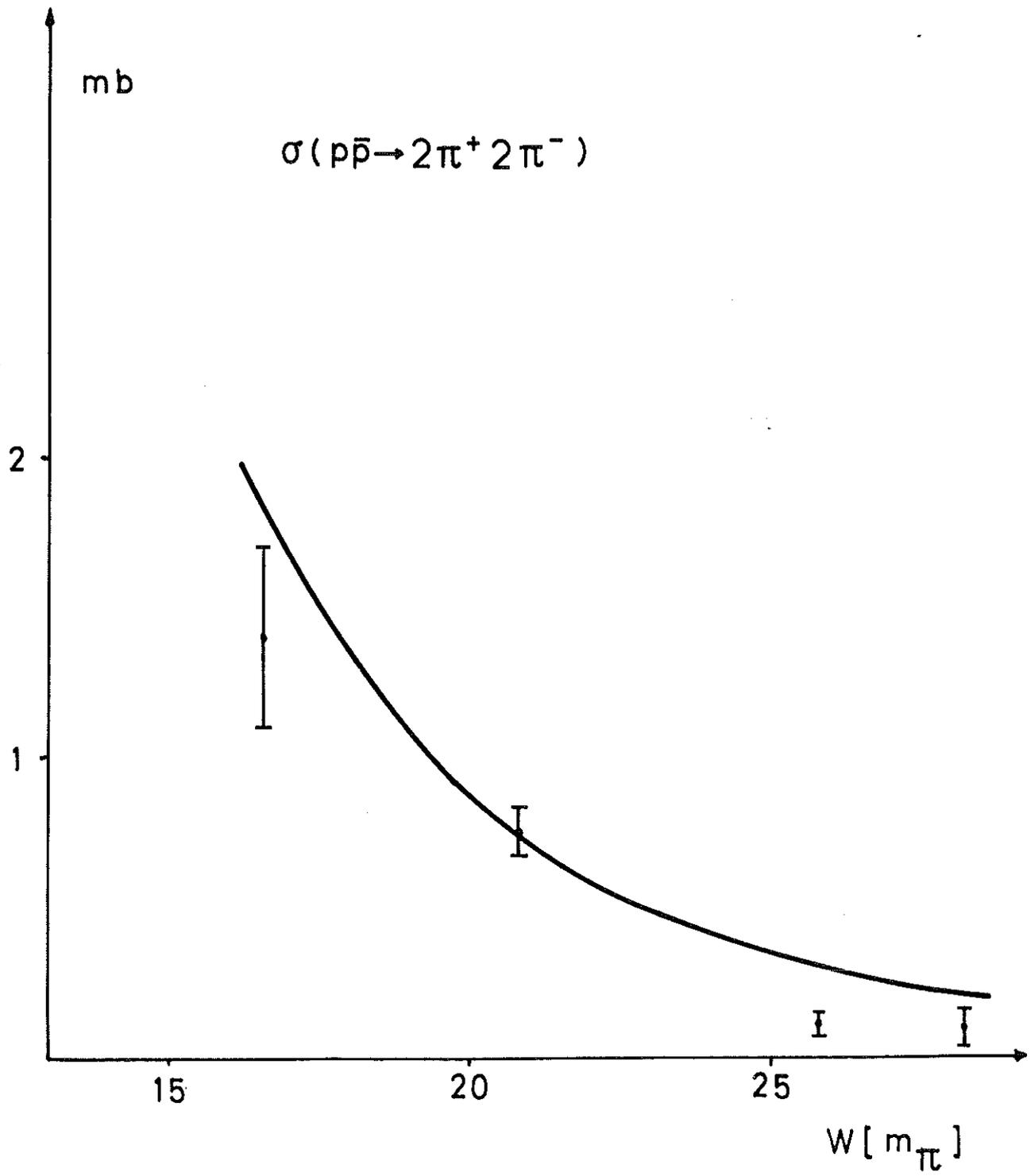


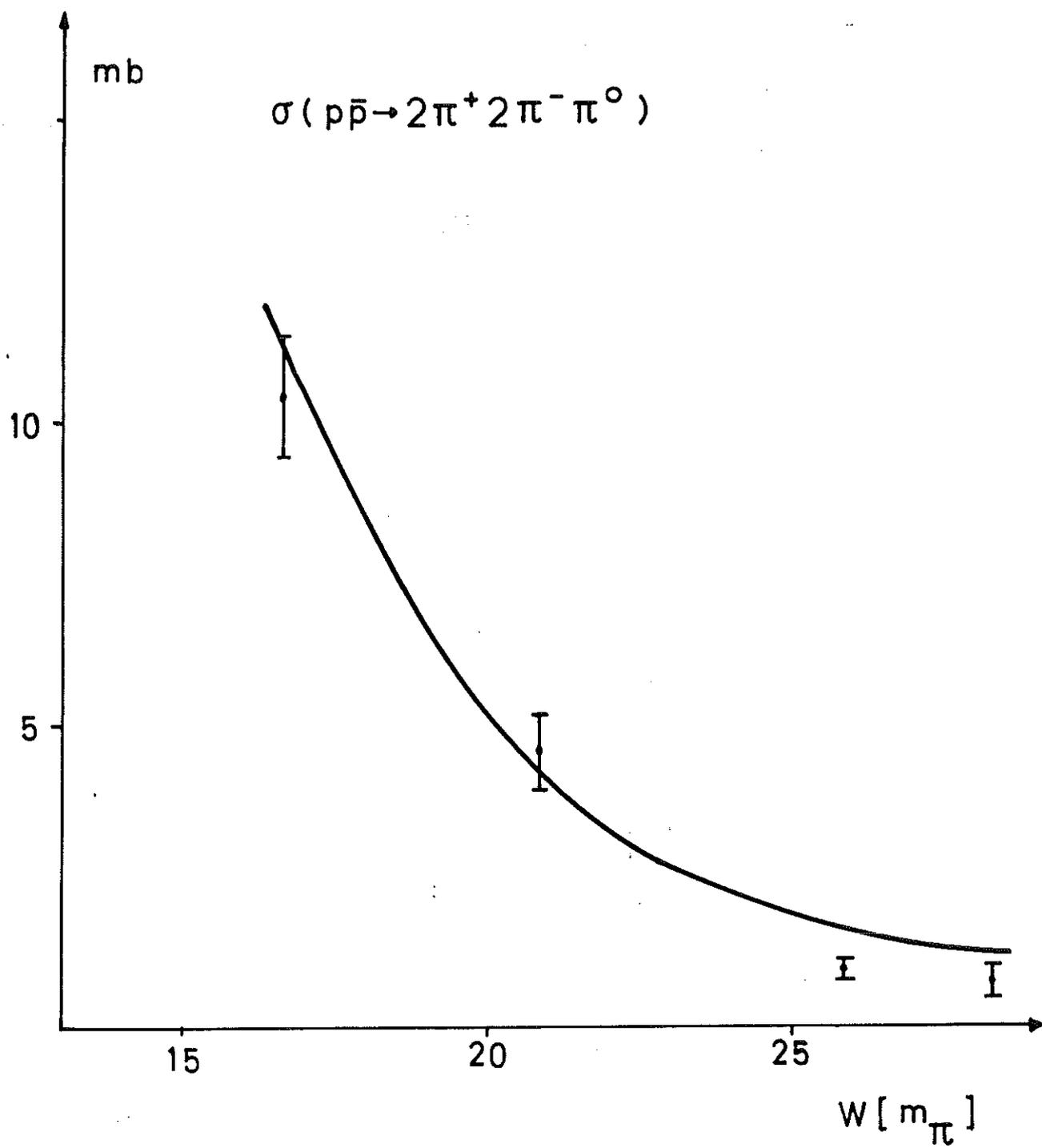


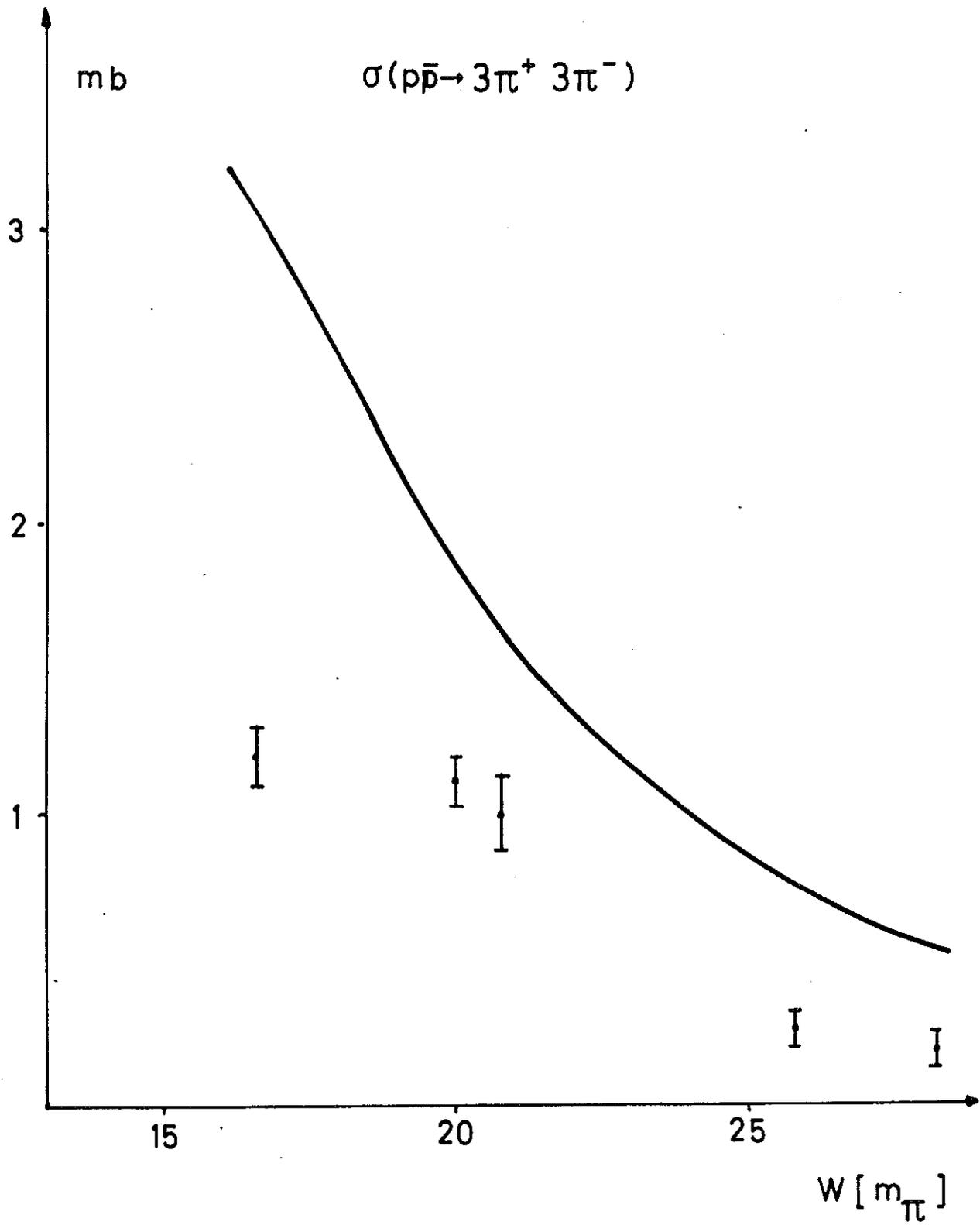
$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow 4\pi^+ 4\pi^- m \geq 0 \pi^0)$$

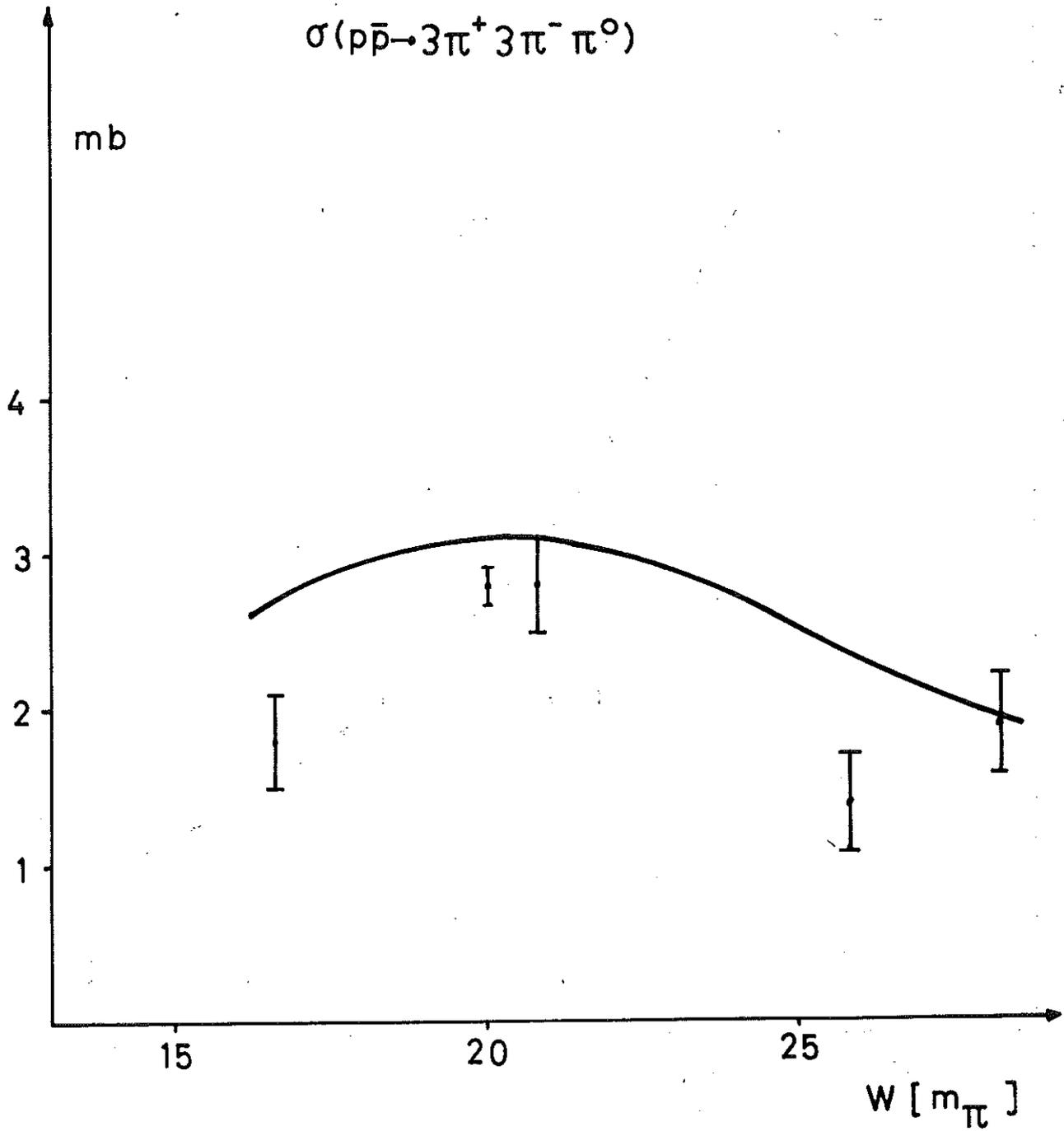












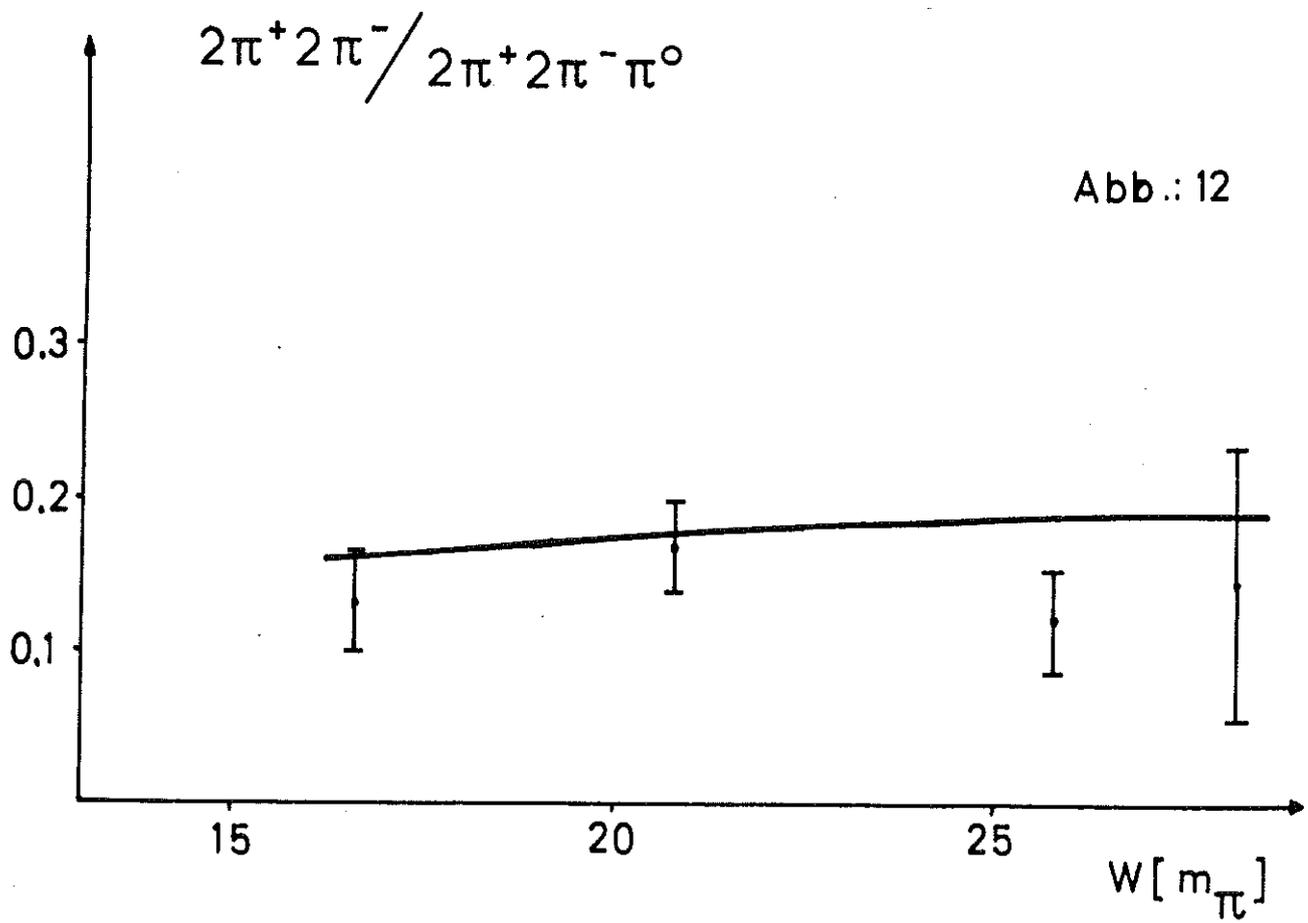
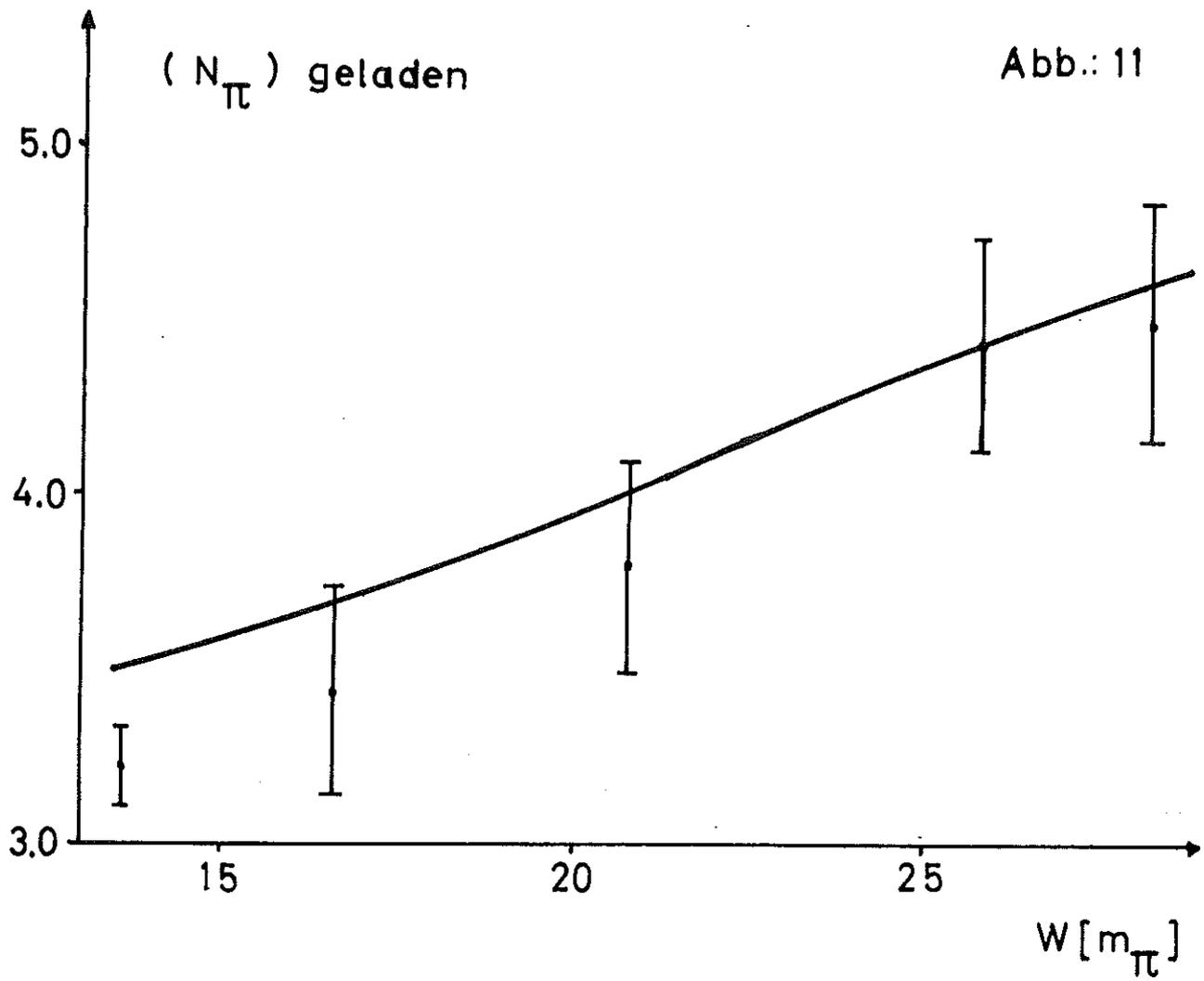


Abb.: 13

$$\frac{2\pi^+ 2\pi^-}{3\pi^+ 3\pi^-}$$

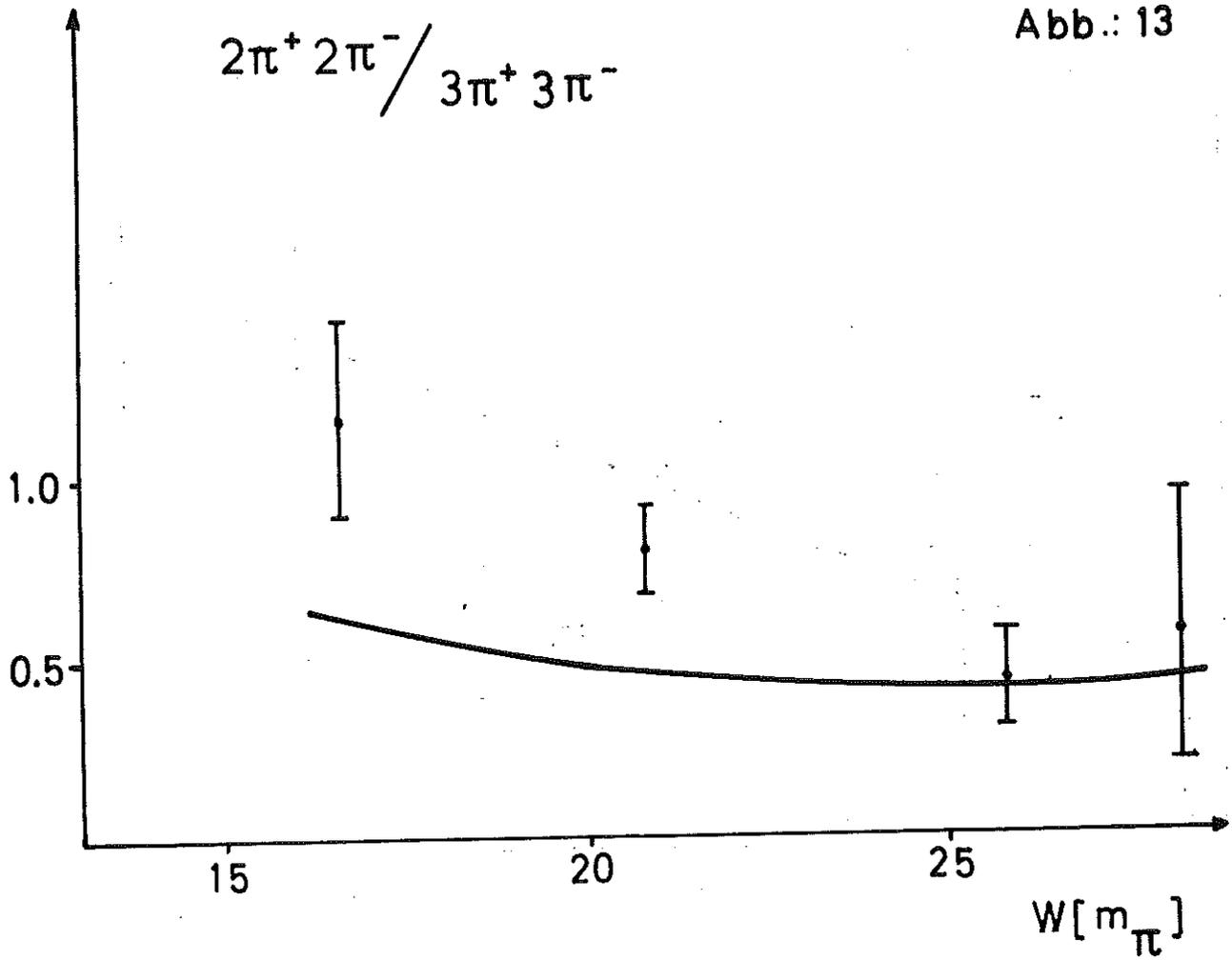


Abb.: 14

$$\frac{2\pi^+ 2\pi^- \pi^0}{3\pi^+ 3\pi^- \pi^0}$$

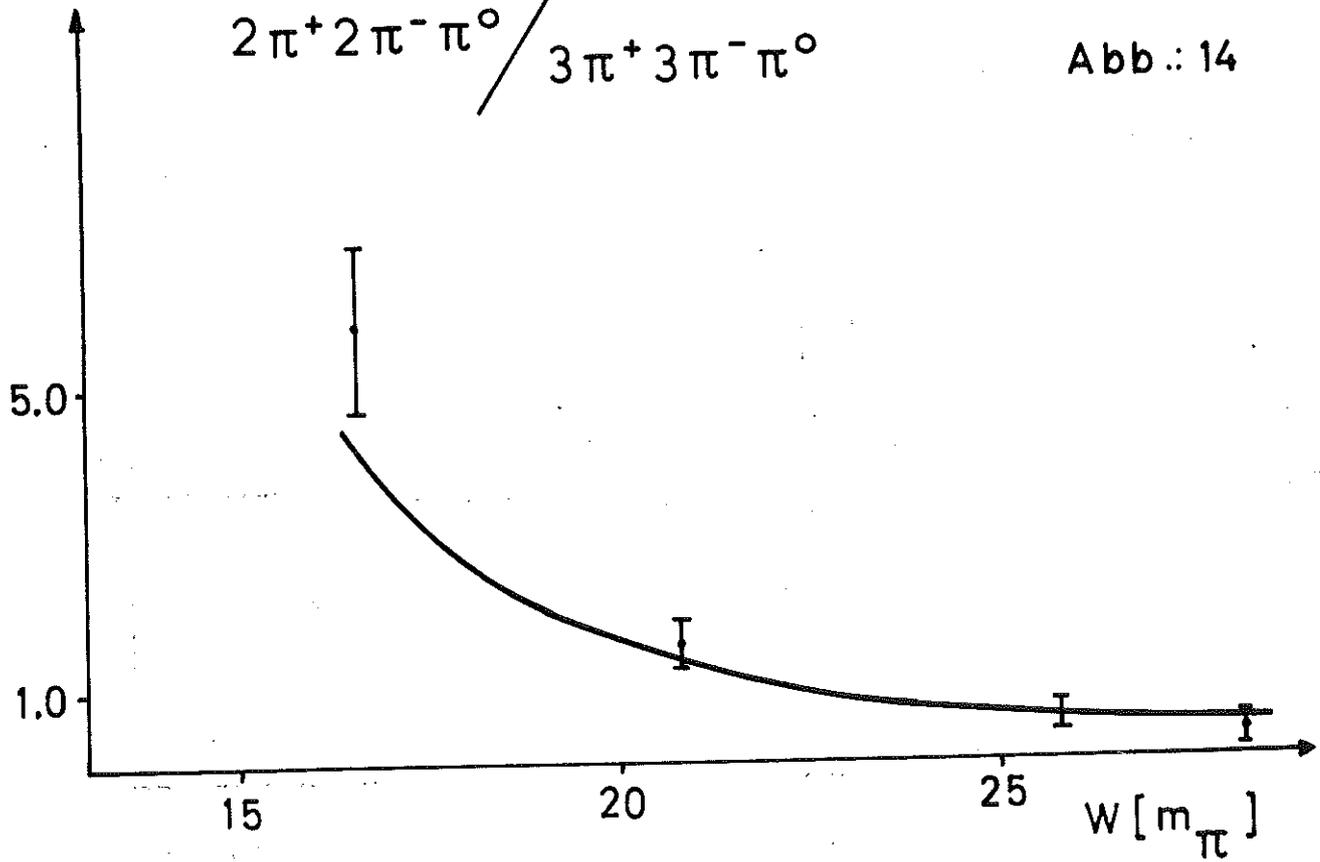


Abb.: 15

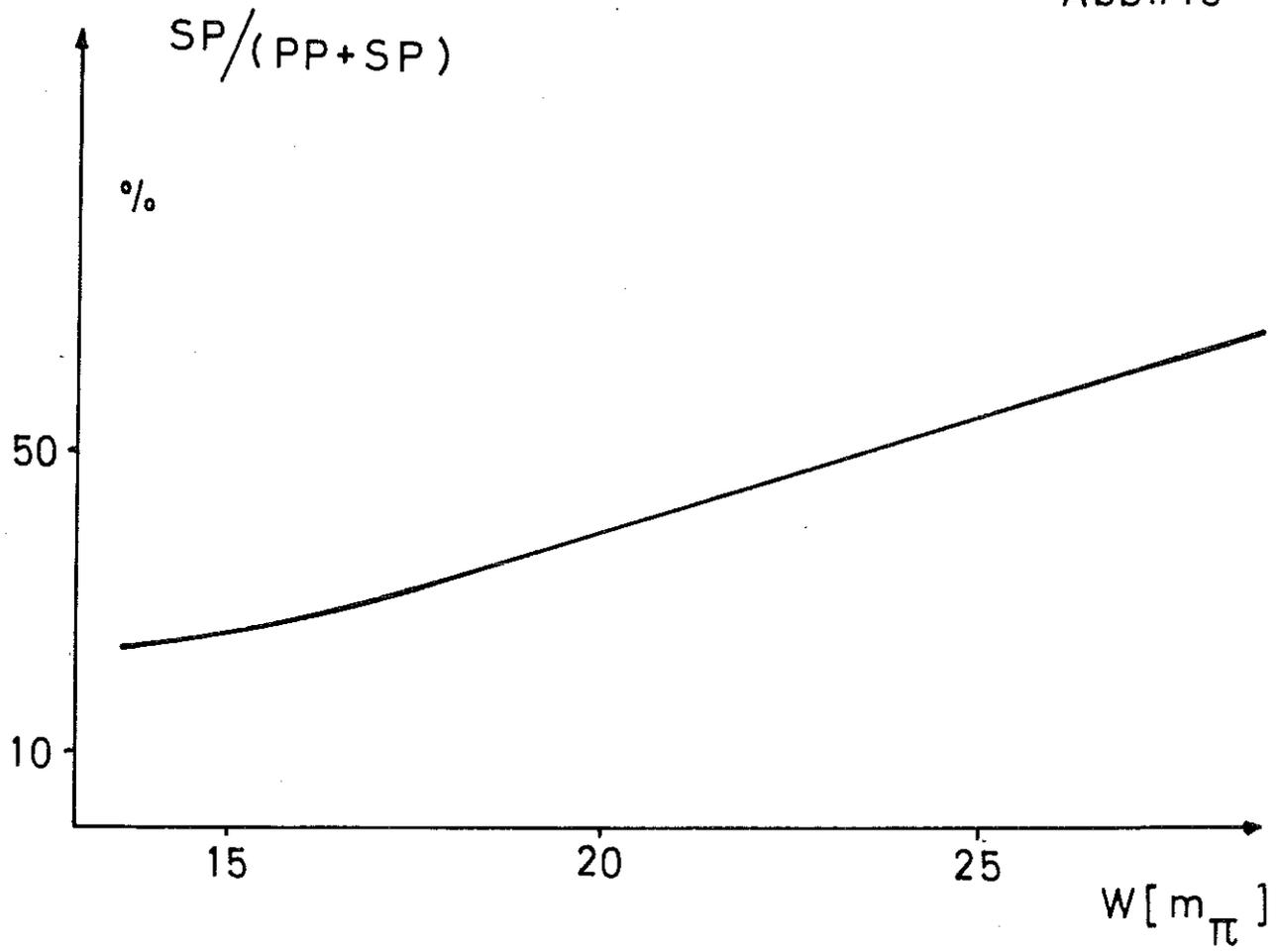
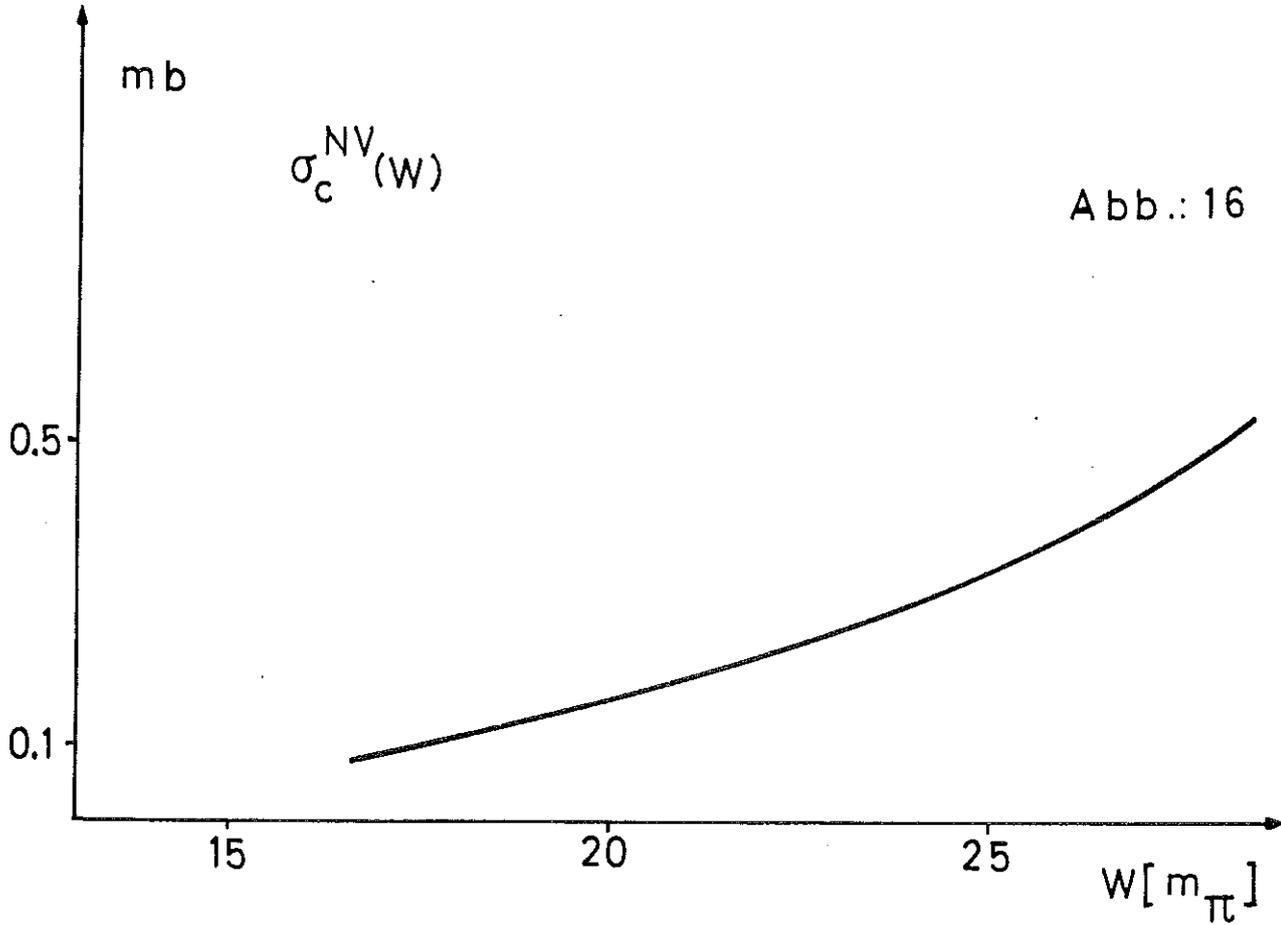


Abb.: 16



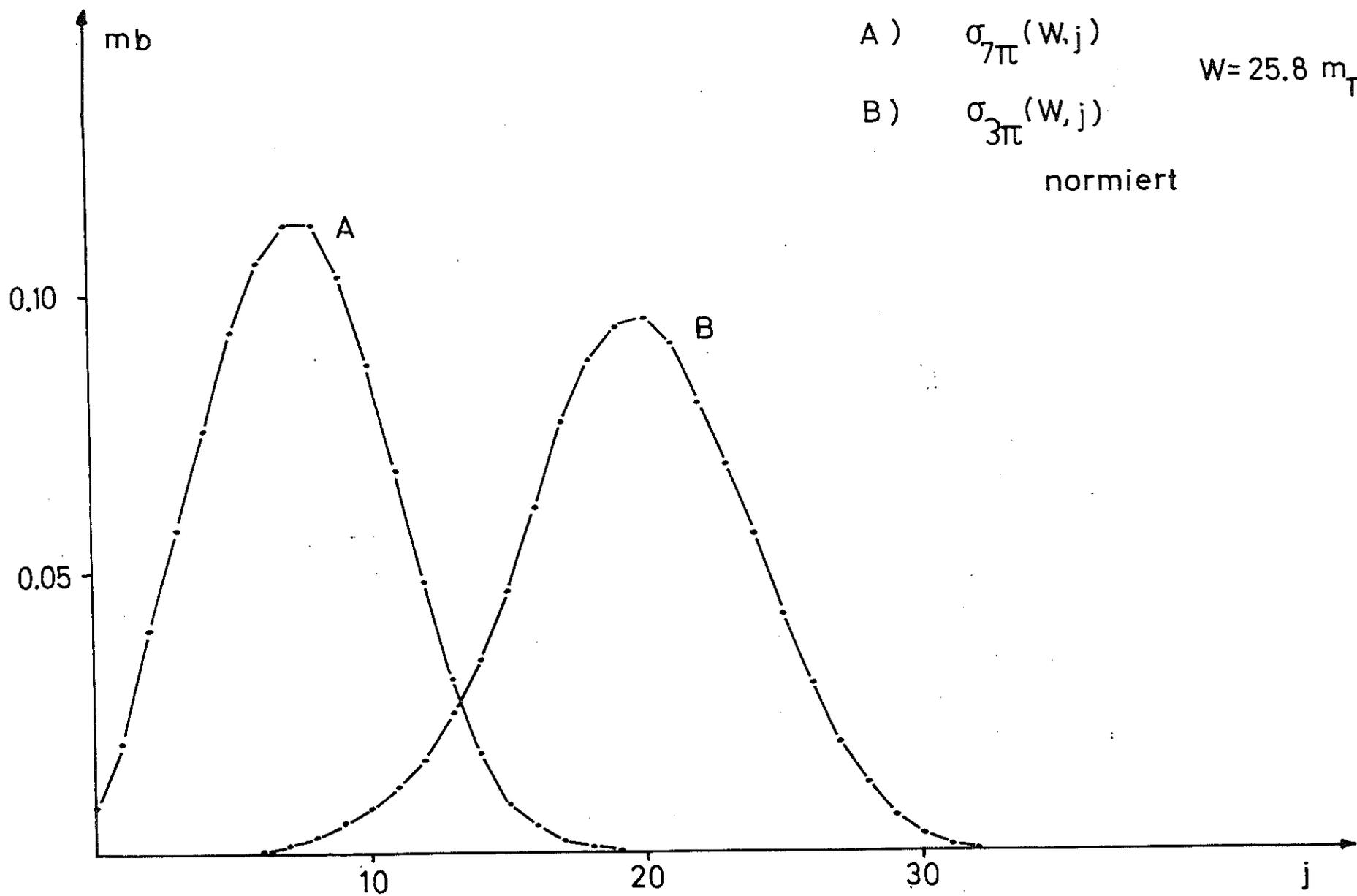


Abb.: 17

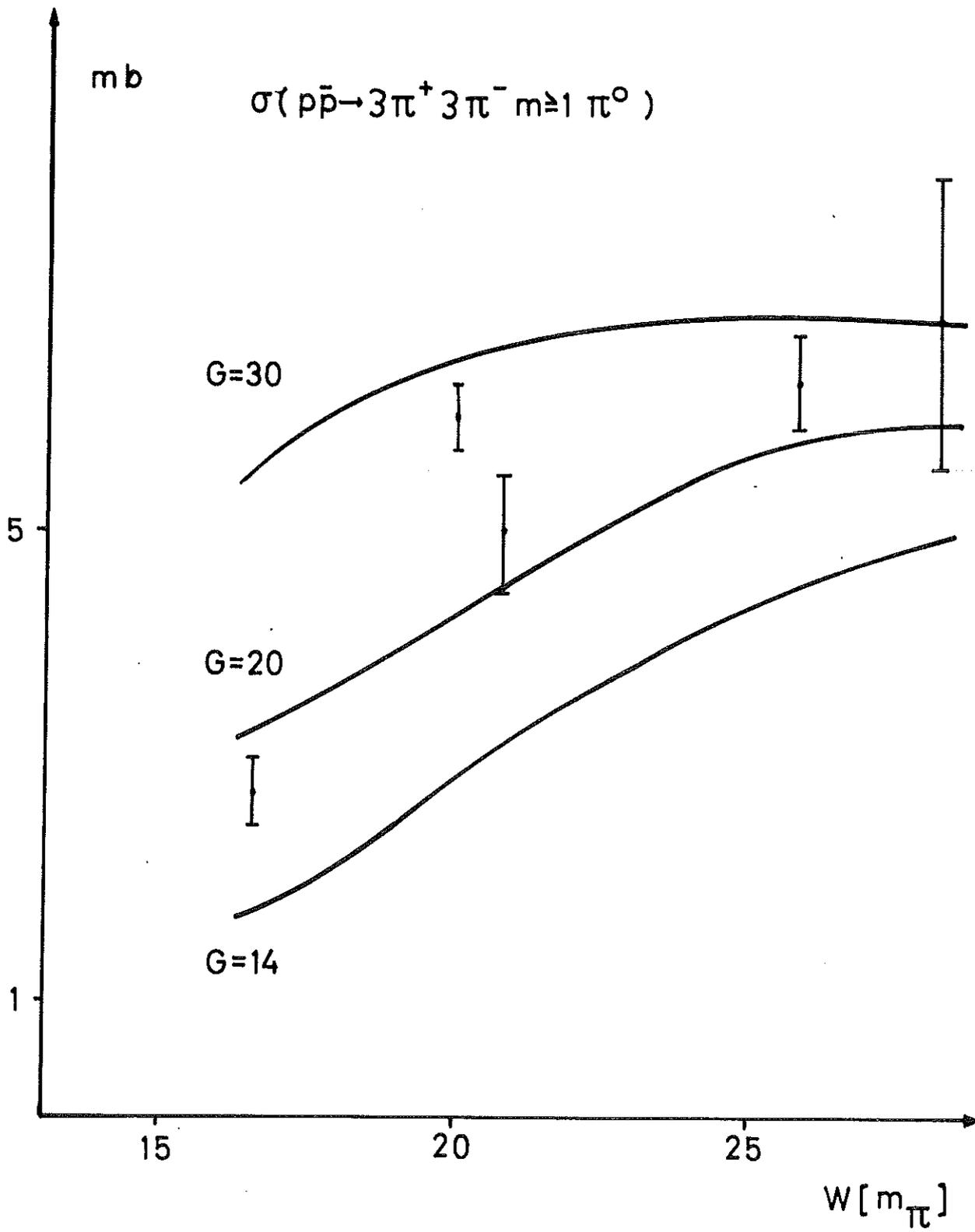
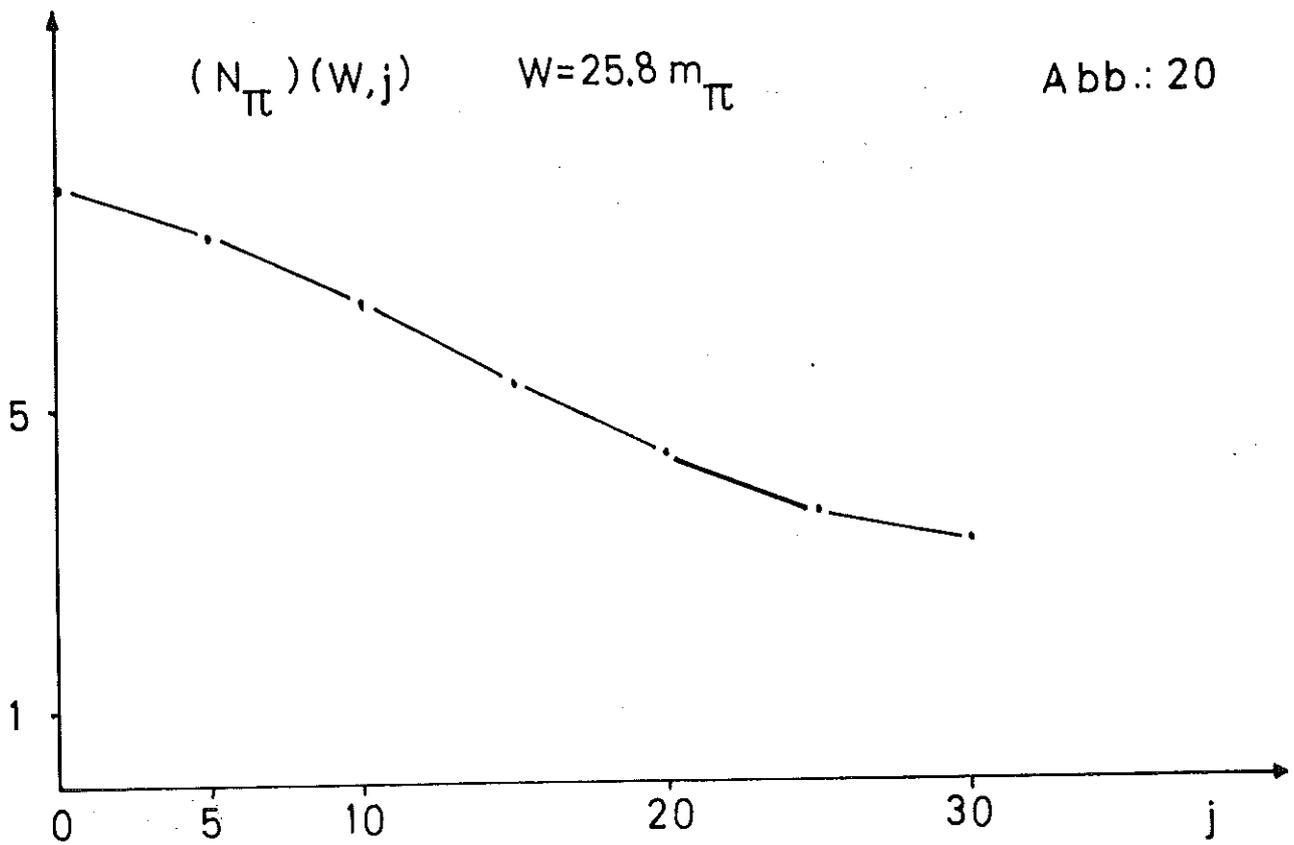
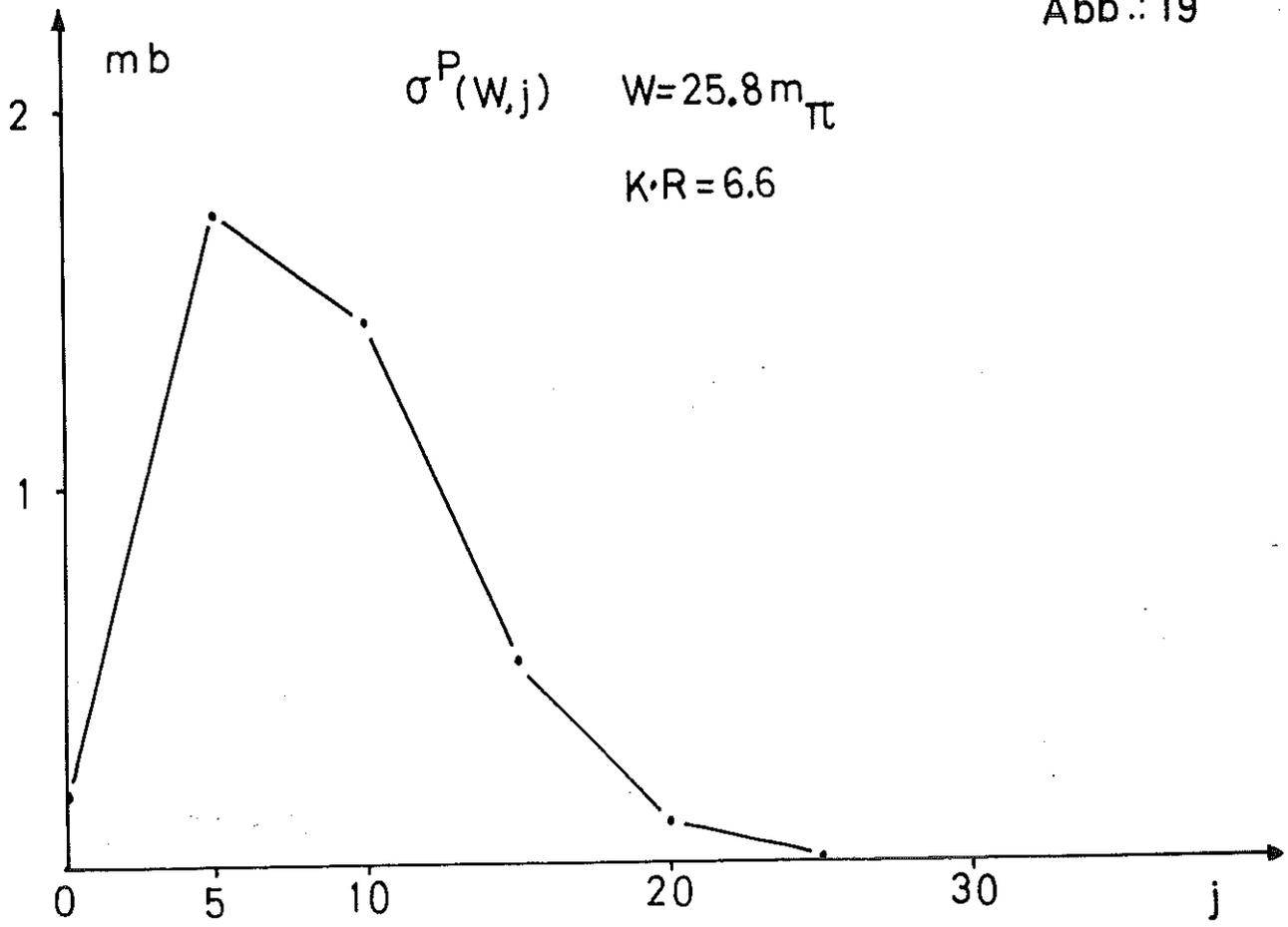


Abb.: 19



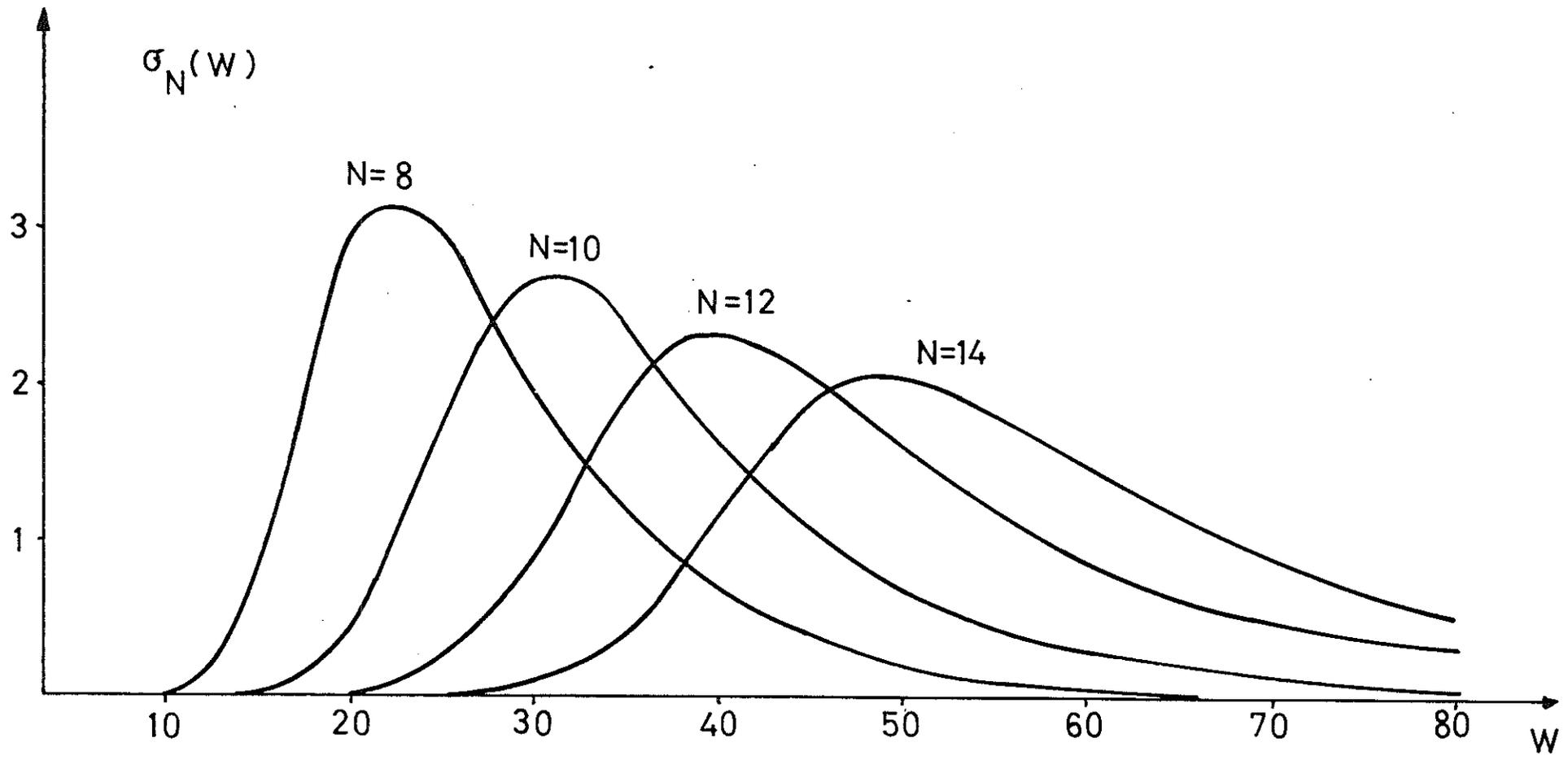


Abb.: 21

Abb.: 22

$$\frac{2\pi^+ 2\pi^-}{2\pi^+ 2\pi^- 1\pi^0}$$

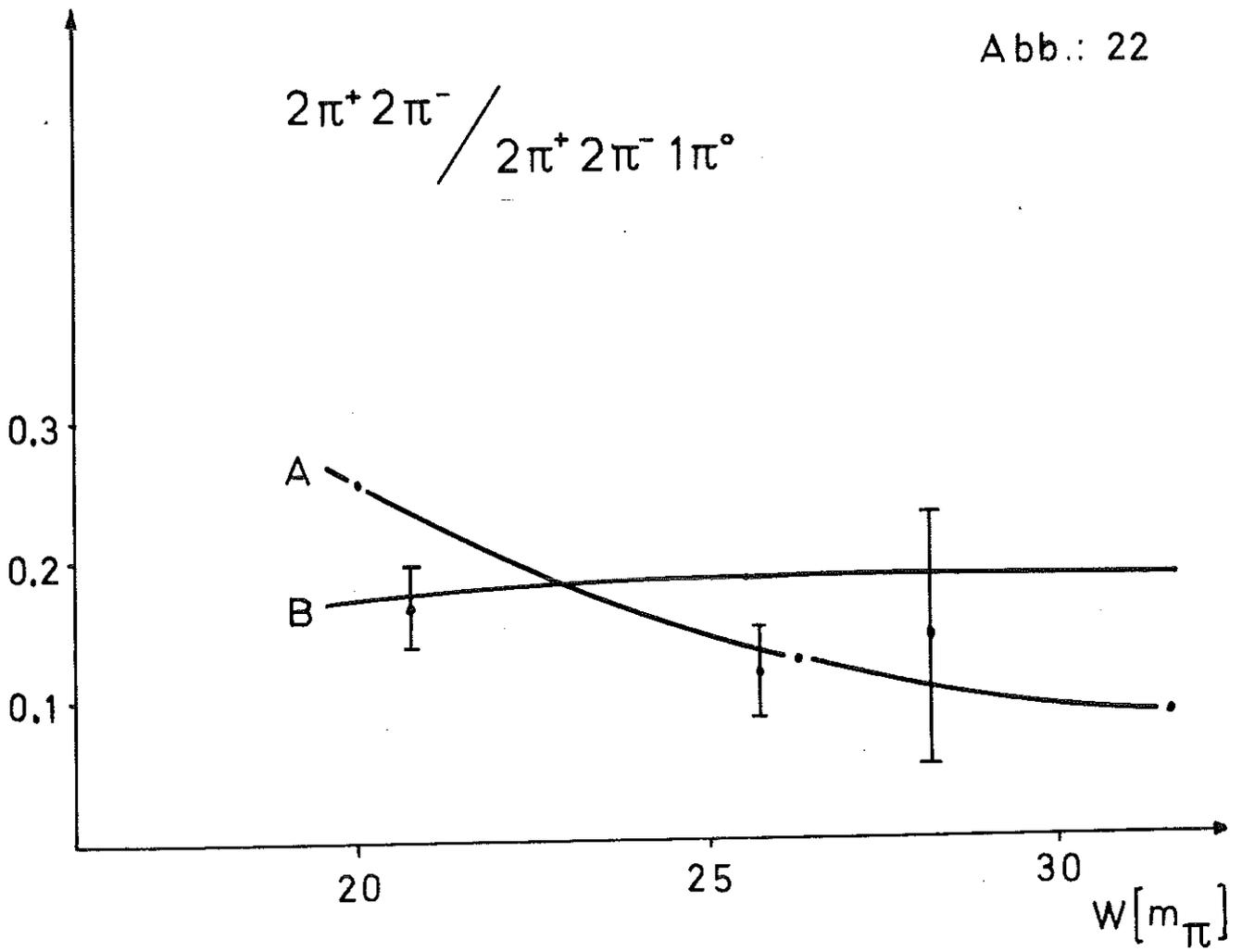


Abb.: 23

$$\frac{2\pi^+ 2\pi^-}{3\pi^+ 3\pi^-}$$

