DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON DESY

9. MAI 1968
DESY-BIBLIOTHEK

DESY 68/11
February 1968

Formulierung einer Relativistischen Quark - Feldtheorie

von

Timm Gudehus
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

FORMULIERUNG EINER RELATIVISTISCHEN QUARK-FELDTHEORIE

von

Timm Gudehus

II. Institut für Theoretische Physik

der Universität Hamburg

A b s t r a c t

Based on a set of appropriately modified Wightman axioms, a relativistic quark-field theory is formulated. The Haag-Ruelle construction of asymptotic states in the form given by Hepp is used to construct the asymptotic states of the phenomenologically known particles with the help of the basic quark fields. General reduction formulas for the reduction of the S-matrix elements to the expectation values of time ordered products of the quark field are given.

Some useful concepts are introduced, such as phenomenological fields, general currents, and the Bethe-Salpeter amplitudes of some phenomenological particles. A decomposition into covariants as well as a spectral representation for the Bethe-Salpeter amplitudes of the mesons is derived from the axioms. For the expectation value of a general current between meson or baryon states, an expression due to Mandelstam is generalized. These expressions for the current expectation values contain the Bethe-Salpeter amplitudes of the phenomenological particles.

A fundamental ansatz for the Bethe-Salpeter amplitudes of the pseudoscalar mesons, the vector mesons, the $1/2^+$-baryons, and the $3/2^+$-baryon resonances is made which implicitly contains the principles of the nonrelativistic quark-model. This ansatz, together with the generalized Mandelstam formula, is the starting point for the calculation of current expectation values. Relations can be derived between the electromagnetic, weak and strong coupling constants and between form factors which differ from the known SU(3), SU(6), U(12) or nonrelativistic quark-model expressions by some mass factors.

These mass factors may be important, for example, in the expression

$$g_{\rho\gamma}^2 : g_{\omega\gamma}^2 : g_{\phi\gamma}^2 = 9\, M_\rho : M_\omega : 2\, M_\phi$$

for the vector meson-photon coupling constants $g_{V\gamma} = M_V^2/2\gamma_V$.

Furthermore, the two new relations

$$g_{\omega\pi\gamma} = \frac{e}{\sqrt{M_\omega M_\pi}} \quad \text{and} \quad g_{\rho\gamma} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{M_\rho M_\pi}}{\cos\theta_A} \cdot f_\pi$$

are derived. The first gives an absolute value for the partial width $\Gamma_{\omega\to\pi+\gamma}$ of 1.22 MeV, which is in reasonable agreement with the experimental value 1.2 MeV. The second relation connects the ρ-γ coupling constant $g_{\rho\gamma}$ with the weak decay constant f_π of the pion and is fulfilled within 10 %.

I N H A L T

	Seite
EINLEITUNG	1
I. DEFINITION EINER QUARKFELDTHEORIE UND ALLGEMEINE AUSSAGEN	
1. AXIOME	4
2. ASYMPTOTISCHE ZUSTÄNDE UND ASYMPTOTENRELATION	9
3. REDUKTION DER S-MATRIX UND GREENSCHE FUNKTIONEN	13
4. PHÄNOMENOLOGISCHE FELDER	16
5. SPEZIELLE MATRIXELEMENTE	19
a. Zweipunktfunktionen	19
b. Bethe-Salpeter-Amplituden der Mesonen	21
c. Bethe-Salpeter-Amplituden der Baryonen	27
6. STRÖME UND STROMERWARTUNGSWERTE	27
II. ANNAHMEN, APPROXIMATIONEN UND SPEZIELLE MATRIXELEMENTE	
1. CHARAKTERISTISCHE EIGENSCHAFTEN DES QUARKMODELLS	33
2. ANSÄTZE FÜR DIE BETHE-SALPETER-AMPLITUDEN DER MESONEN UND BARYONEN	34
3. APPROXIMATIVE STROMERWARTUNGSWERTE	37
a. Erwartungswerte des elektromagnetischen Stromes	39
b. Erwartungswert des Stromes der schwachen Wechselwirkung	46
c. Erwartungswerte von Mesonströmen	50
4. FEYNMANREGELN DES QUARKMODELLS	54
ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	56
ANHANG 1 : Beschreibung von Einteilchenzuständen durch Wellenfunktionen	58
ANHANG 2 : Die Symmetriegruppe SG	60
ANHANG 3 : Umformung des Stromerwartungswertes	62
LITERATUR	63

EINLEITUNG

In den letzten Jahren haben sich zwei verschiedene und doch in manchem verwandte Vorstellungen zur Erklärung der beobachteten Gruppen von Elementarteilchen und ihrer Eigenschaften entwickelt.

Nach der einen,weniger anschaulichen Vorstellung sind die Elementarteilchen und ihre Resonanzen Realisationen der irreduziblen Darstellungen von Symmetriegruppen wie die SU(3) oder die SU(6).(Ge64;Gü65). Aus dem Transformationsverhalten der Zustandsvektoren und der auftretenden Operatoren ergeben sich mit den Clebsch-Gordon-Koeffizienten der Symmetriegruppe Relationen zwischen den Eigenschaften der verschiedenen Teilchen eines Multipletts,wie z.B. zwischen den Massen oder den Kopplungskonstanten.Schwer zu verstehen und zu formulieren ist in diesem Rahmen jedoch das Problem der Symmetriebrechung,die eingeführt werden muß zur Erklärung der Massendifferenzen innerhalb eines Multipletts.

Wesentlich anschaulicher als die Symmetrieerklärung scheint die Vorstellung zu sein,welche unter dem Namen Quarkmodell bekannt geworden ist.In diesem Modell setzen sich die starkwechselwirkenden Teilchen, die Hadronen,zusammen aus drei fundamentalen Fermionen mit drittzahliger Ladung,den sogenannten Quarks,und ihren Antiteilchen,den Antiquarks.(Ge64;Zw64).Die Teilchenmultipletts werden erklärt als gebundene Zustände von solchen Quarks und Antiquarks mit verschiedenen Spinstellungen und relativen Bahndrehimpulsen.Die Massenaufspaltung ergibt sich aus dem Unterschied der Quarkmassen und der Wechselwirkung der Quarks untereinander.Relationen zwischen Kopplungskonstanten und Streuamplituden folgen durch Zurückführung der Eigenschaften der zusammengesetzten Teilchen auf die Eigenschaften der Quarks.

Obgleich das Quarkmodell auf den ersten Blick so anschaulich und einfach ist,treten bei der Ableitung von Aussagen über die bekannten Teilchen verschiedene,bisher ungelöste Probleme auf.Zur Erklärung der relativ zur Masse M der gebundenen Systeme großen Massenaufspaltung (es ist z.B. $(M_s - M_\pi)/M_\pi = 4{,}5$) und der Tatsache,daß Teilchen mit drittzahliger Ladung noch nicht beobachtet wurden,wird angenommen,daß die Masse m_q der Quarks sehr groß ist gegenüber der Masse M des gebundenen Systems. Die bekannten Mesonen und Baryonen sind dann sehr stark gebundene Systeme von Quarks.Mit dieser Annahme wird es jedoch zweifelhaft,ob eine Beschreibung solcher Systeme durch Schrödinger-Wellenfunktionen und

eine Berechnung von Matrixelementen mit Hilfe nichtrelativistischer Formeln,wie es in allen bisherigen Quarkmodellrechnungen üblich ist, (Th65;Th66;Mo65;We66),überhaupt zulässig ist.Das Studium von relativistischen Zweiteichengleichungen,wie der Bethe-Salpeter-Gleichung und der aus dieser resultierenden Breit-Gleichung,zeigt,daß auch der Hinweis auf eine nichtrelativistische Relativbewegung der Quarks in diesen stark gebundenen Systemen keine ausreichende Rechtfertigung für dieses Vorgehen ist.Es ist daher besonders erstaunlich,wie gut viele Voraussagen dieser nichtrelativistischen Rechnungen erfüllt sind.Solche nichtrelativistischen Rechnungen führen jedoch auf weitere ungelöste Fragen,die nur durch zusätzliche Annahmen umgangen werden.Zu diesen gehört z.B. das im Vergleich zum normalen magnetischen Moment $e/2m_q$ eines freien Quarks sehr große magnetische Moment der gebundenen Systeme.

Diese ungelösten Fragen legen es nahe zu untersuchen,ob eine kovariante Formulierung eines Quarkmodells im Rahmen einer relativistischen Feldtheorie möglich ist und sich so vielleicht einige dieser Probleme lösen lassen.

Zu einer solchen Quarkfeldtheorie wird man auch aus einem anderen Gesichtspunkt heraus geführt.In dem Bemühen um eine einheitliche Feldtheorie wurde immer wieder versucht die Felder der experimentell beobachteten Hadronen aus den Produkten einer Minimalzahl von Fundamentalfeldern aufzubauen.Wegen der Quantenzahlen,wie Spin,Isospin,Ladung und Strangeness,der Hadronen sind hierzu mindestens drei Spin-1/2-Felder,nämlich ein Isoduplettfeld und ein Isosinglettfeld,erforderlich. Das wurde bereits 1959 von THIRRING (Th59) festgestellt.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist der Versuch eine relativistische Feldtheorie zu formulieren,die auf einem solchen Triplett von Fundamentalfeldern aufbaut.

Im ersten Teil der Arbeit werden die allgemeinen Grundlagen einer Quarkfeldtheorie und Begriffe wie Bethe-Salpeter-Amplitude und Ströme eingeführt und diskutiert.In diesem allgemeinen Teil zeigt sich,daß man ohne zusätzliche Annahmen und Ansätze nur sehr wenig über die physikalisch interessanten Eigenschaften der Hadronen aussagen kann.Der Berechnung von Matrixelementen im Rahmen einer Lagrangetheorie mit Hilfe der Störungsrechnung stehen die bekannten Renormierungsschwierigkeiten entgegen,die verbunden sind mit einer lokalen Vier-Fermion-Kopp-

lung.Will man,ohne auf das Problem der Berechnung von Matrixelementen in einem Lagrangemodell einzugehen,zu speziellen Aussagen gelangen, ist es nötig einige allgemeine Annahmen zu machen,die jedoch mit den feldtheoretischen Grundprinzipien und den Folgerungen aus diesen verträglich sein sollten.

Eine bekannte solche Annahme ist der Ansatz von kanonischen Vertauschungsrelationen für den gleichzeitigen Kommutator des Quarkfeldes. Aus diesem Ansatz resultieren die sogenannten Stromvertauschungsrelationen,die der Ausgangspunkt sind für die unter dem Namen Stromalgebren bekannt gewordenen Überlegungen.(Ad65;We65;Fu65;Ge62).

Eine andere,neue Annahme wird im zweiten Teil dieser Arbeit eingeführt und aus ihr Aussagen über Matrixelemente von Strömen abgeleitet.Es werden,ähnlich wie im nichtrelatischen Quarkmodell,bestimmte Ansätze gemacht für die den nichtrelativistischen Wellenfunktionen entsprechenden Bethe-Salpeter-Amplituden der Mesonen und Baryonen.Mit Hilfe dieser Amplituden lassen sich in wohldefinierter Näherung Stromerwartungswerte berechnen.Die resultierenden Aussagen über Kopplungskonstanten und Formfaktoren weichen vielfach von den Ergebnissen des nichtrelativistischen Quarkmodells etwas ab.Einige Beziehungen sind andererseits sehr ähnlich den Relationen,die SAKITA und WALI (Sa66) und DELBOURGO, SALAM und STRATHDEE (De66) aus Ansätzen einer relativistischen Formulierung der SU(6) ableiten.Darüberhinaus ergeben sich einige neue Relationen und die Aussage,daß in diesem relativistischen Quarkmodell die magnetischen Momente der zusammengesetzten Systeme nicht von der Quarkmasse abhängen.

Offen bleibt allerdings auch in diesem Modell die Frage nach der Natur der Bindungskräfte,die zu so stark gebundenen Systemen führen.Auch eine explizite Berechnung der Bethe-Salpeter-Amplituden wird nicht gegeben. Eine Diskussion dieser Fragen scheint jedoch in dem im folgenden formulierten Rahmen,z.B. mit Hilfe einer Bethe-Salpeter-Gleichung,angemessener zu sein als in nichtrelativistischen Potentialmodellen.

I. DEFINITION EINER QUARKFELDTHEORIE UND ALLGEMEINE AUSSAGEN

1. AXIOME

Der Rahmen einer relativistischen Quarkfeldtheorie wird durch einen möglichst allgemeinen Satz von Forderungen, den sogenannten Axiomen, festgelegt. Die folgenden Axiome definieren in Anlehnung an die Formulierung von STREATER und WIGHTMAN (St64; Wi56) eine allgemeine Quarkfeldtheorie.

$\mathfrak{H}$ sei ein Hilbertraum mit positiver Norm. In $\mathfrak{H}$ seien zwölfkomponentige Quarkfelder

$$\Psi(x) = \{\Psi_A(x)\} \qquad \overline{\Psi}(x) = \Psi^*(x)\gamma_4 = \{\overline{\Psi}_A(x)\} \qquad (I,1)^{1)}$$

mit $A=(a,\nu)$, den Symmetrieindizes $a=1,2,3$ und den Dirac-Spinorindizes $\nu = 1,2,3,4$ als operatorwertige Distributionen definiert. D.h. zu jeder Testfunktion $f(x) \in \mathcal{S}^{(4)}$ (zur Definition von $\mathcal{S}^{(4)}$ siehe z.B. (Jos65)) sind

$$\Psi(f) = \int dx\, f(x)\, \Psi(x) \qquad \overline{\Psi}(x) = \int dx\, \overline{\Psi}(x)\, f^*(x) \qquad (I,2)$$

auf einer gemeinsamen linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{D}$, die dicht in $\mathfrak{H}$ ist, wohldefinierte Operatoren. Der Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und die Felder Ψ, $\overline{\Psi}$ sollen die Eigenschaften haben:

Lorentz-Kovarianz. In $\mathfrak{H}$ existiert eine unitäre Darstellung $U(\Lambda,a)$ der Überlagerungsgruppe iSL(2C) der eigentlichen, orthchronen, inhomogenen Lorentzgruppe $iL_+^\uparrow$, welche den Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ invariant läßt. Die Felder $\Psi(x)$, $\overline{\Psi}(x)$ transformieren sich wie Tensoroperatoren

$$U(\Lambda,a)\,\Psi(x)\,U^{-1}(\Lambda,a) = \tilde{S}^{-1}(\Lambda)\,\Psi(\Lambda x+a) \qquad U(\Lambda,a)\,\overline{\Psi}(x)\,U^{-1}(\Lambda,a) = \overline{\Psi}(\Lambda x+a)\,S(\Lambda) \qquad (I,3)$$

nach der reduziblen Darstellung $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ der iSL(2C) im Dirac-Spispinorraum mit den durch

$$\tilde{S}^{-1}(\Lambda)\,\gamma_\mu\,S(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^{\mu'}\gamma_{\mu'} \qquad \det S = 1 \qquad [\gamma_\mu,\gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu} \qquad (I,4)$$

definierten Darstellungsmatrizen $S(\Lambda)$.[1)]

Spektrumsbedingungen. Das Spektrum der Eigenwerte p_μ des durch $U(1,a) = e^{iPa}$ definierten Impulsoperators P_μ ist im Vorwärtslichtkegel

$$\overline{V}^{(+)} = (p:\ p^2 \geqslant 0,\ p_0 \geqslant 0)$$

enthalten. Es gibt in $\mathfrak{H}$ genau einen lorentzinvarianten Zustand $|0\rangle$, das Vakuum, mit

$$P_\mu\,|0\rangle = 0 \quad .$$

[1)] Hier, wie im folgenden, werden Ψ und $\overline{\Psi}$ als Spalten- bzw. Zeilenvektoren geschrieben. Wo es möglich ist, wird die Matrixschreibweise verwendet.

In $\mathfrak{H}$ existiert ein invarianter Teilraum $\mathfrak{H}_1$, der Einteilchenhilbertraum, in dem die auf $\mathfrak{H}_1$ induzierte Darstellung $U_1(\mathcal{L},a)$ zerfällt in eine Summe von abzählbar vielen, durch $(M_i, s_i; \eta_i)$ charakterisierten, irreduziblen Darstellungen der iSL(2C):

$$\mathfrak{H}_1 = \sum_i \oplus \mathfrak{H}_{(M_i,s_i,\eta_i)} \quad .$$

Es sei $\mathrm{Min}(M_i) > 0$. Ein Eigenvektor des Impulsoperators P_μ zum Eigenwert p_μ aus dem Einteilchenhilbertraum $\mathfrak{H}_{(M,s,\eta)}$ soll mit $|p,u^{(\alpha)}(p),\alpha\rangle$ bezeichnet werden. Durch einen solchen Vektor $|p,u^{(\alpha)},\alpha\rangle$ werde der Zustand eines einzelnen Teilchens α beschrieben. $u^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}(p)$ ist ein vom Spin s, Masse M und Polarisationszustand λ (z.B. der Helizität) abhängiger Polarisationstensor, der i.a. Spinorindizes $\nu_i = 1,2,3,4$ und Vektorindizes $\mu_k = 0,1,2,3$ trägt. Die das Teilchen α charakterisierenden Quantenzahlen werden durch $(\alpha) = (M,s,\lambda;\eta)$ abgekürzt. (α) enthält im folgenden immer alle nicht explizit angegebenen Quantenzahlen. Im Parameter η sind die später definierten Quantenzahlen, wie Ladung, Baryonenzahl oder Isospin zusammengefaßt. Ein Antiteilchen-Zustandsvektor wird mit $|p,u^{(\alpha)},\bar{\alpha}\rangle$ bezeichnet. Die Normierung dieser uneigentlichen Vektoren ist:

$$\langle p',u^{(\alpha')},\alpha'|p,u^{(\alpha)},\alpha\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\cdot 2\omega\cdot\delta(\vec{p}'-\vec{p}) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{M_0^2+\vec{p}^2} \quad . \quad (I,5)$$

Durch Überlagerung dieser uneigentlichen Vektoren gelangt man zu Vektoren $|f^{(\alpha)},\alpha\rangle$, die durch Wellenfunktionen $f^{(\alpha)}(x)$ oder $f^{(\alpha)}(\vec{p})$ beschrieben werden. Im ANHANG I sind die im folgenden benötigten Beschreibungen von Teilchen mit Spin $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$ durch Wellenfunktionen zusammengestellt. Die Wirkung einer Lorentztransformation $(\mathcal{L},a)$ auf einen Zustand $|p,u^{(\alpha)},\alpha\rangle$ oder $|f^{(\alpha)},\alpha\rangle$ wird kurz durch:

$$U(\mathcal{L},a)\,|p,u^{(\alpha)},\alpha\rangle = |\mathcal{L}p,D^{(\alpha)}(\mathcal{L})u^{(\alpha)},\alpha\rangle\cdot e^{ipa} \qquad U(\mathcal{L},0)\,|f^{(\alpha)},\alpha\rangle = |D^{(\alpha)}(\mathcal{L})f^{(\alpha)},\alpha\rangle \quad (I,6)$$

beschrieben. Hierin ist $D^{(\alpha)}(\mathcal{L})$ eine durch $(M,s) \subset (\alpha)$ festgelegte Darstellungsmatrix der Transformation $\mathcal{L} \in iL_+^\uparrow$ im Raum der Einteilchenwellenfunktionen.

Lokalität. Die Felder $\Psi(x)$, $\Psi(x)$ sind lokal. D.h. für alle x,x' mit $(x-x')^2 < 0$ gilt:

$$\left[\Psi(x),\Psi(x')\right]_+ = \left[\overline{\Psi}(x),\overline{\Psi}(x')\right]_+ = \left[\Psi(x),\overline{\Psi}(x')\right]_+ = 0 \quad . \quad (I,7)$$

Parität, Ladungskonjugation, Zeitumkehr. Es existieren in $\mathfrak{H}$ unitäre Darstellungen $U(\mathcal{P})$ und $U(\mathcal{C})$ der Paritätsoperation $\mathcal{P}$ und der Ladungskonjugationsoperation $\mathcal{C}$, sowie eine antiunitäre Darstellung $\overline{U}(\mathcal{T})$ der Zeitumkehroperation $\mathcal{T}$, die $\mathfrak{H}$ und $|0\rangle$ invariant lassen und bezüglich

derer sich die Felder $\Psi(x), \overline{\Psi}(x)$ transformieren gemäß:

$$U(\mathcal{P})\,\Psi(x)\,U(\mathcal{P})^{-1} = \gamma_0\,\Psi(I_s x) \qquad U(\mathcal{P})\,\overline{\Psi}(x)\,U(\mathcal{P})^{-1} = \overline{\Psi}(I_s x)\,\gamma_0 \qquad (I,8)$$

$$U(\mathcal{C})\,\Psi(x)\,U(\mathcal{C})^{-1} = -\,\overline{\Psi}(x)\,C \qquad U(\mathcal{C})\,\overline{\Psi}(x)\,U(\mathcal{C})^{-1} = C^{-1}\,\Psi(x) \qquad (I,9)$$

$$\overline{U}(\mathcal{T})\,\Psi(x)\,\overline{U}(\mathcal{T})^{-1} = C^{-1}\gamma_5\,\Psi(I_t x) \qquad \overline{U}(\mathcal{T})\,\overline{\Psi}(x)\,\overline{U}(\mathcal{T})^{-1} = \overline{\Psi}(I_t x)\,\gamma_5 C \qquad .(I,10)$$

Hierin ist $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, die Matrix C definiert durch $C^{-1}\gamma_\mu C = -\overset{T}{\gamma}_\mu$ [1], $I_s = (g_{\mu\mu'})$ die Raumspiegelungsmatrix und $I_t = -I_s$ die Zeitspiegelungsmatrix. [2]

Das Transformationsverhalten der Einteilchenzustände bezüglich $\mathcal{P}$ und $\mathcal{C}$ wird beschrieben durch:

$$U(\mathcal{P})\,|f^{(\alpha)},\alpha\rangle = \eta_p\,|D^{(\alpha)}(\mathcal{P})f^{(\alpha)},\alpha\rangle \qquad U(\mathcal{C})\,|f^{(\alpha)},\alpha\rangle = \eta_c\,|\overline{D}^{(\alpha)}(\mathcal{C})f^{(\alpha)},\alpha\rangle \qquad (I,11)$$

η_p und η_c bezeichnen die Parität bzw. Ladungskonjugationsparität des Teilchens α. $D^{(\alpha)}(\mathcal{P})$ und $D^{(\alpha)}(\mathcal{C})$ sind Darstellungen der Paritäts- bzw. Ladungskonjugationsoperation im Raum der Wellenfunktionen. (s. ANHANG I).

Aus den vorangegehenden Axiomen folgt bereits die Existenz eines antiunitären Operators Θ , bezüglich dessen sich das Quarkfeld gemäß

$$\Theta\,\Psi(x)\,\Theta^{-1} = \overline{\Psi}(x)\,\gamma_0\gamma_5 \qquad \Theta\,\overline{\Psi}(x)\,\Theta^{-1} = -\,\gamma_0\gamma_5\,\Psi(-x) \qquad (I,12)$$

transformiert. (Θ -Theorem (Jos65)). Es zeigt sich mit (I,8,9,10), daß der Operator Θ auf das Quarkfeld angewandt das gleiche bewirkt wie die Operation $\overline{U}(\mathcal{T})\,U(\mathcal{C})\,U(\mathcal{P})$. Es ist also $\Theta = \overline{U}(\mathcal{T})\,U(\mathcal{C})\,U(\mathcal{P})$.

Eichtransformationen. In $\mathfrak{H}$ existieren unitäre Darstellungen $U(a_Q)$ und $U(a_B)$ der Ladungs- und der Baryonenzahl-Eichtransformationsgruppe, welche $\mathfrak{H}$ und $|0\rangle$ invariant lassen. Die Quarkfelder transformieren sich nach den durch

$$U(a_Q)\,\Psi(x)\,U(a_Q)^{-1} = e^{-ia_Q Q}\,\Psi(x) \qquad U(a_Q)\,\overline{\Psi}(x)\,U(a_Q)^{-1} = \overline{\Psi}(x)\,e^{ia_Q Q} \qquad (I,13)$$

$$U(a_B)\,\Psi(x)\,U(a_B)^{-1} = e^{-ia_B B}\,\Psi(x) \qquad U(a_B)\,\overline{\Psi}(x)\,U(a_B)^{-1} = \overline{\Psi}(x)\,e^{ia_B B} \qquad (I,14)$$

und

$$Q = \frac{e}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [3] \qquad B = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (I,15)$$

definierten Darstellungen. [4] Durch $U(a_Q) = \exp(ia_Q Q_{\cdot\gamma})$ und $U(a_B) = \exp(ia_B B_{\cdot\gamma})$

---

[1] Mit $\overset{T}{M}$ wird die transponierte Matrix M bezeichnet.
[2] Die Metrik im Minkowski-Raum ist hier $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.
[3] Es ist hier $e^2/4\pi = 1/137$ und es wird $\hbar = c = 1$ gesetzt.
[4] Die 3x3-Matrizen Q, B und $D(g)$ wirken auf die Symmetrieindizes von Ψ und $\overline{\Psi}$.

sind in $\mathcal{H}$ der Ladungsoperator Q_{op} und der Baryonenzahloperator B_{op} definiert. Die Einteilchenvektoren sind Eigenvektoren dieser Operatoren zu den Eigenwerten e_α (Ladung) und b_α (Baryonenzahl).

Unitäre Symmetrie. Es existiert in $\mathcal{H}$ eine unitäre Darstellung $U(g)$ der Symmetriegruppe $SG = SU_I(2) \circ U_Y(1)$, die Φ und $|0\rangle$ invariant läßt. In SG ist $SU_I(2)$ die Isospingruppe und $U_Y(1)$ die Hyperladungs-Eichtransformationsgruppe. Die Quarkfelder transformieren sich wie Tensoroperatoren

$$U(g)\,\Psi(x)\,U(g)^{-1} = \bar{D}^{1}(g)\,\Psi(x) \qquad U(g)\,\bar{\Psi}(x)\,U(g)^{-1} = \bar{\Psi}(x)\,D(g) \qquad (I,16)$$

nach der reduziblen Darstellung $(q) = (\frac{1}{2},\frac{1}{3}) \oplus (0;\frac{2}{3})$ der SG mit den 3×3-Matrizen $D(g)$.

Die Symmetriegruppe SG, die eine Untergruppe der SU(3) ist, und ihre irreduziblen Darstellungen, die durch (I,Y) charakterisiert werden können, sind im ANHANG II beschrieben. Speziell sind dort auch die Transformationsmatrizen $D(g)$ definiert. Die Einteilchenvektoren sollen sich nach irreduziblen Darstellungen der SG transformieren:

$$U(g)|f^{(\alpha)},\alpha\rangle = U(g)|f^{(\alpha)};M,s,\lambda,I,Y,I_3\ldots\rangle = |f^{(\alpha)};M,s,\lambda,I,Y,I_3'\ldots\rangle\, D^{(IY)}_{I_3'I_3}(g) = |f^{(\alpha)},\alpha'\rangle\, D^{(\alpha)}_{\alpha'\alpha}(g) \quad .(I,17)^{1)}$$

Hierin ist $D^{(\alpha)}(g)$ die Darstellungsmatrix von $g \in SG$ zur irreduziblen Darstellung $(I,Y) \subset (\alpha)$ und I, I_3, Y sind die Eigenwerte der Isospinoperatoren I_{op}, I^3_{op} und des Hyperladungsoperators Y_{op}.

Vollständigkeit. Ist $\mathcal{P}(\Psi,\bar{\Psi})$ der Ring aller Polynome der Operatoren $\Psi(f)$ und $\bar{\Psi}(f)$ über dem Raum der komplexen Zahlen, so ist die durch

$$\mathcal{P}(\Psi,\bar{\Psi})\,|0\rangle \qquad (I,18)$$

definierte Menge von Vektoren dicht in $\mathcal{H}$.

Aus der eindeutigen Spektralzerlegung des unitären Translationsoperators $U(1,a) = \int e^{iap}\,dE(p)$ mit dem projektorwertigem Spektralmaß $dE(p)$ resultiert eine Zerlegung der $\underline{1} = U(1,0)$. Diese Zerlegung kann in der Form:

$$\underline{1} = \int dE(p) = \sum_\beta \int_0^\infty dm^2\, \hat{g}(m^2,\beta) \int dp\, \delta(p^2-m^2)\,\Theta(p_0)\,|p,\beta\rangle\langle p,\beta| \qquad (I,19)$$

geschrieben werden. $\hat{g}(m^2,\beta)$ ist ein positives Spektralmaß und $\sum_\beta$ bedeutet eine Summation bzw. eine Integration über die nicht spezifierten Quantenzahlen β eines vollständigen Systems von Eigenvektoren $|p,\beta\rangle$ des Impulsoperators P_μ. Die diskreten Einteilchenvektoren führen zu δ-

1) Wenn nicht anders vermerkt, wird bei Summation über doppelt vorkommende Indizes das Summationszeichen weggelassen.

-Singularitäten in der Spektralfunktion $\hat{\varrho}(m^2,\beta)$.

Für das Folgende wird angenommen, daß es freie Quarks gibt. Es gebe also in $\mathcal{H}_1$ Vektoren $|p,u^{(\varphi)},q\rangle$ und $|p,v^{(\varphi)},\bar{q}\rangle$ für welche:

$$(2\pi)^{3/2}\langle 0|\Psi_a(0)|p,u^{(\varphi)},q\rangle = \delta_{aq}\cdot u^{(\varphi)} \qquad (2\pi)^{3/2}\langle 0|\bar{\Psi}_a(0)|p,v^{(\varphi)},\bar{q}\rangle = \delta_{aq}\,\bar{v}^{(\varphi)} \qquad (I,20)$$

ist. Durch (I,20) sind die Quarkfelder $\Psi(x)$ und $\bar{\Psi}(x)$ normiert. Die Vektoren $|p,u^{(\varphi)},q\rangle$ und $|p,v^{(\varphi)},\bar{q}\rangle$ beschreiben 1-Quark- bzw. 1-Antiquarkzustände. Diese Zustände haben wegen des Quarkfeld-Transformationsverhaltens die in Tabelle I aufgeführten Quantenzahlen.

TABELLE I

QUARK	BEZEICHN.	SPIN	b_q	e_q	I	I_3	Y	S	m
$q=1$	p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot e$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	m
$q=2$	n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\cdot e$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	m
$q=3$	λ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\cdot e$	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$m+\Delta$

Die Quantenzahlen der Antiquarkzustände ergeben sich durch Vorzeichenumkehr der ladungsartigen Quantenzahlen b_q, e_q, S, Y, I_3. Die Relativparität von Quark und Antiquark ist -1.

Die Quarks $q = 1,2,3$ werden wegen ihrer Strangeness und ihrer Isospinquantenzahlen auch als p-, n- und λ-Quark bezeichnet. Zwischen den Massen m_q der Quarks bestehe die Beziehung $m = m_p = m_n < m_\lambda = m+\Delta$. Die Massen sind vermutlich so groß, daß $\Delta/m \ll 1$ ist. Mit m oder auch m_q wird im folgenden manchmal die 3×3-Massen-Matrix $m = \begin{pmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m+\Delta \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Die Aufnahme der Symmetriegruppe $SG = SU_I(2)\circ U_Y(1)$ und der Symmetrieoperationen $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ in die Axiome setzt voraus, daß von den elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen, welche diese Symmetrien zerstören, abgesehen wird. Dementsprechend sind auch die Massen eines Isomultipletts, wie z.B. von p- und n-Quark, gleich zu setzen. Diese Vereinfachung wurde gewählt, weil einerseits der Begriff der approximativen Symmetrie in diesem allgemeinen Rahmen schwer zu definieren ist, andererseits aber nicht die nützliche Klassifizierung der Teilchen nach Isospin, Strangeness und Paritäten aufgegeben werden soll.

Als <u>phänomenologische Teilchen</u> werden im folgenden alle bekannten Hadronen mit ganzzahliger Ladung bezeichnet. Unabhängig davon, ob diese Teilchen stabil oder instabil sind, sollen sie durch Vektoren des Einteilchenhilbertraumes $\mathcal{H}_1$ beschrieben werden. Eine solche Beschreibung durch Einteilchenvektoren ist in diesem Rahmen eigentlich nur für die

bezüglich der starken Wechselwirkung stabilen Teilchen,wie z.B. die Nukleonen oder die π-Mesonen,zulässig.Die Baryonenresonanzen,wie das $N^*(1236)$,und die Mesonresonanzen,wie das ω-Meson,treten im Kontinuum der Zwei- und Mehrteilchenzustände als Resonanzen mit einer endlichen Breite auf.Die Behandlung dieser Resonanzen als stabile Teilchen ist also eine Approximation.

In dieser Arbeit werden besonders die folgenden phänomenologischen Teilchen betrachtet:

Pseudoskalare Mesonen:	"P" = π, K, $\bar{K}$, η, X_0	$s^{\nu}\eta_{\nu} = 0^{-+}$	(I,21)
Vektormesonen:	"V" = ϱ, K^*, $\bar{K}^*$, ω, Φ	$s^{\nu}\eta_{\nu} = 1^{--}$	(I,22)
Baryonen:	"B" = N, P, Λ, Σ, Ξ	$s^{\nu} = 1/2^+$	(I,23)
Baryonenresonanzen:	"D" = N^*, Y, Ξ^*, Ω^-	$s^{\nu} = 3/2^+$.	(I,24)

2. ASYMPTOTISCHE ZUSTÄNDE UND ASYMPTOTENRELATION

Eine Teilcheninterpretation erhält eine Feldtheorie erst mit der Konstruktion von asymtotischen Zustandsvektoren,durch welche asymptotische Teilchenkonfigurationen beschrieben werden können.

RUELLE (Ru62) hat nach einer Idee von HAAG (Ha58) im Rahmen der Wightmanschen Axiome mit Hilfe der Feldoperatoren solche asymptotischen Zustandsvektoren

$$|f^{(\alpha_1)}_{,\alpha_1};\dots;f^{(\alpha_n)}_{,\alpha_n};f^{(\bar{\alpha}_1)}_{,\bar{\alpha}_1};\dots;f^{(\bar{\alpha}_m)}_{,\bar{\alpha}_m}\rangle_{ex} \qquad ex = ein, aus \qquad (I,25)$$

konstruiert.Diese asymptotischen Zustandsvektoren beschreiben Heisenberg-Streuzustände,welche n Teilchen α_i und m Antiteilchen $\bar{\alpha}_\kappa$ mit den Wellenfunktionen $f^{(\alpha_i)}$ bzw. $f^{(\bar{\alpha}_\kappa)}$ in der Anfangskonfiguration (ex = ein) bzw. Endkonfiguration (ex = aus) enthalten.Die Konstruktion von HAAG und RUELLE kann unter Einbeziehung der SG-Symmetrie auf eine Quarkfeldtheorie,wie sie durch die Axiome im vorangegehenden Kapitel definiert wurde,übertragen werden.Es gilt daher der

SATZ: Unabhängig vom Bezugssystem existieren im Sinne starker Topologie in $\mathfrak{H}$ die Grenzwerte:

$$|f^{(\alpha_1)}_{,\alpha_1};\dots;f^{(\alpha_n)}_{,\alpha_n};f^{(\bar{\alpha}_1)}_{,\bar{\alpha}_1};\dots;f^{(\bar{\alpha}_m)}_{,\bar{\alpha}_m}\rangle_{aus\,ein} = \lim_{t\to\pm\infty} \hat{B}^{(\alpha_1)}(f^{(\alpha_1)},t)\cdots\hat{B}^{(\alpha_n)}(f^{(\alpha_n)},t)\cdot\hat{B}^{(\bar{\alpha}_1)}(f^{(\bar{\alpha}_1)},t)\cdots\hat{B}^{(\bar{\alpha}_m)}(f^{(\bar{\alpha}_m)},t)\,|0\rangle \quad .(I,26)$$

Hierin ist:

$$\mathcal{B}^{(\alpha)}(f^{(\alpha)},t) \equiv \int dp\, e^{i(p_0-\omega)t}(\overline{B}^{(\alpha)}(p)\, f^{(\alpha)}(\vec{p})) \qquad \mathcal{B}^{(\bar{\alpha})}(f^{(\bar{\alpha})},t) \equiv \int dp\, e^{i(p_0-\omega)t}(\overline{f}^{(\alpha)}(\vec{p})\, B^{(\alpha)}(p)) \quad ; \quad (I,27)$$

$f^{(\alpha)}(\vec{p})$ und $f^{(\bar{\alpha})}(\vec{p})$ sind Einteilchenwellenfunktionen aus $\mathcal{S}^{(3)}$ .Die Transformierten

$$f^{(\alpha)}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \frac{d\vec{p}}{2\omega}\, e^{-ipx}\, f^{(\alpha)}(\vec{p}) \qquad f^{(\bar{\alpha})}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \frac{dp}{2\omega}\, e^{ipx}\, f^{(\bar{\alpha})}(\vec{p}) \qquad (I,28)$$

sind also Wellenfunktionen des freien Teilchens α bzw. Antiteilchens $\bar{\alpha}$ und Lösungen einer Wellengleichung zur Darstellung $(M,s)\,c\,(\alpha)$. (s. ANHANG 1). $B^{(\alpha)}(p)$ ist eine kovariante operatorwertige Distribution mit der Eigenschaft $\langle 0|B^{(\alpha)}(p)|f^{(\alpha)},\alpha\rangle \neq 0$ und definiert durch:

$$B^{(\alpha)}(p) = \sum_n \int dp_1 \dots dp_n \cdot \delta(p+\sum_i p_i)\cdot\left(\overline{\Psi}(p_1)\cdots\overline{\Psi}(p_n)\cdot c^{(\alpha)}_{n\kappa}(p_1\cdots p_n)\cdot\Psi(p_{n+1})\cdots\Psi(p_{2n})\right) \quad , \quad (I,29)$$

wobei $c^{(\alpha)}_{nk}(p_1,\dots,p_n)$ kovariante Testfunktionen aus $\mathcal{S}^{(4n-3)}$ sind mit dem Träger:

$$Tr\left[c^{(\alpha)}_{nk}(p_1,\dots,p_n)\right] \subset G = (p_i : \sum_i p_{io} > 0,\ |(\sum_i p_i)^2 - M^2| < c) \quad .(I,30)$$

Die kovarianten Testfunktionen haben die definierende Eigenschaft:

$$c^{(\alpha)}_{n\kappa}(p_1,\dots,p_n) = D^{(\alpha)}(\mathcal{L})\cdot S(\mathcal{L})\cdots S(\mathcal{L})\cdot c^{(\alpha)}_{n\kappa}(\mathcal{L}^{-1}p_1,\dots,\mathcal{L}^{-1}p_n)\cdot \bar{S}^{-1}(\mathcal{L})\cdots\bar{S}^{-1}(\mathcal{L}) \qquad \forall\, \mathcal{L}\in \mathcal{L}_+^{\uparrow} \quad (I,31)$$

$$c^{(\alpha)}_{n\kappa}(p_1\cdots p_n) = D^{(\alpha)}_{\alpha\alpha'}(g)\cdot D(g)\cdots D(g)\cdot c^{(\alpha')}_{n\kappa}(p_1\cdots p_n)\cdot \bar{D}^{-1}(g)\cdots\bar{D}^{-1}(g) \qquad \forall\, g\in SG \quad .(I,32)$$

In den Ausdrücken (I,27) und (I,31) ist eine Summation über Spinindizes enthalten.In (I,32) wird über Symmetrieindizes summiert und in (I,29) über Symmetrie- und Spinindizes.Die Operatoren $B^{(\alpha)}(p)$ sind also i.a. Tensoroperatoren und die Wellenfunktionen $f^{(\alpha)}$ Tensoren mit Spinor- und Vektorindizes.Die kovarianten Testfunktionen $c^{(\alpha)}_{nk}(p_1,..,p_n)$ sind Tensoren mit Spinor- und Vektorindizes und außerdem n Symmetrieindizes. Die gequerten Ausdrücke,wie $\overline{f}^{(\alpha)}$, sind analog zu $\overline{\Psi}$ zu bilden durch Übergang zum Konjugiertkomplexen bei c-Zahlen bzw. Adjungierten bei Operatoren und Multiplikation mit γ_0 bezüglich aller Spinorindizes.

Die in (I,31) und (I,32) auftretenden Darstellungsmatrizen $D^{(\alpha)}(\mathcal{L})$ und $D^{(\alpha)}(g)$ sind die in (I,6) und (I,17) eingeführten Transformationsmatrizen des Einteilchenzustandes $|f^{(\alpha)},\alpha\rangle$.Die Operatoren $\Psi(p)$ und $\overline{\Psi}(p)$ sind die Fouriertransformierten der Quarkfeldoperatoren:

$$\Psi(p) = (2\pi)^{-2}\int dx\, e^{ipx}\,\Psi(x) \quad , \quad \overline{\Psi}(p) = \Psi^{*}(p)\cdot\gamma_0 \quad .$$

Wegen der Kovarianzeigenschaften (I,31) und (I,32) der Funktionen $c^{(\alpha)}_{nk}$ folgt aus dem Transformationsverhalten (I,3),(I,8),(I,16) der Quarkfelder für die nichtlokale operatorwertige Distribution

$$B^{(\alpha)}(x) = (2\pi)^{-2}\int dp\, e^{-ipx}\, B^{(\alpha)}(p) \qquad (I,33)$$

das Transformationsverhalten:

$$U(\mathcal{L}',a)\, B^{(\alpha)}(x)\, U(\mathcal{L}',a)^{-1} = \bar{D}^{-1(\alpha)}(\mathcal{L})\; B^{(\alpha)}(\mathcal{L}x+a) \qquad (I,34)$$

$$U(g)\, B^{(\alpha)}(x)\, U(g)^{-1} = \bar{D}^{-1(\alpha)}_{\alpha\alpha'}(g)\; B^{(\alpha')}(x) \quad . \qquad (I,35)$$

$B^{(\alpha)}(x)$ transformiert also wie ein Tensoroperator zu den Darstellungen $D^{(\alpha)}(\Lambda)$ und $D^{(\alpha)}(g)$ des Einteilchenzustandes $|f^{(\alpha)},\alpha\rangle$. Da $(f^{(\alpha)}(p)\cdot c^{(\alpha)}_{nk}(p_1,\ldots,p_n))$ eine Funktion aus $\mathcal{S}^{(4n)}$ ist, sind die in (I,27) definierten $B^{(\alpha)}(f^{(\alpha)},t)$ und $B^{(\alpha)}(f^{(\alpha)},t)$ wohldefinierte lorentzskalare Operatoren.

Die starke Konvergenz von (I,26) wurde von HEPP in (He65) bewiesen. Die SG-Symmetrie, welche die Argumente der auftretenden Größen nicht betrifft, ändert den Heppschen Beweis nicht wesentlich. Es muß lediglich gezeigt werden, daß es kovariante Funktionen $c^{(\alpha)}_{nk}(p_1,\ldots,p_n)\in\mathcal{S}^{(4n-3)}$ gibt mit den Eigenschaften (I,30 - 32).

HEPP hat gezeigt, daß kovariante Testfunktionen $\mathcal{C}(p_1,..,p_n)\in\mathcal{S}^{(4n-3)}$ mit den Eigenschaften (I,30) und (I,31) existieren. Testfunktionen, die zusätzlich die SG-Eigenschaft (I,32) besitzen, sind gegeben durch:

$$C^{(\alpha)}_{nk}(p_1\ldots p_n)=\Big[\,C^{(\alpha)}_{\mu_\alpha\nu_\alpha|\nu_1\nu_2 a_{21}\nu_3 a_{32}\ldots\nu_k a_{k1}\nu_{k+1}a_{k+1,2}\ldots\nu_n a_{n1}}(p_1\ldots p_n)\Big]=\Big[\mathcal{C}_{\mu_\alpha\nu_\alpha|\nu_1\ldots\nu_k;\ldots\nu_n}(p_1\ldots p_n)\cdot\overline{T}^{(\alpha)}_{a_1\ldots a_{k1}a_{k+1,2}\ldots a_{n1}}\Big],\quad (I,36)$$

wobei $\mu_\alpha,\nu_\alpha|\nu_1\ldots\nu_k\ldots\nu_n$ die Vektor- bzw. Spinorindizes, $a_1\ldots a_k,a_{k+1}\ldots a_n$ die Symmetrieindizes, $\mathcal{C}(p_1,..,p_n)$ die HEPP'schen lorentzkovarianten Funktionen sind und $T^{(\alpha)}$ gegeben ist durch:

$$T^{(\alpha)}_{a_1,\ldots a_k,a_{k+1}\ldots a_n}=\sum_{\mu_i,b_i}\left(\begin{smallmatrix}q & q\\ a_1 & a_2\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu_1\\ b_1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}q & \mu_1\\ a_3 & b_1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu_2\\ b_2\end{smallmatrix}\right)\cdots\left(\begin{smallmatrix}q & \mu_{k-2}\\ a_k & b_{k-2}\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu_{k-1}\\ b_{k-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\bar q & \mu_{k-1}\\ a_{k+1} & b_{k-1}\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu_k\\ b_k\end{smallmatrix}\right)\cdots\left(\begin{smallmatrix}\bar q & \mu_{n-2}\\ a_n & b_{n-2}\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu_\alpha\\ \alpha\end{smallmatrix}\right).\quad (I,37)$$

$\left(\begin{smallmatrix}q & \mu_i\\ a_i & b_i\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu_e\\ b_e\end{smallmatrix}\right)$ sind die im ANHANG 2 definierten Clebsch-Gordon-Koeffizienten der SG, durch welche die SG-Darstellungen $(q)=(Y_q,I_q)$, $\mu_i=(Y_i,I_i)$ zur Darstellung $\mu_1=(Y_1,I_1)$ gekoppelt werden.

Ausgehend von dem Ausdruck (I,37) für $T^{(\alpha)}$ gelangt man durch Permutation der a_i zu weiteren SG-Kovarianten, welche ebenfalls die Eigenschaft (I,32) besitzen. Wegen dieser Vieldeutigkeit in der Konstruktion der $T^{(\alpha)}$ und der Freiheit in der speziellen Wahl der Lorentzkovarianten $\mathcal{C}(p_1,..,p_n)$ sind die Operatoren $B^{(\alpha)}(p)$ durch (I,29) nicht eindeutig definiert. Es ist möglich, die $c^{(\alpha)}_{nk}$ so zu normieren, daß:

$$(2\pi)^{3/2}\,\langle 0|\,B^{(\alpha)}(x)\,|p,u^{(\alpha)},\alpha\rangle=u^{(\alpha)}(p)\,e^{-ipx}\qquad (I,38)$$

wird.

In den von den Vektoren (I,26) aufgespannten Teilräumen $\mathfrak{H}_{ex}\subset\mathfrak{H}$ wird durch:

$$\langle f^{(\alpha_1')}_{,}\alpha_1'\ldots f^{(\alpha_n')}_{,}\alpha_n'\,|\,f^{(\alpha_1)}_{,}\alpha_1\ldots f^{(\alpha_n)}_{,}\alpha_n\rangle\equiv\sum_{P\,\mathrm{perm.}\,\alpha_i}(-1)^{s(P_f)}\langle f^{(\alpha_1')}\alpha_1'|f^{(\alpha_1)}\alpha_1\rangle\cdots\langle f^{(\alpha_n')}\alpha_n'|f^{(\alpha_n)}\alpha_n\rangle\qquad (I,39)$$

(P_f: Fermionenpermutation)

ein Skalarprodukt definiert. Die Räume $\mathfrak{H}_{ex}$ können durch Abschließung

vervollständigt werden zu den Hilberträumen $\mathcal{H}_{ex}$, welche die Zustandsvektoren der Streuzustände von Teilchen mit beliebiger, nicht mehr auf $\mathcal{S}^{(3)}$ eingeschränkter, normierbarer Wellenfunktion $f^{(\alpha)}$ enthalten.

Zusammen mit der Existenz von freien Quarks wird für das Folgende die Vollständigkeit

$$\mathcal{H}_{ein} = \mathcal{H} = \mathcal{H}_{aus} \qquad \text{(I,40)}$$

der asymptotischen Zustandsräume $\mathcal{H}_{ex}$ gefordert.

Es ist auch eine Theorie denkbar, in welcher es keine Ein-Quarkzustände im Einteilchenhilbertraum $\mathcal{H}_1$ gibt. Dann sind mit Hilfe des Haag-Ruell'schen Verfahrens keine asymptotischen Zustände konstruierbar, welche freie ein- oder auslaufende Quarks enthalten. Die Hilberträume der asymptotischen Zustände sind nicht mehr vollständig. Ob eine solche Theorie ohne freie Quarks sinnvoll durchführbar ist, soll hier nicht untersucht werden, obleich diese Frage im Zusammenhang mit dem Problem der Existenz von Quarks interessant sein könnte.

Mit Hilfe der durch

$$A^{*(\alpha)}_{ex}(f)\,|k\rangle_{ex} = |f^{(\alpha)}, \alpha; k\rangle_{ex} \qquad A^{*(\bar{\alpha})}_{ex}(f)\,|k\rangle_{ex} = |f^{(\bar{\alpha})}, \bar{\alpha}; k\rangle_{ex} \qquad \text{(I,41)}$$

in $\mathcal{H}_{ex}$ definierten Erzeugungsoperatoren und ihrer Adjungierten lassen sich in bekannter Weise freie Felder einführen:

$$A^{(\alpha)}_{ex}(x) = \sum_f A^{(\alpha)}_{ex}(f)\cdot f^{(\alpha)}(x) + A^{*(\alpha)}_{ex}(f)\cdot f^{(\bar{\alpha})}(x) \qquad \bar{A}^{(\alpha)}_{ex}(x) = \sum_f A^{*(\alpha)}_{ex}(f)\cdot \bar{f}^{(\alpha)}(x) + A^{(\alpha)}_{ex}(f)\cdot \bar{f}^{(\bar{\alpha})}(x) \qquad \text{(I,42)}$$

Die Summe erstreckt sich über einen vollständigen Satz orthogonaler Wellenfunktionen $f^{(\alpha)}(x)$, die Lösungen einer freien Feldgleichung zur Darstellung $(M,s) \subset (\alpha)$ sind. Die lokalen freien Felder genügen nach Konstruktion derselben freien Feldgleichung und erfüllen kanonische Vertauschungsrelationen, welche aus den Vertauschungsrelationen

$$\left[A^{(\alpha)}_{ex}(f), A^{*(\alpha')}_{ex}(f')\right]_{\mp} = \delta_{\alpha'\alpha}\cdot(f,f')^{\,1)} \qquad \begin{matrix} + \text{ Fermionen} \\ - \text{ Bosonen} \end{matrix} \qquad \text{(I,43)}$$

der Teilchenerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgen.

Eine Erweiterung des Satzes von HAAG und RUELLE auf kovariante Operatoren, deren Testfunktionen $c^{(\alpha)}_{nk}$ nicht notwendig die Trägereigenschaft (I,30) besitzen, ist die wichtige

ALLGEMEINE ASYMPTOTENRELATION: Ist $B^{(\alpha)}(x)$ ein nicht notwendig lokaler Operator, der transformiert wie das freie Feld $A^{(\alpha)}_{ex}(x)$ des Teilchens α und der die Eigenschaft $\langle 0|B^{(\alpha)}(x)|0\rangle = 0$ hat, so gilt für alle $|k\rangle \in \mathcal{H}_{ex}$ und alle $|k'\rangle \in \mathcal{S}_{ex}$:

---

1) $(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha')})$ ist das in ANHANG 1 definierte Skalarprodukt im Raum der Wellenfunktionen.

$$\lim_{x_0\to\infty} i\int d\vec{x}\ \langle \bar{f}^{(\alpha)},\alpha|\bar{B}^{(\alpha)}(x)|0\rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle k|B^{(\alpha)}(x)|k'\rangle = c_\alpha^2 \langle k|A_{ex}^{(\alpha)}(f)|k'\rangle$$

$$\lim_{x_0\to\infty} i\int d\vec{x}\ \langle k|\bar{B}^{(\alpha)}(x)|k'\rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle f^{(\alpha)},\alpha|B^{(\alpha)}(x)|0\rangle = c_\alpha^2 \langle k|A_{ex}^{(\alpha)}(f)|k'\rangle$$

$$\lim_{x_0\to\infty} i\int d\vec{x}\ \langle k|\bar{B}^{(\alpha)}(x)|k'\rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle 0|B^{(\alpha)}(x)|f^{(\alpha)},\alpha\rangle = c_\alpha^2 \langle k|\bar{A}_{ex}^{(\alpha)}(f)|k'\rangle \qquad (I,44)$$

$$\lim_{x_0\to\infty} i\int d\vec{x}\ \langle 0|\bar{B}^{(\alpha)}(x)|\bar{f}^{(\alpha)},\alpha\rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle k|B^{(\alpha)}(x)|k'\rangle = c_\alpha^2 \langle k|\bar{A}_{ex}^{(\alpha)}(f)|k'\rangle$$

mit ex = ein,aus für $x_0 \longrightarrow \pm\infty$, $f\overleftrightarrow{\partial}_0 g = f\cdot\overrightarrow{\partial}_0 g - f\overleftarrow{\partial}_0\cdot g$ und einer impliziten Summation über die Spinindizes von $B^{(\alpha)}$ und $\bar{B}^{(\alpha)}$. Die Normierungskonstanten c_α^2 sind gegeben durch:

$$c_\alpha^2 = i\int d\vec{x}\ \langle f^{(\alpha)},\alpha|B^{(\alpha)}(x)|0\rangle \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle 0|B^{(\alpha)}(x)|f^{(\alpha)},\alpha\rangle \quad . \qquad (I,45)$$

Diese von HEPP (He65) und von ARAKI und HAAG (Ar67) bewiesenen Asymptotenrelationen stellen im dichten Teilraum $\mathfrak{D}_{ex} \subset \mathfrak{H}$ eine Verallgemeinerung der bekannten LSZ-Asymtotenbedingung dar. Eine wichtige Folgerung aus der allgemeinen Asymptotenrelation ist der

SATZ: Jeder kovariante Operator $B^{(\alpha)}(x)$ mit $\langle 0|B^{(\alpha)}(x)|f^{(\alpha)},\alpha\rangle \neq 0$ ist ein interpolierendes Feld des Teilchens α .

Die allgemeine Asymptotenrelation (I,44) soll im nächsten Kapitel dazu benutzt werden, die S-Matrix und andere Matrixelemente auf die Greenschen Funktionen

$$\tau(x_1,\dots,x_k,x_{k+1}\dots x_n) \equiv \langle 0|T(\psi(x_1)\cdots\psi(x_k)\bar{\psi}(x_{k+1})\cdots\bar{\psi}(x_n))|0\rangle \qquad (I,46)$$

des Quarkfeldes zurückzuführen. T(.....) ist der z.B. in (Sc61) definierte Wick-Zeitordnungsoperator. Bei dieser Reduktion wird verzichtet auf eine Glättung der auftretenden Distributionen durch Testfunktionen. Es wird also formal mit den Distributionen (I,46) wie mit Funktionen gerechnet und angenommen, daß die lokalen Greenschen Funktionen als Grenzwert von geeignet geglätteten Ausdrücken (He65) einen Sinn machen. Weiterhin wird die Beschränkung $|k'\rangle \in \mathfrak{D}_{ex}$ in (I,44) fallengelassen.

3. REDUKTION DER S-MATRIX UND GREENSCHE FUNKTIONEN

Alle Information, welche eine Feldtheorie über den Ausgang von Streuexperimenten geben kann, ist enthalten in der S-Matrix. Diese ist definiert durch:

$$S_{kk'} = {}_{aus}\langle k'|k\rangle_{ein} \qquad (I,47)$$

mit $|k'\rangle_{aus} \in \mathcal{H}_{aus}$ und $|k\rangle_{ein} \in \mathcal{H}_{ein}$. $|S_{k'k}|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einem System mit der durch die Quantenzahlen k charakterisierten Anfangskonfiguration eine durch k' charakterisierte Endkonfiguration beobachtet wird. Wegen der asymptotischen Vollständigkeit (I,40) existiert ein Operator S mit den Eigenschaften:

$$|k\rangle_{ein} = S\,|k\rangle_{aus} \qquad |k\rangle_{aus} = S\,|k\rangle_{ein} \tag{I,48}$$

für alle $|k\rangle_{ex}$ aus $\mathcal{H}_{ex}$, der $\mathcal{H}_{ein}$ auf $\mathcal{H}_{aus}$ abbildet. Aus (I,48) folgt speziell:

$$A^{(\alpha)}_{aus}(x) = S^{-1} A^{(\alpha)}_{ein}(x) \cdot S \tag{I,49}$$

für die in (I,42) definierten freien Felder $A^{(\alpha)}_{ex}(x)$ des Teilchens α. Mit der Eigenschaft (I,49) ergeben sich aus den allgemeinen Asymptotenrelationen (I,44) die

REDUKTIONSFORMELN: Im Sinne schwacher Operatorkonvergenz gilt

$$\begin{aligned}
c_\alpha^{-1}\left[S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)),\, A^{(\alpha)}_{ein}(f)\right]_\mp &= i\int dx\, \langle f^{(\alpha)},\alpha|\,\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)|0\rangle \overrightarrow{K}\cdot S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)) \\
c_\alpha^{-1}\left[S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)),\, A^{*(\bar\alpha)}_{ein}(f)\right]_\mp &= i\int dx\, S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)) \overleftarrow{K}\, \langle 0|\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)|f^{(\alpha)},\alpha\rangle \\
c_\alpha^{-1}\left[S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)),\, A^{(\bar\alpha)}_{ein}(f)\right]_\mp &= i\int dx\, S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)) \overleftarrow{K}\, \langle f^{(\bar\alpha)},\bar\alpha|\,\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)|0\rangle \\
c_\alpha^{-1}\left[S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)),\, A^{*(\bar\alpha)}_{ein}(f)\right]_\mp &= i\int dx\, \langle 0|\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)|f^{(\bar\alpha)},\bar\alpha\rangle \overrightarrow{K}\, S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdot\mathcal{B}(x_n)\mathcal{B}^{(\alpha)}(x))
\end{aligned} \tag{I,50}$$

mit dem Klein-Gordon-Operator $K = (\Box + M^2)$, den durch (I,45) festgelegten Normierungskonstanten c_α und den aus zeitgeordneten Produkten aufgebauten interpolierenden Feldern

$$\mathcal{B}^{(\alpha)}(x) = \sum_{nk}\int dx_1\cdots dx_n\; T\left(\Psi(x_1)\cdots\overline{\Psi}(x_k)\, C^{(\alpha)}_{nk}(x_1+x,\ldots,x_n+x)\,\Psi(x_{k+1})\cdots\Psi(x_n)\right) \tag{I,51}$$

Die kovarianten Funktionen $C^{(\alpha)}_{nk}(x_1,..,x_n)$ müssen bezüglich der Variablen x_{io} einen kompakten Träger besitzen. Die Reduktionsformeln für $A^{(\alpha)}_{aus}(f)$ folgen aus (I,50) mit (I,49).

Der Beweis dieser Reduktionsformeln verläuft fast vollständig wie der bekannte Beweis der LSZ-Reduktionsformeln und soll daher nur für die erste der Relationen (I,50) kurz angegeben werden. Es ist:

$$\begin{aligned}
c_\alpha^{-1}\left[S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)),\, A^{(\alpha)}_{ein}(f)\right]_\mp &= c^{-1}\left[S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n))\cdot A^{(\alpha)}_{ein}(f) \pm A^{(\alpha)}_{ein}\, S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n))\right] = \text{wegen (I,49)} \\
&= c_\alpha^{-1}\left[S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)\, A^{(\alpha)}_{ein}(f) \pm S\cdot A^{(\alpha)}_{aus}(f)\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n))\right] = \text{wegen (I,44)} \\
&= \lim_{x_o\to-\infty} i\int d\vec{x}\, \langle f^{(\alpha)},\alpha|\,\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)|0\rangle \overleftrightarrow{\partial_o}\, S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n))\mathcal{B}^{(\alpha)}(x) \pm \lim_{x_o\to+\infty} i\int d\vec{x}\, \langle f^{(\alpha)},\alpha|\,\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)|0\rangle \overleftrightarrow{\partial_o}\, S\cdot\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)) = \\
&= \lim_{x_o\to-\infty} i\int d\vec{x}\, \langle f^{(\alpha)},\alpha|\,\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)|0\rangle \overleftrightarrow{\partial_o}\, S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)) - \lim_{x_o\to+\infty} i\int dx\, \langle f^{(\alpha)},\alpha|\,\overline{\mathcal{B}}^{(\alpha)}(x)|0\rangle \overleftrightarrow{\partial_o}\, S\cdot T(\mathcal{B}(x_1)\cdots\mathcal{B}(x_n)\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)) =
\end{aligned}$$

$$= -i\int dx\,\partial_x^{\rightarrow}\left[\langle f^{(\alpha)}_{,\alpha}|\bar{B}^{(\alpha)}(x)|0\rangle\,\partial_0^{\rightarrow} S\cdot T(B(x_1)\cdots B(x_n)B^{(\alpha)}(x))\right] = i\int dx\,\partial^{\rightarrow}\left[\langle f^{(\alpha)}_{,\alpha}|\bar{B}^{(\alpha)}(x)|0\rangle\,\overleftarrow{\partial}_\mu\, S\,T(B(x_1)\cdots B^{(\alpha)}(x))\right] =$$

$$= i\int dx\,\langle f^{(\alpha)}_{,\alpha}|\bar{B}^{(\alpha)}(x)|0\rangle\,(\vec{\Box}+M_\alpha^2)\,S\cdot T(B(x_1)\cdots B(x_n)B^{(\alpha)}(x))\quad .$$

Hierbei wurde Gebrauch gemacht von der Tatsache, daß $(\Box+M_\alpha^2)\,f^{(\alpha)}(x) = 0$ ist. Der Schluß von Zeile 3 auf Zeile 4 zeigt, daß es von der Zahl der Fermionenoperatoren abhängt, ob in (I,50) das + oder das - Zeichen zu nehmen ist.

Durch sukzessive Anwendung der Reduktionsformeln (I,50) auf die S-Matrix erhält man:

$$S_{K'K} = {}_{aus}\langle K'|K\rangle_{ein} = {}_{aus}\left\langle f^{(\alpha'_1)}_{,\alpha'_1}\cdots f^{(\alpha'_{n'})}_{,\alpha'_{n'}}\,f^{(\bar{\alpha}'_1)}_{,\bar{\alpha}'_1}\cdots f^{(\bar{\alpha}'_{m'})}_{,\bar{\alpha}'_{m'}}\,\middle|\,f^{(\alpha_1)}_{,\alpha_1}\cdots f^{(\alpha_n)}_{,\alpha_n}\,f^{(\bar{\alpha}_1)}_{,\bar{\alpha}_1}\cdots f^{(\bar{\alpha}_m)}_{,\bar{\alpha}_m}\right\rangle_{ein} = {}_{aus}\langle K'|K\rangle_{aus} +$$

$$+\prod_{i=1}^{n'}\prod_{j=1}^{m'}\prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m}\left[\frac{i}{c^{\alpha'_i}_{\alpha_k}}\int dx'_i\,\langle f^{(\alpha'_i)}_{,\alpha'_i}|\bar{B}^{(\alpha'_i)}(x'_i)|0\rangle\,\vec{K}'_i\right]\cdot\left[\frac{-i}{c^{\bar{\alpha}'_j}_{\bar{\alpha}_\ell}}\int dy_\ell\,\langle 0|\bar{B}^{(\alpha_k)}(y_\ell)|f^{(\bar{\alpha}'_j)}_{,\bar{\alpha}_\ell}\rangle\,\vec{K}_\ell\right]\cdot\langle 0|T(B^{(\alpha'_1)}(x'_1)\cdots B^{(\alpha'_{n'})}(x'_{n'})\cdot B^{(\alpha_1)}(y_1)\cdots$$

$$\cdots B^{(\alpha_n)}(y_n)\,\bar{B}^{(\alpha_1)}(x_1)\cdots\bar{B}^{(\alpha_n)}(x_n)\,\bar{B}^{(\bar{\alpha}_1)}(y'_1)\cdots\bar{B}^{(\bar{\alpha}_{m'})}(y'_{m'}))|0\rangle\cdot\left[\frac{i}{c^{\alpha_k}_{\alpha'_i}}\int dx_k\,\overleftarrow{K}_k\langle 0|B^{(\alpha_k)}(x_k)|f^{(\alpha'_i)}_{,\alpha_k}\rangle\right]\left[\frac{-i}{c^{\bar{\alpha}_\ell}_{\bar{\alpha}'_j}}\int dx\,\overleftarrow{K}'_j\langle f^{(\bar{\alpha}'_j)}_{,\bar{\alpha}'_j}|B^{(\alpha'_j)}(y'_j)|0\rangle\right] \quad (I,52)$$

[1]

Da die $B^{(\alpha)}(x)$ selbst aus zeitgeordneten Produkten aufgebaut sind, (I,51), ist hiermit gezeigt, daß sich alle S-Matrixelemente auf die Greenschen Funktionen (I,46) des Quarkfeldes zurückführen lassen. Ähnlich ließe sich eine Reduktion auf die retardierten oder avancierten Funktionen durchführen.

Der Ausdruck (I,52) enthält als Spezialfälle die Darstellungen der S-Matrix für gebundene Zustände von ZIMMERMANN (Zi58) und von NISHIJIMA (Ni58).

Die Zurückführung der S-Matrix auf die τ-Funktionen ist nicht eindeutig, weil sich zu einem Teilchen α eine ganze Klasse von interpolierenden Feldern konstruieren läßt. Man wird jedoch mit einer möglichst kleinen Zahl von Quarkfeldern arbeiten, um zu τ-Funktionen minimaler Ordnung zu gelangen, die in einem speziellen dynamischen Modell berechenbar sein könnten.

In dem durch die Axiome definierten Rahmen scheint eine solche Berechnung jedoch noch nicht möglich zu sein. Trotzdem lassen sich in diesem Rahmen einige allgemeine Aussagen über bestimmte S-Matrixelemente machen. Solche Aussagen sind die bekannten Dispersionsrelationen. Diese folgen aus den Analytizitätseigenschaften bestimmter Matrixelemente, die von JOST, LEHMANN, DYSON u.a. aus der Lokalität und den Spektrumseigenschaften abgeleitet wurden. Diese Aussagen sollten auch in einer Quarkfeldtheorie möglich sein. Wenn für die phänomenologischen Teilchen lokale interpolierende Felder konstruiert werden können, so ergeben

[1] Die Integrale $\int$ erstrecken sich auch über die links von ihnen stehenden Ausdrücke.

sich mit (I,52) die gleichen Ausdrücke für die Streuamplitude wie in der LSZ-Theorie. Diese aber sind der Ausgangspunkt für die Beweise von Dispersionsrelationen.

4. PHÄNOMENOLOGISCHE FELDER

Zur Erläuterung der Ausführungen in den vorangehenden Kapiteln sollen für die pseudoskalaren Mesonen (P), die Vektormesonen (V), die $1/2^+$-Baryonen (B) und die $3/2^+$-Baryonenresonanzen (D) kovariante interpolierende Felder konstruiert werden.

Unter der Voraussetzung, daß für die pseudoskalaren Mesonen und Vektormesonen $\langle 0|T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))|f^{(\alpha)},\alpha\rangle \neq 0$ ist, sind nichtlokale kovariante Mesonfelder gegeben durch:

$$\underline{{}_c\Phi_5^{(P)}(x) = i\int dx_1 dx_2\; T\left(\bar{\Psi}(x_1)\gamma_x\gamma_5 \overset{\pi}{T}{}^{(P)}\Psi(x_2)\right) c^{(P)}(x-x_1,x-x_2)} \qquad (I,53)^{1)}$$

$$\underline{{}_c\Phi_\mu^{(V)}(x) = \int dx_1 dx_2\; T\left(\bar{\Psi}(x_1)\gamma_\mu \overset{\pi}{T}{}^{(V)}\Psi(x_2)\right) c^{(V)}(x-x_1,x-x_2)} \quad . \qquad (I,54)^{1)}$$

Die Funktionen $c^{(\alpha)}(x_1,x_2) = (2\pi)^{-4}\int dp_1 dp_2 \cdot \tilde{c}^{(\alpha)}(p_1,p_2)\cdot \exp i(p_1x_1+p_2x_2)$ sind invariante Funktionen aus $\mathcal{S}^{(3)}$. Die SG-Kovarianten $T^{(P)}$ und $T^{(V)}$ sind die in (II,7) angegebenen 3×3-Matrizen mit der Eigenschaft:

$$\underline{D(g)\cdot \overset{\pi}{T}{}^{(I,Y,I_3)} D(g)^{-1} = \overset{\pi}{D}{}^{(I,Y)}_{I_3I_3'}(g)\cdot \overset{\pi}{T}{}^{(I,Y,I_3')}} \quad . \qquad (I,55)^{1)}$$

Kovariante nichtlokale Baryonenfelder sind gegeben durch:

$$\underline{{}_c\Phi_\nu^{(B)}(x) = \int dx_1 dx_2 dx_3\; (\gamma_5 C)_{\nu_2\nu_3}\cdot T^{(B)}_{a_1a_2a_3}\cdot T\left(\Psi_{\nu a_1}(x_1)\Psi_{\nu_2 a_2}(x_2)\Psi_{\nu_3 a_3}(x_3)\right)\cdot c^{(B)}(x-x_1,x-x_2,x-x_3)} \qquad (I,56)^{1)}$$

$$\underline{{}_c\Phi_{\nu\mu}^{(D)}(x) = \int dx_1 dx_2 dx_3\; (\gamma_\mu C)_{\nu_2\nu_3}\cdot T^{(D)}_{a_1a_2a_3}\cdot T\left(\Psi_{\nu a_1}(x_1)\Psi_{\nu_2 a_2}(x_2)\Psi_{\nu_3 a_3}(x_3)\right)\cdot c^{(D)}(x-x_1,x-x_2,x-x_3)} \quad , \qquad (I,57)^{1)}$$

wenn für diese Baryonen $\langle 0|T(\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_3))|f^{(\alpha)},\alpha\rangle \neq 0$ ist. Die Funktionen $c^{(\alpha)}(x_1x_2,x_3)$ sind invariante Funktionen aus $\mathcal{S}^{(3)}$. $T^{(B)}$ und $T^{(D)}$ sind die in (II,6) bzw. (II,8) definierten Tensoren mit der Eigenschaft:

$$\underline{T^{(I,Y,I_3)}\,\overset{\pi}{D}(g)\cdot\overset{\pi}{D}(g)\cdot\overset{\pi}{D}(g) = \overset{\pi}{D}{}^{(I,Y)}_{I_3I_3'}\,T^{(I,Y,I_3')}} \quad . \qquad (I,58)$$

Ähnlich lassen sich auch interpolierende Felder für andere phänomenologische Teichen konstruieren.

Mit Hilfe dieser speziellen interpolierenden Felder und mit den Reduktionsformeln (I,50) lassen sich z.B. die elastischen Meson-Meson-, Meson-Baryon- und Baryon-Baryon-Streuamplituden auf die Greenschen Funktionen $\langle 0|T(\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_4)\bar{\Psi}(x_5)\cdots\bar{\Psi}(x_8))|0\rangle$, $\langle 0|T(\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_5)\bar{\Psi}(x_6)\cdots\bar{\Psi}(x_{10}))|0\rangle$ bzw. $\langle 0|T(\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_6)\bar{\Psi}(x_7)\cdots\bar{\Psi}(x_{12}))|0\rangle$ zurückführen.

---

1) Siehe Fußnoten auf den Seiten 4, 6 und 7. Hier, wie im folgenden wird die Feynman-Abkürzung $\not{p} = p_\mu\gamma^\mu$ verwendet.

Wählt man eine Folge von Funktionen $\tilde{c}_n^{(\alpha)}(p_1,p_2)$ bzw. $\tilde{c}_n^{(\alpha)}(p_1,p_2,p_3)$, die $n \to \infty$ gegen eine Konstante konvergiert, so wird

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(\alpha)}(x_1,x_2) = c_\alpha^{-1}\cdot\delta^{(\nu)}(x_1)\cdot\delta^{(\nu)}(x_2) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} c_n^{(\alpha)}(x_1,x_2,x_3) = c_\alpha^{-1}\cdot\delta^{(\nu)}(x_1)\cdot\delta^{(\nu)}(x_2)\cdot\delta^{(\nu)}(x_3)\,.$$

Die mit dieser Folge durch (I,53,54) und (I,56,57) definierten Folgen von Operatoren konvergieren für $n \to \infty$ formal gegen lokale phänomenologische Felder. Es ist jedoch nicht bekannt, ob ein solcher Grenzwert existiert und die resultierenden lokalen Felder operatorwertige Distributionen sind, die mit Testfunktionen aus $\mathcal{S}^{(\nu)}$ geglättet werden können. Nimmt man aber einmal an, die folgenden Ausdrücke machen als Grenzwerte solcher Operatorfolgen einen Sinn, so sind lokale interpolierende Felder der phänomenologischen Teilchen gegeben durch:

$$\phi_5^{(P)}(x) = \frac{i}{c_P}\,\partial^\mu\, T\big(\bar\Psi(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\,\bar T^{(P)}\,\Psi(x)\big) \qquad \text{(I,59)}$$

$$\phi_\mu^{(V)}(x) = \frac{1}{c_V}\; T\big(\bar\Psi(x)\,\gamma_\mu\, T^{(V)}\,\Psi(x)\big) \qquad \text{(I,60)}$$

$$\phi_\nu^{(B)}(x) = \frac{1}{c_B}\,(\gamma_5 C)_{\nu_1\nu_2}\,T^{(B)}_{a_1a_2a_3}\; T\big(\Psi_{\nu a_1}(x)\,\Psi_{\nu_2 a_2}(x)\,\Psi_{\nu_3 a_3}(x)\big) \qquad \text{(I,61)}$$

$$\phi_{\nu\mu}^{(D)}(x) = \frac{1}{c_D}\,(\gamma_\mu C)_{\nu_1\nu_2}\,T^{(D)}_{a_1a_2a_3}\; T\big(\Psi_{\nu a_1}(x)\,\Psi_{\nu_2 a_2}(x)\,\Psi_{\nu_3 a_3}(x)\big)\,. \qquad \text{(I,62)}$$

Die Konstanten c_α werden festgelegt durch die Normierungsbedingung:

$$(2\pi)^{3/2}\langle 0|\,\phi^{(\alpha)}(x)\,|\,p,u^{(\alpha)},\alpha\rangle = u^{(\alpha)}(p)\cdot e^{-ipx}\,; \quad \alpha = P,V,B,D\,. \qquad \text{(I,38)}$$

Das gleichzeitige zeitgeordnete Produkt in (I,59,60) ist definiert als:

$$T\big(\bar\Psi(x)\,\Psi(x)\big) = \tfrac{1}{2}\big[\bar\Psi(x),\Psi(x)\big]_-\,.$$

Aus dem Transformationsverhalten des Quarkfeldes und den Eigenschaften (I,55) und (I,58) der speziellen SG-Kovarianten $T^{(\alpha)}$ folgt für die durch (I,59-62) definierten phänomenologischen Felder $\phi^{(\alpha)}(x)$ das bekannte Transformationsverhalten bezüglich Lorentz-, Isospin- und Eichtransformationen sowie der Parität und Ladungskonjugation.

Es muß betont werden, daß (I,59-62) nicht die einzigen phänomenologischen Felder sind, die sich aus Quarkfeldern für die angegebenen Teilchen aufbauen lassen. Für die pseudoskalaren Mesonen wäre z.B. auch der Operator $\frac{1}{c_P}\,T\big(\Psi(x)\,\gamma_5\,T^{(P)}\,\Psi(x)\big)$ ein mögliches interpolierendes Feld, vorausgesetzt allerdings, daß $c_P' \neq 0$.

Die S-Matrixelemente der phänomenologischen Teilchen P,V,B,D lassen sich mit Hilfe der Reduktionsformeln und (I,59-62) auf die zeitgeordneten Produkte von phänomenologischen oder von Quark-Feldern reduzie-

ren. So ist z.B. die Amplitude $i\,T(k',k) = S_{k'k} - 1$ für die elastische Meson-Meson-Streuung gegeben durch:

$$(2\pi)^6 i\,T(p_1',p_2',p_1,p_2) = \int dx_1' dx_2' dx_1 dx_2\; e^{i(p_1'x_1' + p_2'x_2' - p_1x_1 - p_2x_2)} K_1' K_2' K_1 K_2 \langle 0|T(\phi^{(P_1')}(x_1')\phi^{(P_2')}(x_2')\phi^{(P_1)}(x_1)\phi^{(P_2)}(x_2))|0\rangle$$

mit dem Feld $\phi^{(P)}(x)$ aus (I,59).

Die Zurückführung von physikalischen Matrixelementen auf die τ-Funktionen des Quarkfeldes hat eigentlich erst dann einen Sinn, wenn spezielle Eigenschaften dieser τ-Funktionen bekannt sind, aus denen mehr Aussagen resultieren, als aus einer Feldtheorie ohne Quarkfelder. Die bisher aus den Axiomen ableitbaren Aussagen über die τ-Funktionen reichen jedoch nicht einmal aus, zu entscheiden, ob Konstruktionen wie (I,59-62) überhaupt einen Sinn machen. Beim Beweis von Dispersionsrelationen stellt die Einführung von Quarkfeldern einen zweifelhaften Umweg dar.

Es ist jedoch möglich die Fragestellung umzukehren. Man kann untersuchen, welche Eigenschaften spezielle Greensche Funktionen des Quarkfeldes besitzen müssen, damit sich die experimentell bestätigten Aussagen des nichtrelativistischen Quarkmodells ergeben. Es besteht die Möglichkeit, daß die gleichen Eigenschaften zu weiteren, bisher unbekannten Relationen führen, die als Voraussagen einer Quarkfeldtheorie anzusehen sind.

Wegen der nicht eindeutigen Konstruktion von phänomenologischen Feldern aus den Quarkfeldern ist die Beziehung zwischen τ-Funktionen und physikalischen Matrixelementen vieldeutig. Die reduzierte Form (I,52) der allgemeinen S-Matrixelemente zeigt zudem, daß die physikalischen S-Matrixelemente nur durch die Residuen der fouriertransformierten τ-Funktionen $\tilde{\tau}(p_1,..,p_n)$ bestimmt werden. Vermutungen über die Eigenschaften der τ-Funktionen ist daher großer Raum gegeben. Es ist trotzdem schwer, brauchbare und zugleich mit den Axiomen verträgliche Ansätze zu finden und zu formulieren.

Solche Ansätze sollen im zweiten Teil dieser Arbeit untersucht werden. Zunächst werden die allgemeinen Eigenschaften abgeleitet, die sich aus den Axiomen für die Zweipunktfunktion des Quarkfeldes und die Bethe-Salpeter-Amplituden von Mesonen und Baryonen ergeben. Diese Eigenschaften sowie die anschließend definierten Ströme werden im zweiten Teil der Arbeit benötigt.

5. SPEZIELLE MATRIXELEMENTE

a. Zweipunktfunktionen

Für die Zweipunktfunktionen:

$$-i\,S'^{(+)}(x,x') = \langle 0|\Psi(x)\,\bar{\Psi}(x')|0\rangle \qquad -i\,S'^{(-)}(x,x') = \langle 0|\bar{\Psi}(x')\,\Psi(x)|0\rangle^{T} \qquad (I,63)$$

des Quarkfeldes läßt sich nach LEHMANN (Le54) aus den Axiomen eine allgemeine Spektraldarstellung ableiten. Durch Einschieben eines vollständigen Systems (I,19) von Zuständen folgt unter Benutzung der Translationseigenschaften (I,3) und (I,6) :

$$S'^{(\pm)}(x,x') = S'^{(\pm)}(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^3}\cdot\int_0^\infty dm^2 \int dp\; \delta(p^2-m^2)\,\Theta(p_0)\,\varrho^{(\pm)}(p,m)\,e^{\mp ip(x-x')} \qquad (I,64)$$

mit

$$\varrho^{(+)}(p,m) = (2\pi)^3\cdot\sum_\beta \delta(m^2-\beta)\,\langle 0|\Psi(0)|p\beta\rangle\langle p\beta|\bar{\Psi}(0)|0\rangle \qquad \varrho^{(-)}(p,m) = (2\pi)^3\cdot\sum_\beta \delta(m^2-\beta)\,\langle p\beta|\Psi(0)|0\rangle\langle 0|\bar{\Psi}(0)|p\beta\rangle \qquad .(I,65)$$

Die 12×12-Matrizen $\varrho^{(\pm)}(p,m) = (\varrho^{(\pm)}_{\nu\alpha,\nu'\alpha'}(p,m))$ haben wegen des Transformationsverhaltens (I,3,8,9,16) die Eigenschaften:

$$\varrho^{(\pm)}(p) = \bar{S}^{-1}(\Lambda)\,\varrho^{(\pm)}(\Lambda p)\,S(\Lambda) \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{L}_g^\uparrow \qquad (I,66)$$

$$\varrho^{(-)}(p) = -\,C\,\varrho^{(+)}(p)\,C^{-1} \qquad (I,67)$$

$$\varrho^{(\pm)}(p) = \bar{\mathcal{D}}^{-1}(g)\,\varrho^{(\pm)}(p)\,\mathcal{D}(g) \qquad \forall g \in SG \quad . \qquad (I,68)$$

Aus der Definition (I,65) folgt weiterhin die Hermitezitätseigenschaft

$$\varrho^{(\pm)}(p) = \gamma_0\,\varrho^{+(\pm)}(p)\,\gamma_0 \quad . \qquad (I,69)$$

Wegen des Schur'schen Lemmas und der Eigenschaft (I,68) haben $\varrho^{(+)}$ und $\varrho^{(-)}$ die allgemeine Gestalt:

$$\varrho^{(\pm)}(p) = {}^{I}\varrho^{(\pm)}(p)\cdot I + {}^{S}\varrho^{(\pm)}(p)\cdot S \qquad (I,70)$$

mit den 3×3-Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad (I,71)$$

und den 4×4-Matrizen ${}^{R}\varrho(p)$, $R=I,S$. Aus (I,66) und (I,67) folgt für diese matrixwertigen Funktionen die Zerlegung:

$${}^{R}\varrho^{(\pm)}(p) = (\not{p} \pm m)\cdot\varrho_1^{(R)}(m^2) \pm \varrho_2^{(R)}(m^2) \qquad R = I,S \qquad (I,72)$$

mit den nur noch von $p^2 = m^2$ abhängigen invarianten Spektralfunktionen $\varrho_i^{(R)}(m^2)$, Wegen der Hermtezitätseigenschaft (I,69) und der Positivität des Skalarproduktes sind die skalaren Spektralfunktionen $\varrho_i^{(R)}(m^2)$

positiv und reell. Weiterhin gilt:

$$2m\,\varrho_1^{(R)}(m^2) \geq \varrho^{(R)}(m^2) \geq 0 \qquad \text{für} \quad R = I, S\,.$$

Dies folgt aus der Definition (I,65).

Mit den bekannten Distributionen:

$$\Delta^{(\pm)}(z,m) = \mp \frac{i}{(2\pi)^3} \int dp\; \delta(p^2-m^2)\,\Theta(p_0)\, e^{\mp ipz} \tag{I,73}$$

$$\Delta(z,m) = \Delta^{(+)}(z,m) + \Delta^{(-)}(z,m) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int dp\; \delta(p^2-m^2)\,\varepsilon(p_0)\, e^{-ipz} \tag{I,74}$$

$$\Delta_F(z,m) = 2i\left(\Theta(z_0)\,\Delta^{(+)}(z,m) - \Theta(-z_0)\,\Delta^{(-)}(z,m)\right) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int dp\; \frac{e^{-ipx}}{p^2-m^2+i\varepsilon} \tag{I,75}$$

$$S^{(\pm)}(z,m) = -(i\not{\partial}+m)\,\Delta^{(\pm)}(z,m) \qquad S(z,m) = -(i\not{\partial}+m)\,\Delta(z,m) \qquad S_F(z,m) = -(i\not{\partial}+m)\,\Delta_F(z,m) \tag{I,76}$$

und (I,64,70,72) ergibt sich die gesuchte Spektraldarstellung der Zweipunktfunktion des Quarkfeldes:

$$S^{(\pm)}(x-x') = \int_0^\infty dm^2 \left[\left(\varrho_1^{(I)}(m^2)\cdot S^{(\pm)}(x-x';m) - \varrho_2^{(I)}(m^2)\cdot\Delta^{(\pm)}(x-x';m)\right)\cdot I + \left(\varrho_1^{(S)}(m^2)\cdot S^{(\pm)}(x-x';m) - \varrho_2^{(S)}(m^2)\cdot\Delta^{(\pm)}(x-x';m)\right)\cdot S\right]. \tag{I,77}$$

Für den Vakuumerwartungswert des Antikommutators folgt die Darstellung:

$$\langle 0|\left[\Psi(x),\bar\Psi(x')\right]_+|0\rangle = -i\int_0^\infty dm^2 \left[\left(\varrho_1^{(I)}(m^2)\cdot S(x-x';m) - \varrho_2^{(I)}(m^2)\cdot\Delta(x-x';m)\right)\cdot I + \left(\varrho_1^{(S)}(m^2)\cdot S(x-x';m) - \varrho_2^{(S)}(m^2)\cdot\Delta(x-x';m)\right)\cdot S\right] \tag{I,78}$$

und für den Propagator $S'_F(x-x')$:

$$S'_F(x-x') = -2\,\langle 0|T(\Psi(x)\,\bar\Psi(x'))|0\rangle = \int dm^2 \left[\left(\varrho_1^I S_F - \varrho_2^I \Delta_F\right)\cdot I + \left(\varrho_1^S\cdot S_F - \varrho_2^S\cdot\Delta\right)\cdot S\right]. \tag{I,79}$$

Im Impulsraum ist $S'_F(p)$ darstellbar als:

$$S'_F(p) = 2i\int dm^2 \left[\frac{(\not{p}+m)\,\varrho_1^I - \varrho_2^I}{p^2-m^2+i\varepsilon}\cdot I + \frac{(\not{p}+m)\,\varrho_1^S + \varrho_2^S}{p^2-m^2+i\varepsilon}\cdot S\right]. \tag{I,80}$$

In Kapitel I,1 wurde angenommen, daß in $\mathcal{H}$ diskrete Ein-Quark- und Ein-Antiquarkzustände existieren mit den Massen m_I der Isoduplett-Quarks und der Masse m_S des Isosinglett-Quarks. Tragen außer diesen Quarkzuständen keine weiteren diskreten Zustände zu den Spektralfunktionen $\varrho^{(\pm)}(p)$ bei, so folgt:

$$\varrho_1^{(R)}(m^2) = \delta(m^2-m_R^2) + \sigma^{(R)}(m^2) \qquad R = I, S \tag{I,81}$$

mit den δ-singularitätsfreien Spektraldichten $\sigma^{(R)}(m^2)$. Die Spektraldichten $\varrho_2^{(R)}(m^2)$ sind ebenfalls frei von δ-Singularitäten, da die Ein-Quarkzustände zu $\varrho_2^{(R)}(m^2)$ nicht beitragen.

Approximiert man den Propagator (I,80) durch den Einteilchenbeitrag, so wird:

$$S'_F(p) \approx 2i \cdot \frac{1}{\not p - m_I + i\varepsilon} \cdot I + 2i \cdot \frac{1}{\not p - m_S + i\varepsilon} \cdot S \quad . \qquad (I,82)$$

Aus (I,78) folgt für den Vakuumerwartungswert des gleichzeitigen Antikommutators:

$$\langle 0|[\Psi(x), \bar\Psi(x')]_+|0\rangle_{x_0=x_0'} = \gamma_0 \cdot \delta(\vec x - \vec x') \cdot (\tilde Z_2^I \cdot I + \tilde Z_2^S \cdot S) \qquad (I,83)$$

mit den Renormierungskonstanten:

$$(Z_2^R)^{-1} = \int_0^\infty dm^2 \cdot \varrho_1^{(R)}(m^2) = 1 + \int_{m_0^2}^\infty dm^2 \cdot \sigma^{(R)}(m^2) \quad . \qquad (I,84)$$

Wegen der Positivität von $\sigma^{(R)}(m^2)$ ist $0 \leq Z_2^R \leq 1$.

Über die Konvergenz der Integrale, wie $\int dm^2 \cdot \varrho_1^{(R)}(m^2)$, lassen sich keine allgemeinen Aussagen machen.

b. Bethe-Salpeter-Amplituden der Mesonen

Die Matrixelemente:

$$\chi^{(M)}(x,P,e) = (2\pi)^{3/2}\langle 0|T(\Psi(x/2)\bar\Psi(-x/2))|P,e,M\rangle \qquad \bar\chi^{(M)}(x,P,e) = (2\pi)^{3/2}\langle P,e,M|T(\Psi(x/2)\bar\Psi(-x/2))|0\rangle \qquad (I,85)$$

sind die sogenannten Bethe-Salpeter-Amplituden eines Ein-Mesonzustandes $|P,e,M\rangle$ mit dem Impuls P, dem Polarisationstensor $e = (e_{\mu_1\dots\mu_n}(P))$ und den übrigen Quantenzahlen (M). $(M) = (M, s, \lambda, \eta_P, \eta_c, Y, I, I_3)$ enthält die Masse M_M , den Spin s , die Helizität λ , die Parität η_P , die Ladungskonjugationsparität η_c , den Isospin I, die Hyperladung Y und die I_3-Quantenzahl des Mesons M . Mit $(\bar M)$ werden die entsprechenden Quantenzahlen des Antimesons bezeichnet. Die Fouriertransformierten der Bethe-Salpeteramplituden seien:

$$\chi^{(M)}(p,P,e) = (2\pi)^{-4}\int dx\, e^{ipx}\chi^{(M)}(x,P,e) \qquad \text{UND} \qquad \bar\chi^{(M)}(p,P,e) = (2\pi)^{-4}\int dx\, e^{ipx}\bar\chi^{(M)}(x,P,e) \quad . \qquad (I,86)$$

Mit Hilfe der allgemeinen Reduktionsformeln folgt:

$$\chi^{(M)}(x,P,e) = i\int dz\, e^{-iPz} K_M \langle 0|T(\Psi(x/2)\bar\Psi(-x/2)\,\Phi^{*(M)}(z))|0\rangle \cdot e(P) \qquad (I,87)$$

$$\bar\chi^{(M)}(x,P,e) = -i\int dz\, e^{iPz} K_M \langle 0|T(\Psi(x/2)\Psi(-x/2)\,\Phi^{(M)}(z))|0\rangle \cdot \bar e(P) \quad , \qquad (I,88)$$

wobei $K_M = (\Box + M_M^2)$ und $\Phi^{(M)}(z)$ ein interpolierendes Mesonfeld mit der Eigenschaft $U(\mathcal{C})\,\Phi^{(M)}(z)\,U(\mathcal{C})^{-1} = \eta_c \cdot \Phi^{(\bar M)}(z) = \eta_c \cdot \Phi^{*(M)}(z)$ ist. Für den allgemeinen Fall $s \neq 0$ ist das Mesonfeld ein Tensoroperator $\Phi^{(M)}_{\mu_1\dots\mu_n}(z)$ und daher mit $e(P)\cdot\phi(x)$ das Skalarprodukt $(e^{\mu_1\dots\mu_n}\Phi^{(M)}_{\mu_1\dots\mu_n}(z))$ gemeint. Der reduzierte Ausdruck (I,87) zeigt, daß $\chi^{(M)}(x,P,e)$ die Gestalt hat:

$$\chi^{(M)}(x,P,e) = \chi'^{(M)}(x,P)\cdot e(P) \quad , \qquad (I,89)$$

wobei für $s \neq 0$ wieder das Skalarprodukt des Tensors $e(P)$ mit der kovarianten Funktion $\chi^{(M)}(x,P)$ zu nehmen ist.

Aus der Definition (I,85), den reduzierten Ausdrücken (I,87,88) und dem Transformationsverhalten des Quarkfeldes bezüglich Ladungskonjugation und der TCP-Operation folgen für die 12x12-Matrizen $\chi^{(M)}(x,P,e)$ und $\bar{\chi}^{(M)}(x,P,e)$ die Eigenschaften:

$$\chi^{(M)}(x,P,e) = -\chi^{(\bar{M})}(x,-P,\bar{e}) \qquad \bar{\chi}^{(M)}(x,P,e) = -\eta_c C \chi^{T\,(M)}_{(-x,-P,\bar{e})} C^{-1} \qquad \bar{\chi}^{(M)}(x,P,e) = (-1)^s \gamma_5 \chi^{(\bar{M})}_{(-x,P,\bar{e})} \gamma_5 \qquad \text{(I,90)}$$

also auch:

$$\chi^{(\bar{M})}(x,P,e) = \eta_c C \chi^{T\,(M)}_{(-x,P,e)} C^{-1} \qquad \chi^{(M)}(x,P,e) = (-1)^{s+1} \gamma_5 \chi^{(M)}_{(-x,-P,e)} \gamma_5 \quad . \qquad \text{(I,91)}$$

Für die Bethe-Salpeter-Amplituden $\chi^{(M)}$ und $\bar{\chi}^{(M)}$ lassen sich ähnlich wie für die Zweipunktfunktionen aus den Axiomen allgemeine Spektraldarstellungen mit skalaren Spektralfunktionen ableiten. Die Spektraldarstellung von $\bar{\chi}^{(M)}$ resultiert mit (I,90) aus der Darstellung von $\chi^{(M)}$. Durch Einschieben eines vollständigen Systems (I,19) von Zuständen zwischen Ψ und $\bar{\Psi}$ in (I,85) folgt:

$$\chi^{(M)}(x,P,e) = (2\pi)^{-3} \int_0^\infty dm^2 \int dp \cdot \delta(p^2-m^2) \cdot \Theta(p_0) \cdot \varrho_M^{(\pm)}(p,P,e) \cdot e^{\pm i(P/2-p)x} \qquad \text{(I,92)}$$

mit

$$\varrho_M^{(+)}(p,P,e) = (2\pi)^{3/2} \sum_\beta \hat{\varrho}(m^2,\beta) \langle 0|\Psi(0)|p\beta X p\beta|\bar{\Psi}(0)|P e M\rangle \qquad \varrho_M^{(-)}(p,P,e) = (2\pi)^{3/2} \sum_\beta \hat{\varrho}(m^2,\beta) \langle p\beta|\Psi(0)|P_0 M X 0|\bar{\Psi}(0)|p\beta\rangle \qquad \text{(I,93)}$$

und + für $x_0 > 0$, - für $x_0 < 0$. Die 12x12-Matrizen $\varrho_M^{(\pm)}(p,P,e) = (\varrho^{(\pm)}_{\nu\alpha,\nu'\alpha'}(p,P,e))$ haben wegen des Transformationsverhaltens (I,3,8,9,16) des Quarkfeldes die Eigenschaften:

$$\varrho_M^{(\pm)}(p,P,e) = \bar{S}^{-1}(\Lambda) \cdot \varrho_M^{(\pm)}(\Lambda p,\Lambda P,D^{(M)}(\Lambda)e) \cdot S(\Lambda) \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \qquad \text{(I,94)}$$

$$\varrho_M^{(\pm)}(p,P,e) = \eta_p \cdot \gamma_0 \cdot \varrho_M^{(\pm)}(I_3 p, I_3 P, D^{(M)}(\mathcal{P})e) \cdot \gamma_0 \qquad \text{(I,95)}$$

$$\varrho_{\bar{M}}^{(\pm)}(p,P,e) = \eta_c \cdot C \cdot \varrho_M^{T\,(\mp)}(p,P,e) \cdot C^{-1} \qquad \text{(I,96)}$$

$$\varrho_M^{(\pm)}(p,P,e) = \bar{D}^{-1}(g)\, \varrho_{M'}^{(\pm)}(p,P,e) \cdot D(g) \cdot D^{(M)}_{M'M}(g) \qquad \forall g \in SG \qquad \text{(I,97)}$$

mit den Darstellungmatrizen $D^{(M)}(\Lambda)$ und $D^{(M)}(g)$, vermittels derer der Ein-Meson-Zustand $|P,e,M\rangle$ transformiert. (s. (I,6) und (I,17)). Aus der TCP-Invarianz (I,12) folgt zusätzlich:

$$\varrho_{\bar{M}}^{(-)}(p,P,e) = (-1)^{s+1} \cdot \gamma_5 \gamma_0 \cdot \varrho_M^{\dagger\,(+)}(p,P,\bar{e}) \cdot \gamma_0 \gamma_5 \qquad \text{(I,98)}$$

also in Verbindung mit (I,96) :

$$C\cdot \mathcal{S}_M^{T(\pm)}(p,P,e)\cdot C^{-1} = (-1)^{S+1}\cdot \gamma_5\gamma_0\, \mathcal{S}_M^{+(\pm)}(p,P,e)\cdot\gamma_0\gamma_5 \quad . \qquad (I,99)$$

Entwickelt man die Matrizen $\mathcal{S}_M^{(\pm)}$ nach den bereits in (I,55) eingeführten und in ANHANG 2 definierten 9 SG-Matrizen $T^{(Y,I,I_3)}$:

$$T^{(0,1,1)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(0,1,-1)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(0,1,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$T^{(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad T^{(0,0,0)_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad T^{(0,0,0)_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

so folgen aus der Eigenschaft (I97) der $\mathcal{S}_M^{(\pm)}$ und dem Transformationsverhalten:

$$T^{(Y,I,I_3)} = D^{-1}(g)\cdot T^{(Y,I,I_3')}\cdot D(g)\cdot D^{(Y,I)}_{I_3'-I_3}(g) \qquad (I,100)$$

der Matrizen $T^{(Y,I,I_3)}$ für die Funktionen $\mathcal{S}_M^{(\pm)}(p,P,e)$ die Zerlegungen:

$(M)\supset (Y,I)=(0,1),(\mp1,\frac{1}{2})$: $$\mathcal{S}_M^{(\pm)}(p,P,e) = \mathcal{S}'^{(\pm)}_M(p,P,e)\cdot T^{(M)} \qquad (I,101)$$

$(M)\supset (Y,I)=(0,0)$: $$\mathcal{S}_M^{(\pm)}(p,P,e) = \mathcal{S}'^{(\pm)}_{M_1}(p,P,e)\cdot T^{(M)_1} + \mathcal{S}'^{(\pm)}_{M_2}(p,e,P)\cdot T^{(M)_2} \qquad (I,102)$$

$(M)\supset (Y,I)\neq (0,0),(0,1),(\mp1,\frac{1}{2})$: $$\mathcal{S}_M^{(\pm)}(p,P,e) = 0 \quad .$$

In (I,102) kommt zum Ausdruck, daß die I=0 Mesonzustände i.a. Mischungen von reinen SU(3)-Zuständen sind, die vorliegen, wenn $\mathcal{S}'^{(\pm)}_{M_1}$ oder $\mathcal{S}'^{(\pm)}_{M_2}$ gleich Null ist.

Die reduzierten Funktionen $\mathcal{S}'^{(\pm)}_M(p,P,e)$ in den Zerlegungen (I,101,102) sind 4x4-Matrizen, die wegen (I,89) die Gestalt:

$$\mathcal{S}'^{(\pm)}_M(p,P,e) = \mathcal{S}''^{(\pm)}_M(p,P)\cdot e(P) \qquad (I,103)$$

besitzen. Die $\mathcal{S}''^{(\pm)}_M(p,P)$ tragen für $s\neq 0$ Vektorindizes und sind wegen der Eigenschaft (I,94,95) kovariante Funktionen. Es ist also:

$$\mathcal{S}''^{(\pm)}_{\mu_1\dots\mu_n}(p,P) = \Lambda_{\mu_1}^{\mu_1'}\cdots\Lambda_{\mu_n}^{\mu_n'}\cdot S^{-1}(\Lambda)\cdot \mathcal{S}''^{(\pm)}_{\mu_1'\dots\mu_n'}(\Lambda p,\Lambda P)\cdot S(\Lambda) \quad . \qquad (I,104)$$

Solche kovarianten Funktionen lassen sich, wie HEPP in (He63) gezeigt hat, entwickeln nach einem vollständigen Satz von i.a. 16 linear unabhängigen Kovarianten $c_{\alpha\beta}(p,P)$, die aus den 16 Dirac-Matrizen $1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\mu'}$ und den beiden Vektoren p_μ, P_μ gebildet werden können, und invarianten Funktionen $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(p^2,u^2)$, die nur von den Invarianten $p^2=m^2$, $P^2=M^2$ und $u^2=\frac{1}{P^2}((pP)^2-p^2P^2)$ abhängen. Die 4x4-Matrizen $\mathcal{S}'^{(\pm)}_M(p,P,e)$ lassen sich darstellen in der Form:

$$\varrho_M^{(\pm)}(p,P,e) = \sum_{\alpha\varepsilon} c_{\alpha\varepsilon}^{(\pm)}(p,P,e)\cdot \varrho_{\alpha\varepsilon}^{(M)}(p^2,u^2) \qquad , \qquad (I,105)$$

wobei $c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(pPe) = c_\alpha(pP)\cdot e(P)$ ist und wegen (I,96) $c_{\alpha\varepsilon}^{(-)}(pPe) = C\cdot c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(pPe)\cdot C^{-1}$.

Die Spektralfunktionen $\varrho^{(M)}(m^2,u^2)$ sind bei geeigneter Wahl der Kovarianten wegen der Relation (I,99) reell, wenn $\varrho_{\alpha\varepsilon}^{(M)} = \varrho_{\alpha\varepsilon}^{(\bar M)}$ ist.

Mit den Zerlegungen (I,101,102) sowie (I,105) und den Funktionen:

$$\Delta_{\alpha\varepsilon}^{(\pm)}(x,P,e;m^2,u^2) = \frac{\pm 1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec p}{2p_0}\cdot \delta\left(u^2-\tfrac{1}{P^2}((pP)^2-p^2P^2)\right)\cdot c_{\alpha\varepsilon}^{(\pm)}(p,P,e)\cdot e^{\pm i(Pz-px)} = c_{\alpha\varepsilon}^{(\pm)}\left(i(\partial+\eta_2),P,e\right)\cdot\Delta_0^{(\pm)}(r,t;m^2,u^2) \qquad (I,106)$$

$$\Delta_0^{(\pm)}(r,t;m^2,u^2) = \frac{\pm 1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\vec p}{2p_0}\cdot\delta\left(u^2-\tfrac{1}{P^2}((pP)^2-p^2P^2)\right)\cdot e^{\pm i(Pz-px)} = \frac{\pm 1}{8\pi^2 i}\cdot\frac{u}{\sqrt{m^2+u^2}}\cdot\frac{\sin ur}{ur}\cdot e^{\pm i\left(\frac{M}{2}-\sqrt{m^2+u^2}\right)t} \qquad (I,107)$$

$$\Delta_{\alpha\varepsilon}^{F}(x,P,e;m^2,u^2) = \Theta(x_0)\cdot\Delta_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(x,P,e;m^2,u^2) - \Theta(-x_0)\cdot\Delta_{\alpha\varepsilon}^{(-)}(x,P,e;m^2,u^2) \qquad (I,108)$$

$$p_0 = +\sqrt{m^2+\vec p^{\,2}} \qquad r = \frac{1}{M}\sqrt{(xP)^2-x^2P^2} \qquad t = \frac{1}{M}(xP)$$

folgt aus (I,92) die gesuchte Spektraldarstellung der Bethe-Salpeter-Amplitude:

$$\chi^{(M)}(x,P,e) = \int_0^\infty dm^2\int_0^\infty du^2 \sum_{\alpha\varepsilon,i}\varrho_{\alpha\varepsilon}^{(M)i}(m^2,u^2)\cdot\Delta_{\alpha\varepsilon}^{F}(x,P,e;m^2,u^2)\cdot T^{(M)i} \qquad .(I,109)$$

Die Summe $\sum_i$ berücksichtigt die für die Fälle I=0 notwendige Zerlegung in diezwei SG-Matrizen $T^{(000)}{}_1$ und $T^{(000)}{}_2$.

Die Kovarianten $c_{\alpha\varepsilon}^{(\pm)}(pPe)$ sind für höhere Spinwerte s recht mühselig zu bestimmen und sollen hier nur für die auch im folgenden interessanten Fälle $s^{\eta_P\eta_C} = 0^{-+},1^{--};0^{++},1^{+-},2^{++};1^{++}$ angegeben werden:

Pseudoskalare Mesonen: 0^{-+} (L=0,S=0)[1]. Es gibt die 8 Kovarianten:

$$c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(p,P) = \{\gamma_5,\ \gamma_5\not P,\ \gamma_5\not p,\ \gamma_5[\not P\not p],\ (pP)\cdot\gamma_5,\ (pP)\gamma_5\not P,\ (pP)\gamma_5\not p,\ (pP)\gamma_5[\not P,\not p]\}$$
$$c_{\alpha\varepsilon}^{(-)}(p,P) = C\cdot c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(p,P)\cdot C^{-1} \qquad .$$

Vektormesonen: 1^{--} (L=0,2;S=1). Es gibt die 16 Kovarianten:

$$c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(pPe) = \{\not e,\ \not e\not P,\ \not e\not p,\ [\not e\not P]_+,\ (ep),\ (ep)\not P,\ (ep)\not p,\ (ep)[\not p\not P],\ (pP)\not e,\ (pP)\not e\not P,\ (pP)[\not e,\not p],$$
$$(pP)\cdot[\not p\not e\not P]_+,\ (pP)(ep),\ (pP)(ep)\not P,\ (pP)(ep)\not p,\ (pP)(ep)\cdot[\not p,\not P]\}$$
$$c_{\alpha\varepsilon}^{(-)}(pPe) = C\cdot c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(pPe)\cdot C^{-1} \qquad .$$

Skalare Mesonen: 0^{++} (L=1;S=1). Es gibt die 8 Kovarianten:

$$c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(p,P) = \{1,\not P,\not p,[\not P\not p],(pP),(pP)\not P,(pP)\not p,(pP)\cdot[\not P,\not p]\}$$
$$c_{\alpha\varepsilon}^{(-)}(p,P) = C\cdot c_{\alpha\varepsilon}^{(+)}(p,P)\cdot C^{-1} \qquad .$$

Axialvektormesonen: 1^{+-} (L=1;S=1) und 1^{++} (L=1,S=0). Es gibt die 16 Kovarianten:

[1] Mit L und S werden hier relativer Bahndrehimpuls und Spinsumme der Quarks des betreffenden Zustandes im nichtrelativistischen Quarkmodell angegeben.

$$c^{(+)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) = \{ \gamma_5 \not e, \gamma_5 \not e \not P, \gamma_5 [\not e, \not p], \gamma_5 [\not p, \not e \not P]_+, \gamma_5 (ep), \gamma_5 (ep) \not P, \gamma_5 (ep) \not p, \gamma_5 (ep) [\not p, \not P], \gamma_5 (pP) \not e, \gamma_5 (pP) \not e \not p,$$
$$\gamma_5 (pP) [\not e, \not P], \gamma_5 (pP) [\not p, \not e \not P], \gamma_5 (ep)(pP), \gamma_5 (pP)(ep) \not P, \gamma_5 (pP)(ep) \not p, \gamma_5 (pP)(ep) [\not p, \not P] \}$$

$$c^{(-)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) = -C \cdot c^{(+)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) \cdot C^{-1} \quad \text{bzw.} \quad c^{(+)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) = C \cdot c^{(+)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) \cdot C^{-1} \; .$$

Tensormesonen: 2^{++} $(L=1,3;S=1)$. Es gibt mit dem Polarisationstensor $e_{\mu\nu}(P)$ (s. ANHANG 1) die 12 Kovarianten:

$$c^{(+)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) = \{ (p\not e), (p\not e)\not P, [(p\not e), \not p], [\not p, (\not e p)\not P]_+, (ppe), (ppe)\not P, (ppe)\not p, (ppe)[\not p, \not P], (pP)(p\not e),$$
$$(pP)(\not e p)\not P, (pP)[(p\not e), \not p], (pP)[\not p, (p\not e)\not P]_+, (pP)(ppe), (pP)(ppe)\not p, (pP)(ppe)\not P, (pP)(ppe)[\not p, \not P] \}$$

$$c^{(-)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) = C \cdot c^{(+)}_{\alpha\varepsilon}(p,P,e) \cdot C^{-1} \; .$$

Aus der Definition (I,86) und dem Transformationsverhalten des Quarkfeldes folgen für die Fouriertransformierten die Eigenschaften:

$$\chi^{(M)}(p,P,e) = \bar S(\Lambda)\, \chi^{(M)}(\Lambda p, \Lambda P, \Lambda e)\, S(\Lambda) \qquad \chi^{(M)}(p,P,e) = \eta_I \gamma_0 \chi^{(M)}(I p, I P, I e) \gamma_0 \qquad \chi^{(M)} = \bar D(g) \chi^{(M')} D(g) \cdot D^{(M)}_{M'M}(g) \quad (I,110)$$

und die Relationen:

$$\chi^{(M)}(p,P,e) = \eta_C\, C \bar\chi^{(M)}(p,P,e) \cdot C^{-1} \qquad \bar\chi^{(M)}(p,P,e) = -\chi^{(M)}(p,-P,\bar e) \; . \quad (I,111)$$

Analog wie für die Funktionen $S_M(p,P,e)$ lassen sich hieraus allgemeine Zerlegungen der Fouriertransformierten $\chi^{(M)}(p,P,e)$ nach Kovarianten $T^{(M)}$ und $c_{\alpha\varepsilon}(p,P,e)$ und invarianten Amplituden $\chi^{(M)}_{\alpha\varepsilon}(p^2,(pP)^2)$ ableiten. Unter der Voraussetzung, daß $\chi^{(M)}_{\alpha\varepsilon} = \chi^{(\bar M)}_{\alpha\varepsilon}$ ist - was für die Fälle I=0,1 aus der SG-Invarianz folgt -, ergeben sich für $s^{\eta_s \eta_t} = 0^{-+}, 1^{--}; 0^{++}, 1^{+-}, 2^{++}; 1^{++}$ die Zerlegungen:

Pseudoskalare Mesonen: (I,112)

$$\chi^{(P)}(p,P) = \left[\gamma_5 \chi_1^{(P)} + \gamma_5 \not P \cdot \chi_2^{(P)} + [\not p, \gamma_5 \not P]_+ \chi_3^{(P)} + \gamma_5 \not p \cdot (pP) \cdot \chi_4^{(P)} \right] \circ T^{(P)}$$

Vektormesonen: (I,113)

$$\chi^{(V)}(p,P,e) = \left[\not e \cdot \chi_1^{(V)} + \not e \not P \cdot \chi_2^{(V)} + [\not p, \not e \not P]_+ \cdot \chi_3^{(V)} + (ep) \chi_4^{(V)} + (ep) \not p \cdot \chi_5^{(V)} + (pP)[\not e, \not p] \chi_6^{(V)} + (ep)[\not P, \not p] \cdot \chi_7^{(V)} + \right.$$
$$\left. + (ep)(pP) \cdot \not P \cdot \chi_8^{(V)} \right] \circ T^{(V)}$$

Skalare Mesonen: (I,114)

$$\chi^{(S)}(p,P) = \left[\chi_1^{(S)} + \not p \cdot \chi_2^{(S)} + \not p \not P \cdot \chi_3^{(S)} + (pP) \cdot \not P \cdot \chi_4^{(S)} \right] \circ T^{(S)}$$

Axialvektormesonen: $(\eta_C = +1)$ (I,115)

$$\chi^{(A)}(p,P,e) = \gamma_5 \left[\not e \cdot \chi_1^{(A)} + [\not e, \not p] \chi_2^{(A)} + [\not p, \not e \not P]_+ \cdot \chi_3^{(A)} + (ep) \not p \cdot \chi_4^{(A)} + (pP) \not e \not P \cdot \chi_5^{(A)} + (ep)(pP) \cdot \chi_6^{(A)} + \right.$$
$$\left. + (ep)(pP) \not P \cdot \chi_7^{(A)} + (ep)(pP)[\not p \cdot \not P] \chi_8^{(A)} \right] \circ T^{(A)} \; .$$

Tensormesonen: (I,116)

$$\chi^{(T)}(p,P,e) = \Big[(pe)\cdot\chi_1^{(T)} + (pe)\not{P}\cdot\chi_2^{(T)} + [\not{p},(pe)\not{P}]_+\cdot\chi_3^{(T)} + (ppe)\cdot\chi_4^{(T)} + (ppe)\not{p}\cdot\chi_5^{(T)} + (pP)[(pe),\not{p}]\cdot\chi_6^{(T)} + (ppe)[\not{p},\not{P}]\cdot\chi_7^{(T)} + (pP)(ppe)\not{p}\cdot\chi_8^{(T)}\Big] \circ T^{(T)}$$

Axialvektormesonen: ($\eta_c = -1$) (I,117)

$$\chi^{(A)}(p,P,e) = \gamma_5\Big[\not{e}\not{P}\cdot\chi_1^{(A)} + (ep)\cdot\chi_2^{(A)} + (ep)\not{P}\cdot\chi_3^{(A)} + (ep)[\not{p},\not{P}]\cdot\chi_4^{(A)} + (pP)[\not{e},\not{p}]\cdot\chi_5^{(A)} + (pP)\not{e}\cdot\chi_6^{(A)} + (pP)[\not{p},\not{e}\not{P}]_+\cdot\chi_7^{(A)} + (pP)(ep)\not{p}\cdot\chi_8^{(A)}\Big] \circ T^{(A)} .$$

Diese allgemeinen Zerlegungen der Bethe-Salpeter-Amplituden sind der Ausgangspunkt für die im zweiten Teil angegebenen Ansätze. Sie entsprechen den nichtrelativistischen Zerlegungen einer Schrödingeramplitude in einen Spin-Bahndrehimpulsanteil und radiale Wellenfunktionen.

Die allgemeinen Zerlegungen können benutzt werden zur Zurückführung einer Bethe-Salpeter-Gleichung für die Mesonen auf ein gekoppeltes System von skalaren Gleichungen.

Mit der Bethe-Salpeter-Amplitude eng verknüpft ist die Vertexfunktion:

$$T^{(M)}(p,P,e) = -(2\pi)^4 i\cdot(\not{p}+\not{P}/2 - m)\cdot\chi^{(M)}(p,P,e)\cdot(\not{p}-\not{P}/2 - m) \quad , \quad (I,118)$$

durch deren Wert an der Stelle $p^2 = (m^2 - M^2/4), (pP) = 0$ die Meson-Quark-Kopplungskonstante definiert ist. (m ist hier die Quarkmassenmatrix).

Aus der Definition (I,38) der Normierungskonstanten c_M der phänomenologischen Mesonfelder $\phi^{(P)}(x)$ und $\phi^{(V)}(x)$ und der Definition (I,63) der Bethe-Salpeter-Amplitude folgt, daß die Normierungskonstanten c_M durch den Wert der Bethe-Salpeter-Amplitude an der Stelle x=0 gegeben sind. Es ist:

$$c_P = -Sp\Big[\not{p}\cdot T^{(P)}\cdot\chi^{(P)}(x,P)\Big]_{x=0} = 4\int dp\Big[M^2\chi_2^{(P)}(p^2,(pP)^2) + (pP)^2\cdot\chi_4^{(P)}(p^2,(pP)^2)\Big] = \quad (I,119)$$

$$= \frac{M}{2\pi^2}\int dm^2\int du^2\cdot u\Big[\frac{M}{\sqrt{m^2+u^2}}\,g_1^P(m^2,u^2) + g_3^P(m^2,u^2) + M^2\cdot g_5^P(m^2,u^2) + M\sqrt{m^2+u^2}\,g_6^P(m^2,u^2)\Big]$$

und

$$c_V = -Sp\Big[\not{e}\cdot T^{(V)}\cdot\chi^{(V)}(x,P,e)\Big]_{x=0} = 4\int dp\Big[\chi_1^{(V)}(p^2,(pP)^2) - (ep)^2\chi_5^{(V)}(p^2,(pP)^2)\Big] = \quad (I,120)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int dm^2\int du^2\cdot u\Big[\frac{1}{\sqrt{m^2+u^2}}\,g_1^V(m^2,u^2) + \frac{1}{3}\frac{u^2}{\sqrt{m^2+u^2}}\,g_7^V(m^2,u^2) + M\cdot g_9^V(m^2,u^2) + M\cdot u^2\cdot g_{15}^V(m^2,u^2)\Big] .$$

Die Normierungskonstanten c_P und c_V sind also nur dann endlich, wenn die angegebenen Integrale über die Spektralfunktionen konvergieren.

c. Bethe-Salpeter-Amplitude der Baryonen

Als Bethe-Salpeter-Amplitude eines Ein-Baryon-Zustandes $|P,u,B\rangle$ mit Impuls P, Spintensor $u(P) = (u_{\nu,\mu_1\ldots\mu_n}(P))$ (s. ANHANG 1) und den Quantenzahlen $(B) = (M_B, s, \eta_p, Y, I, I_3)$ werden die Matrixelemente

$$\chi^{(B)}(x,x',P,u) = (2\pi)^{3/2}\langle 0|T(\Psi(x)\,\Psi(x')\,\Psi(-(x+x'))||P,u,B\rangle \qquad (I,121)$$

$$\bar{\chi}^{(B)}(x,x',P,u) = (2\pi)^{3/2}\langle P,u,B|T(\bar{\Psi}(x)\,\bar{\Psi}(x')\,\bar{\Psi}(-(x+x'))|0\rangle \qquad (I,122)$$

bezeichnet. Die Fouriertransformierten dieser tensorwertigen Funktionen seien:

$$\chi^{(B)}(p,p',P,u) = (2\pi)^{-8}\int dx\,dx'\,e^{i(px+p'x')}\,\chi^{(B)}(x,x',P,u) \qquad (I,123)$$

$$\bar{\chi}^{(B)}(p,p',P,u) = (2\pi)^{-8}\int dx\,dx'\,e^{i(px+p'x')}\,\bar{\chi}^{(B)}(x,x',P,u) \quad . \qquad (I,124)$$

Aus den Defini-tionen (I,121-124) und dem Transformationsverhalten der Quarkfelder folgen für diese fouriertransformierten Bethe-Salpeter-Amplituden $\chi^{(B)}(p,p',P,u) = (\chi^{(B)}_{A_1A_2A_3}(p,p',P,u))$ die Eigenschaften:

$$\chi^{(B)}(p,p',P,u) = \check{S}^{-1}(\Lambda)\cdot\check{S}^{-1}(\Lambda)\cdot\check{S}^{-1}(\Lambda)\cdot\chi^{(B)}(\Lambda p,\Lambda p',\Lambda P,D^{(B)}(\Lambda)u) \qquad (I,125)$$

$$\chi^{(B)}(p,p',P,u) = \eta_p\cdot\gamma_0\cdot\gamma_0\cdot\gamma_0\cdot\chi^{(B)}(\mathcal{I}_s p,\mathcal{I}_s p',\mathcal{I}_s P,D^{(B)}(\mathcal{P})u) \qquad (I,126)$$

$$\chi^{(B)}(p,p',P,u) = \check{D}^{-1}(g)\cdot\check{D}^{-1}(g)\cdot\check{D}^{-1}(g)\,\chi^{(B)}(p,p',P,e)\cdot D^{(B)}_{ab}(g) \quad . \qquad (I,127)$$

$D^{(B)}(\Lambda)$ und $D^{(B)}(g)$ sind die Darstellungen, nach denen der Zustand $|P,u,B\rangle$ transformiert. Mit Hilfe der Reduktionsformeln läßt sich analog wie für die Mesonamplituden zeigen, daß:

$$\bar{\chi}^{(B)}(p,p',P,u) = \bar{C}^{-1}\cdot\bar{C}^{-1}\cdot\bar{C}^{-1}\cdot\chi^{(B)}(p,p',-P,v) \qquad (I,128)$$

ist, wenn $v(P) = C\,\overline{\overset{T}{u}}(P)$ ein Spintensor zu negativer Energie ist.

Aus den Definitionen (I,121) und (I,123) und der Eigenschaft des zeitgeordneten Produktes bezüglich der Vertauschung zweier Fermionoperatoren antisymmetrisch zu sein folgt für die Bethe-Salpeter-Amplitude und ihre Fouriertransformierte die Eigenschaft:

$$\chi^{(B)}_{A_1A_2A_3}(x,x',P,u) = -\chi^{(B)}_{A_2A_1A_3}(x',x,P,u) = -\chi^{(B)}_{A_3A_2A_1}(-(x+x'),x',P,u) = -\chi^{(B)}_{A_1A_3A_2}(x,-(x+x'),P,u) \qquad (I,129)$$

$$\chi^{(B)}_{A_1A_2A_3}(p,p',P,u) = -\chi^{(B)}_{A_2A_1A_3}(p',p,P,u) = -\chi^{(B)}_{A_3A_2A_1}(-p,p'-p,P,u) = -\chi^{(B)}_{A_1A_3A_2}(p-p',-p',P,u). \qquad (I,130)$$

Diese Symmetrieeigenschaft der Bethe-Salpeter-Amplitude entspricht der aus dem Pauliprinzip resultierenden Antisymmetrie der nichtrelativistischen Wellenfunktion bezüglich der Vertauschung aller Quantenzahlen

zweier identischer Fermionen.

Im nichtrelativistischen Quarkmodell stellt diese Antisymmetrie der Baryonen-Wellenfunktion ein Problem dar. Zur Ableitung von Aussagen aus dem nichtrelativistischen Quarkmodell ist es notwendig, die Wellenfunktionen aufzuspalten in vollständig symmetrische Spin-Isospin-Anteile und, von den Quarkkoordinaten $\vec{x}_i$ abhängige, räumliche Wellenfunktionen, die bezüglich der Vertauschung von $\vec{x}_i$ mit $\vec{x}_k$ notwendig antisymmetrisch sind. (i,k=1,2,3). Für die geläufigen nichtrelativistischen Potentiale besitzt jedoch der Grundzustand eine symmetrische Wellenfunktion, sodaß die Antisymmetrie der räumlichen Wellenfunktionen nur schwer zu verstehen ist.

In einem relativistischen Quarkmodell bleibt diese Frage offen, solange nicht aus einem speziellen dynamischen Ansatz für die Quark-Wechselwirkung eine Gleichung für die Bethe-Salpeter-Amplitude resultiert. Durch spezielle Ansätze, wie sie in II,2 angegeben werden sollen, lassen sich die Symmetrieforderungen (I,129), (I,130) erfüllen.

Eine im Prinzip aus den Eigenschaften (I,125-130) ableitbare Zerlegung der Amplitude $\chi^{(B)}(p,p',P,u)$ in Kovarianten der Lorentz-Gruppe und der Symmetriegruppe SG und invariante Funktionen soll hier nicht, wie für die Mesonenamplituden, durchgeführt werden. Es gibt bereits im einfachsten Fall $s=1/2^+$ über hundert solche Kovarianten. Aus diesem Grund wird auch auf eine Ableitung einer allgemeinen Spektraldarstellung verzichtet.

Die Eigenschaften (I,125-127) werden in Kapitel II,2 bei der Konstruktion von speziellen Bethe-Salpeter-Amplituden benötigt, die bezüglich der Vertauschung der Indizes A_1, A_2, A_3 vollständig symmetrisch sind. Mit der Relation (I,128) ergibt sich der entsprechende spezielle Ansatz für $\bar{\chi}^{(B)}(p,p',P,u)$ aus dem Ansatz für $\chi^{(B)}(p,p',P,u)$.

6. STRÖME UND STROMERWARTUNGSWERTE

Durch einen Grenzübergang, wie er in I,4 bei der Konstruktion lokaler phänomenologischer Felder beschrieben wurde, seien die allgemeinen, lokalen, renormierten Ströme:

$$J^{(i)}(x) = T(\bar{\Psi}(x) \cdot F^{(i)} \cdot \Psi(x)) \qquad \text{(I,131)}$$

definiert. Die $F^{(i)}$ sind 12×12-Matrizen:

$$F^{(i)} = T^{(R)} \circ T^{(S)} \qquad \text{(I,132)}$$

mit Linearkombinationen $T^{(R)}$ der 16 Dirac-Matrizen $1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}$ und Linearkombinationen $T^{(S)}$ der in I,5b angegebenen 9 SG-Matrizen.

Einige dieser allgemeinen Ströme können mit Strömen identifiziert werden, deren Matrixelemente physikalisch meßbare Größen enthalten:

Der elektromagnetische Strom der Hadronen sei entsprechend dem minimalen Stromansatz der Quantenelektrodynamik:

$$j_\mu(x) = T\left(\bar{\Psi}(x)\, \gamma_\mu\, \Psi(x)\right) \qquad \text{(I,133)}$$

mit der 3x3-Ladungsmatrix Q aus (I,15). Damit der formal durch $Q_{op} = \int dx\, j_0(x)$ definierte elektrische Ladungsoperator zeitunabhängig ist, wird die Divergenzfreiheit des elektromagnetischen Stromes (I,133) gefordert: $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$.

Aus der Identifikation (I,133) und der Definition (I,60) der Vektormesonfelder $\phi^{(V)}(x)$ folgt die Relation:

$$j_\mu(x) = e\left(\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot c_g \cdot \phi_\mu^{(g)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} c_\omega \cdot \phi_\mu^{(\omega)}(x) - c_\phi \cdot \phi_\mu^{(\phi)}(x)\right) . \qquad \text{(I,134)}$$

Bildet man den Erwartungswert von (I,134) zwischen dem Vakuum und den Ein-Vektormeson-Zuständen $|P,e,V\rangle$ mit $V = g, \omega, \phi$ so folgt für die durch:

$$(2\pi)^{3/2} \langle 0|j_\mu(0)|P,e,V\rangle = e \cdot g_{V\gamma} \cdot e_\mu(P) \qquad \text{(I,135)}$$

definierten Kopplungskonstanten $g_{V\gamma}$:

$$g_{g\gamma} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot c_g \qquad g_{\omega\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} c_\omega \qquad g_{\phi\gamma} = -c_\phi \quad . \qquad \text{(I,136)}$$

Aus der Identifizierung (I,134) von elektromagnetischen Stromoperator und Vektormesonfeldern ergeben sich mit der Annahme, daß sich bestimmte Matrixelemente bei der Extrapolation von der Photonmasse 0 zu den Vektormesonmassen M_V nur schwach verändern, die Aussagen des sogenannten Vektordomimanz-Modells. Im Rahmen dieses Modells sind die Kopplungskonstanten $g_{V\gamma}$ mit bestimmten meßbaren Größen verknüpft. (Joo66). Diese Überlegungen sind jedoch auch unabhängig vom Quarkmodell durchführbar, da die Identifizierung (I,134) wegen des HAAG-RUELLE-Theorems auch ohne die Einführung von Quarkfeldern zulässig ist.

In Kapitel II,3a werden unter Benutzung von (I,136) aus speziellen Ansätzen für die Bethe-Salpeter-Amplituden der Mesonen Relationen zwischen den Vektormeson-Photon-Kopplungskonstanten $g_{V\gamma}$ abgeleitet.

Der hadronische Strom der schwachen Wechselwirkung sei:

$$W_\mu^{(\pm)}(x) = T\left(\bar{\Psi}(x)\left[\gamma_\mu(\cos\vartheta_V \cdot T^{(\pi^\pm)} + \sin\vartheta_V \cdot T^{(K^\pm)}) - i\gamma_\mu\gamma_5(\cos\vartheta_A \cdot T^{(\pi^\pm)} + \sin\vartheta_A \cdot T^{(K^\pm)})\right]\Psi(x)\right) \quad (I,137)$$

oder abgekürzt:

$$W_\mu^{(\pm)}(x) = T\left(\bar{\Psi}(x)\left(\gamma_\mu \cdot W_V^{(\pm)} - i\gamma_\mu\gamma_5 \cdot W_A^{(\pm)}\right)\Psi(x)\right)$$

mit den Matrizen: (I,138)

$$T^{(\pi^+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{(\pi^-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{(K^+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{(\bar{K})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_i^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\vartheta_i & \sin\vartheta_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W_i^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos\vartheta_i & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \; i = V, A$$

und den Cabibbo-Winkeln ϑ_V und ϑ_A. (Ca63). Es werden hier zwei Cabibbo-winkel eingeführt, da die Aussage $\vartheta_V = \vartheta_A$ ein Resultat der ungebrochenen SU(3) ist, welches nicht allgemein erfüllt zu sein braucht.

Mit dem Ansatz (I,137) wird der schwache Strom die übliche Differenz $W_\mu(x) = V_\mu(x) - A_\mu(x)$ eines Vektorstromes:

$$V_\mu^{(\pm)}(x) = T\left(\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu W_V^{(\pm)}\Psi(x)\right) \quad (I,139)$$

und eines Axialvektorstromes:

$$A_\mu^{(\pm)}(x) = iT\left(\Psi(x)\gamma_\mu\gamma_5 W_A^{(\pm)}\Psi(x)\right) \quad . \quad (I,140)$$

Die beiden Ströme $V_\mu(x)$ und $A_\mu(x)$ setzen sich jeweils wieder zusammen aus einem (I=1, S=0)-Anteil:

$$V_\mu^{(\pi)}(x) = T\left(\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu T^{(\pi)}\Psi(x)\right)\cdot\cos\vartheta_V \qquad \text{bzw.} \qquad A_\mu^{(\pi)}(x) = i\cos\vartheta_A \cdot T\left(\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^{(\pi)}\Psi(x)\right) \quad (I,141)$$

und einem (I=½, S=1)-Anteil:

$$V_\mu^{(K)}(x) = \sin\vartheta_V \cdot T\left(\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu T^{(K)}\Psi(x)\right) \qquad \text{bzw.} \qquad A_\mu^{(K)}(x) = i\sin\vartheta_A \cdot T\left(\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^{(K)}\Psi(x)\right) \quad . (I,142)$$

Aus der Definition (I,137) und den Ausdrücken (I,59) für die Felder der pseudoskalaren Mesonen $\phi_s^{(\pi)}(x)$ und $\phi_s^{(K)}(x)$ folgen die Beziehungen:

$$\phi_s^{(\pi)}(x) = \frac{1}{c_\pi \cdot \cos\vartheta_A} \cdot \partial^\mu A_\mu^{(\pi)}(x) \qquad \text{und} \qquad \phi_s^{(K)}(x) = \frac{1}{c_K \cdot \sin\vartheta_A} \cdot \partial^\mu A_\mu^{(K)}(x) \quad . (I,143)$$

Die Identifizierung der Divergenz des Axialvektorstromes mit dem interpolierenden Feldern der pseudoskalaren Mesonen ist, ebenso wie die Identifizierung (I,134), wegen des HAAG-RUELLE-Theorems ganz allgemein zulässig, also auch ohne Einführung von Quarkfeldern. Die Relationen (I,143) sind als Gell-Mann-Levi- oder PCAC-"Hypothese" bekannt.

Bildet man den Erwartungswert der Relation (I,143) zwischen dem Vakuum und den Einmesonzuständen $|P,P\rangle$ mit Impuls P und $P = \pi, K$, so folgt

für die durch:

$$(2\pi)^{3/2}\langle 0|W_\mu(0)|P,P\rangle = (2\pi)^{3/2}\langle 0|A_\mu(0)|P,P\rangle = f_P \cdot P_\mu \qquad (I,144)$$

definierten Kopplungskonstanten f_π und f_K:

$$M_\pi^2 \cdot f_\pi = c_\pi \cdot \cos\vartheta_A \qquad \text{und} \qquad M_K^2 \cdot f_K = c_K \cdot \sin\vartheta_A \quad . \qquad (I,145)$$

Experimentelle Werte der Kopplungskonstanten f_π, f_K resultieren mit dem Ansatz $\mathcal{H}_W = \frac{G}{2}(W_\mu^+(x)\cdot L^\mu(x) + \text{h.c.})$ für die schwache Wechselwirkung des hadronischen Stromes $W_\mu(x)$ mit dem leptonischen Strom $L_\mu(x)$ aus den Zerfallsbreiten von $\pi \to e + \nu_e$ bzw. $K \to e + \nu_e$ (s.II.3b).

Als Strom der starken Wechselwirkung eines Hadrons α mit ganzzahligem Spin s und Masse M_α wird in der Feldtheorie der Operator:

$$J^{(\alpha)}(x) = (\Box + M_\alpha^2)\cdot\phi^{(\alpha)}(x) \qquad (I,146)$$

bezeichnet, wenn $\phi^{(\alpha)}(x)$ ein interpolierendes Feld des Teilchens α ist. Solche Ströme treten, wie der Ausdruck (I,52) für die S-Matrix zeigt, bei der Ausreduktion physikalischer Matrixelemente auf. Die Vielfalt der interpolierenden Felder eines Teilchens α hat zur folge, daß auch der Stromoperator $J^{(\alpha)}(x)$ nicht eindeutig durch α bestimmt wird.

Aus der Definition (I,146) und den speziellen Ausdrücken (I,59) und (I,60) für die Mesonfelder ergeben sich die Mesonströme:

$$J^{(P)}(x) = \frac{i}{c_P}(\Box + M_P^2)\,\partial^\mu\, T\left(\bar\Psi(x)\,\gamma_\mu\gamma_5 T^{(P)}\Psi(x)\right) \qquad (I,147)$$

$$J_\mu^{(V)}(x) = \frac{-1}{c_V}(\Box + M_V^2)\; T\left(\Psi(x)\,\gamma_\mu T^{(V)}\Psi(x)\right) \quad . \qquad (I,148)$$

Diese Vektormesonströme sind i.a. nicht divergenzfrei.

Wegen der Beziehungen (I,141) und (I,142) ergibt sich aus (I,147)

$$J^{(\pi)}(x) = \frac{\Box + M_\pi^2}{c_\pi\cdot\cos\vartheta_A}\cdot\partial^\mu A_\mu^{(\pi)}(x) \qquad \text{und} \qquad J^{(K)}(x) = \frac{\Box + M_K^2}{c_K\cdot\sin\vartheta_A}\,\partial^\mu A_\mu^{(K)}(x) \quad . \qquad (I,149)$$

Bildet man den Erwartungswert dieser Relation zwischen zwei geeigneten Baryonzuständen, so folgen mit den durch:

$$(2\pi)^3\langle p',\mu',N|J^{(\pi)}(0)|p,\mu,P\rangle = \sqrt{2}\,g_{N\pi P}\,K_\pi(q^2)\cdot(\bar u'\gamma_5 u)\,, \quad (2\pi)^3\langle p',\mu',\Lambda'|J^{(K)}(0)|p,\mu,P\rangle = g_{\Lambda KP}\cdot K_K(q^2)\,(\bar u'\gamma_5 u) \qquad (I,150)^{1)}$$

definierten Kopplungskonstanten $g_{N\pi P}$ und $g_{\Lambda KP}$ und starken Formfaktoren $K_\pi(q^2)$ und $K_K(q^2)$ sowie den durch:

$$(2\pi)^3\langle p',\mu',N|A_\mu(0)|p,\mu,P\rangle = r_A^\pi\cdot F_\pi(q^2)\cdot(\bar u'\gamma_\mu\gamma_5 u)\,, \quad (2\pi)^3\langle p',\mu',\Lambda'|A_\mu(0)|p,\mu,P\rangle = r_A^K\cdot F_K(q^2)\,(\bar u'\gamma_\mu\gamma_5 u) \qquad (I,151)$$

definierten Axialvektorrenormierungskonstanten r_A^π und r_A^K und schwa-

---

1) $q_\mu = (p'_\mu - p_\mu)$.

chen Formfaktoren $F_\pi(q^2), F_K(q^2)$ die Relationen:

$$C_\pi \cdot \cos\vartheta_A = -(q^2 - M_\pi^2)(M_N + M_P) \cdot \frac{r_A^\pi \cdot F_\pi(q^2)}{\sqrt{2}\, g_{\pi N} \cdot K_\pi(q^2)} \quad \text{und} \quad C_K \cdot \sin\vartheta_A = -(q^2 - M_K^2)(M_\Lambda + M_P) \cdot \frac{r_A^K \cdot F_K(q^2)}{g_{P\Lambda K} \cdot K_K(q^2)} \quad . \quad (I,152)$$

In Verbindung mit (I,145) ergeben sich für $q^2 = 0$, wo $F_\pi(0) = F_K(0) = 1$ ist, die bekannten Goldberger-Treiman-Relationen:

$$f_\pi = (M_N + M_P) \cdot \frac{r_A^\pi}{\sqrt{2} \cdot g_{\pi N} \cdot K_\pi(0)} \quad , \quad f_K = (M_\Lambda + M_P) \cdot \frac{r_A^K}{g_{PKA} \cdot K_K(0)} \quad . \quad (I,153)$$

Diese Beziehungen gelten ganz allgemein. Experimentell innerhalb von 10 % erfüllte Relationen zwischen meßbaren Konstanten ergeben sich aus (I,153) jedoch erst mit der Annahme, daß $K_\pi(0) \approx K_K(0) \approx K_\pi(M_\pi^2) = K_K(M_K^2) = 1$ ist. Für $q^2 \neq 0$ folgen Relationen zwischen starken und schwachen Formfaktoren.

Die Einteichenmatrixelemente der aufgeführten speziellen Ströme sind mit physikalisch meßbaren Größen, wie Kopplungskonstanten und Formfaktoren, verknüpft. Ein solcher Stromerwartungswert zwischen Meson- und Baryonenzuständen kann zerlegt werden in einen Anteil, der nur die Bethe-Salpeter-Amplituden der Teilchen enthält, und einen sogenannten Kontinuumsbeitrag. Es ist allgemein:

$$(2\pi)^3 \langle p', \mu', \alpha' | J^{(i)}(0) | p, \mu, \alpha \rangle = -(2\pi)^3 S_p \, \Gamma^{(i)} \langle p', \mu', \alpha' | T(\psi(0)\bar{\psi}(0)) | p, \mu, \alpha \rangle \quad (I,154)$$

Durch Einschieben von Zuständen (I,19) folgt für den Erwartungswert zwischen Mesonzuständen:

$$(2\pi) \langle P', e', M' | T(\psi(0)\bar{\psi}(0)) | P, e, M \rangle = \tfrac{1}{2}(2\pi)^3 \langle P', e', M' | [\psi(0), \bar{\psi}(0)]_- | P, e, M \rangle = \quad (I,155)$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi)^3 \sum_\beta \int dm^2 \, \hat{\varrho}(m^2, \beta) \int dp \, \delta(p^2 - m^2) \, \Theta(p_0) \left[\langle P', e', M' | \psi(0) | p\beta X p\beta | \bar{\psi}(0) | P, e M \rangle - \langle P', e', M' | \bar{\psi}(0) | p\beta X p\beta | \psi(0) | P e M \rangle \right] =$$

$$= \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{\bar{q}} \int dp \, \delta(p^2 - m^2) \, \Theta(p_0) \left[\langle P' e' M' | \psi(0) | p q X p \bar{q} | \bar{\psi}(0) | P e M \rangle - \langle p\bar{q} | \psi(0) | P e M \rangle \langle P' e' M' | \bar{\psi}(0) | p \bar{q} \rangle \right] + \text{"kont."} \quad .$$

In der letzten Zeile wurde explizit die Summe über einen vollständigen Satz von diskreten Ein-Quark-Zuständen abgespalten und mit "Kontinuumsbeitrag" die restlichen Beiträge des Mehrteilchenkontinuums von $\hat{\varrho}(m^2, \beta)$ abgekürzt. Zum ersten Summanden tragen wegen der Baryonenzahlerhaltung offensichtlich nur die Quark-Zustände $|p,u,q\rangle$, zum zweiten Summanden nur die Antiquark-Zustände $|p,v,\bar{q}\rangle$ bei. Mit Hilfe der Reduktionsformeln läßt sich unter Benutzung der Definitionen (I,86) der Bethe-Salpeter-Amplituden $\chi^{(M)}(p,P,e)$ und $\bar{\chi}^{(M)}(p,P,e)$ zeigen, daß:

$$\langle p, \mu, q | \psi_a(0) | P e M \rangle = 2\pi i \cdot \delta_{qa} \cdot u^{(q)}(p) \cdot (\not{p} - m_q) \cdot \chi^{(M)}(p - P/2, P, e) \quad (I,156)$$

$$\langle P',e',M'|\,\Psi_a(0)\,|p,u,q\rangle = -2\pi i\cdot\delta_{aq}\cdot\bar{\chi}^{(M)}(p-P'/2,P',e')\,(\not{p}-m_q)\,u^{(q)}(p)$$

$$\langle p,v,\bar{q}|\,\Psi_a(0)\,|P,e,M\rangle = 2\pi\cdot\delta_{aq}\cdot\bar{\chi}^{(M)}(-p+P/2,P,e)\,(\not{p}+m_q)\,v^{(q)}(p) \qquad \text{(I,156)}$$

$$\langle P',e',M'|\,\Psi_a(0)\,|p,v,\bar{q}\rangle = -2\pi i\cdot\delta_{aq}\cdot\bar{v}^{(q)}(p)\cdot(\not{p}+m_q)\cdot\chi^{(M')}(-p+P'/2,P',e')\,.$$

Unter Verwendung dieser Relationen gelangt man nach den in ANHANG 3 beschriebenen Umformungen zu dem Ergebnis:

$$(2\pi)^3\langle P',e',M'|T(\Psi(0)\Psi(0))|P,e,M\rangle = (2\pi)^4 i\cdot\int dp\left[\bar{\chi}^{(M')}(p-P'/2)(\not{p}-m)\chi^{(M)}(p-P/2)+\chi^{(M)}(p-P/2)(\not{p}-m)\bar{\chi}^{(M')}(p-P'/2)\right]+\text{"KONT."},$$

wobei $\chi^{(M)}(p-P/2)=\chi^{(M)}(p-P/2,P,e)$ usw. und m die Quarkmassenmatrix ist. Mit (I,154) folgt hieraus für den Erwartungswert eines allgemeinen Stromes zwischen zwei Mesonzuständen: (I,157)

$$(2\pi)^3\cdot\langle P',e',M'|\,J^{(i)}(0)\,|p,e,M\rangle = -(2\pi)^4 i\cdot\int dp\;Sp\,F^{(i)}\left[\bar{\chi}^{(M')}(p-P'/2)(\not{p}-m)\chi^{(M)}(p-P/2)+\chi^{(M)}(p-P/2)(\not{p}-m)\bar{\chi}^{(M')}(p-P'/2)\right]+\text{"KONTIN."}$$

Diese Gestalt für den Einteilchenbeitrag zum Stromerwartungswert gebundener Zustände wurde für den Fall des elektromagnetischen Stromes bereits von MANDELSTAM in (Ma55) abgeleitet und von THIRRING in (Th60) angegeben.

Ganz analog folgt durch Abspalten der Zwei-Quarkbeiträge der Zwischenzustände für den Erwartungswert eines allgemeinen Stromes zwischen zwei Baryonzuständen:

(I,158)

$$(2\pi)^8\langle P',u',\mathcal{B}'|\,J^{(i)}(0)\,|P,u,\mathcal{B}\rangle = (2\pi)^8\cdot\int dp\,dp'\left[\bar{\chi}^{(\mathcal{B}')}(P'-(2p+p'),P'-(2p'+p),P',u')(\not{p}'-m)(\not{p}-m)\cdot F^{(i)}\cdot\chi^{(\mathcal{B})}(P-(2p+p'),P-(2p'+p),P,u)\right]+\text{"KON."}$$

Die auf den Ein-Quark- bzw. Zwei-Quark-Beitrag beschränkten Ausdrükke (I,157) und (I,158) werden im folgenden zur approximativen Berechnung von Stromerwartungswerten verwendet.

II. ANNAHMEN, APPROXIMATIONEN UND SPEZIELLE MATRIXELEMENTE

1. CHARAKTERISTISCHE EIGENSCHAFTEN DES QUARKMODELLS

In Kapitel I.4 wurde darauf hingewiesen, daß man die Eigenschaften bestimmter Greenscher Funktionen des Quarkfeldes kennen muß, um zu speziellen Aussagen zu gelangen. Da es keine dynamische Theorie zur Berechnung von Greenschen Funktionen und anderen Matrixelementen gibt, ist es notwendig, zusätzlich zu den Axiomen Ansätze und Annahmen zu machen. Auf der Suche nach solchen Ansätzen kann man sich leiten lassen von Prinzipien, die sich bereits als wesentlich und nützlich erwiesen haben. Im Rahmen einer Quarkfeldtheorie ist es natürlich, sich an den Annahmen und Prinzipien des nichtrelativistischen Quarkmodells zu orientieren.

Eine wesentliche Grundlage des nichtrelativistischen Quarkmodells scheint zu sein, daß sich die Hadronen aus einer definierten Anzahl von Quarks und Antiquarks zusammensetzen. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich beispielsweise ein pseudoskalares Meson wie ein gebundenes System von zwei Quarks und zwei Antiquarks oder von einem Quark, einem Antiquark und einem Meson verhält, ist klein gegenüber der Wahrscheinlichkeit, daß sich das pseudoskalare Meson wie ein reines Quark-Antiquarksystem, also ein Zwei-Teilchen-System, verhält. Diese Eigenschaft gebundener Quark-Systeme erklärt MOLPURGO (Mo65) damit, daß bei nichtrelativistischer Relativbewegung der Quarks in den Hadronen die Wahrscheinlichkeit für die Quark-Antiquark-Paarbildung klein ist. Eine nichtrelativistische Relativbewegung läßt sich qualitativ auch für sehr stark gebundene Systeme mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation verstehen, wenn nur die Reichweite der Bindungskräfte groß ist gegenüber der Comptonwellenlänge $1/m$ der Quarks.

Ein weiteres Prinzip des nichtrelativistischen Quarkmodells scheint zu sein, daß die ein gebundenes System beschreibende Wellenfunktion faktorisiert in einen Anteil, der nur die Spin-Isospin-Indizes der Quarks enthält, und einen Anteil, der nur von den Relativkoordinaten der einzelnen Quarks abhängt. Die Spin-Isospin-Wellenfunktionen besitzen bezüglich der Vertauschung von Quark- bzw. Antiquark-Indizes definierte Symmetrieeigenschaften. Der von den Relativkoordinaten bzw. Relativimpulsen abhängige Wellenfunktionsanteil, die Raumwellenfunktion, ist für alle pseudoskalaren Mesonen und Vektormesonen bzw. alle $1/2^+$-Baryonen und $3/2^+$-Baryonenresonanzen gleich. Eine solche Faktorisierung weist darauf hin, daß die Wechselwirkungspotentiale zwischen den Quarks keine

Spin-Bahn-Kopplungs-Anteile enthalten.

Diese beiden wesentlichen Prinzipien des nichtrelativistischen Quarkmodells, nämlich die definierte Quarkzahl verbunden mit der nichtrelativistischen Relativbewegung und die Faktorisierungseigenschaft der Wellenfunktionen verbunden mit der Symmetrieeigenschaft und der Gleichheit der Raumwellenfunktionen verschiedener Hadronen, lassen sich auf eine Quarkfeldtheorie übertragen.

Die definierte Quarkzahl der Hadronen drückt sich darin aus, daß für die Baryonen und Mesonen die höheren Amplituden

$$\langle 0 | T(\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_n)\cdot\bar{\Psi}(x_1')\cdots\bar{\Psi}(x_n'))|P,e,M\rangle \qquad (II,1)$$

bzw.

$$\langle 0 | T(\Psi(x_1)\cdot\Psi(x_2)\cdot\Psi(x_3)\cdots\Psi(x_{3n})\cdot\Psi(y_1)\cdot\Psi(y_n)\bar{\Psi}(y_1')\cdots\bar{\Psi}(y_k'))|P,\mu,B\rangle$$

mit $n>1$, $k>0$ gegenüber den Bethe-Salpeter-Amplituden mit $n=1, k=0$ vernachlässigt werden können. Approximativ werden die Hadronen also durch ihre Bethe-Salpeter-Amplituden vollständig beschrieben.

Fordert man für diese Bethe-Salpeter-Amplituden die für die nichtrelativistischen Wellenfunktionen charakteristischen Eigenschaften, so gelangt man zu bestimmten Ansätzen für diese Amplituden.

Diese Ansätze werden im nächsten Kapitel angegeben und erläutert. Anschließend sollen einige Konsequenzen, die sich aus diesen Ansätzen und Prinzipien im Rahmen der Quarkfeldtheorie ergeben, studiert werden.

2. ANSÄTZE FÜR DIE BETHE-SALPETER-AMPLITUDEN DER MESONEN UND BARYONEN

Mit den oben diskutierten Prinzipien sind die folgenden, anschließend erläuterten, speziellen Ansätze für die Bethe-Salpeter-Amplituden der Hadronen P, V, B, D verträglich:

Pseudoskalare Mesonen: (P)

$$\chi^{(P)}_{\nu_1 a_1 \nu_2 a_2}(p,P) = \frac{1}{\sqrt{M_P}}\cdot\left(\gamma_5(\not{P}-M_P)\right)_{\nu_1\nu_2}\cdot T^{(P)}_{a_1 a_2}\cdot\chi(p) \qquad (II,2)$$

Vektormesonen: (V)

$$\chi^{(V)}_{\nu_1 a_1 \nu_2 a_2}(p,P,e) = \frac{1}{\sqrt{M_V}}\cdot\left(\not{e}(\not{P}-M_V)\right)_{\nu_1\nu_2}\cdot T^{(V)}_{a_1 a_2}\cdot\chi(p) \qquad (II,3)$$

$1/2^+$-Baryonen: (B) (II,4)

$$\chi^{(B)}_{\nu_1 a_1, \nu_2 a_2, \nu_3 a_3}(p_1 p'_1 P, u) = \frac{1}{\sqrt{3}M_B}\Big[u_{\nu_1}(\gamma_5(\not{P}-M_B)C)_{\nu_2\nu_3}\cdot T^{(B)}_{a_1 a_2 a_3} + u_{\nu_2}(\gamma_5(\not{P}-M_B)C)_{\nu_3\nu_1}\cdot T^{(B)}_{a_2 a_3 a_1} + u_{\nu_3}(\gamma_5(\not{P}-M_B)C)_{\nu_1\nu_2}\cdot T^{(B)}_{a_3 a_1 a_2}\Big]\cdot\chi(p_1 p')$$

$3/2^+$-Baryonenresonanzen: (D) (II,5)

$$\chi^{(D)}_{\nu_1 a_1, \nu_2 a_2, \nu_3 a_3}(p_1 p'_1 P, u) = \frac{1}{\sqrt{3}M_D}\Big[u^\mu_{\nu_1}(\gamma_\mu(\not{P}-M_D)C)_{\nu_2\nu_3}\cdot T^{(D)}_{a_1 a_2 a_3} + u^\mu_{\nu_2}(\gamma_\mu(\not{P}-M_D)C)_{\nu_3\nu_1}\cdot T^{(D)}_{a_2 a_3 a_1} + u^\mu_{\nu_3}(\gamma_\mu(\not{P}-M_D)C)_{\nu_1\nu_2}\cdot T^{(D)}_{a_3 a_1 a_2}\Big]\cdot\chi(p_1 p')$$

Die Tensoren $T^{(B)}$ sind definiert durch:

$$T^{(B)}_{a_1 a_2 a_3} = \varepsilon_{K a_2 a_3}\cdot T^{(B)}_{a_1 K} \qquad (II,6)$$

mit dem vollständig antisymmetrischen Tensor $\varepsilon_{a_1 a_2 a_3}$. Die 3×3-Matrizen $T^{(P)}, T^{(V)}$ und $T^{(B)}$ sind die bereits in Teil I benutzten SG-Matrizen $T^{(YII_3)}$ mit $(YII_3) c (\alpha)$. Sie sind für die verschiedenen Teilchen gegeben durch:

$$T^{(\pi^-)} = T^{(\varrho^-)} = T^{(\Sigma^-)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(\pi^+)} = T^{(\varrho^+)} = T^{(\Sigma^+)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(\pi^0)} = T^{(\varrho^0)} = T^{(\Sigma^0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$T^{(K^-)} = T^{(K^{*-})} = T^{(\Xi^-)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(\bar{K}_0)} = T^{(\bar{K}^*_0)} = T^{(\Xi_0)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$T^{(K^+)} = T^{(K^{*+})} = T^{(B^+)} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(K_0)} = T^{(K^*_0)} = T^{(N)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (II,7)$$

$$T^{(\eta)} = T^{(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \qquad T^{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad T^{(\phi)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad T^{(X_0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Die von Null verschiedenen Elemente der vollständig symmetrischen Tensoren $T^{(D)}$ sind:

$$T^{(N^{*}_{++})}_{111} = 1 \qquad T^{(N^{*}_{+})}_{112} = 1/\sqrt{3} \qquad T^{(N^{*}_{0})}_{122} = 1/\sqrt{3} \qquad T^{(N^{*}_{-})}_{222} = 1$$

$$T^{(Y_+)}_{113} = 1/\sqrt{3} \qquad T^{(Y_0)}_{123} = 1/\sqrt{6} \qquad T^{(Y_-)}_{223} = 1/\sqrt{3} \qquad (II,8)$$

$$T^{(\Xi^{*}_{0})}_{133} = 1/\sqrt{3} \qquad T^{(\Xi^{*}_{-})}_{233} = 1/\sqrt{3}$$

$$T^{(\Omega^-)}_{333} = 1 .$$

Die invarianten Funktionen $\chi(p^2)$ und $\chi(p,p')$ sind für alle 0^{-+}- und 1^{--}-Mesonen bzw. für alle $1/2^+$- und $3/2^+$-Baryonen gleich. Sie sollen für große p^2, p^2 so stark abfallen, daß:

$$\left|\int dp \left(\frac{p_\mu}{m}\right)^n \chi^2(p)\right| \ll \left|\int dp \left(\frac{p_\mu}{m}\right)^{n-1} \chi^2(p)\right| \quad \text{bzw.} \quad \left|\int dp\, dp' \left(\frac{p_\mu}{m}\right)^n \chi^2(p,p')\right| \ll \left|\int dp\, dp' \left(\frac{p_\mu}{m}\right)^{n-1} \chi^2(p,p')\right|, \qquad (II,9)$$

wenn m die Quarkmasse ist.

Zu den Ansätzen und Annahmen (II,2) bis (II,9) ist folgendes zu bemerken:

Die speziellen Bethe-Salpeter-Amplituden (II,2-5) besitzen die Eigenschaften, welche in I.5b bzw. I.5c aus den Axiomen abgeleitet wurden. Damit auch die Symmetrieeigenschaft (I,130) für die Baryonen-Amplituden erfüllt ist, muß die invariante Funktion $\chi(p,p')$ die Eigenschaft haben:

$$\chi(p,p') = -\chi(p',p) = -\chi(-p,(p'-p)) = -\chi((p-p'),-p').$$

Eine invariante Funktion mit dieser Eigenschaft ist z.B.:

$$\chi(p,p') = (p^2-p'^2)\cdot(p^2-(p-p')^2)\cdot(p'^2-(p-p')^2)\cdot F(p^2,p'^2,(p-p')^2)$$

mit einer in den drei Argumenten vollständig symmetrischen Funktion F .

Mit der Forderung, daß die Bethe-Salpeter-Amplituden faktorisieren sollen in einen Anteil, der nur vom Relativimpuls p abhängt, und einen Anteil, der von den übrigen Variablen bestimmt wird, reduzieren sich die allgemeinen Zerlegungen (I,112), (I,113) auf die Ansätze (II,2), (II,3), wenn man noch verlangt, daß die Bethe-Salpeter-Amplituden im Ruhesystem $P_{CMS} = (M_M, \vec{0})$ die für den Grenzfall nichtrelativistischer Relativbewegung charakteristische Gestalt (Sa52) haben :

$$\underline{\chi^{(n.r.)}(p,P) = \begin{pmatrix} 0 & \chi(p_0,\vec{p}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad .$$

Diese Gestalt für $\chi^{(n.r.)}(p,P)$ gilt in der Dirac-Darstellung der γ-Matrizen:

$$\underline{\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad \underline{\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}} \quad \underline{\gamma_5 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad .$$

Für die I=0 Mesonen η, X_0, ω, ϕ wurden bestimmte ideale Mischungswinkel angesetzt, welche zu den in (II,7) angegebenen Linearkombinationen der SG-Matrizen $T^{(000)}{}_1$ und $T^{(000)}{}_2$ führen.

Mit der zusätzlichen Annahme, daß die Baryonenamplituden vollständig symmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier Indexpaare $\nu_i a_i$ sind, und entsprechenden Überlegungen wie für die Mesonamplituden resultieren die Ansätze (II,4) und (II,5) für die Bethe-Salpeter-Amplituden der Baryonen.

Die Annahme (II,9) bringt den nichtrelativistischen Charakter der Relativbewegung der einzelnen Quarks in den phänomenologischen Teilchen zum Ausdruck. Man kann (II,9) als Folge einer sehr großen Quarkmasse verstehen.

Der Ansatz von für alle Mesonen bzw. Baryonen gleichen invarianten

Amplituden $\chi(p)$ bzw. $\chi(p,p')$ enthält die bekannte Verwandschaft dieser Teilchen, die in der SU(6) in ein $(\underline{35}+\underline{1})$- bzw. ein $(\underline{56})$- Multiplett eingeordnet werden.

Die Faktoren $1/M_M$ bzw. $1/(\sqrt{3}\cdot M_B)$ in den Ansätzen (II,2-5) wurden so gewählt, daß sich bei der Normierung

$$\int dp\ \bar{\chi}(p)\chi(p) = \frac{1}{4m}\cdot\frac{i}{(2\pi)^4} \qquad \int dp\,dp'\ \bar{\chi}(p,p')\chi(p,p') = -\frac{3^4}{8m^2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^8} \qquad \text{(II,10)}$$

der invarianten Funktionen $\chi(p)$ und $\chi(p,p')$ im folgenden die richtig normierten elektrischen Formfaktoren für die Mesonen und Baryonen ergeben.

In den nächsten Kapiteln wird unabhängig von den gegebenen Erläuterungen mit den Ansätzen (II,2-9) gerechnet. Diese Ansätze und Annahmen können als Grundlage eines "relativistischen Quarkmodells" angesehen werden. Bei diesen Rechnungen werden auch die Amplituden $\bar{\chi}$ benötigt. Sie folgen mit den Relationen (I,11) bzw. (I,128) aus den Ansätzen:

$$\bar{\chi}^{(P)}(p,P) = \frac{1}{\sqrt{M_P}}\cdot\gamma_5(\not{p}+M_P)\cdot T^{(\bar{P})}\cdot\chi(p) \qquad \text{(II,11)}$$

$$\bar{\chi}^{(V)}(p,P,e) = \frac{1}{\sqrt{M_V}}\cdot\not{e}(\not{p}+M_V)\cdot T^{(\bar{V})}\cdot\chi(p) \qquad \text{(II,12)}$$

$$\bar{\chi}^{(B)}_{\nu_1 a_1,\nu_2 a_2,\nu_3 a_3}(p,p';P,u) = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot M_B}\cdot\left(u_{\nu_1}(\tilde{C}^{-1}\gamma_5(\not{p}+M_B))_{\nu_2\nu_3}\cdot T^{(B)}_{a_1a_2a_3} + \text{zykl.}\right)\cdot\chi(p,p') \qquad \text{(II,13)}$$

$$\bar{\chi}^{(D)}_{\nu_1 a_1,\nu_2 a_2,\nu_3 a_3}(p,p';P,u) = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot M_D}\cdot\left(u^{\mu}_{\nu_1}(\tilde{C}^{-1}\gamma_\mu(\not{p}+M_D))_{\nu_2\nu_3}\cdot T^{(D)}_{a_1a_2a_3} + \text{zykl.}\right)\cdot\chi(p,p') \qquad \text{(II,14)}$$

Hierin sind $T^{(\bar{M})} = \tilde{T}^{(M)}$ die transponierten Matrizen $T^{(M)}$.

In den anschließenden Rechnungen wird der Unterschied in den Quarkmassen vernachlässigt. Die im Prinzip mögliche Berücksichtigung des Massenunterschiedes würde die Rechnungen nur undurchsichtig machen. Bei sehr großen Quarkmassen sollte der Fehler von der Größenordnung $\Delta/m = (m_\lambda - m_p)/m_p$ vernachlässigbar sein.

3. APPROXIMATIVE STROMERWARTUNGSWERTE

Wegen des in II.1 formulierten Prinzips der definierten Quarkzahlen in den Hadronen können die allgemeinen Stromerwartungswerte (I,157) und (I,158) durch die Ein- bzw. Zwei-Quarkbeiträge approximiert werden. Die Kontinuumsbeiträge hängen von den höheren Amplituden ab.

Unter Berücksichtigung der Eigenschaft (II,9) der speziellen Bethe-Salpeter-Amplituden (II,2-5) ergeben sich in dieser Approximation aus (I,157) und (I,158) die Stromerwartungswerte:

$$(2\pi)^3\langle P',e',M'|J^{(i)}(0)|P,e,M\rangle = -(2\pi)^4 i\,m\int dp\cdot F^{(i)}_{\Lambda\Lambda'}\left[\bar{\chi}^{(M')}_{\Lambda'\beta}(p-P'/2)\cdot\chi^{(M)}_{\beta\Lambda}(p-P/2)+\chi^{(M')}_{\Lambda'\beta}(p-P'/2)\,\bar{\chi}^{(M')}_{\beta\Lambda}(p-P'/2)\right] \qquad (II,15)$$

$$(2\pi)^3\langle P',u',B'|J^{(i)}(0)|P,u,B\rangle = (2\pi)^8 m^2\int dp\,dp'\cdot F^{(i)}_{\Lambda'\Lambda}\cdot\bar{\chi}^{(B')}_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda'}(P'-(2p+p'),P'-(2p'+p),P',u')\cdot\chi^{(B)}_{\Lambda_1\Lambda_2\Lambda}(P-(2p+p),P-(2p'+p),P,u) \qquad (II,16)$$

Hierin ist $F^{(i)} = T^{(R)}\circ T^{(S)}$ die nach Definition (I,131,132) für den Strom $J^{(i)}(x)$ charakteristische 12×12-Matrix.

Mit den speziellen Amplituden (II,2) und (II,3) der Mesonen P und V folgt aus (II,15) für den Erwartungswert eines allgemeinen Stromes $J^{(i)}$ zwischen

zwei pseudoskalaren Mesonzuständen $|P',P'\rangle$ und $|P,P\rangle$:

$$(2\pi)^3\langle P',P'|J^{(i)}(0)|P,P\rangle = F(q^2)\cdot\frac{1}{4M_PM_{P'}}\left[c^{SP'P}\cdot Sp\,T^{(R)}(\not{P}'-M_{P'})(\not{P}-M_P)+c^{SP\bar{P}'}\cdot Sp\,T^{(R)}(\not{P}+M_P)(\not{P}'+M_{P'})\right] \qquad (II,17)$$

zwei Vektormesonzuständen $|P',e',V'\rangle$ und $|P,e,V\rangle$:

$$(2\pi)^3\langle P',e',V'|J^{(i)}(0)|P,e,V\rangle = F(q^2)\cdot\frac{1}{4M_VM_{V'}}\left[c^{SV'V}\cdot Sp\,T^{(R)}(\not{P}'-M_{V'})\not{e}'\not{e}(\not{P}-M_V)+c^{SV\bar{V}'}\cdot Sp\,T^{(R)}(\not{P}+M_V)\not{e}\not{e}'(\not{P}'+M_{V'})\right] \qquad (II,18)$$

einem pseudoskalern Mesonzustand $|P',P\rangle$ und einem Vektormesonzustand $|P,e,V\rangle$:

$$(2\pi)^3\langle P',P|J^{(i)}(0)|P,e,V\rangle = -F(q^2)\,\frac{1}{4\sqrt{M_PM_V}}\left[c^{SP'V}\cdot Sp\,T^{(R)}(\not{P}'-M_{P'})\gamma_5\not{e}(\not{P}-M_V)+c^{SV\bar{P}'}\cdot Sp\,T^{(R)}(\not{P}+M_V)\not{e}\gamma_5(\not{P}'+M_{P'})\right] \qquad (II,19)$$

$F(q^2)$ ist ein durch:

$$F(q^2) = -4\cdot(2\pi)^4 i\,m\cdot\int dp\;\chi(p)\cdot\chi(p-q) \qquad (II,20)$$

definierter universeller Mesonformfaktor und $q = (P-P)$ der Vektor des Impulsübertrages. Die Konstanten $c^{SM'M}$ sind gegeben durch:

$$c^{SM'M} = Sp\,(T^{(S)}\cdot T^{(M')}\cdot T^{(M)}) \;, \qquad (II,21)$$

wobei $T^{(M)}$ die durch (II,7) gegebene 3×3-Matrix des Mesons M ist und $T^{(S)}$ die den Strom $J^{(i)}$ charakterisierende 3×3-Matrix.

Mit den Baryonenamplituden (II,4) und (II,5) folgt entsprechend aus (II,16) für den Erwartungswert eines allgemeinen Stromes $J^{(i)}$ zwischen

zwei $1/2^+$-Baryonzuständen $|P',u',B'\rangle$ und $|P,u,B\rangle$: (II,22)

$$(2\pi)^3\langle P',u',B'|J^{(i)}(0)|P,u,B\rangle = G(q^2)\cdot\frac{1}{24M_BM_{B'}}\cdot\left[c_1^{SB'B}\cdot Sp\,(\not{P}+M_B)(\not{P}'+M_{B'})\cdot T^{(R)}+c_2^{SB'B}\cdot(\bar{u}'(\not{P}+M_B)\gamma_5 C\bar{T}^{(R)}C^{-1}\gamma_5(\not{P}'+M_{B'})u)-\right.$$

$$\left.-c_3^{SB'B}\cdot(\bar{u}'(\not{P}+M_B)(\not{P}'+M_{B'})T^{(R)}u)-c_4^{SB'B}(\bar{u}'T^{(R)}(\not{P}+M_B)(\not{P}'+M_{B'})u)+c_5^{SB'B}\cdot 4(M'M+P'P)\cdot(\bar{u}'T^{(R)}u)\right]$$

zwei $3/2^+$-Baryonzuständen $|P',u',D'\rangle$ und $|P,u,D\rangle$: (II,23)

$$(2\pi)^3\langle P',u',D'|J^{(i)}(0)|P,u,D\rangle = G(q^2)\cdot\frac{1}{2M_{D'}M_D}\cdot c^{SD'D}\cdot\Big[(\bar{u}^{\mu'}u_\mu)\cdot Sp(\not P'+M_{D'})\gamma_\mu\gamma_{\mu'}(\not P+M_D)\Gamma^{(1)}+(\bar{u}^{\mu'}(\not P'+M_{D'})\gamma_{\mu'}C\bar{T}^{(2)}C^{-1}\gamma_\mu(\not P+M_D)u^\mu)+$$

$$+(\bar{u}^{\mu'}(\not P'+M_{D'})\gamma_\mu\gamma_{\mu'}(\not P+M_D)T^{(1)}u^\mu)+(\bar{u}^{\mu'}T^{(1)}(\not P'+M_{D'})\gamma_\mu\gamma_{\mu'}(\not P+M_D)u^\mu)+2(\bar{u}^{\mu'}T^{(2)}u^\mu)((M_{D'}M_D+PP')g_{\mu\mu'}-P_\mu P_{\mu'})\Big]$$

einem $1/2^+$-Baryonzustand $|P',u',B\rangle$ und einem $3/2^+$-Baryonzustand $|P,u,D\rangle$:

$$(2\pi)^3\langle P',u',B|J^{(i)}(0)|P,u,D\rangle = G(q^2)\cdot\frac{1}{2M_{B'}M_D}\cdot c^{SBD}\cdot\Big[(\bar{u}u^\mu)Sp(\not P+M_D)\gamma_\mu\gamma_5(\not P'+M_{B'})T^{(1)}-$$

$$-(\bar{u}'(\not P+M_D)\gamma_\mu C\bar{T}^{(2)}C^{-1}\gamma_5(\not P'+M_{B'})u^\mu)+(\bar{u}'(\not P+M_D)\gamma_\mu\gamma_5(\not P'+M_{B'})T^{(1)}u^\mu)\Big] \quad . \quad (II,24)$$

$G(q^2)$ ist ein durch:

$$G(q^2) = -\frac{8}{3}\cdot(2\pi)^8\cdot m^2\cdot\iint dp\,dp'\;\big(\chi(p,p')\cdot\chi(p-q,p'-q)\big) \qquad (II,25)$$

definierter universeller Baryonenformfaktor. Die Konstanten $c_i^{SB'B}$, $c^{SD'D}$ und c^{SBD} sind gegeben durch:

$$c_1^{SB'B} = 2\cdot T^{(S)}_{a'a}T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{a_1a_2a} \qquad c_2^{SB'B} = -2\cdot T^{(S)}_{a'a}T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{a_2a_1a} \qquad c_3^{SB'B} = 2T^{(S)}_{a'a}T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{aa_1a_2}$$

$$c_4^{SB'B} = 2\cdot T^{(S)}_{a'a}T^{(B')}_{a'a_1a_2}T^{(B)}_{a_1a_2a} \qquad c_5^{SB'B} = T^{(S)}_{a'a}T^{(B')}_{a'a_1a_2}T^{(B)}_{aa_1a_2} \qquad (II,26)$$

$$c^{SD'D} = 2\cdot T^{(S)}_{a'a}T^{(D')}_{a_1a_2a'}T^{(D)}_{a_1a_2a} \qquad c^{SBD} = 2T^{(S)}_{a'a}T^{(B)}_{a_1a_2a'}T^{(D)}_{a_1a_2a} \quad ,$$

wobei $T^{(B)}_{a_1a_2a_3}$ und $T^{(D)}_{a_1a_2a_3}$ die durch (II,6) bzw. (II,8) gegebenen Tensoren der Baryonen B bzw. D sind.

Mit Hilfe der Ausdrücke (II,17 bis 26) sollen jetzt die Erwartungswerte der speziellen, in I.6 definierten Ströme berechnet werden.

a. Erwartungswerte des elektromagnetischen Stromes

In I.6 wurde der elektromagnetische Strom definiert durch:

$$j_\mu(x) = T(\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu Q\Psi(x)) \qquad \text{mit} \qquad Q = \frac{e}{3}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad . \quad (II,27)$$

Es ist also in diesem Fall $\Gamma^{(R)} = \gamma_\mu$ und $T^{(S)} = Q$.

Mit den Ausdrücken (II,17), (II,18) und (II,19) ergibt sich für den Erwartungswert des elektromagnetischen Stromes zwischen zwei Mesonzuständen:

$$(2\pi)^3\langle P',P'|j_\mu(0)|P,P\rangle = e_p\cdot F(q^2)\cdot(P_\mu+P'_\mu) \qquad (II,28)$$

$$-(2\pi)^3 \langle P', e', V | j_\mu(0) | P, e, V \rangle = e_V \cdot F(q^2) \cdot (\bar{e}'e) \cdot (P'_\mu + P_\mu) + e_V F(q^2) \left[(\bar{e}'q) e_\mu - (eq) \bar{e}'_\mu \right] \qquad \text{(II,29)}$$

$$-(2\pi)^3 \langle P', P | j_\mu(0) | P, e, V \rangle = F(q^2) \cdot \frac{a_{VP}}{\sqrt{M_V M_P}} \cdot \left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P'^\nu P^\rho e^\sigma \right) . \qquad \text{(II,30)}$$

Die durch

$$e_M = - \operatorname{Sp} Q \left(T^{(\overline{M})} T^{(M)} - T^{(M)} T^{(\overline{M})} \right) \qquad \text{(II,31)}$$

gegebene Größe e_M erweist sich als die Mesonladung. Die Konstanten a_{VP} sind gegeben durch:

$$a_{VP} = - \operatorname{Sp} Q \left(T^{(\overline{P})} T^{(V)} + T^{(V)} T^{(\overline{P})} \right) . \qquad \text{(II,32)}$$

Die elektrischen Formfaktoren $G_E^M(q^2)$ und Ladungen e_M, die magnetischen Formfaktoren $G_M^V(q^2)$ und Momente μ_M sowie der Quadrupolformfaktor $G_Q^V(q^2)$ und das Quadrupolmoment q_V der Mesonen sind definiert durch die allgemeinen Entwicklungen:

$$(2\pi)^3 \langle P', P | j_\mu(0) | P, P \rangle = e_P \cdot G_E^P(q^2) \cdot (P'_\mu + P_\mu) \qquad \text{(II,33)}$$

$$(2\pi)^3 \langle P', e', V | j_\mu(0) | P, e, V \rangle = e_V G_E^V(q^2) \cdot (\bar{e}'e) \cdot (P'_\mu + P_\mu) + 2M_V \mu_V G_M^V(q^2) \left[(\bar{e}'q) e_\mu - (eq) e'_\mu \right] + q_V \cdot G_Q^V(q^2) \cdot (P'_\mu + P_\mu) \left[2(\bar{e}'q)(eq) - \tfrac{q^2}{2} (\bar{e}'e) \right] \qquad \text{(II,34)}$$

der Erwartungswerte des divergenzfreien elektromagnetischen Stromes nach Kovarianten. Die Kopplungskonstanten $g_{VP\gamma}$ und der Übergangsformfaktor $G^{VP}(q^2)$ sind durch die Entwicklung:

$$(2\pi)^3 \langle P', P | j_\mu(0) | P, e, V \rangle = g_{VP\gamma} \cdot G^{VP}(q^2) \cdot \left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P'^\nu P^\rho e^\sigma \right) \qquad \text{(II,35)}$$

definiert. Alle diese Formfaktoren sind bei $q^2 = 0$ auf 1 normiert.

Die Resultate (II,28,29,30) sind offensichtlich verträglich mit diesen allgemeinen Entwicklungen. Dementsprechend verschwinden auch die Erwartungswerte der Divergenz $\partial^\mu j_\mu(x)$, ohne daß irgendwo explizit $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ benutzt wurde. Die Normierung der Bethe-Salpeter-Amplituden durch die Normierung (II,10) der invarianten Funktion $\chi(p)$ bewirkt grade, daß der universelle Formfaktor $F(q^2)$ für $q^2 = 0$ gleich 1 ist und daher die Resultate (II,28-30) mit den allgemeinen Entwicklungen (II,33-35) bei $q^2 = 0$ übereinstimmen. Durch Vergleich der Resultate mit den allgemeinen Entwicklungen bei beliebigen q^2 ergeben sich die Aussagen:

1. Die magnetischen Momente der Vektormesonen sind, unabhängig von der Quarkmasse, gleich dem normalen magnetischen Moment:

$$\mu_V = \frac{e_V}{2M_V} . \qquad \text{(II,36)}$$

Dieses Resultat ist eine Folge der Einteilchenapproximation des Strom-

erwartungswertes, der Form (II,27) des elektromagnetischen Stromoperators und des Ansatzes (II,3) für die Bethe-Salpeter-Amplitude der Vektormesonen.

Auffallend ist vor allem die Unabhängigkeit des resultierenden Momentes von der Quarkmasse. Eine solche Unabhängigkeit des magnetischen Momentes eines gebundenen Systems von der Masse der Konstituenden wurde für bestimmte quasirelativistische Potentialmodelle von BOGOLUBOV u.al. (Bo66) und CIAFALONI (Ca67) bereits diskutiert.

2. Das Quadrupolmoment der Vektormesonen ist gleich Null.

3. Die Kopplungskonstanten g_{VP} sind:

$$g_{VP} = \frac{a_{VP}}{\sqrt{M_V M_P}} \quad . \tag{II,37}$$

Es ergeben sich für diese Kopplungskonstanten absolute Werte.

Die Konstanten a_{VP}, die mit (II,37) resultierenden Kopplungskonstanten g_{VP} und die mit Hilfe der Formeln

$$\Gamma_{V\to P+\gamma} = \frac{g^2_{VP\gamma}}{4\pi}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{M_V^2-M_P^2}{2M_V}\right)^3 \qquad \text{bzw.} \qquad \Gamma_{P\to V+\gamma} = \frac{g^2_{VP\gamma}}{4\pi}\cdot\left(\frac{M_P^2-M_V^2}{2M_P}\right)^3 \tag{II,38}$$

berechneten Zerfallsbreiten für $V \to P + \gamma$ bzw. $P \to V + \gamma$ sind in Tabelle II aufgeführt.

TABELLE II

	$\varrho\to\pi+\gamma$	$\omega\to\pi+\gamma$	$\phi\to\pi+\gamma$	$\varrho\to\eta+\gamma$	$\omega\to\eta+\gamma$	$\phi\to\eta+\gamma$	$X_0\to\varrho+\gamma$	$X_0\to\omega+\gamma$	$\phi\to X_0+\gamma$	EINHEIT
a_{VP}	$1/3$	1	0	$1/\sqrt{3}$	$1/3\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}/3\sqrt{3}$	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}/3\sqrt{3}$	$-2/3\sqrt{3}$	e
$g_{VP\gamma}$	$e/3\sqrt{M_\varrho M_\pi}$	$e/\sqrt{M_\omega M_\pi}$	0	$e/\sqrt{3M_\varrho M_\eta}$	$e/3\sqrt{3M_\omega M_\eta}$	$\frac{2\sqrt{2}e}{3\sqrt{3}M_\phi M_\eta}$	$\frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{3}M_X M_\varrho}$	$\frac{\sqrt{2}e}{3\sqrt{3}M_X M_\omega}$	$\frac{-2e}{3\sqrt{3}M_X M_\phi}$	—
$\Gamma^{th}_{VP\gamma}$	0.13	1.22	0	$13.5\cdot10^{-3}$	$1.7\cdot10^{-3}$	$61.5\cdot10^{-3}$	$35\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-3}$	$7\cdot10^{-5}$	MeV
$\Gamma^{ex}_{VP\gamma}$	<0.4	1.2	–	—	—	—	—	—	—	MeV

Die resultierende theoretische Breite $\Gamma^{th}_{\omega\to\pi\gamma} = 1{,}22$ MeV stimmt ausgezeichnet mit dem experimentellen Werte $\Gamma^{ex}_{\omega\to\pi\gamma} = 1{,}2$ MeV überein. Neben dieser Aussage sind in (II,37) die bekannten SU(6)-Relationen enthalten:

$$g_{\omega\pi\gamma} = 3\cdot g_{\varrho\pi\gamma} \quad \text{und} \quad g_{\phi\pi\gamma} = 0 \quad .$$

4. Die elektromagnetischen Formfaktoren sind:

$$G_E^P(q^2) = G_E^V(q^2) = G_M^V(q^2) = G^{VP}(q^2) = F(q^2) \quad , \tag{II,39}$$

also für alle 0^{-+}- und 1^{--}-Mesonen gleich dem universellen Mesonformfaktor $F(q^2)$.

Berechnet man in gleicher Weise mit (II,22),(II,23) und (II,24) die Erwartungswerte des elektromagnetischen zwischen zwei Baryonzuständen, so erhält man:

$$(2\pi)^3 \langle P',\mu',\mathfrak{B}|j_\mu(0)|P,\mu,\mathfrak{B}\rangle = e_{\mathfrak{B}}\cdot G(q^2)\cdot\left(\frac{1}{2M_{\mathfrak{B}}}(P'_\mu+P_\mu)(\bar{u}'u)\right) + u_{\mathfrak{B}}\cdot G(q^2)\left(\frac{1}{4M_{\mathfrak{B}}^2}\cdot\bar{u}'\gamma_\mu u\right) \qquad \text{(II,40)}$$

$$-(2\pi)^3\langle P',\mu',\mathfrak{D}|j_\mu(0)|P,\mu,\mathfrak{D}\rangle = e_{\mathfrak{D}}\cdot G(0)\cdot\left(\frac{1}{2M_{\mathfrak{D}}}(P_\mu+P_\mu)(\bar{u}'u_\mu)\right) \qquad \text{(II,41)}^{1)}$$

$$-(2\pi)^3\langle P',\mu',\mathfrak{B}|j_\mu(0)|P,\mu,\mathfrak{D}\rangle = \frac{a_{\mathfrak{BD}}}{M_{\mathfrak{B}}M_{\mathfrak{D}}}\cdot G(q^2)\cdot\left(\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}P'^\nu P^\sigma(\bar{u}'u^\tau)\right) \qquad \text{(II,42)}$$

mit $r_\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu(\not{P}'+\not{P})\not{q} - \not{q}(\not{P}'+\not{P})\cdot\gamma_\mu)$. Die durch:

$$e_B = \frac{1}{3}Q_{aa}\left(2T^{(B)}_{a_1a_2a}T^{(B)}_{a_1a_2a} + T^{(B)}_{a_1a_2a}T^{(B)}_{a_2a_1a} - 2T^{(B)}_{a_1a_2a}T^{(B)}_{aa_1a_2} + T^{(B)}_{aa_1a_2}T^{(B)}_{aa_1a_2}\right) \qquad \text{(II,43)}$$

$$e_D = 3\cdot Q_{aa}T^{(D)}_{a_1a_2a}T^{(D)}_{a_1a_2a} \qquad \text{(II,44)}$$

gegebenen Konstanten e_B und e_D sind gleich den Baryonenladungen. Die Größen u_B und a_{BD} sind gegeben durch:

$$u_B = \frac{1}{3}\cdot Q_{aa}\left(T^{(B)}_{aa_1a_2}T^{(B)}_{aa_1a_2} - T^{(B)}_{a_1a_2a}T^{(B)}_{a_2a_1a} - 2\cdot T^{(B)}_{a_1a_2a}T^{(B)}_{aa_1a_2}\right) \qquad \text{(II,45)}$$

$$a_{BD} = Q_{aa}T^{(B)}_{a_1a_2a}T^{(D)}_{a_1a_2a}\ . \qquad \text{(II,46)}$$

Die elektromagnetischen Formfaktoren $G_E^B(q^2), G_M^B(q^2)$, die bei $q^2 = 0$ auf 1 normiert sind, die Ladungen e_B, e_D und die magnetischen Momente μ_B der Baryonen sind definiert durch die allgemeinen Entwicklungen:

$$(2\pi)^3\left(1-\frac{q^2}{4M_{\mathfrak{B}}^2}\right)\cdot\langle P',\mu',\mathfrak{B}|j_\mu(0)|P,\mu,\mathfrak{B}\rangle = e_{\mathfrak{B}}\cdot G_E^{\mathfrak{B}}(q^2)\cdot\left(\frac{1}{2M_{\mathfrak{B}}}(P'_\mu+P_\mu)(\bar{u}'u)\right) + 2M_{\mathfrak{B}}\mu_{\mathfrak{B}}\cdot G_M^{\mathfrak{B}}(q^2)\left(\frac{1}{4M_{\mathfrak{B}}^2}\bar{u}'\gamma_\mu u\right) \qquad \text{(II,47)}$$

$$-(2\pi)^3\langle P',\mu',\mathfrak{D}|j_\mu(0)|P,\mu,\mathfrak{D}\rangle = e_{\mathfrak{D}}\left(\frac{1}{2M_{\mathfrak{D}}}(P_\mu+P_\mu)(\bar{u}'u_\mu)\right)\ . \qquad \text{(II,48)}$$

Durch:

$$(2\pi)^3\langle P',\mu',\mathfrak{B}|j_\mu(0)|P,\mu,\mathfrak{D}\rangle = g_{\mathfrak{BD}\gamma}\cdot G^{\mathfrak{BD}}(q^2)\left(\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\cdot P'^\nu P^\sigma(\bar{u}'u^\tau)\right) \qquad \text{(II,49)}$$

lassen sich Kopplungskonstanten g_{DB} und Übergangsformfaktoren $G^{BD}(q^2)$ definieren. Die allgemeinste Entwicklung des Matrixelementes (II,49) enthält jedoch zwei weitere Kovarianten und kann nach GOURDIN und SALIN (Go63) geschrieben werden: (II,50)

$$(2\pi)^3\langle P'\mu'\mathfrak{B}'|j_\mu(0)|P\mu\mathfrak{D}\rangle\cdot\varepsilon^{-1} = \frac{C_3^{\mathfrak{BD}}}{M_\pi}\cdot G_3\left(\bar{u}'\gamma_\mu\gamma_5 uq - \bar{u}'q\gamma_5 u_\mu\right) + \frac{C_4^{\mathfrak{BD}}}{M_\pi^3}\cdot G_4\left(P_\mu\bar{u}'\gamma_5 uq - P_q\bar{u}'\gamma_5 u_\mu\right) - \frac{C_5^{\mathfrak{BD}}}{M_\pi^2}G_5\left(P'_\mu\bar{u}'\gamma_5 uq - P_q\bar{u}'\gamma_5 u_\mu\right)\ .$$

1) Auf die Berechnung dieses Erwartungswertes für $q^2 \neq 0$ wurde hier verzichtet, da sich recht umfangreiche und nicht sehr nützliche Ausdrücke ergeben.

Hierdurch werden die Kopplungskonstanten C_i^{DB} und die Übergangsformfaktoren $G_i^{DB}(q^2)$ definiert. Hat das Matrixelement die spezielle Gestalt (II,49), so folgt nach einigen Umrechnungen, daß die C_i^{BD} gegeben sind durch:

$$C_3^{DB} = \frac{M_\pi}{e} \cdot M_D \cdot g_{DB} \qquad C_4^{DB} = -\frac{M_\pi}{M_D} \cdot C_3^{DB} \qquad C_5^{DB} = 0 \quad . \tag{II,51}$$

Die Quarkmodell-Resultate (II,40), (II,41) und (II,42) sind wieder verträglich mit den allgemeinen Entwicklungen des elektromagnetischen Stromerwartungswertes. Die Normierung der invarianten Amplitude $\chi(p,p')$ durch (II,10) bewirkt, daß der universelle Formfaktor $G(q^2)$ bei $q^2 = 0$ gleich 1 ist und bei $q^2 = 0$ die Ergebnisse mit den allgemeinen Entwicklungen übereinstimmen. Der Vergleich der Resultate (II,40) und (II,42) mit den Entwicklungen (II,47) bzw. (II,49) führt zu den Aussagen:

1. Die elektromagnetischen Formfaktoren sind für alle Baryonen gleich und gegeben durch:

$$G_E^B(q^2) = G_M^B(q^2) = (1 - \frac{q^2}{4M_B^2}) \cdot G(q^2) \quad . \tag{II,52}$$

$G(q^2)$ ist der universelle Baryonenformfaktor (II,25).
Speziell für die Formfaktoren von Neutron und Proton folgt:

$$G_E^P(q^2) = G_M^P(q^2) = G_M^N(q^2) \quad . \tag{II,53}$$

Diese Beziehung ist, ebenso wie die Aussage $G_E^N(q^2) = e_N G_M^N(q^2) = 0$, im gemessenen Bereich von q^2 innerhalb der Fehlergrenzen experimentell bestätigt.

2. Die Übergangsformfaktoren sind:

$$G^{DB}(q^2) = G(q^2) \quad . \tag{II,54}$$

Mit (II,53) wird also speziell

$$G^{N^*P}(q^2) = (1 - \frac{q^2}{4M_P^2})^{-1} \cdot G_M^P(q^2) \quad . \tag{II,55}$$

Auch diese Beziehung ist verträglich mit den kürzlich bei DESY durchgeführten Messungen des Übergangsformfaktors. (Br67).

3. Das magnetische Moment eines $1/2^+$-Baryons ist:

$$\mu_B = \frac{u_B}{2M_B} \tag{II,56}$$

Die aus der Definition (II,45) für u_B resultierenden Werte sind in Tabelle III aufgeführt. Mit diesen Werten ergibt sich, wenn man von den Mas-

sendifferenzen der Baryonen absieht, die bekannte SU(6)-Relation:

$$\mu_P = \mu_{\Sigma^+} = -\mu_{\Xi^-} = 3\mu_{\Sigma^0} = -3\mu_\Lambda = -3\mu_{\Sigma^-} = -\frac{3}{2}\mu_N = -\frac{3}{2}\mu_{\Xi^0} \quad . \qquad (II,57)$$

Es ist jedoch $u_P = 1$. Der absolute Wert des magnetischen Momentes des Protons ist also nach (II,56) gleich einem Kernmagneton $\mu_K = e/2M_P$, im Widerspruch zum experimentellen Wert $2{,}79\ \mu_K$.

Das relativistische Quarkmodell liefert also unabhängig von der Quarkmasse die richtigen relativen Werte und Größenordnungen der magnetischen Momente der Baryonen. Die absoluten Momente ergeben sich in diesem Modell jedoch nicht richtig.

Hierfür können verschiedene der gemachten Annahmen die Ursache sein. Es ist möglich, daß bei den Baryonen außer den Zwei-Quark-Zuständen noch weitere Zwischenzustände, z.B. Zwei-Quark+Ein-Meson-Zustände, zum Stromerwartungswert beitragen. Das wäre eine Verletzung des Prinzips der definierten Quarkzahlen (s. II,1). Es ist auch denkbar, daß die Beschränkung der Bethe-Salpeter-Amplituden auf die in den Ansätzen (II,4) und (II,5) aufgeführten Beiträge eine zu grobe Näherung darstellt und die Hinzunahme weiterer Anteile oder auch ein ganz anderer Ansatz zu größeren magnetischen Momenten führt. Nichtrelativistisch wäre ein solches zusätzliches magnetischen Moment zu verstehen als ein Bahnmoment, welches aus einer Beimischung von Drei-Quarkzuständen mit Gesamtbahndrehimpuls $L = 2$ resultiert. Eine explizite Berechnung der magnetischen Momente durch Abänderung der Bethe-Salpeter-Amplitude ist im Rahmen dieses Modells wahrscheinlich nicht ohne die Einführung mindestens eines neuen Parameters möglich. Ein auf diese Weise resultierender Zusatzbeitrag dürfte jedoch nur zu einer Vergrößerung des Absolutwertes von (II,56) um einen für alle Baryonen gleichen Faktor $2{,}79$ führen, da die bekannten experimentellen Werte der Baryonenmomente die Relation (II,57) recht gut erfüllen.

Eine weitere Möglichkeit zu größeren magnetischen Momenten zu gelangen, ohne die Relation (II,57) zu zerstören, ist die Addition eines phänomenologischen anormalen Anteils

$$i\kappa \cdot T\left(\Psi(x)\, \sigma_{\mu\mu'}\, Q\, \Psi(x)\right) \overleftrightarrow{\partial}^{\mu'} \qquad (II,58)$$

zum minimalen elektromagnetischen Stromansatz (II,27). Mit einen so abgeänderten Stromoperator, der als Strom von Quarks mit einem anormalen magnetischen Moment interpretiert werden kann, ergibt sich für das magnetische Moment der Baryonen:

$$\mu = \frac{u_B}{2M_B}\,(1 + 2M_B \cdot \kappa) \quad . \qquad (II,59)$$

Die Relation (II,57) folgt, wenn man wieder von den Massendifferenzen absieht, auch aus (II,59) und bleibt von dem neuen Parameter κ unabhängig. Zur Anpassung an das experimentelle Moment des Protons muß $\kappa = 1{,}79\ /2M_p$ gesetzt werden.

Eine Abänderung des Stromoperators würde jedoch die gute Voraussage der Breite $\Gamma_{\omega,\pi\gamma}$ zerstören. Der Stromansatz mit anormalen Anteil (II,58) soll daher nur auf die Baryonen beschränkt bleiben und die aus den oben aufgeführten Ursachen resultierenden Korrekturen der absoluten Momente der Baryonen phänomenologisch berücksichtigen. Die Abweichung der absoluten Momente könnte auch einfach durch einen phänomenologischen Faktor 2,79 in (II,56) korrigiert werden. Die aus (II,59) resultierenden magnetischen Momente der Baryonen sind zusammen mit den bekannten experimentellen Werten in Tabelle III aufgeführt.

TABELLE III

	P^+	N°	Σ^+	Σ°	Σ^-	Λ°	Ξ°	Ξ^-	Einh.
v_B	1	$-2/3$	1	$1/3$	$-1/3$	$-1/3$	$-2/3$	$-1/3$	e
$\mu_B^{th.}$	2.79	-1.86	2.58	0.86	-0.86	-0,88	-1.67	-0.84	μ_K
$\mu_B^{exp.}$	2.79	-1.91	2.4±0.6	—	—	-0.7±0.3	—	—	μ_K

4. Die $1/2^+$-$3/2^+$-γ-Kopplungskonstanten $g_{BD\gamma}$ sind:

$$g_{DB\gamma} = -\frac{a_{BD}}{M_D M_B}\cdot(1 + (M_D+M_B)\cdot\kappa) \quad , \qquad (II,60)$$

wenn man von einem elektromagnetischen Strom mit anormalen Anteil (II,58) ausgeht. Die Konstanten a_{BD} und die aus (II,60) resultierenden Kopplungskonstanten $g_{DB\gamma}$ sind in Tabelle IV zusammengestellt.

TABELLE IV

	P,N_+^*	$N,N_\circ^*$	Σ^+,Y_+^*	$\Sigma^\circ Y^\circ$	$\Sigma^- Y^-$	$\Lambda^\circ Y^\circ$	$\Xi^\circ \Xi_\circ$	$\Xi^- \Xi_-^*$	Einh.
a_{BD}	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/2\sqrt{3}$	0	$1/2$	$1/\sqrt{3}$	0	e
g_{BD}	$\frac{1.78}{M_P M_{N^*}}$	$\frac{1.78}{M_N M_{N^*}}$	$-\frac{2}{M_\Sigma M_Y}$	$\frac{1}{M_\Sigma M_Y}$	0	$\frac{1.69}{M_\Lambda M_Y}$	$\frac{2.15}{M_\Xi M_{\Xi^*}}$	0	e

Die GOURDIN-SALIN-Konstanten C_i für $D = N$ und $B = B$ werden mit (II,51):

$$C_3^{th} = 0{,}27 \qquad C_4^{th} = -0{,}03 \qquad C_5^{th} = 0 \quad .$$

Die experimentellen Werte sind umstritten, stimmen aber in Größenordnung

und Vorzeichen mit der Voraussage überein .(Da66).

Durch den Erwartungswert des elektromagnetischen Stromes zwischen dem Vakuum und einem Vektormeson-Zustand $\langle 0|j_\mu(0)|\ P,e,V\rangle$ sind nach (I,135) die Kopplungskonstanten $g_{V\gamma}$ definiert.Mit dem minimalen elektromagnetischen Strom (II,27) folgen für diese Konstanten die Relationen (I,136).In (I,136) treten die Normierungskonstanten c_V auf,die nach (I,120) mit dem Wert der Bethe-Salpeter-Amplitude $\chi^{(V)}(x,P,e)$ an der Stelle x=0 veknüpft sind.Mit dem Ansatz (II,3) ergibt sich für diese Normierungskonstanten:

$$\underline{c_V = -\,Sp(\not{e}\ T^{(V)}\cdot \chi^{(V)}(Q,P,e)) = \sqrt{M_V}\cdot C} \qquad (II,61)$$

mit der für alle Mesonen gleichen Konstanten:

$$\underline{C = 4\cdot\int dp\cdot\chi(p)} \quad . \qquad (II,62)$$

Setzt man die Werte (II,61) für die Normierungskonstanten c_V in (I,136) ein,so folgt:

$$\underline{g_{\varrho\gamma} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{M_\varrho}\cdot C} \qquad \underline{g_{\omega\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{M_\omega}\cdot C} \qquad \underline{g_{\phi\gamma} = -\sqrt{M_\phi}\cdot C} \quad . \qquad (II,63)$$

Hieraus resultiert durch Eliminieren von C die Relation:

$$\underline{g_{\varrho\gamma} : g_{\omega\gamma} : g_{\phi\gamma} = 3\sqrt{M_\varrho} : \sqrt{M_\omega} : -\sqrt{2}\cdot\sqrt{M_\phi}} \quad . \qquad (II,64)$$

Diese stimmt,abgesehen von den Massenfaktoren,mit der bekannten SU(6)-Relation für diese Konstanten überein.Die Massenfaktoren in (II,64) bewirken wegen der sehr viel größeren Masse des ϕ-Mesons gegenüber den Massen von ω- und ϱ-Meson eine nicht unwesentliche Änderung der SU(6)-Relation.Die Beziehung (II,64) steht zu den noch recht ungenauen Abschätzungen der Kopplungskonstanten $g_{V\gamma}$ aus experimentellen Daten,wie den Zerfallsbreiten von $V \to e^+ + e^-$,nicht im Widerspruch.

b. <u>Erwartungswerte des Stromes der schwachen Wechselwirkung</u>

In I.6 wurde der hadronische Strom der schwachen Wechselwirkung definiert durch:

$$\underline{W_\mu^{(\pm)}(x) = T\left(\overline{\Psi}(x)\left(\gamma_\mu W_V^{(\pm)} - i\gamma_\mu\gamma_5 W_A^{(\pm)}\right)\Psi(x)\right)} \qquad (II,65)$$

mit den 3x3-Matrizen: (i=V,A)

$$\underline{W_i^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\vartheta_i & \sin\vartheta_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \underline{W_i^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos\vartheta_i & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_i & 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad . \qquad (II,66)$$

Mit $F^{(i)} = (\gamma_\mu W_V^{(\mp)} - i\gamma_\mu\gamma_5 W_A^{(\mp)})$ folgen daher aus den allgemeinen Ausdrükken (II,17) und (II,22) die Erwartungswerte des schwachen Stromes zwischenzwei pseudoskalaren Mesonzuständen:

$$(2\pi)^3 \langle P',P'|W_\mu(0)|P,P\rangle = F(q^2)\cdot b_{P'P}\cdot\left[\frac{M_P+M_{P'}}{2\sqrt{M_P M_{P'}}}(P'_\mu+P_\mu) + \frac{M_{P'}^2-M_P^2}{2\sqrt{M_P M_{P'}}}\cdot q_\mu\right] \qquad \text{(II,67)}$$

und zwischen zwei $1/2^+$-Baryonzuständen:

$$(2\pi)^3\langle P',\mu',\beta'|W_\mu(0)|P,\mu,\beta\rangle = G(q^2)\cdot\frac{(M_\beta+M_\beta)^2}{4M_\beta M_\beta}\cdot\Big[(\bar u'\gamma_\mu(b_{\beta'\beta}-b^1_{\beta'\beta}i\gamma_5)u) - \frac{q^2}{(M_{\beta'}+M_\beta)^2}b^1_{\beta'\beta}(\bar u'\gamma_\mu(1-i\gamma_5)u) +$$

$$+\frac{i}{M_{\beta'}+M_\beta}b^2_{\beta'\beta}(\bar u'\sigma_{\mu\nu}q^\nu u) + \frac{M_{\beta'}-M_\beta}{M_{\beta'}+M_\beta}b^2_{\beta'\beta}\cdot q_\mu(\bar u' u)\Big] \quad . \qquad \text{(II,68)}$$

Die Konstanten $b_{P'P}$ sind durch:

$$b_{P'P} = -\,\mathrm{Sp}\; W_V(T^{(\bar P')}T^{(P)} - T^{(P)}T^{(\bar P')}) \qquad \text{(II,69)}$$

gegeben und die Konstanten $b_{B'B}$, $b^1_{B'B}$, $b^2_{B'B}$ durch:

$$b_{B'B} = \frac{1}{3}\cdot(W_V)_{a'a}\cdot(2T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{a_1a_2a} + T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{a_2a_1a} - 2T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{aa_1a_2} + T^{(B')}_{a'a_1a_2}T^{(B)}_{aa_1a_2}) \qquad \text{(II,70)}$$

$$b^1_{B'B} = \frac{1}{3}\cdot(W_V)_{a'a}\cdot(T^{(B')}_{a'a_1a_2}T^{(B)}_{aa_1a_2} - 2T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{aa_1a_2} - T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{a_2a_1a}) \qquad \text{(II,71)}$$

$$b^2_{B'B} = -\frac{2}{3}\cdot(W_V)_{a'a}\cdot(T^{(B')}_{a_1a_2a'}T^{(B)}_{a_1a_2a} + T^{(B')}_{a_2a_2a'}T^{(B)}_{a_2a_1a}) \quad . \qquad \text{(II,72)}$$

Ebenso lassen sich auch die für Prozesse wie $\nu_e + B \longrightarrow e + D$ interessanten Matrixelemente des schwachen Stromes zwischen $3/2^+$- und $1/2^+$-Baryonzuständen berechnen. Da über derartige Prozesse noch sehr wenig bekannt ist, wurde hierauf verzichtet.

Ganz allgemein zeigen die Resultate (II,67), (II,68), daß die Vektoranteile der Stromerwartungswerte nicht mehr divergenzfrei sind. Die Erwartungswerte der Divergenz $\partial^\mu V_\mu(x)$ sind jedoch mit dem Faktor $(M'-M)/(M'+M)$ behaftet. Die Divergenz verschwindet also im Grenzfall gleicher Massen in einem Multiplett in Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das sich aus CVC-Hypothese ("conserved vector current hypothesis") und SU(3) ergibt.

Die aus (II,69) bzw. (II,70-72) resultierenden Konstanten b und die in den Ausdrücken (II,67) bzw. (II,68) auftretenden Massenfaktoren sind für die pseudoskalaren Mesonen in Tabell V bzw. für die $1/2^+$-Baryonen in Tabelle VI aufgeführt. Die Faktoren $(M'+M)^2/4MM'$ sind für die Baryonen innerhalb von 1% gleich 1 und daher nicht extra angegeben.

TABELLE V

	$\pi^{\pm} \to \pi^{0}$	$K^{\pm} \to \pi^{0}$	$K^{0} \to \pi^{-}$	$\bar{K}^{0} \to \pi^{+}$
$b_{p'p}$	$\pm\sqrt{2}\cdot\cos\vartheta_V$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\vartheta_V$	$\sin\vartheta_V$	$\sin\vartheta_V$
$\frac{M_{p'}+M_p}{2\sqrt{M_{p'}M_p}}$	~ 1	1.22	1.22	1.22
$\frac{M_{p'}-M_p}{M_{p'}+M_p}$	0.017	0.57	0.55	0.55

TABELLE VI

	$N \to P$	$\Lambda \to P$	$\Sigma^{-} \to N$	$\Sigma^{+} \to P$	$\Xi^{-} \to \Sigma^{0}$	$\Sigma^{+} \to \Lambda^{0}$	$\Sigma^{-} \to \Lambda^{0}$	$\Xi^{-} \to \Lambda^{0}$	$\Xi^{0} \to \Sigma^{+}$
$b_{B'B}$	$\cos\vartheta_V$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\vartheta_V$	$-\sin\vartheta_V$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\vartheta_V$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\vartheta_V$	0	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\vartheta_V$	$\sin\vartheta_V$
$b^{1}_{B'B}$	$\frac{5}{3}\cos\vartheta_A$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\vartheta_A$	$\frac{1}{3}\sin\vartheta_A$	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\vartheta_A$	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\vartheta_A$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_A$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_A$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\vartheta_A$	$\frac{5}{3}\sin\vartheta_A$
$b^{2}_{B'B}$	$\frac{2}{3}\cos\vartheta_A$	0	$-\frac{4}{3}\sin\vartheta_V$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\vartheta_V$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\vartheta_V$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_V$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_V$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\vartheta_V$	$\frac{2}{3}\sin\vartheta_V$
$\frac{M_B-M_{B'}}{M_B+M_{B'}}$	~ 0	0.085	0.12	0.12	0.051	0.032	0.035	0.085	0.082

Eine vollständige Untersuchung aller Konsequenzen, die sich aus den Erwartungswerten (II,67) und (II,68) in Verbindung mit dem üblichen Wechselwirkungsansatz

$$\mathcal{H}_W = \frac{G}{\sqrt{2}}\cdot(J_W^{+\mu}(x)\, J_{W\mu}(x)) \quad \text{mit} \quad J_W^{\mu}(x) = W^{\mu}(x) + L^{\mu}(x) \qquad (II,73)$$

für die leptonischen und nichtleptonischen Zerfälle der Hadronen ergeben, würde hier zu weit führen. Bei der Berechnung der Lebensdauern der Baryonen dürfen in erster Näherung die q-abhängigen Beiträge in (II,68) vernachlässigt werden. Ohne diese q-abhängigen Anteile stimmen die Erwartungswerte (II,68) jedoch überein mit den Ergebnissen des nichtrelativistischen Quarkmodells. Mit diesen Ergebnissen hat DAR in (Da67) die Zerfallsbreiten der Baryonen berechnet und mit den experimentellen Breiten verglichen. Die Übereinstimmung ist meist recht gut. Allerdings muß bei diesen Rechnungen eine phänomenologische Korrektur der Axialvektorbeiträge durch einen Faktor 0,7 angebracht werden, um vom Wert $r_A = 5/3$, wie er sich mit $\vartheta_A = \vartheta_V$ nach Tabelle VI für die Axialvektor-Renormierungskonstante ergibt, zum experimentellen Wert zu gelangen.

Es gibt jedoch im relativistischen Quarkmodell Anzeichen dafür, daß der mit Hilfe der SU(3) resultierende Cabibbo-Ansatz $\vartheta_V = \vartheta_A$ vielleicht garnicht allgemein gültig ist.

Der Cabibbo-Winkel ϑ_V wird gewöhnlich aus der experimentellen Breite

des Zerfalls $K^{\mp} \longrightarrow \pi^{o} + e^{\mp} + \bar{\nu}_e$ bestimmt. Aus dem Wechselwirkungsansatz (II,73) und dem Stromerwartungswert (II,67) folgt mit der Approximation $F(q^2) = 1$ für diese Breite:

$$\Gamma_{K\to\pi e\nu} = 1.22^2 \cdot \frac{\sin^2\vartheta_V \cdot G^2 \cdot M_K^2}{2 \cdot 768 \cdot \pi^3} \cdot \mathcal{R} \quad , \qquad (II,74)$$

wobei $R = 0,59$ ein Phasenraumfaktor und $G = 1,02 \cdot 10^{-5}/M_p^2$ die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung ist. Für die Breite des Zerfalls $\pi^{\pm} \longrightarrow \pi^{o} + e^{\pm} + \bar{\nu}_e$ folgt ganz analog:

$$\Gamma_{\pi\to\pi e\nu} = \frac{2\cos^2\vartheta_V \cdot G^2 \cdot \Delta^5}{60 \cdot \pi^3} \cdot \mathcal{R}' \qquad (II,75)$$

mit dem Phasenraumfaktor $R' = 0,94$ und $\Delta = 4,58$ MeV. Mit dem Cabibbo-Winkel

$$\vartheta_V = 11^{o} \qquad (II,76)$$

erhält man aus (II,74) und (II,75) die Breiten:

$$\Gamma^{th}_{K\to\pi e\nu} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \Gamma^{th}_{\pi\to\pi e\nu} = 2,66 \cdot 10^{-22} \text{ MeV}$$

in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Breiten:

$$\Gamma^{exp}_{K\to\pi e\nu} = (2,6 \mp 0,2) \cdot 10^{-15} \text{MeV} \quad \text{und} \quad \Gamma^{exp}_{\pi\to\pi e\nu} = 2,6 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \quad .$$

In der SU(3) und im nichtrelativistischen Quarkmodell fehlen die Massenfaktoren $(M' + M)/2MM'$. Es ergibt sich dort $\vartheta_V = 14,5^{o}$.

Der Cabibbo-Winkel ϑ_A wird normalerweise aus den experimentellen Breiten der Zerfälle $K^{\pm} \longrightarrow \ell^{\pm} + \bar{\nu}_e$ und $\pi^{\pm} \longrightarrow \ell^{\pm} + \bar{\nu}_e$ bestimmt. Die theoretischen Breiten dieser Zerfälle hängen über die Formel:

$$\Gamma_{P\to l+\bar{\nu}_l} = f_P^2 \cdot \frac{G^2}{4\pi} \cdot M_P \cdot m_l^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{m_l}{M_P}\right)^2\right)^2 \qquad (II,77)$$

von den Konstanten f_P, $(P = K, \pi)$, ab, die bereits in (I,144) durch die Matrixelemente $\langle 0 | W_\mu(0) | P, P \rangle = f_P \cdot P_\mu$ definiert wurden. Diese Konstanten hängen nach (I,145) mit den Normierungskonstanten c_P der phänomenologischen Mesonfelder zusammen. Für diese aber folgt aus dem Ansatz (II,2)

$$c_P = -\,Sp\,(\gamma_5 \not{p} \cdot T^{(P)} \cdot \chi^{(P)}(x,P))_{x=0} = M_P^{3/2} \cdot C \qquad (II,78)$$

mit der gleichen universellen Konstanten $C = 4 \cdot \int dp \cdot \chi(p)$, wie sie bereits in (II,62) für die Vektormesonen eingeführt wurde. Es wird also mit (I,145):

$$f_\pi = \cos\vartheta_A \cdot M_\pi^{-1/2} \cdot C \quad \text{und} \quad f_K = \sin\vartheta_A \cdot M_K^{-1/2} \cdot C \quad . \qquad (II,79)$$

Die aus den experimentellen Breiten mit (II,77) resultierenden Werte sind:

$$f_\pi^{exp} = 0,94 \cdot M_\pi \quad \text{und} \quad f_K^{exp} = 0,25 \cdot M_\pi \quad .$$

Mit diesen Werten und (II,79) wird:

$$\operatorname{tg}\vartheta_A = \sqrt{M_K/M_\pi}\cdot f_K/f_\pi = 0{,}51 \quad \text{also} \quad \underline{\vartheta_A = 27^\circ}$$

und damit $\underline{\vartheta_A \neq \vartheta_V}$. Diese Abweichung vom SU(3)-Resultat $\vartheta_V = \vartheta_A$ ist die Folge des Massenfaktors $\sqrt{M_K/M_\pi} = 1{,}92$, der bei nichtgebrochener SU(3) gleich 1 ist. Mit $\vartheta_A = 27^\circ$ ergibt sich nach Tabelle V I für die Achsialvektorrenormierungskonstante der Nukleonen der Wert:

$$\underline{r_A = \frac{5}{3}\cos\vartheta_A = 1{,}48} \quad , \qquad \text{(II,80)}$$

welcher immerhin näher beim experimentellen Wert $r_A^{exp} = 1{,}22$ liegt, als der mit $\vartheta_V = \vartheta_A$ resultierende Wert $5/3 = 1{,}66$.

Für eine endgültige Aussage ist jedoch eine vollständigere Untersuchung der Konsequenzen von $\vartheta_V \neq \vartheta_A$ erforderlich.

Zu einer neuen Relation gelangt man, indem man aus der Beziehung (II,79) für f_π und der Beziehung (II,63) für $g_{\varsigma\gamma}$ die gemeinsame Konstante C eliminiert:

$$\underline{\underline{g_{\varsigma\gamma} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{M_\varsigma M_\tau}}{\cos\vartheta_A}\cdot f_\pi}} \quad . \qquad \text{(II,81)}$$

Berechnet man hieraus mit $f_\pi^{exp} = 0{,}94\cdot M_\pi$ und $\cos\vartheta_A = 0{,}89$ die ς-γ-Kopplungskonstante, so erhält man

$$\underline{g_{\varsigma\gamma}^{th} = 0{,}17\cdot M_\varsigma^2}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit $g^{exp} = (0{,}15 \pm 0{,}05)\cdot M_\varsigma^2$, das aus der Zerfallsbreite für $\varsigma^0 \longrightarrow e^+ + e^-$ resultiert.

c. Erwartungswerte von Mesonströmen.

Aus den Ansätzen (II,2) und (II,3) für die Bethe-Salpeter-Amplituden folgt, wie bereits gezeigt wurde, für die Normierungskonstanten :

$$\underline{c_P = M_P^{3/2}\cdot C} \qquad \text{und} \qquad \underline{c_V = M_V^{1/2}\cdot C}$$

mit der für alle Mesonen gleichen Konstanten $C = 4\int dp\cdot\chi(p)$. Es sind daher nach (I,147) und (I,148) durch:

$$\underline{J_5^{(P)}(x) = \frac{i}{M_P^{3/2}\cdot C}(\Box + M_P^2)\cdot\partial^\mu\cdot T(\bar\Psi(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\cdot T^{(P)}\Psi(x))} \qquad \text{(II,82)}$$

$$\underline{J_\mu^{(V)}(x) = \frac{-1}{M_V^{1/2}\cdot C}(\Box + M_V^2)\cdot T(\Psi(x)\,\gamma_\mu\cdot T^{(V)}\Psi(x))} \qquad \text{(II,83)}$$

Mesonströme gegeben. Für einen beliebigen Erwartungswert dieser Ströme gilt:

$$\underline{\langle p',\beta'|J_5^{(P)}(0)|p,\beta\rangle = \frac{-1}{M_P^{3/2}\cdot C}\cdot(q^2 - M_P^2)\cdot\langle p',\beta'|T(\bar\Psi(0)\not{q}\gamma_5 T^{(P)}\Psi(0))|p,\beta\rangle}$$

bzw. $$\langle p'_1\beta'|J_\mu^{(V)}(0)|p_1\beta\rangle = \frac{-1}{M_V^{3/2}\cdot C}\cdot(q^2-M_V^2)\cdot\langle p'_1\beta'|T(\bar\Psi(0)\gamma_\mu T^{(V)}\Psi(0))|p_1\beta\rangle$$

mit dem Impulsübertrag $q_\mu = (p'_\mu - p_\mu)$.

Man erhält also den Erwartungswert dieser Ströme zwischen 0^{-+}-, 1^{--}-Meson- und $1/2^+$-, $3/2^+$-Baryon-Zuständen, indem man die allgemeinen Ausdrücke (II,17-24) mit $-(q^2-M_P^2)/M_P^{3/2}\cdot C$ bzw. $-(q^2-M_V^2)/M_V^{3/2}C$ multipliziert und $T^{(R)} = \not{q}\gamma_5$, $T^{(S)} = T^{(P)}$ bzw. $T^{(R)} = \gamma_\mu$, $T^{(S)} = T^{(V)}$ setzt.

So ergibt sich z.B. für die Mesonerwartungswerte des Vektormesonstromes:

$$(2\pi)^3\langle p'_1P'|J_\mu^{(V)}(0)|p_1P\rangle = \frac{C_{PVP'}}{\sqrt{M_P M_V M_{P'}}}\cdot H_V(q^2)\cdot\left(\frac{M_P+M_{P'}}{2}(p'_\mu+p_\mu)+\frac{M_P-M_{P'}}{2}q_\mu\right) \qquad (II,84)$$

$$(2\pi)^3\langle p'_1V|J_\mu^{(V)}(0)|p_1e_1V'\rangle = \frac{C_{PVV'}}{\sqrt{M_P M_V M_{V'}}}\cdot H_V(q^2)\cdot\left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,p'^\nu p^\rho e^\sigma\right) \qquad (II,85)$$

mit den Konstanten:

$$c_{P'VP} = \mathrm{Sp}\;T^{(\bar V)}\left(T^{(\bar P')}T^{(P)} - T^{(P)}T^{(\bar P')}\right) \qquad (II,86)$$

$$c_{PVV'} = \mathrm{Sp}\;T^{(\bar V)}\left(T^{(\bar P)}T^{(V')} + T^{(V')}T^{(\bar P)}\right) \qquad (II,87)$$

und dem Formfaktor:

$$H_V(q^2) = -\frac{1}{C}\cdot(q^2-M_V^2)\cdot F(q^2)\quad . \qquad (II,88)$$

$F(q^2)$ ist der universelle Mesonformfaktor (II,20).

Der Vergleich dieser Ergebnisse mit den allgemeinen Entwicklungen der Stromerwartungswerte nach Kovarianten:

$$(2\pi)^3\langle p'_1P'|J_\mu^{(V)}(0)|p_1P\rangle = g_{P'VP}\cdot G_V(q^2)\cdot(p'_\mu+p_\mu) + g'_{P'VP}\cdot G'_V(q^2)\cdot q_\mu \qquad (II,89)$$

$$(2\pi)^3\langle p'_1P|J_\mu^{(V)}(0)|p_1e_1V'\rangle = g_{PVV'}\cdot G''_V(q^2)\cdot\left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,p'^\nu p^\rho e^\sigma\right)\quad , \qquad (II,90)$$

durch welche die starken Kopplungskonstanten $g_{P'VP}$, $g'_{P'VP}$, $g_{PVV'}$ und Formfaktoren G_V, G'_V, G''_V mit $G_V^i(M_V^2) = 1$ definiert sind, führt zu den Aussagen:

1. Es gibt nur eine von Null verschiedene Kopplung, wenn $H_V(M_V^2) \neq 0$ ist, d.h., wenn $F(q^2)$ und damit die elektromagnetischen Formfaktoren der Mesonen bei $q^2 = M_V^2$ Pole haben. Ist aber $H_V(M_V^2) \neq 0$, so so sind die starken Formfaktoren:

$$G_V(q^2) = G'_V(q^2) = G''_V(q^2) = H_V(q^2)/H_V(M_V^2)\quad . \qquad (II,91)$$

2. Die Kopplungskonstanten sind:

$$g_{P'VP} = \frac{C_{P'VP}}{\sqrt{M_{P'}M_V M_P}}\cdot\frac{M_{P'}+M_P}{2}\cdot H_V(M_V^2) \qquad g'_{P'VP} = \frac{C_{P'VP}}{\sqrt{M_P M_V M_P}}\cdot\frac{M_P-M_{P'}}{2}\cdot H_V(M_V^2) \qquad (II,92)$$

$$g_{PVV'} = \frac{c_{PVV'}}{\sqrt{M_P M_V M_{V'}}} \cdot H_V(M_V^2) \quad . \qquad (II,93)$$

Die Konstanten $c_{P'VP}$ und $c_{PVV'}$ sind gemäß ihrer Definition (II,86) bzw. (II,87) proportinal den bekannten $\overset{SU(3)}{}$-Clebsch-Gordon-Koeffizienten $(\overline{P}', P|V)_F$ bzw. $(\overline{P}, V'|V')_D$ .Die Beziehungen (II,92) und (II,93) enthalten daher,abgesehen von den Massenfaktoren,die SU(3)-Relationen für die Kopplungskonstanten.Darüberhinaus erhält man durch Eliminieren von $H_V(M_V^2)$ aus (II,92) und (II,93) Relationen zwischen den Kopplungskonstanten $g_{P'VP}$ und $g_{PVV'}$,die sich nur durch die Massenfaktoren von den Aussagen der SU(6) unterscheiden.Mit $c_{\pi\varrho\pi} = c_{\omega\varrho\pi} = \sqrt{2}$ wird z.B.:

$$g_{\omega\varrho\pi} = \frac{1}{\sqrt{M_\omega M_\pi}} \cdot g_{\pi\varrho\pi} = \frac{2,3}{M_\varrho} \cdot g_{\pi\varrho\pi} \quad . \qquad (II,94)$$

Unter der Annahme,daß der ω-Zerfall über $\omega \to \varrho + \pi \to 3\pi$ verläuft, berechnen GELL-MAN,SHARP und WAGNER (Ge62) aus der experimentellen Breite des ω- und des ϱ-Mesons:

$$g^{exp}_{\omega\varrho\pi} = \frac{2,6}{M_\varrho} \cdot g^{exp}_{\pi\varrho\pi} \quad . \qquad (II,95)$$

Für die Baryonerwartungswerte des pseudoskalaren Stromes (II,82) ergibt sich z.B.:

$$(2\pi)^3 \langle P', \mu', B' | J_5^{(P)}(0) | P, \mu, B \rangle = \frac{C_{B'PB}}{\sqrt{M_{B'}^3 M_B^3}} \left(\frac{M_{B'}+M_B}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{q^2}{(M_{B'}+M_B)^2}\right) \cdot H_P(q^2) \cdot (\bar{u}' \gamma_5 u) \qquad (II,96)$$

$$(2\pi)^3 \langle P', \mu', B | J_5^{(P)}(0) | P, \mu, D \rangle = \frac{C_{BPD}}{\sqrt{M_B^3 M_D}} \left(\frac{M_B+M_D}{2}\right) \cdot H_P(q^2) \cdot (\bar{u}' u q) \qquad (II,97)$$

mit den Konstanten:

$$c_{B'PB} = -\frac{2}{3} T^{(\overline{P})}_{a'a} \left(T^{(B')}_{\alpha_1\alpha_2 a'} T^{(B)}_{a_1 a_2 a} + T^{(B')}_{a_1 a_2 a'} T^{(B)}_{a\alpha_1\alpha_2} + T^{(B')}_{a' a_1 a_2} T^{(B)}_{a_1 a_2 a} - T^{(B')}_{a' a_1 a_2} T^{(B)}_{a\alpha_1\alpha_2} \right) \qquad (II,98)$$

$$c_{BPD} = 2 \cdot T^{(P)}_{a'a} \; T^{(B)}_{\alpha_1\alpha_2 a'} T^{(D)}_{a_1 a_2 a} \qquad (II,99)$$

und dem Formfaktor:

$$H_P(q^2) = -\frac{1}{C} (q^2 - M_P^2) \cdot G(q^2) \quad . \qquad (II,100)$$

$G(q^2)$ ist der in (II,25) definierte universelle Baryonenformfaktor.

Die Kopplungskonstanten $g_{B'PB}$ und g_{BPD} sowie die starken Formfaktoren K_P, K'_P mit $K_P^i(M_P^2) = 1$,sind durch die allgemeinen Entwicklungen:

$$(2\pi)^3 \langle P', \mu', B | J_5^{(P)}(0) | P, \mu, B \rangle = g_{B'PB} \cdot K_P(q^2) \cdot (\bar{u}' \gamma_5 u) \qquad (II,101)$$

$$(2\pi)^3 \langle P', \mu', B | J_5^{(P)}(0) | P, \mu, D \rangle = g_{BPD} \cdot K'_P(q^2) \; (\bar{u}' u q) \qquad (II,102)$$

der Stromerwartungswerte nach Kovarianten definiert.Der Vergleich dieser Entwicklungen mit dem Ergebnis (II,96,97) zeigt,daß die Kopplungen

nur dann von Null verschieden sind, wenn $H_p(M_p^2) \neq 0$ ist, d.h., wenn $G(q^2)$ bei $q^2 = M_p^2$ einen Pol hat. Ist $H_p(M_p^2)$ aber ungleich Null, so folgen die Aussagen:

1. Die starken Formfaktoren sind gegeben durch:

$$K_p(q^2) = \frac{(M+M')^2 - q^2}{(M+M')^2 - M_p^2} \cdot K_p'(q^2) = \frac{(M+M')^2 - q^2}{(M+M')^2 - M_p^2} \cdot \frac{H_p(q^2)}{H_p(M_p^2)} \qquad \text{(II,103)}$$

mit $H_p(q^2)$ aus (II,100). Sie sind über (II,52) mit den elektromagnetischen Formfaktoren der Baryonen verknüpft.

2. Die Kopplungskonstanten sind:

$$g_{B'PB} = \frac{c_{B'PB}}{M_{B'} M_B} \cdot \left(\frac{M_{B'} + M_B}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{M_P^2}{(M_B + M_B)^2}\right) \cdot \frac{H_p(M_P^2)}{M_p^{3/2}} \qquad \text{(II,104)}$$

$$g_{BPD} = \frac{c_{BPD}}{M_B} \cdot \left(\frac{M_D + M_B}{2}\right) \cdot \frac{H_p(M_P^2)}{M_p^{3/2}} \quad . \qquad \text{(II,105)}$$

Durch Eliminieren der Konstanten $H_\pi(M_\pi^2)/M_\pi$ ergeben sich hieraus mit $c_{P\pi P} = 5\sqrt{2}/3$ die Relationen:

$$g_{B\pi D} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{c_{B\pi D}}{2} \cdot \frac{M_B + M_D}{2M_B} \cdot \frac{1}{M_D} \cdot g_{P\pi P} \quad . \qquad \text{(II,106)}$$

In Tabelle VII sind die aus (II,99) bzw. (II,106) resultierenden Konstanten $c_{B\pi D}$ und $g_{B\pi D}$ sowie die mit Hilfe der Formel:

$$\Gamma_{D \to B+\pi} = \frac{g_{D\pi B}^2}{4\pi} \cdot \frac{(M_D + M_B)^2 - M_\pi^2}{6M_D^2} \cdot p^3 \qquad \text{(II,107)}$$

$p^2 = \frac{1}{4M_D^2}\left[M_D^4 + (M_B^2 - M_\pi^2)^2 - 2M_D^2 \cdot (M_B^2 + M_\pi^2)\right]$ und dem Wert $g_{P\pi P}^2/4\pi = 15$ der Pion-Nukleon-Kopplungskonstanten berechneten Zerfallsbreiten aufgeführt.

TABELLE VII

	$N_{++}^* \to p^+ + \pi^+$	$Y^+ \to \Lambda^0 + \pi^+$	$Y^+ \to \Sigma^0 + \pi^+$	$\Xi^* \to \Xi^0 + \pi^-$	Einheit
$c_{B\pi D}$	2	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	1
$g_{B\pi D}$	13.5	6.75	2.10	4.20	M_π^{-1}
$\Gamma_{D\to B+\pi}^{th}$	110	37.5	3.4	10.5	MeV
$\Gamma_{D\to B+\pi}^{exp}$	120	39.6	4.4	7.5	MeV

Die zum Vergleich angegebenen experimentellen Breiten werden recht gut vorausgesagt.

Es sollen hier keine weiteren Konsequenzen, die sich aus den Stromerwartungsausdrücken (II,15-24) für Formfaktoren und Kopplungskonstanten ergeben, betrachtet werden. Eine vollständige Diskussion dieser Konsequenzen wäre jedoch sehr interessant.

4. FEYNMANREGELN DES QUARKMODELLS

Die Approximation der allgmeinen Stromerwartungswerte durch die niedrigsten Quarkbeiträge liefert die gleichen Resultate wie eine Berechnung dieser Matrixelemente nach den bekannten Feynmanregeln, wenn man sich auf eine bestimmte Klasse von Grafen beschränkt. Es müssen grade die Grafen niedrigster Ordnung genommen werden, die sich ergeben mit der Annahme, daß schwache, elektromagnetische und starke Felder nur direkt an die Quarks gekoppelt sind. Die innere Struktur der aus Quarks zusammengesetzten Hadronen wird dadurch berücksichtigt, daß an den Vertizes von Quarks und Hadronen die Kopplungskonstanten durch Vertexfunktionen ersetzt werden. Die Quark-Meson-Vertexfunktion wurde bereits in I.5b definiert:

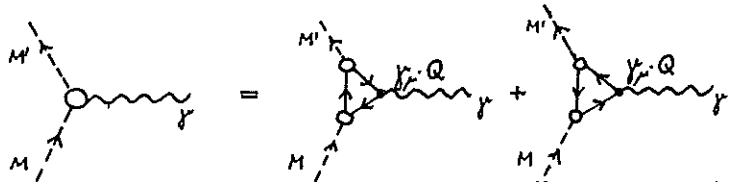
$$T^{(M)}(p_1,p_2;P,e) = T^{(M)}(p,P,e) = -(2\pi)^4 i\,(\not p+\not P/2-m)\,\chi^{(M)}(p,P,e)\,(\not p'-\not P/2-m) \qquad (II,108)$$

mit $P = p_1+p_2$ und $p = p_2-p_1$. Für die Baryonen ist die Vertexfunktion durch:

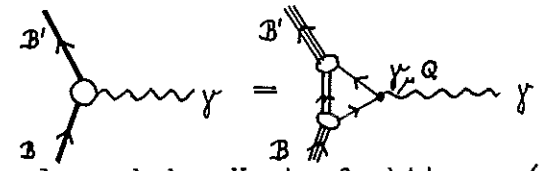
$$T^{(B)}(p_1,p_2,p_3;P,u) = T^{(B)}(p,p';P,u) = -(2\pi)^8 \left(\tfrac{1}{3}(2\not p+\not p'+\not P)-m\right)\left(\tfrac{1}{3}(2\not p'+\not p+\not P)-m\right)\left(\not p+\not p'-\not P+m\right)\chi^{(B)}(p,p';P,u) \qquad (II,109)$$

und $P = p_1+p_2+p_3$, $p = p_1-p_3$, $p' = p_2-p_3$ mit der in I.5c definierten Bethe-Salpeter-Amplitude verknüpft. Die Aussagen des relativistischen Quarkmodells erhält man, indem man in (II,108) bzw. (II,109) die Bethe-Salpeter-Amplituden durch die Ansätze (II,2-5) approximiert.

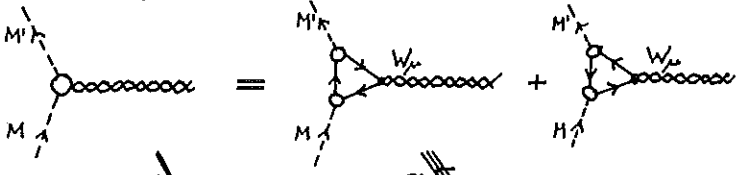
Die Matrixelemente des elektromagnetischen Stromes zwischen zwei Mesonzuständen ergeben sich also aus den Grafen:



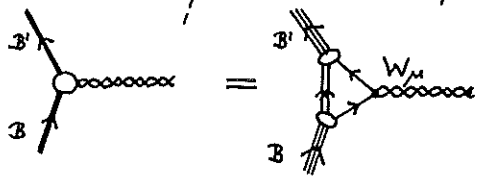
und die Matrixelemente zwischen zwei Baryonzuständen aus dem Grafen:



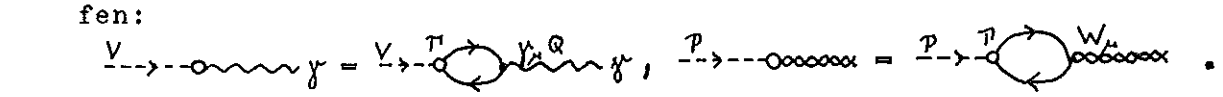
mit Hilfe der Feynmanregeln und den Vertexfunktionen (II,108) bzw. (II,109). Die Matrixelemente des Stromes der schwachen Wechselwirlung können entsprechend dargestellt werden durch die Grafen:



und

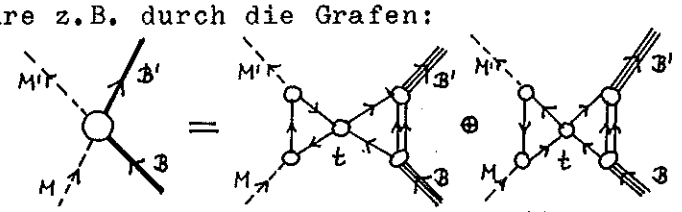


wobei durch ∞∞∞∞ der schwache Strom symbolisiert wurde und $W_\mu = -\gamma_\mu W_V - i\gamma_\mu\gamma_5 W_A$ der schwache Vertexoperator ist. Die Vakuum-Einmeson-Matrixelemente $\langle 0|j_\mu(0)|P,e,V\rangle$ und $\langle 0|W_\mu(0)|P,P\rangle$ folgen aus den Grafen:

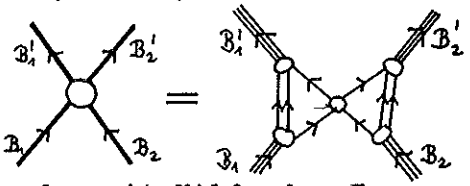


Entsprechende Grafen beschreiben die Erwartungswerte von Mesonen-Strömen.

Es wurde gezeigt, daß aus den mit diesen Grafen äquvalenten Stromerwartungswerten eine Reihe von experimentell recht gut bestätigten Aussagen folgt. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß durch entsprechende Grafen auch auch die Streuamplituden der Hadronen auf eine fundamentale Quark-Quark-Streuamplitude $t(p'_1,p'_2;p_1,p_2)$ zurückgeführt werden können. Durch Eliminieren der Quark-Streuamplituden sollte man dann zu Relationen zwischen experimentell zugänglichen Amplituden gelangen. Die Meson-Baryon--Streuamplitude wäre z.B. durch die Grafen:



zu approximieren und die Baryon-Baryon-Streuamplitude durch den Grafen:



Eine Berechnung dieser Grafen mit Hilfe der Feynmanregeln unter Berücksichtigung der Vertexfunktionen (II,108) und (II,109) mit den speziellen Bethe-Salpeter-Amplituden (II,2-5) führt zu recht umfangreichen Ausdrücken und wurde noch nicht weiter durch-geführt.

Macht man jedoch ein Modell mit skalaren Quarks, so erhält man durch Berechnung der Streuamplituden nach den Feynmanregeln die gleichen Aussagen, wie sie KOKKEDIE und VAN HOOVE in (Ko67) mit der sogenannten "Additivitätsannahme" aus dem Quarkmodell ableiten. Die bekannteste dieser Aussagen ist die Relation

$$\sigma_{\pi P}^{tot} : \sigma_{PP}^{tot} = 2 : 3$$

zwischen dem totalen π-Proton- und dem totalen Proton-Proton-Wirkungsquerschnitt bei großen Energien. Es besteht die Möglichkeit, daß unter Berücksichtigung des Quarkspins und mit den speziellen Vertexfunktionen (II,108,109) der Hadronen auch Aussagen über Amplituden bei Impulsüberträgen ungleich Null und über Polarisationen ableitbar sind.

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, daß in einer relativistischen Quarkfeldtheorie aus geeigneten Ansätzen und Approximation ähnliche Aussagen ableitbar sind, wie im nichtrelativistischen Quarkmodell. Mit den gleichen Ansätzen ergeben sich außerdem die neuen Relationen:

$$g_{\omega\pi\gamma} = \frac{e}{\sqrt{M_\omega M_\pi}} \quad ; \quad g_{\varrho\gamma} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{M_\varrho M_\pi}}{\cos\vartheta_A} \cdot f_\pi \quad ,$$

die von den experimentell bekannten Werten innerhalb von 10% erfüllt werden. Weiterhin erweisen sich in diesem Rahmen die magnetischen Momente der Hadronen als unabhängig von der Quarkmasse.

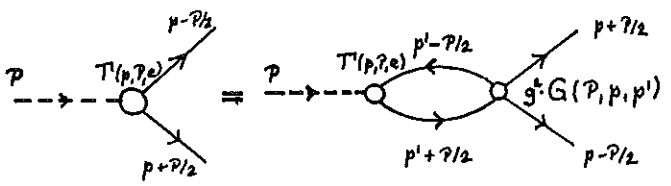
Die angeführten, teilweise recht guten Voraussagen von experimentell zugänglichen Größen lassen es sinnvoll erscheinen, das beschriebene relativistische Quarkmodell weiter auszubauen. Ein solcher Ausbau kann in zwei Richtungen erfolgen.

Einerseits ist es möglich weitere Konsequenzen der Ansätze und Approximationen zu studieren. Man kann z.B. für die Bethe-Salpeter-Amplituden anderer bekannter Meson- und Baryon-Resonanzen nach geeigneten Ansätzen suchen und mit diesen Erwartungswerte berechnen. So bietet sich nach Betrachtung der allgemeinen Entwicklung (I,116) für die Bethe-Salpeter-Amplitude der 2^{++}-Mesonen, zu denen u.a. die bekannte A_2-Resonanz gehört, der Ansatz an:

$$\chi^{(T)}(p,P,e) = c_T \cdot (p\!\!\!/) \cdot (P\!\!\!/ - M_T) \cdot T^{(T)} \cdot \chi'(p) \quad .$$

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit für die Ansätze der Bethe-Salpeter-Amplituden bietet die Berechnung von Streuamplituden mit Hilfe der in II.4 beschriebenen Feynmanregeln des Quarkmodells. Hier sind noch eine Reihe von Rechnungen durchführbar.

In eine andere Richtung würde die Suche nach einem Verständnis der Ansätze und Approximationen und die Frage nach den Eigenschaften der Quarks und ihrer Bindungskräfte führen. Hier wird man zunächst versuchen die Bethe-Salpeter-Amplitude der Mesonen mit Hilfe einer geeigneten Bethe-Salpeter-Gleichung zu berechnen. Es bietet sich z.B. die durch die Grafen:



dargestellte "Kettennäherung" der Bethe-Salpeter-Gleichung an:

$$(\not p + \not P/2 - m)\,\chi(p,P,e)\,(\not p - \not P/2 - m) = -i\,\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int dp'\; G(p,p',P)\cdot\chi(p',P,e) \quad . \quad (II,110)$$

Macht man für den Kern G(P,p,p') spezielle Ansätze, z.B.

$$G(P,p,p') = \gamma_\mu G'(p,p')\cdot\gamma_\mu \quad , \quad (II,111)$$

so lassen sich in diesem Modell bereits eine Reihe von Fragen studieren. Hierbei sind die Entwicklungen (I,112-117) von Nutzen. In einem solchen Modell ist es beispielsweise möglich Beziehungen zwischen den Mesonenmassen zu untersuchen. Mit dem speziellen Kern (II,111) läßt sich durch eine Störungsentwicklung nach $(M/m)^2$ zeigen, daß sich Relationen zwischen Massenquadraten ergeben und daß die Masse eines Vektormesons größer ist als die Masse eines pseudoskalaren Mesons mit den gleichen Symmetriequantenzahlen. Einer genauen Berechnung der Bethe-Salpeter-Amplituden stehen jedoch die bekannten Schwierigkeiten entgegen, die bei der Bethe-Salpeter-Gleichung für Teilchen mit Spin auftreten.

Zur Berechnung der Bethe-Salpeter-Amplituden der Baryonen ist eine relativistische Dreiteichen-Gleichung erforderlich, die noch schwieriger zu behandeln ist als die Zweiteilchen-Gleichungen. Trotz dieser Schwierigkeiten sind Überlegungen in dieser Richtung äußerst interessant.

Herrn Professor Dr. Hans Joos möchte ich für die Themenstellung und viele Anregungen und Hinweise danken. Meinen Kollegen, insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Manfred Scheunert, danke ich für zahlreiche anregende Diskussionen und die kritische Durchsicht einiger Rechnungen.

ANHANG 1 : Beschreibung von Einteichenzuständen durch Wellenfunktionen.

Der Zustandsvektor $|\alpha\rangle$ eines Teilchens der Masse M und mit Spin s kann charakterisiert werden durch die Koeffizienten $(p,A|\alpha)$ und $(p,\dot{A}|\alpha)$. Diese sind Koeffizienten einer Entwicklung des Vektor $|\alpha\rangle$ nach den z.B. bei JOOS (Joo62) angegebenen Spinorbasen $|p,A\rangle$ und $|p,\dot{A}\rangle$ zu Darstellung (M,s):

$$|\alpha\rangle = \int \frac{dp}{2\omega}\ (p,A|\alpha)\cdot|p,A\rangle = \int \frac{dp}{2\omega}\ (p,\dot{A}|\alpha)\,|p\dot{A}\rangle \qquad \omega = +\sqrt{M^2+\vec{p}^2} \qquad (A,1)$$

Die Koeffizienten $(p,A|\alpha)$ und $(p,\dot{A}|\alpha)$ oder geeignete Linarkombinationen von ihnen lassen sich zusammenfassen zu einem verallgemeinerten Spinor:

$$f^{(\alpha)}(\vec{p}) = \left(f^{(\alpha)}_{\mu_1\ldots\mu_n,\nu_1\ldots\nu_m}(\vec{p})\right) \qquad (A,2)$$

mit Vektorindizes $\mu_i = 1,2,3,0$ und Spinorindizes $\nu_\kappa = 1,2,3,4$. Diese Spinoren $f^{(\omega)}(\vec{p})$ oder ihre Transformierten:

$$f^{(\alpha)}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int \frac{d\vec{p}}{2\omega}\ e^{-ipx}\ f^{(\alpha)}(p) \qquad p_0 = \omega \qquad (A,3)$$

werden als Wellenfunktionen zur Beschreibung von Einteilchenzuständen verwendet. Der bekannte Zusammenhang zwischen den Spinorbasen $|p,A\rangle$ und $|p,\dot{A}\rangle$ führt im Ortsraum zu Wellengleichungen, denen die Funktionen $f^{(\omega)}(x)$ genügen. Wegen der Definition (A,3) ist immer die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + M^2)\cdot f^{(\omega)}(x) = 0 \qquad (A,4)$$

erfüllt.

Aus dem Transformationsverhalten der Spinorbasen resultiert eine Darstellung der inhomogenen Lorentzgruppe $iL_+^\uparrow$ und der Paritätsoperation im Raum der Wellenfunktionen. Es ist:

$$f^{(\omega)'}(\Lambda x + a) = D^{(\omega)}(\Lambda)\, f^{(\omega)}(x) \equiv \left(\Lambda_{\mu_1}^{\mu_1'}\cdots\Lambda_{\mu_n}^{\mu_n'}\cdot S_{\nu_1\nu_1'}(\Lambda)\cdots S_{\nu_m\nu_m'}(\Lambda)\cdot f^{(\alpha)}_{\mu_1'\ldots\mu_n'\nu_1'\ldots\nu_m'}(x)\right). \qquad (A,5)$$

Eine Darstellung der Ladungskonjugation kann durch:

$$f^{(\bar{\alpha})}(x) = D^{(\omega)}(\mathcal{C})f^{(\omega)} \equiv \left(C_{\nu_1\nu_1'}\cdots C_{\nu_m\nu_m'}\cdot f^{*(\omega)}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1''\ldots\nu_m''}(x)\cdot\gamma^0_{\nu_1''\nu_1'}\cdots\gamma^0_{\nu_m''\nu_m'}\right) \qquad (A,6)$$

mit der durch $C^{-1}\gamma_\mu C = -\cdot\overset{T}{\gamma}_\mu$ definierten Matrix C eingeführt werden. Ein invariantes Skalarprodukt ist im Raum der Wellenfunktionen gegeben durch:

$$\left(f^{(\omega')}, f^{(\omega)}\right) = \int \frac{d\vec{p}}{2\omega}\ \left(\bar{f}^{(\omega')}(\vec{p})\ f^{(\omega)}(\vec{p})\right) = i\int d\vec{x}\ \left(\bar{f}^{(\omega')}(x)\overset{\leftrightarrow}{\partial_0} f^{(\omega)}(x)\right) \qquad (A,7)$$

mit

$$(\bar{f}'\,f) = \left(f^{*\prime}_{\mu_1'\ldots\mu_n'\nu_1'\ldots\nu_m'}\cdot g^{\mu_1'\mu_1''}\cdots g^{\mu_n'\mu_n''}\cdot\gamma^0_{\nu_1'\nu_1''}\cdots\gamma^0_{\nu_m'\nu_m''}\cdot f_{\mu_1''\ldots\mu_n''\nu_1''\ldots\nu_m''}\right) \qquad (A,8)$$

Ist $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des Impulsoperators P_μ zum Eigenwert p_μ, so wird:

$$f^{(\omega)}(p) = 2\cdot\omega\cdot\delta(\vec{p}-\vec{p})\cdot u^{(\omega)}(p) \quad . \qquad (A,9)$$

Der hierdurch definierte Polarisationstensor $u^{(\omega)}(p) = (u^{(\omega)}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_m}(p))$ wird zur Beschreibung des Polarisationszustandes eines Teilchens α mit Impuls p verwendet.

Für beliebigen Spin haben BARGMANN und WIGNER (Ba46) eine Beschreibung von Einteilchenzuständen durch Wellenfunktionen $f^{(\omega)}_{(\nu_1\nu_2\ldots\nu_{2s})}(x)$ mit 2s symmetrisierten Dirac-Spinorindizes ν_i angegeben. Diese $f^{(\omega)}(x)$ sind Lösungen von simultanen Dirac-Gleichungen:

$$(-i\partial\!\!\!/ + M)\, f^{(\omega)}(x) = 0 \quad . \qquad (A,10)$$

Daneben ist auch eine Beschreibung im RARITA-SCHWINGER-FORMALISMUS durch Spintensoren $f^{(\omega)}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu}(x)$ gebräuchlich. (Ra43).

Für die Fälle $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$ wurden hier die folgenden Wellenfunktionen gewählt:

s = 0: Die Wellenfunktion $f^{(\omega)}(x)$ ist mit $f^{(\omega)}(p) = (p|\alpha)$ durch (A,3) definiert und genügt der Klein-Gordon-Gleichung (A,4). Der Polarisationstensor ist einfach 1.

s = 1/2: Es ist:

$$f^{(\omega)}_\nu(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} (p,A|\alpha) & \text{für } \nu = 1,2 \\ (p,\dot{A}|\alpha) & \text{für } \nu = 3,4 \end{cases} \quad . \qquad (A,11)$$

Die durch (A,3) definierte Ortsraumwellenfunktion $f^{(\omega)}_\nu(y)$ ist ein Spinor und genügt der Dirac-Gleichung (A,10). Der Polarisationstensor ist der bekannte auf 2M normierte Dirac-Spinor u(p). Der Polarisationstensor des Antiteilchens ist wegen (A,6) $v(p) = C\,\bar{u}^{T}(p)$.

s = 1: Die Impulsraumwellenfunktion wird definiert durch:

$$f^{(\omega)}_\mu(p) = \frac{p^{\mu'}}{2M}\cdot\left\langle \left\{ {A \atop \mu\mu'} \right\}\cdot(p,A|\alpha) + \left\{ {\dot{A} \atop \mu'\mu} \right\}(p,\dot{A}|\alpha) \right\rangle \qquad (A,12)$$

mit den z.B. von ROEPPSDORF (Ro64) angegebenen selbstdualen Tensoren $\left\{ {A \atop \mu\mu'} \right\}$. Die Wellenfunktion $f^{(\omega)}_\mu(x)$ ist ein Vektor und genügt den Gleichungen:

$$(\Box + M^2)\cdot f^{(\omega)}_\mu(x) = 0 \quad \text{und} \quad \partial^\mu f^{(\omega)}_\mu(x) = 0 \quad . \qquad (A,13)$$

Die Polarisationstensoren sind Vektoren $e_\mu(p)$, für die $(ep) = 0$ ist und die auf -1 normiert sind.

s = 3/2: Die Wellenfunktion $f^{(\omega)}_{\mu\nu}(x)$ ist ein Spinor mit einem Vektorindex und genügt den Rarita-Schwinger-Gleichungen:

$$(-i\partial\!\!\!/ + M)\cdot f^{(\omega)}_{\mu}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \partial^{\mu} f^{(\omega)}_{\mu}(x) = 0 \qquad . \quad (A,14)$$

Die Polarisationstensoren sind Rarita-Schwinger-Spinoren $u_{\mu}(p)$, die durch $(\bar{u}^{\mu} u_{\mu}) = -2M$ normiert sind. Die Antiteilchen werden durch die Spinoren $v_{\mu}(p) = C\,\bar{u}^{T}_{\mu}(p)$ beschrieben.

s=2 : Die Ortsraumwellenfunktion $f^{(\omega)}_{\mu\mu'}(x)$ ist ein symmetrischer Tensor, der die Wellengleichungen

$$(\Box + M^2)\cdot f^{(\omega)}_{\mu\mu'}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \partial^{\mu} f^{(\omega)}_{\mu\mu'}(x) = 0 \qquad (A,15)$$

erfüllt. Die Polarisationstensoren sind symmetrische Tensoren $e_{\mu\mu'}(p)$, für die $(pe)_{\mu} = 0$ ist und die durch $(e,e) = 1$ normiert sind. Hier, wie im Text, werden die Abkürzungen $(ek)_{\mu} = e_{\mu\mu'} k^{\mu'}$ und $(kle) = e_{\mu\mu'} k^{\mu} l^{\mu'}$ verwendet.

ANHANG 2 : Die Symmetriegruppe SG.

Die durch

$$SG = SU_I(2) \circ U_Y(1) \qquad (A,16)$$

mit der Isospingruppe $SU_I(2)$ und der Hyperladungseichgruppe $U_Y(1)$[1] definierte vierparametrige Liegruppe SG hat die infinitesimalen Erzeugenden I_1, I_2, I_3, Y. Für diese gelten die Vertauschungsrelationen:

$$[I_k, I_l]_- = i\cdot\varepsilon_{klm}\cdot I_m \qquad [I_k, Y]_- = 0 \qquad (A,17)$$

mit $i,k,l = 1,2,3$. Da die Gruppe SG eine kompakte Liegruppe[1] ist, zerfallen ihre unitären Darstellungen $U(g)$ in eine Summe irreduzibler, endlichdimensionaler, unitärer Darstellungen. Wegen der Struktur (A,17) sind die irreduziblen Darstellungen $D^{(\mu)}(g)$ der Elemente $g = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha) \in SG$ direkte Produkte der bekannten unitären Darstellungen der Untergruppen $SU_I(2)$ und $U_Y(1)$:

$$D^{(\mu)}(g) = D^{(I)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \circ D^{(Y)}(\alpha) \qquad . \qquad (A,18)$$

Die irreduziblen Darstellungen der SG können also charakterisiert werden durch die Eigenwerte $(\mu) = (I,Y)$ der Casimir-Operatoren $I^2 = I_i I_i$ und Y. Aus den Vertauschungsrelationen folgt, daß die Eigenwerte von I positiv ganz- oder halbzahlig sind. Die Eigenwerte von Y sind positiv oder negativ drittzahlig. Als Basisvektoren eines irreduziblen Darstellungsraumes können die (2I+1) orthogonalen Eigenvektoren $|\mu_b\rangle = \left|\begin{matrix} IY \\ I_3 \end{matrix}\right\rangle$ des hermiteschen Operators I_3 gewählt werden. Eine unitäre Darstellung durch unitäre Matrizen $D^{(\mu)}_{bb'}(g)$ wird in dieser Basis definiert durch:

[1] Die Hyperladungseichgruppe ist hier nicht die volle Translationsgruppe U(1), sondern die Faktorgruppe $U(1)/U(n\cdot 6\pi)$, wenn $U(n\cdot 6\pi)$ die Untergruppe der Translationen um $n\cdot 6\pi$, $n \in \pm\underline{N}$, ist.

$$U(g)\left|{}^{IY}_{b}\right\rangle = \left|{}^{IY}_{b'}\right\rangle \cdot D^{(IY)}_{b'b}(g) \qquad . \qquad (A,19)$$

Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten $\left(\begin{smallmatrix}\mu' & \mu'' \\ b' & b''\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu \\ b\end{smallmatrix}\right)$ einer Gruppe sind allgemein definiert als die Entwicklungskoeffizienten der Basisvektoren $\left|{}^{\mu}_{b}\right\rangle$ einer irreduziblen Darstellung (μ) nach den direkten Produkten $\left|{}^{\mu'}_{b'}\right\rangle\left|{}^{\mu''}_{b''}\right\rangle$ der Basisvektoren $\left|{}^{\mu'}_{b'}\right\rangle$ und $\left|{}^{\mu''}_{b''}\right\rangle$ von irreduziblen Darstellungen (μ') und (μ''), in derem direktem Produkt $(\mu')\otimes(\mu'')$ die Darstellung (μ) enthalten ist:

$$\left|{}^{\mu}_{b}\right\rangle = \left|{}^{\mu'}_{b'}\right\rangle\cdot\left|{}^{\mu''}_{b''}\right\rangle\cdot\left(\begin{smallmatrix}\mu' & \mu'' \\ b' & b''\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu \\ b\end{smallmatrix}\right) \qquad . \qquad (A,20)$$

Mit (A,19) resultiert aus (A,20) die wichtige Eigenschaft:

$$\left(\begin{smallmatrix}\mu' & \mu'' \\ b_1' & b_2''\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu \\ b_1\end{smallmatrix}\right) = D^{(\mu')}_{b_1'b_2'}(g)\cdot D^{(\mu'')}_{b_1''b_2''}(g)\cdot\left(\begin{smallmatrix}\mu' & \mu'' \\ b_2' & b_2''\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu \\ b_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\tilde{D}^{(\mu)}_{b_2b_1}(g) \qquad (A,21)$$

für alle $g\in SG$.

Die Clebsch-Gordon-Koeffizienten der Symmetriegruppe SG sind gegeben durch:

$$\left(\begin{smallmatrix}\mu' & \mu'' \\ b' & b''\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}\mu \\ b\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}I'Y' & I''Y'' \\ I_3' & I_3''\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}IY \\ I_3\end{smallmatrix}\right) = (I'I_3', I''I_3''|II_3)\cdot\delta_{Y'+Y'',Y} \quad , \quad (A,22)$$

wenn $(I_1'I_3';I'',I_3''|I,I_3)$ die bekannten SU(2)-Clebsch-Gordon-Koeffizienten sind und $\delta_{Y'Y} = 1$ für $Y'=Y$ und sonst $= 0$ ist.

Zur Definition des Symmetrietransformationsverhaltens der Quarkfelder wurde die reduzible "Quarkdarstellung" $(q) = (\frac{1}{2},\frac{1}{3})\circ(0,-\frac{2}{3})$ verwendet. Führt man im reduziblen Darstellungsraum dieser Darstellung (q) durch:

$$\left|{}^{q}_{1}\right\rangle \equiv \left|{}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}}_{\frac{1}{2}}\right\rangle \qquad \left|{}^{q}_{2}\right\rangle \equiv \left|{}^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}}_{-\frac{1}{2}}\right\rangle \qquad \left|{}^{q}_{3}\right\rangle \equiv \left|{}^{0\;-\frac{2}{3}}_{0}\right\rangle \qquad (A,23)$$

die drei Basisvektoren $\left|{}^{q}_{a}\right\rangle$, $a = 1,3,2$, ein, so werden die Darstellungsmatrizen D(g) durch:

$$U(g)\left|{}^{q}_{a}\right\rangle = \left|{}^{q}_{a'}\right\rangle \cdot D_{a'a}(g) \qquad (A,24)$$

definiert. Die 3×3-Matrizen D(g) sind gegeben durch:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(\frac{1}{2},\frac{1}{3})}_{I_3'I_3}(g) & 0 \\ 0 & D^{(0,-\frac{2}{3})}(g) \end{pmatrix} \qquad . \qquad (A,25)$$

Die Zerlegung des direkten Produktes der Darstellungen (q) und $(\bar{q}) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{3})\circ(0,\frac{2}{3})$ in irreduzible Darstellungen $(\mu) = (IY)$ ergibt:

$$(q)\otimes(\bar{q}) = (0,0)_1\oplus(0,0)_2\oplus(\tfrac{1}{2},1)\oplus(\tfrac{1}{2},-1)\oplus(1,0) \qquad . \qquad (A,26)$$

Die Koeffizienten der Entwicklung der Basisvektoren $\left|{}^{IY}_{I_3}\right\rangle$ der enthaltenen Darstellungen (IY) nach Produkten der Basisvektoren $\left|{}^{q}_{a}\right\rangle$ und $\left|{}^{\bar{q}}_{a'}\right\rangle$:

$$\left|\begin{matrix}IY\\ I_3\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix}q\\ a\end{matrix}\right\rangle \cdot T^{(YII_3)}_{aa'} \cdot \left|\begin{matrix}q\\ a'\end{matrix}\right\rangle \qquad (A,27)$$

sind grade die aus Seite 23 aufgeführten 9 linear unabhängigen 3x3-Matrizen $T^{(YII_3)}$. Für diese ergibt sich aus (A,21) die Eigenschaft (I,100).

Die Zerlegung des direkten Produktes $(q)\otimes(q)\otimes(q)$ ergibt:

$$(q)\otimes(q)\otimes(q) = (0,-2)\oplus 3\cdot(0,0)\oplus 3\cdot(\tfrac{1}{2},-1)\oplus 2\cdot(\tfrac{1}{2},1)\oplus 3\cdot(1,0)\oplus(\tfrac{3}{2},1) \quad . \qquad (A,28)$$

Die in (II,6) und (II,8) eingeführten Tensoren $T^{(B)}_{a_1a_2a_3}$ und $T^{(D)}_{(a_1a_2a_3)}$ sind grade die Entwicklungskoeffizienten mit definierter Permutationssymmetrie bezüglich der Indizes a_i einer Entwicklung der Basisvektoren $\left|\begin{matrix}IY\\ I_3\end{matrix}\right\rangle$ nach den Produkten $\left|\begin{matrix}q\\ a_1\end{matrix}\right\rangle\cdot\left|\begin{matrix}q\\ a_2\end{matrix}\right\rangle\cdot\left|\begin{matrix}q\\ a_3\end{matrix}\right\rangle$. Für diese folgt aus (A,21) die Eigenschaft (I,58).

ANHANG 3 : Umformung des Stromerwartungswertes.

Ohne Berücksichtigung der Symmetrieindizes folgt mit den Relationen (I,156) für den ersten Summanden von (I,155) :

$$(2\pi)^3 \sum_\lambda \int dp\ \delta(p^2-m^2)\,\Theta(p_0)\,\langle P',e',M'|\Psi(0)|p,q\rangle\chi_{pq}|\Psi(0)|P,e,M\rangle =$$

$$= (2\pi)^5 \sum_\lambda \int dp\ \delta(p^2-m^2)\,\Theta(p_0)\,\overline{\chi}^{(M')}(p-P'/2,P',e')(\not p-m)u^{(\lambda)}\bar{u}^{(\lambda)}(\not p-m)\chi^{(M)}(p-P/2,P,e) =$$

$$= (2\pi)^5 i \sum_\lambda \int dp\cdot(p^2-m^2+i\varepsilon)^{-1}\,\overline{\chi}^{(M')}(p-P'/2,P',e')(\not p-m)u^{(\lambda)}\bar{u}^{(\lambda)}(\not p-m)\chi^{(M)}(p-P/2,P,e) =$$

$$= (2\pi)^4 i \int dp\ \overline{\chi}^{(M')}(p-P'/2,P',e')\,(\not p-m)\,\chi^{(M)}(p-P/2,P,e) \quad . \qquad (A,28)$$

Beim Schritt von Zeile 2 zu Zeile 3 wurde die Relation

$$\int dp\cdot\delta(p^2-m^2)\cdot\Theta(p_0)\cdot f(p) = \frac{i}{2\pi}\cdot\int dp\cdot\frac{f(p)}{p^2-m^2+i\varepsilon}$$

benutzt, die aus dem Satz von Cauchy folgt unter der Voraussetzung, daß $f(p)$ in der unteren komplexen p_0-Ebene regulär ist und hinreichend stark abfällt. Die Umformung von Zeile 3 folgt mit

$$\sum_\lambda u^{(\lambda)}(p)\cdot\bar{u}^{(\lambda)}(p) = \not p + m$$

durch Kürzen von $(p^2-m^2+i\varepsilon)^{-1}$ gegen $(\not p+m)(\not p-m)$. Das ist nach ZIMMERMANN (Zi59) erlaubt.

Die Berücksichtigung der Symmetrieindizes ist trivial. Die Umformung des zweiten Summanden von (I,155) und die Relation (I,158) ergeben sich ganz analog.

Einen genaueren Beweis der Gestalt (A,28) des Einteilchenbeitrages zum Stromerwartungswert gebundener Zustände hat MANDELSTAM (Ma55) gegeben.

LITERATUR

(Ad65) S.L.ADLER, Phys.Rev.Lett. 14 (1965) 1051

(Ar67) H.ARAKI, R.HAAG, Com.Math.Phys. 4 (1967) 77

(Ba46) V.BARGMANN, E.P.WIGNER, Nat.Acad.of Sc. 34,5 (1946) 221

(Ca63) N.CABIBBO, Phys.Rev.Lett. 10 (1963) 531

(Ci67) M.CIAFALONI, Preprint, Scoula normale superiore, Pisa, Febr.1967

(Da66) R.H.DALITZ, D.G.SUTHERLAND, Phys.Rev.10 (1966) 1180

(Da67) A.DAR, Phys.Rev.Lett. (1967)

(De65) R.DELBOURGO, A.SALAM, J.STRATHDEE, Proc.of Roy.Soc.A 248 (1965) 146

(Fu65) S.FUBINI, G.FURLAN, C.ROSSETTI, N.C. XL (1965) 1171

(Ge62) M.GELL-MANN, Phys.Rev. 125 (1962) 1067

(Ge64) M.GELL-MANN, Y.NE'EMAN, "The Eightfold Way", New York, Benjamin, 1964

(Ge64) M.GELL-MANN, Phys.Lett. 8 (1964) 214

(Go63) M.GOURDIN, PH.SALIN, N.C. XXVII,1 (1963) 309

(Ge62) M.GELL-MANN, D.SHARP, W.G.WAGNER, Phys.Rev.Lett. 8 (1962) 261

(Gü64) F.GÜRSEY, L.A.RADICATI, Phys.Rev.Lett.13,5 (1964) 173

F.GÜRSEY, L.RADICATI, A.PAIS, Phys.Rev.Lett. 13,8 (1964) 299

A.PAIS, Phys.Rev.Lett. 13,5 (1964) 175

(Ha58) R.HAAG, Phys.Rev. 112 (1958) 669

R.HAAG, Suppl.N.C. XIV (1959) 131

(He65) K.HEPP, Brandeis, Conf.Rep. Vol.1 (1965) 137

(He63) K.HEPP, Helv.Phys.Acta 36 (1963) 355

(Joo62) H.JOOS, Fortschr.d.Phys. 10 (1962) 65

(Joo67) H.JOOS, Schladming 67, Act.Phys.Austr. Suppl.IV (1967) 320

(Jos65) R.JOST, "The general theory of quantized fields". Am.Math.Soc. Providence, Rhode Island (1965)

(Ko67) J.J.J.KOKKEDEE, Schladming 67, Act.Phys.Austr.Suppl.IV (967)

(Le54) H.LEHMANN, N.C. XI (1954) 342

(Ma55) S.MANDELSTAM, Proc.of Roy.Soc. A 233 (1955) 248

(Mo65) G.MORPURGO, Physics, Vol.2,2 (1965) 95

(Ni58) K.NISHIJIMA, Phys.Rev. 11 (1958) 995

(Ra43) W.RARITA, F.SCHWINGER, Phys.Rev. 60 (1943) 61

(Ro64) G.ROEPPSDORF, Dissertation, Hamburg (1964)

(Ru62) D.RUELLE, Helv.Phys.Acta 35 (1962) 147

(Sa65) B.SAKITA, K.C.WALI, Phys.Rev. 139 B (1965) 1355

(Sa52) E.E.SALPETER, Phys.Rev. 87 (1952) 328

(Sc61) S.S.SCHWEBER, "An introduction to relativistic quantum field theory", Row, Patterson&Co, Evanston, Ill.(1961)

(St64) R.F.STREATER, A.S.WIGHTMAN, "PCT, spin, statistics and all that" New York, Benjamin (1964)

(Th60) W.THIRRING,K.BAUMANN,P.G.O.FREUND,N.C. XVIII,5 (1960) 906
(Th65) W,THIRRING, Schladming 65,Acta Phys.Austr.Suppl.II(1966)205
(Th66) W.THIRRING, Schladming 66,Act.Phys.Austr.Suppl.III(1967)294
(We66) V.F.WEISSKOPF,R.v.ROYEN, N.C. Ser.X,VolL,3a (1967) 605
(We65) W.I.WEISBERGER, Phys.Rev.Lett. 14 (1965) 1047)
(Wi56) A.S.WIGHTMAN, Phys.Rev. 101 (1956) 860
(Zi58) W.ZIMMERMANN, N.C. X (1958) 597
(Zi59) W.ZIMMERMANN, N.C. XIII (1959) 503
(Zw64) G.ZWEIG, preprint (unpublished),CERN-8419/th,412. (1964) Febr.
(Th59) W.THIRRING, Nucl.Phys. 10 (1959) 107
(Br67) F.W.BRASSE,J.ENGLER,preprint,DESY 67/34,November 1967

Die experimentellen Daten wurden,soweit nicht anders angegeben,aus den Tabellen von A.H.ROSENFELD u.al. UCRL-8030 (September1967) entnommen.