DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON DESY

DESY 68/19
April 1968

STROMALGEBRA

von

P. Stichel

Physikalisches Staatsinstitut der Universität Hamburg
und Deutsches Elektronen Synchrotron DESY,
Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

STROMALGEBRA

von

P. Stichel

Physikalisches Staatsinstitut der Universität Hamburg

und Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Hamburg

Vortrag, gehalten auf der

Deutsch - Niederländischen Frühjahrstagung

der Nederlandse Natuurkundige Vereniging (NNV)

und

des Fachausschusses Kernphysik und Hochenergiephysik

in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (DPG)

in

B a d N e u e n a h r

vom 1. bis 6. April 1968

Abstract:

In this talk a short review of the content of current algebras, its main results and its role within present elementary particle physics is given.

Einleitung:

Wesentliche Fortschritte der letzten Jahre in der Theorie der Elementarteilchen sind mit dem Begriff Stromalgebra verknüpft. Ich werde in diesem Vortrag versuchen einen kurzen Abriß des Inhalts dieser Stromalgebra, ihrer Konsequenzen sowie ihrer Bedeutung innerhalb der gegenwärtigen Elementarteilchenphysik zu geben.

Der Inhalt der Stromalgebra läßt sich kurz wie folgt charakterisieren:

Stromalgebra, d.i. die Kommutatoralgebra der in der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung auftretenden Hadronströme bei gleichen Zeiten, d.h. es handelt sich um gleichzeitige Vertauschungsrelationen der Art

$$\left[j_\mu^\alpha (x) , j_\nu^\beta (y)\right]_{x_o=y_o} = g_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\gamma} \, j_\rho^\gamma (x) \, \delta (\vec{x} - \vec{y})$$

dabei sind die Indizes α, β, γ, innere Quantenzahlen (SU(3)-Index, A- bzw. V-Strom) und die $g_{\mu\nu\rho}^{\alpha\beta\gamma}$ Strukturkonstanten einer erhaltenen oder gebrochenen Symmetriegruppe.

Die Rolle der Stromalgebra in der gegenwärtigen Phase der Elementarteilchenphysik

Im Gegensatz zur Atom- und Niederenergiekernphysik kennen wir in der Elementarteilchenphysik noch nicht die dynamischen Grundgleichungen von denen ausgehend man, zumindest im Prinzip, alles ausrechnen kann. Was wir unzutreffenderweise gegenwärtig als Theorie der Elementarteilchen bezeichnen besteht

a) aus dem allgemeinen Rahmen der axiomatischen Feldtheorie, ergänzt durch gewisse Symmetrieprinzipien. Dieser Rahmen ist so allgemein, daß er sicherlich mehrere mögliche Theorien der Elementarteilchen enthält.

b) aus gewissen Vorstellungen über die analytischen Eigenschaften der S-Matrix als Funktion der kinematischen Variablen. Soweit diese Analytizität der S-Matrix nicht im axiomatischen Rahmen a) beweisbar ist, handelt es sich im Postulate, die auf unseren in der Potentialtheorie sowie im Laboratorium der Feynman-Graphen gemachten Erfahrungen basieren.

c) aus dynamischen Modellen. Hier möchte ich zur Illustration nur einige Schlagworte nennen: Peripheres Modell, Regge-Pole, Strom-Strom-Kopplung für die schwache Wechselwirkung etc. Von diesen Modellen hofft man, daß sie für bestimmte Situationen eine gute Approximation an die uns heute noch unbekannte Theorie der Elementarteilchen darstellen.

Was ist die Vorhersagekraft der unter a)-c) erwähnten Teile der Theorie? Während nach a) und b) nur Relationen zwischen verschiedenen, exp. meßbaren Größen (z.B. Dispersionsrelationen, also Summenregeln) vorhergesagt werden können, sind die dynamischen Modelle oft in der Lage bei Kenntnis der numerischen Werte gewisser Kopplungskonstanten quantitative Vorhersagen für einzelne Größen zu machen.

Wo findet bei diesen Betrachtungen die Stromalgebra ihren Platz? Wir können sie nicht ohne weiteres in a),b) oder c) einordnen. Die Stromalgebra ist ein Stück Dynamik, sie ist ein dynamisches Prinzip innerhalb des Rahmens der axiomatischen Feldtheorie, speziell ist sie eine allgemeine Formulierung des Konzepts gebrochener Symmetrien (dazu im Einzelnen später). Die Vorhersagekraft der Stromalgebra ist unterschiedlicher Natur: Einerseits gibt sie Anlaß zu Summenregeln, andererseits führt sie zu quantitativen Vorhersagen über Übergangsamplituden an der Schwelle (Niederenergietheoreme).

Daß ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Vertauschungsrelationen und Summenregeln besteht ist fast genau so lange bekannt wie die Quantenmechanik selbst. Zunächst das allgemeine Schema:
Von einem Kommutator zwischen Observablen

$$\left[A, B\right] = C$$

bilden wir Matrixelemente, führen ein vollständiges System von Zwischenzuständen $1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$ ein und erhalten derart die Summenregel

$$\sum_n \left(\langle b|A|n\rangle\langle n|B|a\rangle - \langle b|B|n\rangle\langle n|A|a\rangle \right) = \langle b|C|a\rangle \quad .$$

Ein nahezu klassisches Beispiel hierzu ist die Dipolsummenregel

$$2\,M \sum_n (E_n - E_a)\,|Q_{1,0}(a,n)|^2 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)\left(\frac{NZ}{A}\right) e^2$$

$$\text{mit} \quad Q_{1,0}(a,n) \equiv: \; e\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{Z} \langle n|z_k|a\rangle \quad .$$

die auf den Heisenberg'schen Vertauschungsrelationen zwischen Koordinate und Impulsoperator $\left[z_k, p_{k'z}\right] = i\,\delta_{kk'}$ basiert.

Die SU(3)xSU(3) Algebra der Ströme

Wir wollen nun im Einzelnen die von Gell-Mann bereits 1962 postulierte chirale SU(3)xSU(3) Algebra der Ströme diskutieren. Beginnen wir mit der chiralen SU(2)xSU(2) Algebra der Ladungen.

Die Wechselwirkung zwischen den Hadronen ist invariant gegenüber der Gruppe $SU(2)_I$ demzufolge der Isospin $\vec{Q}$ eine erhaltene Größe ist. Die Kommutatoralgebra der Q_i ist die Darstellung der Lie-Algebra der $SU(2)_I$ in $\mathcal{H}$: $\left[Q_i, Q_k\right] = i\varepsilon_{ikr}\, Q_r$. Die Isospinoperatoren hängen in einer lokalen Feldtheorie wie folgt mit Isospinströmen $j_{\mu,i}^{(v)}$ zusammen

$$Q_i = \int d^3x \; j_{0,i}^{(v)}(x)$$

die infolge des Erhaltungssatzes $\left[Q_i, H\right] = 0$

divergenzfrei sind: $\partial^\mu j^{(v)}_{\mu,i}\ (x) = 0.$

Die Isospinströme treten andererseits in der elektromagnetischen sowie in der schwachen Wechselwirkung auf und sind damit observable Größen:

a) $$j_\mu^{el,\ Hadron} = e\left(j_\mu^{(s)} + j^{(v)}_{\mu,3}\right)$$

b) $$H_{weak}^{\Delta S=0,L}\ (x) = \frac{g\cos\theta}{\sqrt{2}}\left(j^{(v)}_{\mu,1+i2}\ (x) + j^{(A)}_{\mu,1+i2}\ (x)\right)\overline{\psi}_e(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu(x) + \text{h.c.}$$

Neben diesen Vektorströmen $j^{(v)}_{\mu,i}$ finden wir in der schwachen Wechselwirkung auch Axialvektorströme $j^{(A)}_{\mu,i}$, die sich gleichfalls wie Komponenten eines Isovektors transformieren, d.h. für beide Arten von Strömen gilt

$$\left[Q_i, j_{\mu,k}\ (x)\right] = i\varepsilon_{ikr}\ j_{\mu,r}\ (x) \quad .$$

Mit Hilfe der Axialvektorströme können wir in Analogie zu den Isospinoperatoren, die wir auch Vektorladungen nennen, zumindest formal axiale Ladungen definieren:

$$\text{"}Q_i^5\text{"} \equiv : \int d^3x\ j^{(A)}_{0,i}(x)$$

Die Axialvektorströme können nur dann divergenzfrei sein, wenn alle Hadronen verschwindende Ruhemasse haben und in Paritätsdubletts auftreten. Dies trifft in der Natur nicht zu, d.h. die Axialladungen sind keine erhaltenen Größen, sie sind zeitabhängig.

Erhaltene Axialladungen wären die Konsequenz einer höheren Symmetrie, einer chiralen SU(2)xSU(2) mit Erzeugenden $Q_i^{(\pm)} \equiv : Q_i \pm Q_i^5$. Diese Symmetrie ist also gebrochen.

Gell-Mann schlug nun folgende Formulierung für diese Symmetriebrechung vor: Die zeitabhängigen Axialladungen erfüllen in der Form gleichzeitiger Vertauschungsrelationen dieselbe Algebra wie im Symmetrielimes die zeitunabhängigen Ladungen, d.h.

$$\left[Q_i^5 (x_o), \; Q_k^5 (x_o)\right] = i\varepsilon_{ikr} Q_r$$

bzw. in verschärfter Form

$$\left[Q_i^5 (x_o), \; j_{\mu,k} (x)\right] = i\varepsilon_{ikr} \bar{j}_{\mu,r} (x)$$

Diese Gell-Mann'schen Postulate sind in zweierlei Hinsicht nichttrivial:

1. Der gleichzeitige Limes der Vertauschungsrelationen zwischen den Axialladungen existiert
2. die gleichzeitige Vertauschungsrelation hat die angegebene spezielle Form.

Das Gell-Mann'sche Rezept läßt sich leicht im Rahmen einer höheren Symmetrie, der SU(3) verallgemeinern.

Erinneren wir uns kurz an die Wesenszüge der SU(3)-Symmetrie:
Die Lie-Algebra der SU(3) hat die Form $\left[q_i, q_k\right] = i \, f_{ikr} \, q_r$
Die irreduziblen Darstellungen der SU(3) kann man in einem zweidimensionalen (I_3,Y)-Diagramm darstellen. Ihre dreidimensionalen Fundamentaldarstellungen lassen sich bis heute nicht mit bekannten Elementarteilchen identifizieren. Diese Teilchen, die z.B. drittelzahlige elektrische Ladung tragen sollen, werden nach Gell-Mann Quarks genannt. In einem Quarkmodell lassen sich alle Hadronen als zusammengesetzt aus Quarks und Anti-Quarks auffassen. Unabhängig von solch einem Quarkmodell werden in der SU(3) die Elementarteilchen in Multipletts zusammengefasst, die jeweils mehrere Isospinmultipletts umfassen.

So bilden z.B. die $1/2^+$ - Baryonen und die 0^- - Mesonen jeweils ein Oktett. Die SU(3) ist wieder eine gebrochene Symmetrie (z.B. haben K- und Pi-Mesonen verschiedene Massen).

Es war nun Gell-Mann's Idee auch diese Symmetriebrechung als gleichzeitige Vertauschungsrelation zwischen den entsprechenden SU(3)-Ladungen zu formulieren:

Die nichterhaltenen Ladungen $Q_i (i = 1 \ldots 8)$ lassen sich wie im Fall der SU(2) durch Integration über die in der schwachen Wechselwirkung auftretenden Hadronströme gewinnen, genauer: Vom Oktett der Vektorströme sind 6 im Hamiltonoperator für die schwache bzw. elektromagnetische Wechselwirkung vertreten.

$$H_{weak}^{|\Delta S|=1,L} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sin\theta \left(j^{(V)}_{\mu,4+i5}(x) + j^{(A)}_{\mu,4+i5}(x) \right) \bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi_\nu(x) + \text{h.c.}$$

$$\left(j^{\binom{A}{V}}_{\mu,i} \ , \ i = 1 \ldots 8 \right) \xrightarrow[\text{SU(3)limes}]{} \text{Stromoktett}$$

$$Q_i = \int d^3x \ j^{(V)}_{0,i} (x) \ , \qquad i = 1 \ldots 8$$

Analog definieren wir SU(3)-Axialladungen.

$$Q_i^5 \equiv : \int d^3x \ \ j^{(A)}_{0,i} (x) \ , \qquad i = 1 \ldots 8$$

Die Gesamtheit der 16 Ladungen würde im Symmetrielimes die Algebra der chiralen SU(3)xSU(3) bilden. Die Tatsache, daß diese Symmetrie in der Natur gebrochen ist, berücksichtigen wir nach Gell-Mann wiederum dadurch, daß wir die Algebra der SU(3)xSU(3) als Kommutatoralgebra der zeitabhängigen Ladungen bei gleichen Zeiten fordern:

$$[Q_i(x_o), Q_k(x_o)] = i\, f_{ikr}\, Q_r(x_o)$$

$$[Q_i(x_o), Q_k^5(x_o)] = i\, f_{ikr}\, Q_r^5(x_o)$$

$$[Q_i^5(x_o), Q_k^5(x_o)] = i\, f_{ikr}\, Q_r(x_o)$$

Was können wir über die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen zwischen den Stromkomponenten selbst sagen? Die Algebra der Ladungen legt uns für die Vertauschungsrelationen zwischen den o-Komponenten der Ströme in einer lokalen Feldtheorie nur den Term proportional der dreidimensionalen Delta-Funktion fest, z.B.

$$[j_{0,i}^{(v)}(x), j_{0,k}^{(v)}(y)]_{x_o=y_o} = i\, f_{ikr}\, j_{0,r}^{(v)}(x)\, \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \ldots.$$

Es könnten jedoch noch beliebige Zusatzterme, die räumliche Ableitungen von Delta-Funktionen enthalten, auftreten. Eine analoge Aussage gilt für die Vertauschungsrelationen zwischen den o- und den Raumkomponenten der Ströme. Nach der Kovariansforderung.

$$[Q_i, j_{\mu,k}(x)] = i\, f_{ikr}\, j_{\mu,r}(x)$$

im Fall erhaltener Ladungen, die wir als gleichzeitige Vertauschungsrelation nach Gell-Mann für den Fall nichterhaltener Ladungen verallgemeinern, ist wiederum nur der Term proportional einer dreidimensionalen Delta-Funktion für den gleichzeitigen Kommutator der o- und der Raum-Komponenten der Ströme festgelegt.

Gell-Mann postulierte nun, daß in den lokalen Vertauschungsrelationen zwischen den Stromkomponenten keine Gradiententerme auftauchen. Da andererseits allein aus Lorentzinvarianz und Positivität der Metrik im Hilbertraum das Auftreten solcher Gradiententerme im Vakuumerwartungswert von gleichzeitigen Kommutatoren folgt, muß vor Anwendung des Gell-Mann'schen Rezepts der Vakuumerwartungswert der Kommutatoren subtrahiert werden. Damit nehmen die Gell-Mann'schen Postulate folgende Form an:

$$\left[j_{0,i}^{(v)}(x),\ j_{\mu,k}^{(v)}(y)\right]^{tr.}_{x_o=y_o} = i\ f_{ikr}\ j_{\mu,r}^{(v)}(x)\ \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\left[j_{0,i}^{(v)}(x),\ j_{\mu,k}^{(A)}(y)\right]^{tr.}_{x_o=y_o} = i\ f_{ikr}\ j_{\mu,r}^{(A)}(x)\ \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\left[j_{0,i}^{(A)}(x),\ j_{\mu,k}^{(v)}(y)\right]^{tr.}_{x_o=y_o} = i\ f_{ikr}\ j_{\mu,r}^{(A)}(x)\ \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\left[j_{0,i}^{(A)}(x),\ j_{\mu,k}^{(A)}(y)\right]^{tr.}_{x_o=y_o} = i\ f_{ikr}\ j_{\mu,r}^{(v)}(x)\ \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

mit $\left[A,B\right]^{tr.} \equiv :\left[A,B\right] - <0\mid\left[A,B\right]\mid 0>$

Gibt es feldtheoretische Modelle, in denen die so postulierte SU(3)xSU(3) Algebra der Ströme gilt? Sie ist richtig im Fall von Strömen aufgebaut aus freien, d.h. nichtwechselwirkenden Quarkfeldern

$$j_{\mu,i}^{(v)}(x) = :\bar{\psi}(x)\ \gamma_\mu\ \lambda_i\ \psi(x):$$

$$i = 1\ \dots\ 8$$

$$j_{\mu,i}^{(A)}(x) = :\bar{\psi}(x)\ \gamma_5\ \gamma_\mu\ \lambda_i\ \psi(x):$$

In allen Theorien mit Wechselwirkung, die man bisher in höherer Ordnung der Störungstheorie untersucht hat, fand man Abweichungen von den Gell-Mann'schen Postulaten, jedoch bisher nur in den Kombinationen der

Kommutatoren, die symmetrisch in den inneren Quantenzahlen sind. Derartige Abweichungen sind für die meisten Anwendungen irrelevant.

Im folgenden sollen charakteristische Beispiele für die Anwendung der Stromalgebra diskutiert werden. Wenden wir uns zunächst den Summenregeln zu.

Die Adler-Weisberger Relation

Das einzigste Beispiel, in dem eine aus der Stromalgebra folgende Summenregel ohne Anwendung drastischer Näherungen durch Vergleich mit experimentellem Material ausgewertet wurde, ist die Adler-Weißberger Relation. Diese drückt die Renormierung der Axialvektorkopplungskonstante im Beta-Zerfall des Neutrons, d.h. das Verhältnis

$$\frac{g_A}{g_V} \equiv G_A$$

durch totale Pion-Nukleon Wirkungsquerschnitte aus. Wir erinnern uns, das G_A im Symmetrielimes (SU(2)xSU(2)) den Wert 1 annehmen würde. Der exp. Wert beträgt ~ 1,2.

Wir gehen vom gleichzeitigen Kommutator zwischen den + und - Komponenten der axialen Ladungen aus

$$\left[Q_+^5\ (x_o),\ Q_-^5\ (x_o)\right] = 2\ Q_3$$

Betrachten wir davon das Matrixelement zwischen 1-Protonzuständen gleichen Impulses, so erhalten wir nach einigen Umformungen die Summenregel

$$1 = G_A^2\ (1 - \frac{M^2}{p_o^2}) + \frac{(2\pi)^2}{2p_o} \int dq_o\ \frac{M(q_o,\ \vec{0})_p}{q_o^2}$$

mit $M(q)_p \equiv : \int d^4x\ e^{iqx} \langle p|\ \left[D_+\ (x/2),\ D_-\ (-x/2)\right]|p\rangle \equiv M\left((q + p)^2, q^2\right)$

wobei $D(x) \equiv : \partial^{\mu} j_{\mu}^{(A)}(x)$

In dieser Form ist die Summenregel noch nicht mit dem Experiment vergleichbar, da $M(s,q^2)$ welches proportional zu $\mathrm{Im}\, T_{\pi^- p}(s,q^2)$ ist, auch über die Pionmasse $\sqrt{q^2}$ integriert wird. Wir beachten, daß die r.h.s. obiger Summenregel scheinbar von p_o abhängt. Man kann, unter relativ schwachen mathematischen Voraussetzungen zeigen, daß dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Wir können also die r.h.s. z.B. für $p_o \to \infty$ auswerten. Wir wollen annehmen, daß der Limes $p_o \to \infty$ mit dem Integral über q_o, welches sich bis ins Unendliche erstreckt, vertauschbar ist. Das ist eine nicht triviale, von der Stromalgebra völlig unabhängige Annahme! Sie ist äqivalent der Annahme, daß das zu M gehörige retardierte Kommutator-Matrixelement für festes $q^2 = 0$ einer unsubtrahierten Dispersionsrelation in s genügt. Wir wissen durch Vergleich mit experimentellen Daten, daß diese Annahme für $q^2=\mu^2$ d.h. physikalische Pionen richtig ist.

Damit erhalten wir

$$1 = G_A^2 + (2\pi)^2 \int ds \, \frac{M(s,0)}{(s - M^2)^2}$$

Benutzen wir nun explizit die Tatsache, daß die Divergenz des Axialvektorstromes ein mögliches interpolierendes Feld für das Pion ist

$$D_{\pm}(x) = c \, \phi_{\pi^{\pm}}(x) \;, \qquad \frac{c}{\mu^2} = \frac{\sqrt{2}\, M\, G_A}{g_{\pi NN}\, K_{\pi NN}(0)}$$

dann erhalten wir die Adler-Weisberger Relation in ihrer üblichen Form:

$$1 = G_A^2 + \frac{1}{\pi} \frac{c^2}{\mu^4} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds \, \frac{\sigma_{\pi^- p}^{tot}(s,0) - \sigma_{\pi^+ p}^{tot}(s,0)}{s - M^2}$$

Bevor wir experimentelle Daten einsetzen, müssen wir die Pion-Nukleon Wirkungsquerschnitte von der Masse o der Pionen zur physikalischen Masse μ analytisch fortsetzen.

Wir nehmen an (PCAC-Annahme) $\sigma_{\pi p}^{tot}(s,0)\ /\ K^2_{\pi NN}(0) \simeq \sigma_{\pi p}^{tot}(s,\mu^2)$

Mit Hilfe experimenteller Wirkungsquerschnitte erhalten wir dann $G_A \simeq 1.16$ im Vergleich zu G_A/exp. = 1.198 ± 0.022. Die Güte der Übereinstimmung ist in Anbetracht der gemachten zusätzlichen Annahmen überraschend. Dieser Erfolg ermutigt uns, äqivalente Annahmen auch bei anderen Anwendungen der Stromalgebra zu machen.

Allgemeine Summenregeln à la Fubini

Fubini hat ein allgemeines Verfahren angegeben, um aus einer gegebenen Stromvertauschungsrelation eine Summenregel abzuleiten:

Wir gehen aus von dem Kommutator

$$\left[j_{0,i}\,(x),\ j_{\mu,k}\,(y) \right]^{tr.}_{x_o = y_o} = i\ f_{ikr}\ j_{\mu,r}\ (x)\ \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

und definieren folgende Tensoren

$$T_{\mu\nu} \equiv : i \int d^4x\ e^{iqx}\ \Theta(x_o)\ \langle p_2 | \left[j_{\mu,i}(x/2),\ j_{\nu,k}(-x/2) \right] | p_1 \rangle$$

$$\text{und} \quad t_{\mu r} \equiv : \int d^4x\ e^{iqx}\ \langle p_2 | \left[j_{\mu,i}(x/2),\ j_{\nu,k}(-x/2) \right] | p_1 \rangle$$

Mit den Abkürzungen

$$p \equiv \frac{p_1 + p_2}{2}\ , \quad \Delta \equiv p_2 - p_1\ , \quad q_i \equiv q \pm \Delta/2\ , \quad s \equiv (q_i + p_i)^2,\ t \equiv \Delta^2$$

lassen sich $T_{\mu\nu}$ und $t_{\mu\nu}$ im Fall spinloser äußerer Teilchen wie folgt in kovarianter Weise zerlegen

$$T_{\mu\nu} = A(s,t,\, q_i^2)\; p_\mu\, p_\nu + \ldots$$

$$t_{\mu\nu} = a(s,t,\, q_i^2)\; p_\mu\, p_\nu + \ldots$$

Als wesentliche Zusatzannahme geht das Postulat unsubtrahierter Dispersionsrelationen in s für alle in der Zerlegung von $T_{\mu\nu}$ auftretenden invarianten Funktionen ein:

$$A(s,t,\, q_i^2\,) = \frac{1}{2\pi} \int ds' \, \frac{a(s',\, t,\, q_i^2)}{s' - s - i\varepsilon} \qquad \text{etc.}$$

Dies führt schließlich zu der Summenregel

$$\frac{1}{2\pi} \int ds' \; a(s',\, t,\, q_i^2) = 2i\, f_{ikr}\; F(t)$$

wobei der Formfaktor $F(t)$ durch

$$\langle p_2 \,|\, j_{\mu,r}(0) \,|\, p_1 \rangle = 2p_\mu\; F(t) + \Delta_\mu G(t)$$

definiert ist. Die Adler-Weisberger Relation ist ein Spezialfall dieser Summenregel: man nehme den Kommutator zweier Axialvektorströme und setze dann in der Summenregel $q_i^2 = t = 0$. Alle anderen aus diesem allgemeinen Verfahren abgeleiteten Summenregeln konnten mangels exp. Materials bisher nur in sehr roher Näherung ausgewertet werden, indem im Integral $\int ds'$ die Dominanz von Einteilchenbeiträgen (stabile Teilchen bzw. Resonanzen) angenommen wurde . Die Güte einer solchen Näherung hängt bei gegebener Zahl der

Einteilchenbeiträge sehr von den betrachteten Werten von t und q_i^2 ab. Im Fall beliebiger Werte von t und q_i^2 können die Summenregeln nur durch unendlich viele Einteilchenbeiträge saturiert werden. Dies hängt unmittelbar mit der Tatsache zusammen, daß eine Saturierung eines Kommutators nichttrivialer Ströme $\left[j_{\mu,i}(x),\ j_{\nu,k}(y)\right]$ mit endlich vielen Einteilchen-Zwischenzuständen im Widerspruch zur Lokalität dieser Ströme steht. Zwei Auswege aus dieser Misere wurden vorgeschlagen:

1. Man nehme den Aspekt der unendlich vielen Einteilchen-Beiträge ernst (Gell-Mann)
2. Man ergänze den Beitrag eines diskreten Einteilchen-Zwischenzustandes in lokaler Weise (Schroer, Völkel).

In beiden Fällen wurden bisher nur Teilresultate erzielt, über die zu reden mir die Kürze der zur Verfügung stehenden Zeit verbietet.

Niederenergietheoreme

Die aus der Stromalgebra folgenden Niederenergietheoreme zerfallen in zwei Gruppen.

1. Niederenergietheoreme aus der Algebra der Ladungen.

Als Beispiel betrachten wir eine Aussage über Pion-Nukleon Streulängen:

Bei der Ableitung der Adler-Weisberger Relation mußten wir die wesentliche Zusatzannahme machen, daß der Limes $p_o \to \infty$ mit $\int dq_o$ vertauschbar ist, bzw, für eine bestimmte Amplitude eine unsubtrahierte Dispersionsrelation gilt. Kann man aus der benutzten Vertauschungsrelation eine physikalische Information erhalten ohne diese Zusatzannahme?

Vor der Einsetzung von Zwischenzuständen sah die AW-Relation wie folgt aus (unter den oben erwähnten mathem. Voraussetzungen, die die p_o- Unabhängigkeit der Summenregel zur Folge hatten)

$$1 = (2\pi)^2 \frac{\partial}{\partial s} \; M_R(s,0)_{s=M^2}$$

$$\text{mit} \quad M_R\,(s,q^2) \equiv: 2\pi i \int d^4x \; e^{iqx} \; \Theta(x_o) < p \left| \left[D_+\,(x/2),\ D_-\,(-x/2) \right] \right| p >$$

Dabei ist

$$M_R(s,\ q^2) \sim T_{\pi^- p}\ (s,\ q^2)\ /\ (q^2 - \mu^2)^2$$

Die Pion-Nukleon s-Wellen-Streulängen sind durch die Streuamplitude an der Schwelle definiert

$$a_{\pi^\pm p} \sim T_{\pi^\pm p}\ \left((M + \mu)^2,\ \mu^2\right) = \mathrm{Real}\ T_{\pi^\pm p}\ \left((M + \mu)^2, \mu^2\right)$$

Mit der PCAC-Annahme

$$T_{\pi p}\ (s, \mu^2) \simeq T_{\pi p}\ (s, 0),$$

$s \leftrightarrow u$ -Crossing

$$\mathrm{Real}\ T_{\pi^- p}\ (s, 0) = \mathrm{Real}\ T_{\pi^+ p}\ (-\ s + 2M^2, 0)$$

sowie der Analytizität der Streuamplitude in der Energie s erhalten wir als erstes Glied in einer Taylorentwicklung

$$a_{\pi^- p} - a_{\pi^+ p} \sim \frac{\partial}{\partial s}\ \mathrm{Real}\ T_{\pi^- p}(s, 0) \Big|_{s=M^2}$$

und unter Benutzung der obigen Form der AW-Relation schließlich

$$a_{\pi^- p} - a_{\pi^+ p} \simeq \frac{\mu^4}{2\pi c^2}\ \frac{M\mu}{(M+\mu)} \simeq 0.23f \qquad \mathrm{exp.:}\ (0.252 \pm 0.007)f$$

2. Niederenergietheoreme aus dem Kommutator zwischen einer Ladung und einem Strom

Ein Beispiel ist die Callan-Treiman Beziehung, d.i. eine Relation zwischen den Matrixelementen für die Zerfälle $K^+ \to \pi_o + 1^+ + \nu$ und $K^+ \to 1^+ + \nu$:

Der hadronische Teil des Matrixelementes für den Zerfall $K^+ \to \pi_o + 1^+ + \nu$ hat folgende allgemeine Form

$$<\pi_o(q)|\ j^{(v)}_{\mu,K^-}\ |K^+\ (p)> = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[F^+(t,\mu^2)(p+q)_\mu + F^-(t,\mu^2)(p-q)_\mu\right]$$

während der hadronische Teil des Matrixelementes für den Zerfall $K^+ \to 1^+ + \nu$ die einfache Gestalt

$$<0|j^{(A)}_{\mu,K^-}\ |K^+(p)> = i\ f_K\ p_\mu$$

hat.

Mit Hilfe des Kommutators

$$\left[Q^5_3\ (x_o),\ j^{(v)}_{\mu,K^-}\ (x)\right] = -\frac{1}{2}\ j^{(A)}_{\mu,K^-}\ (x)$$

erhalten wir folgende Relation

$$\frac{f_K}{f_\pi} = F^+(m^2_K,0) + F^-(m^2_K,0)$$

bzw. mit PCAC für die r.h.s. der letzten Gleichung

$$F^+(m^2_K,\mu^2) + F^-(m^2_K,\mu^2)$$

Die Callan-Treiman Relation ist mit dem bisherigen experimentellen Material für die leptonischen Zerfälle der K-Mesonen verträglich. Für eine quantitative Überprüfung sind detailliertere experimentelle Daten erforderlich.

Ein anderes Beispiel ist die $|\Delta\vec{I}| = \frac{1}{2}$ Regel für die nichtleptonischen Zerfälle der Strange Particles:

Im Rahmen des üblichen Strom-Strom Ansatzes für die Zerfallswechselwirkung der Strange Particles in nichtleptonische Endzustände

$$H^{NL}_{weak} = \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left(J_\mu J^{\mu +} + J^+_\mu J^\mu\right)$$

mit

$$J_\mu \equiv : \cos\theta (j^{(v)}_{\mu,1+i2} + j^{(A)}_{\mu,1+i2}) + \sin\theta (j^{(v)}_{\mu,4+i5} + j^{(A)}_{\mu,4+i5})$$

ist die $|\Delta\vec{I}| = \frac{1}{2}$ Regel nicht als Auswahlregel enthalten, denn in den auftretenden Produkten von Isospin 1 Strömen $(j^{(A,v)}_{\mu,1+i2})$ sowie Isospin 1/2 Strömen $(j^{(A,v)}_{\mu,4+i5})$ sind wegen des Fehlens neutraler Stromkomponenten notwendigerweise auch Isospin 3/2 Anteile enthalten. Die experimentell gefundene Kleinheit des 3/2-Anteils muß also dynamische Ursachen haben. Die Stromalgebra liefert die $|\Delta\vec{I}| = 1/2$ Regel als Niederenergietheorem:

Auf Grund unseres Ansatzes für H_{weak} sowie der oben postulierten Vertauschungsrelationen findet man

$$\left[\vec{Q}, H^{NL}_{weak}(x)\right] = \left[\vec{Q}^5(x_o), H^{NL}_{weak}(x)\right]$$

Damit gilt

Damit gilt

$$<\pi_i\ \pi_j \mid H^{NL}_{weak} \mid > \underset{m_\pi \to 0}{\sim} <0 \mid \left[Q^5_i \left[Q^5_j , H^{NL}_{weak} \right] \right] \mid K >$$

$$= <0 \mid \left[Q_i \left[Q_j , H^{NL}_{weak} \right] \right] \mid K > \sim <0 \mid H^{NL'}_{weak} \mid K >$$

d.h. $<\pi_i\ \pi_j \mid H^{NL(3/2)}_{weak} \mid K > \xrightarrow[m_\pi \to 0]{} 0$

da das K-Meson I-Spin 1/2 besitzt.

Zusammenfassend stellen wir fest:

Die Gell-Mann'sche Stromalgebra hat sich als Prinzip zur Formulierung gebrochener Symmetrien bewährt.

Fortschritte in der nahen Zukunft erhoffen wir bezüglich dreier Probleme:

1. Saturierungsproblem
2. Stromalgebra im Verhältnis zu renormierbaren Feldtheorien
3. Methode der effektiven Wechselwirkung im Rahmen einer chiralen Dynamik à la Schwinger, d.i. eine Methode um die physikalischen Ergebnisse der Stromalgebra zu reproduzieren ohne dieselbe zu benutzen.

Literatur:

1. Dipolsummenregel:
J. M. Blatt und V. F. Weisskopf: "Theoretical Nuclear Physics", John Wiley & Sons, N.Y. 1952, Seite 640.

2. SU(3) - Symmetrie:
M. Gell-Mann und Y. Ne'eman: "The Eightfold Way", W.A. Bejamin, New York - Amsterdam, 1964.

3. SU(3)xSU(3) Algebra der Ströme:
M. Gell-Mann: Phys. Rev. 125, 1067 (1962)
M. Gell-Mann: Physics 1, 63 (1964).

4. Stromalgebra in der Störungstheorie - vgl. u.a.:
K. Johnson und F. E. Low: Progr. Theor. Phys. Suppl. 37, 38, 74 (1966)
B. Schroer und P. Stichel: Commun. math. Phys. 8, 327 (1968).

5. Adler-Weisberger Relation:
A. Adler: Phys. Rev. Lett. 14, 1051 (1965)
W. I. Weisberger: Phys. Rev. Lett. 14, 1047 (1965)
B. Schroer und P. Stichel: Commun. math. Physics 3, 258 (1966).

6. Summenregeln à la Fubini:
S. Fubini: Nuovo Cimento 43, 475 (1966).

7. Saturierung der Stromalgebra durch Einteilchenbeiträge:
M. Gell-Mann, D. Horn und J. Weyers in: Proceedings of the Heidelberg International Conference on Elementary Particles, North-Holland Publ. Company, 1968, Seite 479.
U. Völkel, B. Schroer und A. H. Völkel:
University of Pittsburgh preprint, Februar 1968.

8. Stromalgebra und πN-Streulängen:
S. Weinberg: Phys. Rev. Lett. 17, 616 (1966).

9. Callan-Treiman Relation:
C. G. Callan und S. B. Treiman: Phys. Rev. Lett. 16, 153 (1966).

10. $|\Delta I| = 1/2$ - Regel als Niederenergietheorem:
H. Sugawara: Phys. Rev. Lett. 15, 870 (1965) E 997
M. Suzuki : Phys. Rev. Lett. 15, 986 (1965).

11. Ein ausführliches Verzeichnis der Originalarbeiten auf dem Gebiet der Stromalgebra findet man in dem kürzlich erschienenen Buch von B. Renner: Current Algebras and their Applications, Pergamon Press, 1968.