DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON DESY

DESY 74/41
September 1974

Charakterisierung von Teilchen durch lokale Observable in der relativistischen Quantentheorie

von

V. Enss

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

Charakterisierung von Teilchen durch lokale Observable in der relativistischen Quantentheorie

von

Volker Enss

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

Adresse ab Oktober 1974
Fakultät für Physik der Universität
48 Bielefeld, Herforder Str.28

Abstract

We introduce the notion of singly localized states and use it to characterize the one particle states as those states which are singly localized at all times. For theories which satisfy the Haag-Swieca compactness criterion, we show that a state has a discrete mass spectrum if and only if it is a "geometrical one particle state".

Using a mathematical description of coincidence arrangements of counters we show that in asymptotically complete theories the asymptotic particle number is the asymptotic number of localisation centres.

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung

In der relativistischen Quantentheorie wird ein Teilchen gewöhnlich als ein Zustand definiert, der zu einer irreduziblen Darstellung der Poincaré-Gruppe mit diskretem Gewicht gehört. Im Experiment erkennt man ein Teilchen jedoch an seinen Lokalisierungseigenschaften, z. B. an der Spur, die es in einem Nachweisgerät hinterläßt. Wir wollen überprüfen, ob die Teilchen auch äquivalent charakterisiert werden können durch Eigenschaften, die wir unserer Anschauung vom Expriment entnehmen.

Die herkömmliche Teilchendefinition hat neben der Unanschaulichkeit weitere Nachteile: In Theorien mit langreichweitigen Kräften wie der Quantenelektrodynamik ist es noch ungeklärt, ob ein geladenes Teilchen wie das Elektron eine diskrete Masse hat, oder ob es ein echtes "Infrateilchen" mit kontinuierlicher Massenverteilung ist [6]. Im letzteren Fall verletzte es die herkömmliche Teilchendefinition, obwohl es im Experiment als Teilchen erscheint.

In Theorien mit kurzreichweitigen Kräften können wir mit der herkömmlichen Teilchendefinition Zustände konstruieren, die sich als ein- (bzw. aus-)laufende Teilchenkonfigurationen interpretieren lassen (Haag-Ruelle-Streutheorie [5]). Doch ist hier noch ungeklärt, welche physikalisch plausiblen Annahmen sicherstellen, daß jeder Zustand zu großen Zeiten als Teilchenkonfiguration interpretiert werden kann (asymptotische Vollständigkeit).

Da mathematisch und physikalisch die grundlegenden Größen der Theorie lokale Objekte sind, wollen wir als Beitrag zu den oben genannten Problemen Teilchenzustände eindeutig durch ihre lokalen Eigenschaften charakterisieren. Wir führen dies in Theorien mit kurzreichweitigen Kräften aus.

Als "Teilchen" betrachten wir ein physikalisches System, das ohne Einwirkung von außen beliebig lange zusammenbleibt, das nicht in Teilsysteme zerfällt, die sich voneinander entfernen und unabhängig werden. Ein Teilchen kann also ein stabiles Elementarteilchen oder ein stabil gebundenes System wie ein Wasserstoffatom im Grundzustand sein. Obwohl die möglicherweise verschiedenen Komponenten eines "Teilchens" nah beieinander bleiben, unterliegt die Schwerpunktsbewegung dem quantenphysikalischen Phänomen des "Zerlaufens", die Größe des Gebietes, in dem das Teilchen angetroffen werden kann, wächst mit der Zeit.

Zur Unterscheidung der Einteilchenzustände von den Mehrteilchenzuständen ist daher der Begriff des "zur Zeit t in einem Gebiet lokalisierten" Zustandes ungeeignet. Die für unsere Fragestellung angemessene Verallgemeinerung ist der Begriff des "zur Zeit t einfach lokalisierten Zustandes mit dem Korrelationsradius r". Einen solchen Zustand kann man sich konstruieren durch lineare Superposition von Zustandsvektoren, die jeweils in verschiedenen Gebieten vom Radius r lokalisierte Zustände darstellen. Alternativ kann man die einfach lokalisierten Zustände dadurch charakterisieren, daß in ihnen die Ansprechwahrscheinlichkeit eines Koinzidenzarrangements von mindestens zwei Zählern sehr rasch abfällt, sobald der Detektorabstand größer als r ist.

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik eines Systems von n Elementarteilchen haben die zur Zeit t einfach lokalisierten Zustände eine Wellenfunktion $f(t \mid \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, die bei t verschwindet, wenn eine der Relativkoordinaten größer als $2r$ ist.

Entsprechend können wir einen N-fach lokalisierten Zustand etwa dadurch kennzeichnen, daß ein Koinzidenzarrangement mit N räumlich getrennten Zählern auf ihn anspricht, nicht aber eines mit $N+1$ Zählern.

Ein Einteilchenzustand ist nun dadurch ausgezeichnet, daß er grob gesprochen zu jeder Zeit einfach lokalisiert ist. Wir präzisieren das als

<u>geometrische Teilchendefinition:</u>

Ψ ist ein Einteilchenzustand, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein r unabhängig von t gibt, so daß $\| \Psi - e^{iHt} \Phi_t \| < \varepsilon$ für geeignete $e^{iHt} \Phi_t$, die zur Zeit t einfach lokalisiert sind mit dem Korrelationsradius r.

Analog definieren wir als

<u>geometrische asymptotische Teilchenzahl:</u>

Ein Zustand ist ein aus- (ein-)laufender N-Teilchenzustand, wenn er für $t \to \infty (-\infty)$ N-fach lokalisiert ist.

Die Äquivalenz der geometrischen mit der herkömmlichen Teilchendefinition wird in Abschnitt V untersucht. Eine wesentliche Rolle spielt dabei das sogenannte "Kompaktheitskriterium", das von Haag und Swieca in [3] postuliert wurde. Es besagt, daß es nur endlich viele orthogonale Zustände gibt, die im wesentlichen in einem festen Gebiet lokalisiert sind und zugleich eine feste Energieschranke haben. In einer Theorie, die diesem Kriterium genügt, zeigen wir die Äquivalenz der beiden Teilchendefinitionen. Das typische Verhalten der Einteilchenzustände in Raum und Zeit bedingt also die diskrete Masse und umgekehrt. Der Beweis des Äquivalenzsatzes ist weitgehend unabhängig von den Details bei der Konstruktion der einfach lokalisierten Zustände, eine Verallgemeinerung auf masselose Theorien ist vielleicht möglich.

Die mathematische Untersuchung der Koinzidenzoperatoren und die Äquivalenz der asymptotischen Teilchenzahl mit der asymptotischen Lokalisierungszahl wird in den Abschnitten VI - IX innerhalb des Rahmens einer asymptotisch vollständigen Quantenfeldtheorie diskutiert.

Als Rahmen unserer Untersuchungen dient uns die relativistische lokale Quantentheorie in der Formulierung nach Haag-Araki [1]. Zur Notation: $\mathcal{O}$ bezeichne ein offenes Gebiet des Minkowski-Raumes, $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ die v. Neumann-Algebra, die von den Observablen des Gebietes erzeugt wird. $\mathcal{U}(x^\mu) = \exp\{i P_\mu x^\mu\}$ ist eine unitäre, stark stetige Darstellung der Translationen auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Das Spektrum ihrer Erzeugenden P^μ ist enthalten in der Menge:

$$\{p^\mu = 0\} \cup \{p^\mu \mid p^0 > 0,\ p^\mu p_\mu \geq \kappa^2 > 0\}.$$

Das Vakuum Ω ist eindeutig.

IIa In einem Gebiet lokalisierte Zustände

Haag und Swieca haben Zustände beschrieben, die zu einer Zeit in einem festen Gebiet lokalisiert sind [3]. Wir geben nur die Definition und die wichtigsten Eigenschaften dieser Zustände an, die Details findet der Leser in der Originalarbeit.

Wir beschränken uns auf den Vakuumsektor der Theorie, die Verallgemeinerung auf eine Theorie mit Superauswahlregeln ist leicht möglich, wenn man statt der Observablenalgebren die Feldalgebren benutzt.

Sei $\mathcal{O}$ ein endliches Raum-Zeit-Gebiet. Wir betrachten lokale Operatoren Q mit folgenden Eigenschaften:

$$Q \in \mathcal{R}(\mathcal{O}),\ (\Omega, Q\Omega) = 0,\ \|Q\| \leq e^{\kappa r}\, \|Q\Omega\| \qquad (2.1)$$

(κ ist die untere Grenze des Massenspektrums), und erzeugen damit die Zustandsmenge $\mathcal{M}_r$ der zur Zeit 0 in einem Gebiet vom Radius r um den Ursprung lokalisierten Zustände:

$$\mathcal{M}_r = \{ Q\,\Omega \mid Q \text{ erfüllt (2.1)} \}, \tag{2.2}$$

$\mathcal{M}_r$ ist keine lineare Teilmenge des Hilbertraumes, jedoch gilt:

$$\Psi \in \mathcal{M}_r \Rightarrow \lambda \Psi \in \mathcal{M}_r\,;\ \mathcal{M}_r \subset \mathcal{M}_{r'} \text{ wenn } r < r',$$

und zu zwei Vektoren $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}_r$ gibt es ein r' mit

$$\lambda \Phi + \mu \Psi \in \mathcal{M}_{r'} \quad \forall \lambda, \mu . \tag{2.3}$$

Die Zustände aus allen $\mathcal{M}_r$ schöpfen den Zustandsraum (bis auf das Vakuum) aus:

$$\Omega \oplus \bigcup_r \mathcal{M}_r \quad \text{ist dicht in } \mathcal{H}, \tag{2.4}$$

wegen des Reeh-Schlieder-Theorems [z. B. 1, Teil I, Satz (10.2)], denn $\Omega \oplus \bigcup_r \mathcal{M}_r = \{ \mathcal{R}(0)\,\Omega \}$.

Analog bilden wir einen "in n Gebieten zur Zeit 0 lokalisierten" Zustand aus dem Vakuum mit n räumlich weit getrennten Operatoren $Q_i(\vec{x}_i)$, wobei die Q_i alle (2.1) erfüllen:

$$\prod_{i=1}^{n} Q_i(\vec{x}_i)\,\Omega \quad \text{mit } |\vec{x}_i - \vec{x}_j| \gg r .$$

Die Lokalisierung der Zustände in $\mathcal{M}_r$ erkennt man an folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt Zahlen χ_0 und $\alpha > 0$, so daß für alle $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}_r$ gilt:

$$|(\Phi, \mathcal{U}(\vec{x})\,\Psi)| \leq \|\Phi\|\,\|\Psi\|\,\chi_0 \exp\{-\alpha(|\vec{x}| - r)\} . \tag{2.5}$$

2. Jeder Zustand aus $\mathcal{M}_r$ ist nahezu orthogonal zu jedem in mehreren Gebieten lokalisierten Zustand.
3. Sei C ein Operator, der einen "Zähler" beschreibt (fastlokaler Vakuumvernichter, s. Kap. VI), dann gibt es zu C für jedes r eine Funktion $\varphi_r(x)$, die schneller als jede inverse Potenz von x abfällt, so daß

$$(\Psi, C(\vec{x})\,\Psi) \leq \|\Psi\|^2\, \varphi_r(|\vec{x}|) \quad \forall \Psi \in \mathcal{M}_r . \tag{2.6}$$

Zum Beweis von (2.6) benutzt man die lokalen Approximationen von $C(\vec{x})$, die raumartig zu dem erzeugenden Operator von Ψ liegen.

Die Zustände, die mit lokalen isometrischen Operatoren aus dem Vakuum erzeugt werden, sind "strikt lokalisiert", alle anderen Zustände haben i. a. "Schwänze", auch in großer Entfernung sind sie nicht exakt vakuumartig, doch fällt die Amplitude der Abweichung vom Vakuum mit der Entfernung schnell ab. Es ist nicht möglich, diesen Zuständen eindeutig ein Lokalisierungsgebiet zuzuordnen. Deshalb ist r nicht exakt als Radius des Lokalisierungsgebietes aufzufassen, sondern als ein nicht geeichter Parameter für die räumliche Ausdehnung des Zustandes.

IIb Kompaktheitskriterium

Mit Hilfe der Mengen $\mathcal{M}_r$ haben Haag und Swieca ein Kompaktheitskriterium formuliert, das es ermöglichen soll, Theorien mit vollständiger Teilcheninterpretation durch lokale Eigenschaften zu charakterisieren [3].

Eine abgeschlossene beschränkte Menge $\mathscr{k}$ im Hilbertraum ist kompakt (in der starken Topologie), wenn sie näherungsweise endlichdimensional ist, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen endlichdimensionalen Projektor F, so daß

$$\| \Psi - F\Psi \| < \varepsilon \qquad \forall\, \Psi \in \mathscr{k}. \tag{2.7}$$

Die Zustände eines Systems, die in einem Gebiet lokalisiert sind und endliche Energie haben, nehmen ein endliches Volumen Γ des Phasenraumes ein. Dann hat das quantenmechanische System endlich viele $(\Gamma/\hbar^3)$ linear unabhängige Zustände. Amrein und Georgescu [8] haben in der nichtrelativistischen Streutheorie bewiesen, daß für alle realistischen Potentiale tatsächlich gilt, daß die in einem Gebiet lokalisierten Zustände endlicher Energie eine kompakte Menge bilden. Überträgt man dies auf die relativistische Quantentheorie, so erhält man das Kompaktheitskriterium:

$$\mathscr{k}_{r,E} = \overline{\left\{ P_E \Psi \;\middle|\; \Psi \in \mathcal{M}_r ,\ \|\Psi\| \leq 1 \right\}} \text{ ist kompakt } \forall\, r, E. \tag{2.8}$$

$\mathcal{M}_r$ ist die Menge der in einem Gebiet vom Radius r lokalisierten Zustände (2.2), $\overline{\{\,\}}$ ist der Abschluß von $\{\,\}$. Die Postulate über die Größe des Kompaktums, die in [3] auch angegeben sind, benötigen wir nicht.

Das freie massive Feld erfüllt dieses Kriterium, das bedeutet, daß es nur im wesentlichen endlich viele Zustände gibt für ein System freier Teilchen, die sich alle in einem endlichen Gebiet befinden und endliche Energie haben.

Das verallgemeinerte freie Feld, das alle üblichen Axiome erfüllt, jedoch keine vollständige Teilcheninterpretation hat [7], verletzt das Kriterium.

In einer wechselwirkenden, asymptotisch vollständigen Theorie mit kurzreichweitigen Kräften zerfallen die zur Zeit 0 in einem Gebiet lokalisierten Zustände $(\mathcal{M}_r)$ nach endlicher Zeit T beliebig gut in nahezu frei bewegte Teilchen. Zur Zeit T sind die Zustände in einem größeren, doch auch endlichen Gebiet lokalisiert. Da sie näherungsweise freie Teilchen enthalten, erwarten wir, daß es bei zusätzlicher Beschränkung der Energie nur endlich viele solcher Zustände gibt. Es ist daher plausibel anzunehmen, daß eine Theorie mit vollständiger Teilcheninterpretation dem Kriterium genügt, wenngleich noch kein strenger Beweis dafür bekannt ist. Anders ausgedrückt: die Zahl der Freiheitsgrade in der wechselwirkenden und der entsprechenden freien Theorie ist gleich. Da wir nur an Theorien mit Teilcheninterpretation interessiert sind, wollen wir im weiteren annehmen, daß (2.8) erfüllt ist.

III Abseparation der Gesamtimpuls-Verteilung

Wir zerlegen den Zustandsraum in ein direktes Integral bzgl. des Impulsoperators, dies ist das relativistische Analogon zur Abseparation der Schwerpunktskoordinate (bzw. des Gesamtimpulses) in der Quantenmechanik. Einerseits ist dies zweckmäßig zur Beschreibung der translationsinvarianten Mengen der einfach lokalisierten Zustände, andererseits läßt sich in dieser Darstellung leicht der Unterschied in der Zeitevolution von Zuständen mit diskreter oder kontinuierlicher Massenverteilung behandeln.

Für Vektoren Φ, Φ' aus der (bis auf das Vakuum) dichten Menge (Reeh-Schlieder-Theorem):

$$\{ Q\,\Omega \mid Q \in \mathfrak{R}(\mathcal{O}),\ (\Omega, Q\,\Omega) = 0 \}$$

bilden wir die Paare $(\Phi, \vec{p})$, die für jeden festen Impuls $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\lambda\,(\Phi, \vec{p}) + \mu\,(\Phi', \vec{p}) = (\lambda\,\Phi + \mu\,\Phi', \vec{p})$$

einen Vektorraum bilden.

$$\{ (\Phi, \vec{p}),\ (\Phi', \vec{p}) \} = \int d^3x\ e^{i\vec{p}\vec{x}}\ (\Phi, U(\vec{x})\,\Phi') \tag{3.1}$$

ist ein positiv semidefinites Skalarprodukt, das eine Halbnorm auf diesem Vektorraum induziert. Ein mathematisches Standardverfahren (z. B. in [9, Kap. 3.4] beschrieben) liefert für jedes $\vec{p}$ einen

Hilbertraum $h_{\vec{p}}$, mit $\Phi(\vec{p}) \in h_{\vec{p}}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von $(\Phi, \vec{p})$.

Der Impulsoperator ist auf $h_{\vec{p}}$ ein Vielfaches der Einheit

$$(\mathcal{U}(\vec{x})\, \Phi)(\vec{p}) = e^{-i\vec{p}\vec{x}}\, \Phi(\vec{p}). \tag{3.2}$$

Wir erhalten also eine Zerlegung des Zustandsraumes, bei der jedem Zustand Φ, für den $\int d^3x\, |(\Phi, \mathcal{U}(\vec{x})\, \Phi)|$ endlich ist, zu jedem Impuls $\vec{p}$ ein eindeutiges $\Phi(\vec{p}) \in h_{\vec{p}}$ zugeordnet ist:

$$\mathcal{H} = \{\Omega\} \oplus \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} d^3p\, h_{\vec{p}} , \tag{3.3}$$

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 = |(\Psi, \Omega)|^2 + \int d^3p\, \|\Psi(\vec{p})\|_{h_{\vec{p}}}^2 . \tag{3.4}$$

Ein beschränkter translationsinvarianter Operator $\mathbf{A}$ induziert auf $h_{\vec{p}}$ einen beschränkten Operator $A[\vec{p}]$. Die Zeitevolution induziert auf $h_{\vec{p}}$ selbstadjungierte Operatoren $H[\vec{p}]$ und $M[\vec{p}]$, den "reduzierten" Hamilton- bzw. Masseoperator, mit

$$H[\vec{p}] = (\vec{p}^{\,2}\, \mathbb{1} + M[\vec{p}]^2)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Zur Charakterisierung der einfach lokalisierten Zustände benötigen wir später das folgende Lemma:

Lemma 3.1.: In einer Theorie, die das Kompaktheitskriterium (2.8) erfüllt, gilt:

$$\left\{ (P_M \Psi)(\vec{q}) \,\middle|\, \Psi \in \mathcal{M}_r ,\ \|\Psi\| \leq c \right\}$$

ist kompakt in $h_{\vec{q}}$ für alle M, $\vec{q}$, r und c.

P_M ist der Projektor auf beschränkte Masse M.

Beweis: Zu $\Psi \in \mathcal{M}_r, \|\Psi\| \leq c$ gibt es ein $Q \in \mathcal{R}(\mathcal{O}), \|Q\| \leq c \cdot e^{\kappa r}$, mit $\Psi = Q\Omega$. Dann gibt es einen Doppelkegel $\mathcal{O}_1$, so daß $[Q, Q(x)] = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}_1'$. Daher können wir auf $(\Omega, Q^* Q(x)\Omega) - (\Omega, Q(x) Q^* \Omega)$ die Methode der Jost-Lehmann-Dyson-Darstellung anwenden und mit Hilfe der Eigenschaften von Lösungen der fünfdimensionalen Wellengleichung beweisen, daß [11]

$$(\Omega, Q^* P_M Q(x)\, \Omega) - (\Omega, Q(x)\, P_M\, Q^* \Omega) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{O}_1' .$$

Nun kann man die Beweismethode von [3, Gl. (3)-(15)] anwenden, und man erhält, daß

$$(P_M \Psi, \mathcal{U}(\vec{x})\, P_M \Psi) \leq c^2\, e^{2\kappa r}\, \varphi(|\vec{x}|) \qquad \forall M .$$

$\varphi(|\vec{x}|)$ fällt schneller als jede inverse Potenz von $|\vec{x}|$ ab. Daher ist:

$$\left| \partial_{\vec p} \, \| (P_M \Psi)(\vec p) \|^2 \right| \leq \int d^3x \, |\vec x| \, c^2 e^{2\kappa\tau} \varphi(|\vec x|) = f(c,\tau).$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{f(c,\tau)}$ und sei P_δ der Projektor auf die Zustände, deren Träger im Impulsraum in einer δ-Umgebung von $\vec q$ liegt. Dann ist für die Zustände Ψ mit $(P_M\Psi)(\vec q) \geqslant \varepsilon$ die lineare Abbildung $\iota_{\vec q} : \mathcal{H} \to h_{\vec q}$, $\iota_{\vec q}(P_\delta P_M \Psi) = (P_\delta P_M \Psi)(\vec q) = (P_M \Psi)(\vec q)$ gleichmäßig beschränkt, denn $\| (P_M\Psi)(\vec q) \| \leq \sqrt{3/\pi\delta^3} \, \| P_\delta P_M \Psi \|$.
Die Menge $\overline{\{ P_\delta P_M \Psi \mid \Psi \in \mathcal{M}_\tau, \|\Psi\| \leq c, \|(P_M\Psi)(\vec q)\| \geqslant \varepsilon \}}$
ist kompakt als abgeschlossene Teilmenge der nach (2.8) kompakten Menge $\overline{\{P_\delta P_M \Psi\}}$. Da $\iota_{\vec q}$ auf dieser Menge stetig ist, ist auch die Menge $\overline{\{(P_M\Psi)(\vec q) \mid \Psi \in \mathcal{M}_\tau, \|\Psi\| \leq c, \|(P_M\Psi)(\vec q)\| \geqslant \varepsilon\}}$
kompakt für jedes ε, und daher ist $\overline{\{ (P_M\Psi)(\vec q) \mid \Psi \in \mathcal{M}_\tau, \|\Psi\| \leq c \}}$
kompakt für jedes $\vec q, \tau, c, M$.

∎

IV Einfach lokalisierte Zustände

Da in der relativistischen Quantentheorie die gut lokalisierten Zustände auch in großer Entfernung vom Lokalisierungszentrum nicht exakt vakuumartig sind, gibt es verschiedene, jedoch physikalisch gleichwertige Möglichkeiten, ihnen einen Radius zuzuordnen. Daher ist auch das Mengensystem $\mathcal{E}_r$ von Zuständen, die "zur Zeit 0 einfach lokalisiert sind mit dem Korrelationsradius r" nicht eindeutig festgelegt. Eine detaillierte Kenntnis der Mengen $\mathcal{E}_r$ ist für den Beweis des Äquivalenzsatzes nicht erforderlich, deshalb beschränken wir uns im weiteren darauf, einige ihrer wichtigen Eigenschaften anzugeben.

Wir wählen eine Folge $\{K_d\}$ von translationsinvarianten Operatoren, die in den Zuständen die raumartigen Korrelationen messen, welche sich mindestens über den Abstand d erstrecken. Ein Beispiel dafür sind die Koinzidenzoperatoren mit dem Detektor - Mindestabstand d, die wir in Kap. VI behandeln.

Da die Korrelationen für die gut lokalisierten Zustände rasch abfallen (2.5), gilt bei d>r:

$$\|K_d \Psi\| \leq \chi(d-r)\,\|\Psi\| \qquad \forall\, \Psi \in \mathcal{M}_r, \tag{4.1}$$

$$\chi(d) = \chi_0\, e^{-\alpha d}, \quad \alpha > 0. \tag{4.2}$$

Ein Zustand, der bei allen Korrelationsmessungen mit K_d denselben Ungleichungen (4.1) genügt, wie die Zustände aus $\mathcal{M}_r$, ist sicher einfach lokalisiert mit dem Korrelationsradius r. Das führt uns auf die folgenden beiden Eigenschaften, die angeben, welche Zustände mindestens zu $\mathcal{E}_r$ gehören.

Seien $V(\vec{P})$ unitäre Funktionen des Impulsoperators. Diese kommutieren mit den translationsinvarianten Operatoren K_d, es gilt:

E1: $V(\vec{P})\,\mathcal{M}_r \subset \mathcal{E}_r \qquad \forall\, V(\vec{P})$,

E2: Seien $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{M}_r$ und $\inf\limits_{V(\vec{P})} \|\Psi_1 + V(\vec{P})\Psi_2\| = a > 0$,

dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein r', so daß

$$V_1(\vec{P})\Psi_1 + V_2(\vec{P})\Psi_2 \in \mathcal{E}_{r'} + \mathcal{U}_\varepsilon \qquad \forall\, V_i(\vec{P}),$$

$\mathcal{U}_\varepsilon$ ist die Kugel mit Radius ε im Zustandsraum.

Die Eigenschaft E2 beschreibt eine eingeschränkte Linearität der Mengen $\mathcal{E}_r$ analog zur Eigenschaft (2.3) für $\mathcal{M}_r$. Zu ihrer Begründung schätzen wir ab:

$$\sup_{V_i(\vec{p})} \| K_\alpha (V_1(\vec{p}) \Psi_1 + V_2(\vec{p}) \Psi_2 \| \leq \| K_\alpha \Psi_1 \| + \| K_\alpha \Psi_2 \| \leq$$
$$\leq \chi(d-r) \left(\|\Psi_1\| + \|\Psi_2\| \right) = \frac{1}{a} \left(\|\Psi_1\| + \|\Psi_2\| \right) \chi(d-r) \inf_{V_i(\vec{p})} \| V_1(\vec{p}) \Psi_1 + V_2(\vec{p}) \Psi_2 \|$$
$$\leq \chi(d-r') \| V_1(\vec{p}) \Psi_1 + V_2(\vec{p}) \Psi_2 \| \qquad \forall \ V_i(\vec{p}) .$$

Uns genügt die schwächere Eigenschaft E2, die für eine größere Klasse von Funktionen χ erfüllt ist, als für die durch (4.2) charakterisierte.

In der Quantenmechanik haben die Zustände $f(..\vec{x}_i..) \in \mathcal{E}_r$ in den Orts-Relativkoordinaten einen Träger, der in einer Kugel vom Radius 2r enthalten ist. Abseparation des Gesamtimpulses $\vec{p}$ ergibt die Wellenfunktion $f(\vec{p}|\vec{x}_1-\vec{x}_2,\vec{x}_2-\vec{x}_3,..) \in h_{\vec{p}}$. Nun gibt es zu fast jedem $\vec{p}$ eine Wellenfunktion $g_{\vec{p}}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,..) \in \mathcal{M}_{4r}$, mit $\|g_{\vec{p}}(\vec{x}_1,..)\|_{\mathcal{H}} < c(r) \, \|f(\vec{p}|\vec{x}_1-\vec{x}_2,..)\|_{h_p}$, so daß $f(\vec{p}|\vec{x}_1-\vec{x}_2,..) = g_{\vec{p}}(\vec{p}|\vec{x}_1-\vec{x}_2,..)$. Daher ist es plausibel, in der relativistischen Quantentheorie anzunehmen, daß gilt:

Sei $\Psi \in \mathcal{E}_r$, dann gibt es eine Funktion $c'(r)$ und zu fast jedem $\vec{p}$ ein $\Phi_{\vec{p}} \in \mathcal{M}_{4r}$, $\| \Phi_{\vec{p}} \|_{\mathcal{H}} < c'(r) \, \| \Psi(\vec{p}) \|_{h_p}$,
so daß $\Psi(\vec{p}) = \Phi_{\vec{p}}(\vec{p})$.

Nun kann man Lemma 3.1 anwenden und man sieht, daß in Theorien, die das Kompaktheitskriterium erfüllen, gilt

E3: Für alle M, $r, c, \vec{p}$ ist die folgende Menge kompakt:

$$k_r^M(\vec{p}) = \left\{ (P_M \Psi)(\vec{p}) \,\middle|\, \Psi \in \mathcal{E}_r \,,\, \|\Psi(\vec{p})\|_{h_p} < c \right\}. \tag{4.3}$$

Die natürliche Wahl der zur Zeit t einfach lokalisierten Zustände ist $\mathcal{U}(t)\, \mathcal{E}_r$.

V Äquivalenz der Teilchendefinitionen

Wir sind nun in der Lage, unseren einen Hauptsatz zu formulieren und zu beweisen.

Satz 5.1 In einer massiven relativistischen Quantentheorie, die dem Kompaktheitskriterium (2.8) genügt, erfüllt ein Zustand genau dann die geometrische Teilchendefinition (siehe Kap. I), wenn er zum diskreten Spektralbereich des Masseoperators gehört.

In der Quantenmechanik haben Ruelle [10] und Amrein und Georgescu [8] einen analogen Satz über die geometrische Charakterisierung gebundener Systeme bewiesen. Unser Beweis ist teilweise analog zu dem in [8] gegebenen.

Beweis: 1. Sei Ψ ein Zustand aus dem diskreten Spektralbereich des Masseoperators, dann läßt er sich gleichmäßig in der Zeit durch eine endliche Linearkombination von Eigenzuständen zur Masse approximieren:

$$\| e^{iHt}\Psi - \sum_{\ell=1}^{N} V_\ell(\vec{P},t)\,\Psi_\ell \| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t,$$

$$V_\ell(\vec{P},t) = \exp\{i\sqrt{\vec{P}^2 + m_\ell^2 \mathbb{1}}\; t\}.$$

Nach (2.4) gibt es ein r, so daß es zu jedem Ψ_ℓ ein $\Phi_\ell \in \mathcal{M}_r$ gibt mit $\|\Psi_\ell - \Phi_\ell\| \leq \varepsilon/3N$ Dann gibt es nach E2 (Kap. IV) ein r', so daß für ein geeignetes $\Phi'_t \in \mathcal{E}_{r'}$ gilt: $\| \sum_{\ell=1}^{N} V_\ell(\vec{P},t)\,\Phi_\ell - \Phi'_t \| < \varepsilon/3$.

Daher ist $\| e^{iHt}\Psi - \Phi'_t \| < \varepsilon \;\forall t$, Ψ erfüllt also die geometrische Teilchendefinition.

2. Wir zeigen, daß ein Zustand mit rein kontinuierlichem Massenspektrum orthogonal ist zu jedem geometrischen Einteilchenzustand. Wir benötigen keine speziellen Annahmen über das Spektrum des Masseoperators, dieses kann auch einen stetig singulären Anteil enthalten.

Bei festem Impuls $\vec{p}$ definieren wir $g_{\vec{p}} \subset h_{\vec{p}}$ durch

$$g_{\vec{p}} = \Big\{ \alpha \in h_{\vec{p}} \;\Big|\; \text{Zu } \varepsilon > 0 \;\exists \text{ ein r, so daß es für alle t ein } \Psi_t \in \mathcal{E}_r \text{ gibt mit } \|\Psi_t(\vec{p})\| = \|\alpha\|,\; \|\exp\{iH[\vec{p}]\,t\}\alpha - \Psi_t(\vec{p})\| < \varepsilon \Big\}.$$

Für einen Zustand Ψ, der die geometrische Teilchendefinition erfüllt, gilt $\Psi(\vec{p}) \in g_{\vec{p}}$ fast überall.

Infolge des Kompaktheitskriteriums gibt es einen endlichdimensionalen Projektor $F \in \mathcal{B}(h_{\vec{p}})$, so daß für alle $\alpha \in g_{\vec{p}}$:

$$\| (\mathbb{1} - F)\exp\{iH[\vec{p}]t\}\,\alpha \| < \varepsilon \|\alpha\| \quad \forall t. \tag{5.1}$$

Zum Beweis wählt man M so groß, daß $\|(\mathbb{1} - P_M)\alpha\| < \frac{\varepsilon}{4}\|\alpha\|$, und r so groß, daß $\|\exp\{iH[\vec{p}]t\}\alpha - \Psi_t(\vec{p})\| < \frac{\varepsilon}{4}\|\alpha\|$ für $\Psi_t \in \mathcal{E}_r$, $\|\Psi_t(\vec{p})\| = \|\alpha\|$.

Dann ist $\|\exp\{iH[\vec{p}]t\}\alpha - (P_M\Psi_t)(\vec{p})\| < \frac{\varepsilon}{2}\|\alpha\| \quad \forall t$.

Die $(P_M\Psi_t)(\vec{p})$ liegen in der nach E3 kompakten Menge k_r^M (4.3), deshalb gibt es einen endlichdimensionalen Projektor $F \in \mathcal{B}(h_{\vec{p}})$, so daß (2.7): $\|(\mathbb{1} - F)(P_M\Psi_t)(\vec{p})\| < \frac{\varepsilon}{2}\|\alpha\| \;\forall t$. Daraus erhält man (5.1).

Wir bezeichnen mit $h^c_{\vec{p}}$ den Teilraum von $h_{\vec{p}}$, der zum kontinuierlichen Spektralbereich des reduzierten Masseoperators $M[\vec{p}]$ bzw. des reduzierten Hamiltonoperators $H[\vec{p}]$ gehört. Für einen Vektor ϕ mit rein kontinuierlichem Massenspektrum gilt

$\Phi(\vec{p}) \in h^c_{\vec{p}}$ fast überall, daher genügt es, zu zeigen, daß $h^c_{\vec{p}}$ orthogonal zu $g_{\vec{p}}$ liegt.

Lemma 5.2 Sei $e \in h^c_{\vec{p}}$ und $f \in h_{\vec{p}}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \; |(f, \exp\{i H[\vec{p}]t\} e)|^2 = 0 .$$

Beweis: Sei $H[\vec{p}] = \int_0^\infty \mu \, dE(\mu)$ die Spektralzerlegung des reduzierten Hamiltonoperators auf $h^c_{\vec{p}}$.

$$|(f, \exp\{i H[\vec{p}]t\} e)|^2 = \iint \exp\{i(\lambda-\mu)t\} \, d(e, E(\lambda) f) \, d(f, E(\mu) e)$$

$$= \iint_{\lambda,\mu \geq 0,\, |\lambda-\mu| \leq \delta} + \iint_{\lambda,\mu \geq 0,\, |\lambda-\mu| \geq \delta} . \tag{5.2}$$

Die Polarzerlegung des Maßes

$$d(f, E(\mu) e) = d\rho_1(\mu) - d\rho_2(\mu) - i\, d\rho_3(\mu) + i\, d\rho_4(\mu)$$

ergibt vier positive beschränkte Maße $\rho_j(\mu)$, $\int d\rho_j(\mu) \leq 1$.

Wir schätzen den ersten Term von (5.2) ab:

$$\Big|\iint_{|\lambda-\mu|\leq\delta}\Big| = \Big|\int_{\mu \geq 0} e^{i\mu t} \, d(f, E(\mu) e) \, (\{E(\mu+\delta) - E(\mu-\delta)\} e, \exp\{i H[\vec{p}]t\} f)$$

$$\leq \sup_\mu \| \{E(\mu+\delta) - E(\mu-\delta)\} e \| \sum_{j=1}^{4} \int d\rho_j(\mu) \qquad \forall t .$$

Da $E(\lambda) e$ für $e \in h^c_{\vec{p}}$ gleichmäßig stark stetig in λ ist, gibt es zu jedem ε ein δ, so daß

$$\Big|\iint_{|\lambda-\mu|\leq\delta}\Big| \leq 4 \sup_\mu \| \{E(\mu+\delta) - E(\mu-\delta)\} e \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t .$$

Das Zeitmittel des zweiten Summanden in (5.2) ist

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \iint_{|\lambda-\mu|\geq\delta} \exp\{i(\mu-\lambda)t\} \, d(e, E(\lambda) f) \, d(f, E(\mu) e) \leq$$

$$\leq \iint_{|\lambda-\mu|\geq\delta} \left| \frac{\sin\{(\mu-\lambda)T\}}{(\mu-\lambda)T} \right| \sum_j d\rho_j(\lambda) \sum_l d\rho_l(\mu) \leq$$

$$\leq \frac{16}{\delta T} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad T > \frac{32}{\delta \varepsilon} . \qquad \blacksquare$$

Korollar 5.3 Sei $F \in \mathcal{B}(h_{\vec{p}})$ ein endlichdimensionaler Projektor, dann gilt für alle $e \in h^c_{\vec{p}}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \, \| F \exp\{i H[\vec{p}]t\} e \|^2 = 0 .$$

Bemerkung: Wenn e zum Lebesgue - absolut stetigen Teil des Massenspektrums gehört, gilt sogar

$$\lim_{t\to\infty} \| F \exp\{i H[\vec{p}]t\} e \|^2 = 0 .$$

Lemma 5.4 Sei $d \in g_{\vec{p}}$ und $e \in h^c_{\vec{p}}$, dann sind d und e orthogonal.

<u>Beweis:</u> $|(d,e)|^2 =$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, \Big| \left(d, \exp\{iH[\vec{p}]t\}(\mathbb{1}-F)\exp\{-iH[\vec{p}]t\}e\right) + \left(d, \exp\{iH[\vec{p}]t\}F\exp\{-iH[\vec{p}]t\}e\right)\Big|^2$$

$$\leq 2\,\sup_t \|(\mathbb{1}-F)\exp\{iH[\vec{p}]t\}d\|^2 + \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, \|F\exp\{iH[\vec{p}]t\}e\|^2.$$

Zu gegebenem ε wählt man einen endlichdimensionalen Projektor F derart, daß (5.1)

$$\|(\mathbb{1}-F)\exp\{iH[\vec{p}]t\}d\|^2 < \varepsilon/4 \qquad \forall\, t,$$

und zu F und e wählt man T so groß, daß (Korollar 5.3)

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, \|F\exp\{iH[\vec{p}]t\}e\|^2 < \varepsilon/4,$$

dann ist

$$|(d,e)|^2 < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

VI Zähler und Koinzidenzzähler

In den nun folgenden Kapiteln werden wir eine mathematische Beschreibung der Koinzidenzarrangements von Zählern durch "Koinzidenzoperatoren" angeben. In asymptotisch vollständigen Theorien zeigen wir, daß die mit Hilfe dieser Operatoren definierte asymptotische Zahl der Lokalisierungszentren identisch ist mit der Teilchenzahl.

Zur Vereinfachung der Notation beschränken wir uns auf Theorien, die nur eine Teilchensorte mit der Masse m>0 beschreiben. Das Energie-Impuls-Spektrum ist dann:

$$\{p^\mu = 0\} \cup \{p^\mu \mid p_\mu p^\mu = m^2,\ p^0 > 0\} \cup \{p^\mu \mid p_\mu p^\mu \geq 4m^2,\ p^0 > 0\}. \tag{6.1}$$

Für die Haag-Ruelle-Streutheorie [5] wählen wir die Formulierung mit beschränkten fastlokalen Operatoren [4].

Ein beschränkter Operator A ist fastlokal, wenn es zu A eine Folge lokaler Approximationen $A_r \in \mathcal{R}(\mathcal{O}_r)$ gibt ($\mathcal{O}_r$ ist der Doppelkegel um den Ursprung mit dem Basisradius r), so daß gilt:

$$\|A\| = \|A_r\|,\ \|A - A_r\| \leq \|A\|\,\varphi(r)$$
$$\text{mit } \varphi(r) \leq 1,\ \lim_{r\to\infty} r^N \varphi(r) = 0 \quad \forall N. \tag{6.2}$$

Es gibt fastlokale Einteilchenerzeugungsoperatoren A^* mit:

$$A \text{ fastlokal},\ A^*\Omega \in \mathcal{H}_1,\ A\Omega = 0,\ \|A\| < \infty, \tag{6.3}$$

$$\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2\omega_p}} \langle \vec{p} \mid A^*\Omega \rangle = 1 \quad \forall \vec{p} \text{ mit } \omega_p \leq E,\ \langle \vec{p} | A^*\Omega \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \tag{6.4}$$

Dabei ist $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$, und $|\vec{p}\rangle$ sind die uneigentlichen Einteilchenzustände zu scharfem Impuls mit der Normierung

$$\langle \vec{p} \mid \vec{q} \rangle = 2\,\omega_p\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \tag{6.5}$$

Die ℓ-Teilchen-Streuzustände Ψ_ℓ^{in} bzw. Ψ_ℓ^{out} sind die Grenzwerte der Haag-Ruelle-Approximationen

$$\Psi_\ell(t) = \frac{1}{\sqrt{\ell!}} \int \prod_{i=1}^{\ell} d^3x_i\ f_\ell(t \mid \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)\ A^*(\vec{x}_1, t) \cdots A^*(\vec{x}_\ell, t)\,\Omega, \tag{6.6}$$

$$\Psi_\ell^{in\,(out)} = s - \lim_{t \to -\infty\,(+\infty)} \Psi_\ell(t), \tag{6.7}$$

mit Wellenfunktionen

$$f_\ell(t \mid \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell) = (2\pi)^{-\frac{3\ell}{2}} \int \prod_{i=1}^{\ell} \left(d^3p_i\ e^{i(\vec{p}_i\vec{x}_i - \omega_{p_i} t)} \right) \tilde{f}_\ell(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell). \tag{6.8}$$

Die Konvergenz (6.7) ist besonders gut für Wellenfunktionen $\tilde{f}_\ell(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{3\ell})$ mit nicht-überlappendem Träger im Geschwindigkeitsraum (die Flächen $\vec{p}_i/\omega_{p_i} = \vec{p}_j/\omega_{p_j}$ gehören nicht zum Träger von $\tilde{f}_\ell$):

$$|t|^N \, \| \Psi_\ell(t) - \Psi_\ell^{\text{out (in)}} \| < A_N \qquad \forall N, \; t>0 \; (t<0). \tag{6.9}$$

Die Menge dieser nicht-überlappenden Streuzustände liegt dicht in $\mathcal{H}$, wenn die Theorie asymptotisch vollständig ist.

In der Theorie des freien neutralen Feldes zur Masse m>0 ist es zweckmäßig, die ℓ-Teilchen-Zustände $|f_\ell\rangle$ wie in (6.6) darzustellen, jedoch mit dem Feldoperator. Dann ist $|f_\ell\rangle = \Psi_\ell(t)$ zeitunabhängig. Bei Zuständen mit beschränkter Energie kann man das Feld mit einer geeigneten Testfunktion verschmieren, ohne die Zustände zu verändern, so daß man A^* in (6.6) als fastlokalen Erzeugungsoperator wählen kann (ein mit einer Testfunktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ verschmiertes Wightman-Feld ist ein unbeschränkter fastlokaler Operator).

In der Literatur findet man Beweise, daß die trunkierten Vakuumerwartungswerte (TVEV) fastlokaler Operatoren rasch in den Relativvariablen abfallen, für unbeschränkte z. B. in [2], für beschränkte in [1]. Wir benötigen den Satz für TVEV, die beschränkte und unbeschränkte Operatoren enthalten:

<u>Lemma 6.1</u> Seien in einer Theorie mit kleinster Masse $\varkappa>0$ die A_ℓ unbeschränkte, die Q_i beschränkte fastlokale Operatoren. Sei $d(\underline{a}) = \max\{|\vec{a}_i - \vec{a}_j|\}$ der Durchmesser der Punktmenge $\{\vec{a}_i\}$. Es gilt:

$$\Big| \Big(\Omega, \prod_{\ell=1}^{m_1} A_\ell(\vec{a}_\ell) \prod_{i=1}^{m_2} Q_i(\vec{a}_i) \prod_{j=1}^{m_3} A_j(\vec{a}_j)\, \Omega\Big)_T \Big| \leq$$

$$\leq M_N \, (1 + d(\underline{a}))^{-N} \qquad \forall N.$$

Zum Beweis approximiert man die unbeschränkten fastlokalen Operatoren durch unbeschränkte lokale (Wightman-Feld mit Testfunktion aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ verschmiert), diese werden polar zerlegt und der positive Faktor spektral zerlegt. Durch Abschneiden des Spektralintegrals erhält man eine lokale beschränkte Approximation. Die Wahl des Abschneideparameters hängt für jedes A_ℓ von $d(\underline{a})$ ab, sowie von der Stelle im TVEV, an der A_ℓ steht. Approximiert man die Q_i auch durch lokale beschränkte Operatoren, so erhält man den raschen Abfall der TVEV lokaler Operatoren [1], der auch das Potenzwachstum der Normen der Approximationen der A_ℓ unterdrückt.

Zur Beschreibung der Nachweisgeräte beginnen wir mit den Zählern. Es sind Observable, die nur positive beschränkte Meßwerte haben, sie sprechen auf das Vakuum nicht an und sind lokalisiert. Deshalb wollen wir jeden Operator C mit den Eigenschaften

C fastlokal, $C \geqslant 0$, $C\Omega = 0$, $\|C\| = 1$ (6.10)

als Zähler auffassen (ein lokales C kann $C\Omega=0$ nicht erfüllen).

Das Produkt von zwei raumartig weit getrennten Zählern beschreibt wegen der cluster-Eigenschaft des Vakuums die Koinzidenzschaltung zwischen den Zählern. Daher betrachten wir als Koinzidenzoperatoren zur Beschreibung eines Koinzidenzarrangements von n Zählern zur Zeit t mit minimaler Separation d:

$$K_d^{(n)}(t) = \int_{|\vec{z}_i - \vec{z}_j| \geqslant d} d^3z_1 \ldots d^3z_n \; C_1(\vec{z}_1, t) \ldots C_n(\vec{z}_n, t). \qquad (6.11)$$

Die Ortsintegration haben wir so gewählt, daß der Erwartungswert von $K_d^{(n)}(t)$ ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist, daß in dem Zustand mindestens n Teilchen einen Mindestabstand d haben.

Die unbeschränkten Operatoren $K_d^{(n)}(t)$ beschreiben eine Idealisierung von Messungen in endlichen Gebieten, deshalb betrachten wir zur Bestimmung der Domäne von $K_d^{(n)}(t=0)$ eine approximierende Folge beschränkter Operatoren

$$K_d^{(n)}\{R\} = \int_{|\vec{z}_i - \vec{z}_j| \geqslant d,\ |\vec{z}_i| \leq R} \prod_{i=1}^{n} d^3z_i \; C_i(\vec{z}_i)$$

Sei nun $\hat{\mathcal{D}} = \{\Psi \in \mathcal{H} \mid w\text{-}\lim_{R\to\infty} K_d^{(n)}\{R\}\Psi$ existiert und $w\text{-}\lim_{R\to\infty} K_d^{(n)}\{R\}^* \Psi$ existiert $\}$.

$\hat{\mathcal{D}}$ ist dicht in $\mathcal{H}$, denn es enthält alle fastlokal aus dem Vakuum erzeugten Vektoren. Auf $\hat{\mathcal{D}}$ ist

$$\hat{K}_d^{(n)} = w\text{-}\lim_{R\to\infty} K_d^{(n)}\{R\}$$

ein abschließbarer Operator, wir definieren

$$K_d^{(n)}(t=0) = \hat{K}_d^{(n)**}.$$

Die natürliche Domäne von $K_d^{(n)}(t)$ ist:

$$\mathcal{D}(K_d^{(n)}(t)) = e^{iHt}\,\mathcal{D}(K_d^{(n)}(0)).$$

Der Koinzidenzoperator kann symmetrisch gewählt werden, wenn in (6.11) das Produkt der Zähler symmetrisiert wird. Der Unterschied ist ein beschränkter Operator, dessen Norm schneller als jede inverse Potenz von d abfällt.

Nun beweisen wir noch, daß die Zustände beschränkter Energie im massiven freien Feld und die nicht-überlappenden Streuzustände endlicher Energie in einer Haag-Ruelle-Streutheorie zur Domäne aller Koinzidenzoperatoren $K_d^{(n)}(t)$ gehören. Da die $K_d^{(n)}(t)$ abgeschlossene Operatoren sind, brauchen wir nur eine Folge $\Psi_k \in \mathcal{D}(K_d^{(n)}(t))$

zu konstruieren, so daß $s\text{-}\lim_{K\to\infty} \Psi_K = \Psi$ und $s\text{-}\lim_{K\to\infty} K_\alpha^{(m)}(t)\Psi_K$ existieren. Dann ist $\Psi \in \mathcal{D}(K_\alpha^{(m)}(t))$ und $K_\alpha^{(m)}(t)\Psi = s\text{-}\lim_{K\to\infty} K_\alpha^{(m)}(t)\,\Psi_K$.

Lemma 6.2 Seien $A_1^*, \ldots, A_\ell^*$ fastlokale Erzeuger ($A_i\Omega = 0$) und $f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\ell) \in L^2(\mathbb{R}^{3\ell}, d^{3\ell}x)$, dann gilt für

$$\Psi = \int d^3x_1 \ldots d^3x_\ell \;\; f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\ell)\; A_1^*(\vec{x}_1)\ldots A_\ell^*(\vec{x}_\ell)\,\Omega \;:$$

$$\Psi \in \mathcal{D}(K_\alpha^{(m)}(t)) \quad \text{und} \quad \|K_\alpha^{(m)}(t)\Psi\| \le M\,\|f\|.$$

Das Lemma besagt, daß insbesondere alle Zustände endlicher Energie im freien Feld, die Einteilchenzustände mit beschränkter Energie und die Haag-Ruelle-Approximationen von Streuzuständen zu endlichen Zeiten mit beschränkter Energie zur Domäne aller $K_\alpha^{(m)}(t)$ gehören (vgl. (6.3) - (6.9)).

Beweis: $\Psi_R = \int_{|\vec{x}_i| \le R} \prod d^3x_i \;\; f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\ell)\; A_1^*(\vec{x}_1)\ldots A_\ell^*(\vec{x}_\ell)\,\Omega$

ist für jedes R ein Zustand, der von einem fastlokalen Operator aus dem Vakuum erzeugt wird, deshalb ist $\Psi_R \in \mathcal{D}(K_\alpha^{(m)}(t)) \quad \forall R, t$.
Für die starke Konvergenz von $\lim_{R\to\infty} K_\alpha^{(m)}(t)\Psi_R$ ist hinreichend, daß

$$\int \prod_i d^3x_i \prod_j d^3x_j' \;\; |f(\ldots,\vec{x}_i,\ldots)|\,|\bar{f}(\ldots,\vec{x}_j',\ldots)| \quad \times$$
$$\times \left|\left(\Omega, \prod_j A_j(\vec{x}_j')\;\; K_\alpha^{(m)}(t)^*\;\; K_\alpha^{(m)}(t) \prod_i A_i^*(\vec{x}_i)\,\Omega\right)\right| \;<\; \infty.$$

Wegen

$$|f(\ldots\vec{x}_i\ldots)\;\bar{f}(\ldots\vec{x}_j'\ldots)| \le \tfrac{1}{2}\,|f(\ldots\vec{x}_i\ldots)|^2 + \tfrac{1}{2}\,|f(\ldots\vec{x}_j'\ldots)|^2$$

schätzen wir den Ausdruck weiter ab durch

$$\int \prod_i d^3x_i\, |f(..\vec{x}_i..)|^2 \cdot \sup_{\vec{x}_i} \int \prod_j d^3x_j' \;\; |(\Omega, \prod A(\vec{x}')\;\; K^*K\;\; \prod A^*(\vec{x})\,\Omega)| \le$$
$$\le \|f\|^2 \sup_{\vec{x}_i} \int \prod d^3x_j' \;\prod d^3z_k \;\prod d^3z_m' \quad \times$$
$$\times \left|\left(\Omega, \prod A_j(\vec{x}_j')\;\prod C_{m'}(\vec{z}_m',t) \prod C_k(\vec{z}_k,t) \prod A_i^*(\vec{x}_i)\,\Omega\right)\right|.$$

Da die C und A das Vakuum vernichten, treten bei der Zerlegung des Vakuumerwartungswertes (VEV) in TVEV nur die Terme auf, in denen jeweils mindestens ein A links und ein A^* rechts am Vakuum stehen. Es wird also nie über alle Variablen innerhalb eines TVEV integriert. Da die TVEV stetig sind und rasch in den Relativvariablen abfallen, existieren die Integrale und Suprema. ∎

Der Beweisgang von Lemma 6.2 zeigt, daß die Zahl der Zähler für die Existenz des limes unbedeutend ist, daher liegt Ψ auch in der Domäne von allen $K_\alpha^{(m)}(t)^* K_\alpha^{(m)}(t)$. Wir schätzen noch feiner ab:

Lemma 6.3 Sei Ψ wie in Lemma 6.2, jedoch mit beschränkten fastlokalen Erzeugern A_i^*, dann gilt:

$$\| (K_d^{(m)}(t)^* K_d^{(m)}(t))^k e^{iH\tau} \Psi \|^2 \leq M \| f \|^2 (1+|t-\tau|)^{3(4mk+\ell)} .$$

M ist unabhängig von d, t, τ und f.

Beweis: Analog wie im vorigen Beweis erhält man

$$\|(K_d^{(m)}(t)^* K_d^{(m)}(t))^k e^{iH\tau} \Psi \|^2 \leq$$

$$\leq \|f\|^2 \sup_{\vec{x}_i} \int \prod_{j=1}^{\ell} d^3x_j' \prod_{\lambda=1}^{4mk} d^3z_\lambda \, |(\Omega, \prod A_j(\vec{x}_j') \prod C_\lambda(\vec{z}_\lambda, t-\tau) \prod A_i^*(\vec{x}_i) \, \Omega)|.$$

Nach Zerlegung des Integranden in TVEV schätzt man diese wie üblich ab [1], indem man die fastlokalen Operatoren durch lokale approximiert, die raumartig voneinander getrennt liegen. Für jeden TVEV erhält man eine Majorante, die beschränkt ist, und die für Werte der Relativkoordinaten, die größer als $\alpha|t-\tau|$ sind, schnell abfällt. Daher ergibt jede Integration höchstens einen Faktor $c(1+|t-\tau|)^3$. ∎

Lemma 6.4 Sei ϕ^{out} ein nicht-überlappender Streuzustand beschränkter Energie, dann ist

$$\phi^{out} \in \mathcal{D}(K_d^{(m)}(t)) \quad \forall\, d, m, t,$$

und $\| K_d^{(m)}(t) \, (\phi^{out} - \phi(t)) \| \, t^N < A_N \quad \forall\, N, t > 0.$

Für ϕ^{in} entsprechend.

Beweis: $\dot{\phi}(\tau)$ hat die Form $e^{iH\tau}\Psi$ aus Lemma 6.3. Daher sind $K_d^{(m)}(t)\, \dot{\phi}(\tau)$ und $K_d^{(m)}(t)^* K_d^{(m)}(t)\, \dot{\phi}(\tau)$ stark stetig in τ, und für $\tau_2 \geq \tau_1$ ist:

$$\| K_d^{(m)}(t) \, (\phi(\tau_2) - \phi(\tau_1)) \|^2 = \| \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \; K_d^{(m)}(t) \, \dot{\phi}(\tau) \|^2 \leq$$

$$\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \| K_d^{(m)}(t) \, \dot{\phi}(\tau) \|^2 \leq \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau \, \| \dot{\phi}(\tau) \| \, \| K_d^{(m)}(t)^* K_d^{(m)}(t) \, \dot{\phi}(\tau) \| .$$

Der erste Faktor im Integranden fällt schneller als jede inverse Potenz in τ ab, der zweite ist nach Lemma 6.3 bei festem t polynomial in τ beschränkt. Das Integral verschwindet im limes $\tau_1 \to \infty$, und daher existiert $\text{s-}\lim_{\tau \to \infty} K_d^{(m)}(t) \, \phi(\tau)$.

$$\| K_d^{(m)}(t) \, (\phi^{out} - \phi(t)) \|^2 \leq \int_t^{\infty} d\tau \; \| \dot{\phi}(\tau) \| \; \| K_d^{(m)}(t)^* K_d^{(m)}(t) \; \dot{\phi}(\tau) \| .$$

Für $\tau \geq t \geq 0$ ist $|t-\tau| \leq \tau$, deshalb ist der Integrand gleichmäßig in t durch eine Funktion $h(\tau)$ beschränkt, die schneller als jede inverse Potenz in τ abfällt. Dann fällt auch $\int_t^{\infty} h(\tau)\, d\tau$ schneller als jede inverse Potenz in t ab. ∎

VII Ansprechwahrscheinlichkeit von Zählern

Bei den folgenden Untersuchungen werden wir auf Funktionen $\Gamma(\vec{p})$ stoßen, die sich als Ansprechwahrscheinlichkeiten von Zähleroperatoren deuten lassen. Wir untersuchen zunächst ihre mathematischen Eigenschaften.

Sei C ein Zähleroperator (6.10) und $|\vec{p}\rangle$ ein uneigentlicher Einteilchenzustand zum Impuls $\vec{p}$ (6.5). Dann ist

$$\Gamma(\vec{p}) = \frac{(2\pi)^3}{2\omega_p} \langle \vec{p} \,|\, C \,|\, \vec{p} \rangle \tag{7.1}$$

eine wohldefinierte differenzierbare Funktion von $\vec{p}$: Das Funktional $(2\omega_p)^{-1/2} C^{1/2} |\vec{p}\rangle$ ist definiert durch

$$\int d^3\vec{p}\ (2\omega_p)^{-1/2}\ C^{1/2}\ |\vec{p}\rangle\ \tilde{f}(\vec{p}) = C^{1/2}\, |f\rangle .$$

Auf Zuständen $|f\rangle$ mit beschränkter Energie E kann man dieses Funktional darstellen durch eine vektorwertige Funktion von $\vec{p}$. Sei dazu A^* ein fastlokaler Einteilchenerzeuger (6.3 und 6.4).

$$|f\rangle = \int d^3x\ f(\vec{x})\ A^*(\vec{x})\,\Omega ,$$

$$C^{1/2}|f\rangle = \int d^3x\ (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\ e^{i\vec{p}\vec{x}}\ \tilde{f}(\vec{p})\ C^{1/2}\ A^*(\vec{x})\ \Omega$$

$$= \int d^3p\ \ \tilde{f}(\vec{p}) \int d^3x\ (2\pi)^{-3/2}\ e^{i\vec{p}\vec{x}}\ C^{1/2}\ A^*(\vec{x})\ \Omega .$$

Wir dürfen die Reihenfolge der $\vec{x}$- und $\vec{p}$-Integrationen vertauschen, denn $\int_{\omega_p \le E} d^3p\ |\tilde{f}(\vec{p})| < \infty$ und das $\vec{x}$-Integral ist Norm-integrabel. Da sogar $\int d^3x\ |\vec{x}|^N \| [C^{1/2}, A^*(\vec{x})] \| < \infty\ \forall N$, ist

$$(2\pi)^{-3/2} \int d^3x\ e^{i\vec{p}\vec{x}}\ C^{1/2}\ A^*(\vec{x})\,\Omega = (2\omega_p)^{-1/2}\ C^{1/2}\ |\vec{p}\rangle \tag{7.2}$$

unendlich oft in $\vec{p}$ stark differenzierbar. Also ist $\Gamma(\vec{p}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, und daher gilt auf kompakten Mengen:

$$\Gamma(\vec{p}) \le M_E \quad \text{auf} \quad \{\vec{p} \,|\, \omega_p \le E\} . \tag{7.3}$$

In einer freien Theorie ist $\Gamma(\vec{p})$ gleichmäßig beschränkt. Zum Beweis konstruiert man eine Folge $A^*_{\vec{p}}$ mit $(2\pi)^{3/2}(2\omega_p)^{-1/2}\langle \vec{p} \,|\, A^*_{\vec{p}}\,\Omega\rangle = 1$ und zeigt, daß $\int d^3x\ \| C^{1/2} A^*_{\vec{p}}(\vec{x})\,\Omega \|$ gleichmäßig in $\vec{p}$ beschränkt ist.

Man erwartet, daß $\langle f | C(\vec{x},t) | f \rangle$ zu großen Zeiten die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort $\vec{x}$ beschreibt, multipliziert mit der Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählers. Araki und Haag haben in [4, Theorem 4] bewiesen, daß

$$\lim_{t \to \infty} \langle f \,|\, t^3\ C(\vec{v}t, t) \,|\, f \rangle = |\tilde{f}(\vec{p})|^2\ \Gamma(\vec{p}) \quad \text{wenn} \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\omega_p} . \tag{7.4}$$

(Wir haben in (7.2) gezeigt, daß die Differenzierbarkeitsannahme in den Voraussetzungen des Theorems automatisch erfüllt ist.)

Weiterhin sieht man leicht, daß für alle Zeiten t gilt:

$$\int d^3x \, \langle f \,|\, C(\vec{x},t) \,|\, f \rangle = \int d^3p \, |\tilde{f}(\vec{p})|^2 \, \Gamma(\vec{p}) \tag{7.5}$$

Die Gleichungen (7.4) und (7.5) besagen, daß $\Gamma(\vec{p})$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Zähler C ein Teilchen registriert, dessen Impuls um $\vec{p}$ konzentriert ist.

VIII Koinzidenzmessungen zu großen Zeiten

Wir untersuchen die Erwartungswerte von Koinzidenzoperatoren zu großen Zeiten. In diesem Kapitel beweisen wir unser Ergebnis, das wir zum folgenden Satz zusammenfassen. Seine physikalische Interpretation folgt im nächsten Abschnitt.

Satz 8.1 Sei Ψ ein nicht-überlappender auslaufender Streuzustand beschränkter Energie E. Zu jedem $K_d^{(m)}(t)$ gibt es Operatoren $K_d^{(m)+}$ und $K^{(m)+}$ mit $\| K_d^{(m)+} P_E \| < \infty, \| K^{(m)+} P_E \| < \infty$ derart, daß

$$\lim_{t \to \infty} (\Psi, K_d^{(m)}(t) \Psi) = (\Psi, K_d^{(m)+} \Psi), \tag{8.1}$$

$$\lim_{d \to \infty} d^N \, \| (K_d^{(m)+} - K^{(m)+}) P_E \| = 0 \quad \forall N. \tag{8.2}$$

Lassen alle Zähler den Einteilchenraum invariant:

$$(\mathbb{1} - P_1) \, C_i \, P_1 = 0, \tag{8.3}$$

dann ist

$$\text{s-}\lim_{t \to \infty} K_d^{(m)}(t) \Psi = K_d^{(m)+} \Psi. \tag{8.4}$$

$K^{(m)+}$ ist diagonal in der auslaufenden Teilchenzahl.

Sei $\Psi_\ell(\vec{p}_1, \dots \vec{p}_\ell)$ die auslaufende Wellenfunktion der ℓ-Teilchen-Komponente des Streuzustandes Ψ, dann ist

$$(K^{(m)+}\Psi)_\ell(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell) = \begin{cases} \frac{\ell!}{(\ell-m)!} \left[\prod_{i=1}^{m} \Gamma_i(\vec{p}_i) \, \Psi_\ell(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell) \right]_{\text{symmetrisiert}} & \text{für } n \leq \ell \\ 0 \quad \text{für } n > \ell, \end{cases} \tag{8.5}$$

$\Gamma_i(\vec{p}_i)$ ist die Ansprechwahrscheinlichkeit (7.1) des Zählers C_i. Die gleichen Ergebnisse gelten für einlaufende Streuzustände bei $t \to -\infty$ und für $\Psi \in P_E \mathcal{H}$ im freien massiven Feld bei $|t| \to \infty$.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß zur Darstellung von Ψ fast-lokale Operatoren in der Zeitschicht t gemäß (6.6) benutzt werden können. Im freien Feld ist es exakt möglich, für nicht-überlappende Streuzustände wissen wir aus Lemma 6.4, daß der Fehler rasch abfällt. Dann sind nur noch die Wellenfunktionen (6.8), $f_\ell(t|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\ell)$ zeitabhängig:

$$(\Psi, K_\alpha^{(n)}(t)\Psi) = \frac{1}{\sqrt{\ell!\,\ell'!}} \sum_{\ell,\ell'}^{\text{endl.}} \int \prod^{\ell} d^3x_i \prod^{\ell'} d^3x_j' \int_{|\vec{z}_k - \vec{z}_\lambda| \geq d} \prod^{n} d^3z_k \quad \times$$

$$\times f_\ell(t|\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_\ell)\ \bar{f}_{\ell'}(t|\vec{x}_1',\dots,\vec{x}_{\ell'}')\left(\Omega, \prod^{\ell'} A(\vec{x}_j')\prod^{n} C_k(\vec{z}_k)\prod^{\ell} A^*(\vec{x}_i)\,\Omega\right) \quad (8.6)$$

Zerlegt man den VEV in TVEV und benutzt deren raschen Abfall in den Relativkoordinaten, so zeigt man mit Hilfe der Ruelle'schen Abschätzungen für die glatten Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung [z.B. 2, ch. VI.4], daß asymptotisch alle Terme in der Zerlegung verschwinden, bei denen mehr als je ein A und A* in einem TVEV stehen.

$$\lim_{t\to\infty} (\Psi, K_\alpha^{(n)}(t)\Psi) =$$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_\ell \int \prod_{i=1}^{\ell} (d^3x_i\ d^3x_i')\quad f_\ell(t|..\vec{x}_i..)\ \bar{f}_\ell(t|..\vec{x}_j'..) \int_{|\vec{z}_k-\vec{z}_\lambda|\geq d} \prod^{n} d^3z_k \quad \times$$

$$\times \sum_{\Sigma m_j = n} (\Omega, A(\vec{x}_1')\prod^{m_1} C_\mu(\vec{z}_\mu)A^*(\vec{x}_1)\Omega)\dots(\Omega, A(\vec{x}_\ell')\prod^{m_\ell} C_\nu(\vec{z}_\nu)A^*(\vec{x}_\ell)\,\Omega). \quad (8.7)$$

Die letzte Summe erstreckt sich über alle Möglichkeiten, die n Zähler in beliebigen Gruppen auf ℓ Plätze zu verteilen. Den Grenzwert von (8.7) erhält man durch Anpassung der $\vec{z}$-Integrationen: Stehen in einem Summanden $C_\mu(\vec{z}_\mu)$ und $C_\lambda(\vec{z}_\lambda)$ in demselben VEV, so wird nur über $|\vec{z}_\mu - \vec{z}_\lambda| \geq d$ integriert, stehen sie in verschiedenen VEV, so fällt die Beschränkung für $\vec{z}_\mu - \vec{z}_\lambda$ fort. Wir zeigen das asymptotische Verschwinden der Differenz gegenüber (8.7) an einem typischen Beispiel:

$$\int \prod_{i=1}^{2} (d^3x_i\ f_i(t|\vec{x}_i)\ d^3x_i'\ \bar{f}_i'(t|\vec{x}_i'))\left\{\int_{|\vec{z}_k-\vec{z}_\lambda|\geq d} - \int_{|\vec{z}_1-\vec{z}_2|\geq d}\right\} \prod_{j=1}^{3} d^3z_j \quad \times$$

$$\times (\Omega, A(\vec{x}_1')C_1(\vec{z}_1)C_2(\vec{z}_2)A^*(\vec{x}_1)\,\Omega)(\Omega, A(\vec{x}_2')C_3(\vec{z}_3)A^*(\vec{x}_2)\,\Omega). \quad (8.8)$$

Der Bereich, über den die $\vec{z}_j$-Integrationen erstreckt werden, ist enthalten in

$$G = \{(\vec{z}_1,\vec{z}_2,\vec{z}_3) \mid |\vec{z}_1-\vec{z}_3| \leq d\} \cup \{(\vec{z}_1,\vec{z}_2,\vec{z}_3) \mid |\vec{z}_2-\vec{z}_3| \leq d\}.$$

Substituieren wir für den ersten Teilbereich $\vec{z}_1 = \vec{z}_3 + \vec{z}_1'$, so können wir (8.8) abschätzen durch

$$\int d^3x_2\, |f_2(t|\vec{x}_2)|\ \sup_{\vec{x}_1} |f_1(t|\vec{x}_1)| \prod_{i=1}^{2} \sup_{\vec{x}_i'} |f_i'(t|\vec{x}_i')| \quad \times$$

$$\times \int d^3x_1\, d^3x_1'\, d^3z_2\, |(\Omega, A(\vec{x}_1')C_1(\vec{z}_3+\vec{z}_1')C_2(\vec{z}_2)A^*(\vec{x}_1)\,\Omega)| \quad \times$$

$$\times \int d^3x_2'\, d^3z_3\, |(\Omega, A(\vec{x}_2')C_3(\vec{z}_3)A^*(\vec{x}_2)\,\Omega)| \int_{|\vec{z}_1'|\leq d} d^3z_1'$$

(analog für den anderen Teilbereich in G). Daher ist (8.8) durch $M(1+|t|)^{-3}$ beschränkt.

Der resultierende Ausdruck ist Zeit-translationsinvariant, wie wir an seiner Impulsraumdarstellung explizit sehen:

$$\lim_{t\to\infty} (\Psi, K_d^{(m)}(t)\Psi) = (\Psi, K_d^{(m)+}\Psi) =$$
$$= \sum_{\ell} \int \prod_{i=1}^{\ell} d^3p_i \, |\tilde{f}_\ell(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_\ell)|^2 (2\pi)^{3m} \times \tag{8.9}$$
$$\times \sum \prod_j \int_{\substack{|\vec{z}_{j_i}|\geq d \\ |\vec{z}_{j_i}-\vec{z}_{j_k}|\geq d}} d^3z_{j_2}\dots d^3z_{j_m} \frac{1}{2\omega_{p_j}} \langle \vec{p}_j | C_{j_1} C_{j_2}(\vec{z}_{j_2}) \dots C_{j_m}(\vec{z}_{j_m}) | \vec{p}_j \rangle .$$

Um die Normkonvergenz (8.2) zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß die von d unabhängigen Terme beschränkt sind. In diesen Termen steht jeweils ein Zähler in einem Cluster (wenn $\ell \geq m$). Die Norm jedes dieser Terme ist beschränkt durch

$$\prod_{i=1}^{m} \sup_{\vec{p},\, \omega_p \leq E} \frac{(2\pi)^3}{2\,\omega_p} \langle \vec{p} | C_i | \vec{p} \rangle = \prod_{i=1}^{m} \sup_{\vec{p},\, \omega_p \leq E} \Gamma_i(\vec{p}) .$$

Nach (7.3) ist dies endlich.

Enthalten die Matrixelemente in der Entwicklung (8.9) mehr als einen Zähler, so fällt ihr Beitrag zu $K_d^{(m)+}$ schneller als jede inverse Potenz von d in der Norm ab: Die Norm ist beschränkt durch Summen und Produkte von Ausdrücken der Form

$$\sup_{\vec{p},\, \omega_p \leq E} \frac{1}{2\omega_p} \left| \langle \vec{p} | C_{j_1} \int_{|\vec{z}_{j_i}|\geq d,\, |\vec{z}_{j_i}-\vec{z}_{j_k}|\geq d} \prod_{j_i=j_2}^{j_m} d^3z_{j_i}\, C_{j_i}(\vec{z}_{j_i}) | \vec{p} \rangle \right| . \tag{8.10}$$

Mit der Darstellung (7.2) für $C|\vec{p}\rangle$ folgt der rasche Abfall der Funktion (8.10) in d aus dem Abfall der TVEV fastlokaler Operatoren.

Damit haben wir (8.2) und (8.5) gezeigt. Den Beweis von (8.4) wollen wir nur skizzieren. Mit den oben benutzten Methoden erhält man für nicht-überlappende Streuzustände endlicher Energie Φ, Ψ (bzw. für $\Phi, \Psi \in P_E \mathcal{H}$ im freien Feld)

$$\lim_{t\to\infty} (\Phi, K_d^{(m)}(t)\Psi) = (\Phi, K_d^{(m)+}\Psi) \quad \text{und} \quad \| K_d^{(m)}(t)\Psi \| < M \quad \text{für} \quad t > 0 .$$

Daher gilt $\text{w-}\lim\limits_{t\to\infty} K_d^{(m)}(t)\Psi = K_d^{(m)+}\Psi$.

Unter der Bedingung (8.3) gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \| K_d^{(m)}(t)\Psi \| = \| K_d^{(m)+}\Psi \|$,

und daher $\text{s-}\lim\limits_{t\to\infty} K_d^{(m)}(t)\Psi = K_d^{(m)+}\Psi$. ∎

IX Teilchenzahl als Grenzwert lokaler Beobachtungen

Wir kommen zum physikalischen Inhalt des Satzes 8.1. Der Unterschied zwischen den Operatoren $K_d^{(m)+}$ und $K^{(m)+}$ ist für große d physikalisch unbedeutend. Er rührt daher, daß die Zähleroperatoren nicht exakt lokal sind, und deshalb auch bei großem Abstand noch überlappen. Der Normkonvergenz (8.2) wegen kann man zu gegebener Meßgenauigkeit ε ein d_0 angeben, so daß

$$\| (K_d^{(m)+} - K^{(m)+}) P_E \| < \varepsilon \quad \forall\, d \geq d_0 . \tag{9.1}$$

Aus (8.1) entnehmen wir, daß die Anzeige der Koinzidenzmessungen asymptotisch konstant ist, sogar unabhängig von $d > d_0$ im Rahmen der Meßgenauigkeit. Da die Koinzidenzoperatoren die Anteile im Zustand unterdrücken, bei denen mehrere Teilchen einen geringeren Abstand als d haben, bedeutet dies, daß die Teilchen sich für große Zeiten beliebig weit voneinander entfernen. Das ist im Zerlaufen der einzelnen Teilchenkomponenten begründet, es ist unabhängig davon, ob die Wellenfunktion einen nicht-überlappenden Träger im Geschwindigkeitsraum hat: Auch für zwei freie Teilchen, die beide dieselbe Wellenfunktion haben, $f(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = g(\vec{p}_1) \cdot g(\vec{p}_2)$, zeigt $K_d^{(2)}(t)$ für beliebig große d zu hinreichend großen Zeiten voll an.

Ist die Teilchenzahl ℓ kleiner als die Anzahl n der Zähler, so verschwindet die Anzeige bei Koinzidenzmessungen, denn ein einzelnes Teilchen kann nur höchstens einen der Zähler anregen. Bei $\ell \geq n$ zählt in (8.5) der Faktor $\ell!/(\ell-n)!$ die Möglichkeiten ab, daß n Zähler von ℓ Teilchen angeregt werden, während $\prod \Gamma_i(\vec{p}_i)$ die Ansprechwahrscheinlichkeit der Zähler auf einzelne Teilchen berücksichtigt. Ein Koinzidenzarrangement weist also asymptotisch einzelne, weit voneinander entfernte Teilchen nach.

Wir betrachten jetzt spezielle Zähler C mit der Eigenschaft, daß $\Gamma(\vec{p}) = \gamma = \text{const.}$ für $\omega_p \leq E$. Solche Zähler existieren, da $C = \frac{1}{\|A^* A\|} A^* A$, A wie in (6.3), (6.4), alle Forderungen (6.10) erfüllt. Für diese Zähler hat $K^{(n)+}$ die einfache Form (P_ℓ ist der Projektor auf den ℓ-Teilchen-Raum):

$$K^{(n)+} P_E = \sum_{\ell \geq n}^{\text{endl.}} \frac{\ell!}{(\ell-n)!} \gamma^n P_\ell P_E . \tag{9.2}$$

Wir lösen nach P_ℓ auf:

$$P_\ell P_E = \frac{1}{\gamma^\ell \ell!} \sum_{k=0}^{\text{endl.}} \left(\frac{-1}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} K^{(\ell+k)+} P_E \tag{9.3}$$

Ist n=1 (nur ein Zähler), so ist

$$\frac{1}{\gamma} K^{(1)+} P_E = \sum_{\ell=1} \ell P_\ell P_E$$

der Teilchenzahloperator. Durch Spektralzerlegung kann man auch aus $K^{(1)+}$ alleine die P_ℓ gewinnen. Die Darstellung (9.3) hat den Vorteil, leicht physikalisch interpretierbar zu sein, denn es treten nur die Koinzidenzoperatoren selbst auf. Sie vernichten alle die Komponenten der Zustände mit weniger als ℓ Teilchen. Die Koeffizienten vor der Summe bewirken, daß die Anzeige des

ℓ-fachen Koinzidenzoperators (k=0) auf den ℓ-Teilchen-Zuständen auf 1 normiert ist. Mit den alternierenden Koeffizienten in der Summe erreichen wir, daß sich die Beiträge der Koinzidenzoperatoren auf Zuständen mit größerer Teilchenzahl als ℓ kompensieren.

Satz 8.1 besagt demnach, daß auf nicht-überlappenden Streuzuständen beschränkter Energie und auf allen Zuständen endlicher Energie im freien Feld die aus- oder einlaufende Teilchenzahl bestimmt werden kann als Grenzwert lokaler Messungen zu großen Zeiten in großen Raumgebieten. Die Teilchenzahl ist dabei identisch mit der asymptotischen Zahl der weit getrennten Lokalisierungszentren. Als Spezialfall erhalten wir erneut unsere "geometrische Teilchendefinition", ein Einteilchenzustand ist immer einfach lokalisiert.

Herrn Prof. Dr. R. Haag danke ich sehr herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die fortwährende Unterstützung bei ihrer Durchführung. Eine große Hilfe waren auch die zahlreichen Diskussionen mit verschiedenen Mitgliedern des II. Institutes für Theoretische Physik, insbesondere mit Herrn Dr. D. Buchholz.

Literaturverzeichnis

[1] Araki, H.: Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie I und II, Vorlesungsmanuskript, Zürich 1962.

[2] Jost, R.: The General Theory of Quantized Fields, Providence, Rhode Island 1965

[3] Haag, R. and J. A. Swieca: Comm. Math. Phys. 1, 308 (1965)

[4] Araki, H. and R. Haag: Comm. Math. Phys. 4, 77, (1967)

[5] Haag, R.: Phys. Rev. 112, 669 (1958)
Ruelle, D.: Helv. Phys. Acta 35, 147 (1962)
Hepp, K.: Comm. Math. Phys. 1, 95 (1965)

[6] Schroer, B.: Fortschr. d. Phys. 11, 1 (1963)

[7] Haag, R. and B. Schroer: J. Math. Phys. 3, 248 (1962)
Borchers, H. J.: N.Y.U. progress report 1963

[8] Amrein, W. O. and V. Georgescu: Helv. Phys. Acta 46,635 (1973)

[9] Streater, R. F. and A. S. Wightman: PCT, Spin and Statistics and All That, Benjamin, New York 1964

[10] Ruelle, D.: Nuovo Cim. 61A, 655 (1969)

[11] siehe z. B. K. Hepp in Brandeis 1965, Vol. 1, p.168 ff, M. Chretien and S. Deser ed., Gordon and Breach, New York, London, Paris 1966
Doplicher, S., R. Haag and J. E. Roberts: Lemma 6.2a in Comm. Math. Phys. 35, 49 (1974)