

DESY 85-109
Oktober 1985



DEPOLARISATION DER ELEKTRONENSPINS IN SPEICHERRINGEN
DURCH NICHTLINEARE SPIN-BAHN-KOPPLUNG

von

Jörg Kewisch

ISSN 0418-9833

NOTKESTRASSE 85 · 2 HAMBURG 52

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

To be sure that your preprints are promptly included in the
HIGH ENERGY PHYSICS INDEX ,
send them to the following address (if possible by air mail) :

DESY
Bibliothek
Notkestrasse 85
2 Hamburg 52
Germany

DESY 85-109
Oktober 1985

ISSN 0418-9833

**Depolarisation der Elektronenspins in Speicherringen
durch nichtlineare Spin-Bahn-Kopplung**

Gutachter der Dissertation:

Prof. Dr. G.-A. Voss
Prof. Dr. B. Wiik

Gutachter der Disputation:

Prof. Dr. G.-A. Voss
Prof. Dr. U. Strohbusch

Datum der Disputation:

11.7.85

Sprecher des Fachbereichs
Physik und Vorsitzender des
Promotionsausschusses:

Prof. Dr. J. P. Kotthaus

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
JÖRG KEWISCH
aus Eutin

Hamburg 1985

Elektronen oder Positronen, die im Speicherring umlaufen, werden bei der Emission von Synchrotronstrahlung durch den sogenannten Sokolov-Ternov-Effekt¹ polarisiert. Diese Polarisation ist einerseits als Hilfsmittel zur Erforschung der schwachen Wechselwirkung von großem Interesse, andererseits kann sie zur genauen Vermessung der Strahlenergie und damit der Masse von Elementarteilchen verwendet werden.

Die durch die Synchrotronstrahlung gleichzeitig angeregten transversalen und longitudinalen Teilchenschwingungen können jedoch bewirken, daß diese Polarisation zerstört wird. Diesen Effekt nennt man Spin-Bahn-Kopplung.

Zur Berechnung der Spin-Bahn-Kopplung wurde das Computerprogramm SITROS geschrieben. Dieses Programm ist ein "Tracking Programm": Die Bewegung von einigen Probeteilchen und deren Spinvektoren werden für einige tausend Umläufe berechnet. Daraus wird die mittlere Depolarisationsrate und durch Extrapolation der Polarisationsgrad des Gleichgewichtszustands ermittelt.

Im Gegensatz zu dem bekannten Programm SLIM², das auf der Störungsrechnung beruht, können in SITROS die nichtlinearen Kräfte im Speicherring berücksichtigt werden. Dadurch wird die Berechnung von depolarisierenden Resonanzen höherer Ordnung ermöglicht.

In dieser Arbeit werden die Bewegungsgleichungen für die Bahn- und Spinbewegung der Elektronen hergeleitet, die die Grundlage für das Programm SITROS bilden. Die Funktion des Programms und die zur Rechenzeitersparnis notwendigen Näherungen werden erläutert.

Der Vergleich der SITROS-Ergebnisse mit den am Speicherring PETRA gewonnenen Messergebnissen zeigt, daß das SITROS Programm ein brauchbares Hilfsmittel zur Planung und Berechnung von Speicherringen mit polarisierten Elektronenstrahlen ist.

¹ A. A. Sokolov und I. N. Ternov, Sov.Phys.Doklady 8 (1964) 1203

² A. W. Chao, SLAC-Pub.-2564

1. Einleitung	1
2. Quantenmechanische Betrachtung des Spins	3
2.1 Der Spin und das magnetische Moment des Elektrons	3
2.2 Die Lösung der Dirac-Gleichung für ein freies Elektron	5
2.3 Die Polarisation des Elektronenstrahls	6
2.4 Polarisationsaufbau durch den Sokolov-Ternov-Effekt	7
2.5 Die Bewegung des Polarisationsvektors unter äußeren Feldern	10
3. Berechnungsmethoden für die Teilchenbahn des Elektrons	12
3.1 Das Differentialgleichungssystem für die Teilchenbewegung	12
3.2 Berechnung der linearen Optik	14
3.3 Der "Closed Orbit" als neues Bezugssystem	19
3.4 Die Strahlausdehnung in der linearen Maschine	18
3.5 Behandlung von Nichtlinearitäten	21
3.6 Die Strahl-Strahl-Wechselwirkung	23
4. Berechnung der Spinbewegung	24
4.1 Bewegungsgleichung für den Spin	24
4.2 Näherungen zur nichtlinearen Berechnung der Spinbewegung	26
4.3 Die Definition der Polarisationsrichtung	26
4.4 Depolarisierende Resonanzen	27
5. Aufbau des Spin-Tracking-Programms SITROS	29
5.1 Die Transformation der Ortskoordinaten	30
5.2 Die Spintransformation	30
5.3 Variation des Spin-Tunes	31
5.4 Photon Emission	33
5.5 Bestimmung des Strahldimensionen	34
5.6 Extrapolation des Polarisationsgrades	35
5.7 Der Ablauf des Programms SITROS	36
6. Ergebnisse	39
6.1 Vergleich von Messungen und Rechnungen	39
6.2 Der Einfluß von Sextupolen auf die Polarisation	40
6.3 Depolarisation durch Strahl-Strahl-Wechselwirkung	41
7. Zusammenfassung	56
8. Danksagung	57
Anhang	58
Das elektrische Potential des Bunches	58
Die Ablenkung des Elektrons	61
Polarisationsberechnung in linearer Näherung	66
Literaturverzeichnis	68

1. EINLEITUNG

In der Hochenergiephysik besteht ein großes Interesse daran, Speicher-
ringe mit polarisierten Teilchenstrahlen zu betreiben. Die Polarisation ermög-
licht es, zusätzliche Informationen zu gewinnen: Zum einen ist es möglich,
die Ruhemasse von neu erzeugten Elementarteilchen mit großer Präzision
($\frac{\Delta E}{E} \approx 10^{-6}$) zu bestimmen /1,2/, zum anderen wird aus der Verwendung
von longitudinal polarisierten Strahlen mit wechselnder Helizität, wie es für
den Speicherring HERA /3,4/ geplant ist, Aufschlüsse über die Natur der
schwachen Wechselwirkung erwartet.

In Elektronen-Speicherringen werden die Teilchen durch die Emission
von Synchrotronstrahlung antiparallel zur Richtung des Ablenkfeldes pola-
risiert. Dieser Polarisationsaufbau wird Sokolov-Ternov-Effekt /5/ genannt.
In einem idealen, flachen Ring ist der maximale Polarisationsgrad 92,4%. In
einem realen Ring bewirken Feldfehler, daß die Polarisation durch die soge-
nannte "Spin-Bahn-Kopplung" /6/ wieder ganz oder teilweise zerstört wird.

Die Messung der Polarisation an den Speicherringen DORIS /7,8/ und
PETRA /9,10,11/ zeigen, daß die depolarisierenden Effekte mit der Größe des
Speicherrings zunehmen. In DORIS konnte ohne Optimierung ein Polarisati-
onsgrad von 90 % gemessen werden. In PETRA wurde ein Polarisationsgrad
ungefähr 80% erst erreicht, nachdem eine Korrektur des Closed Orbits mit
dem "harmonic orbit matching"-Verfahren /12,13/ durchgeführt worden war.
Durch diese Korrektur wird die Spin-Bahn-Kopplung minimiert.

Es stellt sich die Frage, ob sich diese Tendenz in dem geplanten neuen
Speicherring HERA fortsetzt, dessen Umfang dreimal so groß ist wie der von
PETRA. Durch den Einbau von "Spinrotatoren" (eine jeweils 60 m lange
Anordnung von horizontalen und vertikalen Ablenkmagneten oder Solenoiden
auf beiden Seiten jeder Wechselwirkungszone /14,15/) soll in HERA eine
longitudinale Polarisation erzeugt werden.

Um diese Frage vor der Fertigstellung von HERA zu beantworten, wur-
den auf dem Computer Simulationsrechnungen durchgeführt. Das erste Com-
puterprogramm, das die Polarisation in Elektronenspeicherringen berechnen
kann, ist das von A. Chao entwickelte Programm "SLIM" /16,17/. SLIM be-
rechnet die Spin-Bahn-Kopplung in linearer Näherung und kann deshalb auch
nur depolarisierende Resonanzen erster Ordnung beschreiben.

Bei den Messungen an PETRA /11/ und SPEAR /18/ hatte es sich je-
doch gezeigt, daß die nichtlinearen Effekte einen nicht zu vernachlässigenden

Anteil an der Depolarisation haben. Aus diesem Grund wurde es notwendig,
ein neues Programm zu erstellen, das diese Nichtlinearitäten berücksichtigt.
Während SLIM die Polarisation mit der Methode der Störungsrechnung er-
mittelt, mußte bei dem neuen Programm das Tracking-Verfahren verwendet
werden. Dieses neue Programm heißt SITROS.

Im SITROS Programm sind alle Effekte berücksichtigt, die die Polari-
sationsverhalten beeinflussen: Bei der Berechnung der Teilchenbahnen wer-
den Chromatizität, Dämpfung, Quantenanregung, Multipole und die Strahl-
Strahl-Wechselwirkung betrachtet, die Spindrehungen werden in Abhängigkeit
von den elektromagnetischen Feldern auf den Teilchenbahnen ausgeführt.

Damit das Programm nicht untragbar viel Rechenzeit benötigt, werden
verschiedene Näherungen angewandt, die in dieser Arbeit ausführlich disku-
tiert werden. Die Rechnungen für den Speicherring PETRA zeigen, daß das
SITROS Programm mit diesen Näherungen eine gute Beschreibung des Pola-
risationsverhaltens liefert.

2. QUANTENMECHANISCHE BETRACHTUNG DES SPINS

2.1 Der Spin und das magnetische Moment des Elektrons

Der Begriff des Elektronenspins wurde 1926 von Goudsmit und Uhlenbeck eingeführt: Das Elektron hat einen Eigendrehimpuls \vec{s} , der mit dem magnetischen Moment $\vec{\mu}$ verbunden ist durch:

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2m_e c} \vec{s} \quad (2.1)$$

Der Faktor g beschreibt dabei den Unterschied zu einer geladenen Kugel mit dem Drehimpuls \vec{L} , deren magnetisches Moment

$$\vec{\mu}_k = \frac{e}{2m_k c} \vec{L} \quad (2.2)$$

ist. Goudsmit und Uhlenbeck postulierten $g = 2$. Damit konnte der anormale Zeemaneffekt erklärt werden.

1927 zeigte Thomas /19/, daß mit dem g -Faktor 2 auch die Feinstrukturtaufspaltung richtig beschrieben wird, wenn die durch die relativistische Bewegung entstehende zusätzliche Rotation berücksichtigt wird (Thomas-Präzession).

Mit der relativistischen Elektronentheorie von Dirac /20,21/ wurde 1928 eine geschlossene Beschreibung des Spins geschaffen. Die Dirac-Gleichung ist eine relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung.

Die Hamiltonfunktion für ein freies Teilchen lautet in der nichtrelativistischen Form:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (2.3)$$

und in der relativistischen Form:

$$H^2 = c^2 \vec{p}^2 + m_e^2 c^4 \quad (2.4)$$

Werden die Gleichungen als quantenmechanische Operatorgleichungen betrachtet, so muß man $H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ und $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ setzen. (2.3) ist deshalb eine Differentialgleichung 1. Ordnung in der Zeit, (2.4) ist von 2. Ordnung. Dirac ersetzte (2.4) durch den Ansatz:

$$(H - c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m_e c^2)(H + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_e c^2) = 0 \quad (2.5)$$

(2.5) ist mit (2.4) identisch, wenn $\vec{\alpha}$ und β Matrizen sind, die den Vertauschungsregeln genügen:

$$\begin{aligned} \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu &= 2\delta_{\mu\nu} \\ \alpha_\mu \beta + \beta \alpha_\mu &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

Diese Bedingungen können mit 4×4 -Matrizen erfüllt werden, die die 2×2 Pauli-Matrizen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ als Unter Matrizen enthalten:

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Eine Wellenfunktion, die der Gleichung

$$(H + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_e c^2)\Psi = 0 \quad (2.7)$$

genügt, ist auch eine Lösung der Gleichung (2.5). Die Gleichung (2.7) wird Dirac-Gleichung genannt. Sie hat den Vorteil, daß sie wie die Schrödingergleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung ist.

Bei der Verwendung der Hamiltonfunktion (2.7) stellt man fest, daß der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ keine Erhaltungsgröße ist oder quantenmechanisch ausgedrückt: H und \vec{L} sind nicht kommutativ. Wenn der Gesamtdrehimpuls wie in der klassischen Mechanik eine Erhaltungsgröße sein soll, so muß der Spin \vec{s} des Elektrons als zusätzlicher Drehimpuls eingeführt werden, so daß $\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$ mit H kommutiert. Dieser Spinoperator hat die Form:

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (2.8)$$

wobei $\vec{\sigma}$ ein Vektor aus 4×4 -Matrizen ist:

$$\vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Der Einfluß von äußeren elektromagnetischen Feldern wird berücksichtigt, wenn man in den Gleichungen (2.5) oder (2.7)

$$\begin{aligned} H &\text{ durch } H - e\phi \\ \text{und } \vec{p} &\text{ durch } \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \end{aligned} \quad (2.9)$$

ersetzt, wobei \vec{A} und ϕ die elektromagnetischen Potentiale sind. Setzt man (2.9) in (2.5) ein, so erhält man, da \vec{p} nicht mit \vec{A} kommutiert, nach einigen Umrechnungen /22/:

$$(H - e\phi)^2 - c^2\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - m_e^2c^4 + e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + ie\hbar c\vec{\alpha} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.10)$$

Zerlegt man hier H in die kinetische Energie und die Ruhemasse des Elektrons $H = H_{kin} + m_e c^2$ und betrachtet die nichtrelativistische Näherung, in der die Energien H_{kin} und $e\phi$ klein gegenüber der Ruhemasse sind, so erhält man mit $(H - e\phi)^2 - m_e^2c^4 \simeq 2m_e c^2(H_{kin} - e\phi)$:

$$H_{kin} = \frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2m_e c}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (2.11)$$

Diese Gleichung wird Pauli-Gleichung genannt.

Identifizieren wir in (2.11) den Ausdruck $\frac{e\hbar}{2m_e c}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ das magnetische Moment des Elektrons, so erhalten wir mit (2.8):

$$\vec{\mu} = 2 \frac{e}{2m_e c} \vec{s}$$

Aus der Dirac-Gleichung folgt also der g -Faktor $g = 2$.

Experimentell findet man jedoch, daß der g -Faktor nicht genau 2 sondern etwas größer ist. Die Größe $a \equiv (g - 2)/2$ nennt man das anomale magnetische Moment des Elektrons. Gemessen wurde /23/:

$$a = (115965.77 \pm 0.35) \cdot 10^{-8}$$

Die Abweichung zum Faktor 2 läßt sich durch die Quantenelektrodynamik erklären. In dem Ansatz zur Dirac-Gleichung wurden die elektromagnetischen Felder durch die klassischen Potentiale eingeführt. Diese Felder müssen jedoch durch Feldquanten (Photonen) beschrieben werden. Die sogenannten Strahlungskorrekturen ergeben dann die Abweichung im g -Faktor.

2.2 Die Lösung der Dirac-Gleichung für ein freies Elektron

Die Dirac-Gleichung ist ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die vier Komponenten der Wellenfunktion. Für ein freies Teilchen, das sich

in z -Richtung bewegt, lautet die Wellenfunktion:

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}$$

Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen mit positiver Energie für die Wellenfunktion, die die Dirac-Gleichung erfüllen:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E + m_e c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{und} \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-cp_z}{E + m_e c^2} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}$$

Dabei ist $E = \hbar\omega$ und $p_z = \hbar k$.

Ψ_1 und Ψ_2 sind gleichzeitig Eigenfunktionen des Operators $\tilde{\sigma}_z$ mit den Eigenwerten ± 1 . Sie sind deshalb die Wellenfunktionen für Teilchen, deren Spin parallel oder antiparallel zur Bewegungsrichtung steht.

Man kann jedoch keine Linearkombination von Ψ_1 und Ψ_2 finden, die Eigenfunktion für die Operatoren $\tilde{\sigma}_x$ oder $\tilde{\sigma}_y$ ist, es sei denn, p_z ist null, d.h. das Laborsystem ist das Ruhesystem des Elektrons. Eine beliebige Spinrichtung kann also nur im Ruhesystem des Elektrons definiert werden.

Wir definieren deshalb den Spin als eine Eigenschaft des Elektrons in seinem Ruhesystem. Die 3. und 4. Komponente der Wellenfunktionen ist dann identisch null, so daß der Operator $\tilde{\sigma}$ in den Gleichungen (2.8) und (2.11) auf die 2×2 Paulimatrizen reduziert werden kann.

2.3 Die Polarisation des Elektronenstrahls

In einem Speicherring werden die Elektronen in Paketen (Bunch) mit $\approx 10^{11}$ Teilchen beschleunigt. Um die Polarisation des Strahls zu beschreiben, definieren wir uns den Polarisationsvektor

$$\vec{\xi} \equiv \frac{\langle \Psi | \tilde{\sigma} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (2.12)$$

als Erwartungswert des Spinoperators $\vec{\sigma}$. Die Wellenfunktion muß dabei so normiert sein, daß $\langle \Psi | \Psi \rangle \equiv N$ die Anzahl der Teilchen im Bunch ist. ξ ist also ein Vektor, dessen Betrag maximal 1 ist.

Betrachtet man die Polarisation in z -Richtung ξ_z , so erhält man für die Wellenfunktion $\Psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}$:

$$\xi_z = \frac{|a_1|^2 - |a_2|^2}{|a_1|^2 + |a_2|^2} = \frac{N^\uparrow - N^\downarrow}{N^\uparrow + N^\downarrow} \quad (2.13)$$

Dabei sind N^\uparrow und N^\downarrow die Anzahl der Elektronen, deren Spin in z -Richtung $+\frac{\hbar}{2}$ und $-\frac{\hbar}{2}$ ist.

Da im Ruhesystem des Elektrons keine Richtung ausgezeichnet ist, gilt die Beziehung (2.13) für jede beliebige Polarisationsrichtung. Die Bezeichnung z -Richtung wird im folgenden für die vertikale Richtung benutzt. Im Unterschied dazu wird die Richtung, in der wir die maximale Polarisation erwarten, \vec{n} -Achse genannt.

Denkt man sich den Strahl aus zwei Einzelstrahlen mit N_1, N_2 Teilchen zusammengesetzt, deren Polarisation in \vec{n} -Richtung ξ_1, ξ_2 ist, so gilt:

$$\xi = \frac{N_1^\uparrow + N_2^\uparrow - N_1^\downarrow - N_2^\downarrow}{N_1^\uparrow + N_2^\uparrow + N_1^\downarrow + N_2^\downarrow} = \frac{N_1 \xi_1 + N_2 \xi_2}{N} \quad (2.14)$$

d.h. die Polarisationsvektoren werden gewichtet mit der Anzahl ihrer Teilchen gemittelt.

2.4 Polarisationsaufbau durch den Sokolov-Ternov-Effekt

Ein Elektronenstrahl, der in einem Speicherring umläuft, kann durch den sogenannten Sokolov-Ternov-Effekt $/5/$ polarisiert werden. Dieser Effekt ergibt sich aus der quantenhaften Abstrahlung der Synchrotronstrahlung. Bei der Emission des Photons kann der Spin des Elektrons umklappen. Die Rate solcher Emissionen mit "Spin-flip" ist:

$$R = \frac{5\sqrt{3}}{16} \frac{e^2 \gamma^5 \hbar}{m_e^2 c^2 \rho^3} \left[1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \cdot \vec{s})^2 + \frac{8}{5\sqrt{3}} \vec{n} \cdot \vec{b} \right] \quad (2.15)$$

Dabei ist \vec{n} die Richtung, des Elektronenspins vor der Emission. \vec{b} ist ein Einheitsvektor in Richtung des ablenkenden Magnetfeldes und \vec{s} die Bewegungsrichtung des Elektrons. e ist die Elektronenladung, γ der Lorentzfaktor und ρ der Krümmungsradius der Elektronenbahn.

Für die Anzahl N^\uparrow der Elektronen mit Spin in und N^\downarrow mit Spin gegen die \vec{n} -Richtung läßt sich folgende Zeitabhängigkeit aufstellen:

$$\frac{dN^\uparrow}{dt} = R^\uparrow N^\downarrow - R^\downarrow N^\uparrow$$

R^\uparrow und R^\downarrow sind die Raten für den Übergang des Elektrons aus dem Zustand "Spin up (N^\uparrow)" in den Zustand "Spin down (N^\downarrow)" und umgekehrt. Die Gesamtzahl der Elektronen ist $N = N^\uparrow + N^\downarrow$. Dann ist:

$$\frac{dN^\uparrow}{dt} = R^\uparrow N - (R^\uparrow + R^\downarrow) N^\uparrow$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$N^\uparrow(t) = N^\uparrow(t=0) e^{-(R^\uparrow + R^\downarrow)t} + \frac{R^\downarrow N}{R^\uparrow + R^\downarrow} (1 - e^{-(R^\uparrow + R^\downarrow)t})$$

Ebenso erhält man:

$$N^\downarrow(t) = N^\downarrow(t=0) e^{-(R^\uparrow + R^\downarrow)t} + \frac{R^\uparrow N}{R^\uparrow + R^\downarrow} (1 - e^{-(R^\uparrow + R^\downarrow)t})$$

Daraus erhalten wir durch Einsetzen in (2.13):

$$\xi(t) = \xi(t=0) e^{-(R^\uparrow + R^\downarrow)t} + \frac{R^\uparrow - R^\downarrow}{R^\uparrow + R^\downarrow} (1 - e^{-(R^\uparrow + R^\downarrow)t}) \quad (2.16)$$

Hieraus ergibt sich eine maximale Polarisation

$$P_\infty = \frac{R^\uparrow - R^\downarrow}{R^\uparrow + R^\downarrow} \quad (2.17)$$

und eine Polarisationszeit:

$$\frac{1}{\tau_p} = R^\uparrow + R^\downarrow \quad (2.18)$$

Bei der Berechnung von P_∞ und τ_p sind wir davon ausgegangen, daß die Spinflip Raten im ganzen Ring konstant sind. In einem realen Speicherring sind zwischen den Ablenkmagneten auch gerade Stücke enthalten und der Winkel zwischen der \vec{n} -Achse und dem Magnetfeld ist nicht konstant. Unser Ansatz gilt jedoch, da die Umlaufzeit gegenüber der Polarisationszeit sehr klein ist. Wir müssen nur die über einen Umlauf gemittelten Raten für $R^{\uparrow\uparrow}$ und $R^{\downarrow\downarrow}$ einsetzen. Wir erhalten:

$$P_\infty = \frac{8}{5\sqrt{3}} \int \frac{1}{|\rho^3|} \vec{b} \cdot \vec{n} ds \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{5\sqrt{3}}{8} \frac{e^2 \gamma^5 \hbar}{m_e^2 c^2 L} \int \frac{1}{|\rho^3|} \left(1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \cdot \vec{s})^2\right) ds \quad (2.20)$$

L ist der Ringumfang.

In einem ebenen Ring wie PETRA ist die Polarisationsrichtung parallel zu den Ablenkfeldern, so daß man für die ideale Maschine

$$P_\infty = \frac{8}{5\sqrt{3}} = 92.37\%$$

erhält.

Durch die sogenannte "Spin-Bahn-Kopplung" gibt es jedoch in einem realen Speicherring eine zusätzliche Depolarisation¹, die in den Gleichungen (2.19) und (2.20) nicht enthalten ist.

Durch die Emission von Photonen werden Betatronschwingungen des Elektrons angeregt. Sind die elektromagnetischen Felder auf der Schwingungsbahn von den Feldern auf der Idealbahn verschieden, so erfolgt dadurch eine Änderung des Spinerwartungswertes an der gleichen Stelle nach der Dämpfung der Betatronschwingung.

Die dadurch entstehende Depolarisation wird durch die Depolarisationszeit τ_d beschrieben. Die maximale Polarisation und die Polarisationszeit ist

¹Da die Synchrotronstrahlungsleistung von der Polarisationsrichtung des Strahls abhängt, kann die Spin-Bahn-Kopplung auch einen Polarisationsaufbau mit einer maximalen Polarisation von 95% bewirken. Die dafür notwendigen Bedingungen sind in /6/ beschrieben. Dieser Effekt wird im SITROS Programm nicht berücksichtigt, da er für die bei DESY existierenden und geplanten Speicherringe ohne Bedeutung ist.

bei Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung:

$$P_{max} = P_\infty \frac{\tau_d}{\tau_p + \tau_d} \quad (2.21)$$

$$\tau = \tau_p + \tau_d$$

2.5 Die Bewegung des Polarisationsvektors unter äußeren Feldern

Die Richtung des Polarisationsvektors ξ ändert sich unter dem Einfluß von äußeren elektromagnetischen Feldern. Die Änderung wird nach dem Ehrenfesttheorem aus der Pauligleichung (2.11) bestimmt:

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi | \vec{\sigma} | \Psi \rangle = \langle \Psi | H \cdot \vec{\sigma} - \vec{\sigma} \cdot H | \Psi \rangle \quad (2.22)$$

mit

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi - g \frac{\hbar}{2m_e c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (2.11)$$

Die Ableitung nach dt unterstreicht, daß diese Gleichung für das Ruhesystem des Elektrons gilt. Durch Einsetzen von (2.12) erhält man:

$$\frac{d}{dt} \vec{\xi} = g \frac{e}{2m_e c} \vec{\xi} \times \vec{B} \quad (2.23)$$

Der Vektor $\vec{\xi}$ ist ein axialer Vektor im Ruhesystem des Elektrons. Wir wollen seine Bewegung durch Größen beschreiben, die im Laborsystem definiert sind. Dazu wollen wir die Gleichung (2.23) zu einer Gleichung mit kovarianten Vierervektoren erweitern /24/. Die Elemente, aus der diese Gleichung bestehen soll, ist ein Viererpolarisationsvektor ξ^ν , die Vierergeschwindigkeit U^ν des Elektrons im bewegten System und ihre Ableitung $\frac{dU^\nu}{dt}$ und der elektromagnetische Feldtensor $F^{\nu\mu}$.

Im Ruhesystem soll die Zeitkomponente ξ^0 des Vierervektors null sein, so daß ξ^ν in $\vec{\xi}$ übergeht. Wegen der Erhaltung des Skalarprodukts von Vierervektoren gilt dann:

$$U_\nu \xi^\nu = 0$$

3. BERECHNUNGSMETHODEN FÜR DIE TEILCHENBAHN DES ELEKTRONS

Zur Berechnung der Spinbewegung werden die Methoden verwendet, die sich bei der Berechnung der Teilchenbahnen bewährt haben. Die Beschreibung des Elektrons muß dabei nur durch die Spinkomponenten erweitert werden. Im folgenden werden deshalb die Bahnrechnungsmethoden erläutert und danach der Spinteil ergänzt.

3.1 Das Differentialgleichungssystem für die Teilchenbewegung

Bei der Planung eines Speicherrings wird die Bahn des idealen Teilchens festgelegt. Sie wird durch den Ablenkradius der Führungsmagnete, deren Länge und Abstände beschrieben. Diese Teilchenbahn wird "Design Orbit" genannt. Die Optikkberechnungen werden im allgemeinen in einem krummlinigen Koordinatensystem durchgeführt, das mit der Projektion des Teilchens auf dem Design Orbit mitbewegt wird (Abbildung 1).

Die Bewegung eines beliebigen Teilchens wird in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Lorentzgleichung bestimmt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E \cdot \dot{\vec{r}}}{c^2} \right) = e \vec{E} + \frac{e}{c} (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) + \vec{R} \quad (3.1)$$

Dabei ist \vec{r} der Ortsvektor des Elektrons mit der Ladung e , E die Teilchenenergie, c die Lichtgeschwindigkeit, \vec{E} und \vec{B} sind die elektrischen und magnetischen Felder und \vec{R} ist die Rückwirkung der Synchrotronstrahlung auf die Elektronen /26/:

$$\vec{R} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} \dot{\vec{r}} \left((\dot{\vec{r}})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\ddot{\vec{r}})^2 \right) \quad (3.2)$$

An Stelle der Zeit t wird eine neue unabhängige Variable eingeführt: Die Bahnlänge s entlang des Design Orbits. Ist l die Bahnlänge entlang der tatsächlichen Teilchenbahn, so geht das Differential über in:

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{v}{l'} \frac{d}{ds} \quad (3.3)$$

Die Ableitung nach s wird durch das Zeichen ' gekennzeichnet. l ist die Länge der Teilchenbahn, dl/dt die Teilchengeschwindigkeit $v \simeq c$. l' gibt daher das

Der Zusammenhang zwischen ξ und ξ^ν ergibt sich daraus durch:

$$\xi^{1,2,3} = \xi + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{\xi}) \cdot \vec{\beta} \quad (2.24)$$

$$\xi^0 = \gamma \vec{\beta} \cdot \xi$$

Dabei ist $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ die Geschwindigkeit des Elektrons im Laborsystem. Die rechte Seite der kovarianten Gleichung soll wie Gleichung (2.23) linear in $F^{\nu\mu}$ und ξ^ν sein. Ein allgemeiner Ansatz ist:

$$\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} = a_1 F^{\lambda\mu} \xi_\mu + \frac{a_2}{c} (\xi_\nu F^{\nu\mu} U_\mu) U^\lambda + \frac{a_3}{c^2} (\xi_\nu \frac{dU^\nu}{d\tau}) U^\lambda \quad (2.25)$$

wobei a_1, a_2, a_3 Konstanten sind. Diese werden aus den Bedingungen $U_\nu \xi^\nu = 0$ und $d(U_\nu \xi^\nu)/d\tau = 0$ bestimmt und daraus, daß (2.25) im Ruhesystem des Elektrons mit (2.23) identisch sein soll:

$$a_1 = a_2 = g \frac{e}{2m_e c} \quad a_3 = -1$$

Außerdem setzen wir die Lorentzkraft in der Form:

$$\frac{dU^\nu}{d\tau} = \frac{e}{m_e c} F^{\nu\mu} U_\mu$$

ein und erhalten aus (2.15):

$$\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} = \frac{e}{m_e c} \left[\frac{g}{2} F^{\lambda\mu} \xi_\mu + \frac{1}{c^2} \left(\frac{g-2}{2} \right) (\xi_\nu F^{\nu\mu} U_\mu) U^\lambda \right] \quad (2.26)$$

Diese Gleichung wird nach Bargman, Michel und Telegdi /25/ BMT-Gleichung genannt. Durch Einsetzen der Gleichung (2.24) kann die BMT-Gleichung in die gebräuchlichere Form umgeschrieben werden:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{e}{m_e c \gamma} \vec{\xi} \times \left[(\gamma a + 1) \vec{B} - a \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{\beta} \right. \\ \left. - \left(\gamma a + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) (\vec{\beta} \times \vec{E}) \right] \quad (2.27)$$

Verhältnis zwischen der Länge der Teilchenbahn und des Design Orbits an. Wir teilen die Energie E des Teilchens auf in die Sollenergie E_0 und die Energieabweichung ΔE . Es ist dann $E = E_0(1 + \delta)$ mit $\delta = \frac{\Delta E}{E}$.

Einsetzen in die Lorentzgleichung gibt dann:

$$\frac{e}{E_0} \vec{E} + \frac{1}{\nu} \frac{e}{E_0} \vec{r}' \times \vec{B} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_0} \gamma_0^3 (1 + \delta)^4 \frac{\vec{r}'}{(\nu')^5} \left[(\vec{r}'')^2 - (\nu'')^2 \right] = \frac{1}{\nu'} \left[\delta' \vec{r}' + (1 + \delta) \left(\vec{r}'' - \frac{\nu''}{\nu'} \vec{r}' \right) \right] \quad (3.4)$$

Wir zerlegen den Vektor \vec{r}' von einem frei wählbaren Nullpunkt zum Ort des Elektrons in den Vektor \vec{R} zum Ursprung des mitbewegten Koordinatensystems und die relativen Koordinaten x und z . Bezeichnen wir die Einheitsvektoren im gekrümmten Koordinatensystem mit $\vec{x}, \vec{z}, \vec{s}$ dann gilt:

$$\vec{r} = \vec{R} + x\vec{x} + z\vec{z} \quad (3.5)$$

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{R}}{ds} + \frac{dx}{ds}\vec{x} + x \frac{d\vec{x}}{ds} + \frac{dz}{ds}\vec{z} + z \frac{d\vec{z}}{ds}$$

Hier müssen die Frenetschen Formeln eingesetzt werden, in denen h_x und h_z die Krümmungen des Design Orbits sind:

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{s} \quad \frac{d\vec{x}}{ds} = -h_x \vec{s} \quad \frac{d\vec{z}}{ds} = -h_z \vec{s} \quad \frac{d\vec{s}}{ds} = h_x \vec{x} + h_z \vec{z} \quad (3.6)$$

Wir erhalten:

$$\vec{r}' = x' \vec{x} + z' \vec{z} + (1 - x h_x - z h_z) \vec{s}$$

$$\vec{r}'' = (x'' + h_x - x h_x^2 - z h_x h_z) \vec{x} + (z'' + h_z - x h_x h_z - z h_z^2) \vec{z} + (-2x' h_x - 2z' h_z) \vec{s}$$

Zur Berechnung von l' benutzen wir:

$$(dl)^2 \equiv (d\vec{r}')^2 = (\vec{r}' ds)^2 = \vec{r}'^2 ds^2 \quad (3.7)$$

$$l'^2 = \left(\frac{dl}{ds} \right)^2 = \vec{r}'^2$$

$$= 1 - 2x h_x - 2z h_z + x'^2 + z'^2 + 2x z h_x h_z + x^2 h_x^2 + z^2 h_z^2$$

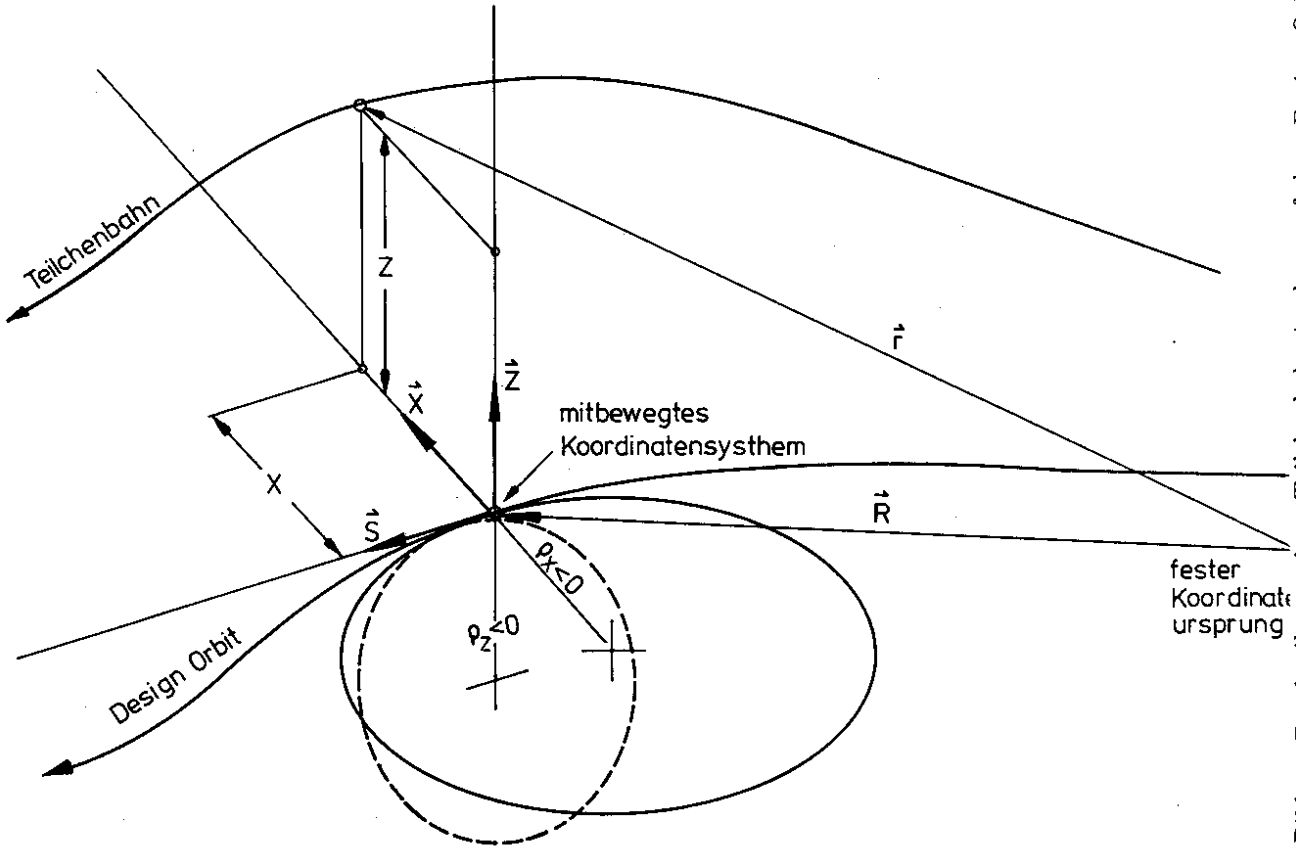


Bild 1 : Beschreibung einer Teilchenbahn in dem auf dem Design Orbit mitbewegten Koordinatensystem.

Die elektrischen und magnetischen Felder des Beschleunigers werden in bezug auf den Design Orbit angegeben:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}(x, z, s, t) \\ \vec{E} &= \vec{E}(s, t)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Die elektrischen Felder in den Beschleunigungsstrecken und die Felder spezieller Magnete hängen von der Zeit t ab. Der Zeitpunkt, in dem das Teilchen das Feld passiert, hängt von der Länge l der Teilchenbahn ab. Die Länge erhalten wir aus l' durch Integration:

$$l = \int_0^s l' ds \quad (3.9)$$

Mit $\ell = l - s$ ergibt sich die Zeit aus:

$$t = t_0(s = 0) + (s + \ell)/c = t_0(s) + \ell/c$$

Neben x, x', z, z', ℓ ist die relative Energieabweichung $\delta = \frac{\Delta E}{E}$ eine Variable des Teilchens. Sein Zustand wird also durch den 6-dimensionalen Vektor $\vec{X} = (x, x', z, z', \ell, \delta)$ angegeben. Setzt man $\vec{r}', \vec{r}'', \vec{E}, \vec{B}$ in die Lorentzgleichung ein, so erhält man ein System von nichtlinearen, gekoppelten Differentialgleichungen.

Anmerkung: Es ist auch die Darstellung möglich, in der das Koordinatensystem mit konstanter Geschwindigkeit (wie ein Teilchen) auf dem Design Orbit mitgeführt wird und die longitudinale Abweichung des Teilchens im Vektor \vec{r} explizit enthalten ist:

$$\vec{r} = \vec{R} + x\vec{x} + z\vec{z} + \ell\vec{s}$$

Die Beschreibung der Magnetfelder ist in dieser (konsequenteren) Darstellung jedoch komplizierter: Statt $\vec{B} = \vec{B}(x, z, s)$ schreiben wir dann $\vec{B} = \vec{B}(x, z, s + \ell)$. In unserer Darstellung hängt \vec{B} nicht von ℓ ab. Erst bei der Beschreibung zeitabhängiger Felder muß der Zeitpunkt aus ℓ ermittelt werden.

3.2 Berechnung der linearen Optik

Bis hier sind in der Entwicklung der Bewegungsgleichung alle Nichtlinearitäten einbezogen worden. Linearisiert man das Differentialgleichungssystem, so kann man die analytische Lösung des Gleichungssystems für Stücke mit jeweils konstanten Feldkoeffizienten angeben.

Die Magnetfelder werden dazu nach den Potenzen der Koordinaten x und z entwickelt. Wir schreiben¹:

$$\begin{aligned}\frac{e}{E_0} B_z(x, z, s) &= -h_x(s) - j_x(s) + k(s)x + \bar{k}(s)z + \text{höhere Ordnung} \\ \frac{e}{E_0} B_x(x, z, s) &= h_z(s) + j_z(s) + k(s)z - \bar{k}(s)x + \text{höhere Ordnung} \\ \frac{e}{E_0} B_s(x, z, s) &= h_s(s)\end{aligned}\quad (3.10)$$

Dabei wurden die Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned}h_x + j_x &= \frac{e}{E_0} B_z(x, z = 0) && \text{(Dipolstärke)} \\ -h_z - j_z &= \frac{e}{E_0} B_x(x, z = 0) && \text{(Dipolstärke)} \\ h_s &= \frac{e}{E_0} B_s(x, z = 0) && \text{(Solenoidstärke)} \\ \bar{k} &= \frac{e}{E_0} \frac{dB_z}{dz} = \frac{e}{E_0} \frac{dB_x}{dx} && \text{(45-grad Quadrupolstärke)} \\ k &= \frac{e}{E_0} \frac{dB_x}{dz} = -\frac{e}{E_0} \frac{dB_z}{dx} && \text{(Quadrupolstärke)}\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung werden nur konstante transversale elektrische Felder und longitudinale Magnetfelder zugelassen. Wir beschreiben die Wirkung der elektrischen Felder mit:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{e}{E_0} E_x \\ \epsilon_z &= \frac{e}{E_0} E_z \\ \epsilon_s &= \frac{e}{E_0} V_{peak} \left(\sin \phi_0 + k \frac{2\pi}{L} \ell \cos \phi_0 \right) = \epsilon_{s0} + \ell \epsilon_{st}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Dabei ist ϕ_0 die Sollphase des Cavities, L ist der Ringumfang und k ist die Harmonischenzahl $k = \frac{L}{\lambda}$, λ ist die Wellenlänge der Hochfrequenz.

¹ Wir zerlegen die Dipolstärke in die Sollkrümmung $h(s)$ und die Störung $j(s)$

Die in einem Speicherring verwendeten Magnete sind im allgemeinen so gestaltet, daß die Magnetstärken über die Länge des Magneten nahezu konstant sind. Deshalb treten die Ableitungen $d\vec{B}/ds$ nicht auf. Bei Dipolen und Solenoiden werden die Feldänderungen an den Magnetenden durch spezielle Fokussierungselemente nachträglich berücksichtigt.

Das lineare Differentialgleichungssystem hat dann die Form:

$$\begin{aligned} x'' &= G_x x + \overline{G_x} z + \epsilon_{s0} x' + h_x z' - h_x \delta + \epsilon_x + j_x \\ z'' &= G_z x + \overline{G_z} z + \epsilon_{s0} z' - h_z x' - h_z \delta + \epsilon_z + j_z \\ \delta' &= \epsilon_{s0} + \ell \epsilon_{sl} - \epsilon_{s0} h_x x - \epsilon_{s0} h_z z + \epsilon_x x' + \epsilon_z z' \\ &\quad + C_\gamma b^2 + B_x x + B_z z + B_x x' + B_z z' + 2C_\gamma b^2 \delta \\ \ell' &= -h_x x - h_z z \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit

$$\begin{aligned} C_\gamma &= -\frac{2e^2}{3m_0} \gamma_0^3 \\ G_x &= -k - h_x^2 - 2j_x h_x + \epsilon_{s0} h_x \\ G_z &= -k - h_z^2 - 2j_z h_z + \epsilon_{s0} h_z \\ \overline{G_x} &= -\bar{k} - h_x h_z - 2j_x h_z + \epsilon_{s0} h_z \\ \overline{G_z} &= -\bar{k} - h_x h_z - 2j_z h_x + \epsilon_{s0} h_x \\ B_x &= C_\gamma (-2k b_x - 2\bar{k} b_z - 2h_x^2 b_x - 2h_x h_z b_z + h_x b^2) \\ B_z &= C_\gamma (-2k b_z - 2\bar{k} b_x - 2h_z^2 b_z - 2h_x h_z b_x + h_z b^2) \\ B_{x'} &= 2C_\gamma (b_x \epsilon_{s0} + b_z h_s) \\ B_{z'} &= 2C_\gamma (b_z \epsilon_{s0} - b_x h_s) \\ h_x^2 &= h_x^2 + h_z^2 \\ b_x &= h_x + j_x + \epsilon_x \\ b_z &= h_z + j_z + \epsilon_z \\ b^2 &= b_x + b_z \end{aligned}$$

Das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung läßt sich in ein System 1. Ordnung umschreiben in der Form:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{C} \quad (3.13)$$

17

Dabei ist A die 6×6 Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_x & \epsilon_{s0} & \overline{G_x} & h_s & 0 & h_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \overline{G_z} & -h_s & G_z & \epsilon_{s0} & 0 & h_z \\ h_x & 0 & -h_z & 0 & 0 & 0 \\ B_x - \epsilon_{s0} h_x & \epsilon_{s0} + B_{x'} & B_z - \epsilon_{s0} h_z & \epsilon_{s0} + B_{z'} & \epsilon_{sl} & 2C_\gamma b^2 \end{pmatrix}$$

und \vec{C} ist der Vektor:

$$\vec{C} = (0, \epsilon_x + j_x, 0, \epsilon_z + j_z, 0, C_\gamma b^2 + \epsilon_{s0})$$

Die Transformation eines Zustandsvektors \vec{X} durch einen Magneten, ein Cavity oder ein feldfreies Stück läßt sich durch die homogene Lösungsmatrix M und den inhomogenen Lösungsvektor \vec{H} darstellen:

$$\vec{X}(s_1) = M(s_1, s_0) \vec{X}(s_0) + \vec{H}(s_1, s_0) \quad (3.14)$$

Dabei ergeben sich M und \vec{H} als Lösung der Differentialgleichung mit $2\ell'$:

$$\begin{aligned} M &= e^{A \cdot (s_1 - s_0)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n (s_1 - s_0)^n \\ \vec{H} &= (1 - M(s_1, s_0))^{-1} \vec{C} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Neben dieser Lösung durch Reihenentwicklung läßt sich die Matrix M und \vec{H} oft auch analytisch errechnen. Dazu kann z.B. die Methode der Laplace Transformation verwendet werden.

Wir fügen unserem 6-dimensionalen Teilchenvektor nun eine 7. Komponente zu, die konstant=1 ist. Damit können wir die homogenen und inhomogenen Terme der Differentialgleichung in gleicher Weise durch eine Matrix $M_{7 \times 7}$ beschreiben, die aus M und \vec{H} zusammengesetzt ist.

Die Transformation für einen Umlauf im Speicherring (Umlaufmatrix) ergibt sich durch Multiplikation der Einzelmatrizen.

18

3.3 Der "Closed Orbit" als neues Bezugssystem

Die Definition des Design Orbits ist unabhängig von Störfeldern durch Fehlaufstellung oder Fehlerregung der Magnete und von Strahlungseffekten. Deshalb ist der Design Orbit in einem realen Speicherring keine wirkliche Teilchenbahn.

Die geschlossene Teilchenbahn in einem Speicherring nennt man "Closed Orbit". Der Closed Orbit ist die zentrale Teilchenbahn im Strahl. Alle anderen Teilchen schwingen um den Closed Orbit. Die Schwingungen lassen sich einfach beschreiben, wenn man nicht den Design Orbit, sondern den Closed Orbit als Bezugssystem wählt. Da der Closed Orbit im Gegensatz zum Design Orbit eine wirkliche Teilchenbahn ist, entsprechen die Krümmungen den Ablenkfeldern. Die inhomogenen Terme der Differentialgleichung entfallen in diesem Bezugssystem.

Zur Beschreibung einer beliebigen Teilchenbahn geht man deshalb in zwei Schritten vor:

1. Der Closed Orbit wird in bezug auf den Design Orbit beschrieben (7×7 Matrix).
2. Die gesuchte Teilchenbahn wird in bezug auf den Closed Orbit beschrieben (6×6 Matrix).

In der linearen Rechnung ergibt sich der Closed Orbit durch den Eigenvektor der Umlaufmatrix $M_{7 \times 7}$ mit dem Eigenwert 1. In einer nichtlinearen Rechnung kann man den Closed Orbit finden, in dem man iterativ die Umlaufmatrix in bezug auf den vorläufig errechneten Closed Orbit und deren Eigenvektor bestimmt.

3.4 Die Strahlausdehnung in der linearen Maschine

Der Verlauf einer Teilchenbahn mit dem Anfangsvektor \vec{X} läßt sich mit Hilfe der Eigenwerte λ_k und der Eigenvektoren \vec{E}_k der Umlaufmatrix $M_{6 \times 6}$ vorhersagen. Es gibt drei Paare von zueinander konjugiert komplexen Eigenwerten. Die Eigenvektoren bilden eine orthogonale Basis im 6-dimensionalen Zustandsraum. Deshalb läßt sich jeder beliebige Teilchenvektor als Linearkombination der Eigenvektoren darstellen. Transformiert man nun den Teilchenvektor und die Eigenvektoren durch den Ring, so bleiben die Amplituden

A_k der Linearkombination konstant.

$$\vec{X}(s_1) = M \vec{X}(s_0) = \sum A_k M \vec{E}_k(s_0) = \sum A_k \vec{E}_k(s_1) \quad (3.16)$$

Der Verlauf der Teilchenbahn wird also durch den Verlauf der Eigenvektoren bestimmt.

Der Verlauf der Eigenvektoren wird nun durch den dazugehörigen Eigenwert bestimmt. Mit jedem Umlauf werden die Eigenvektoren mit ihrem Eigenwert multipliziert. Haben die Eigenwerte den Betrag 1, so bleibt die Schwingungsamplitude konstant; ein Betrag kleiner 1 entspricht einer Dämpfung, ein Betrag größer 1 einer Entdämpfung.

In einem Elektronenspeicherring ist die Teilchenbewegung durch den Energieverlust durch die Synchrotronstrahlung gedämpft. Dieser Dämpfungseffekt wurde durch die Strahlungsrückwirkungskraft in unsere Differentialgleichungen einbezogen. Dabei wurde jedoch nicht berücksichtigt, daß die Abstrahlung nicht kontinuierlich, sondern stochastisch erfolgt.

Die Strahlungsrückwirkung (1.2) muß deshalb aufgeteilt werden in den bisher berechneten Mittelwert und die statistische Streuung um den Mittelwert:

$$\vec{R} = \langle \vec{R} \rangle + \delta \vec{R} \quad (3.17)$$

$\delta \vec{R}$ ist dabei eine zufällige Größe, deren Verteilungsfunktion die Bedingung erfüllt $/28/$:

$$\langle \delta \vec{R} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle (\delta \vec{R})^2 \rangle = \frac{55 r_e \hbar \gamma_0^5}{24 \sqrt{3} m_0 c} \frac{1}{\rho^3} \quad (3.18)$$

ρ ist der Krümmungsradius der Teilchenbahn. Die stochastischen Energiesprünge bewirken eine Anregung der Teilchenschwingungen, die der Dämpfung entgegenwirkt. Die Strahldimensionen ergeben sich aus dem Gleichgewicht zwischen Anregung und Dämpfung.

Dieses Gleichgewicht läßt sich in der linearen Rechnung ermitteln $/29/$, da dann Schwingungen, die durch einzelne Photonen angeregt werden, voneinander unabhängig sind. Für diese Berechnung wird die Teilchenbahn als Linearkombination der Eigenvektoren im 1. Umlauf mit zeitabhängigen Amplituden A_k dargestellt. Hat der Eigenwert λ_k die Form

$$\lambda_k = e^{-\alpha_k \pm i 2\pi Q} \quad (3.19)$$

wobei α_k die Dämpfungskonstante der Schwingung ist, so ist die Änderung der Amplitude $\langle \widetilde{A}_k^2 \rangle$ durch die Dämpfung:

$$\frac{d}{dt} \langle \widetilde{A}_k^2 \rangle = -\frac{2\alpha_k}{T_0} \langle \widetilde{A}_k^2 \rangle$$

Dabei ist T_0 die Umlaufzeit des Teilchens. Die Änderung der Amplituden durch die Energiesprünge ist:

$$\frac{d}{dt} \langle \widetilde{A}_k^2 \rangle = \frac{1}{2\pi R} \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{r_e \hbar \gamma^5}{m_e} \oint |E_{5k}|^2 \frac{1}{\rho^3} ds = \frac{\gamma k}{T_0} \quad (3.20)$$

E_{5k} ist dabei die 5. Komponente des k -ten Eigenvektors. Im Gleichgewicht ist dann

$$\langle \widetilde{A}_k^2 \rangle = \frac{2\gamma k}{\alpha_k} = 2\epsilon_k \quad (3.21)$$

Die Größe $\epsilon_k = \frac{1}{2} \langle \widetilde{A}_k^2 \rangle$ nennt man die "natürliche Emittanz" des Strahls.

3.5 Behandlung von Nichtlinearitäten

In einer linearen Rechnung kann das Verhalten des gesamten Elektronenstrahls aus der Umlaufmatrix vorhergesagt werden, da die Matrix für alle Teilchen gleich ist. Da man in der nichtlinearen Rechnung einen solchen Matrixformalismus nicht verwenden kann, wird hier üblicherweise das sogenannte Monte-Carlo-Verfahren angewendet.

Dabei werden für eine Anzahl von Teilchen die Anfangskoordinaten mit einem Zufallszahlengenerator gewürfelt. Die Bahnen dieser ausgewählten Teilchen werden dann mit dem Computer über viele Umläufe unter Berücksichtigung der Nichtlinearitäten berechnet. Man geht nun davon aus, daß die Probesteilchen den Strahl repräsentieren können, d.h. daß das Verhalten der anderen Teilchen des Strahls sich im Mittel nicht stark von dem der Probesteilchen unterscheidet.

Für Berechnung einer Teilchenbahn unter Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten ist bisher keine analytische Methode bekannt. In Speicherringoptiken sind aber die Nichtlinearitäten im allgemeinen klein. Nichtlineare Resonanzen können sich nur dann ausbilden, wenn die treibenden Kräfte größer als die Strahlungsdämpfung sind.

Deshalb berücksichtigt man nur die relativ starken nichtlinearen Kräfte. Die Größenordnungen für die Variablen sind:

$$x \sim 10^{-3} m \quad z \sim 10^{-3} m \quad \ell \sim 10^{-2} m \\ x' \sim 10^{-3} \quad z' \sim 10^{-3} \quad \delta \sim 10^{-2}$$

Da die Bewegung der Teilchen nur in den Cavities von ℓ abhängt, sind die Terme, in denen δ quadratisch auftritt, die wichtigsten. Diese Terme bewirken das chromatische Verhalten der Optik. Das Differentialgleichungssystem hat bei Berücksichtigung der in δ nichtlinearen Terme die Form¹:

$$x'' = G_x x + \overline{G}_x z + \frac{\epsilon_{s0}}{(\delta+1)} x' + \frac{h_s}{(\delta+1)} z' - \frac{h_x}{(\delta+1)} \delta + \frac{\epsilon_x + j_x}{(\delta+1)} \\ z'' = G_z z + \overline{G}_z x + \frac{\epsilon_{s0}}{(\delta+1)} z' - \frac{h_s}{(\delta+1)} x' - \frac{h_z}{(\delta+1)} \delta + \frac{\epsilon_z + j_z}{(\delta+1)} \\ \delta' = \epsilon_{s0} + \ell \epsilon_{s1} - \epsilon_{s0} h_x x - \epsilon_{s0} h_z z + \epsilon_x x' + \epsilon_z z' \\ + C_\gamma (1 + \delta)^2 [b^2 + B_x x + B_z z + B_x x' + B_z z'] \\ \ell' = -h_x x - h_z z \quad (3.22)$$

$$\text{mit } C_\gamma = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m_0} \gamma_0^3$$

$$G_x = -\frac{k}{(\delta+1)} - h_x^2 - \frac{2j_x h_x}{(\delta+1)} + \frac{\epsilon_{s0} h_x}{(\delta+1)}$$

$$G_z = -\frac{k}{(\delta+1)} - h_z^2 - \frac{2j_z h_z}{(\delta+1)} + \frac{\epsilon_{s0} h_z}{(\delta+1)}$$

$$\overline{G}_x = -\frac{\bar{k}}{(\delta+1)} - h_x h_z - \frac{2j_x h_z}{(\delta+1)} + \frac{\epsilon_{s0} h_z}{(\delta+1)}$$

$$\overline{G}_z = -\frac{\bar{k}}{(\delta+1)} - h_x h_z - \frac{2j_z h_x}{(\delta+1)} + \frac{\epsilon_{s0} h_x}{(\delta+1)}$$

$$B_x = -2k b_x - 2\bar{k} b_z - 2h_x^2 b_x - 2h_x h_z b_z + h_x b^2$$

$$B_z = -2k b_z - 2\bar{k} b_x - 2h_z^2 b_z - 2h_x h_z b_x + h_z b^2$$

$$B_{x'} = 2(b_x \epsilon_{s0} + b_z h_s)$$

$$B_{z'} = 2(b_z \epsilon_{s0} - b_x h_s)$$

¹ Man beachte, daß die Terme der sogenannten "schwachen Fokussierung" xh_x^2 und zh_z^2 nicht von der Energie des Teilchens abhängen. Es handelt sich dabei um scheinbare Kräfte, die durch die Drehung des Koordinatensystems entstehen.

4. BERECHNUNG DER SPINBEWEGUNG

Der Spin wird durch einen Vektor $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ beschrieben. Die Länge dieses Vektors ist 1. Durch die Angabe aller drei Komponenten ist \vec{s} überbestimmt. Eine Drehung von \vec{s} kann aber in dieser Darstellung durch eine einfache Drehmatrix beschrieben werden.

4.1 Bewegungsgleichung für den Spin

Die Spinbewegung wird durch die BMT-Gleichung (2.27) beschrieben, die mit der unabhängigen Variablen s die Form hat:

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \vec{\Omega}_s \times \vec{s} \quad (4.1)$$

mit

$$\vec{\Omega}_s = \frac{e}{E_0} \left(\gamma a \left[l' \vec{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{r}' \cdot \vec{B}) \cdot \vec{r}' - \vec{r}' \times \vec{E} \right] + l' \vec{E} - \left(\gamma a + \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{r}' \times \vec{E}) \right) \quad (4.2)$$

Die Ableitung des Vektors \vec{s} nach s erfolgt analog zur Ableitung von \vec{r}' :

$$\begin{aligned} \vec{s}' &= s_x \vec{x}' + s_y \vec{y}' + s_z \vec{z}' \\ (\vec{s}') &= s_x' \vec{x}' + s_y' \vec{y}' + s_z' \vec{z}' + h_x s_x \vec{x}' + h_y s_y \vec{y}' - (h_x s_x \vec{z}' + h_y s_y \vec{z}') \vec{s} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Wir führen den Vektor $\vec{s}' = (s_x', s_y', s_z')$ und den Drehvektor $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}_s + \vec{\Omega}_r$, mit $\vec{\Omega}_r = (-h_x, h_y, 0)$ ein und können die Differentialgleichung in der gewohnten Form:

$$\vec{s}' = \vec{\Omega}' \times \vec{s} \quad (4.4)$$

schreiben. Der Vektor $\vec{\Omega}_r$ beschreibt die scheinbare Drehung des Spins durch die Drehung des Koordinatensystems. Diese Drehung ist unabhängig von der Energie des Teilchens.

Wenn man wie in Gleichung (3.22) den Vektor $\vec{\Omega}$ in den Ortskoordinaten x, x', z, z' linearisiert, die Koordinate δ aber nichtlinear betrachtet, so erhält

$$\begin{aligned} b_x &= h_x + j_x + \epsilon_x & b_z &= h_z + j_z + \epsilon_z \\ b^2 &= b_x^2 + b_z^2 & h^2 &= h_x^2 + h_z^2 \end{aligned}$$

Die Größe δ' ist dagegen klein, d.h. δ ändert sich in einem Magneten nur wenig. Es ist deshalb eine gute Näherung, die Ausdrücke $(1 + \delta)$ konstant zu lassen und hier den Wert $\delta(s_0)$ einzusetzen. Die Transformation eines Teilchens durch einen Magneten kann dann wieder durch eine Matrix beschrieben werden. Es ist aber zu beachten, daß diese Matrix von der Energie des Teilchens abhängt, also für andere Teilchen mit verschiedener Energie nicht gilt.

Zur Kompensation der Chromatizität verwendet man Sextupole. Die durch die Sextupole erzeugten Kräfte sind quadratisch in x und z . Die Sextupolstärke $\frac{d^2 B_x}{dz^2}$ ist jedoch eine Zehnerpotenz größer als die Quadrupolstärken, so daß die Sextupole einen erheblichen Anteil der Nichtlinearitäten ausmachen.

Die Sextupole werden durch die "dünne-Linsen"-Näherung berechnet. Man macht dabei die Annahme, daß sich die Änderung der x - und z -Koordinaten des Teilchens innerhalb des Sextupols vernachlässigbar sind. Die Differentialgleichung läßt sich dann leicht integrieren.

3.6 Die Strahl-Strahl-Wechselwirkung

Die Strahl-Strahl-Wechselwirkung wird im SITROS Programm in der Näherung als dünne Linse berechnet. Dazu wird die bekannte Formel

$$\begin{aligned} \Delta z' &= \frac{2N r_e}{\gamma} z \int_0^\infty \sqrt{q_x \cdot q_z^3} \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{z^2}{q_z}\right) dq \\ \Delta x' &= \frac{2N r_e}{\gamma} x \int_0^\infty \sqrt{q_x^3 \cdot q_z} \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{z^2}{q_z}\right) dq \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit $q_x = 2\sigma_x^2 + q$ und $q_z = 2\sigma_z^2 + q$

benutzt /34/. Die Formel wird im Anhang hergeleitet und dabei die verwendeten Näherungen aufgezeigt. Die Integrale lassen sich analytisch lösen /35/, die Lösungen enthalten dabei die komplexen Fehlerfunktionen. Auf die Tabellierung dieser Funktion wie in /36/ zur Rechenzeiterparnis wurde in SITROS verzichtet, weil die Berechnung der Strahl-Strahl-Wechselwirkung nur einen Bruchteil der Rechenzeit der Spintransformationen benötigt.

man:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \left(\gamma_0 a + \frac{1}{(\delta + 1)} \right) \left(h_z + j_z + \epsilon_z \right) + (k - h_z^2 - j_z h_z - \epsilon_z h_x) z \\ &+ (-\bar{k} - h_z h_x - j_z h_x - \epsilon_z h_x) x - \epsilon_{s0} z' - \gamma_0 a h_s x' - h_x \\ \Omega_z &= \left(\gamma_0 a + \frac{1}{(\delta + 1)} \right) \left(-(h_x + j_x + \epsilon_x) + (-k + h_x^2 + j_x h_x + \epsilon_x h_x) x \right. \\ &+ (\bar{k} + h_x h_z + j_x h_z + \epsilon_x h_z) z + \epsilon_{s0} x' \left. \right) - \gamma_0 a h_s z' + h_x \\ \Omega_s &= (1 + a) \frac{h_s - h_s h_x x - h_s h_x z}{(\delta + 1)} - \left(\gamma_0 a + \frac{1}{(\delta + 1)} \right) (\epsilon_x x' - \epsilon_x z')\end{aligned}\quad (4.5)$$

In der Differentialgleichung (4.4) läßt sich das Kreuzprodukt durch eine Matrixmultiplikation ersetzen:

$$\vec{s}' = A_{Spin} \cdot \vec{s} \quad (4.6)$$

mit

$$A_{Spin} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_x \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_s \\ -\Omega_x & \Omega_s & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können dann wieder die Transfermatrix für Stücke mit konstantem $\vec{\Omega}$ berechnen:

$$D = \begin{pmatrix} \omega_x^2(1-C) + C & \omega_x \omega_z(1-C) - \omega_s S & \omega_x \omega_s(1-C) + \omega_z S \\ \omega_x \omega_z(1-C) + \omega_s S & \omega_z^2(1-C) + C & \omega_z \omega_s(1-C) - \omega_x S \\ \omega_x \omega_s(1-C) - \omega_z S & \omega_z \omega_s(1-C) + \omega_x S & \omega_s^2(1-C) + C \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Dabei sind $\omega_x = \Omega_x / |\Omega|$, $\omega_z = \dots$ und $S = \sin |\Omega| l$, $C = \cos |\Omega| l$. Die Gesamtdrehung in einem Umlauf ergibt sich aus dem Produkt aller Einzelmatrix durch:

$$|\Omega_{Umlauf}| = 2\pi\nu = \arccos \left(\frac{1}{2} (\text{Spur}(D) - 1) \right) \quad (4.8)$$

Die Größe ν wird "Spin Tune" genannt. In einem ebenen Speicherring ist ν proportional zu Energie des Strahls.

4.2 Näherungen zur nichtlinearen Berechnung der Spinbewegung

$\vec{\Omega}$ hängt von den Raumkoordinaten des Teilchens ab und ist nicht stückweise konstant. Die Spinbewegung ist deshalb auch in der für die Teilchenbewegung linearen Maschine nichtlinear. Zur Berechnung der Spinbewegung werden deshalb wieder Näherungen angewendet, um die Rechenzeit klein zu halten. Dazu wird unterschieden zwischen Dipolen und anderen Elementen.

Bei den Dipolen hat man ein starkes konstantes Feld, das den Spin um große Winkel dreht. Die schwache Fokussierung bewirkt jedoch eine geringe Abhängigkeit von den Ortskoordinaten. Zur Berechnung der Spindrehung werden die Ortskoordinaten über den Magneten gemittelt und in (4.5) eingesetzt.

In den anderen Elementen hängt $\vec{\Omega}$ stark von den Ortskoordinaten ab. Diese können sich außerdem im Magneten stark ändern. Die Spindrehungen sind jedoch klein und man nimmt deshalb an, daß die Drehungen um die Koordinatenachsen kommutativ sind und deshalb einzeln über den Magneten integriert werden können.

Für transversale elektrische und magnetische Felder gilt dann folgende Beziehung zwischen der Spindrehung und der Ablenkung des Teilchens:

$$\int_{\text{Magnet}} \vec{\Omega} ds = \begin{pmatrix} -\Delta z' \\ \Delta x' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Das Problem ist dadurch auf die Berechnung der Ablenkung des Teilchens reduziert, die im Abschnitt 3.5 behandelt ist. Die Spindrehung durch die Strahl-Strahl-Wechselwirkung kann auf die gleiche Weise berechnet werden, da keine longitudinalen Felder auftreten.

4.3 Die Definition der Polarisationsrichtung durch die \vec{n} -Achse

Die Begriffe "Design Orbit" und "Closed Orbit" haben ein Analog in der Spinbewegung: Die Spinrichtung, die vom Design Orbit Teilchen bzw. vom Closed Orbit Teilchen nach einem Umlauf reproduziert wird.

In der idealen Maschine ist die geschlossene Spinrichtung auf dem Design Orbit senkrecht (entlang der \vec{z} -Achse), solange keine speziellen spindrehenden Magnete (Spinrotatoren, "siberian snakes") verwendet werden. Die

geschlossene Spinrichtung auf dem Closed Orbit weicht von der senkrechten auf Grund der radialen und longitudinalen Störfelder ab. Diese Spinrichtung wird \vec{n} -Achse genannt¹.

Eine Polarisation des Elektronenstrahls kann sich nur entlang dieser Richtung aufbauen, denn sie soll, sobald sich das Gleichgewicht zwischen Aufbau und Depolarisation eingestellt hat, zeitlich konstant bleiben, und sich nicht von Umlauf zu Umlauf ändern. Die \vec{n} -Achse ist deshalb auch die Richtung, die man zur Berechnung des Sokolov-Ternov-Effekts in die Gleichung (2.15) einsetzen muß.

4.4 Depolarisierende Resonanzen

Die Polarisation in einem Speicherring wird eingeschränkt, wenn sich die Präzession des Spins mit der Umlauffrequenz oder den Schwingungen des Strahls in Resonanz befinden. Die allgemeine Resonanzbedingung ist:

$$\nu \pm jQ_x \pm kQ_z \pm mQ_s = n \quad (4.10)$$

wobei j, k, m, n ganze Zahlen sind. Q_x, Q_z, Q_s sind Zahlen der Teilchenschwingungen pro Umlauf und ergeben sich aus der Gleichung (3.19). ν ist der Spin-Tune nach Gleichung (4.8).

Der Mechanismus der linearen Resonanzen, bei denen $|j| + |k| + |m| < 2$ ist, läßt sich anschaulich beschreiben:

Die Imperfektion-Resonanz: $\nu = n$

Auf der Imperfektion Resonanz wird jede Spinrichtung nach einem Umlauf reproduziert, d.h. die \vec{n} -Achse ist nicht mehr definiert. In der Nähe der Resonanz kann deshalb ein kleines Störfeld die \vec{n} -Achse aus der Vertikalen herauskippen und so die Polarisation durch den Sokolov-Ternov-Effekt verhindern.

Die intrinsic Resonanzen: $\nu \pm Q_x = n$; $\nu \pm Q_z = n$; $\nu \pm Q_s = n$
 In den Quadrupolen wirkt ein Magnetfeld auf die Elektronen, das proportional zu deren Abstand zur Quadrupolmitte ist. Die Betatronschwingungen erzeugen deshalb periodische Felder, die den Teilchenspin um kleine Winkel dreht. Sind die Betatronschwingungen in Phase mit der Spinbewegung, so addieren sich die Einzeldrehungen und der Strahl wird depolarisiert. Abseits

¹ Ersetzt man alle Einzeldrehungen in verschiedenen Magneten durch eine einzige, so ist die \vec{n} -Achse die Drehachse dieser Drehung.

der Resonanzen hebt sich der Einfluß der Quadrupole im Mittel auf. Die drei verschiedenen Resonanzen entstehen durch folgende Prozesse:

Die Q_x Resonanz: $\nu \pm Q_x = n$

Die Q_x Resonanz tritt auf, wenn die \vec{n} -Achse im Quadrupol nicht vertikal steht. Bei einer horizontalen Teilchenschwingung gibt es dann im Quadrupol eine Feldkomponente, die senkrecht zur \vec{n} -Achse steht und den Teilchenspin von der \vec{n} -Achse wegdreht.

Die Q_z Resonanz: $\nu \pm Q_z = n$

Vertikale Betatronschwingungen erzeugen im Quadrupol ein Feld, das den Spin in oder gegen die Bewegungsrichtung drehen.

Die Q_s Resonanz: $\nu \pm Q_s = n$

In einem realen Speicherring existiert durch horizontale Störfelder eine kleine vertikale Dispersion. Entsprechend der Energieschwingung führen die Teilchen deshalb auch vertikale Bewegungen aus, die auf der Resonanz auf gleiche Weise wie bei der Q_z Resonanz zur Depolarisation führen.

Diese linearen Resonanzen können mit Hilfe der Störungsrechnung beschrieben werden. In einem Speicherring treten außerdem auch Resonanzen höherer Ordnung ($|j| + |k| + |m| > 1$) auf. Diese Resonanzen werden durch nichtlineare Kräfte erzeugt und können deshalb nicht durch eine lineare Berechnung vorhergesagt werden. Zu ihrer Beschreibung muß ein Formalismus verwendet werden, der die nichtlinearen Terme der Spin-Bahn-Kopplung enthält.

5. AUFBAU DES SPIN-TRACKING-PROGRAMMS SITROS

Im SITROS-Programm wird das Monte-Carlo- oder Tracking-Verfahren angewandt. Die Bahnen und Spinbewegungen einer Anzahl von Probesteilchen werden dabei über viele Umläufe unter Beachtung der Nichtlinearitäten mit dem Computer verfolgt. Dieses Verfahren hat sich bei der Berechnung der nichtlinearen Emittanz unter dem Einfluß von Sextupolen /30/ und der Strahl-Strahl-Wechselwirkung /31/ bewährt.

In den üblichen Programmen wird der Ring aufgeteilt in Abschnitte, die durch eine lineare Transformationsmatrix beschrieben werden, und in nicht-lineare Elemente (Sextupole, Oktupole, Strahl-Strahl-Wechselwirkung), die durch eine "dünne Linse" angenähert sind.

Die linearen Matrizen werden am Anfang des Programms berechnet und gespeichert, so daß der Rechenaufwand beim Tracking der Teilchen auf die Matrizenmultiplikation beschränkt wird. Die Transformation durch einen Sextupol wird durch wenige Multiplikationen und Additionen ausgeführt.

Im Gegensatz dazu ist die Berechnung der Spinbewegung weit aufwendiger. Für den Spin sind auch alle Quadrupole nichtlineare Elemente. Da es im Speicherring im allgemeinen mehr Quadrupole als Sextupole gibt, vervielfacht sich der Rechenaufwand.

Außerdem besteht jede Spintransformation aus einer Drehung, für die die Sinus- und Cosinusfunktion berechnet werden muß. Die Berechnung der Spindrehungen muß mit doppeltgenauer Arithmetik durchgeführt werden, denn die Depolarisation in einigen tausend Umläufen ist in der Größenordnung 10^{-5} , und die Genauigkeit von 10^{-6} bei einfacheren Arithmetik ist nicht ausreichend. Es ist deshalb auch nicht möglich, die Berechnung der Sinus- und Cosinusfunktion durch eine Taylorreihe mit wenigen Gliedern zu ersetzen.

Eine analoge Anwendung der normalen Trackingverfahren scheitert deshalb an der Begrenzung der Rechenzeit. Mit dem Programm SITROS wurde deshalb ein Verfahren entwickelt, mit dem der Polarisationsgrad in kürzerer Zeit berechnet wird¹. Bei allen Schritten des Programms steht die Rechenzeitersparnis im Vordergrund. Die Ergebnisse zeigen, daß trotz aller Vereinfachungen wertvolle Information über die Polarisation gewonnen werden.

¹Für eine Rechnung mit 50 Probesteilchen und 2000 Umläufen (3 Betatordämpfungszeiten bei PETRA) benötigt SITROS 4 Stunden auf der IBM 3081.

5.1 Die Transformation der Ortskoordinaten

Der Ring wird in SITROS in vier Abschnitte unterteilt. Jeder Abschnitt wird durch eine Transformation beschrieben, die die Nichtlinearitäten bis zur 2. Ordnung enthält.

Die Koordinaten eines Teilchens sind relativ zum Closed Orbit durch den 6-dimensionalen Vektor $\vec{X} = (x, x', z, z', \ell, \delta)$ angegeben. Für die Transformation wird zuerst aus \vec{X}_A am Anfang des Abschnitts der Vektor \vec{X}^{\sim} berechnet, der neben den linearen Komponenten der Vektors \vec{X}_A alle quadratischen Kombinationen enthält. \vec{X}^{\sim} hat 27 Komponenten:

$$\vec{X}^{\sim} = (x, x', z, z', \ell, \delta, x^2, x x', x z, \dots, \ell^2, \ell \delta, \delta^2) \quad (5.1)$$

Aus \vec{X}^{\sim} wird dann durch Multiplikation mit einer 6×27 -Matrix M_{Bahn}^{\sim} der Zustandsvektor \vec{X}_E am Ende des Abschnitts berechnet:

$$\vec{X}_E = M_{Bahn}^{\sim} \cdot \vec{X}^{\sim} \quad (5.2)$$

Zur Erzeugung der Matrizen M_{Bahn}^{\sim} werden zuerst der Closed Orbit und dann 72 verschiedene Teilchenbahnen in der Nähe des Closed Orbit mit dem in Abschnitt 3.5 beschriebenen Verfahren berechnet. Die Differenzenquotienten dieser Ortskomponenten am Anfang und Ende des Abschnitts ergeben die gesuchten Matrizen.

5.2 Die Spintransformation

Der Spin der Elektronen wird in SITROS durch den dreidimensionalen Vektor $\vec{s} = (s_x, s_z, s_s)$ beschrieben. Diese Darstellung ergibt die im Vergleich zu anderen Darstellungen kürzeste Rechenzeit für die Spintransformation durch einen Abschnitt. Es ist die Multiplikation des Spinvektors mit der 3×3 -Matrix D .

D ist nach Gleichung (4.8) durch die Drehachse $\vec{\Omega}$ bestimmt. $\vec{\Omega}$ hängt wiederum nichtlinear von den Ortskoordinaten des Teilchens ab. In SITROS werden deshalb die Größen $|\Omega|, \Omega_x$ und Ω_s auf die gleiche Weise berechnet wie die Komponenten des Vektors \vec{X}_E :

$$\begin{pmatrix} |\Omega| \\ \Omega_x \\ \Omega_s \end{pmatrix} = M_{Spin}^{\sim} \cdot \vec{X}^{\sim} + \vec{\Omega}_{c.o.} \quad (5.3)$$

$\tilde{\Omega}_{c.o.}$ ist dabei die Drehachse für das Closed Orbit Teilchen. Die Matrizen M_{Bahn} und M_{Spin} sowie $\tilde{\Omega}_{c.o.}$ sind in SITROS zu einer Matrix $M_{9 \times 28}$ zusammengefaßt.

Es muß nun geprüft werden, ob trotz der Beschränkung auf die quadratischen Terme der Transformation eine ausreichende Beschreibung der Spinbewegung gegeben ist. Dazu werden die Terme höherer Ordnung für verschiedene Störungsverteilungen berechnet.

Beim Speicherring PETRA sind die Terme höherer Ordnung tatsächlich klein¹, solange der Spin-Tune für einen Transformationsabschnitt nicht in der Nähe einer ganzen Zahl liegt. Wird dies bei der Wahl der Unterteilungen nicht berücksichtigt, so wird wie bei der Imperfektion Resonanz die Richtung der Drehachse von den kleinen Feldkomponenten bestimmt, die von den Teilchenkoordinaten in höherer Ordnung abhängen.

Dieser Effekt wird durch Abbildung 2a und 2b demonstriert. Hier ist die Abhängigkeit der Komponente Ω_z von der Anfangsordinate z' für verschiedene Werte von x' aufgetragen. Der Bereich in z' entspricht der Breite von $2\sigma_z$ der Gaussverteilung des Strahls. Der Spin-Tune für den Abschnitt ist in Abbildung 2a $\nu = 40.35$ und hat einen ausreichenden Abstand von der ganzen Zahl. In 2b ist $\nu = 40.99$ und es ist deutlich, daß diese Kurven nicht durch ein Polynom 2. Ordnung beschrieben werden.

5.3 Variation des Spin-Tunes

Bei der Suche nach einem günstigen Arbeitspunkt wird der Polarisationsgrad nicht nur bei einem festen Spin-Tune berechnet. Es wird ein größerer Bereich betrachtet, damit nicht im Betrieb des Speicherrings die Polarisation durch kleine Änderungen des Arbeitspunktes (z.B. Wärmebewegungen der Magnete) zerstört werden. Die Variation des Spin-Tunes erfolgt durch Variation der Strahlenergie.

Die Teilchenbahnen unterscheiden sich bei verschiedener Sollenergie nur sehr wenig, da alle Magnetstärken proportional zu der Energie verändert werden. Eine höhere Energie bewirkt eine höhere Synchrotronstrahlungsleistung²

¹Für andere Speicherringe muß dieser Test wiederholt werden, bevor das SITROS Programm angewendet wird.

²Bei einer Strahlenergie von 20 GeV bewirkt eine Variation um ± 220 MeV ($\Delta\nu = \pm 0.5$) eine Änderung der Strahlungsleistung um 5%.

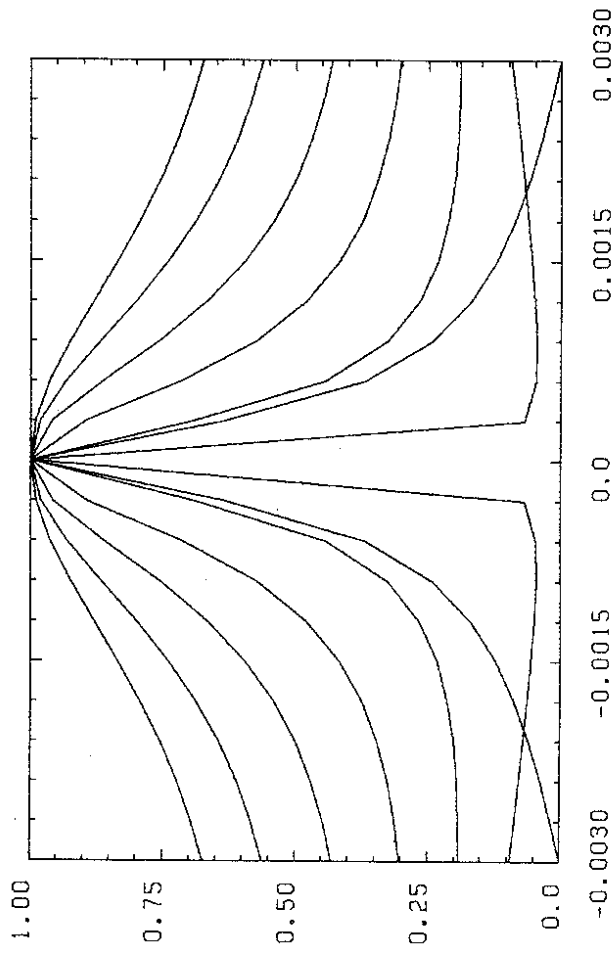
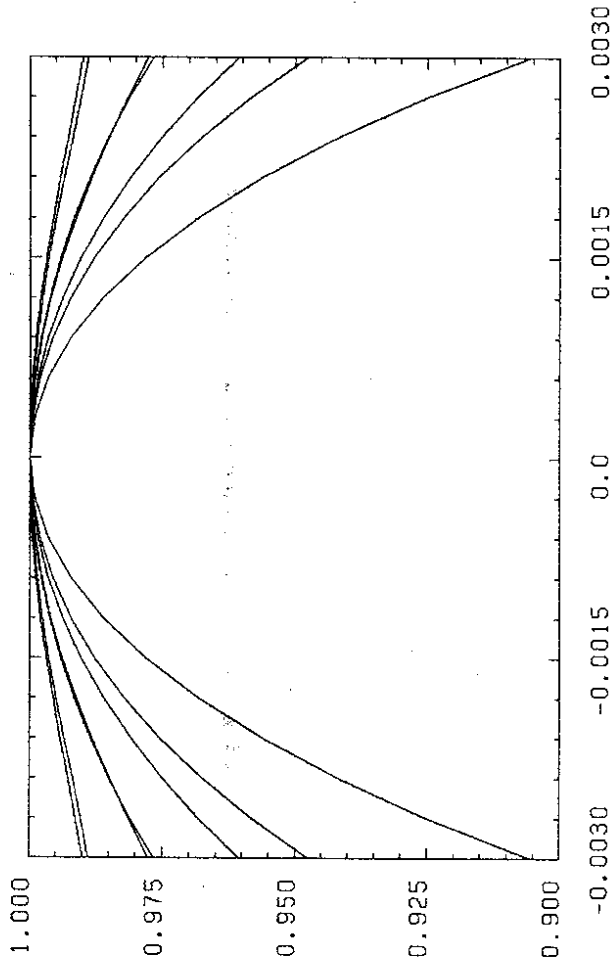


Bild 2: Abhängigkeit der z -Komponente der Spindrehachse von der Anfangsordinate z' für verschiedene x' . Im oberen Bild bei einem Spin Tune von 40.35, unten bei 40.99.

und damit eine kleinere Dämpfungszeit. Die Q-Werte hängen nur in 2. Ordnung von der Energie ab.

In SITROS wird zur Rechenzeiterparnis die Teilchenbewegung nur einmal bei der mittleren Energie gerechnet. Dazu wird die Spinbewegung für 101 Energiestützpunkte ermittelt. Die gesamte Transformation wird durch eine Matrix $M_{28 \times 309}^{\sim}$ beschrieben¹.

5.4 Photon Emission

Da die Dämpfung der Betatron- und Synchrotron-schwingungen in den Matrizen M^{\sim} enthalten sind, muß auch die Anregung dieser Schwingungen durch die stochastischen Photonabstrahlungen durch SITROS simuliert werden. Bei einer vollständigen Simulation muß die relative Energieabweichung δ in jedem Ablenk-magneten durch eine Zufallszahl variiert werden.

Dabei würde jedoch jeweils eine Matrix M^{\sim} für jedes Stück zwischen zwei Ablenk-magneten benötigt und die Anzahl der Transformationen entspricht der Anzahl der Ablenk-magnete. Sowohl der Speicherplatzbedarf als auch die Rechenzeit übersteigen dadurch die vernünftigen Grenzen.

In SITROS werden deshalb zwei Ablenk-magnete ausgewählt, in denen der Effekt der Photonemissionen simuliert wird. Der Mechanismus und die Stärke der Photonemission in diesen beiden Magneten wird dabei so verändert, daß dadurch alle anderen Ablenk-magnete repräsentiert werden.

Wir betrachten zuerst die Strahlausehnung, die wie der Polarisationsgrad von den Photonemissionen abhängt. Im SITROS Programm wird die Stärke der Energiesprünge $< \Delta\delta^2 >$ nicht entsprechend der Gleichung (3.18) gewählt, sondern sie wird skaliert, so daß das SITROS Programm bei der Berechnung der linearen Optik die gleiche Bunchlänge produziert wie die lineare Rechnung bei Berücksichtigung aller Ablenk-magnete (z.B. mit dem Programm PETROS) ergibt.

Die Breite und Höhe des Bunches hängt dann nach Gleichung (3.20) von den Eigenvektoren der Umlaufmatrix an der Stelle der Abstrahlung ab. Um die Strahl-dimension in allen drei Richtungen anzupassen, benötigt man zwei weitere Variable. Deshalb kann neben dem Energiesprung $\Delta\delta$ auch eine Änderung der Bewegungsrichtung $\Delta x'$ und $\Delta z'$ gewürfelt werden. Dadurch

¹ Pro Abschnitt des Ringes benötigen die Transformationsmatrizen also 68 kByte.

kann auch berücksichtigt werden, daß die Synchrotronstrahlung von den Elektronen unter einem mittleren Winkel $\phi \approx \frac{1}{\gamma}$, $\gamma =$ Lorentzfaktor, abgestrahlt wird, so daß das Elektron einen transversalen Impuls aufnimmt.

In den in dieser Arbeit beschriebenen Rechnungen wurden die transversalen Strahl-dimensionen im Rahmen der statistischen Schwankungen bereits durch die Anpassung der Bunchlänge erreicht. Der Grund dafür ist die periodische Struktur des Bogens in PETRA (FODO-Zellen), durch die die optischen Funktionen in allen Ablenk-magneten annähernd gleich sind.

Die stochastische Anregung des Strahls wird also so gewählt, daß die Gleichung (3.20) erfüllt wird. Eine dieser Gleichung entsprechende Beziehung zwischen der Anregung durch Photonemissionen und dem in linearer Näherung berechneten Polarisationsgrad ist im Anhang hergeleitet (A34).

Im SITROS Programm wird davon ausgegangen, daß die ausgewählten Strahlungspunkte ausreichend repräsentativ sind und die Gleichung (A34) dann mit ausreichender Genauigkeit erfüllt wird, wenn die Strahl-dimensionen angepaßt sind. Dies wird immer dann der Fall sein, wenn der Ring im Bogen aus einer periodischen Struktur besteht und Closed Orbit Abweichungen die Abweichungen der \vec{n} -Achse von der Vertikalen bewirken¹.

Durch das sogenannte Spinmatching kann eine Optik erzeugt werden, in der die Abstrahlung in verschiedenen Punkten stark unterschiedliche Depolarisation hervorruft. Dies kann durch den Vergleich des Integrals (A34) über die Abstrahlungspunkten mit dem Wert für den gesamten Ring überprüft werden. In solchen Fällen, in denen große Abweichungen auftreten, müssen die SITROS-Ergebnisse je nach Situation so interpretiert werden, daß sie die obere oder untere Grenze der Polarisierung darstellen.

5.5 Bestimmung des Strahl-dimensionen

Aus den Koordinaten der Probeteilchen werden die Emittanzen der drei Schwingungsrichtungen bestimmt, wobei die optischen Funktionen α , β und γ der linearen Maschine verwendet werden:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2 \\ \epsilon_z &= \gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2 \\ \epsilon_s &= \gamma_s \ell^2 + 2\alpha_s \ell \delta + \beta_s \delta^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

¹ Beim Vergleich von Rechnungen mit verschiedenen Abstrahlungspunkten schwankte der Polarisationsgrad um maximal 10%.

Im linearen Fall ist dann die maximale Ablage des Teilchen während vieler Umläufe:

$$\hat{y} = \sqrt{\epsilon_y \beta_y} \quad (5.5)$$

wobei y jeweils für x , z und s steht. Der Elektronenstrahl ist gaußverteilt und der quadratische Mittelwert

$$y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}^2} = \sigma_y \quad (5.6)$$

ist die Standardbreite der Gaußverteilung. In einem linearen Speicherring hängt σ_y von der Zeit ab durch:

$$\sigma_y(t) = \sigma_y(\infty) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (5.7)$$

wobei τ die Dämpfungzeit aus Gleichung (3.19) ist. Nach einigen Dämpfungzeiten (\approx einigen 1000 Umläufen) ist die Gleichgewichtsausdehnung erreicht.

5.6 Extrapolation des Polarisationsgrades

Die Polarisationszeit der Speicherringe PETRA und HERA liegt je nach Strahlenergie zwischen 10 und 30 Minuten. Dies entspricht 10^8 Umläufen. Es ist deshalb unmöglich, in einem Simulationsprogramm so viele Umläufe zu berechnen bis sich eine Gleichgewichtspolarisation gebildet hat. Aus diesem Grund ist auch der Polarisationsaufbau durch den Sokolov-Ternov-Effekt nicht in den Spintransformationen enthalten.

Statt dessen wird die Depolarisation der Probesteilchen während einiger Betatrondämpfungzeiten berechnet und durch Extrapolation der Gleichgewichtspolarisationsgrad ermittelt.

Der Polarisationsgrad der Probesteilchen ergibt sich nach Gleichung (2.14) durch:

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{s}_i \cdot \vec{n} \quad (5.8)$$

Im SITROS-Programm wird nun angenommen, daß P exponentiell mit der Zeit abnimmt:

$$P(t) = P_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right) \quad (5.9)$$

Aus zwei zu beliebigen Zeiten t_1 und t_2 bestimmten Polarisationsgraden P_1 und P_2 läßt sich dann die Depolarisationszeit τ_d ermitteln durch:

$$\frac{1}{\tau_d} = \frac{\ln \frac{P_1}{P_2}}{t_2 - t_1} \quad (5.10)$$

Der Gleichgewichtspolarisationsgrad ergibt sich aus Gleichung (2.21) durch Einsetzen von (2.20) und (5.10).

Durch das Würfeln der Quantensprünge kommt es zu Schwankungen dieses extrapolierten Polarisationsgrades in jedem Umlauf. Die Standardbreite dieser Schwankungen ist in den Polarisationskurven als Fehlerbalken eingezeichnet:

$$\sigma_p = \frac{1}{n} \sum P_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum P_i \right)^2$$

5.7 Der Ablauf des Programms SITROS

Das SITROS Programm wird in 5 Schritten ausgeführt:

1. SITROS-A: Berechnung der Optik und der Transformationstabellen
Die Daten über Struktur und Magnetstärken des Speicherrings werden aus einem Datensatz gelesen, der das vom PETROS Programm /32/ verwendete Format hat. Dadurch ist eine komfortable Eingabe dieser Daten gegeben.

Folgende Störungen der Ringstruktur können in SITROS berücksichtigt werden:

- horizontale und vertikale Translation der Magnete
- Rotation der Magnete um die longitudinale Achse
- Fehler in der Feldstärke der Magnete

Diese Störungen können für jeden Magneten einzeln eingegeben oder mit einem gaußverteilten Zufallszahlengenerator gewürfelt werden. Die Cloned Orbit-Ablagen können mit Hilfe von Korrekturspulen minimiert werden. Dazu werden die Korrekturverfahren des Programms PETROS /32,33/ verwendet.

Für diese vorgegebene Optik berechnet SITROS-A den Closed Orbit und jeweils die \vec{n} -Achse für alle Energien (s. Abschnitt 5.3). Daraus werden die Polarisationszeiten τ_p und die maximale Polarisation P_∞ ermittelt.

Der Ring wird in vier Abschnitte aufgeteilt¹, wobei die Schnittpunkte in jeweils zwei Wechselwirkungspunkten und zwei Ablenkarmen liegen. In den nachfolgenden Schritten kann in den Ablenkarmen die Photonenemission durch Synchrotronstrahlung und in den Wechselwirkungspunkten die Strahl-Strahl-Wechselwirkung simuliert werden. Für jeden Abschnitt berechnet SITROS-A die Transformatiinstabelle M^* , die in den folgenden Schritten für das Tracking-Verfahren benötigt wird.

Die Eingangsparameter und die Ergebnisse des SITROS-A Programms werden in den "Matrix-Datensatz" geschrieben und so von den nachfolgenden Programmen übernommen.

2. SITROS-B: Initialisierung der Tracking-Rechnung

In SITROS-B werden die Parameter eingegeben, die erst in den weiteren Schritten benötigt werden: Die Stärke der Strahlanregung durch die Quantenemissionen und die Parameter für die Strahl-Strahl-Wechselwirkung. Zu einem Matrix-Datensatz können so mehrere SITROS-Rechnungen ausgeführt werden. SITROS-B initialisiert außerdem die Koordinaten der Probenpartikel: Alle Teilchen starten auf dem Closed Orbit mit dem Spin in Richtung der \vec{n} -Achse. Die vollständige Parameterliste und die Teilchenvektoren werden in den "Ergebnis-Datensatz" geschrieben.

3. SITROS-C: Bahntracking

Im 3. Schritt werden zur Zeitersparnis nur die Ortskoordinaten der Probenpartikel durch die vier Abschnitte des Rings transformiert. Nach einigen Dämpfungszeiten ist das Gleichgewicht zwischen der Quantenanregung und der Dämpfung erreicht. Die Strahldimensionen werden alle 50 Umläufe ermittelt und in den Ergebnis-Datensatz geschrieben.

4. SITROS-D: Spin- und Bahntracking

Nachdem der Strahl seine Gleichgewichtsgröße erreicht hat, werden nun auch die Spinvektoren durch den Ring transformiert. Zur Transformation

¹Eine Aufteilung in mehr Abschnitte ist möglich, es wird jedoch proportional dazu die Rechenzeit und der Speicherbedarf größer.

wird ein in ASSEMBLER geschriebenes Unterprogramm benutzt, das nur ein Drittel der Rechenzeit eines FORTRAN-Unterprogramms benötigt.

Die Strahldimensionen und der Polarisationsgrad werden alle 50 Umläufe protokolliert. Bevor die vorgegebene Rechenzeit abgelaufen ist, werden die neuen Teilchenkoordinaten in den Ergebnisdatensatz geschrieben. SITROS-D kann dadurch mehrere Male gestartet werden, um die Anzahl der berechneten Umläufe zu vergrößern.

5. SITROS-E: Graphische Ausgabe der Ergebnisse

SITROS-E ist ein interaktives Graphik-Programm, mit dem der Polarisationsgrad als Funktion der Energie dargestellt werden kann. Resonanzstellen können in dieser Darstellung mit einem Cursor markiert werden. SITROS-E errechnet dann alle Resonanzen, die an dieser Stelle auftreten können.

6. ERGEBNISSE

Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, wie die Methoden der Tracking-Rechnung auf die Polarisationsberechnung angewendet werden können und welche Aussagen trotz der notwendigen Näherungen mit diesen Rechnungen gemacht werden können. Die ersten SITROS-Rechnungen wurden für den Speicherring PETRA gemacht. Die gleichzeitig durchgeführten Messungen der Polarisation in PETRA /9,10/ ermöglichen den Vergleich zwischen Simulation und Wirklichkeit.

6.1 Vergleich von Messungen und Rechnungen

Die Messung wurde mit einer MI15-Optik durchgeführt. Die Parameter dieser Optik sind:

$$\begin{aligned} Q_x &= 25.17 & \beta_x^* &= 2.50 \text{ m} & \epsilon_x &= 1.6 \cdot 10^{-7} \\ Q_z &= 23.27 & \beta_z^* &= 0.15 \text{ m} & \epsilon_z / \epsilon_x &= 5\% \\ Q_s &= 0.067 \end{aligned}$$

Der Closed Orbit wurde zuerst mit den normalen Orbitkorrekturprogrammen minimiert, so daß die mittleren Ablagen $x_{rms} = 1.2 \text{ mm}$ und $z_{rms} = 1.0 \text{ mm}$ betragen. Der maximale Polarisationsgrad, der so gemessen werden konnte, betrug bei einem Spin Tune von 37.5 ungefähr 50%.

Danach wurden mit dem "harmonic orbit matching"-Verfahren /12/ die 37. und 38. Fourierkomponenten des Closed Orbits nacheinander minimiert. Dadurch konnte der maximale Polarisationsgrad auf 80% gesteigert werden.

Mit dieser korrigierten Optik wurde nun die Strahlenergie im Bereich zwischen 16.30 GeV und 16.74 GeV variiert. Dies entspricht einem Spin-Tune zwischen 37 und 38. Das Ergebnis dieser Messung zeigt Bild 3.

Im mittleren Bereich der Kurve gibt es ein Plateau mit hohem Polarisationsgrad. Im Bereich der Q_x , Q_z und Q_s -Resonanzen, die an den Bildrändern liegen, ist die Polarisation (im Rahmen der Messgenauigkeit) null. Die depolarisierenden Resonanzen liegen in diesem Bereich so eng aneinander und sind so breit, daß es dazwischen keine Polarisation gibt.

Es wurde zuerst vermutet, daß das Plateau durch breite Q_x -Resonanzen ($\nu + Q_z = 61$ und $\nu - Q_z = 15$) begrenzt ist. Die SITROS-Rechnungen zeigen jedoch, daß die Begrenzung durch nichtlineare Q_x und Q_s -Resonanzen erfolgt.

Bild 4 zeigt nun eine SITROS-Rechnung für die Situation vor der Korrektur. Die entsprechenden Closed Orbit Ablagen sind durch Störungen der Korrekturmagnete erzeugt worden, die mit einem Zufallszahlengenerator gewürfelt worden sind.

Bild 5 zeigt die Rechnung nach der Harmonischenkorrektur. Die Störungen werden durch 8 symmetrische Spulen erzeugt, und der dadurch entstehende Orbit enthält nur jede 4. Fourierkomponente. Da die einzelnen Fourierkomponenten in der Messung nacheinander korrigiert wurden und das Korrekturverfahren auf einem linearen Modell beruht, ist wegen der Sextupole die Korrektur nicht vollständig. Deswegen ist in der Rechnung zusätzlich zur symmetrischen Störung eine kleine zufällige Störung gewürfelt.

Die Rechnungen geben die Messungen gut wieder. Die anfängliche Polarisation von 50% ist durch die Korrektur auf über 80% gestiegen. Es zeigt sich jedoch, daß Polarisation in den Randbereichen durch depolarisierende Resonanzen stark eingeschränkt ist. Einige dieser Resonanzen lassen sich eindeutig identifizieren. Die linearen Q_x -Resonanzen haben starke Q_s -Satelliten und die Q_s -Resonanzen treten in höherer Ordnung auf.

Vergleichen wir diese Messung und die SITROS Rechnung mit einer linearen Rechnung (Bild 6), die mit dem Programm SLIM /16,17/ gemacht wurde! Es wurden die gleichen Magnetstörungen wie in Bild 4 verwendet. SLIM berechnet nur die linearen Resonanzen $\nu \pm Q_x = n$ und $\nu \pm Q_s = n$. Die Q_x -Resonanzen sind wegen der geringen Strahlhöhe sehr schmal und sind wegen der begrenzten Auflösung der Kurvenpunkte nicht sichtbar. SLIM sagt für einen größeren Bereich eine hohe Polarisation voraus, als bei den Messungen in PETRA bestätigt wurde.

6.2 Der Einfluß von Sextupolen auf die Polarisation

Zur Untersuchung des Einflusses der Sextupole, die zur Kompensation der Chromatizität dienen, wurden die Kurven in den Bildern 7 und 8 gerechnet. Dabei wurden im Bild 7 die Sextupole und die Chromatizität "abgeschaltet", indem statt der Differentialgleichung (3.22) die Gleichung (3.12) verwendet wurde. In Bild 8 sind diese Nichtlinearitäten berücksichtigt.

In beiden Rechnungen wurde durch 8 symmetrische Korrekturmagnete eine vertikale Closed Orbit Störung erzeugt, die eine mittlere Ablage von $z_{rms} = 1 \text{ mm}$ hat. Auf Grund der Symmetrie ist im Closed Orbit nur jede

4. Fourierkomponente enthalten. Es handelt sich also um eine entsprechend dem harmonic-orbit-matching ideal korrigierte Maschine.

In der Rechnung 8 ist die Polarisation höher als in Rechnung 7. Dies liegt jedoch nicht an den Nichtlinearitäten, sondern daran, daß die Sextupole zusätzliche Ablenkungen des Closed Orbits bewirken, welcher dadurch eine andere Verteilung der Fourierkomponenten erhält.

In beiden Bildern treten die Q_x - und Q_s -Resonanz stark auf, wenn das n aus der Resonanzgleichung:

$$\nu \pm jQ_x \pm kQ_z \pm mQ_s = n \quad (4.14)$$

eine gerade Zahl ist. Sie fehlen oder sind nur schmal, wenn n ungerade ist. Dies gilt auch für die Q_s -Sateliten der Q_x -Resonanz und für die Q_s -Resonanzen höherer Ordnung. Wegen der perfekten Symmetrie fehlen die Q_x -Resonanzen vollständig; es treten auch keine nichtlinearen Resonanzen auf, die von Q_z abhängen.

Die beiden Kurven unterscheiden sich durch die $2Q_x$ -Resonanz, die in der linearen Rechnung nur mit viel gutem Willen zu erkennen ist. In der nichtlinearen Rechnung tritt die $2Q_x$ -Resonanz deutlich hervor. Auf beiden Seiten gibt es einen Q_s -Sateliten.

6.3 Depolarisation durch Strahl-Strahl-Wechselwirkung

Die Strahl-Strahl-Wechselwirkung ist die stärkste nichtlineare Kraft in einem Elektronenspeicherring. Damit eine möglichst hohe Luminosität erzielt wird, sind die Strahlströme so gewählt, daß bei einer weiteren Stromerhöhung die Strahl-Strahl-Wechselwirkung eine Aufweitung des Strahlquerschnitts und damit eine Reduktion der Luminosität bewirken würde.

Die Aufweitung der Strahlen durch die Strahl-Strahl-Wechselwirkung wurde in PETRA untersucht /37/. Diese Messungen sind in Bild 9 dargestellt. Die Luminosität ist proportional zu:

$$L \sim \frac{I^2}{\sigma_x \sigma_z} \quad (6.1)$$

wobei I der Strom und σ_x, σ_z die Breite und Höhe der Strahlen ist. Die Abweichung der Kurve von der Parabel beschreibt die Aufweitung des Strahls.

In Bild 10 wird die von SITROS berechnete Abhängigkeit der Luminosität vom Strom gezeigt. Die gestrichelte Kurve ist eine Parabel, die durch die unteren Punkte gelegt ist, um die Abweichung deutlich zu machen. In Bild 11 ist die Aufweitung direkt aufgetragen.

Der lineare Anteil der Strahl-Strahl-Kraft ist ein Quadrupolfeld, das eine Verschiebung der Q -Werte bewirkt. Die Q -Verschiebung kann eine Strahlaufweitung bewirken, deren Ursache andere Nichtlinearitäten im Ring sind. Um den Effekt der Strahl-Strahl-Wechselwirkung zu separieren, wurde der fokussierende Quadrupolanteil durch eine defokussierende dünne Linse kompensiert. Dies entspricht der in der Praxis üblichen Methode, die Q -Werte durch Regelquadrupole konstant zu halten.

Die Q -Verschiebung, bei der von SITROS eine Strahlaufweitung vorhergesagt wird, stimmt mit dem gemessenen Wert ($\Delta Q_z = 0.035$) überein¹.

Da die Strahl-Strahl-Wechselwirkung einen solchen Einfluß auf die Strahlgröße hat, muß man davon ausgehen, daß auch die Polarisation beeinträchtigt wird. Die Depolarisation durch die Strahl-Strahl-Wechselwirkung wurde im Speicherring PETRA gemessen /11/.

Die Meßergebnisse sind im Bild 12 aufgetragen. Der Polarisationsgrad wird dabei mit der Polarisation eines Einzelstrahls in der gleichen Meßschicht verglichen, um systematische Fehler zu korrigieren. Deshalb ist das Verhältnis der Polarisation mit und ohne Strahl-Strahl-Kraft

$$R(I) = \frac{\text{Polarisation mit Strahl-Strahl-Kraft beim Strom } I}{\text{Polarisation des Einzelstrahls}}$$

aufgetragen. Der Elektronen- und Positronenstrom ist dabei annähernd gleich.

Neben der Polarisation wurde auch die Luminosität gemessen; sie beträgt $2.6 \cdot 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ bei 2.3 mA und $3.9 \cdot 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ bei 4.5 mA. Bei einem Strom von 4.5 mA ist die Polarisation um 10% gesunken. Man kann aus der Luminosität errechnen, daß der Strahlquerschnitt gleichzeitig um einen Faktor 3 größer geworden ist.

Die Bilder 13 und 14 zeigen die von SITROS berechnete Polarisation mit Strahl-Strahl-Wechselwirkung. Es wurde dieselbe Optik wie in Bild 8

¹Die Strahl-Strahl-Kraft hängt nicht nur vom Strom, sondern auch vom Querschnitt des Strahls und damit von den Closed Orbit Ablagen ab. Deshalb wird die Q -Verschiebung und nicht der Strom als Vergleichswert verwendet.

verwendet; in Bild 13 wurde ein Strahlstrom von 6.5 mA vorgegeben und eine Aufweitung um den Faktor 2 berechnet. Die Luminosität ist durch diese Aufweitung bereits kleiner als der maximale Wert.

Entsprechend der Messung bei PETRA ist in der SITROS Rechnung Bild 13 die Polarisation bei einem Spin Tune $\nu = 37.5$ nicht merklich beeinträchtigt. Auf beiden Seiten des Plateaus gibt es jedoch nun tiefe Resonanzen, die als Q_x - und mQ_s -Resonanzen identifiziert werden können.

In Bild 14, bei einem Strom von 7 mA, ist der Strahl 70-fach aufgeweitet. Die Luminosität ist nur noch ein Sechstel des Maximalwertes, die Raumladungsgrenze also weit überschritten. Die Polarisation ist durch eine Vielzahl von nichtlinearen Resonanzen fast vollständig zerstört.

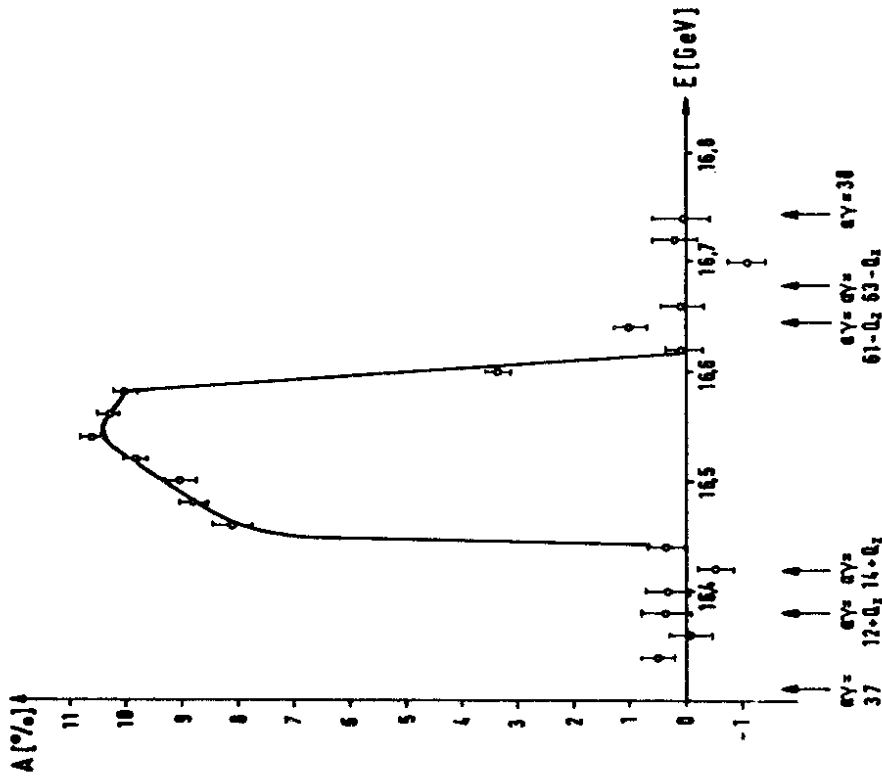


Bild 3 : Polarisation in Abhängigkeit vom Spin Tune gemessen in PETRA (aus Referenz /9/).

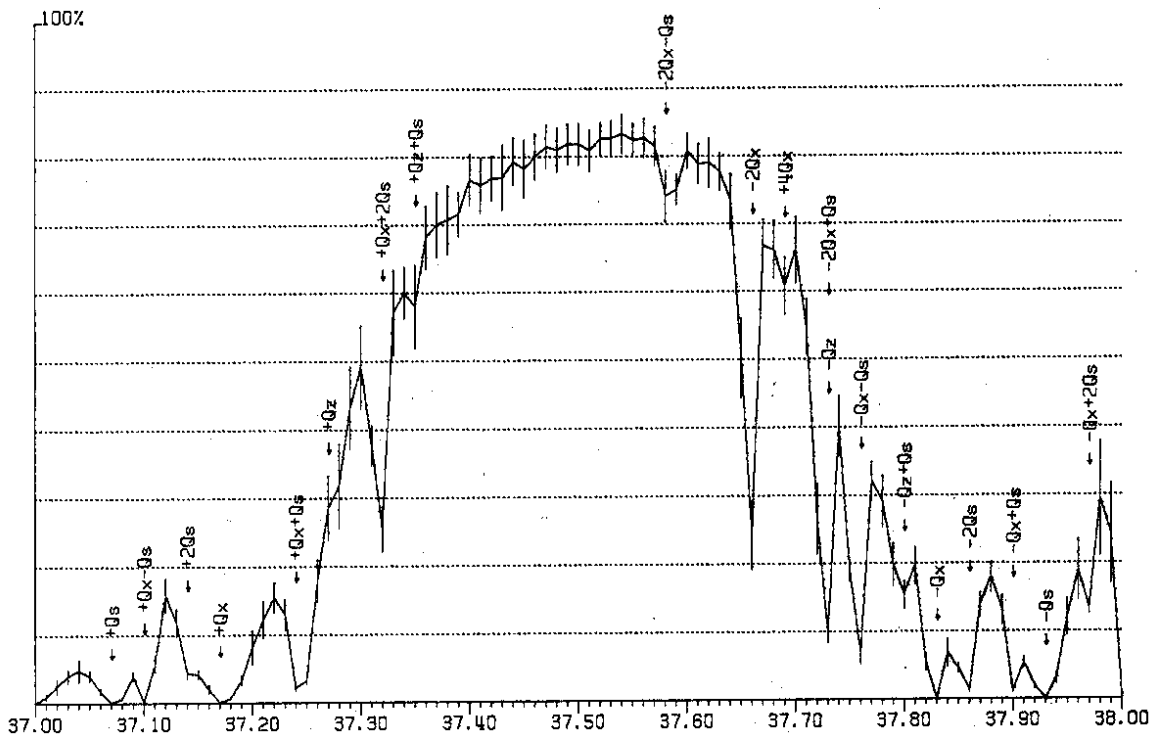


Bild 5 : SITROS-Rechnung der Polarisation in Abhängigkeit vom Spin Tune wie in Bild 4 nach der Harmonischenkorrektur.

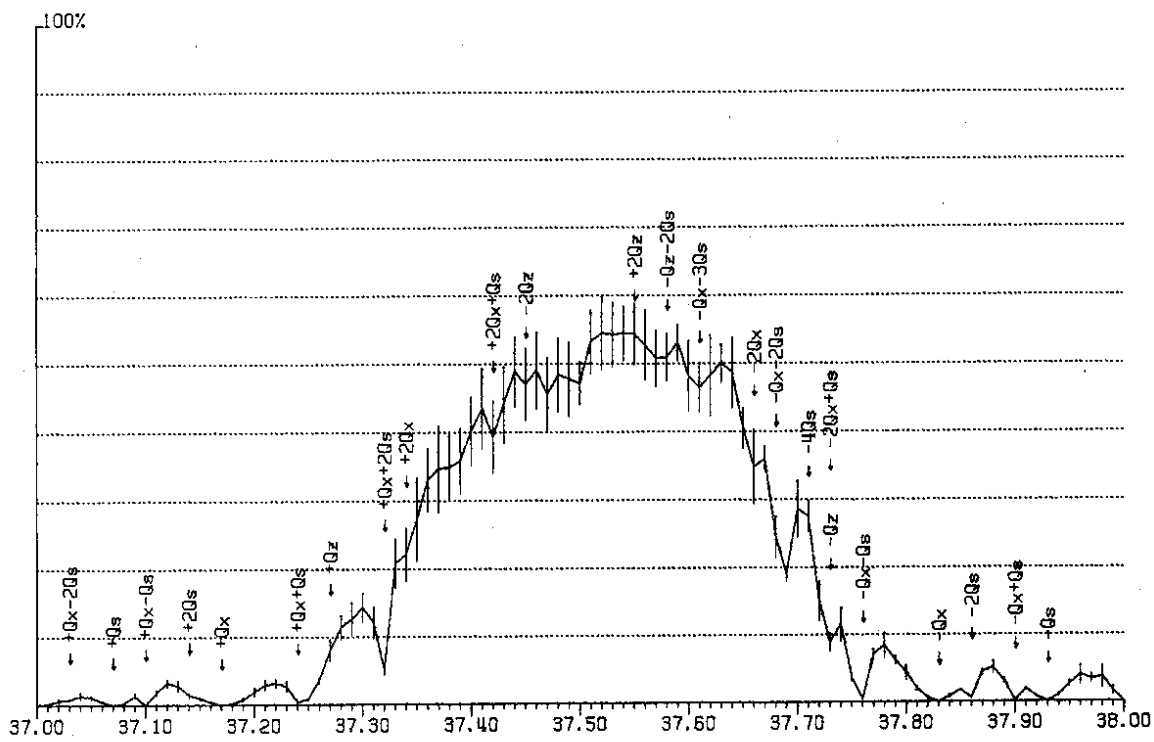


Bild 4 : SITROS-Rechnung der Polarisation in Abhängigkeit vom Spin Tune mit gaussverteilt zufälligen Feldfehlern. Die mittlere Closed Orbit Ablage z_{rms} ist 1 mm.

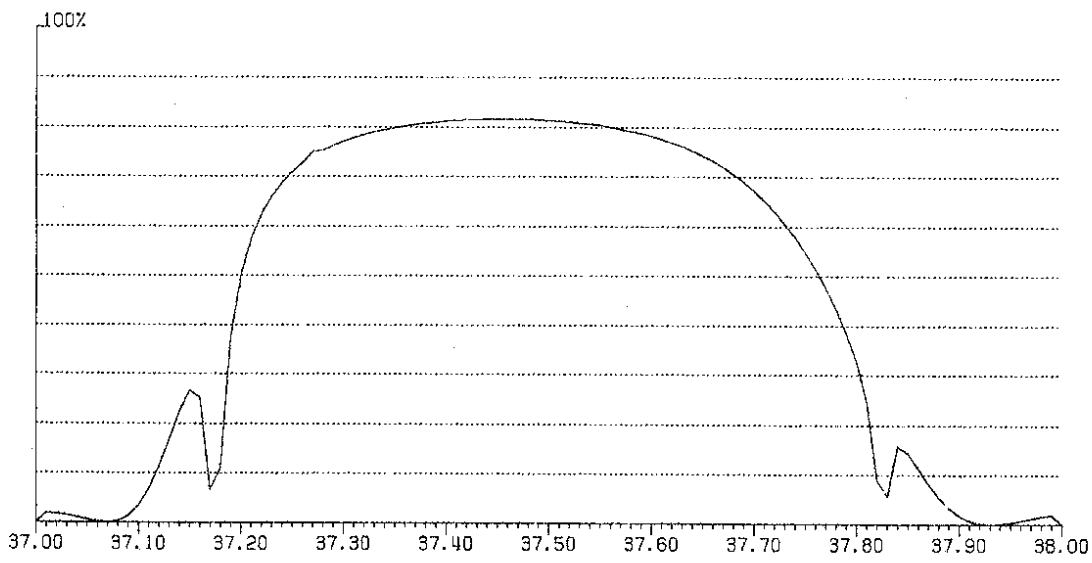


Bild 6 : Rechnung der Optik wie in Bild 4 mit dem Programm SLIM /16/.

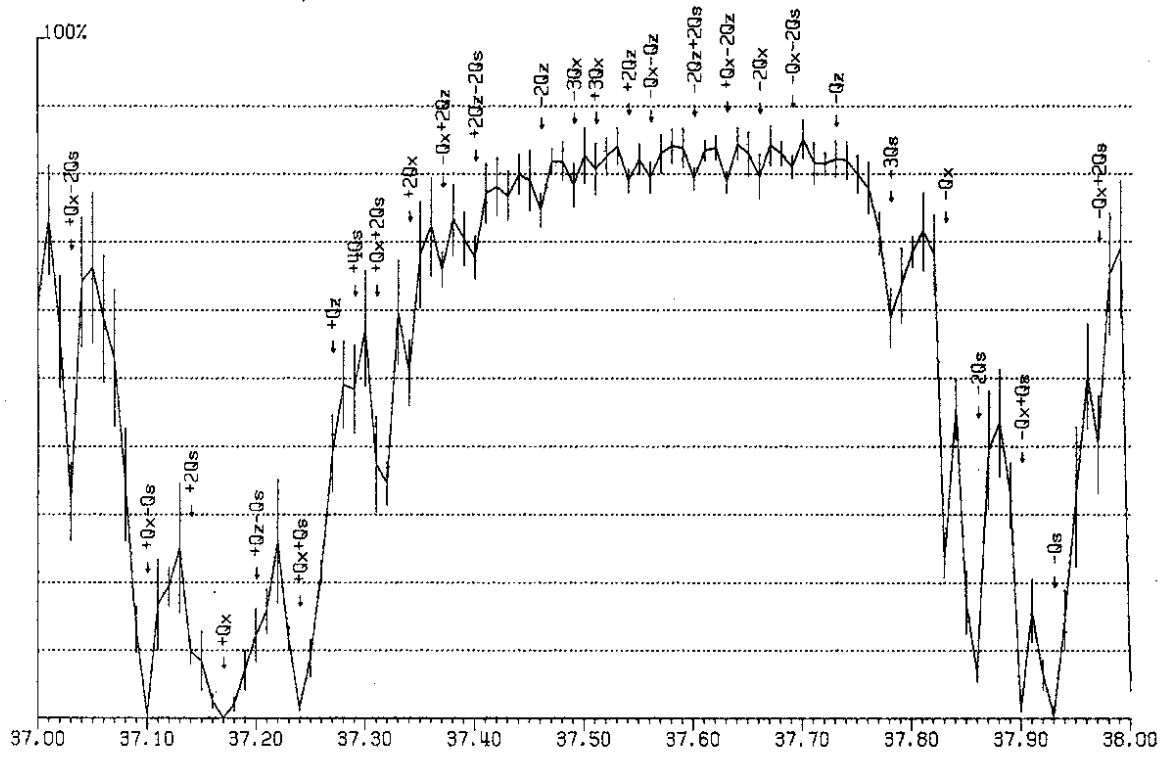


Bild 7 : SITROS-Rechnung einer ideal korrigierten Optik mit linearer Bahnbeugung.

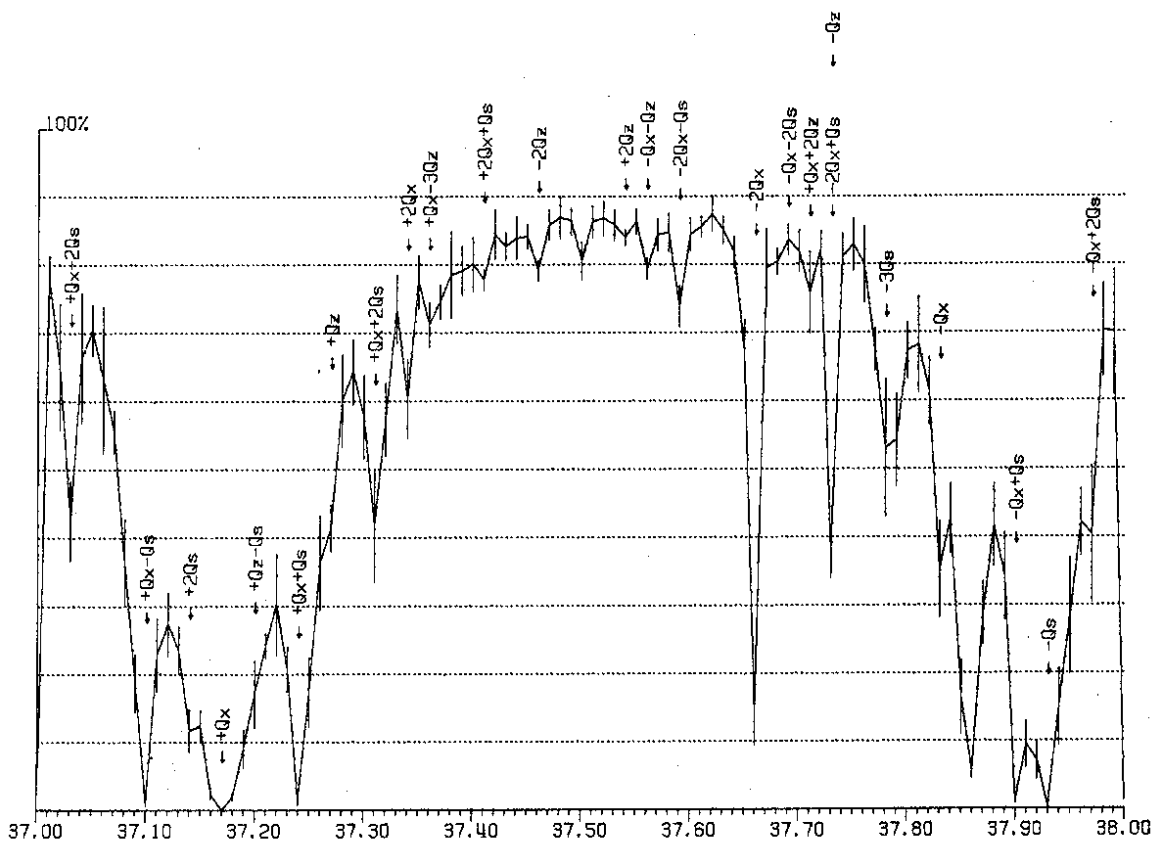


Bild 8 : SITROS-Rechnung einer ideal korrigierten Optik unter Berücksichtigung von Chromatizität und Sextupolfeldern.

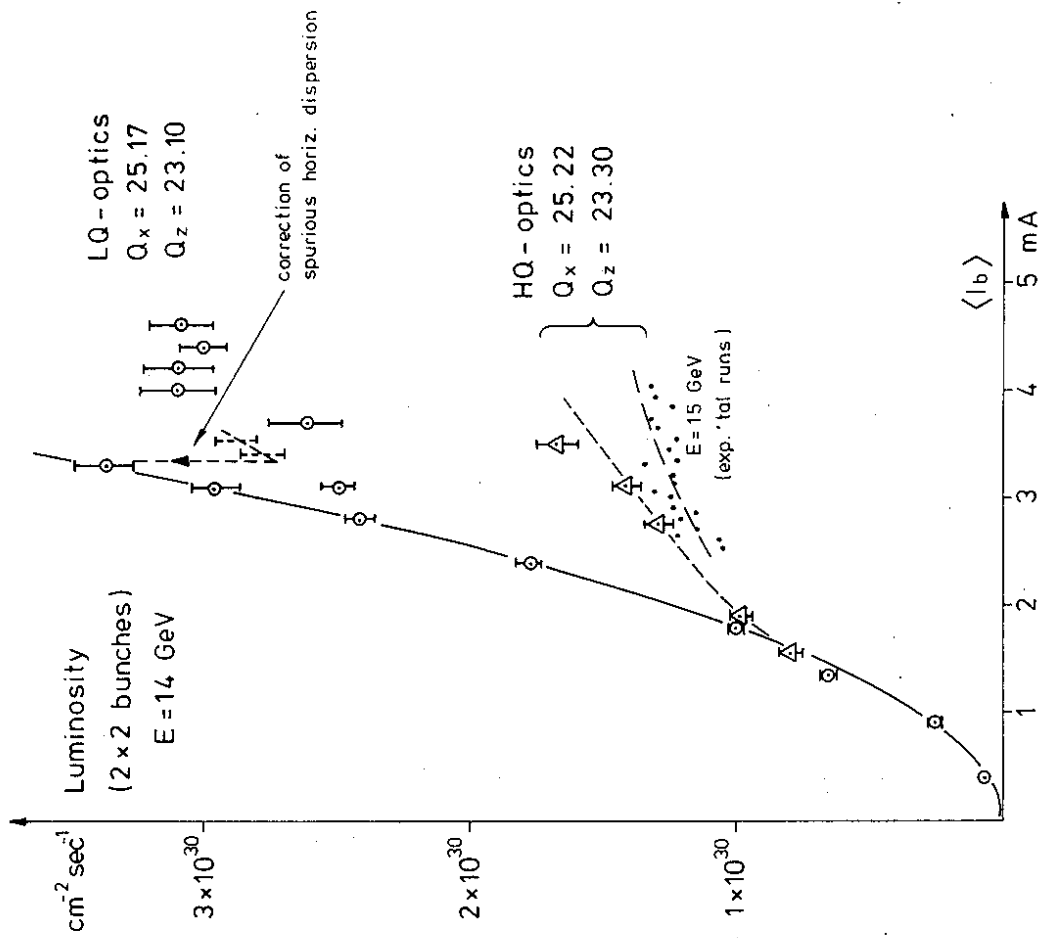


Bild 9 : Luminosität bei Strahl-Strahl-Wechselwirkung gemessen in PETRA (aus Referenz /37/).

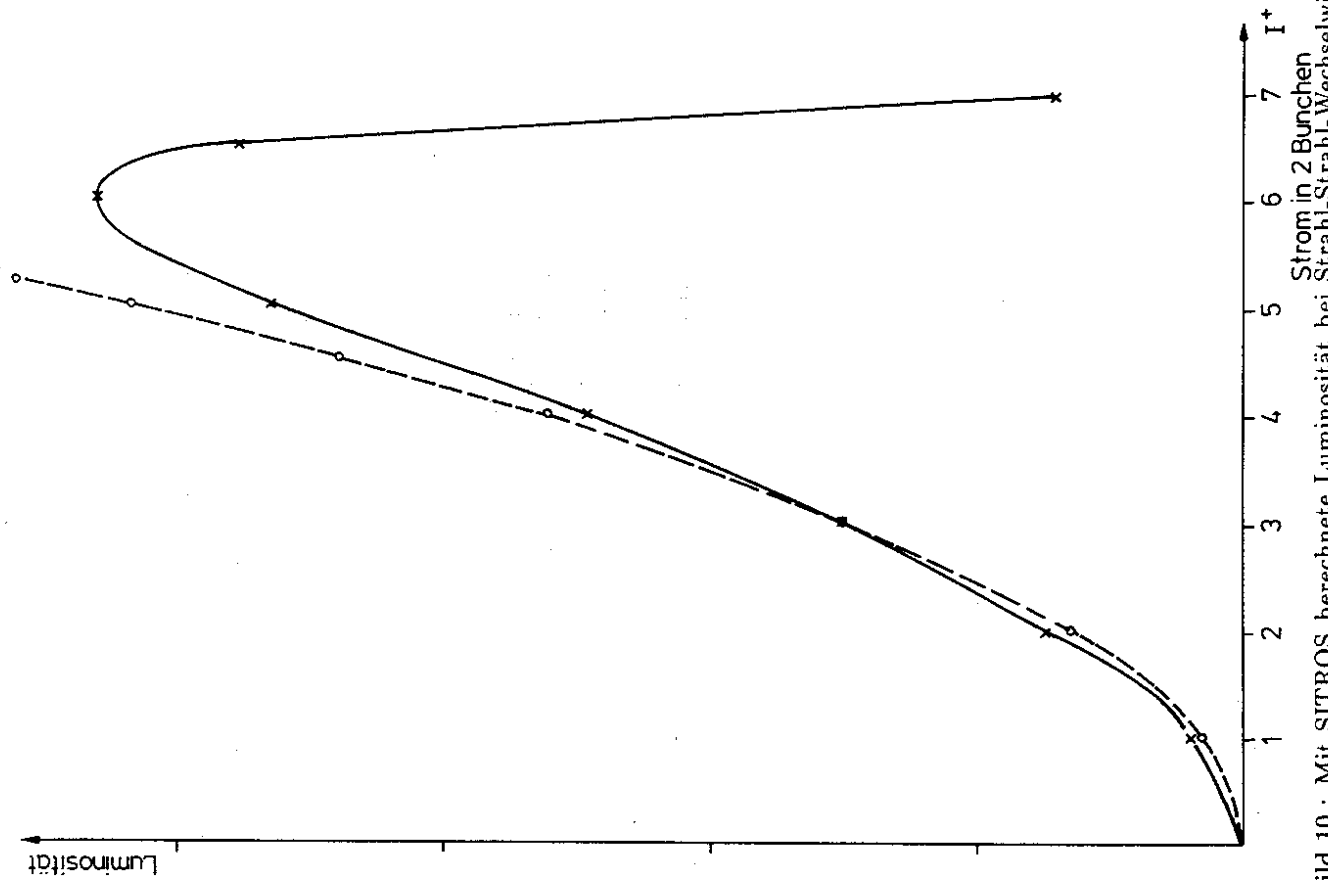


Bild 10 : Mit SITROS berechnete Luminosität bei Strahl-Strahl-Wechselwirkung in Abhängigkeit vom Strahlstrom.

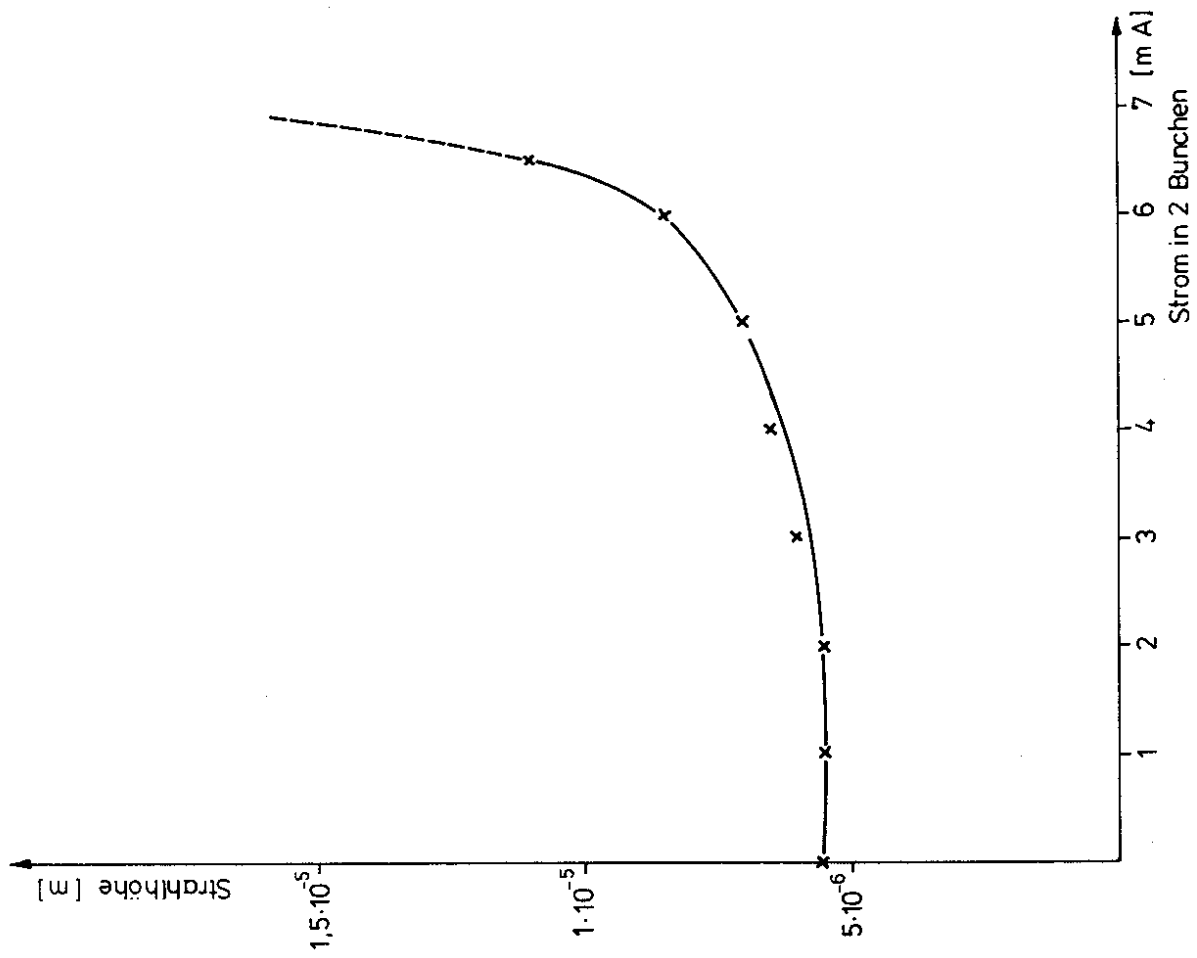


Bild 11 : Mit SITROS berechnete Strahlaufweitung durch Strahl-Strahl- Wechselwirkung .

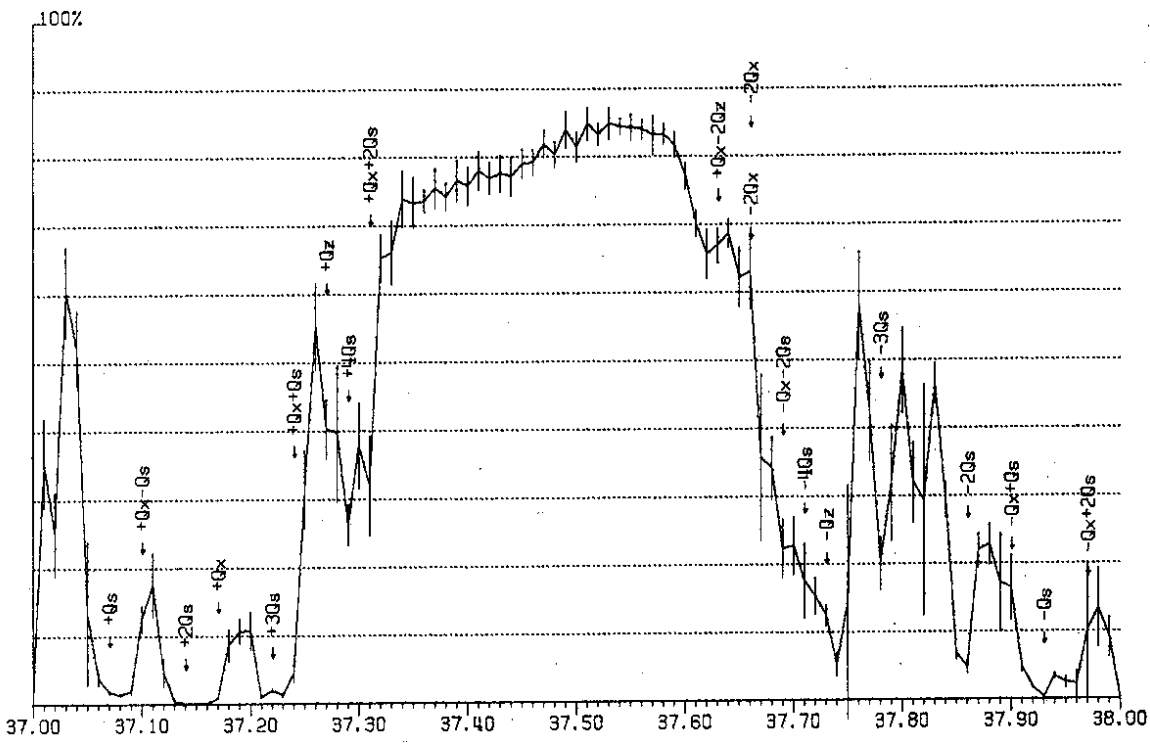


Bild 13 : SITROS-Rechnung mit Strahl-Strahl-Wechselwirkung bei einem Strom von 6.5 mA.

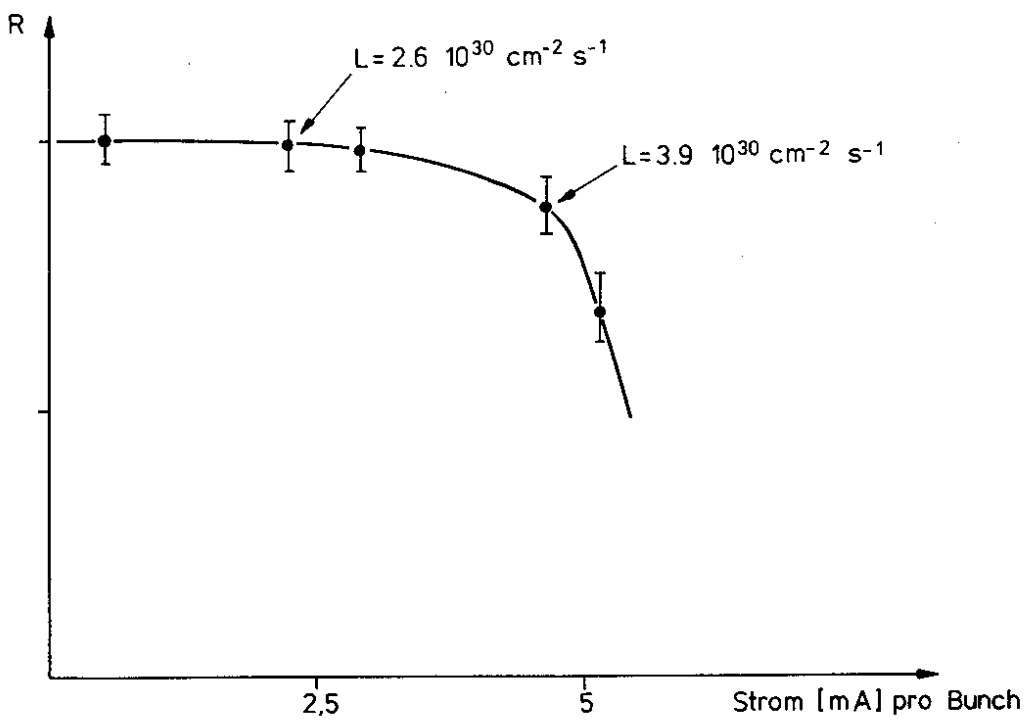


Bild 12 : Relativer Polarisationsgrad bei Strahl-Strahl-Wechselwirkung gemessen in PETRA.

7. ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Planung von Speicherringen, die mit polarisierten Elektronenstrahlen betrieben werden sollen, ist die Betrachtung der nichtlinearen Resonanzen von großer Bedeutung. Von der Stärke und Breite dieser Resonanzen hängt es ab, ob ein Arbeitspunkt gefunden werden kann, in dem die Polarisation nicht zu stark reduziert ist. Aus diesem Grund wurde das Computerprogramm SITROS entwickelt, das die Polarisation unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten berechnet.

Das SITROS Programm ist ein Tracking Programm, daß wie alle anderen Tracking Programme in seiner Genauigkeit durch die geringe Zahl von Probeteilchen und Umläufen begrenzt ist. Zusätzlich ist jedoch die Berechnung der Spindrehung aufwendiger als das Bahntracking und erfordert mehr Rechenzeit.

SITROS enthält deshalb eine Reihe von Näherungen, die die nichtlineare Berechnung der Polarisation erst möglich machen. Die Ergebnisse des Programms und der Vergleich mit den Polarisationsmessungen zeigen aber, daß SITROS die Wirklichkeit besser beschreibt als in den bisher üblichen linearen Rechnungen.

SITROS ist deshalb ein geeignetes Werkzeug, um die Depolarisation durch nichtlineare Effekte und deren Abhängigkeit von den Maschinenparametern zu verstehen und zu minimieren.

Die SITROS Ergebnisse zur Strahl-Strahl-Wechselwirkung zeigen weiterhin, daß eine hohe Luminosität und Polarisation in Speicherringen mit hoher Energie gleichzeitig erreicht werden können und die Polarisation nicht zwangsweise mit dem Verlust von Luminosität "bezahlt" werden muß.

In weiteren Untersuchungen wird jetzt das SITROS Programm auf die Speicherringe DORIS, HERA und LEP angewendet werden.

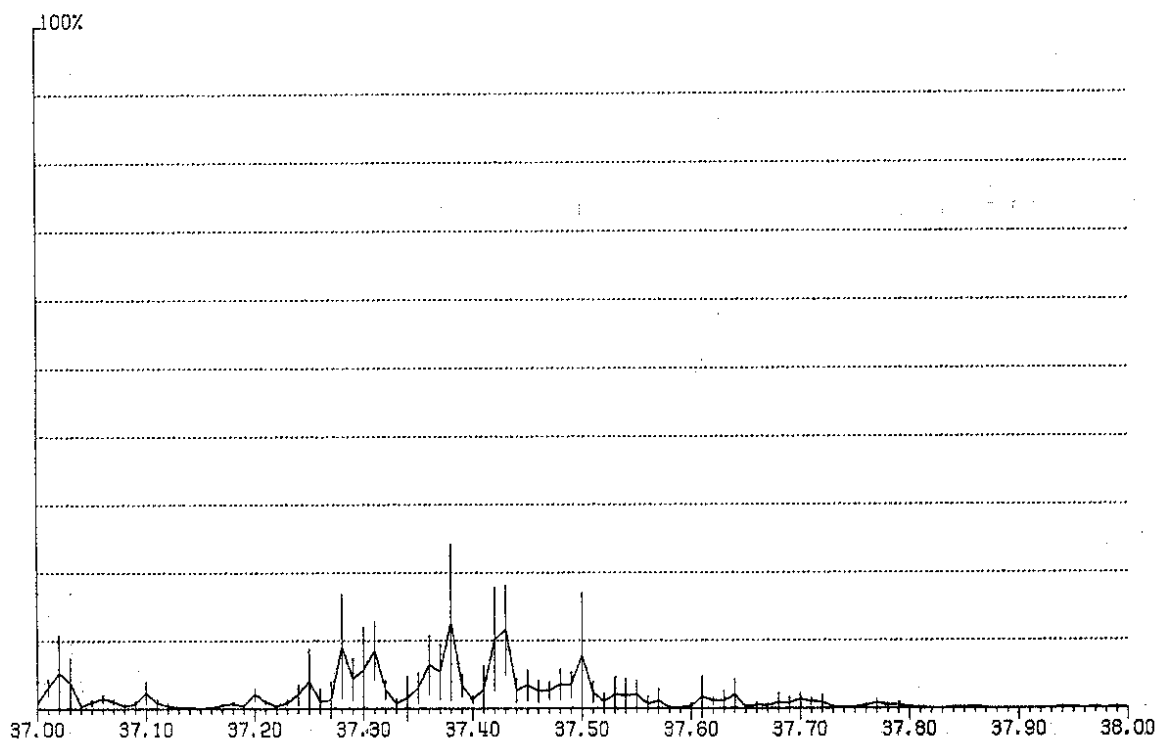


Bild 14 : SITROS-Rechnung mit Strahl-Strahl-Wechselwirkung bei einem Strom von 7 mA.

Ich danke besonders Prof. G.-A. Voss, der mir diese Arbeit ermöglicht hat und Dr. R. Rossmannith, der die Arbeit wissenschaftlich betreut hat.

Viele hilfreiche Anregungen und nützliche Kritik erhielt ich von den Kollegen Dr. R. Schmidt, Dr. H. Mais, T. Limberg, Dr. D. Barber, Dr. F. Willeke, Dr. A. Wrulich, Dr. A. Piwinski, und Dr. J. Rosbach. Mein Dank gilt auch K. U. Scholz und allen Mitgliedern der Gruppe MKI, die an meiner Arbeit regen Anteil nahmen.

Die Ablenkung eines Elektrons durch einen entgegenlaufenden Bunch soll berechnet werden. Wir nehmen an, daß die Ladungen im Bunch sei dreifach gaußverteilt sind mit den Standardbreiten $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_s$ im Laborsystem (x, z, s) . Dies ist nur dann richtig, wenn sich die Betafunktionen im Bereich der Bunchlänge σ_s nicht stark ändern, da nicht die Teilchen selbst, sondern ihre Schwingungsamplituden gaußverteilt sind. Die Änderung der Betafunktion ist bei einer symmetrischen Wechselwirkungszone:

$$\beta(s) = \beta^* + \frac{1}{\beta^*} \cdot s^2$$

$$\frac{\beta(s)}{\beta^*} = 1 + \frac{s^2}{\beta^{*2}}$$

Es muß deshalb $\sigma_s \ll \beta^*$ sein.

Die Ladungsdichte im Schwerpunktsystem (u, v, w) des Bunches ist dann:

$$\rho(u, v, w) = \frac{Ne}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_z \sigma_s \gamma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_x^2} - \frac{v^2}{2\sigma_z^2} - \frac{w^2}{2\gamma^2 \sigma_s^2}\right) \quad (A1)$$

N ist die Anzahl der Teilchen im Bunch, e ist die Elektronenladung, γ ist der Lorentzfaktor.

Wir suchen zuerst das Potential der Ladungsverteilung, transformieren die elektrischen und magnetischen Felder in das Laborsystem und errechnen die Ablenkung des Elektrons aus der Lorentzgleichung.

Das elektrische Potential des Bunches

Das Potential kann man als Lösung der Poissonsgleichung erhalten:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho$$

Die Differentialgleichung läßt sich mit der Greenfunktion $G = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ lösen:

$$\phi(\vec{r}) = \iiint G(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (A2)$$

Wir erhalten jedoch eine einfachere Integrationsformel, wenn wir von der Differentialgleichung ausgehen /38/.

$$\left(\Delta - A^2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \phi_A(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}) \quad (\text{A3})$$

Das von der Konstanten A abhängige Potential ϕ_A geht bei der Grenzwertbildung $\lim A \rightarrow 0$ in das gesuchte Potential über. Wir suchen die Greenfunktion, für die gilt:

$$\left(\Delta - A^2 \frac{\partial}{\partial t}\right) G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \quad (\text{A4})$$

Die Greenfunktion wird durch ihre Fouriertransformierte ausgedrückt:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')) G(\vec{k}, \omega) d\omega d\vec{k} \quad (\text{A5})$$

Die Deltafunktion ergibt sich aus:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')) d\omega d\vec{k} \quad (\text{A6})$$

Wir setzen (A5) und (A6) in (A4) ein und ziehen den Operator in das Integral. Der Vergleich der Integranden gibt dann:

$$\begin{aligned} (-\vec{k}^2 + iA^2\omega)G(\vec{k}, \omega) &= -4\pi \\ G(\vec{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{\vec{k}^2 - i\omega A^2} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Einsetzen in (A5) ergibt:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{2}{(2\pi)^3} \iiint \frac{1}{\vec{k}^2 - i\omega A^2} \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')) d\omega d\vec{k}$$

Wir können den von \vec{k} abhängigen Teil aus dem inneren Integral herausziehen:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{2}{(2\pi)^3} \iiint \exp(i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')) \frac{i}{A^2} \int \frac{1}{\omega + i\vec{k}^2/A^2} \exp(-i\omega(t - t')) d\omega d\vec{k} \quad (\text{A8})$$

Wir lösen das Integral über $d\omega$ mit dem Residuensatz:

$$\int d\omega \frac{1}{\omega + i\vec{k}^2/A^2} \exp(-i\omega(t - t')) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t' \\ 2\pi i \exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{A^2}(t - t')\right) & \text{für } t > t' \end{cases}$$

Also:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{2}{(2\pi)^2 A^2} \iiint \exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{A^2}(t - t') + i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')\right) d\vec{k}$$

Da die Ladungsverteilung nicht von der Zeit abhängt, können wir die Differenz $t - t'$ durch einen Ausdruck ersetzen, den wir wieder t nennen:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t) = \frac{2}{(2\pi)^2 A^2} \iiint \exp\left(-\frac{\vec{k}^2}{A^2}t + i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')\right) d\vec{k} \quad (\text{A9})$$

Wir müssen jetzt die Integrationen über die drei Komponenten des Vektors \vec{k} ausführen, wobei wir die Formel /39/

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(ax^2 + 2bx + c)] dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{b^2}{a} - c\right)$$

benutzen. Wir erhalten:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t) = \frac{A}{2\pi^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{A^2}{4t}(\vec{r} - \vec{r}')^2\right) \quad (\text{A10})$$

Mit der Greenfunktion läßt sich das Potential durch Integration errechnen:

$$\phi_A(\vec{r}, t) = \int_0^t \iiint G(\vec{r}, \vec{r}', \tau) \rho(\vec{r}') d\vec{r}' d\tau \quad (\text{A11})$$

Die Integration über $d\tau$ wird von 0 bis t ausgeführt, da die Greenfunktion für $t < 0$ gleich null ist. Wir führen nun die neue Integrationsvariable $q = 4\tau/A^2$ ein. Mit $d\tau = \frac{A^2}{4} dq$ folgt:

$$\phi_A(\vec{r}, t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^{4t/A^2} \iiint \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{q}(\vec{r} - \vec{r}')^2\right) \rho(\vec{r}') d\vec{r}' dq$$

Die Diffusionskonstante A tritt jetzt nur noch in der Integrationsgrenze auf. Wir bilden nun den Grenzwert $\lim A \rightarrow 0$ und verschieben dadurch die Integrationsgrenze ins Unendliche. Wir setzen nun die Ladungsverteilung (A1) ein und erhalten:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{Ne}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_z \sigma_s} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} \cdot \int \exp\left(-\frac{1}{q}(u-u')^2 - \frac{u'^2}{2\sigma_x^2}\right) du'$$

$$\int \exp\left(-\frac{1}{q}(v-v')^2 - \frac{v'^2}{2\sigma_z^2}\right) dv' \cdot \int \exp\left(-\frac{1}{q}(w-w')^2 - \frac{w'^2}{2\gamma^2 \sigma_s^2}\right) dw' dq$$

Die inneren Integrale lassen sich wieder nach /39/ lösen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{q}(u-u')^2 - \frac{u'^2}{2\sigma_x^2}\right) du' = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma_x \cdot \left(\frac{q}{2\sigma_x^2 + q}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_x^2 + q}\right)$$

Analog werden die Integrale über dv' und dw' gelöst. Wir verwenden nun die Abkürzungen $q_x \equiv 2\sigma_x^2 + q$; $q_z \equiv 2\sigma_z^2 + q$; $q_s \equiv 2\gamma^2 \sigma_s^2 + q$. Wir erhalten dann für das Potential:

$$\phi(u, v, w) = \frac{Ne}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^{\infty} (q_x q_z q_s)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u^2}{q_x} - \frac{v^2}{q_z} - \frac{w^2}{q_s}\right) dq \quad (\text{A12})$$

Die Ablenkung des Elektrons

Die Ablenkung des Elektrons durch den Positronenbunch ist durch die Lorentzgleichung gegeben:

$$\Delta z' = \frac{\Delta p_z}{p} = \frac{e}{p} \int E_z(x, z, s) + \frac{v_{\parallel}}{c} B_x(x, z, s) - \frac{v_{\perp}}{c} B_s(x, z, s) dt$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{e}{p} \int E_x(x, z, s) - \frac{v_{\parallel}}{c} B_z(x, z, s) + \frac{v_{\perp}}{c} B_s(x, z, s) dt \quad (\text{A13})$$

Hier sind x, z, s die Koordinaten des Elektrons im Laborsystem zum Zeitpunkt t und v_{\parallel}, v_{\perp} die longitudinale und transversale Geschwindigkeit des Teilchens

im Laborsystem. Die elektromagnetischen Felder im Laborsystem erhalten wir aus den elektrischen Feldern im System des Bunches durch Lorentztransformation:

$$E_x = \gamma E_u \quad E_z = \gamma E_v \quad E_s = E_w \quad (\text{A14})$$

$$B_x = \beta \gamma E_v \quad B_z = -\beta \gamma E_u \quad B_s = 0$$

Wir berechnen nun die elektrischen Felder E_u, E_v, E_w im Schwerpunktsystem:

$$\vec{E}(u, v, w) = -\nabla \phi(u, v, w) \quad (\text{A15})$$

$$E_u = \frac{Ne}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(q_x q_z q_s)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{u^2}{q_x} - \frac{v^2}{q_z} - \frac{w^2}{q_s}\right) \frac{2u}{q_x} dq$$

$$E_v = \frac{Ne}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(q_x q_z q_s)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{u^2}{q_x} - \frac{v^2}{q_z} - \frac{w^2}{q_s}\right) \frac{2v}{q_z} dq$$

$$E_w = \frac{Ne}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(q_x q_z q_s)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{u^2}{q_x} - \frac{v^2}{q_z} - \frac{w^2}{q_s}\right) \frac{2w}{q_s} dq \quad (\text{A16})$$

Wir transformieren auch das Koordinatensystem:

$$u = x \quad v = z \quad w = \gamma(s + ct) \quad (\text{A17})$$

Durch Einsetzen erhalten wir aus (A13):

$$\Delta z' = \frac{Ne^2}{\pi^{\frac{1}{2}} p} \gamma(1 + \beta^2) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(q_x q_z q_s)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{z^2}{q_z} - \frac{\gamma^2(s + ct)^2}{q_s}\right) \frac{2z}{q_z} dq dt$$

$$\Delta x' = \frac{Ne^2}{\pi^{\frac{1}{2}} p} \gamma(1 + \beta^2) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(q_x q_z q_s)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{z^2}{q_z} - \frac{\gamma^2(s + ct)^2}{q_s}\right) \frac{2x}{q_x} dq dt \quad (\text{A18})$$

Wir machen nun den Ansatz, daß das Elektron seine Bewegungsrichtung nicht ändert, während es durch den Bunch fliegt. Mit dieser Annahme ist es möglich, die Lorentzgleichung zu integrieren und die Ablenkung zu berechnen. Wir werden dann sehen, daß die Bewegungsrichtung einen zu vernachlässigenden Einfluß auf die Ablenkung hat und dieser Ansatz deshalb berechtigt ist.

Die speziellen Koordinaten des von uns betrachteten Elektrons sind:

$$x = x_0 + x'_0 ct \quad z = z_0 + z'_0 ct \quad s = ct \quad (\text{A19})$$

Wir haben das Koordinatensystem so verschoben, daß das Teilchen zur Zeit $t = 0$ den Mittelpunkt des Bunches im Abstand x_0, z_0 passiert. Der Impuls unseres Teilchens ist $p = \gamma m_0 c$, der klassische Elektronenradius ist $r_e = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ und wir setzen $\beta = 1$. Wir erhalten dann:

$$\Delta z' = \frac{4Nr_e c}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(q_x q_z q_s)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(x_0 + x'_0 ct)^2}{q_x} - \frac{(z_0 + z'_0 ct)^2}{q_z} - \frac{\gamma^2 (2ct)^2}{q_s}\right) \frac{(z_0 + z'_0 ct)}{q_z} dt dq$$

$$\Delta x' = \frac{4Nr_e c}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty (q_x q_z q_s)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x_0 + x'_0 ct)^2}{q_x} - \frac{(z_0 + z'_0 ct)^2}{q_z} - \frac{\gamma^2 (2ct)^2}{q_s}\right) \frac{(x_0 + x'_0 ct)}{q_x} dt dq$$

Mit $l = ct \equiv$ Abstand vom Wechselwirkungspunkt, $dt = \frac{1}{c} dl$, und den Abkürzungen:

$$a = \frac{x_0'^2}{q_x} + \frac{z_0'^2}{q_z} + \frac{4\gamma^2}{q_s} \quad b = \frac{x_0 x'_0}{q_x} + \frac{z_0 z'_0}{q_z} \quad c = \frac{x_0^2}{q_x} + \frac{z_0^2}{q_z} \quad (\text{A20})$$

lautet die Gleichung:

$$\Delta z' = \frac{4Nr_e c}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty (q_x q_z q_s)^{-\frac{1}{2}} \exp(-al^2 + 2bl + c) (z_0 + z'_0 l) dt dq$$

$$\Delta x' = \frac{4Nr_e c}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \int_0^\infty (q_x q_z q_s)^{-\frac{1}{2}} \exp(-al^2 + 2bl + c) (x_0 + x'_0 l) dt dq$$

Das Integral über dl lässt sich auflösen und wir erhalten die Formel:

$$\Delta z' = \frac{4Nr_e c}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty (q_x q_z q_s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} (z_0 + z'_0 \frac{b}{a}) \exp\left(\frac{b^2}{a} - c\right) dq$$

$$\Delta x' = \frac{4Nr_e c}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty (q_x q_z q_s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} (x_0 + x'_0 \frac{b}{a}) \exp\left(\frac{b^2}{a} - c\right) dq \quad (\text{A22})$$

Durch eine Näherung wird jetzt die Formel (A22) in die allgemein verwendete Form gebracht. Da $|x'_0|, |z'_0| \ll \gamma^2$ sind, setzen wir:

$$a = \frac{4\gamma^2}{q_s} \quad \frac{b}{a} = 0 \quad c = \frac{x_0^2}{q_x} + \frac{z_0^2}{q_z} \quad (\text{A23})$$

Dann vereinfacht sich (A22) zu:

$$\Delta z' = \frac{2Nr_e c}{\gamma} z_0 \int_0^\infty (q_x q_z)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{q_x} - \frac{z_0^2}{q_z}\right) dq$$

$$\Delta x' = \frac{2Nr_e c}{\gamma} x_0 \int_0^\infty (q_x q_z)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{q_x} - \frac{z_0^2}{q_z}\right) dq \quad (\text{A24})$$

Die Ablenkung hängt damit auch nicht mehr von der Bunchlänge ab. Das verbleibende Integral läßt sich auflösen, wenn man die beiden Gleichungen zusammenfaßt und durch komplexe Größen beschreibt /35/:

$$\Delta' \equiv (\Delta x' - i\Delta z') = \frac{2Nr_e c}{\gamma} \int_0^\infty \left(\frac{x}{q_x} - i\frac{z}{q_z}\right) (q_x q_z)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{z^2}{q_z}\right) dq \quad (\text{A25})$$

Wir machen die Substitution:

$$y^2 = -\frac{x^2}{q_x} - \frac{z^2}{q_z} + \frac{1}{\chi^2} (x + iz)^2 = \frac{1}{\chi^2} \left(x\sqrt{\frac{q_x}{q_z}} + iz\sqrt{\frac{q_x}{q_z}}\right)^2 \quad (\text{A26})$$

mit $\chi^2 \equiv q_x - q_z = 2\sigma_x^2 - 2\sigma_z^2$.

Es ist:

$$\frac{d(y^2)}{dq} = \frac{x^2}{q_x^2} + \frac{z^2}{q_z^2} = 2y \frac{dy}{dq} \quad dq = \frac{2y}{\frac{x^2}{q_x^2} + \frac{z^2}{q_z^2}}$$

$$\frac{x^2}{q_x^2} + \frac{z^2}{q_z^2} = \left(\frac{x}{q_x} - i \frac{z}{q_z} \right) \cdot \left(\frac{x}{q_x} + i \frac{z}{q_z} \right)$$

Die neuen Integralgrenzen sind:

$$G_1 = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x} + iz \frac{\sigma_x}{\sigma_x} \right)$$

$$G_2 = \frac{1}{\chi} (x + iz)$$

Damit wird aus (A25):

$$\Delta' = \frac{4N\tau_e}{\gamma\chi} \exp(-G_2^2) \int_{G_1}^{G_2} \exp(y^2) dy \quad (\text{A27})$$

Die Lösung dieses Integrals ist die komplexe Fehlerfunktion, die wir in der Form:

$$w(z) = \exp(z^{-2}) \left[1 - \frac{2i}{\pi^{1/2}} \int_0^z \exp(y^2) dy \right]$$

verwenden. (A26) wird dann:

$$\Delta' = -\frac{2iN\tau_e\pi^{1/2}}{\gamma\chi} \left[\exp(G_1^2 - G_2^2) w(G_1) - w(G_2) \right] \quad (\text{A28})$$

In reeller Form lauten dann die Gleichungen für $\Delta x'$ und $\Delta z'$:

$$\Delta x' = \frac{2N\tau_e\pi^{1/2}}{\gamma(2\sigma_x^2 - 2\sigma_z^2)^{1/2}} \Re \left[\exp\left(\frac{z^2}{2\sigma_x^2} - \frac{x^2}{2\sigma_z^2}\right) \cdot w\left(\frac{x\frac{\sigma_x}{\sigma_x} + iz\frac{\sigma_x}{\sigma_x}}{(2\sigma_x^2 - 2\sigma_z^2)^{1/2}}\right) - w\left(\frac{x + iz}{(2\sigma_x^2 - 2\sigma_z^2)^{1/2}}\right) \right]$$

$$\Delta z' = \frac{2N\tau_e\pi^{1/2}}{\gamma(2\sigma_x^2 - 2\sigma_z^2)^{1/2}} \Im \left[\exp\left(\frac{z^2}{2\sigma_x^2} - \frac{x^2}{2\sigma_z^2}\right) \cdot w\left(\frac{x\frac{\sigma_x}{\sigma_x} + iz\frac{\sigma_x}{\sigma_x}}{(2\sigma_x^2 - 2\sigma_z^2)^{1/2}}\right) - w\left(\frac{x + iz}{(2\sigma_x^2 - 2\sigma_z^2)^{1/2}}\right) \right] \quad (\text{A29})$$

Durch (A29) wird der Kick angegeben, den das Elektron in dem Punkt erhält, in dem es das Zentrum des Positronenbunches durchläuft. Dieser Punkt stimmt jedoch nicht mit dem Wechselwirkungspunkt überein, wenn das Elektron eine longitudinale Auslenkung hat. Der Kick erfolgt dann im Abstand $-\ell/2$ vom Wechselwirkungspunkt¹.

Hat das Elektron im Wechselwirkungspunkt die Koordinaten x_0, x'_0, z_0, z'_0 , so muß in die Gleichung (A29) $x = x_0 - x'_0\ell/2$ und $z = z_0 - z'_0\ell/2$ eingesetzt werden. Die Bewegungsänderung kann dann so behandelt werden, als wenn der Kick im Wechselwirkungspunkt stattfindet und zu der Winkeländerung $\Delta x'$ und $\Delta z'$ eine Änderung der Ablagen $\Delta x = x'_0\ell/2$ und $\Delta z = z'_0\ell/2$ hinzukommt.

Polarisationsberechnung in linearer Näherung

Analog zur Berechnung der natürlichen Emittanz läßt sich auch der Polarisationsgrad in linearer Näherung bestimmen /16,17/. Der zur Emittanz analoge Begriff ist die Depolarisation des Strahls, die durch die stochastischen Quantenemissionen erzeugt und durch den Sokolov-Ternov-Effekt gedämpft wird.

Mit zwei Spinvektoren \vec{l} und \vec{m} , die zu einander und auf \vec{n} senkrecht sind, läßt sich ein beliebiger Vektor \vec{s} mit zwei Parametern α und β darstellen:

$$\vec{s} = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \vec{n} + \alpha \vec{l} + \beta \vec{m}$$

Wenn man Spinzustände berechnen will, die nur kleine Abweichungen von der \vec{n} -Achse haben ($\alpha, \beta \ll 1$), so kann man auch hier linearisieren:

$$\vec{s} = \vec{n} + \alpha \vec{l} + \beta \vec{m} \quad (\text{A30})$$

Analog zur Betatronbewegung kann man nun die $\vec{n}, \vec{m}, \vec{l}$ -Spinvektoren für den Closed Orbit unter Einbeziehung der Nichtlinearitäten berechnen und die Abweichungen eines beliebigen Elektrons vom Closed Orbit und der \vec{n} -Achse durch einen Zustandsvektor mit den 8 Komponenten $\vec{X} = (x, x', z, z', \ell, \delta, \alpha, \beta)$ beschreiben. Die Übergangsmatrix $M_{8 \times 8}$ hat dann folgende Form:

$$M_{8 \times 8} = \begin{pmatrix} M_{6 \times 6} & O_{6 \times 2} \\ D_{2 \times 6} & I_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

¹Die Größe ℓ gibt die Differenz der Bahnlänge des Elektrons zu der des Sollteilchens an (s. Abschnitt 3.1). Ein positives ℓ bedeutet, daß das Elektron zu spät kommt.

Die Matrix $M_{6 \times 6}$ beschreibt die Betatronbewegungen und die Matrix $D_{2 \times 6}$ die sogenannte Spin-Bahn-Kopplung. O und I sind die Null- b.z.w. Einheitsmatrix.

Zur Berechnung von $D_{2 \times 6}$ zerlegen wir den Vektor $\vec{\Omega}$ aus (4.1) in das $\vec{\Omega}_{c.o.}$ auf dem Closed Orbit und das $\Delta\vec{\Omega}$, das die Abweichung beschreibt:

$$\vec{s}' = (\vec{\Omega}_{c.o.} + \Delta\vec{\Omega}) \times \vec{s} \quad (A31)$$

Wir setzen (A30) ein. Da $\vec{n}, \vec{m}, \vec{l}$ Lösungen von $\vec{s}' = \vec{\Omega}_{c.o.} \times \vec{s}$ sind, erhalten wir:

$$\alpha \vec{l}' + \beta \vec{m}' = \Delta\vec{\Omega} \times \vec{n} + \alpha \Delta\vec{\Omega} \times \vec{l} + \beta \Delta\vec{\Omega} \times \vec{m} \quad (A32)$$

Die beiden letzten Terme in (A32) werden als Terme 2. Ordnung vernachlässigt, da α, β und $\Delta\vec{\Omega}$ klein sind. Durch skalare Multiplikation von (A32) mit \vec{l} und mit \vec{m} erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\Delta\vec{\Omega} \cdot \vec{l} \\ \beta' &= \Delta\vec{\Omega} \cdot \vec{m} \end{aligned} \quad (A33)$$

$\Delta\vec{\Omega}$ ist dabei eine Funktion von $x, x', z, z', \ell, \delta$. Durch Integrieren¹ von (A33) erhält man deshalb die einzelnen Elemente der Matrix $D_{2 \times 6}$.

Die durch eine Photonemission angeregten Betatron- und Spinbewegungen werden wieder als Linearkombination der 8 Eigenvektoren der Umlaufmatrix dargestellt. Dabei kann ein Eigenvektorpaar des Spinbewegung zugeordnet werden. Seine Ortskomponenten sowie die dazugehörige Dämpfungskonstante sind null². Während die Amplituden der anderen drei Eigenvektorpaare schnell gedämpft werden, bleiben die Amplituden der Spinvektoren erhalten und beschreiben somit die Depolarisation durch die Photonemission. Die Mittelung über alle Photonemissionen ergibt dann die Depolarisationszeit τ_d :

$$\frac{1}{\tau_d} = \frac{1}{2\pi R} \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{r_e \hbar \gamma^5}{m_e} \oint \frac{1}{|\rho|^3} \left[\Im \left(\sum_{k=1}^3 E_{5k}^* E_{7k} \right)^2 + \Im \left(\sum_{k=1}^3 E_{5k}^* E_{8k} \right)^2 \right] ds \quad (A34)$$

Der Polarisationsgrad wird dann nach Gleichung (2.21) berechnet.

¹Da die Integrale für die meisten optischen Elemente nicht analytisch lösbar sind, werden hier wieder Näherungen (z.B. dünne Linsen) verwendet.

²Die Dämpfung der Depolarisation durch den Sokolov-Ternov Effekt ist in der Umlaufmatrix nicht enthalten. Da die Dämpfungszeit (Polarisationszeit) 10^4 mal länger als die Betatrontämpfung ist, ist diese Vereinfachung gerechtfertigt.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1) T. Limberg: Eine genaue Bestimmung der Masse des Υ' Teilchens. DESY M-84-03 (1984)
- 2) D. P. Barber et. al.: A precision measurement of the Υ' meson mass. DESY 83-067 (1983) und Physics Letters Vol. 135B, No.5,6
- 3) HERA, A Proposal for a large electron-proton colliding beam facility at DESY. DESY HERA 81-10(1981)
- 4) Experimentation at HERA. DESY HERA 83-20(1983)
- 5) A. A. Sokolov, I. M. Ternov: Sov. Phys. Dokl. 8 (1964),1203
- 6) Ya. S. Derbenev, A. M. Kondratenko: Polarization kinetics of particles in Storage rings, Sov. Phys. JETP, Vol 37, No 6, (1973).
- 7) D. P. Barber, H. D. Bremer, J. Kewisch, H. C. Lewin, T. Limberg, H. Mais, G. Ripken, R. Rossmannith, R. Schmidt: First results from the DORIS polarimeter. DESY M-83-15 (1983)
- 8) D. P. Barber, T. Limberg, R. Rossmannith, R. Schmidt: Results of polarization calculations for Doris II. DESY M-83-14 (1983)
- 9) H. D. Bremer, J. Kewisch, H. C. Lewin, H. Mais, R. Rossmannith, R. Schmidt, D. P. Barber: Optimizing the degree of polarization in PETRA. DESY 82-026 (1982)
- 10) H. D. Bremer, J. Kewisch, H. C. Lewin, H. Mais, G. Ripken, R. Rossmannith, R. Schmidt, D. P. Barber: Beam polarization in PETRA. DESY M-82-26 (1982)
- 11) D. P. Barber, H. D. Bremer, J. Kewisch, H. C. Lewin, T. Limberg, H. Mais, G. Ripken, R. Rossmannith, R. Schmidt: Polarization measurements at PETRA. DESY M-83-06 (1983)
- 12) R. Schmidt: Polarizationsuntersuchungen am Speicherring PETRA. DESY M-82-22 (1982)
- 13) R. Rossmannith, R. Schmidt: Compensation of depolarizing effects in electron positron storage rings. DESY 84-105 (1984)

- 14) K. Steffen: Complete snake and rotator schemes for spin polarization in proton rings and large electron rings. DESY 83-124 (1983)
- 15) D. P. Barber, J. Kewisch, G. Ripken, R. Rossmanith, R. Schmidt: A solenoid spin rotator for large electron storage rings. DESY 84-102 (1984)
- 16) A. W. Chao: Depolarization calculations using generalized matrices. PEP 257 (1977)
- 17) A. W. Chao: Evaluation of radiative spin polarization in an electron Storage ring. Nuc. Inst. Meth. 180 (1981) 29-36
- 18) J. R. Johnson, R. Prepost, D. E. Wisner: Beam polarization at the SPEAR storage ring. SLAC-PUB-2903 (1982)
- 19) L. T. Thomas: Phil. Mag. 3, 1 (1927)
- 20) P. A. M. Dirac: Proc. Roy. Soc. A117, 610 (1928).
- 21) P. A. M. Dirac: The principles of Quantum mechanics. 3rd edition, Oxford, N.Y. (1947).
- 22) L. I. Schiff: Quantum mechanics. McGraw-Hill Book Company N.Y. (1949)
- 23) J. C. Wesley, A. Rich: Phys. Rev. A4.1341 (1971)
- 24) J. D. Jackson: Klassische Elektrodynamik. de Gruyter Berlin (1983)
- 25) V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi: Phys. Rev. Lett 2 (1959) 435
- 26) C. Bernhardtini, C. Pellegrini: Linear theory of motion in electron storage rings. Annals of Physics: 46,174 (1968)
- 27) H. Mais, G. Ripken: Theory of Spin-Orbit motion in Electron positron storage rings; summary of results. DESY 83-062 (1983)
- 28) A. A. Kolomenski, A. N. Lebedev.: Theory of cyclic accelerators. North Holland Publishing Company Amsterdam (1966).
- 29) A. W. Chao: Some linear lattice calculations using generalized matrices. DESY PET 77-07 (1977)
- 30) A. Wrulich: RACETRACK, a computer code for the simulation of nonlinear particle motion in accelerators. DESY 84-026 (1984)
- 31) A. Piwinski: Computer simulation of the beam-beam interaction. DESY 80-131 (1980)
- 32) J. Kewisch: Berechnung der linearen, gekoppelten Optik und der Strahlparameter in Elektronenringbeschleunigern unter Berücksichtigung von Magnetfehlern. Diplomarbeit Universität Hamburg (1978)
- 33) G. Guignard, Y. Marti: PETROC user's guide. CERN/ISR-BOM-TH/81-32 (1981)
- 34) J. C. Herera: Electromagnetic interaction of colliding beams in storage rings. AIP-Conf. Proc. 55 (1979)
- 35) M. Bassetti, G. A. Erskine: Closed expression for the electrical field of a two-dimensional gaussian charge. CERN-ISR/TH/80-06 (1980)
- 36) S. Meyers: Simulation of the beam-beam effect for e^+e^- storage rings. CERN-ISR/RF/82-06 (1982)
- 37) D. Degéle, R. Kose, A. Piwinski, M. Placidi: Study of the beam-beam effect in PETRA. DESY M-81/03 (1981)
- 38) S. Kheifets: Weak-strong beam-beam interaction. PETRA Kurzmittteilung Nr. 119
- 39) W. Gröbner, N. Hofreiter: Integraltafeln, 2. Teil. Springer-Verlag (1966)
- 40) J. Kewisch: Simulation of electron spin depolarization with the computer code SITROS. DESY 83-032 (1983)