

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON **DESY**

DESY: 86-106
August 1986



EIN ALLGEMEINES VERFAHREN ZUR BERECHNUNG ELEKTROMAGNETISCHER FELDER
UND SEINE ANWENDUNG IN PHYSIK UND TECHNIK

by

T. Weiland

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Hamburg

ISSN 0418-9833

NOTKESTRASSE 85 · 2 HAMBURG 52

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

To be sure that your preprints are promptly included in the
HIGH ENERGY PHYSICS INDEX ,
send them to the following address (if possible by air mail) :

DESY
Bibliothek
Notkestrasse 85
2 Hamburg 52
Germany

**EIN ALLGEMEINES VERFAHREN ZUR BERECHNUNG
ELEKTROMAGNETISCHER FELDER
UND SEINE ANWENDUNG IN PHYSIK UND TECHNIK**

THE DISCRETIZATION OF MAXWELL'S EQUATIONS

**A General Method for Calculating Electro-Magnetic Fields
and its Applications in Physics and Engineering**

THOMAS WEILAND

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Hamburg

T. Weiland

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY

Vorwort

Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen stellt eine immer wiederkehrende Aufgabe dar bei der Konstruktion elektromagnetischer Apparaturen. Einerseits bereiten die komplizierten Strukturen realer Geräte oft unüberwindbare Schwierigkeiten, andererseits nimmt die Bedeutung einer genauen Vorhersage der elektromagnetischen Felder mit der Größe und dem Herstellungsaufwand der Geräte zu. Anlagen für die Hochenergiephysik beispielsweise haben Ausmaße erreicht, die nur noch den einmaligen Bau einer Apparatur erlauben. Mit Hilfe eines einzigen Ansatzes zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ist es möglich, diese einzeln in entsprechende Matrixgleichungen umzuformen, welche auf modernen Großrechnern gelöst werden können. Hierbei ist es möglich, beliebig geformte Körper mit beliebigen Materialeigenschaften zu behandeln. Das Verfahren ist in vielen Bereichen der Physik und Technik anwendbar. Die Bedeutung solcher Lösungsverfahren für die Entwicklung von Beschleunigern in der Hochenergiephysik wird an einigen Beispielen aufgezeigt.

Abstract

The solution of Maxwell's Equations is always required when electro-magnetic equipment is to be built.

On the one hand, the complicated structures of a machine in reality represent insuperable difficulties, while on the other hand the importance of an exact prediction of the electro-magnetic fields increases with the size and manufacturing cost of the equipment.

Installations for High Energy Physics, for example, have attained a scale which only allows one model to be built. With the help of a single ansatz it is possible to translate each of the Maxwell's equations into matrix form, which can then be solved on a modern computer. The method can handle any shaped body with any material properties; it is useful in many fields of Physics and Engineering. The importance of such solution methods for the development of accelerators in High Energy Physics will be demonstrated by certain examples.

Einleitung

Die Theorie der elektromagnetischen Felder ist in den Maxwell'schen Gleichungen zusammengefasst:

$$\oint_{(A)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1)$$

$$\oint_{(A)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A}, \quad (2)$$

$$\iint_{(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (3)$$

$$\iint_{(V)} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (4)$$

In diesen Gleichungen stellen \mathbf{E} und \mathbf{H} das elektrische und magnetische Feld dar, \mathbf{D} und \mathbf{B} sind die entsprechenden Flußdichten und \mathbf{J} ist die Stromdichte. Feldstärken, Flußdichten und Stromdichte sind über die Gleichungen verbunden:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (6)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} + \rho \mathbf{v}. \quad (7)$$

Hierin ist ϵ die Permittivität, μ die Permeabilität und κ die Leitfähigkeit (ϵ , μ und κ sind dimensionsbehaftete Größen). Im allgemeinen sind die Materialkonstanten Funktionen von Ort, Zeit und Feldstärken. Sie können sowohl durch skalare Funktionen als auch durch Tensoren (3×3 Matrizen) gegeben sein.

Das Ziel aller numerischen Ansätze ist die Lösung dieser Gleichungen unter möglichst wenig Einschränkungen. In der Regel wird zunächst die Allgemeinheit der Materialkonstanten eingeschränkt. So nimmt man beispielsweise eine oder mehrere der Materialgrößen ϵ , μ und κ als konstant an. Anschließend leitet man aus den Maxwell'schen Gleichungen partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung her. Diese werden dann mit einer numerischen Methode, beispielsweise der finiten Differenzen oder der finiten Elemente, auf einer Rechenmaschine gelöst. Die Lösungsfunktion ist oft ein Vektorpotential oder einer der beiden Feldstärkevektoren, bei statischen Problemen meist ein skalares Potential.

Das hier beschriebene Verfahren /1/ geht einen etwas anderen Weg. Zunächst werden die Maxwell'schen Gleichungen in Integralform einzeln in entsprechende Matrixgleichungen umgeformt. Hierzu werden die Integrale durch Näherungsausdrücke ersetzt. Auf diese Weise erhält man einen Satz von vier Matrixgleichungen plus zwei Materialgleichungen. Der Lösungsraum der Maxwell'schen Gleichungen wird abgebildet auf einen n -dimensionalen Raum, wobei n die Anzahl der zu berechnenden Werte der Feldstärken ist. Die Methode, die hier angewendet wird, sorgt dafür, daß Eigenschaften der Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen bei dieser Transformation erhalten bleiben. Die vektoranalytischen Beziehungen zwischen den Rotations-, Divergenz- und Gradientenoperatoren (rot , div , grad) und deren Eigenschaften finden ihr Analogon im diskreten Lösungsraum.

Der Anwendungsbereich dieser Methode und der auf ihr basierenden Rechnerprogramme ist sehr groß: Transiente Hochfrequenzfelder an Hohlleiterübergängen und Antennen, hochfrequente Eigenschwingungen in Kernspintomographen, Eigenschwingungen beliebig geformter Resonatoren, Eigenwellen auf Wellenleitern, transiente Felder frei beweglicher Ladungswolken in Beschleunigern, Wirbelströme in Transformatoren und Eisenkörpern, Magnetfelder in Strahlführungsmagneten, und vieles mehr.

Man kann die Anwendungsbereiche in zwei Gruppen unterteilen:

a) Anwendungen in der Technik elektromagnetischer Apparaturen, deren physikalische Wirkungsweise weitgehend bekannt ist. Hier lässt sich mit diesen Methoden die Effizienz einer Apparatur optimieren. Als Beispiele seien genannt die Minimierung der Hochfrequenzleistung, die erforderlich ist, um einen Resonator zu speisen, und die Minimierung der Feldfehler in einem Strahlführungsmagneten.

b) Untersuchung und Ausnützung von bislang unverstandenen Phänomenen elektromagnetischer Natur. Zwei Beispiele hierfür sind: Die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen den Teilchenpaketen in einem Beschleuniger und ihrer Umgebung, die zu unerklärten nichtlinearen Effekten führt, welche die Luminosität in Speicherringen drastisch reduzieren. Und die Entwicklung neuer Beschleunigungsverfahren, wie das "Wake Field Transformator" Prinzip, bei dem transiente Felder von Elektronenpaketen zur Erzeugung extrem hoher Feldstärken genutzt werden.

Zunächst wird die Methode kurz skizziert, bevor anhand einiger ausgewählter Anwendungen die Vielseitigkeit aufgezeigt werden soll.

Die Methode

Das Lösungsgebiet wird mit einem Gitternetz überzogen in dem beliebig geformte Strukturen näherungsweise dargestellt werden können. Es gibt eine Vielzahl von möglichen Gitternetzen, angefangen von zweidimensionalen, regelmässigen Rechteckgittern, Dreiecksgitternetzen, bis hin zu dreidimensionalen Gitternetzen, die aus beliebig geformten Elementarfiguren zusammengesetzt sein können. Zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen eignen sich insbesondere solche Netze, zu denen ein duales orthogonales Netz existiert (die Bedeutung von "dual" in diesem Zusammenhang wird später erläutert). Um die Erläuterung der Verfahren nicht unnötig zu komplizieren, beschränken wir uns hier weitgehend auf kartesische Netze. Alle später folgenden Betrachtungen lassen sich leicht auf allgemeine, krummlinige, orthogonale Koordinatensysteme oder Gitternetze aus Elementarfiguren (z.B. Dreiecke) übertragen.

Bild 1 zeigt einige zwei- und dreidimensionale Gitter. Das vom Netz eingeschlossene Volumen ist das Lösungsgebiet. Bild 2 zeigt die perspektivische Ansicht eines C-förmigen Magneten. Solche Magnete dienen als Korrekturdipole Strahlführungssystem der Speicherringanlage HERA. Will man die Verteilung des Feldes in einem solchen Magneten berechnen, so besteht der erste Schritt darin, seine Umrisse im Gitternetz darzustellen. Bild 3 zeigt eine mögliche Darstellung des Magneten in einem dreidimensionalen kartesischen Gitternetz. Die hier verwendeten Netze sind zwecks besserer Übersichtlichkeit sehr grob gewählt. Es wird aber deutlich, daß unregelmässige Netze erforderlich sind, will man realistische Körperformen gut modellieren. Ein weiteres Beispiel zeigt einen dielektrischen Wellenleiter in einem Rechteckhohlleitergehäuse (Bild 4). Der Querschnitt dieses Wellenleiters wird in einem zweidimensionalen Netz dargestellt.

Die angeführten Beispiele verdeutlichen die Notwendigkeit, unregelmässige Gitter zu verwenden in denen zudem in jeder Gitterzelle ein beliebiges Material vorhanden sein darf. Um schräge Konturen gut zu erfassen, ist es von Vorteil, eine jede Zelle - wenn nötig - in weitere zwei Dreiecksbereiche zu unterteilen. Noch besser eignen sich "Gumminetze", bei denen Gitterlinien nicht durchgehend von Koordinatenlinien gebildet werden. Bild 5 zeigt die Darstellung des Wellenleiters aus Bild 4 in einem Dreiecksgitternetz, das die Randkontur optimal nachbildet.

Will man in einem solchen Gitter die Maxwell'schen Gleichungen allgemein lösen, so kann man sich nicht mit der Lösung einer Poisson- oder Wellengleichung zufriedengeben, da deren Herleitung bereits eine Reihe von Annahmen einschliesst, die i.a. nicht gültig sind. So gilt die einfache Wellengleichung nur im homogenen Medium, also nicht im gesamten Querschnitt des oben angeführten Wellenleiters. Zwar liesse sich ein solcher Querschnitt in mehrere Teilflächen zerlegen und dann die Wellengleichung in jedem getrennt anwenden. Die Verkoppelung der Gleichungen an den Übergangsstellen wäre jedoch sehr kompliziert und kann nicht zu einem einheitlichen, praktikablen Lösungsansatz führen.

Wenden wir uns der ersten Maxwell'schen Gleichung zu und versuchen sie im Bereich eines Rechtecks im Gitternetz näherungsweise zu lösen. Es genügt zum Verständnis sich hier auf ein quadratisches Netz zu beschränken. Bild 6 zeigt die elementare Flächeneinheit eines Netzes der Schrittweite Δ . Auf der linken Seite der Gleichung (1) finden wir ein Linienintegral über die elektrische Feldstärke entlang eines geschlossenen Weges. Der elementare geschlossene Weg in einem Netz ist der Weg entlang des Umfangs einer Masche. Wenden wir

Näherungsformeln niedrigster Ordnung zur Lösung dieses Integrals an (siehe Bild 7):

$$\int_{s_0}^{s_0+\Delta} f(s) ds = \Delta \cdot f(s_0 + \Delta/2) + O(\Delta^2), \tag{8}$$

so wird aus dem Linienintegral der algebraische Ausdruck:

$$\oint \mathbf{E} \cdot ds = \Delta \cdot (E_1 + E_2 - E_3 - E_4) + O(\Delta^2). \tag{9}$$

Es mag ungewöhnlich erscheinen, daß das Vektorfeld \mathbf{E} nicht durch seine Komponenten an ein und derselben Stelle repräsentiert wird. Dies hat unter anderem zur Folge, daß aus dem Skalarprodukt im Linienintegral ein normales Produkt geworden ist. Gerade hierin liegt aber der Schlüssel zur konsistenten Lösung der Maxwell'schen Gleichungen, wie im folgenden noch deutlich werden wird. Wenden wir uns jetzt der rechten Seite der ersten Maxwell'schen Gleichung zu, so finden wir dort ein Oberflächenintegral über die magnetische Flußdichte \mathbf{B} . Die Fläche, über die integriert werden soll, ist bereits durch den Ansatz auf der linken Seite der Gleichung festgelegt. Wenden wir wieder Näherungsformeln niedrigster Ordnung an, dann erhalten wir:

$$\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \dot{B}_0 \cdot \Delta^2 + O(\Delta^4) \tag{10}$$

Auch hier wurde aus dem Skalarprodukt unter dem Integral ein einfaches Produkt aus Flächeninhalt und der zur Fläche senkrechten Komponente der Flußdichte. Setzen wir die beiden Näherungsausdrücke für die beiden Seiten der ersten Maxwell'schen Gleichung zusammen und vernachlässigen wir dabei Terme höherer Ordnung in Δ , so erhalten wir eine einfache algebraische Gleichung, die die erste Maxwellgleichung auf der Oberfläche einer Elementarzelle darstellt:

$$\Delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) - \Delta^2 \dot{B}_0 \tag{11}$$

Mit dieser Basisgleichung kann man nun auf jeder aus Elementarflächen zusammengesetzten, ansonsten beliebig komplizierten Fläche im Gitter die erste Maxwell Gleichung näherungsweise lösen.

Bevor wir zu den restlichen Gleichungen und dem Matrixformalismus übergehen, sei noch auf zwei wesentliche Eigenschaften dieses Weges hingewiesen. Das elektrische Feld \mathbf{E} wird repräsentiert durch seine Komponenten, die tangential zwischen Gitterzellen liegen. Damit kann ohne Schwierigkeit in jeder Elementarzelle ein verschiedenes ϵ zugelassen werden. Auf Grund des Ansatzes ist die im Gitternetz berechnete tangentielle Feldstärke an Materialoberflächen stetig. Spätestens hier wird offenbar, welche großen Schwierigkeiten es bereiten würde, alle drei Feldkomponenten an der gleichen Stelle zu berechnen. An Oberflächen von Dielektrika würde dies zu mehrdeutigen Komponenten führen, soweit diese senkrecht auf der Oberfläche stehen. Ähnliches gilt auch für die Komponenten der magnetischen Flußdichte \mathbf{B} . Sie wird nur durch Komponenten repräsentiert, die auf Zellenoberflächen senkrecht stehen. Dies erlaubt die Füllung einer jeden Elementarzelle mit einem Material verschiedener Permeabilität. Auch hier gilt: Die magnetische Flußdichte wird von vornherein nur durch stetige Komponenten im Netz repräsentiert. Bild 8 verdeutlicht diese Umstände und zeigt die Anordnung der elektrischen und magnetischen Grössen in zwei Elementarzellen. Weiterhin wird aus Bild 8 ersichtlich, daß diese Art der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen auf dem Gitternetz \mathbf{G} ein zweites, duales Gitternetz $\bar{\mathbf{G}}$ erzeugt. Innerhalb des Netzes $\bar{\mathbf{G}}$ sind

die Komponenten von \mathbf{B} genauso angeordnet wie die Komponenten von \mathbf{E} im ursprünglichen Netz \mathbf{G} : In der Mitte zwischen je zwei Gitterpunkten des dualen Gitternetzes $\tilde{\mathbf{G}}$ ist die zur Gitterstrecke parallele Komponente von \mathbf{B} angeordnet. Solche Doppelnetze werden auch "staggered grids" genannt [2]. Hätten wir zuerst die zweite Maxwell'sche Gleichung gelöst, dann hätten wir die magnetische Feldstärke \mathbf{H} auf \mathbf{G} gesetzt und den Gesamtstrom (Verschiebungsstrom, Leitungsstrom und Ladungsstrom) auf das duale Netz $\tilde{\mathbf{G}}$. Von Fall zu Fall kann diese Vorgehensweise von Vorteil sein, wir wollen sie jedoch hier nicht weiter verfolgen.

Numeriert man alle im Gitternetz zu berechnenden Komponenten durch und faßt sie in Spaltenvektoren zusammen: \mathbf{e} für alle unbekanntenen Komponenten der elektrischen Feldstärke und \mathbf{b} für alle unbekanntenen Komponenten der magnetischen Flußdichte, und schreibt dann für jede Zeile die algebraische Gleichung(11) hin, so kann man diese in einer einzigen Matrixgleichung zusammenfassen:

$$\mathbf{C}\mathbf{D}_s\mathbf{e} = -\mathbf{D}_A\mathbf{b}. \tag{12}$$

\mathbf{C} , \mathbf{D}_s und \mathbf{D}_A sind Matrizen von der Ordnung $3N$ für ein dreidimensionales Netz aus N Knoten. Sie haben folgende Bedeutung (Der Rang der Matrizen ist immer kleiner als ihre Ordnung):

\mathbf{C} ist eine Matrix, auf dem $3N$ dimensionalen Vektorraum der elektrischen Feldstärke im Netz \mathbf{G} und stellt dort den Rotationsoperator dar, bzw. den Linienintegraloperator.

\mathbf{D}_s ist eine Diagonalmatrix und enthält die Längen der Elementarstrecken (die Seitenlängen der Elementarzellen), an denen die elektrischen Feldkomponenten liegen. Im Falle eines regelmässigen Gitters der Schrittweite Δ ist \mathbf{D}_s einfach das Produkt einer Einheitsmatrix mit der Schrittweite Δ .

\mathbf{D}_A ist ebenfalls eine Diagonalmatrix und enthält die Flächeninhalte der Elementarzellen, die jeweils zu der auf ihr senkrecht stehenden \mathbf{B} Komponente gehören. Im Falle eines regelmässigen Gitters wird auch \mathbf{D}_A zur Einheitsmatrix mal dem Quadrat der Schrittweite.

Jede Zeile der Matrixgleichung stellt eine algebraische Beziehung der Form von Gleichung(11) dar. Die logischen Verknüpfungen und die lokalen Weglängen sind auf das Produkt zweier Matrizen verteilt. Fassen wir das bislang erläuterte nochmals zusammen:

- Das Lösungsgebiet wurde mit einem Gitter \mathbf{G} aus N Knoten überzogen.
- Der Lösungsraum wurde auf einen $3N$ dimensionalen Raum abgebildet.
- Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} wurde durch den Spaltenvektor \mathbf{e} ihrer $3N$ Komponenten parallel zu den Gitterstrecken ersetzt.
- Die magnetische Flußdichte \mathbf{B} wurde durch den Spaltenvektor \mathbf{b} ihrer $3N$ Komponenten senkrecht zu den Gitterflächen ersetzt.
- Die erste Maxwellgleichung wurde transformiert in eine Matrixgleichung. Die Matrix \mathbf{C} ersetzt über dem $3N$ dimensionalen Lösungsraum den Rotationsoperator beziehungsweise den Linienintegraloperator und enthält nur Elemente mit den Werten 0 , $+1$ und -1 .
- Alle geometrischen Grössen wie Gitterschrittweiten treten nur in einfachen Diagonalmatrizen wie \mathbf{D}_s und \mathbf{D}_A auf.

Bei der Lösung der zweiten Maxwell'schen Gleichung wird zunächst das Linienintegral über die magnetische Feldstärke entlang den dualen Gitterlinien berechnet. Da dort jedoch \mathbf{B} definiert ist, muss das magnetische Feld \mathbf{H} stückweise durch den Quotienten der Flußdichte und der Permeabilität ersetzt werden. Auf der rechten Seite wird das Oberflächenintegral über die Verschiebungsstromdichte und die Stromdichte auf den Elementarflächen des dualen Gitters gelöst. An dieser Stelle treten die verschiedenen Permittivitäten der einzelnen Elementarzellen in Erscheinung. Obwohl das magnetische Feld \mathbf{H} nicht auf dem Gitter definiert

ist, kann man einen Vektor \mathbf{h} formal definieren, analog zur Definition der Stromdichte und der Verschiebungsstromdichte:

$$\mathbf{b} = \mathbf{D}_\mu\mathbf{h} \quad , \quad (\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}) \tag{13}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}_\epsilon\mathbf{e} \quad , \quad (\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}) \tag{14}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{D}_\kappa\mathbf{e} + \mathbf{D}_\rho\mathbf{v} \quad , \quad (\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E} + \rho\mathbf{v}) \tag{15}$$

\mathbf{D}_μ und \mathbf{D}_ϵ sind Diagonalmatrizen, die im wesentlichen die Permeabilitäten und Permittivitäten in den Elementarzellen enthalten. $\mathbf{D}_\rho\mathbf{v}$ enthält die Stromdichten hervorgerufen durch bewegte Ladungsträger. Da eine genauere Herleitung der weiteren Formeln den Rahmen dieser Darstellung übersteigen würde, geben wir nur das Resultat an und verweisen auf die Literatur [1,2]. Analog zur ersten Maxwell-Matrixgleichung erhält man:

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{D}_s\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{D}}_A(\mathbf{d} + \mathbf{j}) \tag{16}$$

$\tilde{\mathbf{C}}$ ist der duale Rotationsoperator und ergibt sich einfach aus \mathbf{C} durch Transponieren. Analog zur ersten Gleichung enthält $\tilde{\mathbf{D}}_s$ die Längen der Elementarstrecken und $\tilde{\mathbf{D}}_A$ die Flächeninhalte der Elementarflächen des dualen Gitters. Nach dem gleichen Verfahren lassen sich auch die dritte und vierte Maxwellgleichung umformen. Man erhält dabei Matrizen \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{S}}$, die wiederum nur Elemente mit den Werten 0 , $+1$ und -1 besitzen und den diskreten Divergenzoperator darstellen:

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{D}}_A(\mathbf{d} + \mathbf{j}) = \mathbf{0} \tag{17}$$

$$\mathbf{S}\mathbf{D}_A\mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{18}$$

Fassen wir alle vier hergeleiteten Matrixgleichungen zusammen, so haben wir ein diskretes Analogon für die Maxwell'schen Gleichungen gefunden. Bemerkenswert ist, daß dazu keinerlei Einschränkung an die Allgemeinheit notwendig war. Weder die Zeitabhängigkeit noch die Materialverteilung wurde eingeschränkt.

Es ergibt sich die Gegenüberstellung der Maxwell'schen Gleichungen und der entsprechenden Matrixgleichungen (\mathbf{R}_+ ist der lineare Raum der Zeit, \mathbf{R}^3 und \mathbf{R}^{3N} sind die Ortsräume):

$$\begin{array}{ccc} \text{Gleichungen auf} & \text{Gleichungen auf} & \\ \text{dem normalen Raum} & \text{dem Gitterraum} & \\ \mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{R}_+ & \leftrightarrow & \mathbf{R}^{3N} \otimes \mathbf{R}_+ \end{array}$$

$$\oint_{(A)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{CD}_s \mathbf{e} = -\mathbf{D}_A \mathbf{b} \quad (19)$$

$$\oint_{(A)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}_s \mathbf{h} = \tilde{\mathbf{D}}_A (\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{j}) \quad (20)$$

$$\int \int_{(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \leftrightarrow \mathbf{SD}_A \mathbf{b} = 0 \quad (21)$$

$$\int \int_{(V)} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0 \leftrightarrow \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{D}}_A (\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{j}) = 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{D}_\epsilon \mathbf{e} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{D}_\mu \mathbf{h} \quad (24)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} + \rho \mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{j} = \mathbf{D}_\kappa \mathbf{e} + \mathbf{D}_\rho \mathbf{v} \quad (25)$$

Um die Gitter-Maxwell-Gleichungen zu lösen, wird man je nach Anwendungsgebiet zunächst die Gleichungen mit Hilfe von Matrizenoperationen umformen und zu einfacheren Gleichungen zusammenfassen. Solche Umformungen werden jedoch auf dem Gitterraum durchgeführt, auf dem zuerst die obigen Gleichungen aufgestellt worden sind. Will man zeitabhängige Felder berechnen, so muß man zunächst auch die Zeit t ebenfalls diskretisieren, zum Beispiel in Schrittweiten δt . Im einfachsten Fall geschieht das mit dem zentralen Differenzenquotienten und man berechnet \mathbf{E} und \mathbf{B} an jeweils um einen halben Zeitschritt versetzten Zeitpunkten. Dies führt nach einiger Zwischenrechnung auf die folgenden beiden rekursiven Gleichungen für die zeitabhängigen Feldstärken, wobei der hochgestellte Index n bedeutet, daß es sich um den Vektor zum Zeitpunkt $t = n\delta t$ handelt:

$$\mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{b}^n \quad \delta t (\mathbf{D}_A^{-1} \mathbf{CD}_s) \mathbf{e}^{n-1/2} \quad (26)$$

$$\mathbf{e}^{n+3/2} = \mathbf{e}^{n-1/2} + \delta t (\mathbf{D}_\epsilon^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}_s \mathbf{D}_\mu^{-1}) \mathbf{b}^{n+1} - \delta t \mathbf{D}_\rho^{-1} \mathbf{j}^{n+1} \quad (27)$$

Um diese Rekursionsformeln anzuwenden, braucht man Anfangswerte für \mathbf{e} und \mathbf{b} für $t=0$. Zur Berechnung der Felder an späteren Zeitpunkten müssen nur zwei Multiplikationen von Matrizen mit Vektoren ausgeführt werden. Außer Diagonalmatrizen treten keine inverse Matrizen auf. Diese Darstellung eignet sich besonders zur Berechnung transienter Felder. Neben dieser einfachsten sind selbstverständlich viele andere Diskretisierungen in der Zeit möglich.

Im Falle zeitharmonischer Felder kann man die Feldvektoren als komplexe Phasoren auffassen. Es läßt sich dann beispielsweise der Vektor \mathbf{b} aus den ersten beiden Maxwellgleichungen eliminieren und man erhält:

$$(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}_s \mathbf{D}_\mu^{-1} \mathbf{D}_A^{-1} \mathbf{CD}_s + i\omega \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\kappa - \omega^2 \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\epsilon) \mathbf{e} = -i\omega \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\rho \mathbf{v} \quad (28)$$

Diese Gleichung ist ein lineares Gleichungssystem, dessen rechte Seite von der eingeprägten Stromdichte gebildet wird. Die Matrix des Systems ist im allgemeinen komplex und von sehr grossem Rang. Die Lösung solcher Gleichungssysteme von der Ordnung bis zu 100.000 stellt ein schwieriges numerisches Problem dar. Moderne Verfahren wurden eigens für derartige Gleichungen, wie sie auch in anderen Bereichen der Physik auftreten, entwickelt /3/.

Setzt man die Stromdichte zu Null und betrachtet nicht leitfähige Materialien, so erhält man ein algebraisches Eigenwertproblem, dessen Eigenwerte die Quadrate der Kreisfrequenz sind, und dessen Eigenvektoren die Felder der Eigenschwingungen darstellen:

$$(\mathbf{D}_\epsilon^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_A^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}_s \mathbf{D}_\mu^{-1} \mathbf{D}_A^{-1} \mathbf{CD}_s) \mathbf{e} = -\omega^2 \mathbf{e} \quad (29)$$

Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren solcher Matrizen wurden ebenfalls spezielle Verfahren entwickelt /3/. Je nach Anwendungsgebiet können weitere Umformungen angebracht sein.

Es wird an der Kompliziertheit dieser umgeformten Matrixgleichungen deutlich, um wieviel schwieriger es wäre, eine solche zusammengesetzte Matrix direkt aufzustellen und welche Vorteile es mit sich bringt, zunächst die Matrizen, die den einzelnen Maxwellgleichungen entsprechen, für sich aufzustellen und sie anschliessend zusammenzufassen.

Eigenschaften der diskreten Maxwell Gleichungen

Die hergeleiteten Matrixgleichungen haben eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften. So sind alle Material- und Geometrieigenschaften in Produkten aus reinen Diagonalmatrizen zusammengefasst (im Falle anisotroper Medien gilt dies nur für die geometrischen Größen). Dies spiegelt die Äquivalenz von Materialverteilung und Raumverzerrung in den Maxwell'schen Gleichungen wieder. Die Rotations- und Divergenzoperatoren sind einfach aufgebaute Matrizen, deren Elemente nur die Werte 0, 1 oder -1 annehmen. Die Dimensionen der Operatoren sind $3N \times 3N$ für \tilde{C} und \tilde{C} und $N \times 3N$ für \tilde{S} und \tilde{S} . Fasst man \tilde{C} und \tilde{C} als 3×3 Matrizen auf und \tilde{S} und \tilde{S} als 1×3 Zeilenvektoren, so sind deren Elemente $N \times N$ Matrizen. Von diesen $N \times N$ Matrizen gibt es nur drei verschiedene Typen, deren jeder einer partiellen Ableitung nach einer Ortskoordinate entspricht.

Die wichtigste Eigenschaft dieser Art von Diskretisierung, der FIT-Methode (von "finite integration theory" /1/) ist jedoch, daß die analytischen Eigenschaften der Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen ihr diskretes Analogon haben. Insbesondere gilt die Beziehung, daß ein Wirbelfeld quellenfrei ist,

$$\text{div rot} \equiv 0, \tag{30}$$

auch über dem diskreten Raum der $3N$ dimensionalen Lösungsvektoren:

$$\tilde{S} \tilde{C} \equiv \tilde{C} \tilde{S} \equiv 0. \tag{31}$$

Der Beweis dieser Identität läßt sich zurückführen auf den Beweis der Vertauschbarkeit der oben erwähnten $N \times N$ Untermatrizen, aus denen \tilde{C} , \tilde{C} , \tilde{S} und \tilde{S} aufgebaut sind. Analytisch entspricht dem die Vertauschbarkeit zweier partieller Ableitungen.

Will man statische Felder berechnen, so lassen sich auch in diesem Verfahren die Vektorfelder durch skalare Potentiale darstellen. Zur Darstellung des elektrischen Feldes \mathbf{E} als Gradient eines skalaren Potentials $\phi_{\mathbf{E}}$:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi_{\mathbf{E}} \tag{32}$$

benötigt man im Gitternetz einen diskreten grad Operator. Definiert man die skalaren Potentiale an den Gitterpunkten von \mathbf{G} und fasst sie in einem Spaltenvektor $\Phi_{\mathbf{E}}$ zusammen so findet man diesen als die transponierte Divergenzmatrix \tilde{S} :

$$\Phi_{\mathbf{E}} = (\phi_{E,1}, \phi_{E,2}, \phi_{E,3}, \dots, \phi_{E,N})^T, \tag{33}$$

$$\mathbf{e} = \tilde{S}^T \Phi_{\mathbf{E}}. \tag{34}$$

Die analytische Identität, daß ein Potentialfeld (konservatives Kraftfeld) wirbelfrei ist,

$$\text{rot grad} \equiv 0. \tag{35}$$

gilt auch auf dem Gitterraum in der Form:

$$\tilde{C}^T \tilde{S}^T \equiv \tilde{C} \tilde{S}^T \equiv 0. \tag{36}$$

Diese Identität ergibt sich offensichtlich einfach aus Transponierung der Gleichung (31) ($\text{div rot} \equiv 0$). Dies bedeutet, daß die Wirbelfreiheit von Potentialfeldern äquivalent ist zur Quellenfreiheit von Wirbelfeldern. Da statische Magnetfelder im allgemeinen nicht wirbelfrei sind, trennt man das Feld in zwei Bestandteile, deren einer (\mathbf{H}_J) nur die Wirbel der Ströme enthält:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_J - \text{grad} \phi_{\mathbf{H}}, \tag{37}$$

$$\text{rot} \mathbf{H}_J = \mathbf{J}, \tag{38}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_J - \tilde{S}^T \Phi_{\mathbf{H}}, \tag{39}$$

$$\tilde{C} \mathbf{h}_J = \mathbf{j}, \tag{40}$$

$$\Phi_{\mathbf{H}} = (\phi_{H,1}, \phi_{H,2}, \phi_{H,3}, \dots, \phi_{H,N})^T, \tag{41}$$

$$\text{rot grad} \equiv 0, \tag{42}$$

$$\tilde{C}^T \tilde{S}^T \equiv \tilde{C} \tilde{S}^T \equiv 0. \tag{43}$$

Es sei nochmal hervorgehoben, daß diese Eigenschaften der analytischen Operatoren im allgemeinen bei einer Diskretisierung nicht erhalten bleiben. Die Anzahl der Möglichkeiten partielle Differentialgleichungen zu diskretisieren ist unbegrenzt. Nicht jede diskrete Lösung hingegen stellt physikalische Sachverhalte dar. So gibt es beispielsweise eine Vielzahl möglicher diskreter grad Operatoren, aber nur genau einen, der die analytischen Eigenschaften der Lösungen widerspiegelt. Wendet man jedoch Diskretisierungen an, bei denen obengenannten Eigenschaften konsistent auf den numerischen Lösungsraum übertragen werden, dann hat man eine einfache und wirkungsvolle Methode gefunden, numerisch errechnete Felder auf ihre Gültigkeit und Genauigkeit hin zu überprüfen. "Irgendein" numerisches Verfahren, angewandt auf die Maxwell'schen Gleichungen kann nicht nur zu grossen Ungenauigkeiten der Lösungen führen, es gibt auch Beispiele, bei denen schlicht falsche Lösungen auftreten, beziehungsweise bei denen die aufgestellte Matrixgleichung keine eindeutigen Lösungen besitzt/2/.

Diese Möglichkeit der Überprüfung der Resultate ist umso wichtiger, je unüberschaubarer die jeweils untersuchten Vorgänge sind. Unrichtige numerische Ergebnisse können leicht falsche Sachverhalte vortäuschen.

Natürlich ist das hier beschriebene Verfahren nicht das einzig mögliche. Die scheinbar einfachere Methode alle sechs unbekannteren Feldkomponenten an einem Gitterpunkt zu berechnen führt auch zu ähnlichen, sogar einfacheren Matrixgleichungen mit gleichen Eigenschaften. Wie jedoch bereits erwähnt, gibt es Probleme an Oberflächen von Materialien, weil dort die auf der Oberfläche senkrechten Komponenten der Felder im Allgemeinen un stetig sind. Da die angewandten Näherungsformeln für die Integrale in den Maxwell'schen Gleichungen von der einfachst möglichen Form sind, kann die hier beschriebene Methode als "natürliches Diskretisierungsverfahren" angesehen werden.

Um den Zusammenhang zwischen dem hier beschriebenen Verfahren und den Diskretisierungsverfahren für partielle Differentialgleichungen herzustellen/4/, sei angemerkt, daß man durch einen geeigneten Ansatz die gleichen Matrizen auch über normale Diskretisierungsverfahren ableiten kann. Die hier beschriebene Methode ist somit ein den Maxwellgleichungen angepasster Spezialfall der Diskretisierungsverfahren. Aus der Vielzahl möglicher Diskretisierungen ist die Auswahl eines geeigneten Ansatzes schwierig. Die Herleitung über die

Maxwellgleichungen in Integralform hingegen führt auf natürliche Weise auf diese einfachen und übersichtlichen Gleichungen.

Allgemeine Anwendungen

Der Anwendungsbereich der auf diese Weise diskretisierten Maxwell'schen Gleichungen ist sehr groß. In weitem Umfang setzt die physikalische Forschung und Technik die Kenntnis elektromagnetischer Felder voraus. Es soll an Hand einiger typischer Anwendungen gezeigt werden, daß das hier beschriebene Verfahren allgemein anwendbar ist und auch angewendet wird.

In Bild 5 wurde der Querschnitt eines dielektrischen Wellenleiters in einem Metallgehäuse gezeigt. Solche Wellenleiter gewinnen zunehmend in der Glasfasertechnik an Bedeutung. Um auf einem solchen Leiter Nachrichten zu übermitteln, regt man ausbreitungsfähige Wellen an, die geeignet moduliert werden. Von Interesse ist somit das Verhalten der Ausbreitungskonstanten solcher Wellen als Funktion der Frequenz. Bild 9 zeigt die transversalen Feldverteilungen der einfachsten Wellentypen auf dieser Leitung bei zwei verschiedenen Frequenzen. Es ist deutlich zu sehen, wie das Feld bei höherer Frequenz sich mehr im Glasleiter konzentriert, worauf ja gerade die Eigenschaft, Wellen zu leiten, beruht. Bild 10 zeigt die errechneten funktionalen Zusammenhänge zwischen der Frequenz der Wellen und ihrer Ausbreitungskonstanten. Diese Kurven zeigen dem Anwender den optimalen Frequenzbereich, die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der einzelnen Wellen. Dieses Beispiel wurde mit dem Programm URMEL-T berechnet/5/.

Ein Anwendungsbeispiel aus der Niederfrequenztechnik zeigt Bild 11: Ein lamellierter Transformator mit Luftspalt, der von einer Wechselstromquelle gespeist wird. In einem solchen Transformator sind neben der stationären Verteilung des magnetischen Feldes auch die Wirbelströme von Interesse, die zu Leistungsverlusten führen. Für den Zeitpunkt, an dem die Wirbelströme ihr Maximum annehmen ist die Feldverteilung in der Mittelebene gezeigt. Anhand solcher Rechnungen läßt sich der Wirkungsgrad elektrischer Motoren und Transformatoren berechnen sowie die Wärmeverteilung in einer Apparatur, die von Wirbelströmen herrührt. Diese Rechnungen beruhen auf dem Rechenprogramm WILEK/6,7/.

In einem Kernspintomographen werden außer supraleitenden Magneten zur Erzeugung hoher statischer Felder zusätzliche elektromagnetische Hochfrequenzfelder benutzt. In einer stark vereinfachten Darstellung zeigt Bild 12 eine solche Anordnung ohne die Magnetfeldspule. Man erkennt die große leitende Röhre, zwei Streifenleitungen, die von dielektrischen Klötzen gehalten werden, sowie einen (Gitter-) Menschen in der Mitte. Auf solchen Streifenleitungen können sich stehende Wellen ausbilden, deren Felder sich nicht im umgebenden Rohr ausbreiten. Von Interesse in einer solchen Anordnung sind insbesondere die Frequenz möglicher Eigenschwingungen, die Güte des Resonators sowie die Feldverteilung im Testobjekt und dessen Einfluß auf das Feld. Bild 13 zeigt ein Achtel dieser Apparatur (es wurden alle Symmetrien bei der Rechnung ausgenutzt) und die Verteilung des elektrischen und magnetischen Feldes. Diese Felder wurden mit dem CAD-System MAFIA/2,8/ berechnet.

Die Möglichkeit der Berechnung dreidimensionaler resonanter Felder ist ein gutes Beispiel für die praktische Bedeutung der oben erwähnten Eigenschaften der diskreten Maxwell'schen Gleichungen. Bei einer Reihe von anderen Ansätzen treten anstelle der gesuchten rein resonanten Felder Mischungen von nicht quellenfreien Lösungen auf, deren berechnete Frequenz zudem falsch ist. Die Anwendung der hier beschriebenen diskreten Maxwellgleichungen ermöglicht die Eliminierung der meisten unphysikalischen Lösungen bereits im Ansatz. Eventuell doch noch auftretende falsche Lösungen werden jedoch durch die Überprüfung mittels

der Matrixgleichungen leicht gefunden. Eine solche Überprüfung ist insbesondere deshalb so wichtig, weil zwischen dem Ansatz und dem Ergebnis meist eine rein numerische Operation liegt wie zum Beispiel die Berechnung der Eigenwerte und Vektoren einer Matrix. Eventuelle Fehler oder Ungenauigkeiten im rein numerischen Teil einer Lösung können dann leicht gefunden werden, beispielsweise durch die Berechnung der Quellen der Felder durch die Ausdrücke $\vec{S}\vec{D}\vec{a}\vec{d}$ ($\text{div } \vec{D}$) und $\vec{S}\vec{D}\vec{a}\vec{b}$ ($\text{div } \vec{B}$).

Ein einfaches Demonstrationsbeispiel für transiente Wellenfelder ist die Abstrahlung einer Welle auf einer Koaxialleitung in einen grösseren Rundhohlleiter. Bild 14 zeigt die Geometrie der Anordnung und die transienten Felder an einigen Zeitpunkten. Solche Rechnungen erlauben die Untersuchung von transienten Vorgängen auf Antennen und beliebig komplizierten Übergängen von Leitungen. Transiente Felder können beispielsweise mit dem Rechenprogramm TBCI/S/ untersucht werden.

Anhand der hier angeführten Beispiele wird deutlich, daß der Anwendungsbereich der Methode fast so groß ist wie der "Anwendungsbereich" der Maxwell'schen Gleichungen selbst.

Anwendungen in der Beschleuniger- und Hochenergiephysik

Zur Strahlführung und Fokussierung in Teilchenbeschleunigern werden vorzugsweise Magnete verwendet. In der Hadronen-Elektronen Ringanlage HERA werden zur Bahnkorrektur im Elektronenring Dipolmagnete verwendet wie sie in Bild 2 dargestellt sind. Bei dem Entwurf dieser Magnete ist man am Feldverlauf im Bereich der Teilchenbahn interessiert. Bild 15 zeigt die perspektivische Darstellung des Ablenkkeldes in einer Hälfte des Magneten in der Ebene, in der es von den Teilchen gesehen wird. Aus Integrationen über das Ablenkkeld berechnet man dann den Ablenkwinkel und die Feldfehler höherer Ordnung, die zu unerwünschten Nebeneffekten führen. Die Entwicklung der Strahlführungsmagnete stellt ein typisches Beispiel für die "professionelle" Anwendung numerischer Verfahren. Kein Magnet wird heute mehr gebaut, ohne daß er mit Rechenprogrammen vorher untersucht und optimiert wird. In diesem Bereich existieren wohl auch die besten Vergleiche zwischen Rechnung und Messung, die immer wieder die Korrektheit der Programme unter Beweis stellen. Bei DESY wird für solche dreidimensionalen Berechnungen vorwiegend das Programm PROF1/9/ eingesetzt.

Etwas komplizierter wird das Problem, wenn man sich den Beschleunigungsresonatoren zuwendet. Hier werden in metallischen Hohlräumen Eigenschwingungen angeregt und dazu benutzt, geladene Teilchen zu beschleunigen. Bild 16 zeigt einen heute üblichen zylindersymmetrischen Resonator wie er in PETRA und HERA Verwendung findet. Die Grundschwingung dieses Resonators hat eine Frequenz von 500 Megahertz. Das elektrische Feld der Grundschwingung zeigt vorwiegend in Richtung der Zylinderachse, entlang derer Teilchen durch den Resonator fliegen können. Bewegt sich ein Teilchenpaket durch ein solches Gebilde, so wird es im Allgemeinen sehr viele verschiedene Eigenschwingungen anregen. Diese höheren Moden können zu Instabilitäten führen, wenn weitere Teilchen vorbeifliegen oder wenn in einem Speicherring das gleiche Paket nach einem Umlauf wieder vorbeikommt. Solche Effekte führen zum Verlust von Teilchen beziehungsweise sie begrenzen die Maximalzahl von Teilchen, die man beschleunigen kann. Insbesondere solche Schwingungen, die transversale Kräfte verursachen, stellen ein Hauptproblem in Linear- und Kreisbeschleunigern dar. Es ist deshalb von großer Bedeutung, all diese Schwingungsformen zu kennen, ihre Frequenzen und die Stärke ihrer Wechselwirkung mit Teilchenpaketen zu bestimmen. Die Messung all dieser Schwingungen ist schwierig, aber möglich und hat sehr gute Übereinstimmung mit errechneten Vorhersagen gezeigt. Bei Messungen an supraleitenden Resonatoren für den Einsatz in PETRA und HERA, die bei DESY durchgeführt wurden, fand man zunächst eine Reihe vorausberechneter Frequenzen nicht. Erst die errechneten Felder erlaubten die gezielte Wiederholung der Messung, die dann vollständige Übereinstimmung zeigte. Mittlerweile gehört auch das Gebiet der Resonatorentwicklung zu den "professionellen" Anwendungsbereichen der Feldprogramme. Speziell zur Entwicklung zylindersymmetrischer Resonatoren wurde das Programm URMEL/10/ bei DESY entwickelt.

Neben den resonanten Schwingungen, die ein Teilchenpaket anfacht, erzeugt es schon während des Durchflugs transiente Felder, die auf es selbst zurückwirken. Solche Felder sind von größerer Bedeutung als die Schwingungen der Resonatoren, da man diese immer mit geeigneten Hilfsmitteln dämpfen kann, während man gegen die transienten Felder, deren Zeitskala im Pikosekundenbereich angesiedelt ist, "machtlos" ist. Effekte, die auf solchen transienten "Wake Fields" (vom engl. wake=Wirbelsstraße, Kielwasser) beruhen, stellen grundlegende Grenzen dar in Bezug auf die Ladung, die in einem Teilchenpaket transportiert

werden kann. Bei PETRA wurde erstmals ein zunächst unerklärter Effekt gefunden/11/, der dazu führte, daß man zunächst nur einen Bruchteil der erhofften Teilchenströme im Speicherring halten konnte. Messungen und theoretische Überlegungen/12/ ergaben, daß die Ursache nicht in den höheren Eigenschwingungen der Resonatoren liegen konnte. Mithilfe der numerischen Lösung des transienten Feldproblems war man dann in der Lage, longitudinale und transversale transiente Kräfte zu berechnen/8/. Bild 17 zeigt solche Felder beim Durchflug eines kurzen Elektronenpaketes durch einen dreizähligen PETRA-Resonator. Die Berechnungen zeigen, daß man die Stärke dieser transienten Felder weit unterschätzt hatte. Bild 18 gibt die durch diese transienten Felder verursachte Energieverteilung und Verteilung der transversalen Impulse innerhalb des Ladungspaketes.

Es stellte sich heraus, daß auf Grund des gleichen Effektes nach der ursprünglichen Planung des Speicherrings LEP bei 86 GeV Teilchenenergie, nur 1/30 der zugrundegelegten Sollstromstärke zu erreichen sein würde. Dies hätte eine Reduzierung der Luminosität um etwa drei Größenordnungen bedeutet, oder bildlicher ausgedrückt, man hätte experimentelle Ergebnisse, die man nach einem Jahr Messung erwartet, erst nach tausend Jahren erreicht.

Nachdem man soweit war, die Felder berechnen zu können, war es nur noch ein kleiner Schritt dahin, das Verhalten von gespeicherten Teilchen rechnerisch zu simulieren unter Einbeziehung aller Kräfte und Effekte, die bekannt sind. Bild 19 zeigt einige solche Simulationsergebnisse im Vergleich mit Messungen an PETRA/13/. Man beobachtet sowohl eine transversale als auch eine longitudinale Aufweitung der Teilchenpakete. Allerdings zeigte der Vergleich von Simulationen des transversalen Strahlverhaltens mit Experimenten an PETRA, daß die tatsächlich speicherbaren Ströme etwa viermal kleiner sind als hiernach zu erwarten. Erklärt werden konnte diese große Abweichung erst durch weitere Berechnungen transienter Felder für bislang unbeachtete Elemente im Beschleuniger. Beispielsweise stellte sich heraus, daß der Effekt einer nur fünf Millimeter hohen Stufe einer Vakuumkammer fast so stark ist wie der eines Resonators von 20 Zentimeter Radius/14/. Solche Stufen in der Vakuumkammer sind bei der Verbindung der vielen Einzelteile unvermeidbar. Die zum Ausgleich von Längenänderungen vielfach verwendeten Faltenbalge sind etwa genauso schädlich wie eine vielfach grössere Resonatorzelle. Bild 20 zeigt eine Resonatorzelle, eine Stufe im Vakuumrohr und einen Faltenbalg im Grössenvergleich zusammen mit der realtiven Stärke der transversalen Impulse.

Dieses Gebiet mag als Beispiel dafür dienen, daß numerische Rechnungen nicht nur zur Optimierung von Geräten hilfreich sind, deren Funktionsweise gut verstanden ist, sondern daß man von ihnen auch lernen kann. Eine Reihe von physikalischen Einsichten und Modellen konnte durch die Anwendung der Programme gewonnen werden und es konnten viele falsche Vorstellungen über transiente Felder widerlegt werden. Nachdem inzwischen die Bedeutung entsprechender Effekte für die Beschleunigerphysik erkannt ist, werden bei Planung und Bau neuer Anlagen alle wesentlichen Elemente mit diesen Hilfsmitteln numerisch untersucht. Die direkte Messung solcher Effekte ist technisch kaum möglich und "verstanden" sind sie großenteils auch nicht. Man muß hier in weitem Umfange auf die Rechenprogramme vertrauen.

Kritische Betrachtungen

Die Meinungen zu numerischen Methoden in der Physik sind sehr unterschiedlich: Sie reichen von "unnützlich" über "schädlich" bis hin zu "unabhängig". Es sollen in diesem Abschnitt zwei Beispiele gezeigt werden, die beide extremen Ansichten unterstützen.

Beim Bau des Elektronensynchrotrons DESY in den 60'er Jahren waren Rechnerprogramme für Hochfrequenzresonatoren noch unbekannt. Die Beschleunigerresonatoren wurden zylindrisch gebaut, nicht nur wegen der Einfachheit dieser Form, sondern auch weil sich die Felder dann näherungsweise mit bekannten Besselfunktionen näherungsweise darstellen lassen (siehe Bild 21 oben). Frequenz und Koppelimpedanz wurden im Labor gemessen. Ein Maß für die Wirtschaftlichkeit eines Resonators ist seine Impedanz R. Sie gibt an, wie stark Teilchen beschleunigt werden können, wenn man eine bestimmte Leistung P in den Resonator speist. Nach den Regeln der Wechselstromrechnung ergibt sich dann die "Spannung" (Energiezunahme) U einfach zu $U = \sqrt{2PR}$. Ein DESY Resonator hat eine Impedanz von etwa 10 Megaohm. Demzufolge werden Teilchen um zehn Megavolt beschleunigt, wenn man dem Resonator eine Leistung von 500 Kilowatt zuführt.

Als die ersten Rechnerprogramme zur Verfügung standen, begann man die Form der Resonatoren zu verändern. Man fand bessere Ergebnisse für Resonatoren mit einer "Nase" in der Nähe des Strahlrohres (Bild 21 Mitte). Solche Resonatoren werden in PETRA, LEP und HERA verwendet. Die Optimierung zielte auf die Erhöhung der Impedanz R und das Ergebnis war bescheiden: Nach zwanzig Jahren konnte mit dem Einsatz von Rechnern die Impedanz typischerweise nur um etwa 10 Prozent erhöht werden. Ein Beispiel für die untergeordnete Bedeutung von Rechenprogrammen bei der Entwicklung physikalischer Apparaturen.

Während der letzten zehn Jahre haben nun kompliziertere Vorgänge in solchen Resonatoren mehr und mehr Beachtung gefunden. Es wurden Programme entwickelt, mit deren Hilfe die Wechselwirkung zwischen Teilchenstrahl und Resonator wesentlich besser untersucht werden konnte. Dabei stellte sich heraus, daß die Entwicklung der Resonatoren unter dem einseitigen Gesichtspunkt der Erhöhung der Impedanz R einen falschen Weg eingeschlagen hatte. Die Rechner-optimierten Resonatoren waren nur scheinbar besser. Ungewollte Nebenwirkungen bei der Strahl-Resonator-Wechselwirkung waren dabei unangemessen angewachsen. Diese Strahl-Resonator Wechselwirkungen stellen jedoch bei vielen Beschleunigern die entscheidende Ursache für eine Strahlstrombegrenzung dar. Das eigentliche Ziel der Optimierung muß daher sein: maximaler Strom bei gegebener Teilchenenergie und eingespeicherter Leistung.

Die Einbeziehung beider Gesichtspunkte mit entsprechend umfangreicheren Programmen ergibt eine optimale Resonatorform, die sich wesentlich von früheren Formen unterscheidet. Abb. 21 (unten) zeigt einen solchen Einzel-Mode-Resonator/15/, der zwar eine um 15 Prozent geringere Impedanz R aufweist, als die allein unter dem Impedanzaspekt optimierte Form, dessen parasitäre Strahl-Resonator-Wechselwirkung jedoch um bis zu 70 Prozent gegenüber herkömmlichen Formen reduziert werden konnte. In einem Elektron-Positron-Speicherring ermöglicht ein solcher Resonator bei nur 10 bis 20 Prozent mehr Leistungsaufnahme eine bis zu zehnmal höhere Luminosität, sofern diese allein durch die Wechselwirkung des Strahls mit den Resonatoren begrenzt ist. Diese Entwicklung im Resonatorbau ist ein Beispiel dafür, daß Rechnerprogramme nicht nur wenig sinnvoll, sondern unter Umständen auch schädlich sein können, wenn sie bei der Analyse verwickelter Vorgänge einseitig angewendet werden. Eine

umfassendere Simulation eines komplexen Systems hingegen könnte in der Beschleunigerphysik Verbesserungen um Größenordnungen zur Folge haben.

Als ein weiteres interessantes Einsatzgebiet solcher Feldrechnungen hat sich die Suche nach neuen Beschleunigungsmechanismen ergeben. Basierend auf solchen Computerrechnungen wird bei DESY zur Zeit ein neuer Mechanismus/16/ experimentell/17/ untersucht, bei dem transiente Streufelder von relativistischen Elektronenpaketen zur Beschleunigung von Teilchen in einem zweiten Strahl ausgenutzt werden (siehe Bild 22). Das System ist ein möglicher Kandidat für Hochenergiebeschleuniger der nächsten Generation. Die experimentelle Untersuchung dieses Mechanismus ist ohne numerische Feldrechnungen kombiniert mit Rechnungen über die Bewegung der Teilchen kaum vorstellbar.

Der Benutzer

Die weit verbreitete "schlechte Meinung" über numerische Feldberechnungen hat oft ihre eigentliche Ursache darin, daß der Benutzer die Programme unsachgemäß einsetzt oder falsch bedient. Solche Rechenprogramme sind nicht perfekt, sie verlangen immer ein gewisses Maß an Erfahrung und Verständnis dessen, was in ihnen vorgeht. Einige Grundkenntnisse über numerische Mathematik und Funktionalanalysis sind in der Regel unabdingbar. Zwar sind eine Reihe einfacher Programme mittlerweile so benutzerfreundlich geworden, daß eine Fehlbedienung sehr unwahrscheinlich ist, aber die Programme, die die Grenzen des machbaren erreichen, insbesondere bei dreidimensionalen Problemen, sind noch einige Jahre davon entfernt, als alltägliches Werkzeug eingesetzt werden zu können.

Rechenmaschinen

Die sinnvolle Anwendung von Feldprogrammen ist bereits auf einem "Personal Computer" möglich. Insbesondere solche Programme, die sich auf Lösungen in zweidimensionalen Gebieten beschränken, können auf den üblichen Rechnern der Mittelklasse (z.B. VAX) gut genutzt werden. Für dreidimensionale Rechnungen ist jedoch eine Großrechenanlage erforderlich, am besten geeignet sind Vektorrechner, die optimal an die hier zu lösenden Probleme angepasst sind. Ein wesentliches Problem bei dreidimensionalen Rechnungen stellt die Ein- und Ausgabe der Daten dar. Computergraphik ist hier außerordentlich hilfreich, wie die Beispiele gezeigt haben.

Rechnerprogramme

Für jedes Anwendungsgebiet gibt es ein mehr oder weniger weites Angebot an verfügbaren Rechnerprogrammen. Soweit es sich um statische Probleme handelt, ist eine ganze Reihe von Programmen für zweidimensionale Probleme verfügbar, nur wenige dagegen für den allgemeinen dreidimensionalen Fall. Bei hochfrequenten und transienten Problemen sind die auf der hier beschriebenen Methode basierenden Programme zur Zeit wohl die einzigen, die verfügbar und weitgehend fehlerfrei sind. Die zweidimensionalen Programme haben mittlerweile ihren festen Platz in der Beschleunigerentwicklung eingenommen. Der Aufwand zur Erstellung eines dreidimensionalen Programms ist unvergleichlich höher als der von zweidimensionalen Programmen. Ein allgemeines dreidimensionales elektromagnetisches CAD-System mit dem Namen **MAFIA** wird zur Zeit von einer Kollaboration aus zwölf Wissenschaftlern aus der Bundesrepublik Deutschland und den USA erstellt/2/.

Literatur

- /1/ T. Weiland, Particle Accelerators **15**(1984) und **17**(1985) und IEEE NS **32**(1985),2738
- /2/ K.S.Yee, IEEE, **AP 14**(1966),302-307
- /3/ G.H.Golub, Ch.v.Loan, Matrix Computations, The John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1983
- /4/ Th.Meis , U.Marcowitz, Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978
- /5/ U.v.Rienen und Th.Weiland, DESY **86-004**, Januar 1986
- /6/ Th.Weiland, Archiv für Elektrotechnik (AFE), Vol.60(1978), pp.345
- /7/ H.Euler und Th.Weiland, Archiv für Elektrotechnik (AFE), Vol.61(1979), pp.103
- /8/ Th.Weiland, Nuclear Instruments and Methods (NIM), Vol.212(1983), pp.13-34
- /9/ H. Euler et al., Archiv für Elektrotechnik (AFE), Vol.65(1982), pp.299
- /10/ Th.Weiland, Nuclear Instruments and Methods (NIM), Vol.216(1983), pp.329-349
- /11/ Die PETRA Speicherringgruppe, 11-th Int. Conf. on High Energy Accelerators, Genf, Schweiz, 1980, pp.16-25
- /12/ R.D.Kohaupt, DESY **82-022**, März 1982
- /13/ Th.Weiland, DESY **81-088**, Dezember 1981
- /14/ R.Klatt et al. IEEE Transactions Dezember 1981
- /15/ Th.Weiland, DESY **83-073**, September 1983
- /16/ G.A.Voss und Th.Weiland DESY M **82-10**, April 1982 und DESY **82-074**, September 1982
- /17/ Die Wake Field Beschleuniger Gruppe, IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS **32**(1985), p. 3471

Bild 1: Drei Beispiele für Gitternetze:
 a) Ein dreidimensionales kartesisches Netz,
 b) ein Gitternetz in Kreiszyylinderkoordinaten,
 c) ein kombiniertes Netz aus kartesischen und Polarkoordinaten.

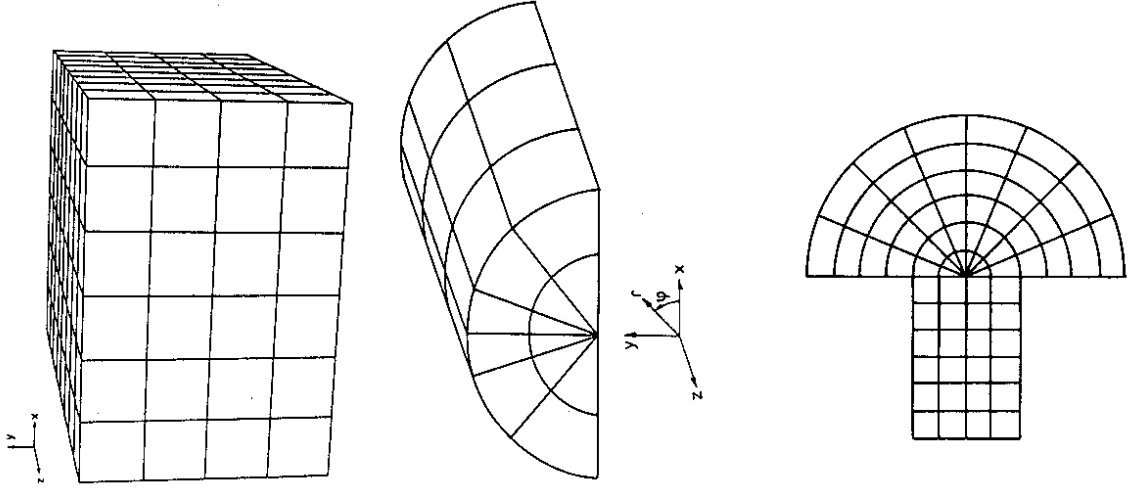


Bild 2: Perspektivische Ansicht eines C-förmigen Korrekturmagneten wie er im Speicherring HERA eingesetzt wird (nur das Eisenjoch ist gezeigt, der Spulenkörper ist nicht abgebildet).

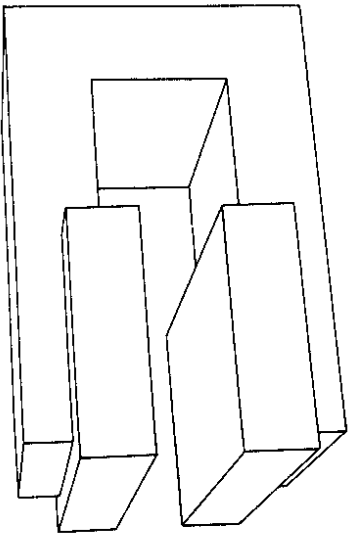


Bild 3: Die Darstellung des Korrekturmagneten aus Bild 2 in einem dreidimensionalen kartesischen Gitternetz.

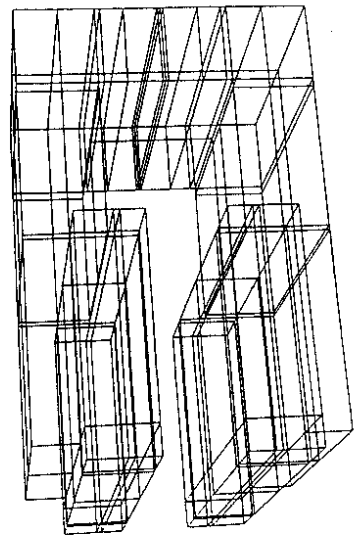


Bild 4: Ein dielektrischer Wellenleiter in einem rechteckigen Schirmgehäuse

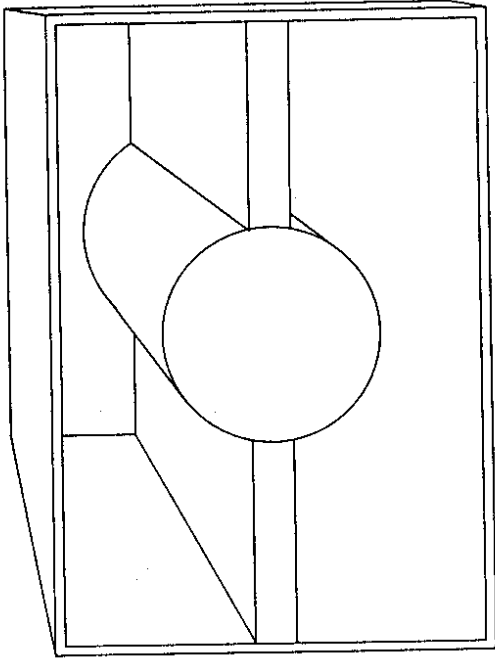


Bild 5: Die Darstellung des Wellenleiters aus Bild 4 in einem zweidimensionalen Dreiecksgridnetz, das nicht an Koordinatenlinien gebunden ist.

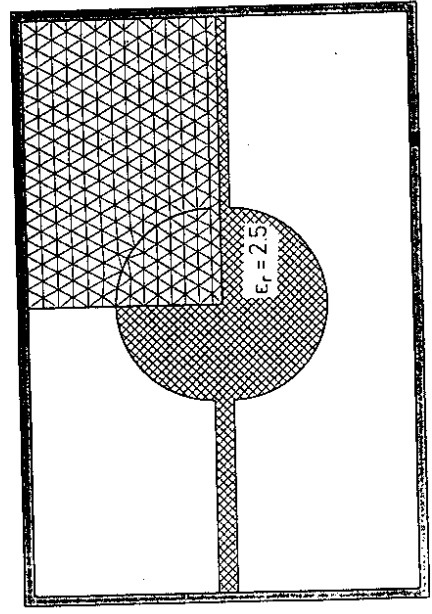


Bild 6: Die Oberfläche einer Elementarzelle, die kleinste Flächeneinheit im Gitternetz und die Anordnung der unbekanntenen Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{B} .

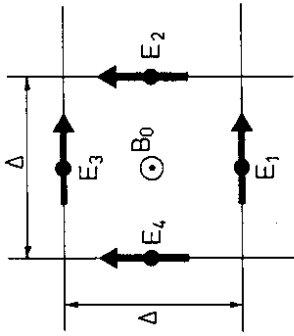


Bild 7: Darstellung der einfachsten Näherungsformel für ein Integral.

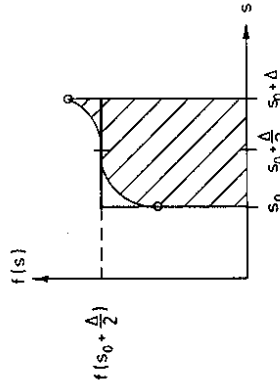


Bild 8: Das Gitternetz \mathbf{G} und das duale Gitternetz \mathbf{G} mit verschiedenen Materialien in jeder Elementarzelle. Die Anordnung der Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{B} stellt sicher, daß nur stetige Größen berechnet werden.

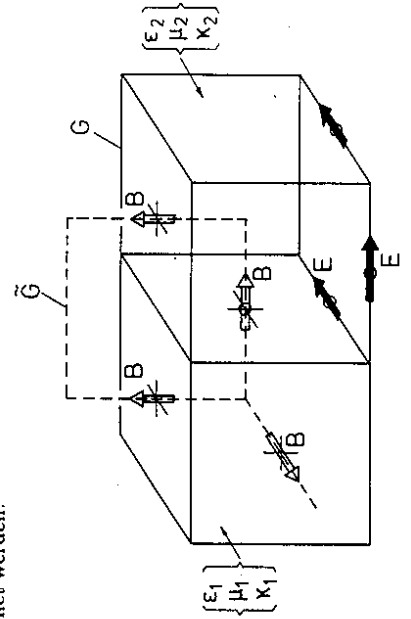


Bild 9: Die transversalen elektrischen Felder der beiden einfachsten Wellentypen auf dem dielektrischen Wellenleiter aus Bild 5 bei zwei verschiedenen Frequenzen. Es ist deutlich zu erkennen, daß sich das Feld bei höherer Frequenz im Dielektrikum konzentriert.

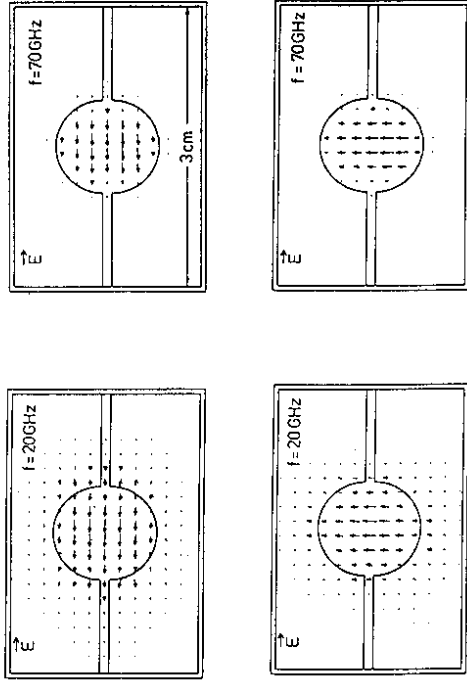


Bild 10: Die Ausbreitungskonstanten der vier einfachsten Wellentypen auf dem dielektrischen Wellenleiter aus Bild 2 als Funktion der Frequenz. Die Ausbreitungskonstante der Welle ($\beta = \omega/c$) nähert sich mit zunehmender Frequenz der einer ebenen Welle im Dielektrikum an.

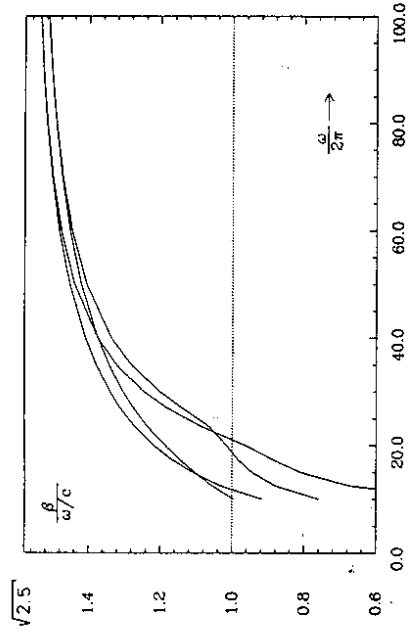


Bild 11: Transversales magnetisches Feld und Wirbelstromverteilung in einem lamellierten Magneten mit Luftspalt.

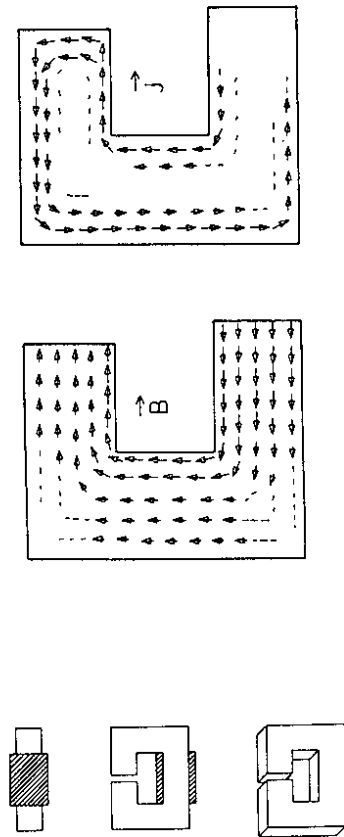


Bild 12: Modell eines Kernspintomographen. Man erkennt in der Mitte die Testperson, zu beiden Seiten die vertikalen Leiter, die an ihren Enden von dielektrischen Klötzen gehalten werden. Den Außenmantel bildet ein leitender Zylinder. Entlang der Leiter können sich hochfrequente Stehwellen ausbilden, deren Felder die Testperson durchdringen.

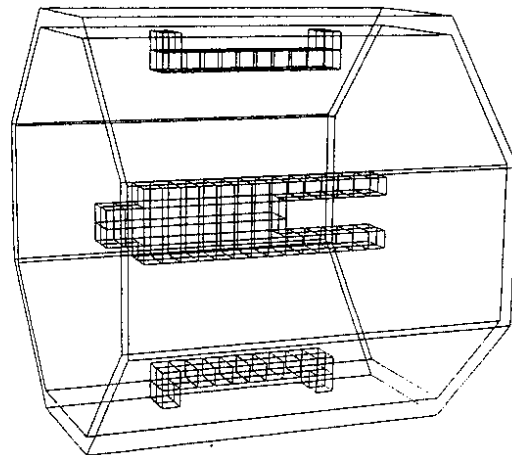


Bild 13: Felder in einem Oktanten des Kernspintomographen aus Bild 12.

- a) Perspektivische Darstellung des bei der Berechnung berücksichtigten Oktanten
- b) Magnetische Flußdichte in der Ebene $z=0$
- c) Perspektivische Darstellung der vertikalen (y) Komponente der magnetischen Flußdichte in der Mittelebene ($y=0$)
- d) Perspektivische Darstellung der horizontalen (x) Komponente der elektrischen Feldstärke in der Mittelebene ($y=0$)

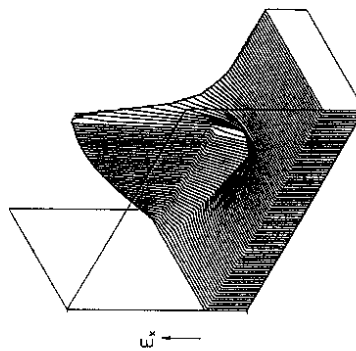
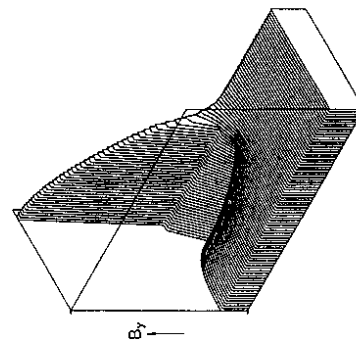
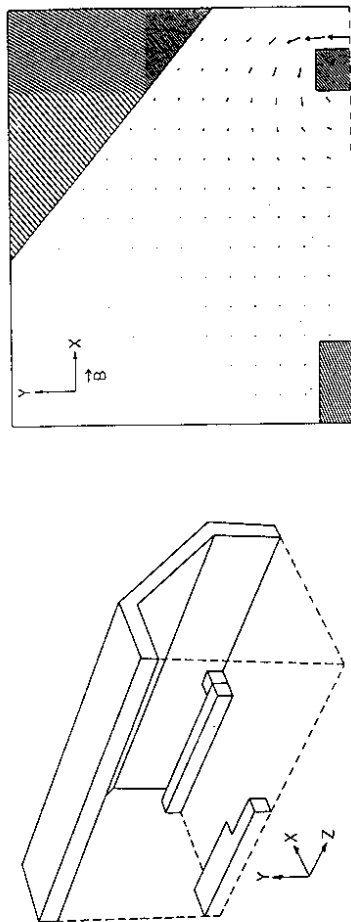


Bild 14: Transiente Felder einer Welle auf einer koaxialen Leitung, die in einen grösseren Rundhohlleiter mündet. Man erkennt die Wellenfronten in der transienten Phase sowie die eingeschwungene Feldverteilung mit ihrem typischen Bild einer höheren Rundhohlleiterwelle.

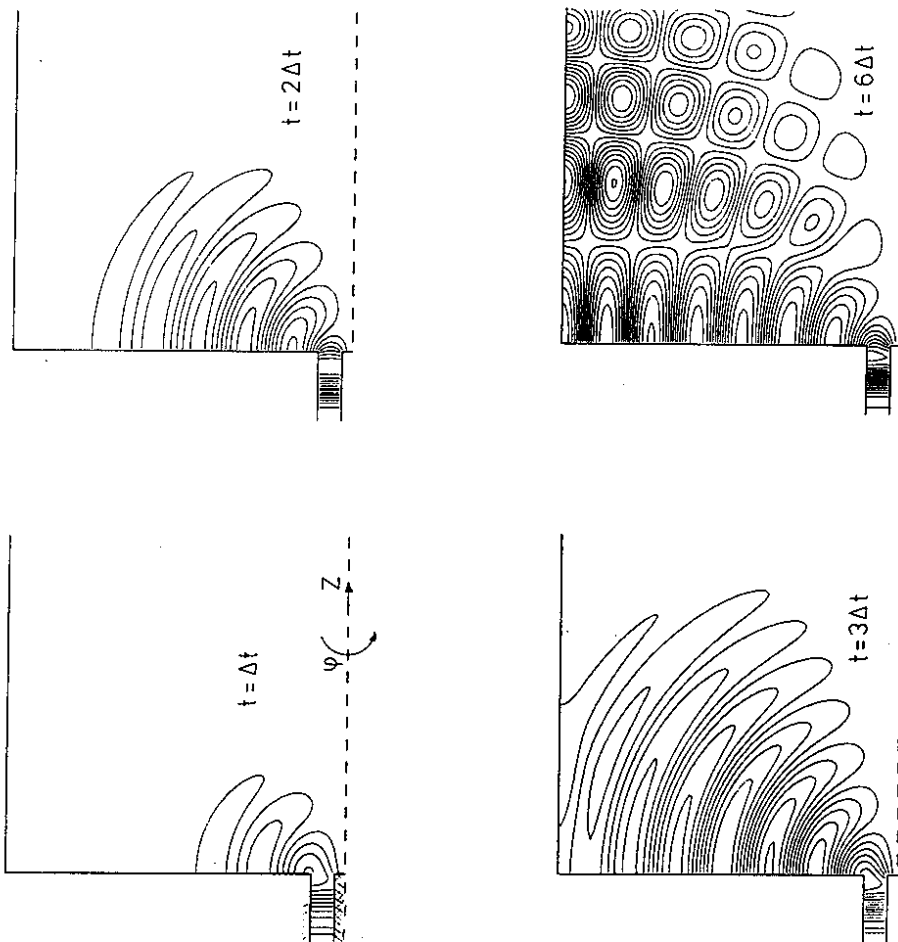


Bild 15: Ablenkfeld des Korrekturdipols in der vorderen Hälfte des Magneten in der Mittelebene. Das Hochplateau entspricht dem Bereich innerhalb des Magneten. Die Felder entlang des Teilchenweges (in z Richtung) reichen weit über den Eisenbereich hinaus.

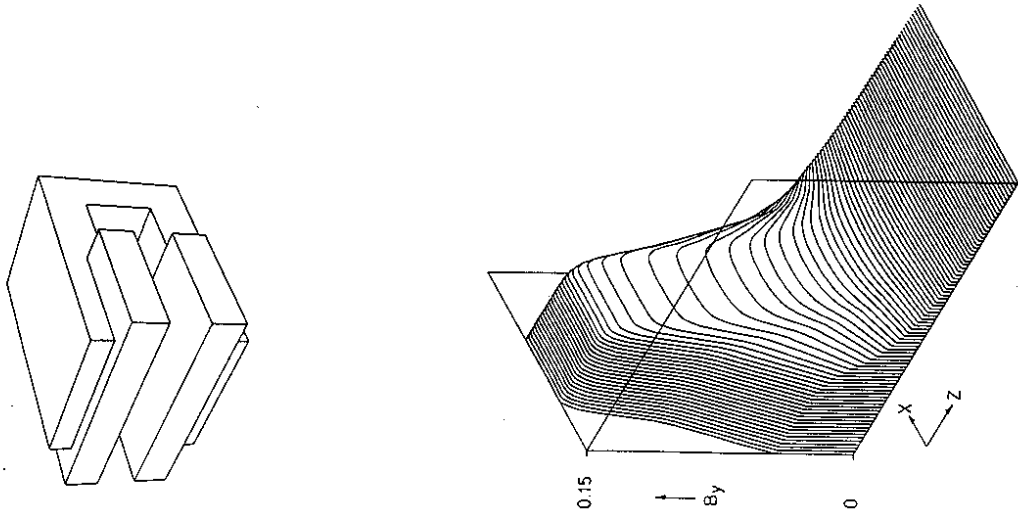


Bild 16: Zylindersymmetrischer Beschleunigungsresonator mit Dreiecksgitternetz.
 a) Wegen der Symmetrie des Resonators wird bei der Berechnung nur der gekennzeichnete Ausschnitt berücksichtigt.
 b) Elektrisches und magnetisches Feld der Grundschwingung (diese Felder werden vorzugsweise zur Teilchenbeschleunigung genutzt).
 c) Elektrisches Feld der ersten Dipolschwingung in zwei zueinander senkrechten Ebenen in denen jeweils die transversalen und die azimutale Komponente ihr Maximum annehmen. (Solche Schwingungen können zu Teilchenverlusten führen). d) Magnetische Flußdichte der ersten Dipolschwingung

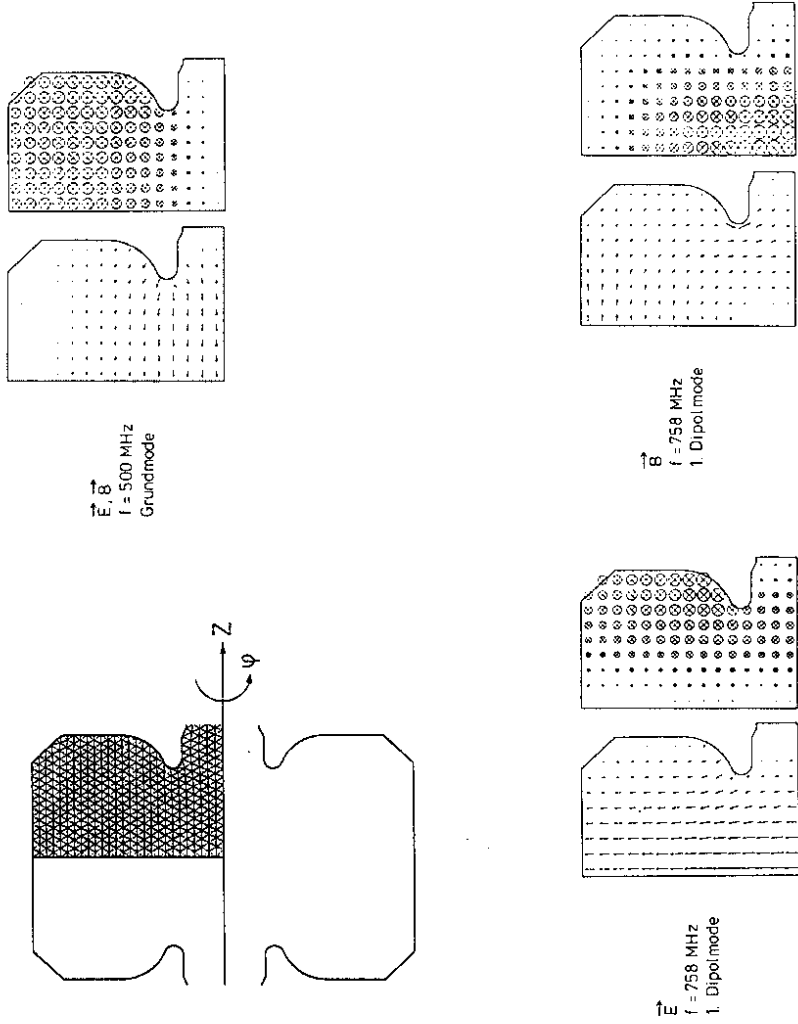


Bild 17: Felder beim Durchflug eines kurzen Gausssförmigen Elektronenpaketes (r.m.s. Länge $\sigma = 2 \text{ cm}$) durch einen dreizehligen Resonator. Die Zeitspanne des hier dargestellten Vorganges beträgt drei Nanosekunden.

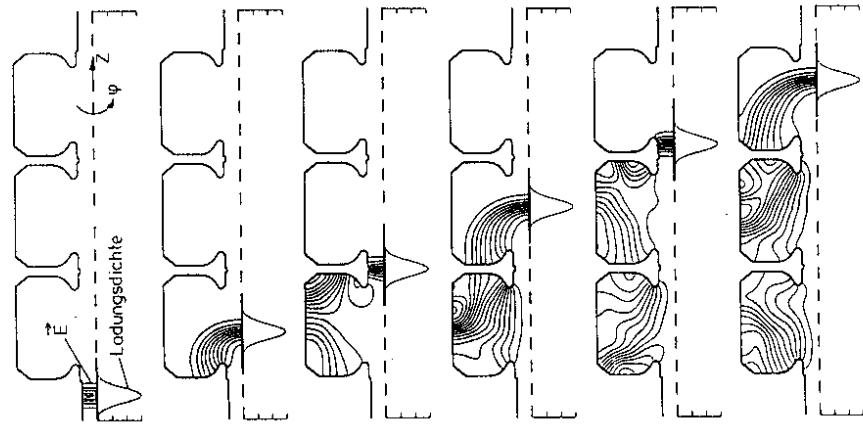


Bild 18: Energieverlust und transversale Impulsverteilung verursacht durch die transienten Felder beim Durchflug durch einen dreizelligen Resonator. Das Paket hat 10^{12} Teilchen und durchquerte den Resonator fünf Millimeter außerhalb der Achse. Seine r.m.s. Länge beträgt 1cm. Links (auf der s-Achse) entspricht Teilchen, die sich vorne im Paket befinden. Die transversalen Impulse im hinteren Teil des Paketes sind die Ursache für die Strahlstrombegrenzung in vielen Beschleunigern.

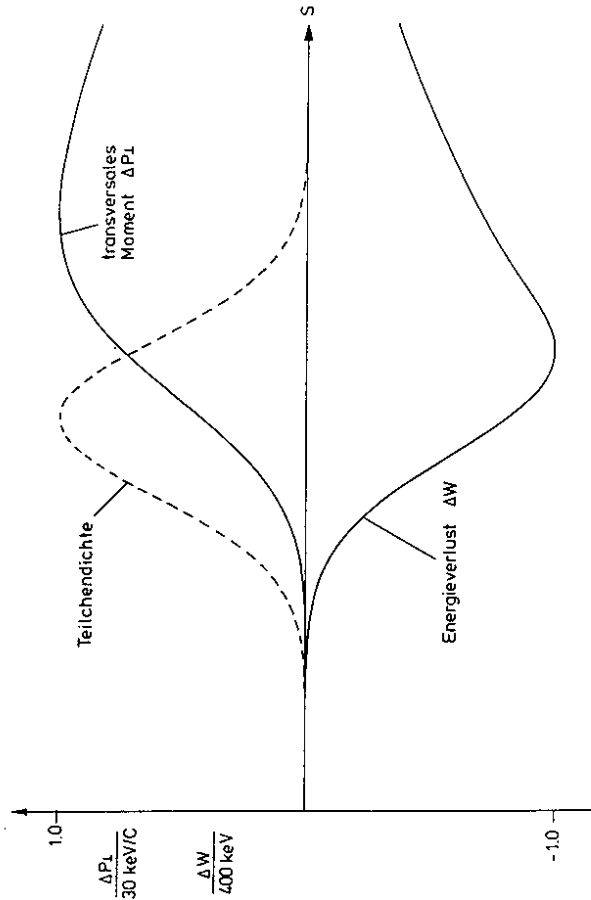


Bild 19:

- a) Gemessene und gerechnete longitudinale Aufweitung eines Elektronenpaketes im Speicherring PETRA bei einer Injektionsenergie von 7 GeV als Funktion des mittleren Stromes. Ursache für diese Aufweitung sind die transienten Streufelder.
- b) Die transversale Ausdehnung eines Teilchenpaketes in PETRA beim Auftreten der transversalen Instabilität als Funktion der Zeit. τ_s ist die Dämpfungszeit hervorgerufen durch die Synchrotronstrahlung ($\tau_s = 4ms$). Das Ergebnis wurde mit einem Simulationsprogramm berechnet, das sowohl longitudinale als auch transversale transiente Felder berücksichtigt. Diese Aufweitung stellt eine wesentliche Beschränkung der Teilchenzahl in vielen Beschleunigern dar und wurde bei PETRA 1982 erstmals beobachtet.

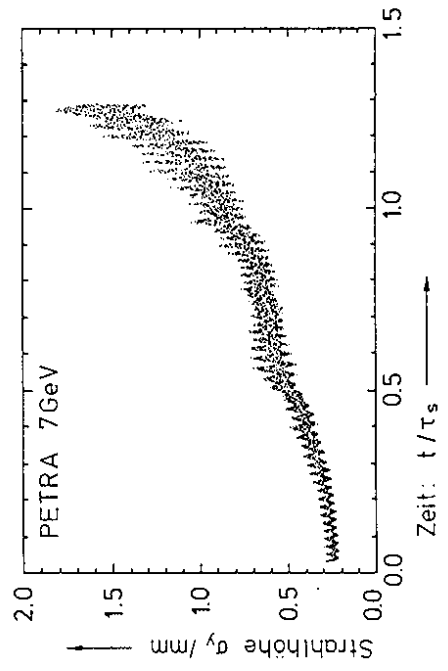
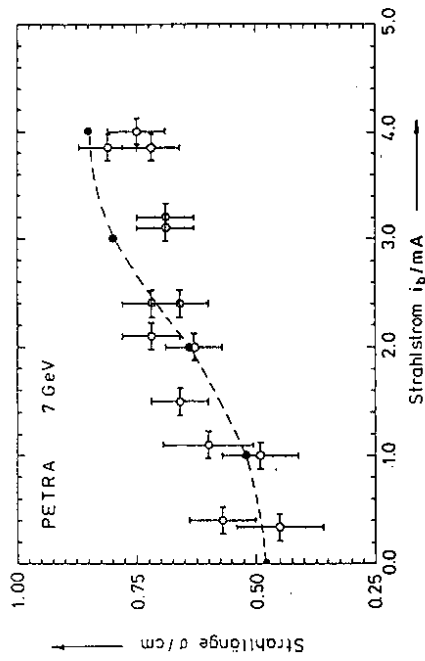


Bild 20: Eine Zelle des PETRA Resonators im Grössenvergleich zu einem Faltenbalg und einer kleinen Stufe in einem Vakuumrohr. Die angegebenen Werte für die durch transiente Streufelder hervorgerufenen transversalen Impulse zeigen, daß die Wirkung dieser drei Objekte auf den Strahl in der gleichen Grössenordnung liegt. Die Stärke der transversalen Felder hängt offensichtlich nicht vom Volumen des Objektes ab, wie lange Zeit vermutet wurde.

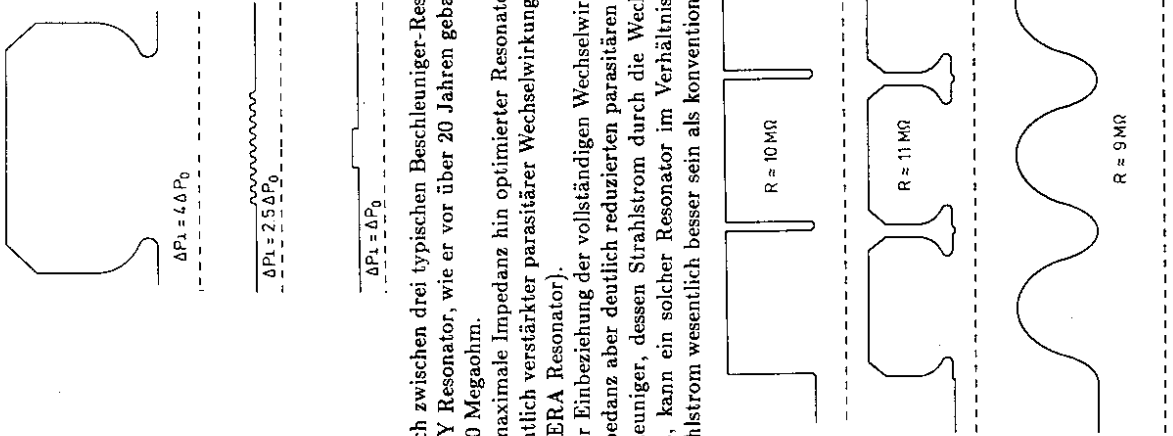


Bild 21: Vergleich zwischen drei typischen Beschleuniger-Resonatoren.
 Oben: Der DESY Resonator, wie er vor über 20 Jahren gebaut wurde mit einer gemessenen Impedanz von 10 M Ω .
 Mitte: Ein auf maximale Impedanz hin optimierter Resonator mit kaum verbessertem Wert für R aber wesentlich verstärkter parasitärer Wechselwirkung zwischen Strahl und Resonator (PETRA und HERA Resonator).
 Unten: Ein unter Einbeziehung der vollständigen Wechselwirkung optimierter Resonator mit verringerter Impedanz aber deutlich reduzierten parasitären Effekten.
 In einem Beschleuniger, dessen Strahlstrom durch die Wechselwirkung mit den Resonatoren begrenzt ist, kann ein solcher Resonator im Verhältnis von eingespeicherter Leistung zu erzielbarem Strahlstrom wesentlich besser sein als konventionelle Strukturen.

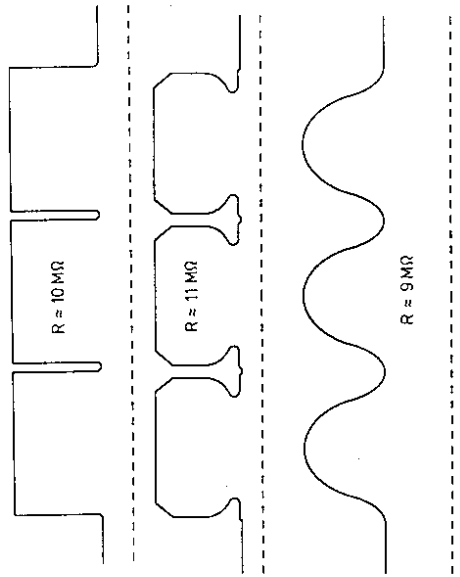


Bild 22: Ein sogenannter "Wake Field Transformator". Ein treibender Hohlstrahl erzeugt in diesem Transformator transiente Felder, die, von den Platten geführt, konzentrisch auf die Symmetrieachse zulaufen. Hierbei erhöht sich die Feldstärke umgekehrt proportional zur Wurzel aus dem Radius des Wellenpaketes, da das von Feld erfüllte Volumen linear mit dem Radius abnimmt und die Feldenergie der Wellen erhalten bleibt. In der Mitte entstehen folglich sehr viel höhere Feldstärken als im äußeren Schlitz durch den der Treiberstrahl tritt. Es ist geplant, diese Felder zur Beschleunigung von Teilchen bei sehr hohen Feldstärken zu benutzen, die man benötigt um auf wirtschaftliche Weise Elektronen und Positronen auf Energien im TeV Bereich zu beschleunigen.

