

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON **DESY**

DESY 89-108

August 1989

Analyse der transversalen
Moden-Kopplungsinstabilität für lokalisierte
HF-Strukturen und ihre Kompensierbarkeit durch
Rückkopplungssysteme

K. Balewski

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Hamburg

DESY-Bibliothek

ISSN 0418-9833

NOTKESTRASSE 85 · 2 HAMBURG 52

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

To be sure that your preprints are promptly included in the
HIGH ENERGY PHYSICS INDEX ,
send them to the following address (if possible by air mail) :

DESY
Bibliothek
Notkestrasse 85
2 Hamburg 52
Germany

DESY 89-108
August 1989

ISSN 0418-9833

Analyse der
transversalen Moden - Kopplungsinstabilität für
lokalisierte HF - Strukturen
und ihre Kompensierbarkeit
durch Rückkopplungssysteme

DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DES FACHBEREICHS PHYSIK
DER UNIVERSITÄT HAMBURG

VORGELEGT VON
KLAUS BALEWSKI
AUS HAMBURG

HAMBURG
1988

Gutachter der Dissertation:

Prof. Dr. P. SCHMÜSER
Priv. Doz. Dr. R.D. KOHAUPT

Gutachter der Disputation:

Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. G.A. VOSS
Priv. Doz. Dr. R.D. KOHAUPT

Datum der Disputation:

13. 7. 1988

Sprecher des
Fachbereichs Physik und
Vorsitzender des
Promotionsausschusses:

Prof. Dr. PETER E. TOSCHEK

Abstract

Localized pointlike cavities cause coherent synchro-betatron resonances in addition to the usual mode coupling instability. In this thesis a matrix formalism based on the Vlasov equation is developed which allows one to consider both arbitrarily localized cavities and the finite length of the RF - sections. In this way it is possible to investigate the importance of the coherent resonances. It is shown that the localization of the cavities can be neglected because of the finite length of the RF - sections. The matrix formalism is extended in such a way that the effect of a feedback system can be studied. This allows one to investigate the central question of whether a feedback system is able to compensate the mode - coupling instability. It is found that in general a feedback system is not able to increase the threshold current but on the contrary reduces the instability threshold.

Lokalisierte punktförmige Resonatoren verursachen neben der üblichen transversalen Moden - Kopplungsinstabilität kohärente Synchro - Betatron Resonanzen. Um die Bedeutung dieser Resonanzen untersuchen zu können, wird in dieser Arbeit ein auf der Vlasov - Gleichung basierender Matrizenformalismus entwickelt, der neben der Betrachtung beliebig lokalisierter Resonatoren auch noch die Berücksichtigung der endlichen Länge der Beschleunigungsstrukturen gestattet. Die Resultate der Untersuchung realistischer Beschleunigungsstrukturen zeigen, daß die Lokalisierung der Resonatoren aufgrund der endlichen Länge der Beschleunigungsstrecken vernachlässigt werden kann. Der Matrizenformalismus wird in der Weise weiter entwickelt, daß die zentrale Frage untersucht werden kann, inwieweit ein Rückkopplungssystem in der Lage ist, die Moden - Kopplungsinstabilität zu kompensieren. Es zeigt sich, daß ein Rückkopplungssystem im allgemeinen nicht in der Lage ist, den Schwellenstrom zu erhöhen, im Gegenteil in der Regel führt der Einsatz eines Rückkopplungssystems zu einer Verringerung der Instabilitätsschwelle.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	1
1 Einleitung	4
1.1 Transversale Moden - Kopplungsinstabilität	5
1.2 Transversale Moden - Kopplungsinstabilität mit Rückkopplungssystem	6
1.3 Aufbau der Arbeit	7
2 Beschreibung des Instabilitätsmechanismus der Modenkopplung	8
3 Transversale Moden - Kopplungsinstabilität und kohärente Synchro - Betatron - Resonanzen	11
3.1 Die Vlasov - Gleichung	11
3.2 Die Vlasov - Gleichung zur Untersuchung von transversalen Instabilitäten . .	12
3.3 Die kollektive transversale Kraft	16
3.4 Lösung der linearisierten Vlasov-Gleichung : Transfermatrizen Formalismus .	19
3.5 Eigenschaften der Transfermatrizen - Instabilitätsmechanismus	23
3.5.1 Eigenschaften der Matrixelemente	23
3.5.2 Eigenschaften der Transfermatrizen	24
3.5.3 Instabilitätsmechanismus	25
3.6 Berechnung der Matrixelemente	28
3.7 Moden - Kopplungsinstabilität für gleichmäßig verteilte Objekte	30
3.7.1 Bestimmung der Instabilitätsschwelle	30
3.7.2 Numerische Berechnung des Schwellenstroms	35
3.7.3 Modenkopplung unterhalb der Instabilitätsschwelle	39
3.8 Moden - Kopplungsinstabilität durch lokalisierte Objekte	40
3.8.1 Punktförmige Objekte : kohärente Synchro -Betatron Resonanzen . .	42
3.8.2 Beschleunigungsstrecken endlicher Länge	47
4 Kompensation der transversalen Moden - Kopplungsinstabilität durch Rückkopplungssysteme	55
4.1 Vorbemerkungen zum Rückkopplungssystem	58
4.1.1 Rückkopplungssystem ohne Störung	58
4.1.2 Rückkopplungssystem mit mehreren Störungen	61
4.2 Modenkopplung mit Dipol - Rückkopplungssystem	65
4.2.1 Transfermatrix des Dipol - Rückkopplungssystems	65
4.2.2 Beschleuniger mit einem Resonator und Dipol- Rückkopplungssystem	67
4.3 Numerische Untersuchung des Dipol - Rückkopplungssystems	76
4.3.1 Vergleich des Modellbeschleunigers mit einem realen Beschleuniger . .	76

4.3.2	Parameterabhängigkeit des Schwellenstroms mit Rückkopplungssystem	81
5	Zusammenfassung	86
A		88
A.1	Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichung	88
A.2	Beweis von $J\mathcal{A}_j J^{-1} = -\mathcal{A}_j^T$ und $K^{-1}\mathcal{A}_j K = -\mathcal{A}_j$	91
A.2.1	Eigenschaften der Matrixelemente	91
A.2.2	Beweis der Äquivalenzrelationen	92
A.3	Berechnung der Matrixelemente	98
A.3.1	Berechnung der Standardabweichung	98
A.3.2	Berechnung der I_{nk}	98
A.3.3	Berechnung der $M_{mnk}^{m'n'k'(j)}$	99
A.4		102
A.4.1		102
A.4.2		105
A.4.3		106
A.4.4		108
A.5	Transfermatrix des Dipol - Rückkopplungssystems	111
A.6		112
A.6.1	Berechnung der charakteristischen Gleichung	112
A.7		115
A.7.1	Herleitung von Gleichung (4.67)	115
A.7.2	Berechnung der Hurwitz Determinanten	116
A.7.3	Untersuchung der dritten Hurwitz - Determinanten H_3	117
	Danksagung	122
	Literaturverzeichnis	123

Kapitel 1

Einleitung

Die in Speicherringen umlaufenden Teilchenpakete (Bunche) können kohärente Schwingungen in allen drei Fokussierungsrichtungen ausführen (Synchrotron- bzw. Betatronschwingungen). Der Strahl stellt damit einen Wechselstrom dar, der in den Querschnittsänderungen der Vakuumkammer (Faltenbälge, Tanks, Monitore etc.) und insbesondere in den Beschleunigungsstrukturen (Resonatoren) elektromagnetische Felder erregt, die auf den Strahl zurückwirken. Die Stärke der angeregten Felder und damit die Stärke der Rückwirkung steigt mit der Strahlintensität. Die intensitätsabhängige Rückwirkung kann zu einer Selbstanregung - Strahlinstabilität - führen, die durch ein unbegrenztes Anwachsen der Schwingungsamplitude mit einer Reduktion der Intensität oder mit totalem Strahlverlust endet.

Instabilitäten treten erst oberhalb eines Schwellenstroms auf, der dann in fast allen Fällen den maximal speicherbaren Strom kennzeichnet.

Große Speicherringe leiden besonders an intensitätsabhängigen Instabilitäten, da in ihnen die Zahl der Querschnittsänderungen der Vakuumkammer sehr hoch ist. Dies gilt insbesondere für Elektron - Positron - Speicherringe mit hoher Maximalenergie, deren Zahl an Hochfrequenzresonatoren groß ist, da hier der durch die Synchrotronstrahlung hervorgerufene hohe Energieverlust kompensiert werden muß.

Es gibt eine Vielzahl verschiedener Instabilitäten, die wie folgt klassifiziert werden:

- *Multibunchinstabilitäten*: Die Instabilitätsschwelle ist durch die Intensität mehrerer Bunche gegeben, da die Instabilität durch die Kopplung der Bewegung mehrerer Bunche hervorgerufen wird.
- *Einzelbunchinstabilitäten*: Die Instabilitätsschwelle hängt nur vom individuellen Strom eines Bunches, unabhängig von der Anwesenheit und Intensität anderer Bunche, ab.

Instabilitäten treten der Fokussierung entsprechend in allen drei Raumrichtungen auf, und man unterscheidet zwischen:

- longitudinalen
- horizontalen
- vertikalen

Multibunch- bzw. Einzelbunchinstabilitäten.

Der Mechanismus vieler Instabilitäten wurde in den letzten 20 Jahren eingehend untersucht [1][3][4], so daß geeignete Gegenmaßnahmen ergriffen werden konnten [4], um Intensitätsverlust zu vermeiden.

1.1 Transversale Moden - Kopplungsinstabilität

Am Speicherring PETRA wurde 1980 eine Instabilität beobachtet, die sich nicht in die bisherigen Vorstellungen einfügte [5]. Hierbei handelt es sich um eine Einzelbunchinstabilität, die in vertikaler Richtung zu einem sehr schnellen Anwachsen der Schwingungsamplitude und schließlich zum Strahlverlust führte.

Der Mechanismus dieser Instabilität wurde von R.D. Kohaupt aufgedeckt [6][7], indem er einen von F. Sacherer entwickelten Formalismus [8] zur Behandlung von Instabilitäten weiterentwickelte.

Zu dieser Zeit wurde auch am Speicherring PEP [9] diese Instabilität beobachtet.

Die Untersuchungen zeigten bald, daß diese Instabilität den maximal speicherbaren Strom in großen Speicherringen entscheidend begrenzt. Deshalb wurden vor dem Bau großer Speicherringe umfangreiche Untersuchungen dieser Instabilität durchgeführt wie im Falle von TRISTAN [10], LEP [11] [12] [13] und SSC [14].

Inzwischen wurde der Sacherer Formalismus auch weiterentwickelt, um Strahlungsdämpfung [15] und Landaudämpfung [16] zu berücksichtigen.

Wegen der großen Bedeutung dieser Instabilität wurden ebenfalls Anstrengungen unternommen, durch Computersimulation [17] dieses Effektes weitere Einblicke zu gewinnen. Diese Simulationen sind jedoch sehr aufwendig, wenn die komplette Struktur eines Beschleunigers berücksichtigt werden soll.

Um den Aufwand zu reduzieren, wurden deshalb in manchen Simulationen die einzelnen Resonatoren zu einem Superresonator zusammengefaßt, der in einem Punkt im Speicherring lokalisiert ist.

Im Falle einer solchen Computer Simulation trat ein neues Phänomen auf [18]: *kohärente Synchro-Betatron Resonanzen*. Die Instabilität setzt schon bei einem sehr kleinen Strom ein, wenn der Überhang $\delta\nu_\beta$ des Betatron tunes einem Vielfachen des Synchrotrontunes ν_s entspricht.

Diese Resonanzen wurden auch schon mit Hilfe eines Zwei - Teilchen - Modells entdeckt [19], und es zeigte sich, daß diese "Synchro-Betatron Resonanzen" nicht mit den bisher beschriebenen Synchro-Betatron Resonanzen [20] identisch sind.

Bis zu diesem Zeitpunkt war die Lokalisierung der Resonatoren im Rahmen des Sacherer Formalismus nicht berücksichtigt worden.

Es stellt sich nun heraus, daß der Sacherer Formalismus so modifiziert werden kann, daß die realistische Struktur lokalisierter Resonatoren analytisch untersucht werden kann.

Dieses ist zuerst für einen punktförmigen (Länge null) Resonator durchgeführt worden [21] und später auch für mehrere symmetrisch angeordnete punktförmige Resonatoren [22]. Dabei wurden im ersten Fall ebenfalls die kohärenten Synchro-Betatron Resonanzen entdeckt, und im zweiten Fall verschwanden einige Resonanzen aufgrund der symmetrischen Resonatoranordnung.

Nachdem Strahlungsdämpfung berücksichtigt worden war [23], zeigte sich außerdem, daß überhaupt nur die Synchro-Betatron Resonanzen niedrigster Ordnung

$$\delta\nu_\beta \approx m \nu_s, \quad m \in \{0, 1, 2\}$$

beobachtbar sein sollten.

Allerdings konnten kohärente Resonanzen bisher in keiner Maschine identifiziert werden. Wegen der großen Bedeutung von Resonanzen für den Betrieb eines Beschleunigers, ist eine gründliche Untersuchung der kohärenten Synchro-Betatron Resonanzen notwendig.

Deshalb wird der in [22] benutzte Formalismus weiterentwickelt, um der realen Struktur eines Beschleunigers näher zu kommen, d.h. es wird Lokalisierung an beliebiger Stelle und auch die endliche Länge der Beschleunigungsstrecken berücksichtigt.

Während der Untersuchungen zur vorliegenden Arbeit wurde mit einem ähnlichen Formalismus von T. Suzuki [24] begonnen.

Dieser neu entwickelte Formalismus ähnelt der Behandlung linearer Betatronschwingungen im Rahmen der Teilchenoptik [25] [2]. Wie dort magnetische Elemente wird hier jeder Resonator durch eine Transfermatrix beschrieben, wobei die Matrixelemente durch die Wechselwirkung des Bunches mit dem Resonator bestimmt sind. Die Wechselwirkung wird jedoch nicht wie bisher durch einen breitbandigen Resonator beschrieben, sondern gemäß den Berechnungsverfahren, wie sie von T. Weiland entwickelt wurden [27].

Die Transfermatrix des gesamten Speicherrings ergibt sich aus der Multiplikation der Transfermatrizen der einzelnen Objekte, und die Stabilität des Strahls ist durch die Eigenwerte dieser Transfermatrix bestimmt.

Es zeigt sich, daß die Eigenwerte eine Charakteristik aufweisen, die wesentlich mit der speziellen Eigenart des Instabilitätsmechanismus verknüpft ist.

Der Einfluß verschiedener Lokalisierungsstrukturen auf das Verhalten der Moden - Kopplungsinstabilität kann nun mit diesem Formalismus im Rahmen bekannter mathematischer Zusammenhänge untersucht werden.

1.2 Transversale Moden - Kopplungsinstabilität mit Rückkopplungssystem

Nach der Aufdeckung des Instabilitätsmechanismus wurde ähnlich wie bei anderen Instabilitäten versucht, diesen Effekt durch ein Rückkopplungssystem zu kompensieren.

Hierzu eine knappe Erläuterung:

Mit einem Rückkopplungssystem werden die Schwingungssignale des Strahls mit einem Monitor (pick-up) erfaßt, verstärkt und mit geeigneter Phasendrehung einem Kicker zugeführt, der auf den Strahl zurückwirkt, so daß die anfängliche Schwingung gedämpft wird (closed loop). Da Instabilitätsmechanismen im Prinzip ebenfalls einen "closed loop" darstellen, liegt die Idee nahe, auch für die Modenkopplung einen "kompensierenden closed loop" zu erfinden. Erste theoretische Untersuchungen [28] [29] eines transversalen Dipol-Rückkopplungssystems ergaben recht optimistische Voraussagen für die Erhöhung des Schwellenstroms.

Diese Wirkungen des Rückkopplungssystems wurden jedoch nicht in Computersimulationen bestätigt [30]. Die Simulationen ergaben vielmehr, daß ein Feedback - loop nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen stabilisiert, oft aber den Strahl destabilisiert.

Um die Wirksamkeit eines Rückkopplungssystems in der Realität beurteilen zu können, wurde ein Experiment am Speicherring PEP durchgeführt [31]. Dieses Experiment bestätigte zum einen die optimistischen Resultate, lieferte unter anderem aber auch Ergebnisse, die im Widerspruch zu den theoretischen Untersuchungen stehen.

Wesentlich ist, daß dieses Experiment aus technischen Gründen nur für Maschinenparameter durchgeführt werden konnte, die teilweise untypisch für einen großen Elektron - Positron - Speicherring sind. Das Experiment mußte für einen kleinen Synchrotrontune vorgenommen werden, und es ist, wie sich in dieser Arbeit zeigen wird, falsch vom positiven Ausgang dieses Experiments auf die Gültigkeit der Ergebnisse bei einem wesentlich größeren Synchrotrontune zu schließen.

Der in dieser Arbeit entwickelte und bereits kurz erläuterte Formalismus gestattet, die theoretischen Probleme der Lokalisierung und die Wirkungsweise von Rückkopplungssystemen unter einem einheitlichen theoretischen Aspekt zu untersuchen.

1.3 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 Es wird eine kurze Einführung gegeben und anhand eines einfachen Modells der Instabilitätsmechanismus der Modenkopplung erläutert.

Kapitel 3 Es wird die für den Sacherer Formalismus entscheidende Vlasov - Gleichung eingeführt. Daran anschließend wird der Transfermatrizenformalismus hergeleitet und die für den Instabilitätsmechanismus entscheidenden Eigenschaften der Transfermatrizen bewiesen. Umfangreiche Untersuchungen der Moden-Kopplungsinstabilität im Rahmen dieses Formalismus schließen diesen Abschnitt ab.

Kapitel 4 Anhand eines einfachen Modells werden die Idee und die Problematik des Dipol - Rückkopplungssystems verdeutlicht. Daran schließt sich eine formale Untersuchung an, die mit der Herleitung der Transfermatrix beginnt und mit der analytischen Untersuchung eines einfachen Modellbeschleunigers endet. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels geht dann auf numerische Untersuchungen insbesondere der Parameterabhängigkeit der Wirkung des Rückkopplungssystems ein.

Kapitel 5 Es werden die wesentlichen Ergebnisse zusammengefaßt.

Anhang Die mit den Untersuchungen verbundenen umfangreichen mathematischen Umformungen sind hier dargestellt.

Kapitel 2

Beschreibung des Instabilitätsmechanismus der Modenkopplung

Im folgenden soll anhand eines einfachen Modells der Instabilitätsmechanismus der Moden - Kopplung erläutert werden. Mit Hilfe dieses einfachen Modells erhält man die Abhängigkeit der Instabilitätsschwelle von wichtigen Maschinenparametern.

Die in einem Beschleuniger umlaufenden Teilchen stellen einen Wechselstrom dar, da die Teilchen in allen drei Raumrichtungen Schwingungen ausführen. Dieser Wechselstrom erzeugt in der metallischen Umgebung, wie Vakuumkammer, Monitore, Faltenbälge, Hohlraumresonatoren etc, elektromagnetische Felder, die wiederum auf den Strahl zurückwirken.

Diese Rückwirkung kann unter Umständen dazu führen, daß die Teilchen zu einer kollektiven Schwingung angeregt werden, deren Schwingungsamplitude so weit anwachsen kann, daß die Teilchen gegen die Vakuumkammerwand stoßen und damit verloren gehen.

Für große Speicherringe stellt die durch Wechselwirkung zwischen Strahl und Umgebung verursachte transversale Moden-Kopplungsinstabilität häufig eine entscheidende Begrenzung des speicherbaren Stroms dar.

Diese Einzelbunchinstabilität kommt im wesentlichen durch die Wechselwirkung des Strahls mit resonatorähnlichen Objekten, hauptsächlich den Hochfrequenzresonatoren, zustande.

Die Felder, die der Bunch während der Passage durch einen Resonator anregt, können in zwei Gruppen aufgeteilt werden:

1. kurzlebige, die nur während der Bunchpassage vorhanden sind,
2. langlebige, die auch noch nach der Passage vorhanden sind und deren Lebensdauer auch größer als die Umlaufzeit sein können.

Die langlebigen Felder können nicht für die Moden - Kopplungsinstabilität verantwortlich sein, da sie auf mehrere Bunche zurückwirken und somit die Instabilitätsschwelle von der Intensität mehrerer Bunche abhängig wäre und nicht, wie experimentell bestätigt, von der Intensität eines Bunches unabhängig von der Anwesenheit anderer Bunche [5].

Die kurzlebigen Felder sowie der Bunchstrom werden im Frequenzbereich durch breitbandige Funktionen (Bandbreite einige GHz) beschrieben und deren Zusammenhang demzufolge durch eine breitbandige Impedanz angegeben [3].

Anteile der angeregten Felder besitzen so große Frequenzen bzw. kleine Wellenlängen, daß sie in der Lage sind, interne Schwingungen des Bunches anzuregen.

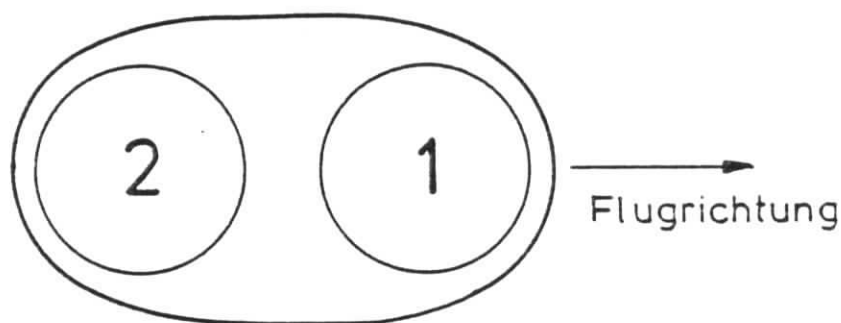


Abbildung 2.1: Das Zwei - Teilchen Modell beschreibt den Bunch durch zwei Makro - Teilchen. Da sich die Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, kann aufgrund der Kausalität nur das vorausfliegende Teilchen, hier Teilchen 1, das nachfolgende Teilchen beeinflussen.

Ein Modell, das die Wechselwirkung der Felder mit dem Bunch beschreiben soll, muß Schwingungen innerhalb des Bunches beschreiben können. Das einfachste Modell, das dazu in der Lage ist, ist das Zwei - Teilchen - Modell.

Dieses Modell wurde zuerst von R.D. Kohaupt [32] zur Erläuterung des Instabilitätsmechanismus vorgeschlagen.

Das Modell beschreibt den Bunch durch zwei Makro - Teilchen, die jeweils die Hälfte der Gesamtladung des Bunches tragen (siehe Abbildung (2.1)). Da die beiden Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit fliegen, erfährt aufgrund der Kausalität nur Teilchen 2 eine transversale Kraft durch das vorausfliegende Teilchen 1.

Teilchen 1 erzeugt transversale Felder, die proportional zur eigenen Auslenkung sind.

Die Energie die Teilchen 1 verliert, um die Felder aufzubauen, wird in den Hochfrequenzresonatoren wieder zugeführt.

Die transversalen Felder lenken Teilchen 2 ab.

Insgesamt ist somit eine Anregung des Teilchens 2 durch Teilchen 1 ohne Energieverlust möglich.

Ist die Chromatizität des Speicherrings null, dann besitzen die Teilchen die gleiche transversale Schwingungsfrequenz, d.h. Teilchen 2 wird resonanzartig angeregt.

Damit erfährt Teilchen 2 einen Amplitudenzuwachs, der linear mit der Zeit wächst.

Wesentlich ist nun, daß die beiden Teilchen Synchrotronoscillierungen ausführen. Abbildung (2.2) entnimmt man, daß während der ersten Hälfte der Synchrotronperiode Teilchen 1 führt und Teilchen 2 angeregt wird und während der zweiten Hälfte die Verhältnisse sich genau umkehren.

Somit regt jedes Teilchen das andere über den Zeitraum einer halben Synchrotronperiode an, und beide Teilchen erfahren währenddessen einen Amplitudenzuwachs α .

Dieser Amplitudenzuwachs ist

1. proportional zur Kraft pro Masse des Makro - Teilchens, die wiederum für ultrarelativistische Teilchen proportional zur Energie ist,
2. proportional zur Zeit des Wirkens der Kraft $T_s/2$ und
3. proportional zur Impedanz Z und dem Bunchstrom I ,

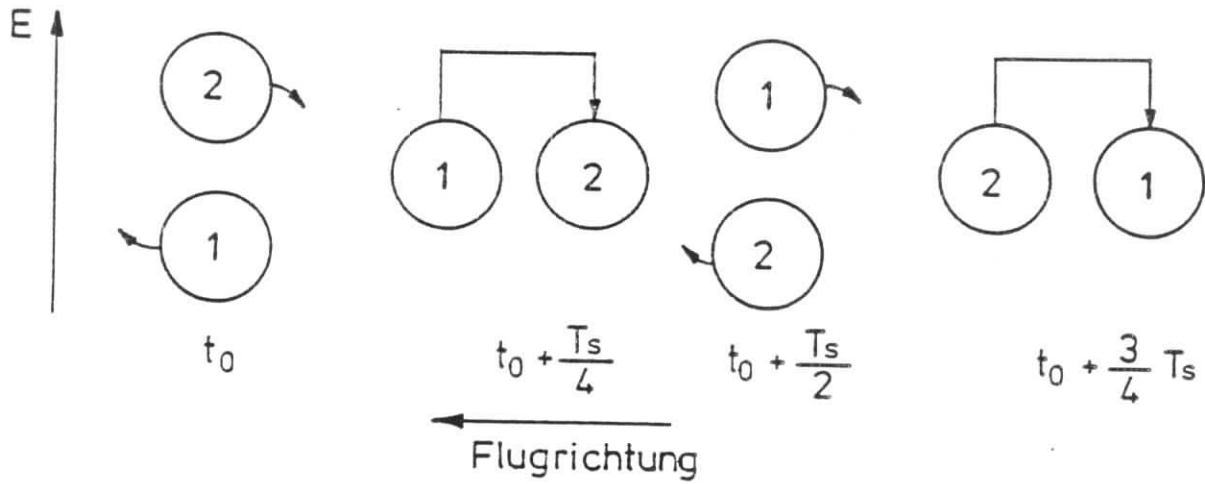


Abbildung 2.2: Aufgrund der Synchrotronschwingungen findet ein periodischer Wechsel der longitudinalen Position der Teilchen statt, der dazu führt, daß jeweils während einer halben Synchrotronschwingungsperiode das eine Teilchen führt und das andere Teilchen eine transversale Kraft erfährt und während der anderen Hälfte sich die Verhältnisse genau umkehren.

also

$$\alpha \sim \frac{Z \cdot I T_s}{E \cdot 2}$$

Überschreitet der Amplitudenzuwachs einen Schwellenwert α_{Sch} , dann wächst die Schwingungsamplitude der Teilchen beliebig an, was zum Strahlverlust und damit zu einer Instabilität führt.

Für den Schwellenstrom gilt demnach

$$I_{Sch} \sim \frac{E \cdot \nu_s}{Z} ; (\nu_s \sim \frac{1}{T_s})$$

Diese Parameterabhängigkeit des Schwellenstroms bedeutet:

1. die Instabilität ist besonders bei kleinen Energien E gefährlich, also bei Injektion
2. ein großer Synchrotrontune ν_s , trägt zur Stabilisierung des Strahls bei
3. die Instabilität ist besonders für große Speicherringe gefährlich, da deren Impedanz Z meist sehr groß ist.

Mit Hilfe dieses Modells kann man den Schwellenstrom berechnen, allerdings ist die Übereinstimmung mit gemessenen Werten meist schlecht, da dem Modell einige stark vereinfachende Annahmen zugrunde liegen, wie die Beschreibung von $10^{10} - 10^{11}$ Teilchen durch 2 Teilchen, sowie die Annahme, daß die Kraft zwischen den Teilchen stets konstant ist und nicht vom Abstand zwischen den Teilchen abhängt.

Diese Mängel können beseitigt werden, indem man mehrere bis zu einigen tausend Makro-Teilchen einführt, realistische Kräfte benutzt und die Bewegung der Teilchen mit Hilfe des Computers simuliert. Dabei geht jedoch die Einfachheit und Anschaulichkeit des Modells verloren.

Eine vollständige theoretische Beschreibung der Vorgänge ist nur möglich innerhalb der Dynamik kontinuierlicher Dichteverteilungen, wie sie in der Vlasov - Theorie verwirklicht ist. Die Ersetzung eines Vielteilchensystems durch eine kontinuierliche Dichte ist wegen der hohen Partikelzahlen weitestgehend gerechtfertigt.

Kapitel 3

Transversale Moden - Kopplungsinstabilität und kohärente Synchro - Betatron - Resonanzen

3.1 Die Vlasov - Gleichung

Die hier angegebene Betrachtung stellt die Vlasov - Gleichung als spezielle Form einer Kontinuitätsgleichung dar, welche die Teilchenzahlerhaltung sichert.

Die Teilchen bewegen sich im Beschleuniger in externen elektromagnetischen Feldern, einerseits den Magnetfeldern von z.B. Dipolen, Quadrupolen und andererseits den elektromagnetischen Wechselfeldern in den Hohlraumresonatoren. Diese Felder führen zu Betatron- und Synchrotronschwingungen.

Darüberhinaus erfahren die Teilchen Kräfte durch die Felder, die durch den Strahlstrom in der metallischen Umgebung erzeugt werden. Jedes Teilchen sieht dabei das selbst erzeugte Feld und die von allen anderen Teilchen erzeugten Felder. Da aber die Zahl der Teilchen sehr groß ist, kann die Selbstwechselwirkung vernachlässigt werden. Damit bewegt sich jedes Teilchen nur noch in externen elektromagnetischen Feldern.

Außerdem kann man annehmen, daß die Teilchen statistisch unabhängig sind, da Korrelationseffekte - z.B. durch Stöße - klein sind im Vergleich zu den Effekten, die Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind. Somit können die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Teilchen durch Hamiltonfunktionen beschrieben werden, die nur von den Koordinaten eines Teilchens abhängen:

$$H(\vec{q}_i, \vec{p}_i) \tag{3.1}$$

mit

$$\dot{\vec{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \quad ; \quad \dot{\vec{p}}_i = - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} .$$

Man definiert die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\vec{q}, \vec{p})$, die ausdrückt, wie groß die Wahrscheinlichkeit W ist, ein Teilchen mit Impuls \vec{p} am Ort \vec{q} zur Zeit t zu finden, wenn man f mit einem kleinen Volumenelement $d^3\vec{q}d^3\vec{p}$ multipliziert:

$$W(\vec{q}, \vec{p}, t) = f(\vec{q}, \vec{p}, t) d^3\vec{q}d^3\vec{p} . \tag{3.2}$$

Damit kann die Zahl der Teilchen innerhalb eines Phasenraumvolumens V berechnet werden

$$N(t) = N_0 \int_V d^3\vec{q}d^3\vec{p} f(\vec{q}, \vec{p}, t) , \tag{3.3}$$

wobei N_0 die Gesamtzahl der Teilchen angibt.

Die Zahl der Teilchen innerhalb des Volumens kann sich nur dadurch ändern, daß Teilchen durch die Oberfläche ∂V des Volumens in das Volumen hinein- oder aus dem Volumen herausfliegen.

Da

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{q}} \\ \dot{\vec{p}} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

die Geschwindigkeit ist, mit der sich die Teilchen im Phasenraum bewegen, gilt für den Fluß durch die Oberfläche

$$\Phi(t) = -N_0 \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{v} f(\vec{q}, \vec{p}, t) . \quad (3.5)$$

Die zeitliche Änderung der Teilchenzahl in V ist also durch

$$\frac{dN(t)}{dt} = N_0 \int_V d^3\vec{q} d^3\vec{p} \frac{\partial f(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial t} = -N_0 \int_{\partial V} d\vec{f} \vec{v} \cdot f(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad (3.6)$$

gegeben. Mit Hilfe des Gausschen Satzes läßt sich (3.6) zu

$$\int_V d^3\vec{q} d^3\vec{p} \frac{\partial f(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot f(\vec{q}, \vec{p}, t)) = 0 \quad (3.7)$$

umformen und da das Volumen V beliebig ist, erhält man die oben erwähnte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot f) = 0 . \quad (3.8)$$

Aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial \dot{\vec{q}}}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial \dot{\vec{p}}}{\partial \vec{q}} = 0$$

und damit

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot f) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = 0 . \quad (3.9)$$

Berechnet man das Skalarprodukt in (3.9), dann erhält man schließlich die Vlasov - Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} = 0 . \quad (3.10)$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Einzelteilchenwahrscheinlichkeitsdichte eines Systems von statistisch unabhängigen Teilchen in externen elektromagnetischen Feldern.

3.2 Die Vlasov - Gleichung zur Untersuchung von transversalen Instabilitäten

Um die Vlasov-Gleichung für ein Teilchensystem angeben zu können, ist es nach Gleichung (3.10) notwendig, die Bewegungsgleichungen (3.1) zu kennen.

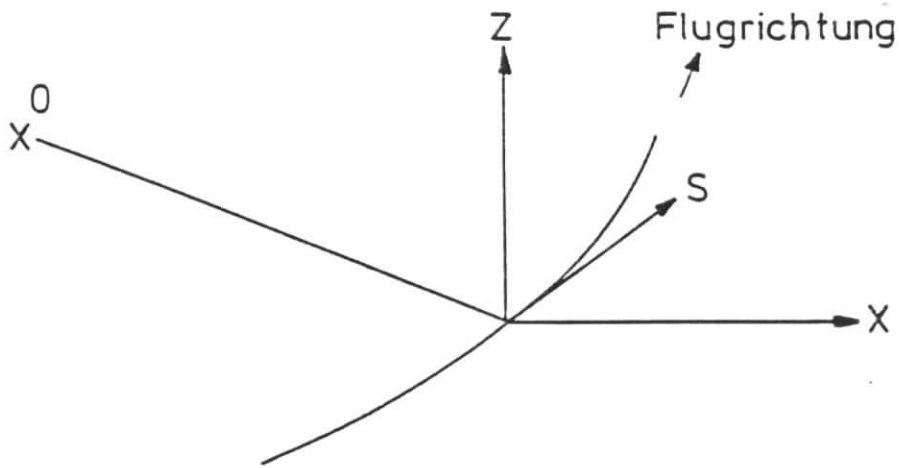


Abbildung 3.1: Die Bewegung eines Teilchens in einem Beschleuniger wird in einem sich mit dem Teilchen bewegenden Koordinatensystem beschrieben. Die transversalen Koordinaten lauten x und z und die Koordinate in Flug- bzw. longitudinaler Richtung wird oft mit s bezeichnet. Statt der Variablen s wird der Winkel θ eingeführt: $\theta = \frac{s}{R}$, wobei R der mittlere Maschinenradius ist, der mit dem Umfang U der Maschine durch $U = 2\pi R$ verbunden ist.

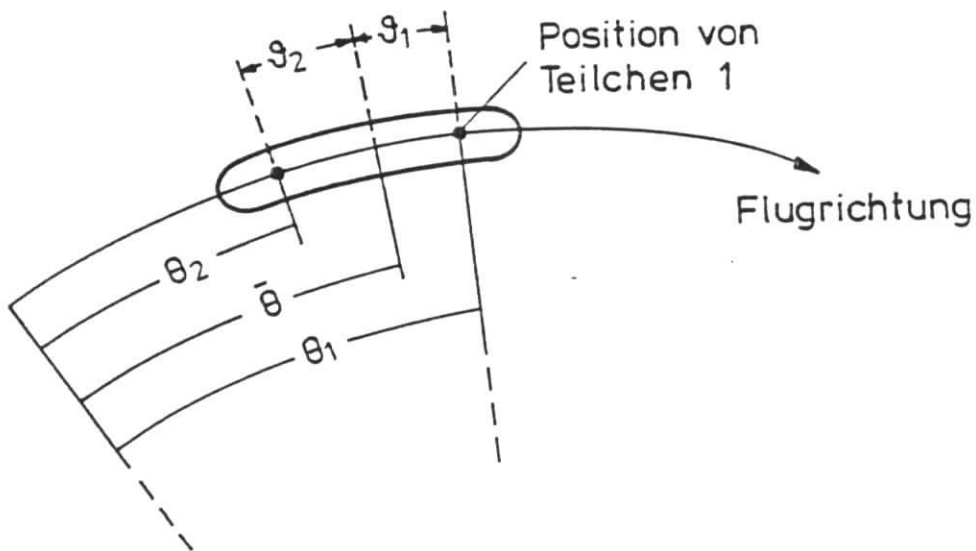


Abbildung 3.2: In longitudinaler Richtung wird die Position der Teilchen durch zwei Variable angegeben: 1. der Position eines Referenzteilchens $\bar{\theta}$ und 2. der Differenz ϑ der Position θ des Teilchens bezüglich des Referenzteilchens $\vartheta = \theta - \bar{\theta}$.

Die im folgenden benutzten Koordinaten sind in den Abbildungen 3.1 und 3.2 verdeutlicht. Die Bewegungsgleichungen für die Flugrichtung oder longitudinale Richtung lauten:

$$\frac{d\vartheta}{d\theta} = -\alpha\epsilon$$

und

$$\frac{d\epsilon}{d\theta} = -\frac{\nu_s^2}{\alpha}\vartheta, \quad (3.11)$$

wobei

$\epsilon = \frac{\Delta E}{E_0}$: relative Energieabweichung bezogen auf das synchrone Teilchen

ν_s : Synchrotrontune

α : momentum compaction factor

bezeichnet.

Dies sind die bekannten Synchrotronbewegungsgleichungen [25]. Die Koordinate θ hat die Position der Zeit t übernommen (vgl. [33]).

In transversaler Richtung ist die Bewegungsgleichung durch die Differentialgleichung der linearen Betatronschiwingung gegeben [25]:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = \frac{\mathcal{F}(s)}{E_0}. \quad (3.12)$$

Der Zusatzterm $\frac{\mathcal{F}(s)}{E_0}$ beschreibt die Wechselwirkung der Teilchen mit der metallischen Umgebung.

Es erweist sich als günstig, statt obiger Koordinaten Wirkungs- und Winkelvariable einzuführen (vgl. [33]).

Diese sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \sqrt{2I} \cos \psi \\ \epsilon &= \frac{\nu_s}{\alpha} \sqrt{2I} \sin \psi \end{aligned} \quad (3.13)$$

bzw.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2J\beta} \cos \varphi \\ x' &= -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} R \left(\sin \varphi - \frac{\beta'}{2} \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dabei bezeichnet β die Betafunktion und

$$' = \frac{d}{d\theta}$$

Die Bewegungsgleichungen (3.11) (3.12) in diesen Variablen lauten:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \psi' = \nu_s \\ \text{b)} \quad & I' = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad \varphi' &= \frac{R}{\beta} - \frac{R\mathcal{F}}{E_0} \sqrt{\frac{3}{2J}} \cos \varphi + \xi \frac{\Delta E}{E_0} \\
\text{b)} \quad J' &= -R \sqrt{2J\beta} \frac{\mathcal{F}}{E_0} \sin \varphi .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Der Term $\xi \frac{\Delta E}{E_0}$ berücksichtigt die Änderung der Betatronphase φ für von null verschiedener Chromatizität ξ .

Gibt man die Vlasov-Gleichung in den Wirkungs- und Winkelvariablen an, dann gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \psi' \frac{\partial}{\partial \psi} + I' \frac{\partial}{\partial I} + \varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi} + J' \frac{\partial}{\partial J} \right) f(\theta, \psi, I, \varphi, J) = 0 . \tag{3.17}$$

In dieser allgemeinen Form ist die Vlasov-Gleichung praktisch nicht zu lösen, da es sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung handelt. Der Grund für die Nichtlinearität ist die Lorentzkraft \mathcal{F} , die linear von den durch die Teilchen erzeugten elektromagnetischen Feldern abhängt. Diese Felder sind durch Strom- und Ladungsdichte der Teilchen bestimmt, so daß die Kraft ein lineares Funktional der Ladungsdichte und damit der Teilchenverteilung f ist: $\mathcal{F}[f]$. Der Term

$$J' \frac{\partial f}{\partial J}$$

ist daher quadratisch in f .

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, untersucht man die Stabilität einer stationären Verteilung f_{st} gegenüber einer kleinen Störung u :

$$f(\theta, \psi, I, \varphi, J) = f_{st} + u(\theta, \psi, I, \varphi, J) . \tag{3.18}$$

Eine stationäre Verteilung zeichnet sich dadurch aus, daß sie erstens nicht von θ abhängt und zweitens nicht zu einer transversalen Kraft führt:

$$\frac{\partial f_{st}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f_{st}] = 0 . \tag{3.19}$$

Die stationäre Verteilung erfüllt also folgende Vlasov-Gleichung

$$\psi' \frac{\partial f_{st}}{\partial \psi} + \varphi' \frac{\partial f_{st}}{\partial \varphi} = 0 \tag{3.20}$$

und ist daher nur eine Funktion der beiden Wirkungsvariablen I und J :

$$f_{st} = F(I) \cdot G(J) . \tag{3.21}$$

f_{st} wurde als Produkt zweier Verteilungen geschrieben, da longitudinale und transversale Bewegung nicht korreliert sind.

Die beiden Funktionen $F(I)$ und $G(J)$ werden wie folgt normiert

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty dI F(I) &= N e \\
\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dJ G(J) &= 1 .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Die stationäre Verteilung kann nicht mit Hilfe der Vlasov-Gleichung bestimmt werden, sondern ist bei Protonen durch die Vorgeschichte (Injektion etc.) und bei Elektronen durch die fluktuierende Abstrahlung von Synchrotronstrahlung bestimmt.

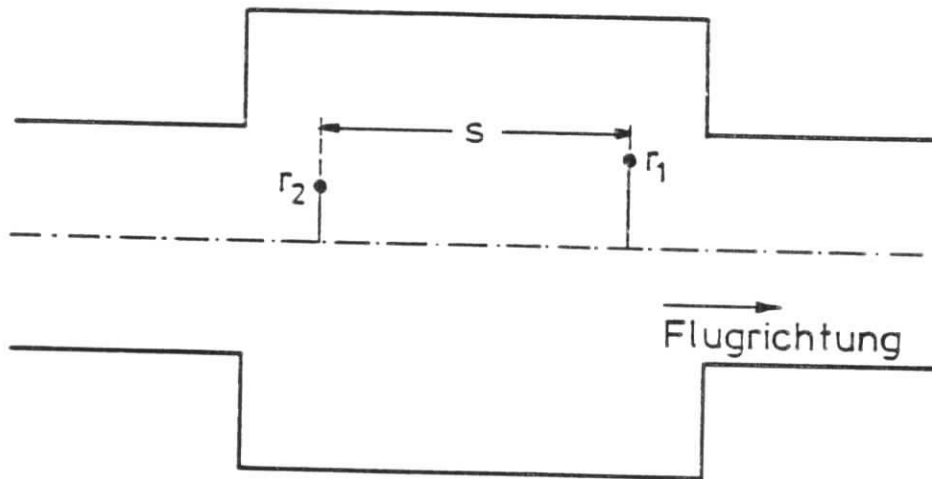


Abbildung 3.3: Zwei Teilchen fliegen durch ein zu der strichpunktierten Linie rotationssymmetrisches Objekt

Für Elektronen (und Positronen) sind diese Verteilungen in sehr guter Näherung Gauss-Verteilungen [25] [34].

Setzt man die Verteilung (3.18) in die Vlasov-Gleichung (3.17) ein und nimmt an, daß die Störung u so klein ist, daß quadratische Terme in u vernachlässigt werden können, so folgt die linearisierte Form der Vlasov-Gleichung

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + v_s \frac{\partial}{\partial \psi} + \left(\frac{R}{\beta} + \xi \frac{\Delta E}{E_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} u(\theta, \psi, I, \varphi, J) = F(I) \frac{dG(J)}{dJ} R \sqrt{2J\beta} \frac{\mathcal{F}[u]}{E_0} \sin \varphi \quad (3.23)$$

Der nächste Schritt ist jetzt die Bestimmung der Kraft $\mathcal{F}[u]$.

3.3 Die kollektive transversale Kraft

Die Kräfte, die durch die Wechselwirkung der Teilchen mit der metallischen Umgebung verursacht werden, können im allgemeinen nicht mehr analytisch angegeben werden, sondern nur noch mit dem Computer berechnet werden.

Für ultrarelativistische Teilchen und unter der berechtigten Annahme, daß Synchrotron- und Betatronwellenlänge groß sind verglichen mit der Länge eines einzelnen Objektes, kann man etwas über die Struktur der Kräfte aussagen.

Dazu betrachtet man zwei Teilchen, die durch ein rotationssymmetrisches Objekt fliegen (siehe Abbildung 3.3).

Es soll die auf Teilchen 2 wirkende Kraft angegeben werden. Diese hängt sowohl von den Koordinaten des ersten Teilchens wie des zweiten Teilchens ab:

$$\vec{F}_2(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2, s_1, s_2, t) .$$

Da die Objektlänge L klein gegen Betatron- und Synchrotronwellenlänge ist und die auftretenden Kräfte klein sind, so daß die Koordinaten der beiden Teilchen nur sehr wenig geändert werden, kann man folgende mittlere Kraft einführen

$$\vec{F}_2(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2, s = s_1 - s_2) = \frac{1}{L} \int_{\text{Passage}} d(c \cdot t) \vec{F}_2(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2, s, s_2 = ct - s) , \quad (3.24)$$

die während der Passage des Objektes im Mittel auf Teilchen 2 wirkt. Diese mittlere Kraft hängt nur noch vom Abstand s der beiden Teilchen und nicht mehr von der Zeit t ab.
Die Größe

$$\vec{W}(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2, s = s_1 - s_2) = \frac{1}{L} \int d(c \cdot t) \vec{F}_2(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2, s, s_2 = ct - s) \quad (3.25)$$

nennt man Wake - Potential [35]. Das Wake - Potential ist proportional zur Impulsänderung des zweiten Teilchens.

Die Abhängigkeit des Wake - Potentials von den Koordinaten $r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2$ kann für ultrarelativistische Teilchen explizit angegeben werden [3][36]:

$$\begin{aligned} \vec{W}(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2, s = s_1 - s_2) = & \sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{r_1}{a}\right)^m \left(\frac{r_2}{a}\right)^{m-1} w_m(s) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{e}_r \\ & - m \left(\frac{r_1}{a}\right)^m \left(\frac{r_2}{a}\right)^{m-1} w_m(s) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{e}_\varphi \\ & - \left(\frac{r_1}{a}\right)^m \left(\frac{r_2}{a}\right)^m w'_m(s) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{e}_s . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da die Ablagen r_1, r_2 im allgemeinen klein sind verglichen mit dem Radius des Strahlrohrs a , ist das Potential in sehr guter Näherung durch wenige Terme der Summe beschreibbar. Drückt man die Zylinderkoordinaten durch kartesische Koordinaten aus und beschränkt sich auf die longitudinale (s) und horizontale Richtung (x), dann gilt für kleine Auslenkungen x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad W_s(x_1, x_2, s) &= w'_0(s) + \frac{x_1 x_2}{a a} w'_1(s) \\ \text{und} \\ \text{b) } \quad W_x(x_1, x_2, s) &= \frac{x_1}{a} w_1(s) . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Damit erfährt Teilchen 2

1. eine transversale Impulsänderung, die vom Abstand der beiden Teilchen abhängt und proportional zur Auslenkung des ersten Teilchens ist;
2. eine Energieänderung (Impulsänderung in longitudinaler Richtung), die a) nur vom Abstand der beiden Teilchen abhängt, und b) einen Anteil enthält, der darüberhinaus noch proportional zur Auslenkung der beiden Teilchen ist und mit der transversalen Impulsänderung über die Funktion $w_1(s)$ verbunden ist.

Der Zusammenhang zwischen transversalem und longitudinalem Wake - Potential ist durch die Panofsky-Wenzel Relation bedingt [37][3][36].

Gleichung (3.27b) wird nun für den Fall verallgemeinert, daß sich Teilchen 2 innerhalb eines Bunches befindet.

Dazu muß man die mittlere Auslenkung der vor Teilchen 2 mit einem gewissen Abstand fliegenden Teilchen kennen. Die Teilchenzahldichte im Bunch am Ort $\bar{\theta}, \vartheta_1$ (zur Bedeutung der Koordinaten siehe Abb. 3.2) ist durch

$$f_x(\bar{\theta}, \vartheta_1, J_1, \varphi_1) = \int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_0^\infty dI_1 \delta(\vartheta_1 - \sqrt{2I_1} \cos \psi_1) f(\bar{\theta}, \psi_1, I_1, \varphi_1, J_1) \quad (3.28)$$

gegeben.

Die mittlere Auslenkung bzw. das Dipolmoment an der Stelle $\bar{\theta}, \vartheta_1$ läßt sich daher wie folgt schreiben

$$D(\bar{\theta}, \vartheta_1) = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\infty dJ_1 f_x(\bar{\theta}, \vartheta_1, \varphi_1, J_1) \frac{x(\varphi_1, J_1)}{\sqrt{\beta}} \quad (3.29)$$

Gemäß Gleichung (3.27b) erfährt Teilchen 2 durch die Teilchen an der Stelle $\bar{\theta}, \vartheta_1$ die Kraft

$$F_{\vartheta_1}(\bar{\theta}, \vartheta_2) = \frac{\sqrt{\beta}e}{R \cdot \Delta\theta} D(\bar{\theta}, \vartheta_1) \cdot w_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) , \quad (3.30)$$

wobei die Länge des Objektes $\Delta\theta$ in Einheiten des mittleren Radius R und das Wake - Potential in Einheiten der Elementarladung e angegeben ist.

Die insgesamt auf Teilchen 2 ausgeübte Kraft ist durch die Summe aller Kräfte (3.30) gegeben, die durch die vor Teilchen 2 fliegenden Teilchen hervorgerufen wird:

$$\mathcal{F}(\bar{\theta}, \vartheta_2) = \int d\vartheta_1 \frac{\sqrt{\beta}e}{R \cdot \Delta\theta} D(\bar{\theta}, \vartheta_1) \cdot w_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) . \quad (3.31)$$

Die Abhängigkeit der Kraft vom jeweiligen Objekt ist damit nur durch die Funktionen $w_1(\Delta\vartheta)$ charakterisiert.

Mit Hilfe eines von T. Weiland entwickelten Computer Programms (TBCI) [27] können folgende im Zusammenhang mit $w_1(\Delta\vartheta)$ stehende Größen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad k_\perp(\sigma) &= \frac{\int ds \int ds' \lambda(s)\lambda(s') w_1(s - s')}{(\int ds \lambda(s))^2} \\ \text{b)} \quad k_{\parallel\perp}(\sigma) &= \frac{\int ds \int ds' \lambda(s)\lambda(s') \frac{\partial w_1(s - s')}{\partial s}}{(\int ds \lambda(s))^2} , \end{aligned} \quad (3.32)$$

wobei $\lambda(s)$ eine gaussverteilte Linienladungsdichte mit Standardbreite σ ist.

Vergleicht man diese Gleichungen mit (3.27), dann erkennt man, daß $k_\perp(\sigma)$ proportional zur transversalen Impulsänderung des ganzen Bunches pro Elementarladung und Ablage und $k_{\parallel\perp}$ proportional zur Energieänderung des ganzen Bunches ist, wie sie unter 2b) beschrieben wurde.

Ist die Abhängigkeit dieser beiden Parameter von der Bunchlänge σ für jedes Objekt bekannt, so läßt sich die Wechselwirkung des Bunches mit den Objekten angeben, wie in Abschnitt 3.6 noch genauer ausgeführt wird.

Damit ist die Kraft (3.31), die ein Teilchen an der Stelle $\bar{\theta}, \vartheta_2$ im Bunch im Mittel innerhalb des Objektes erfährt, bekannt.

Allerdings ändert sich die Kraft im allgemeinen von Objekt zu Objekt. Dieser Änderung trägt man Rechnung, indem man das für das jeweilige Objekt charakteristische Wake - Potential $w_1(\Delta\vartheta)$ bzw. die charakteristischen Parameter k_\perp bzw. $k_{\parallel\perp}$ zur Berechnung der Kraft benutzt.

Für den Fall von N Objekten (siehe Abb. 3.4) erhält man

$$\mathcal{F}(\theta, \vartheta_2) = \int_{\text{für } \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j} d\vartheta_1 \frac{\sqrt{\beta}e}{R \cdot \Delta\theta} D(\theta, \vartheta_1) \cdot w_1^j(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (3.33)$$

Dabei ist

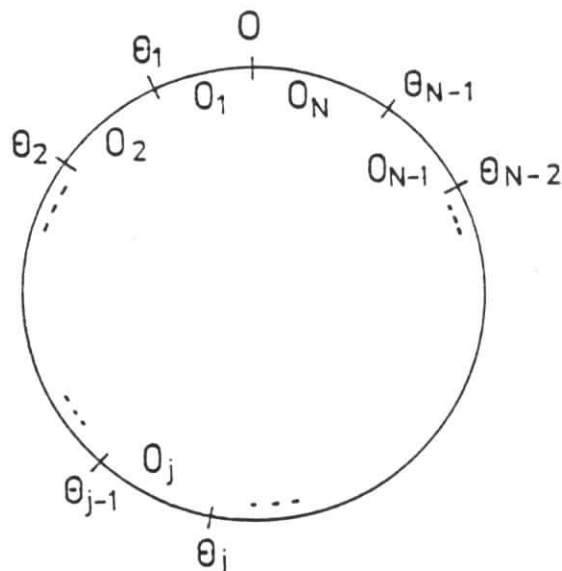


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung eines Beschleunigers, der aus N Objekten besteht. Jedes Objekt O_j wird durch zwei Winkel θ_{j-1} und θ_j begrenzt und durch sein charakteristisches Wake Potential $w_1^j(\Delta\vartheta)$ beschrieben.

- $\Delta\theta_j$: Länge des j -ten Objektes,
- β_j : Betafunktion am j -ten Objekt und
- w_1^j : transversales Wake - Potential des j -ten Objektes.

Benutzt man die in Gleichung (3.18) eingeführte Verteilung zur Berechnung des Dipolmoments (3.29) und beachtet, daß die stationäre Verteilung kein Dipolmoment besitzt, dann erhält man

$$D(\theta, \vartheta_1) = \int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_0^\infty dI_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\infty dJ_1 \delta(\vartheta_1 - \sqrt{2I_1} \cos \psi_1) \frac{x(\varphi_1, J_1)}{\sqrt{\beta}} u(\theta, \psi_1, I_1, \varphi_1, J_1) \quad (3.34)$$

Wie erwartet ist die Kraft \mathcal{F} (3.33) ein lineares Funktional der Verteilung u .

3.4 Lösung der linearisierten Vlasov-Gleichung : Transfermatrizen Formalismus

Der erste Schritt zur Lösung der linearisierten Vlasov-Gleichung besteht darin, die partielle Integrodifferentialgleichung (3.23) mit der Kraft (3.33) in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu überführen.

Die dazu notwendigen mathematischen Umformungen sind Standardtechniken im Rahmen des Sacherer - Formalismus. Da außerdem die hier benutzte Herleitung denen in den Arbeiten [22] [24] ähnelt, werden hier nur das Ergebnis angegeben und die einzelnen Größen und Indizes kurz erläutert. Die Details der Herleitung findet man im Anhang A1.

$$\left\{ \frac{d}{d\theta} + in'\nu_s + im' \frac{R}{\beta} \right\} a_{m'k'}^{n'}(\theta) = -K \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_{mnk}^{m'n'k'(j)} a_{mk}^n(\theta) \quad (3.35)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad M_{mnk}^{m'n'k'(j)} &= m' \beta(\theta) i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^j(p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p - m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) \\
 \text{(b)} \quad I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) &= C \int_0^{\infty} dI f_k^{|n|}(I) F(I) J_n(\sqrt{2I}(p - m \frac{\xi}{\alpha})) \\
 \text{(c)} \quad K &= \frac{\omega_0}{2E/\epsilon C}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen ist folgende:

- a_{mk}^n : Entwicklungskoeffizienten des Schwingungszustandes des Bunches; dabei bedeutet
- m, m' : Bezeichnung des Bewegungszustandes in transversaler Richtung; da nur Dipolschwingungen betrachtet werden, nehmen diese Indizes nur die Werte ± 1 an
- n, n' : Bezeichnung des Bewegungszustandes in longitudinaler Richtung; da keine Einschränkungen auf eine bestimmte Art von Multipolschwingung vorliegen, können diese Indizes alle Werte zwischen $\pm\infty$ annehmen; die longitudinalen Schwingungszustände werden auch azimuthal Moden genannt
- k, k' : weitere Kennzeichnung der azimuthalen Moden; zu jedem azimuthalen Modus gehören unendlich viele radiale Moden
- $M_{mnk}^{m'n'k'(j)}$: beschreiben die Wechselwirkung des Bunches mit dem Objekt j
- (j) : Kennzeichnung der für das j -te Objekt charakteristischen Größen, wie
- $Z^j(p)$: Impedanzfunktion des j -ten Objektes
Die Impedanz ist durch eine Fouriertransformation mit dem Wake - Potential des j -ten Objektes verbunden (siehe Gleichung (A.9))
- $\Delta\theta_j$: Länge des j -ten Objektes

Somit werden die einzelnen Schwingungszustände des Bunches durch drei Zahlen gekennzeichnet:

1. m Schwingungszustand in transversaler Richtung,
2. n azimuthaler Schwingungszustand und
3. k radialer Schwingungszustand.

Außerdem gelten folgende Bezeichnungen:

- ξ : Chromatizität
- α : momentum compaction factor
- ν_s : Synchrotrontune
- β : Betafunktion

- R : mittlerer Maschinenradius
 ω_0 : Umlauffrequenz
 E : Teilchenenergie
 C : willkürliche Konstante, deren Wert noch festgelegt wird

Der nächste Schritt zur Lösung der Vlasov-Gleichung besteht in der Integration des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen (3.35). Dabei treten zwei Schwierigkeiten auf:

1. Das System besteht aus unendlich vielen Differentialgleichungen.
2. Die Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k'}$ hängen von θ ab, da sowohl die Betafunktion als auch die Impedanz von θ abhängig ist.

Das erste Problem löst man, indem man sich auf eine endliche Anzahl von Schwingungszuständen beschränkt. Diese Einschränkung ist zulässig, da die meisten Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k'}$ verschwindend klein sind.

Es werden deshalb immer nur n azimutale Schwingungszustände mit jeweils $k(n)$ radialen Schwingungen betrachtet, so daß man ein System von endlich vielen Differentialgleichungen erhält.

Um dieses Gleichungssystem kompakter aufschreiben zu können, werden folgende Größen eingeführt:

1. Ein Vektor, der sämtliche azimutale und radiale Entwicklungskoeffizienten zusammenfaßt, die zu einem transversalen Schwingungszustand m gehören. Dieser Vektor besteht aus Vektoren, die jeweils die zu einem azimutalen Modus n gehörenden radialen Moden zusammenfassen, also

$$\vec{a}_m(\theta) = (\vec{a}_m^0, \vec{a}_m^1, \vec{a}_m^{-1}, \dots, \vec{a}_m^l, \vec{a}_m^{-l}, \dots, \vec{a}_m^{-n})^T \quad (3.37)$$

mit

$$\vec{a}_m^l = (a_{m0}^l, a_{m1}^l, \dots, a_{m2}^l, \dots, a_{mk}^l, \dots, a_{mk(l)}^l)$$

Dabei bezeichnet T das Transponierte .

2. Eine Matrix $M_m^{m'}$, die die Änderung des Vektors $\vec{a}_m(\theta)$ aufgrund der Wechselwirkung mit dem j -ten Objekt angibt. Diese Matrix besteht wiederum aus Blockmatrizen $M_{mn}^{m'n'}$, die Matrixelemente enthalten, die die radialen Moden der azimutalen Moden n und n' verbinden.

$$M_m^{m'} = (M_{mn}^{m'n'}) = \begin{pmatrix} M_{m0}^{m'0} & M_{m1}^{m'0} & M_{m-1}^{m'0} & \dots & M_{m-n}^{m'0} \\ M_{m0}^{m'1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ M_{m0}^{m'-n} & M_{m1}^{m'-n} & & \dots & M_{m-n}^{m'-n} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

mit

$$M_{mn}^{m'n'} = \begin{pmatrix} M_{mn0}^{m'n'0} & M_{mn1}^{m'n'0} & \dots & M_{mnk(n)}^{m'n'0} \\ M_{mn0}^{m'n'1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{mn0}^{m'n'k(n')} & \dots & \dots & M_{mnk(n)}^{m'n'k(n')} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

3. Eine Matrix, die nur Diagonalelemente besitzt

$$R_m(\theta) = -im \frac{R}{\beta} \mathbb{1} + B \quad (3.40)$$

mit

$$B = (-in\nu_s \mathbb{1}_{nn}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \dots & \dots \\ \mathcal{O} & \mathbb{1}_{11}(-i\nu_s) & \mathcal{O} \\ \vdots & & \mathbb{1}_{-1-1}(i\nu_s) & \vdots \\ \mathcal{O} & \dots & \dots & \mathbb{1}_{-n-n}(in\nu_s) \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

wobei $\mathbb{1}_{nn} = (\delta_{ij})$ eine Einheitsmatrix der Dimension $k(n) \cdot k(n)$ ist, d.h. die Dimension ist durch die Anzahl der zum azimuthalen Modus n gehörende radialen Moden gegeben.

Definiert man jetzt

$$\vec{a}(\theta) = \begin{pmatrix} \vec{a}_1(\theta) \\ \vec{a}_{-1}(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

sowie

$$\mathcal{A}(\theta) = \begin{pmatrix} R_1(\theta) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & R_{-1}(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_1^1(\theta) & M_{-1}^1(\theta) \\ M_1^{-1}(\theta) & M_{-1}^{-1}(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

dann kann man Gleichung (3.35) in folgender Form schreiben:

$$\frac{d\vec{a}(\theta)}{d\theta} = \mathcal{A}(\theta)\vec{a}(\theta). \quad (3.44)$$

Das zweite Problem löst man, indem man die Differentialgleichung (3.44) nicht allgemein löst, sondern die Lösung für einen Resonator angibt. Innerhalb eines Resonators ist die Betafunktion nahezu konstant und die Impedanz Z^j ändert sich nicht, da das Wake - Potential eines Resonators nicht von θ abhängt. Somit ist innerhalb eines Resonators die Matrix \mathcal{A} unabhängig von θ , und es gilt

$$\theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j] : \frac{d\vec{a}(\theta)}{d\theta} = \mathcal{A}_j \vec{a}(\theta). \quad (3.45)$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} \vec{a}(\theta_j) &= T_j \vec{a}(\theta_{j-1}) \\ \text{mit} \quad T_j &= e^{\mathcal{A}_j \Delta\theta_j}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Es kann also jedes Objekt j durch eine Transfermatrix T_j beschrieben werden. Die Exponentialmatrix in (3.46) wird mit einem bekannten Verfahren ausgewertet. Dazu bestimmt man die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren der Matrix \mathcal{A}_j . Es läßt sich dann folgende Ähnlichkeitstransformation anschreiben

$$\mathcal{A}_j = S_j D(\lambda_i) S_j^{-1} \quad (3.47)$$

mit der Diagonalmatrix

$$D(\lambda_i) = (\lambda_i \delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda_j & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Die Matrix S_j wird mit Hilfe der Eigenvektoren von \mathcal{A}_j konstruiert. Damit gilt nun

$$T_j = S_j D(e^{\lambda_i \Delta \theta_j}) S_j^{-1} \quad (3.48)$$

Die Transfermatrizen der Objekte j sind also durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen \mathcal{A}_j bestimmt.

Die Transfermatrix T des aus N Resonatoren bestehenden Speicherrings lautet

$$T = T_N \cdot \dots \cdot T_j \cdot \dots \cdot T_1 \quad (3.49)$$

Der Strahl ist stabil, wenn die Beträge aller Eigenwerte von T kleiner als eins sind:

$$\text{Stabilität} \quad \forall l : |\lambda_l| \leq 1 \quad (3.50)$$

In der Regel ist die Bestimmung der Eigenwerte von T nur numerisch möglich. Dazu wurde ein Computer Programm entwickelt, das bei Vorgabe der entsprechenden Parameter, wie Lage und Eigenschaften der Resonatoren, Betatron tune, Synchrotrontune etc. die Eigenwerte von T berechnet.

Für einige Spezialfälle können jedoch die Eigenwerte unter gewissen Annahmen analytisch bestimmt werden.

Bevor auf diese numerischen bzw. analytischen Rechnungen eingegangen wird, soll im folgenden Abschnitt eine wichtige Eigenschaft der Transfermatrizen T_j für verschwindende Chromatizität bewiesen werden, die eng mit dem Instabilitätsmechanismus der Moden - Kopplung verknüpft ist.

3.5 Eigenschaften der Transfermatrizen - Instabilitätsmechanismus

3.5.1 Eigenschaften der Matrixelemente

Die Eigenschaften der Matrixelemente beruhen im wesentlichen auf folgender Eigenschaft der Besselfunktion

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(-x) \quad (3.51)$$

und auf der Eigenschaft der Impedanz (siehe Anhang A.1 (A.10))

$$Z^j(p) = -(Z^j(-p))^* \quad (3.52)$$

eine Folge davon, daß das Wake - Potential reell ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (3.51) und (3.52) läßt sich nun die Gültigkeit folgender Gleichungen zeigen (siehe Anhang A.2.1):

$$M_{mnk}^{m'n'k'} = M_{mnk}^{m'-n'k'} = M_{m-nk}^{m'n'k'} = M_{m-nk}^{m'-n'k'} \quad (3.53)$$

$$(M_{mnk}^{m'n'k'})^* = M_{-mnk}^{-m'n'k'} \quad (3.54)$$

Weiterhin erhält man für den Fall, daß die Chromatizität verschwindet:

$$\xi = 0 :$$

$$M_{mnk}^{m'n'k'} = M_{-mnk}^{m'n'k'} \quad (3.55)$$

$$M_{mnk}^{-m'n'k'} = -M_{mnk}^{m'n'k'} \quad (3.56)$$

$$(M_{mnk}^{m'n'k'})^* = -M_{mnk}^{m'n'k'} \quad (3.57)$$

(siehe Anhang A.2.1).

3.5.2 Eigenschaften der Transfermatrizen

Definiert man eine Matrix M für $\xi = 0$ durch

$$M = M_1^1, \quad (3.58)$$

wobei M_1^1 durch (3.38) bestimmt ist, dann gilt für die Matrixelemente der Matrix M

$$M_{nk}^{n'k'} = M_{1nk}^{1n'k'} \quad (3.59)$$

Aus (3.55) und (3.56) folgt

$$\xi = 0 : \quad M = M_1^1 = M_{-1}^1 = -M_1^{-1} = -M_{-1}^{-1} \quad (3.60)$$

Für die in (3.43) definierte Matrix \mathcal{A}_j eines Resonators ergibt sich also

$$\xi = 0 : \quad \mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} R_1(\theta) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & R_{-1}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Aufgrund der Tatsache, daß die Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k'}$ die Eigenschaft (3.53) besitzen und die Matrizen R_m nur Diagonalmatrizen sind, lassen sich folgende zwei Ähnlichkeitsrelationen für $\xi = 0$ beweisen (siehe Anhang A.2.2):

$$\xi = 0$$

$$J \mathcal{A}_j J^{-1} = -\mathcal{A}_j^T \quad (3.62)$$

$$K^{-1} \mathcal{A}_j K = -\mathcal{A}_j \quad (3.63)$$

(T bezeichnet das Transponierte einer Matrix).

Die Relationen (3.62) und (3.63) legen die Eigenwertstruktur von

$$T_j = e^{A_j \Delta \theta_j} \quad (3.64)$$

fest.

Aus (3.62) und (3.63) folgt für T_j

$$\text{a) } J T_j^{-1} J^{-1} = T_j^T \quad (3.65)$$

$$\text{b) } K^{-1} T_j K = T_j^* \quad (3.66)$$

Da ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen und die Eigenwerte von T_j und T_j^T identisch sind, müssen die Eigenwerte von T_j , T_j^{-1} und T_j^* übereinstimmen. Damit erhält man das wichtige Resultat:

$$\begin{aligned} \text{Ist } \lambda \text{ Eigenwert von } T_j, \text{ so sind auch} \\ \lambda^{-1}, \lambda^*, (\lambda^{-1})^* \text{ Eigenwerte.} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Die Ähnlichkeitstransformationen übertragen sich auf die Transfermatrix T des gesamten Rings.

Es gilt nämlich nach (3.49)

$$T = T_N \cdot \dots \cdot T_j \cdot \dots \cdot T_1,$$

also

$$\begin{aligned} J^{-1} T^T J &= J^{-1} (T_1^T \cdot \dots \cdot T_N^T) J \\ &= J^{-1} T_1^T J \cdot \dots \cdot J^{-1} T_N^T J \\ &= T_1^{-1} \cdot \dots \cdot T_N^{-1} \\ &= (T_N \cdot \dots \cdot T_1)^{-1} = T^{-1}, \end{aligned}$$

demnach

$$J T^{-1} J^{-1} = T^T \quad (3.68)$$

und entsprechend

$$K^{-1} T K = T^* \quad (3.69)$$

Somit besitzt auch die Transfermatrix T die Eigenschaft (3.67) der Transfermatrizen T_j .

3.5.3 Instabilitätsmechanismus

Ist also

$$\lambda = e^{\alpha + i\beta}$$

Eigenwert von T , dann sind auch

$$\frac{1}{\lambda} = e^{-(\alpha + i\beta)}, \quad \frac{1}{\lambda^*} = e^{-\alpha + i\beta}, \quad \lambda^* = e^{\alpha - i\beta}$$

Eigenwerte.

Die Bewegung ist demnach nur dann stabil, wenn alle Eigenwerte von der Art

$$\lambda = e^{\pm i\beta}$$

sind.

Daraus folgt für Stabilität

$$|\lambda| = 1 .$$

Im Falle einer Instabilität ($\alpha \neq 0$) sind immer zwei Schwingungsmoden gleicher Frequenz vorhanden, von denen der eine exponentiell anwächst und der andere exponentiell gedämpft ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-\alpha + i\beta} \\ \lambda_2 &= e^{\alpha + i\beta} . \end{aligned}$$

Eine Instabilität tritt also für $\xi = 0$ nur dann auf, wenn die Frequenzen zweier Eigenschwingungen übereinstimmen. (3.70)

Bestimmung der Instabilitätsschwelle

Um eine Vorstellung davon zu erhalten, welche Eigenschwingungen zu einer Instabilität führen können, ist es nützlich die Frequenzen der Eigenschwingungen für den Fall zu betrachten, daß keine Kopplung der Schwingungen vorliegt ($M_{mnk}^{m'n'k} = 0$). Dann vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem (3.35) zu

$$\left\{ \frac{d}{d\theta} + in'\nu_s + im' \frac{R}{\beta} \right\} a_{m'k'}^{n'}(\theta) = 0$$

und somit gilt

$$a_{m'k'}^{n'}(\theta_2) = e^{-i(m' \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R d\theta}{\beta} + n'\nu_s (\theta_2 - \theta_1))} a_{m'k'}^{n'}(\theta_1) .$$

Die Transfermatrix für einen Umlauf besteht in diesem Fall nur aus Diagonalelementen und lautet:

$$T = \left(e^{-i(m' \int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} \frac{R d\theta}{\beta} + n'\nu_s, 2\pi)} \right) , \quad (3.71)$$

so daß die Eigenwerte durch

$$\lambda_{m'n'} = e^{-i2\pi(m'\nu_\beta + n'\nu_s)} \quad (3.72)$$

gegeben sind, wobei zur Vereinfachung der Betatroutone

$$\nu_\beta = \frac{R}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + 2\pi} \frac{d\theta}{\beta} \quad (3.73)$$

eingeführt wurde.

Aus (3.72) liest man die Werte der Eigenfrequenzen ab:

$$\nu_{m'n'} = m'\nu_\beta + n'\nu_s . \quad (3.74)$$

Der Frequenzunterschied zwischen zwei Schwingungen beträgt demnach

$$\nu_{m_2 n_2} - \nu_{m_1 n_1} = (m_2 - m_1)\nu_\beta + (n_2 - n_1)\nu_s . \quad (3.75)$$

Der Strahl kann nur instabil werden, wenn der Frequenzunterschied zwischen zwei Eigen-
schwingungen verschwindet. Da der Betatron-tune im allgemeinen sehr groß ist, ist der Fre-
quenzunterschied zwischen zwei benachbarten Moden mit gleichem m am kleinsten, also

$$\begin{aligned} m &= m_2 = m_1 \quad n_2 = n_1 + 1 \\ \nu_{mn_1+1} - \nu_{mn_1} &= \nu_s \end{aligned} \quad (3.76)$$

Dieser Frequenzunterschied muß im Falle einer Instabilität durch die Wechselwirkung des
Bunches mit seiner Umgebung aufgehoben werden.

Die Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k'}$ verschieben die einzelnen Moden in der Frequenz und verkoppeln
unterschiedliche Moden. Die Frequenzverschiebung wie die Kopplung ist über die Gleichge-
wichtsverteilung $F(I)$ und deren Normierungsbedingung mit der Gesamtladung des Bunches
und daher mit dem Bunchstrom I gemäß

$$M_{mnk}^{m'n'k'} \sim I \quad (3.77)$$

verknüpft.

Außerdem liest man aus (3.36) leicht folgende Proportionalitäten ab:

$$\Delta\nu \sim M_{m'n'k'}^{m'n'k'} \cdot K \sim \frac{I \cdot Z}{E} \quad (3.78)$$

Diese Frequenzverschiebung muß im Falle einer Instabilität näherungsweise mit dem Syn-
chrotrontune übereinstimmen:

$$\Delta\nu \approx \nu_s, \quad (3.79)$$

und damit erhält man für die Instabilitätsschwelle

$$I_{th} \sim \frac{\nu_s \cdot E}{Z}. \quad (3.80)$$

Somit ergibt sich auch in diesem Bild der gleiche qualitative Zusammenhang zwischen Schwel-
lenstrom, Synchrotrontune, Energie und Impedanz wie im Zweiteilchenmodell (vgl. Kapitel
2).

Kohärente Synchro-Betatron Resonanzen

Nimmt man an, daß im gesamten Ring nur ein punktförmiger ($\Delta\theta_j \rightarrow 0$) Resonator steht,
dann ist die Transfermatrix im wesentlichen durch (3.71) mit einer zusätzlichen Störung
durch den Resonator gegeben. Für die Eigenwerte in (3.72) gilt mit

$$\begin{aligned} \nu_\beta &= \frac{k}{2} + \delta\nu_\beta; \quad |\delta\nu_\beta| \leq \frac{1}{2} \\ \lambda_{m'n'} &= e^{-ik\pi m'} e^{-i2\pi(m'\delta\nu_\beta + n'\nu_s)} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Der Vorfaktor $\exp(-ik\pi m')$ liefert nur ein unwesentliches Vorzeichen, d.h. die Frequenzen
sind durch

$$\nu_{m'n'} = m'\delta\nu_\beta + n'\nu_s \quad (3.82)$$

gegeben.

Der Frequenzunterschied zweier Moden ist jetzt

$$\Delta\nu = (m_2 - m_1)\delta\nu_\beta + (n_2 - n_1)\nu_s. \quad (3.83)$$

Betrachtet man die Moden

$$m_2 = m \quad n_2 = -n$$

sowie

$$m_1 = -m \quad n_1 = n ,$$

dann gilt

$$\Delta\nu = 2\delta\nu_\beta - 2n\nu_s . \quad (3.84)$$

Dieser Frequenzunterschied kann nun wesentlich kleiner sein als der Synchrotrontune, nämlich für

$$\delta\nu_\beta \approx n\nu_s . \quad (3.85)$$

Somit können Instabilitäten in der Nähe der Satellitenfrequenzen ($\delta\nu_\beta \approx n\nu_s$) auftreten und zwar für einen Strom, der deutlich kleiner ist als der Schwellenstrom für die übliche Moden-Kopplungsinstabilität.

Eine lokalisierte Impedanz ist in der Lage kohärente Synchro - Betatron Resonanzen zu erzeugen.

Der Effekt der Synchro - Betatron Resonanzen wird ausführlich in Abschnitt (3.8) behandelt. Vorher soll in Abschnitt (3.7) die übliche Moden-Kopplungsinstabilität mit gleichmäßig verteilten Objekten behandelt werden und eine Formel für den Schwellenstrom unter Verwendung der in Gleichung (3.32) definierten Parameter hergeleitet werden.

Um konkrete Rechnungen durchführen zu können, müssen zuerst die Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k'(j)}$ berechnet werden. Dies soll in Abschnitt (3.6) geschehen.

3.6 Berechnung der Matrixelemente

Das Berechnen der Matrixelemente ist mit umfangreichen mathematischen Umformungen verbunden, die im Anhang A.3 aufgeführt sind.

Hier sollen nur die wichtigsten Ergebnisse angegeben werden und zwar im allgemeinen für den Fall, daß die Chromatizität verschwindet. Im Anhang A.3 sind die Ergebnisse für von null verschiedener Chromatizität angegeben.

Der erste Schritt zur Berechnung der in (3.36) angegebenen Matrixelemente besteht darin, die ebenfalls dort definierten I_{nk} zu bestimmen. Dazu benötigt man zum einen die stationäre Verteilung in longitudinaler Richtung $F(I)$ und zum anderen das vollständige Funktionensystem $f_k^{|n|}(I)$.

Als stationäre Verteilung wählt man eine Gauss-Verteilung, da diese typisch für Elektron - Positron Speicherringe ist:

$$F(I) = \frac{Ne}{2\pi I_0} e^{-\frac{I}{I_0}} . \quad (3.86)$$

Die so definierte Verteilung genügt der Normierungsbedingung (3.22).

Die Konstante I_0 ist mit der Standardabweichung der Verteilung $F(I)$ in der Koordinate ϑ verknüpft (siehe A.3.1)

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_z}{R} = \sqrt{I_0} , \quad (3.87)$$

wobei σ_z wie üblich die Bunchlänge bezeichnet. Das vollständige Funktionensystem ist durch (A.16) bestimmt

$$C \int_0^\infty dI F(I) f_k^{|n|}(I) f_l^{|n|}(I) = \delta_{kl} .$$

Mit

$$C = \frac{2\pi}{N\epsilon} \quad (3.88)$$

folgt aus (3.86) für die $f_k^{(|n|)}(I)$ [38]

$$f_k^{(|n|)}\left(\frac{I}{I_0}\right) = \sqrt{\frac{k!}{(|n|+k)!}} \left(\frac{I}{I_0}\right)^{\frac{|n|}{2}} L_k^{(|n|)}\left(\frac{I}{I_0}\right), \quad (3.89)$$

wobei die $L_k^{(|n|)}$ verallgemeinerte Laguerre Polynome [39] sind:

$$L_k^{(|n|)}\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{1}{k!} \left(\frac{I}{I_0}\right)^{-|n|} e^{\frac{I}{I_0}} \frac{d^k}{d\left(\frac{I}{I_0}\right)^k} \left\{ e^{-\frac{I}{I_0}} \left(\frac{I}{I_0}\right)^{|n|+k} \right\}. \quad (3.90)$$

Nunmehr ist man in der Lage, die I_{nk} zu berechnen und das Ergebnis lautet (siehe Anhang A.3.2):

$$I_{nk}\left(p - m \frac{\xi}{\alpha}\right) = \frac{\epsilon_n (\sigma_\theta (p - m \frac{\xi}{\alpha}))^{|n|+2k}}{\sqrt{k!(|n|+k)!} \sqrt{2}^{|n|+2k}} e^{-\frac{1}{2} (\sigma_\theta (p - m \frac{\xi}{\alpha}))^2} \quad (3.91)$$

mit

$$\epsilon_n = \left(\frac{n}{|n|}\right)^{|n|}.$$

Setzt man (3.91) in (3.36) ein, dann erhält man für die Matrixelemente bei verschwindender Chromatizität das bekannte Resultat (vgl. [22][24])

$$M_{mnk}^{m'n'k'(j)} = m' \frac{\beta(\theta_j)}{\Delta\theta_j} i^{n'-n} \frac{\epsilon_n \epsilon_{n'}}{\sqrt{k!(|n|+k)! k'!(|n'|+k')!} \sqrt{2}^{|n|+|n'|+2(k+k')}} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p)^{(j)} (p\sigma_\theta)^{|n'|+|n|+2(k+k')} e^{-\sigma_\theta^2 p^2}}. \quad (3.92)$$

Die verbleibende Integration über p führt man mit Hilfe der in Gleichung (3.32) definierten Parameter k_\perp und $k_{||}$ aus (vgl. [7][41]).

Für eine gaussförmige Ladungsverteilung gelten die folgenden Relationen (siehe Anhang A.3.3):

$$\begin{aligned} T_0 \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_\perp}{d(\sigma_\theta)^\nu} &= i(-1)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (p\sigma_\theta)^{2\nu} e^{-(p\sigma_\theta)^2} \\ T_0 \sigma_\theta^{2\nu+1} \frac{d^\nu k_{||}}{d(\sigma_\theta)^\nu} &= \frac{(-1)^\nu}{R} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (p\sigma_\theta)^{2\nu+1} e^{-(p\sigma_\theta)^2}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Damit läßt sich das Integral in (3.92) ausdrücken, und es ergibt sich schließlich

$$M_{mnk}^{m'n'k'(j)} = m' \frac{\beta(\theta_j)}{\Delta\theta_j} i^{n'-n} \frac{\epsilon_n \epsilon_{n'}}{\sqrt{k!(|n|+k)! k'!(|n'|+k')!} \sqrt{2}^{|n|+|n'|+2(k+k')}} \cdot \begin{cases} -i \sigma_\theta^{2\nu} (-1)^\nu \frac{d^\nu k_\perp^{(j)}}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} & \text{falls } n+n' \text{ gerade } (2\nu = |n'|+|n|+2(k+k')) \\ \sigma_\theta^{2\nu} (-1)^\nu \frac{d^\nu k_{||}^{(j)}}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} & \text{falls } n+n' \text{ ungerade } (2\nu = |n'|+|n|+2(k+k')-1) \end{cases} \quad (3.94)$$

(Im Anhang A.3.3 sind die Matrixelemente für den Fall $\xi \neq 0$ angegeben.)

Auf diese Weise können die Matrixelemente des Objektes j berechnet werden, wenn die Parameter k_{\perp}^j und $k_{\parallel\perp}^j$ als Funktionen der Bunchlänge σ_{θ} bekannt sind.

Die wichtigsten Matrixelemente lauten:

$$\begin{aligned} M_{100}^{100(j)} &= -i \frac{\beta(\theta_j)}{\Delta\theta_j} T_0 k_{\perp}^{(j)}(\sigma_{\theta}) \\ M_{100}^{110(j)} &= i \frac{\beta(\theta_j)}{\Delta\theta_j} T_0 \frac{\sigma_z}{\sqrt{2}} k_{\parallel\perp}^{(j)}(\sigma_{\theta}) \\ M_{110}^{110(j)} &= i \frac{\beta(\theta_j)}{\Delta\theta_j} T_0 \frac{\sigma_{\theta}^2}{2} \frac{dk_{\perp}^{(j)}(\sigma_{\theta})}{d(\sigma_{\theta}^2)} = i \frac{\beta(\theta_j)}{\Delta\theta_j} T_0 \frac{\sigma_z}{4} \frac{dk_{\perp}^{(j)}}{d\sigma_z} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Der Wert der Konstanten K (3.36c) ergibt aus dem Wert für C (3.88) zu

$$K = \frac{I}{2E/e} \quad (3.96)$$

wobei der Bunchstrom

$$I = \frac{N\epsilon}{T_0}$$

eingeführt wurde.

Die Abbildungen (3.5a-d) zeigen die Parameter $k_{\perp}^{(j)}$ bzw. $k_{\parallel\perp}^{(j)}$ als Funktionen der Bunchlänge für die in dieser Arbeit betrachteten Objekte [40].

Mit Hilfe dieser Werte können die Matrixelemente (3.94) berechnet, die Transfermatrizen T_j (3.46) aufgestellt und daraus die Transfermatrix des Gesamtringes T (3.49) bestimmt werden.

3.7 Moden - Kopplungsinstabilität für gleichmäßig verteilte Objekte

3.7.1 Bestimmung der Instabilitätsschwelle

Im folgenden werden die N Objekte (vgl. Abbildung (3.4)) durch ein mittleres Objekt und die verschiedenen Werte der Betafunktion $\beta(\theta_j)$ durch einen mittleren Wert $\bar{\beta}$ ersetzt.

Die Länge dieses mittleren Objektes ist $\Delta\theta = 2\pi$. Die Impedanz wird aus den gemittelten Kick - Parametern k_{\perp} und $k_{\parallel\perp}$ aller Objekte gemäß

$$\begin{aligned} k_{\perp}(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \frac{\beta(\theta_j)}{\bar{\beta}} k_{\perp}^j(\sigma) \\ k_{\parallel\perp}(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \frac{\beta(\theta_j)}{\bar{\beta}} k_{\parallel\perp}^j(\sigma) \end{aligned} \quad (3.97)$$

bestimmt.

Der Vorteil dieses Mittelungsprozesses besteht darin, daß das Differentialgleichungssystem (3.35) für eine endliche Anzahl von Schwingungsmoden sofort gelöst werden kann, da jetzt die Matrixelemente unabhängig von θ sind:

$$\begin{aligned} \bar{a}(\theta) &= T(\theta - \theta_0) \bar{a}(\theta_0) \\ \text{mit} \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$T(\theta - \theta_0) = e^{-A(\theta - \theta_0)}$$

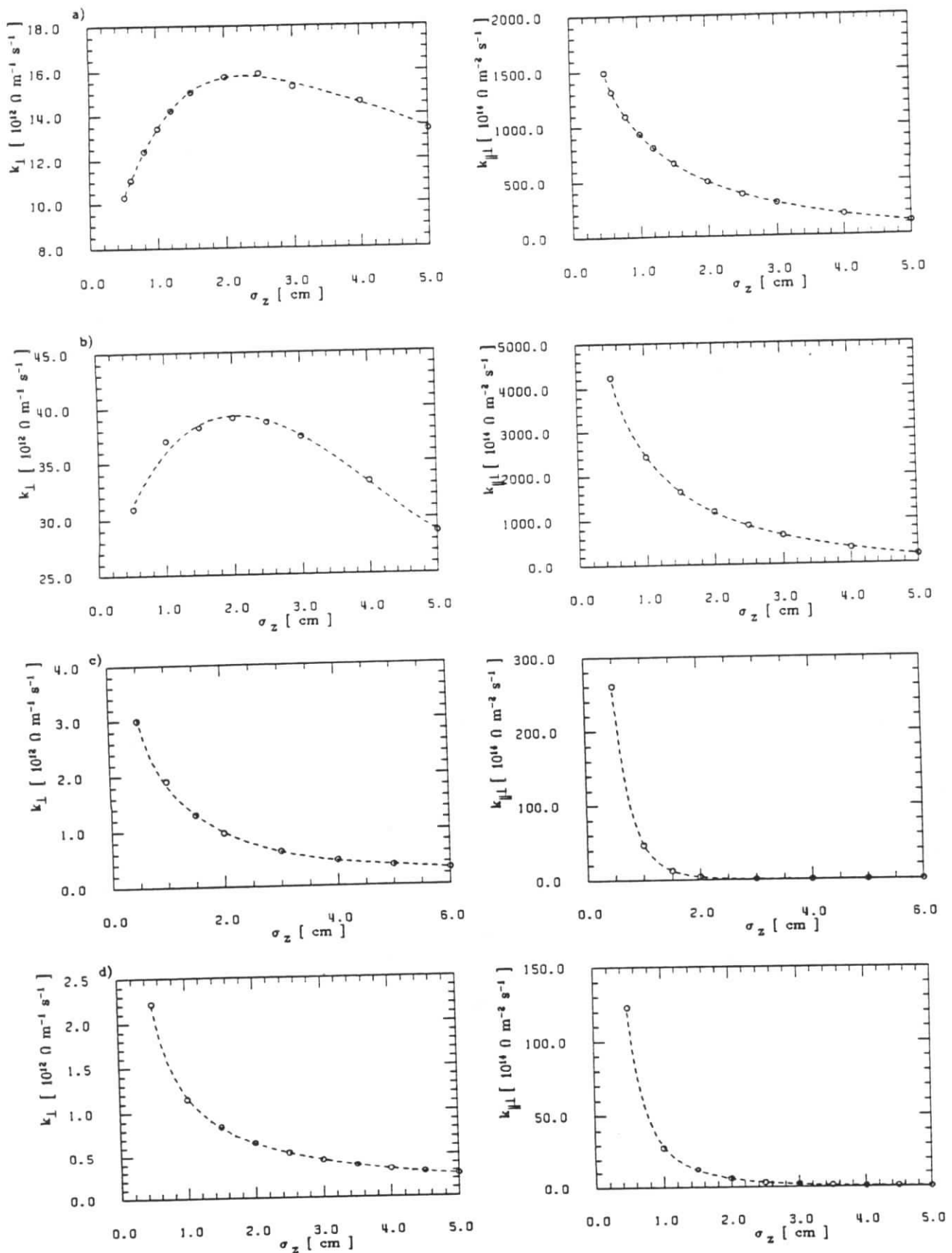


Abbildung 3.5: Kick Parameter als Funktion der Bunchlänge: Den wesentlichen Beitrag zur Kraftwirkung auf den Bunch leisten in PETRA die fünf- (Abb. a)) und die siebenzelligen (Abb. b)) Resonatoren, die zur Beschleunigung der Teilchen und zum Ausgleich des Energieverlustes durch Synchrotronstrahlung dienen. Für kurze Bunchlängen ($\sigma_z \leq 1.5 \text{ cm}$) tragen die Vakuumverbindungsstücke (Abb. c) und d)), die Vakuumkammerteile verschiedenen Querschnitts zusammenfügen, bis zu 30% zur Kraftwirkung bei.

wobei die Matrix \mathcal{A} in (3.43) definiert ist.

Damit hängen die Eigenwerte von T und \mathcal{A} in folgender Art und Weise voneinander ab

$$\lambda_i = e^{\mu_i(\theta - \theta_0)} \quad (3.99)$$

Die Stabilitätsbedingung $|\lambda_i| \leq 1$ (3.50) ist also äquivalent zu

$$\operatorname{Re} \mu_i \leq 0 \quad (3.100)$$

Statt der Eigenwerte μ_i führt man üblicherweise die Größen

$$\nu_i = i \mu_i \quad (3.101)$$

ein, so daß die Stabilitätsbedingung

$$\text{Stabilität} \iff \operatorname{Im} \nu_i \leq 0 \quad (3.102)$$

lautet.

Die Stabilitätsuntersuchung besteht nunmehr darin, die Eigenwerte der Matrix \mathcal{A} für $\Delta\theta = 2\pi$ und $\beta(\theta_j) = \bar{\beta}$ zu bestimmen.

Für verschwindenden Strom sind die Eigenwerte von \mathcal{A} identisch mit denen von R_1 bzw. R_{-1} , also mit (3.101):

$$\nu_{mn} = m \nu_\beta + n \nu_s \quad , \quad (3.103)$$

wobei

$$\nu_\beta = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\beta(\theta)} = \frac{R}{\bar{\beta}}$$

eingesetzt wurde.

Für einen endlichen Strom ist jeder Schwingungsmodus (m', n', k') über die Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k'}$ an alle anderen gekoppelt, und die Berechnung der Eigenwerte ist deshalb nur numerisch möglich.

Mit Hilfe des in Abschnitt (3.5) erläuterten Instabilitätsmechanismus und bei Benutzung einiger plausibler Annahmen kann man das umfangreiche Problem der Eigenwertbestimmung auf ein einfaches analytisch lösbares Problem reduzieren.

Die einfachste Näherung besteht in der Vernachlässigung der Modenkopplung, so daß die Eigenfrequenzen (3.103) nur durch die Terme M_{mnk}^{mnk} geändert werden:

$$\nu_{mnk} = m \nu_\beta + n \nu_s - i K M_{mnk}^{mnk} \quad (3.104)$$

oder speziell für den Fundamentalmodus ($m = 1, n = 0, k = 0$)

$$\nu_{100} = \nu_\beta - \frac{I \bar{\beta} T_0}{4\pi E/\epsilon} k_\perp - i \frac{\sigma_\theta}{\alpha} \xi \frac{I \bar{\beta} T_0}{4\pi E/\epsilon} 2\sigma_z k_{||\perp} \quad , \quad (3.105)$$

wobei das in Anhang A.3.3 berechnete Matrixelement eingesetzt wurde.

Diese grobe Näherung erlaubt einen Einblick in die Effekte, die mit der Wechselwirkung des Bunches mit den Objekten verknüpft sind.

Gemäß Gleichung (3.105) erfährt jeder Modus eine stromproportionale Frequenzverschiebung, die in diesem Fall, da k_\perp positiv ist (siehe Abbildung (3.5)), zu einer Verschiebung zu niedrigeren Frequenzen führt. Zum anderen besitzt jeder Modus einen Imaginärteil, dessen Vorzeichen entscheidend vom Vorzeichen der Chromatizität ξ abhängt. Für den angegebenen

Fundamentalmodus ($n = 0$) sind alle Größen (bis auf die Chromatizität), die den Imaginärteil bestimmen, positiv, d.h. nach (3.102) gilt

$$\begin{aligned} \xi > 0 & \quad \text{Stabilität des Fundamentalmodus} \\ \xi < 0 & \quad \text{Instabilität des Fundamentalmodus.} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Das ist der klassische head - tail - Effekt [42] [43], der sich hier erwartungsgemäß wiederfindet. Da die in dieser Arbeit interessierende Instabilität auch für Chromatizität null auftritt (siehe Abschnitt 3.5), wird im folgenden angenommen, daß die Chromatizität verschwindet. Der Einfluß endlicher Chromatizität wird später untersucht.

Für $\xi = 0$ erfahren die einzelnen Moden eine zum Strom proportionale Frequenzverschiebung. Diese ist von entscheidender Bedeutung, da der Strahl nur dann instabil wird, wenn zwei Moden unterschiedlicher Frequenz so in der Frequenz verschoben werden, daß ihre Frequenzen schließlich gleich sind (vgl. (3.70)).

Die Frequenzverschiebung allein kann nach Gleichung (3.105) aber nicht zu einer Instabilität führen, da für $\xi = 0$ stets $\text{Im}\nu_j = 0$ gilt, sondern es muß noch eine geeignete Kopplung der Moden vorliegen.

Um die Instabilitätsschwelle zu berechnen, muß also wenigstens die Kopplung zweier Moden betrachtet werden.

Da die Frequenzverschiebungen der einzelnen Moden deutlich kleiner als der Betatronune sind, können Moden mit verschiedenem m , deren Frequenzunterschied durch

$$\Delta\nu = |\nu_{m'n'k'} - \nu_{-m',nk}| \approx 2\nu_\beta \quad (3.107)$$

gegeben ist, nicht zu einer Instabilität koppeln.

Deshalb werden im weiteren zwei Moden mit $m = 1$ betrachtet. Unter der Annahme, daß man die Kopplung an alle anderen Moden vernachlässigen kann, hat man statt des sehr umfangreichen Problems der Bestimmung der Eigenwerte von \mathcal{A} nur noch die Eigenwerte folgender 2×2 Matrix zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} -i(\nu_\beta + n'\nu_s) - K \cdot M_{1n'k'}^{1n'k'} & -K \cdot M_{1nk}^{1n'k'} \\ -K \cdot M_{1n'k'}^{1nk} & -i(\nu_\beta + n\nu_s) - K \cdot M_{1nk}^{1nk} \end{pmatrix}. \quad (3.108)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} iM_1 &= M_{1n'k'}^{1n'k'} & iM_2 &= M_{1nk}^{1nk} \\ iM_{12} &= M_{1n'k'}^{1nk} & iM_{21} &= M_{1nk}^{1n'k'} \end{aligned} \quad (3.109)$$

und Gleichung (3.101) folgt die bekannte charakteristische Gleichung [6] [7] zur Berechnung der Instabilitätsschwelle:

$$\begin{vmatrix} \nu_\beta + n'\nu_s + K \cdot M_1 & K \cdot M_{12} \\ K \cdot M_{12} & \nu_\beta + n\nu_s + K \cdot M_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.110)$$

Die Eigenwerte von (3.108) lauten

$$\begin{aligned} \nu_{1,2} = \nu_\beta & + \frac{(n' + n)\nu_s + K(M_1 + M_2)}{2} \\ & \pm \sqrt{\left(\frac{(n' - n)\nu_s + K(M_1 - M_2)}{2}\right)^2 + K^2 M_{12} M_{21}}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Beachtet man Gleichung (A.27)

$$M_{1n'k'}^{1nk} = (-1)^{n'-n} M_{1nk}^{1n'k'} \quad (3.112)$$

dann gilt

$$M_{12} \cdot M_{21} = \begin{cases} -M_{12}^2 & \text{für } n' - n \text{ ungerade} \\ M_{12}^2 & \text{für } n' - n \text{ gerade} . \end{cases} \quad (3.113)$$

Damit erhält man das bekannte Resultat [6] [7], daß nur die Kopplung eines geraden Modus (n gerade) mit einem ungeraden (n ungerade) zu einer Instabilität führen kann, da sonst $\nu_{1,2}$ nach Gleichung (3.111) stets reell ist.

Für benachbarte Moden ist $n' - n$ ungerade; somit koppeln diese zuerst und es gilt:

$$n' = n + 1$$

$$\nu_{1,2} = \nu_\beta + n\nu_s + \frac{\nu_s + K(M_1 + M_2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu_s + K(M_1 - M_2)}{2}\right)^2 - K^2 M_{12}^2} \quad (3.114)$$

Die Instabilität setzt ein, sobald die Diskriminante negativ wird:

$$\text{Instabilität} \iff \left(\frac{\nu_s + K(M_1 - M_2)}{2}\right)^2 - K^2 M_{12}^2 < 0 \quad (3.115)$$

Anhand dieser Ungleichung lassen sich deutlich die beiden Bedingungen ablesen, die notwendig sind, damit eine Instabilität auftritt:

1. Der Frequenzunterschied zwischen beiden Moden muß durch die Wechselwirkung des Bunches mit den Objekten verringert werden. Dies geschieht zum einen direkt über die Elemente M_1 und M_2 , die gemäß (3.109) und (3.94) proportional zu k_\perp sind und über das Kopplungselement M_{12} , das gemäß (3.109) und (3.94) proportional zu $k_{\parallel\perp}$ ist.
2. Es muß eine Kopplung zwischen einem ungeraden und einem geraden Modus vorliegen, die stets proportional zu $k_{\parallel\perp}$ ist.

Aus der Ungleichung (3.115) kann nun der Schwellenstrom berechnet werden. Es gilt im Falle einer Instabilität

$$2K|M_{12}| > |\nu_s + K(M_1 - M_2)| > 0 \quad (3.116)$$

Unter der Annahme

$$M_1 - M_2 \leq 0 \quad (3.117)$$

kann (3.116) für

$$1. \quad \nu_s \geq -K(M_1 - M_2) \quad (3.118)$$

zu

$$K > \frac{\nu_s}{|M_1 - M_2| + 2|M_{12}|} \geq \frac{K|M_1 - M_2|}{|M_1 - M_2| + 2|M_{12}|} \quad (3.119)$$

umgeformt werden und für

$$2. \quad \nu_s \leq -K(M_1 - M_2) \quad (3.120)$$

zu

$$K < \frac{\nu_s}{|M_1 - M_2| - 2|M_{12}|} \leq \frac{K |M_1 - M_2|}{|M_1 - M_2| - 2|M_{12}|} \quad (3.121)$$

umgeformt werden.

Definiert man

$$K_{th_{1,2}} = \frac{\nu_s}{|M_1 - M_2| \pm 2|M_{12}|} \quad (3.122)$$

dann lassen sich die Ungleichungen (3.119) (3.121) zusammenfassen:

Instabilität

\iff

$$K_{th_1} < K < K_{th_2} \quad \text{und} \quad M_{12} \neq 0 \quad (3.123)$$

Auch hier erhält man als Ergebnis, daß der Strahl nur instabil werden kann, wenn das Koppelungselement und damit $k_{||\perp}$ von null verschieden ist.

Außerdem zeigt (3.123), daß oberhalb eines Schwellenparameters K_{th_2} die Bewegung wieder stabil wird. Für Elektron - Positron Speicherringe liegt dieser Wert allerdings meist um eine Größenordnung über K_{th_1} , so daß es unmöglich ist, einen so großen Strom zu injizieren. Weiterhin ist für $K > K_{th_2}$ die Annahme, daß nur die Kopplung zweier Moden berücksichtigt werden muß, in der Regel falsch.

Der Schwellenstrom ist durch diejenigen Moden bestimmt, die zuerst koppeln. Das sind in diesem Modell der Fundamentalmodus ($n = 0$) und der erste head - tail - Modus ($n = -1$). Benutzt man die in (3.95) angegebenen Gleichungen für die Matrixelemente sowie den Ausdruck (3.96) für den Parameter K , dann folgt aus (3.123):

$$\text{Instabilität : } I > I_{th} \quad \text{und} \quad k_{||\perp} \neq 0 \quad (3.124)$$

wobei der Schwellenstrom durch

$$I_{th} = \frac{4\pi E / e \nu_s}{\beta T_0 \left\{ k_{\perp} + \frac{\sigma_z}{4} \frac{dk_{\perp}}{d\sigma_z} + \sqrt{2} \sigma_z k_{||\perp} \right\}} \quad (3.125)$$

gegeben ist.

Der Schwellenstrom besitzt die in (3.80) angesprochene typische Abhängigkeit von Synchrontrone und Energie.

Gleichung (3.125) erlaubt eine einfache Bestimmung des Schwellenstroms, wenn die Kick - Parameter der einzelnen Objekte bekannt sind und die mittleren Parameter mittels (3.97) bestimmt werden.

3.7.2 Numerische Berechnung des Schwellenstroms

Im folgenden wird der Schwellenstrom für eine Version des Speicherrings PETRA numerisch berechnet, d.h. es werden die Eigenwerte von \mathcal{A} mit einem Computerprogramm für eine endliche Anzahl azimuthaler Moden berechnet.

Abbildung (3.6) zeigt den Real- und Imaginärteil der Eigenwerte ν als Funktion des Bunchstroms. Vergleicht man den numerisch bestimmten Schwellenstrom mit dem nach der Schwellenstromformel (3.125) berechneten, dann ergibt sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung:

$$I_{th} = 18.3 \text{ mA} \quad \text{nach Gleichung (3.125)}$$

$$I_{th} \approx 18.5 \text{ mA} \quad \text{nach Abbildung (3.6).}$$

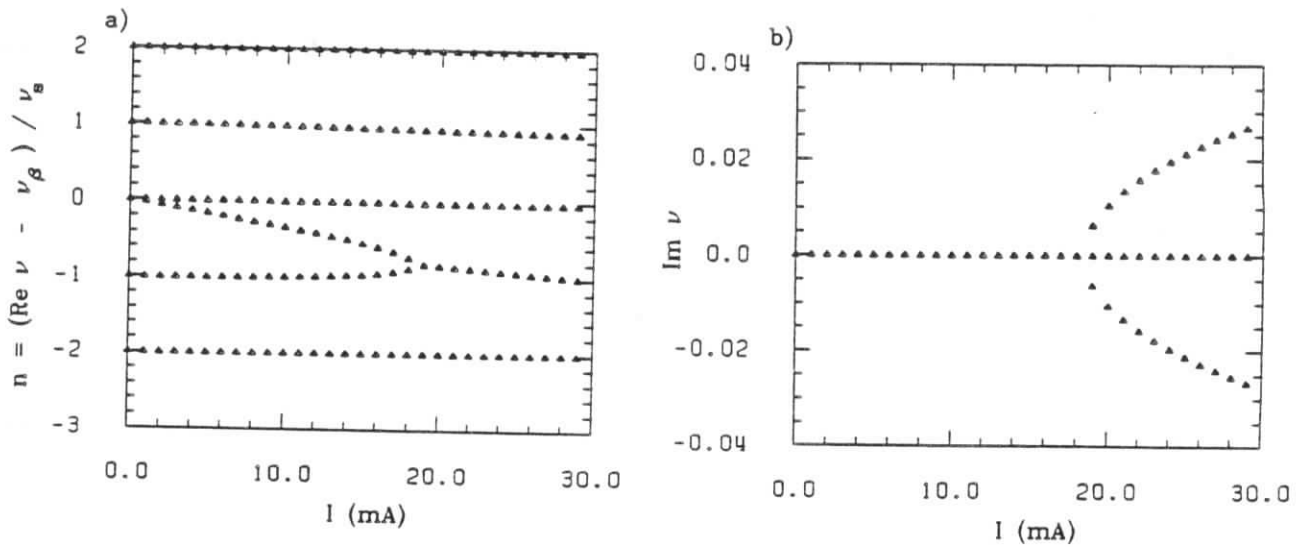


Abbildung 3.6: Stromabhängigkeit von a) $n = (\text{Re } \nu - \nu_\beta) / \nu_s$ und b) $\text{Im } \nu$ für verschwindende Chromatizität: Die mittleren Kick-Parameter wurden aus den Werten der Parameter für 60 fünfzellige Resonatoren und sämtlicher Vakuumübergänge berechnet. Es wurden alle azimuthalen Moden mit $|n| \leq 2$ und der Modus ($n = 0, k = 1$) berücksichtigt. a) Die Eigenfrequenzen der höheren azimuthalen Moden $|n| \geq |1|$ werden durch die Wechselwirkung des Bunches mit der metallischen Umgebung fast nicht verändert. Nur der Fundamentalmodus erfährt eine deutliche Frequenzverschiebung und koppelt mit dem ersten head - tail Modus zur Instabilität. Der Schwellenstrom beträgt ungefähr 18.5 mA . b) Oberhalb des Schwellenstroms treten erwartungsgemäß ein gedämpfter und ein exponentiell anwachsender Modus auf. Die Anwachszeiten τ des instabilen Modus sind mit dem Imaginärteil der Eigenfrequenz durch $\tau = T_0 / 2\pi \text{Im } \nu$ verbunden. Bei einer Umlaufzeit von $T_0 \approx 7.3 \mu\text{s}$ entspricht einem Imaginärteil von 10^{-2} eine Anwachszeit von $\tau \approx 0.12 \text{ ms}$. Verglichen mit den internen Dämpfungszeiten von ca. 10 ms wächst die Amplitude sehr schnell an.

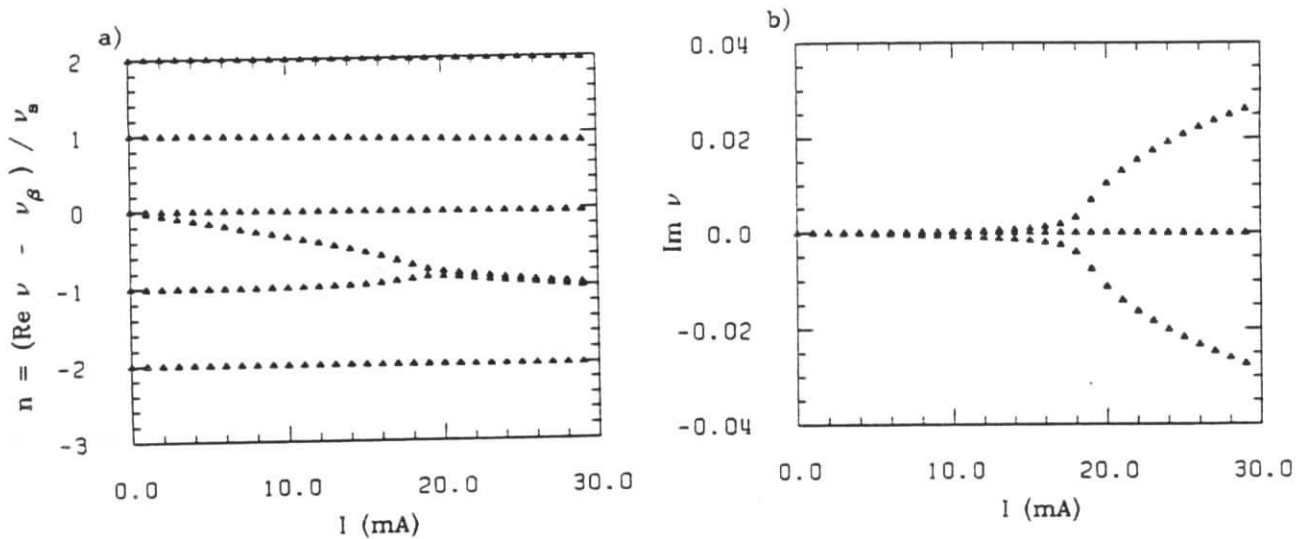


Abbildung 3.7: Stromabhängigkeit von a) $n = (\text{Re } \nu - \nu_\beta) / \nu_\beta$, und b) $\text{Im } \nu$ für Chromatizität $\xi = 1$: Vergleicht man mit Abbildung 3.6 ($\xi = 0$), dann wird deutlich, daß eine von null verschiedene Chromatizität die Eigenfrequenzen der einzelnen Moden und deren Anwachszeiten nur wenig ändert. Da die Instabilitätsbedingung (3.70) für $\xi \neq 0$ nicht exakt gilt, muß der Frequenzunterschied zwischen den beiden zur Instabilität koppelnden Moden nicht vollständig aufgehoben werden. Der Wert des Schwellenstroms ist für $\xi = 1$ nahezu identisch mit dem für $\xi = 0$.

Eine Vergleichsrechnung, die nur mit den Moden $n' = 0$ und $n = -1$ durchgeführt wurde, ergab sehr geringfügige Abweichungen von der in Abb. (3.6) gezeigten Rechnung. Diese Vergleiche zeigen, daß es zur Berechnung des Schwellenstroms ausreicht, die Kopplung der Moden $n' = 0$ und $n = -1$ zu berücksichtigen.

Weiterhin entnimmt man Abb. (3.6), daß die Anwachszeiten des instabilen Modus wesentlich kleiner als 1 ms sind. Die Anwachszeiten liegen damit deutlich unter den Dämpfungskonstanten von Landau- und Strahlungsdämpfung, die für PETRA einige 10 ms betragen [44], so daß die Instabilität durch diese Dämpfungen kaum beeinflusst wird.

Abbildung (3.7) zeigt die Stromabhängigkeit des Real- und Imaginärteils der Eigenwerte ν für den Fall, daß die Chromatizität den Wert 1 besitzt.

Vergleicht man mit Abbildung (3.6) ($\xi = 0$), dann erkennt man, daß die Instabilität nur sehr schwach vom Wert der Chromatizität abhängt. Dieser Sachverhalt ist durch Beobachtungen am Speicherring PETRA bestätigt [5].

Abbildung (3.8) zeigt den Vergleich der gemessenen und berechneten Abhängigkeit des Schwellenstroms von der Bunchlänge.

Der Abbildung entnimmt man, daß der gemessene Schwellenstrom deutlich kleiner als der berechnete ist und die Diskrepanz für größere Bunchlängen geringer wird.

Dieser Unterschied hat zwei mögliche Ursachen:

- Das benutzte Modell mit gleichmäßig verteilten Objekten ist zu einfach, d.h. es müssen noch andere Effekte wie z.B. die Lokalisierung der Objekte berücksichtigt werden.
- Es müssen neben den bisher schon berücksichtigten Objekten noch weitere Einbauten in der Vakuumkammer mit in die Rechnung einbezogen werden, deren Wirkung bisher unterschätzt wurde.

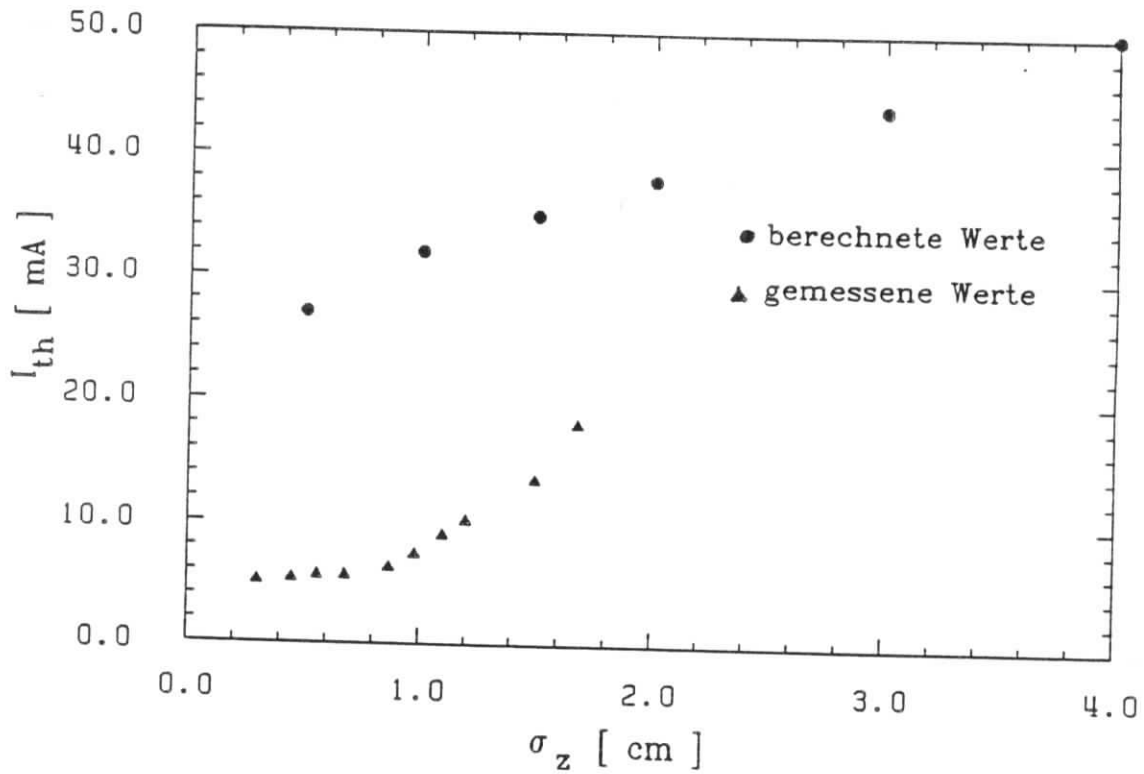


Abbildung 3.8: Schwellenstrom als Funktion der Bunchlänge: Der gemessene und berechnete Schwellenstrom wächst proportional mit der Bunchlänge, da die Kick - Parameter mit wachsender Bunchlänge abnehmen (vgl. Abb. (3.5)). Allerdings ist der gemessene Schwellenstrom deutlich kleiner als der berechnete insbesondere für kurze Bunche. Ursache dafür ist, daß neben den in Abbildung (3.5) gezeigten Vakuumverbindungsstücken auch noch andere Einbauten in der Vakuumkammer zur Kraftwirkung beitragen, die nicht bei der Berechnung des Schwellenstroms berücksichtigt wurden.

3.7.3 Modenkopplung unterhalb der Instabilitätsschwelle

Unterhalb der Instabilitätsschwelle wird ein Effekt beobachtet, der die Kopplung zweier Moden verdeutlicht.

Dazu betrachtet man das über die Bunchlänge gemittelte Dipolmoment (A.23) für Chromatizität null:

$$\bar{D}(\theta) = \bar{b}^T \cdot \bar{a}(\theta) . \quad (3.126)$$

Das Dipolmoment wird am Ort θ_0 jeden Umlauf gemessen.

Da nach (3.98)

$$\bar{a}(\theta_0 + 2\pi \cdot n) = T(2\pi \cdot n)\bar{a}(\theta_0)$$

ist, folgt demnach für das gemessene Dipolmoment

$$\bar{D}(\theta_0 + 2\pi \cdot n) = \bar{b}^T T(2\pi n) \cdot \bar{a}(\theta_0) . \quad (3.127)$$

Benutzt man die Ähnlichkeitstransformation (3.47), die \mathcal{A} auf Diagonalgestalt transformiert

$$\mathcal{A} = S D(i\nu_j) S^{-1} \text{ mit } \det S = 1 ,$$

dann gilt

$$T(2\pi n) = S D(e^{2\pi i n \nu_j}) S^{-1} . \quad (3.128)$$

Wird nun mit einem Kicker auf den Bunch eine Kraft ausgeübt, die über die Bunchlänge konstant ist, dann werden kohärente Dipolschwingungen angeregt, d.h. die Anfangsbedingung lautet:

$$\bar{a}(\theta_0) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1(\theta_0) \\ \bar{a}_{-1}(\theta_0) \end{pmatrix} \quad \bar{a}_m(\theta_0) = (1, 0, 0, \dots, 0) . \quad (3.129)$$

In diesem speziellen Fall erhält man also

$$\bar{b} = \frac{1}{2\pi} \bar{a}(\theta_0) \quad (3.130)$$

oder insgesamt

$$\bar{D}(\theta_0 + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \bar{b}^T S D(e^{2\pi i n \nu_j}) S^{-1} \bar{b} . \quad (3.131)$$

Unter der Annahme, daß nur die beiden Moden ($m = 1, n = 0$) ($m = 1, n = -1$) koppeln und der Tatsache, daß die Anteile mit ($m = -1$) nur das konjugiert komplexe zu den Termen mit ($m = 1$) liefern, die der Einfachheit halber weggelassen werden, folgt

$$\begin{aligned} \bar{D}(\theta + 2\pi n) &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i n \nu_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i n \nu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{2\pi i n \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} v_{11} v_{22} \left\{ e^{2\pi i n \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}} - \frac{v_{12} v_{21}}{v_{11} \cdot v_{22}} e^{-2\pi i n \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}} \right\} , \end{aligned} \quad (3.132)$$

wobei ν_1 bzw. ν_2 die stromabhängigen Frequenzen der Eigenschwingungen sind. Die v_{ij} ergeben sich aus den Komponenten der Eigenvektoren zu ν_1 bzw. ν_2 .

Eine genaue Kenntnis dieser Komponenten ist für das folgende unnötig.

Für Strom null gibt es keine Modenkopplung, und damit gilt für die Ähnlichkeitstransformation

$$S = \mathbb{1}$$

also

$$I = 0 \Rightarrow v_{11} = v_{22} = 1 \quad \text{und} \quad v_{12} = v_{21} = 0 \quad . \quad (3.133)$$

Für einen endlichen Strom wachsen die Außerdiagonalelemente an, da die Kopplungselemente in \mathcal{A} (M_{100}^{110}) nicht mehr verschwinden.

Damit läßt sich Gleichung (3.132) wie folgt interpretieren.

Für einen kleinen Strom, d.h. für

$$\frac{v_{12}v_{21}}{v_{11} \cdot v_{22}} \ll 1$$

schwingt der Strahl mit der Betatronfrequenz:

$$\nu_{\beta} \approx \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

(siehe Abbildung (3.9)a).

Der Anteil

$$\frac{v_{12}v_{21}}{v_{11} \cdot v_{22}}$$

wächst für größere Ströme an, und man erhält einen schwebungsähnlichen Zustand mit der Grundfrequenz

$$\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \approx \nu_{\beta}$$

und einer Schwebungsfrequenz

$$\Delta\nu = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \quad ,$$

die dem halben Frequenzunterschied der beiden betrachteten Moden entspricht.

Mit zunehmenden Strom sollte die Schwebungsfrequenz abnehmen und die Schwebungsamplitude zunehmen. Dieses Verhalten ist in Abbildung (3.9) zu sehen.

Dieser am Speicherring PEP experimentell nachgewiesene Effekt [9] unterstreicht die Tatsache, daß tatsächlich zwei Moden koppeln. Gut beobachtbar ist dieser Effekt nur dann, wenn tatsächlich der Fundamentalmodus ($n = 0$) und der erste head-tail Modus ($n = -1$) koppeln. Im nächsten Abschnitt sollen nun diejenigen Effekte untersucht werden, die durch die Lokalisierung der Resonatoren hervorgerufen werden. Dabei wird sich herausstellen, in welcher Weise die bisherigen Vereinfachungen zulässig sind.

3.8 Moden - Kopplungsinstabilität durch lokalisierte Objekte

Effekte, die durch die Lokalisierung der Resonatoren hervorgerufen werden, treten am deutlichsten zu tage, wenn man annimmt, daß die Resonatoren punktförmig sind, d.h. die Länge null besitzen. Deshalb wird zunächst ein Beschleuniger betrachtet, in dem N gleiche punktförmige Resonatoren äquidistant aufgestellt sind.

Im Anschluß daran werden die Änderungen der Effekte aufgrund der endlichen Länge der Beschleunigungsstrecken untersucht.

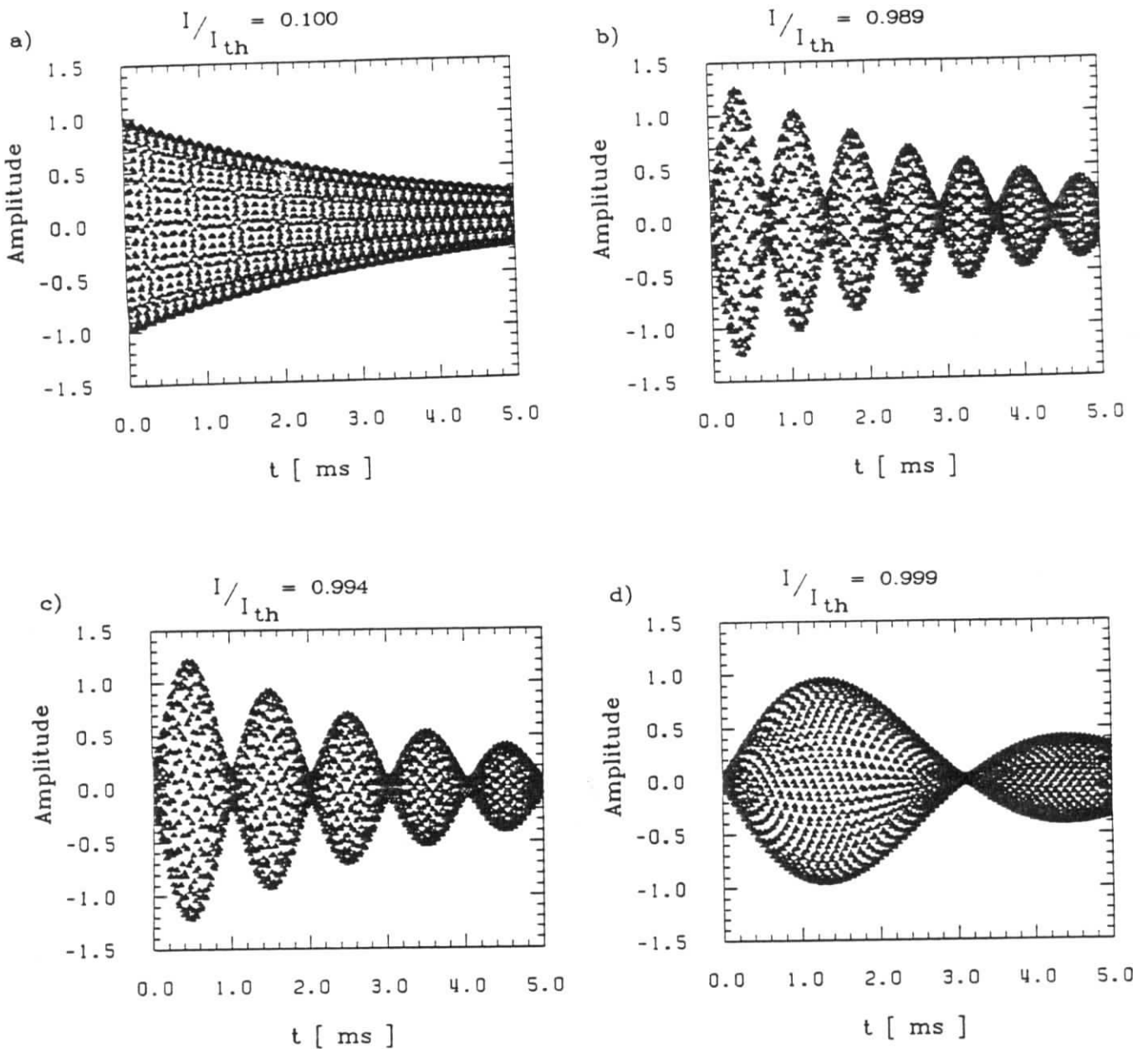


Abbildung 3.9: Zeitabhängigkeit des transversalen Dipolmoments für unterschiedliche Bunchströme: Der Fundamentalmodus des Bunches wird mit einem Kicker angeregt, der ab $t = 0$ ausgeschaltet wird. Für einen kleinen Strom ($I / I_{th} \approx 0.1$, I_{th} Schwellenstrom der Moden-Kopplungsinstabilität) führt der Strahl gedämpfte kohärente Betatronschwingungen aus (Abb. a)). In der Nähe der Instabilitätsschwelle wird die Kopplung zwischen dem Fundamentalmodus und dem ersten head - tail Modus so stark, daß ein schwebungsähnlicher Zustand auftritt. Die Schwebungsfrequenz, die dem halben Frequenzabstand der beiden koppelnden Moden entspricht, nimmt mit steigendem Strom (Abb. b)-d)) ab und die Schwebungsamplitude zu.

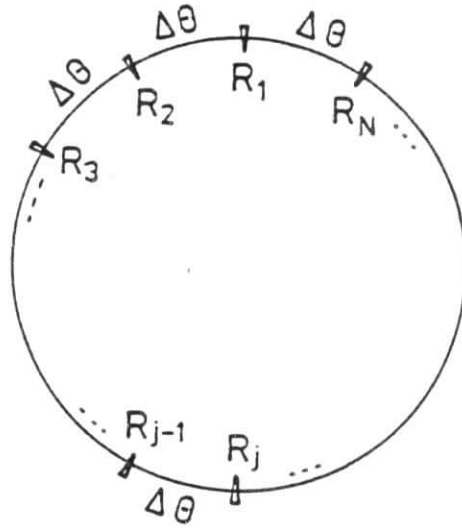


Abbildung 3.10: Der Modellbeschleuniger besteht aus N identischen punktförmigen (Länge null) Resonatoren R_j , die äquidistant (Abstand $\Delta\theta = 2\pi / N$) aufgestellt sind.

3.8.1 Punktförmige Objekte : kohärente Synchro -Betatron Resonanzen

Im folgenden wird der in Abbildung (3.10) gezeigte Modellbeschleuniger untersucht. Da alle Resonatoren identisch und äquidistant aufgestellt sind, lautet die Transfermatrix T_G des gesamten Rings:

$$T_G = T^N . \quad (3.134)$$

Die Stabilitätseigenschaften des Strahls sind demnach durch die der Matrix T gegeben, die einen Abschnitt der Länge $\Delta\theta$ mit einem Resonator beschreibt.

Die Transfermatrix für einen Abschnitt ist durch (3.46) gegeben:

$$T_j = e^{A \Delta\theta} .$$

Dabei erhält man A aus (3.43)

$$A = \begin{pmatrix} R_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & R_{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_1^1 & M_{-1}^1 \\ M_1^{-1} & M_{-1}^{-1} \end{pmatrix} .$$

Die Matrix T besteht aus zwei Anteilen:

1. einer Matrix, die den Abschnitt mit dem Resonator der Länge null beschreibt

$$T(\Delta\theta = 0) ,$$

2. einer Matrix, die den Abschnitt der Länge $\Delta\theta$ ohne Resonator beschreibt

$$T(M = 0) ,$$

so daß für die Matrix T gilt

$$T = T(M = 0) \cdot T(\Delta\theta = 0) . \quad (3.135)$$

Da die Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k}$ proportional zum Kehrwert der Objektlänge $\Delta\theta$ sind (vgl. (3.36)), folgt für $T(\Delta\theta = 0)$

$$T(\Delta\theta = 0) = e^{-\mathcal{M}}$$

mit $\mathcal{M} = K \cdot \begin{pmatrix} M_1^1 & M_{-1}^1 \\ M_1^{-1} & M_{-1}^{-1} \end{pmatrix} .$ (3.136)

Verschwindet die Chromatizität, so ist nach (3.61)

$$\mathcal{M} = K \cdot \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} ,$$
 (3.137)

und daraus leitet sich

$$\mathcal{M}^n = 0 \text{ für } n \geq 2 .$$
 (3.138)

ab.

Somit gilt schließlich

$$T(\Delta\theta = 0) = \mathbb{1} - \mathcal{M} .$$
 (3.139)

Für die unter 2. angebene Matrix ergibt sich mit $M = 0$

$$\mathcal{R}(\Delta\theta) = T(M = 0) = \exp \left\{ \begin{pmatrix} R_1(\Delta\theta) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & R_{-1}(\Delta\theta) \end{pmatrix} \right\} .$$
 (3.140)

Setzt man (3.139) und (3.140) in (3.135) ein, dann erhält man

$$T = \mathcal{R}(\Delta\theta) \cdot (\mathbb{1} - \mathcal{M}) .$$
 (3.141)

Diese Gleichung wurde bereits in [22] hergeleitet, jedoch auf völlig anderem Wege. Um sich darüber zu orientieren, welche Moden zuerst koppeln (kleinster Frequenzabstand), ist es nützlich, das Frequenzspektrum für den ungestörten Fall ($I=0$) zu betrachten. Für die Frequenzen gilt nach (3.141)

$$\lambda_{mn} = e^{-i \frac{2\pi}{N} (m\nu_\beta + n\nu_s)}$$

bzw. (3.142)

$$\nu_{mn} = \frac{2\pi}{N} (m\nu_\beta + n\nu_s) .$$

Demnach beträgt der Frequenzunterschied zwischen zwei benachbarten Moden $\nu_{m,n}$ und $\nu_{m,n+1}$:

$$\nu_{m,n+1} - \nu_{m,n} = \frac{2\pi}{N} \nu_s .$$

Beachtet man, daß sich die Matrixelemente von \mathcal{M} um den Faktor $\frac{2\pi}{N}$ von denen in Abschnitt 3.7.1 unterscheiden, dann führt die Kopplung der Moden $(m, n+1)(m, n)$ zur üblichen Moden - Kopplungsinstabilität, die erwartungsgemäß in diesem Modell enthalten ist. Darüberhinaus können aber auch andere Moden koppeln. Dies wird deutlich, wenn man annimmt, daß die Zahl der Resonatoren zwei ist.

Mit

$$\nu_\beta = k + \delta\nu_\beta , \quad |\delta\nu_\beta| < 1 , \quad k \text{ natürliche Zahl}$$
 (3.143)

folgt für die Frequenzen (3.142)

$$\nu_{mn} = \pi (m\delta\nu_\beta + n\nu_s) . \quad (3.144)$$

Der Frequenzunterschied zwischen den Moden $m, -n$ und $-m, n$

$$\Delta\nu = 2\pi (\delta\nu_\beta - n\nu_s) \quad (3.145)$$

kann insbesondere für

$$\delta\nu_\beta \approx n\nu_s \quad (3.146)$$

kleiner sein als der Synchrotrontune, so daß diese Moden für einen kleineren Strom als dem üblichen Schwellenstrom (3.125) zu einer Instabilität koppeln können.

Um diese Instabilitäten näher untersuchen zu können, werden zwei Moden $(1nk)(-1lj)$ betrachtet und die Kopplung zu allen anderen Moden vernachlässigt.

Mit dieser Einschränkung errechnen sich die Eigenwerte von (3.141) für diese speziellen Moden aus:

$$\begin{aligned} & \det(\mathbb{1}\lambda - T) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} e^{-i\Delta\theta(\nu_\beta + n\nu_s)}(1 - M_1) - \lambda & -e^{-i\Delta\theta(\nu_\beta + n\nu_s)} M_{12} \\ e^{-i\Delta\theta(-\nu_\beta + l\nu_s)} M_{21} & e^{-i\Delta\theta(-\nu_\beta + l\nu_s)}(1 + M_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.147)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{1nk}^{1nk}(\xi = 0) \cdot K & M_{12} &= M_{-1lj}^{1nk}(\xi = 0) \cdot K \\ M_2 &= M_{-1lj}^{-1lj}(\xi = 0) \cdot K & M_{21} &= M_{1nk}^{-1lj}(\xi = 0) \cdot K \end{aligned} \quad (3.148)$$

Setzt man

$$\lambda = e^{-i\Delta\theta(n+l)\frac{\nu_s}{2}} \cdot \mu \quad (3.149)$$

sowie

$$\Delta\nu = \frac{l-n}{2} \nu_s , \quad (3.150)$$

dann erhält man die Eigenwerte von (3.147) aus

$$\begin{aligned} \mu^2 - 2\mu & (\cos \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu) + \frac{1}{2}(M_2 e^{i\Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu)} - M_1 e^{-i\Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu)}) \\ & + (1 - M_1)(1 + M_2) + M_{12}M_{21} = 0 . \end{aligned} \quad (3.151)$$

Betrachtet man speziell $l = -n$, dann gilt wegen (3.53) für $\xi = 0$

$$M_1 = M_2 = M_{12} = M_{21} = M$$

oder

$$\mu^2 - 2\mu (\cos \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu) + iM \sin \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu)) + 1 = 0 . \quad (3.152)$$

Nach Gleichung (3.57) sind alle Matrixelemente für $\xi = 0$ imaginär, so daß die Stabilitätsbedingung $|\mu| \leq 1$ mit $M = i\bar{M}$

$$\left| \cos \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu) - \bar{M} \sin \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu) \right| \leq 1 \quad (3.153)$$

lautet.

Da die Matrixelemente klein gegen 1 sind, treten Instabilitäten nur in der Nähe von

$$\Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu) = k \cdot \pi - \delta \quad \text{mit } |\delta| \ll 1 \quad (3.154)$$

auf. Für den Fall einer Instabilität erhält man

$$\begin{aligned} & \left| \cos \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu) - \bar{M} \sin \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu) \right| \\ & = \left| 1 - \frac{\delta^2}{2} + \bar{M}\delta \right| > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\bar{M}| > \frac{|\delta|}{2} . \end{aligned} \quad (3.155)$$

Die Instabilitätsbedingung lautet demnach mit $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$ und (3.150):

$$\nu_\beta = \frac{kN}{2} + n'\nu_s - \frac{N}{2\pi}\delta ; \quad \frac{|\delta|}{2} \leq |\bar{M}| \ll 1 \quad (3.156)$$

wobei $n = -n'$ und $l = n'$ ist. Eine Relation, die in [24] auf anderem Wege gefunden wurde. Gleichung (3.146) sowie (3.156) erinnern an die Bedingung für das Auftreten von Synchro-Betatron Resonanzen [20]. Da die in (3.146) und (3.156) angegebenen Resonanzen zu kohärenten Bewegungen führen, nennt man die damit verbundenen Instabilitäten *kohärente Synchro-Betatron Resonanzen*.

Man erhält also für ein Objekt Satellitenresonanzen in der Nähe jeder halben Zahl

$$\nu_\beta \approx \frac{n}{2} + m\nu_s ,$$

und für zwei Objekte Satellitenresonanzen in der Nähe jeder ganzen Zahl

$$\nu_\beta \approx n + m\nu_s .$$

Bis jetzt könnte der Eindruck entstehen, daß nur Moden $(m, -n)$ bzw. $(-m, n)$ zu Resonanzen führen. Daß dies nicht richtig ist, wird deutlich, wenn man das Eigenwertproblem (3.147) für $\mu = \exp(i \Delta\theta(n + l)\frac{\nu_s}{2}) \cdot \lambda$, also

$$\begin{vmatrix} e^{-i \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu)}(1 - M_1) - \mu & -e^{-i \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu)} M_{12} \\ e^{i \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu)} M_{21} & e^{i \Delta\theta(\nu_\beta - \Delta\nu)}(1 + M_2) - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (3.157)$$

in der Nähe der Resonanz (3.154) betrachtet und

$$\mu = e^{ix} \quad \text{mit } |x| \ll 1$$

setzt. Dann gilt in linearer Näherung mit $M_i = i\bar{M}_i$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \delta - \bar{M}_1 + x & -\bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & -\delta + \bar{M}_2 + x \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} & = \frac{\bar{M}_1 - \bar{M}_2}{2} \pm \sqrt{\left(\delta - \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{2}\right)^2 - \bar{M}_{12}\bar{M}_{21}} . \end{aligned} \quad (3.158)$$

Die beiden letzten Gleichungen erinnern an die entsprechenden Gleichungen (3.110) (3.111) für die Moden-Kopplung bei verteilten Objekten.

Wegen (3.113)

$$M_{12} \cdot M_{21} = \begin{cases} -M_{12}^2 & \text{für } n' - n \text{ ungerade} \\ M_{12}^2 & \text{für } n' - n \text{ gerade} \end{cases}$$

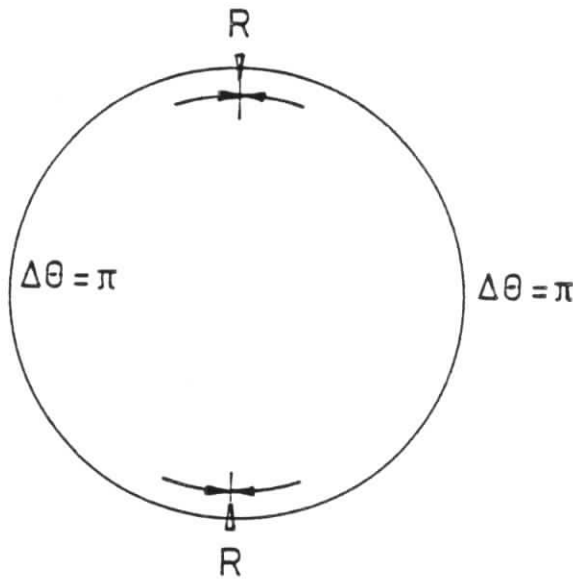


Abbildung 3.11: Schematische Darstellung eines aus zwei punktförmigen Resonatoren bestehenden Beschleunigers; jeder der punktförmigen Resonatoren repräsentiert jeweils 28 fünf- und siebenzellige Resonatoren, deren Kick Parameter in Abb. (3.5) wiedergegeben sind.

koppeln diesmal aber entweder zwei gerade Moden (n und l gerade Zahlen) oder zwei ungerade Moden zu einer Instabilität. Damit ist $\Delta\nu$ (3.150) immer ein ganzzahliges Vielfaches des Synchrotrontunes und die für den speziellen Fall der Kopplung der Moden $(1, -n)$ und $(-1, n)$ hergeleitete Resonanzbedingung (3.154) bzw. (3.156) ist allgemein gültig. Wie im Falle gleichmäßig verteilter Resonatoren kann eine Formel für den Schwellenstrom hergeleitet werden (vgl. (3.125)):

$$I_{th} = \frac{4\delta E/e}{\beta\{|\bar{M}_1 + \bar{M}_2| + 2|\bar{M}_{12}|\}}, \quad (3.159)$$

d.h. der Schwellenstrom nimmt linear mit dem Abstand δ zur Satellitenfrequenz (3.156) zu. Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zum Fall der gleichmäßig verteilten Resonatoren:

1. Der Schwellenstrom ist abhängig vom Betatruntune.
2. Da entweder zwei gerade bzw. zwei ungerade Moden zu einer resonanzartigen Instabilität koppeln, gilt für alle beteiligten Matrixelemente

$$M_{-mlj}^{mnk} \quad n - l \text{ gerade Zahl} . \quad (3.160)$$

Nach Gleichung (3.94) sind damit *alle* Matrixelemente proportional zu k_{\perp} :

$$M_{-mlj}^{mnk} \sim k_{\perp} \quad (3.161)$$

und die Instabilitätsschwelle ist unabhängig von k_{\parallel} .

Zur Illustration obiger Ergebnisse wird der in Abbildung (3.11) dargestellte Modellbeschleuniger untersucht.

Dazu werden die Matrix T (3.141) für eine bestimmte Anzahl von Moden aufgestellt und die Eigenwerte von T mit Hilfe eines Computerprogramms berechnet. Bei der Untersuchung werden alle azimuthalen Moden von $n = -2$ bis $n = 2$ berücksichtigt.

Beachtet man, daß jeweils zwei gerade bzw. ungerade Moden zu einer Resonanz koppeln, dann treten in diesem Fall Resonanzen in der Nähe folgender Werte des Überhangs des Betatruntunes auf:

$\delta\nu_{\beta}$	0	ν_s	$2\nu_s$
τ_{max} [ms]	0.2	4.2	13.9

Tabelle 3.1: In der Nähe der in der oberen Zeile aufgeführten Werte des Überhangs des Betatron tunes treten kohärente Synchro-Betatron Resonanzen auf, deren maximale Anwachszeiten τ_{max} in der unteren Zeile für einen Bunchstrom von 1 mA angegeben sind.

- $\delta\nu_{\beta} \approx 0$ koppelnde Modenpaare: (1,0,k) (-1,0,k'),
- $\delta\nu_{\beta} \approx \nu_s$ koppelnde Modenpaare: (1,-1,0) (-1,1,0); (1,0,0) (-1,2,0) und
- $\delta\nu_{\beta} \approx 2\nu_s$ koppelnde Modenpaare: (1,-2,0) (-1,2,0) .

Die Abbildung (3.12) zeigt die Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Betatron tune und Abbildung (3.13) entnimmt man Details der Resonanzstruktur wie Resonanzbreite und Form der Resonanzkurve.

Neben der Resonanzbreite ist auch die Anwachszeit innerhalb des Resonanzbereiches wichtig, da Resonanzen mit sehr großen Anwachszeiten ungefährlich sind. Diese Anwachszeiten lassen sich natürlich aus den Eigenwerten numerisch bestimmen.

Man kann sich einen Überblick über die maximalen Anwachszeiten verschaffen. Die Anwachszeiten sind umgekehrt proportional zum Imaginärteil der Eigenfrequenzen, die sich aus Gleichung (3.158) ergeben. Der maximale Wert des Imaginärteils ist

$$(\text{Im}x)_{max} = |M_{1lj}^{1nk}| \cdot K \quad (3.162)$$

Mit den in (3.94) angegebenen Matrixelementen und den in Abbildung (3.5) angegebenen Werten der Kickparameter lassen sich die maximalen Anwachszeiten berechnen (siehe Tabelle (3.1)). Die Anwachszeiten der Resonanzen niedriger Ordnung sind so groß, daß man sie beobachten könnte. Allerdings sind diesen Resonanzen optische Resonanzen überlagert, so daß man den Beschleuniger in der Nähe dieser Werte nicht betreiben kann.

Die Anwachszeiten der höheren Resonanzen liegen meistens über den charakteristischen Dämpfungszeiten von Strahlungs- und Landaudämpfung, so daß sie sich einer Beobachtung entziehen.

Dieser Befund ist in Übereinstimmung mit dem Inhalt einer Arbeit [23], in der der spezielle Fall eines punktförmigen Resonators bei Anwesenheit von Strahlungsdämpfung untersucht wurde.

3.8.2 Beschleunigungsstrecken endlicher Länge

Um den Effekt der endlichen Länge der Beschleunigungsstrecken zu untersuchen, wird ein Speicherring mit zwei Resonatorstrecken der Länge $\Delta\theta$, die symmetrisch angeordnet sind, betrachtet (siehe Abbildung (3.14)).

Der Einfachheit halber wird angenommen, daß die Beschleunigungsstrecken aus jeweils N gleichen Resonatoren bestehen.

Die Transfermatrix eines Resonators lautet:

$$T_j = e^{A_j \Delta\theta} \quad .$$

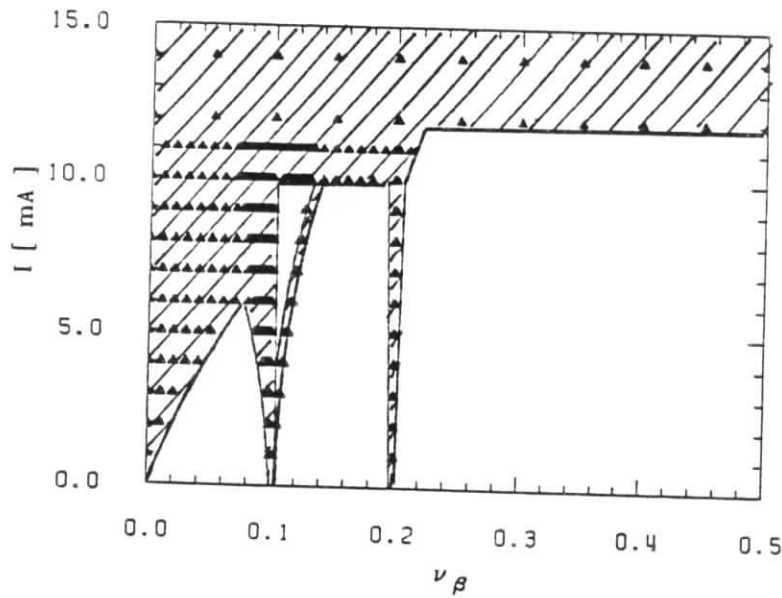


Abbildung 3.12: Abhängigkeit des Strahlstroms vom Betatron-tune: Die Untersuchungen wurden für den in Abb. (3.11) gezeigten Beschleuniger durchgeführt. Da bei der Berechnung sämtliche Eigenschwingungen bis $|n| \leq 2$ berücksichtigt wurden, treten kohärente Resonanzen in der Nähe von $\delta\nu_\beta = n\nu$, $n \in \{0, 1, 2\}$ auf. Die schraffierten Flächen bezeichnen Bereiche, in denen keine stabile Bewegung möglich ist, und die weißen Flächen stabile Bereiche. Oberhalb von 12 mA setzt die übliche Moden - Kopplungsinstabilität ein, so daß oberhalb dieses Wertes der Strahl instabil ist. Für Betatronwerte, die größer als 0.2 sind, erhält man das für die übliche Moden - Kopplungsinstabilität typische Resultat, daß der Schwellenstrom vom Betatron-tune unabhängig ist.

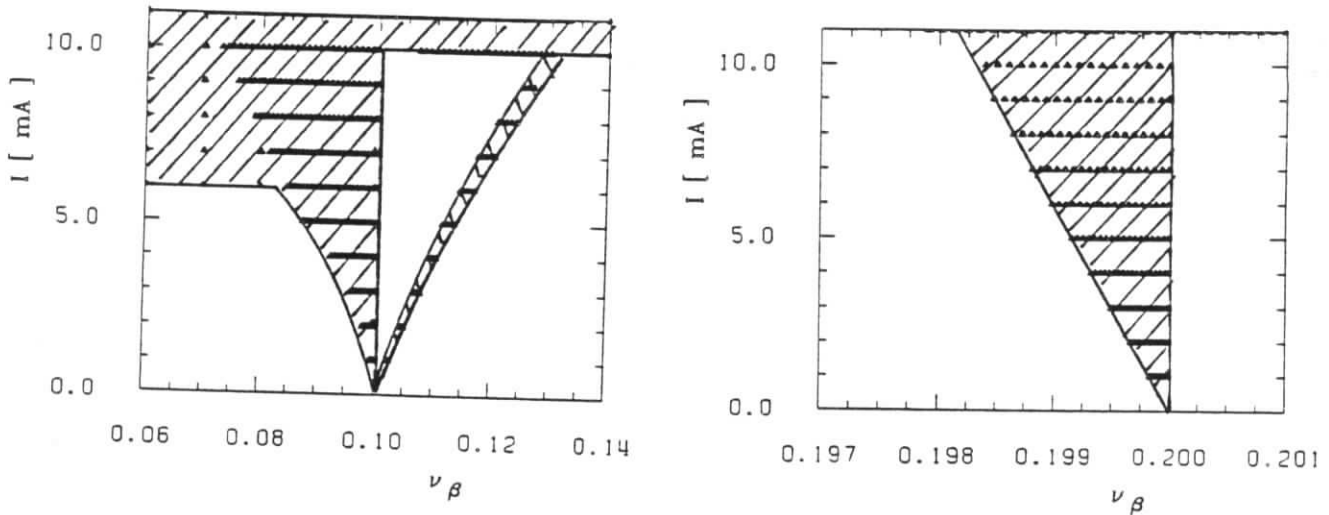


Abbildung 3.13: Struktur der Resonanzen: Die in Abbildung (3.12) gezeigten Resonanzen sind hier jede für sich hervorgehoben. Man erkennt deutlich die starke Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Betatron-tune in der Nähe der ersten Satellitenfrequenz $\delta\nu_\beta \approx \nu$, $= 0.1$. Darüberhinaus zeigt sich an diesem Beispiel deutlich, daß die höheren Resonanzen erheblich schmaler sind.

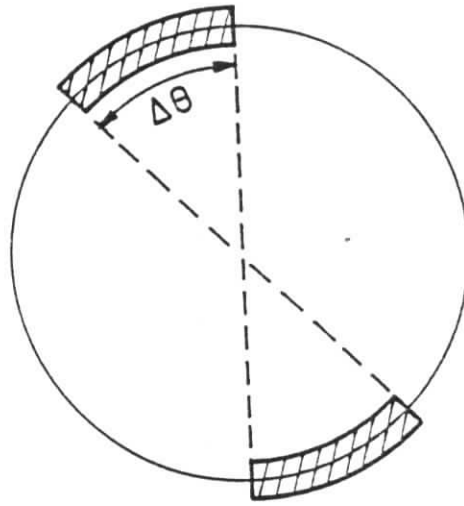


Abbildung 3.14: Schematische Darstellung des Speicherrings mit zwei symmetrisch angeordneten Beschleunigungsstrecken der Länge $\Delta\theta$. Jede der Beschleunigungsstrecken besteht aus N identischen Resonatoren. Aufgrund der periodischen Änderung der Betafunktion innerhalb der Beschleunigungsstrecken (siehe Abb. (3.15)) läßt sich diese durch einen mittleren Resonator der Länge $\Delta\theta$ beschreiben.

Die einzelnen \mathcal{A}_j unterscheiden sich dann nur durch die unterschiedlichen Werte der Betafunktion $\beta(\theta_j)$. Dies hat zur Folge, daß die Matrizen \mathcal{A}_j nicht vertauschbar sind oder

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] \neq 0 \quad (3.163)$$

ist.

Deshalb gilt nach der Baker - Campbell - Hausdorff Formel [45] für die Transfermatrix einer Beschleunigungsstrecke:

$$T = T_N \cdot \dots \cdot T_1 = e^{\sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j \Delta\theta_r + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j [\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_i] \Delta\theta_r^2 + \dots} \quad (3.164)$$

Dabei bezeichnet $\Delta\theta_r$ die Länge eines Resonators, so daß

$$\Delta\theta = N \cdot \Delta\theta_r \quad (3.165)$$

erfüllt ist.

Da sich die Betafunktion periodisch über die Beschleunigungsstrecke ändert (siehe Abbildung (3.15)), heben sich viele Terme in der Kommutator-Summe auf, so daß die Korrekturen durch die Kommutatoren in der Regel klein sind und vernachlässigt werden können (siehe Anhang A.4.4). Deshalb gilt in guter Näherung

$$T = T_N \cdot \dots \cdot T_1 \approx e^{\sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j \Delta\theta_r} = e^{\mathcal{A} \Delta\theta} \quad (3.166)$$

Dieses Ergebnis kann so interpretiert werden, daß sich die N Resonatoren durch einen mittleren Resonator der Länge $\Delta\theta$ ersetzen lassen.

Diese gute Näherung wird im weiteren benutzt.

In Abschnitt (3.8.1) wurde gezeigt, daß die Moden $(1, -n, k)$ und $(-1, n, k)$ zu kohärenten Resonanzen in der Nähe von

$$\nu_\beta \approx k + n\nu_s$$

führen.

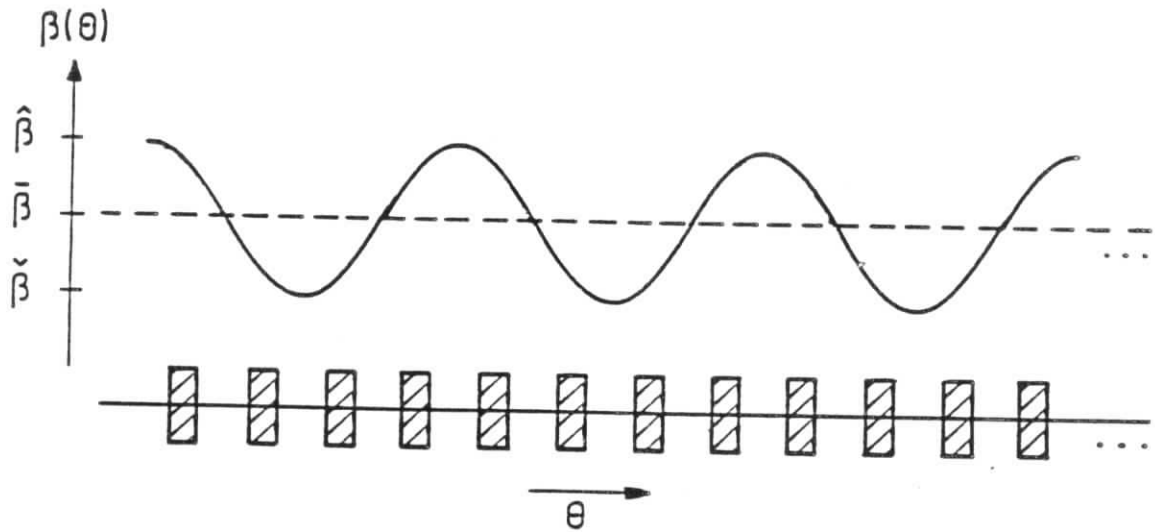


Abbildung 3.15: Periodische Änderung der Betafunktion innerhalb einer Beschleunigungsstrecke

Betrachtet man die Bewegungsgleichungen dieser beiden Moden (siehe (3.35)) und vernachlässigt die Kopplung an die anderen Moden, dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\theta} + i(\nu_\beta - n\nu_s) \right) a_1(\theta) &= -i \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} (a_1(\theta) + a_2(\theta)) \\ \left(\frac{d}{d\theta} - i(\nu_\beta - n\nu_s) \right) a_1(\theta) &= i \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} (a_1(\theta) + a_2(\theta)) \end{aligned} \quad (3.167)$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden

$$\begin{aligned} a_1(\theta) &= a_{1k}^{-n}(\theta) \quad a_2(\theta) = a_{-1k}^n(\theta) \\ i \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} &= K \cdot M_{nk}^{nk} = K \cdot M_{-nk}^{nk} = K \cdot M_{nk}^{-nk} = K \cdot M_{-nk}^{-nk} \quad (\text{vgl. (3.53)}) \\ \bar{M} &= \begin{cases} \frac{K}{i} \cdot M_{nk}^{nk} \cdot \Delta\theta & \text{für } 0 \leq \theta \leq \Delta\theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit Periode } \pi \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen (3.167) lassen sich folgende zwei Differentialgleichungen gewinnen:

$$\frac{d^2 a_k(\theta)}{d\theta^2} + \left(\nu_0^2 + 2 \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 \right) a_k(\theta) = 0 \quad k \in \{1, 2\}$$

mit

$$\nu_0 = \nu_\beta - n\nu_s \quad (3.168)$$

Diese Gleichungen sind so zu deuten:

1. Die a_k führen Betatronschwingungen aus; im Falle ohne Störung mit dem Tune ν_0 .
2. Die Beschleunigungsstrecken wirken auf die Eigenschwingungen des Bunches ($\nu_\beta + n\nu_s$) wie fokussierende bzw. defokussierende Quadrupole ein, die einen "Tune - shift" von

$$\frac{\bar{M}}{\Delta\theta}$$

verursachen. Da der "Tune - shift" sehr klein ist, ändert sich die durch ν_0 angegebene Größe der Fokussierung nur sehr wenig.

3. Unter der Annahme, daß die Längen der Beschleunigungsstrecken sehr kurz sind (genauer $\Delta\theta \rightarrow 0$), wirken sie periodisch (mit der Periode π) auf die Betatronschwingungen a_k ein und das "Frequenzspektrum" der Anregung besitzt gleich große Fourierkomponenten in der Nähe jeder ganzen Zahl. Damit bestimmt nur noch der Überhang δ des Betatrones

$$\nu_0 = k + \delta$$

die Stärke der Fokussierung. Ist der Überhang kleiner als der "Tune - shift" der Beschleunigungsstrecken, so wird die Fokussierung der Schwingung a_k aufgehoben, so daß keine periodische Bewegung sondern eine exponentiell anwachsende und eine exponentiell gedämpfte Bewegung vorliegt. Die Instabilitätsbedingung lautet also

$$\nu_0 = k + \delta \implies \nu_\beta = k + n\nu_s + \delta$$

$$|\delta| \leq \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} .$$

Diese Relation stimmt mit der Instabilitätsbedingung (3.156) für $N = 2$ überein. Die kohärenten Synchro-Betatron Resonanzen werden also durch den Verlust der Fokussierung der Schwingungen a_k verursacht. Der dafür verantwortliche "Tune - shift" ist proportional zu einem Matrixelement M_{nk}^{nk} . Dieses beschreibt die Frequenzverschiebung eines Schwingungsmodus und ist demnach proportional zu k_\perp . Deshalb ist es nicht verwunderlich, daß die Instabilitätsschwelle (3.159) nur von k_\perp und nicht von $k_{||}$ abhängt.

Die Interpretation der Gleichung (3.168) legt nahe, die Lösung von (3.168) für $\Delta\theta \neq 0$ im Formalismus von Transfermatrizen zu beschreiben. Einzelheiten findet man im Anhang A.4. Die wesentlichen Ergebnisse sollen hier angegeben und diskutiert werden.

Wenn man die Transfermatrix für einen halben Umlauf mit T_π bezeichnet, gilt aufgrund der Symmetrie der Anordnung für die Matrix des gesamten Ringes $T_{2\pi}$

$$T_{2\pi} = T_\pi^2 . \quad (3.169)$$

Damit sind die Stabilitätseigenschaften von $T_{2\pi}$ durch die von T_π eindeutig bestimmt. Da die Transfermatrix T_π die Determinante 1 besitzt, sind deren Eigenwerte durch die Spur von T_π festgelegt.

Die Stabilitätsbedingung $|\lambda_i| \leq 1$, wobei λ_i Eigenwert von T_π ist, ist dann zu folgender Ungleichung äquivalent:

$$\text{Stabilität} \iff \left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| \leq 1 . \quad (3.170)$$

In diesem Fall gilt (siehe Anhang A.4 (A.96))

$$\left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| = \left| \cos \nu_0(\pi - \Delta\theta) \cos \sqrt{\nu_0^2 + 2 \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 \Delta\theta} - \frac{\nu_0 \Delta\theta + \bar{M}}{\sqrt{\nu_0^2 + 2 \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 \Delta\theta}} \right. \\ \left. \sin \nu_0(\pi - \Delta\theta) \sin \sqrt{\nu_0^2 + 2 \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 \Delta\theta} \right| \quad (3.171)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Resonanzbedingungen für zwei punktförmige Resonatoren wiedergewinnen, wenn man den Grenzfall $\Delta\theta \rightarrow 0$ betrachtet (vgl. (3.153) für $N = 2$):

$$\left| \cos \nu_0 \pi - \bar{M} \sin \nu_0 \pi \right| \leq 1$$

Daraus leitet sich mit (3.168) die Resonanzbedingung

$$\nu_\beta \approx k + n\nu_s$$

ab.

Um den allgemeinen Fall $\Delta\theta \neq 0$ zu untersuchen, ist es günstig, eine Größe x einzuführen:

$$x = \Delta\theta \cdot \nu_\beta \quad (3.172)$$

Im folgenden wird angenommen, daß x wesentlich größer als die Matrixelemente M ist:

$$x \gg 2M \quad (3.173)$$

Diese Bedingung stellt keine starke Einschränkung dar, weil die Matrixelemente in der Regel klein gegen eins sind, insbesondere in dem hier interessierenden Fall resonanzähnlicher Instabilitäten bei kleinen Strömen.

Mit

$$\nu_0 = n + \delta \quad ; \quad |\delta| \leq \frac{1}{2}$$

läßt sich die Spur (3.171) mit Hilfe von (3.173) vereinfachen (siehe (A.104)):

$$\left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| = \left| \cos(\delta\pi + \bar{M}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}}{x} \right)^2 \sin(x + \bar{M}) \sin(\delta\pi - x) \right| \quad (3.174)$$

Die Ausdrücke der Spuren für Beschleunigungsstrecken endlicher Länge ($\Delta\theta \neq 0$) (3.174) und für punktförmige Beschleunigungsstrecken ($\Delta\theta = 0$) erlauben die Berechnung

1. der Resonanzbreiten

$$B_{\Delta\theta \neq 0} \text{ bzw. } B_{\Delta\theta = 0}$$

und

2. der maximalen Anwachszeiten

$$\tau_{max, \Delta\theta \neq 0} \text{ bzw. } \tau_{max, \Delta\theta = 0}$$

Mit den in Anhang A.4 angegebenen Resultaten lassen sich die Verhältnisse dieser Größen berechnen:

$$\frac{B_{\Delta\theta \neq 0}}{B_{\Delta\theta = 0}} = \left| \frac{\sin(x + M)}{x} \right|$$

$$\frac{\tau_{max, \Delta\theta \neq 0}}{\tau_{max, \Delta\theta = 0}} = \left| \frac{\sin(x + M)}{x} \right| \quad (3.175)$$

Diesen Gleichungen ist zu entnehmen, daß die Resonanzen für

$$\sin(x + M) = 0 \quad (3.176)$$

also für

$$x \approx n \cdot \pi \quad (3.177)$$

(da $M \ll 1$ ist) besonders stark unterdrückt werden.

Eine Unterdrückung findet aber auf jeden Fall immer für

$$x > 1 \quad (3.178)$$

statt. Mit (3.173) gilt also

$$\begin{aligned} \text{maximale Unterdrückung:} & \quad \Delta\theta \cdot \nu_\beta = n \cdot \pi \\ \text{Unterdrückung für:} & \quad \Delta\theta \cdot \nu_\beta > 1 \end{aligned} \quad (3.179)$$

Diese Bedingung wurde in [24] numerisch gefunden.

Resultate für den Speicherring PETRA

Für den Speicherring PETRA erhält man mit $\nu_\beta \approx 20$ sowie $R \approx 350m$ (mittlerer Maschinenradius) für die minimale Länge der Beschleunigungsstrecke, von welcher an eine Unterdrückung der Resonanzen stattfindet

$$L = \frac{R}{\nu_\beta} = 17.5 m .$$

Abbildung (3.16) zeigt die Abhängigkeit des Schwellenstroms für verschiedene Längen der Beschleunigungsstrecken.

Die Beschleunigungsstrecken im Speicherring PETRA haben in etwa eine Länge von 85 m, d.h. $x = \frac{3}{2}\pi$.

Der Abbildung (3.16d) entnimmt man, daß in PETRA oberhalb der ersten Satellitenfrequenz ($\delta\nu_\beta > \nu_s$) die Resonanzen so stark unterdrückt werden, daß sie nahezu verschwinden.

Betrachtet man die Tabelle (3.1), dann ergibt sich mit (3.175) für $x = \frac{3}{2}\pi$ für die Resonanz bei $\delta\nu_\beta \approx 2\nu_s$ eine maximale Anwachszeit von ca. 66 ms pro Milliampere. Dieser Wert liegt deutlich über dem der Dämpfungszeiten von Strahlungs- und Landaudämpfung.

Insofern ist es verständlich, daß kohärente Synchro - Betatron Resonanzen bisher nicht beobachtet wurden.

Zusammenfassung

Für die üblicherweise auftretenden Betatronwerte ($\nu_\beta > n + \nu_s$) kann die Lokalisierung der Resonatoren vernachlässigt werden und deshalb z.B. der Schwellenstrom mit Hilfe von Gleichung (3.125) berechnet werden kann.

Dieser Sachverhalt widerlegt die Vermutung, daß die Lokalisierung die Unterschiede zwischen den bisherigen Voraussagen und den experimentellen Ergebnissen reduzieren könne.

Nach den strukturellen Untersuchungen der vorigen Abschnitte wird sich nun im nächsten Abschnitt der zentralen Frage zugewendet, ob die Moden-Kopplungsinstabilität durch ein geeignetes Rückkopplungssystem kompensiert werden kann.

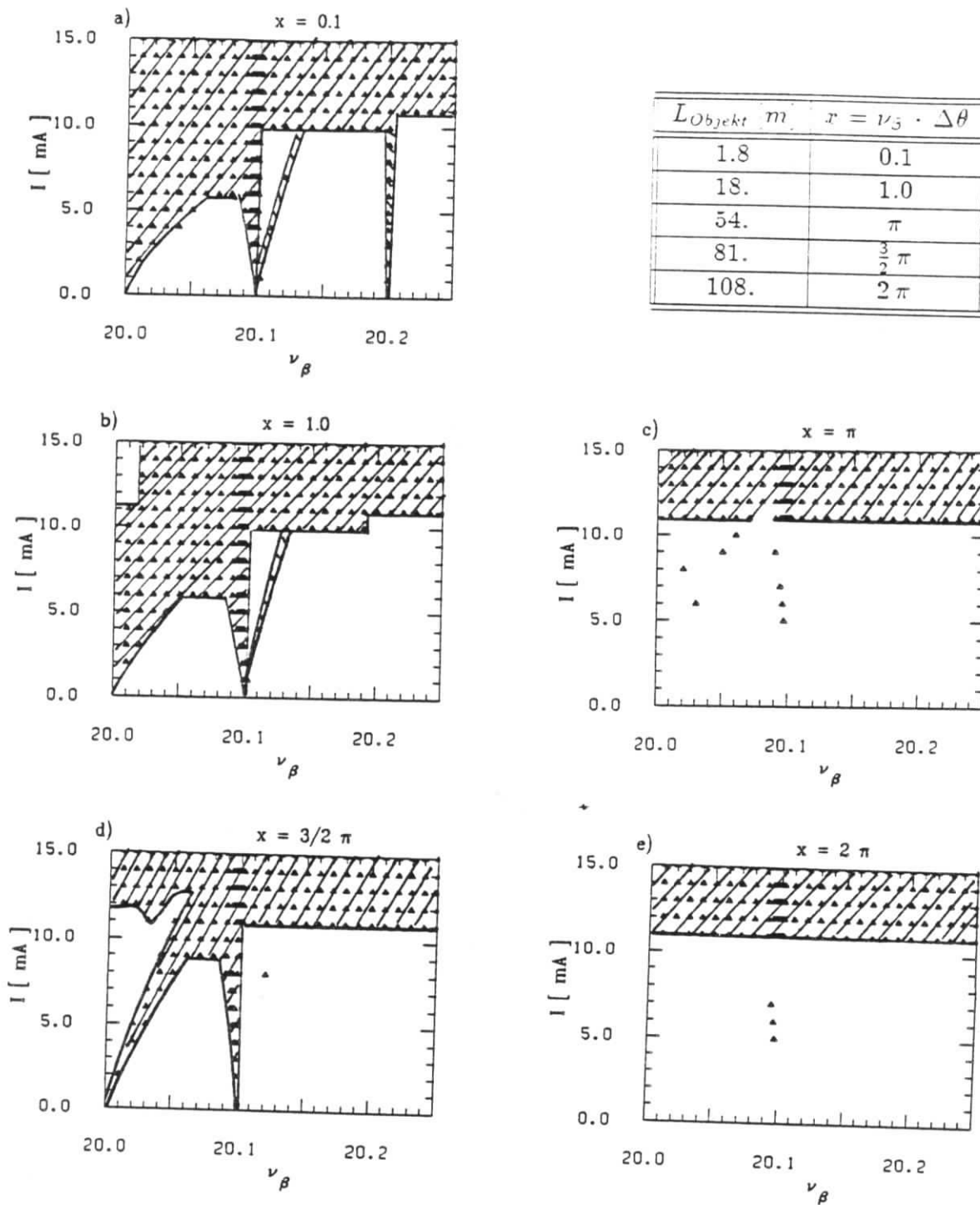


Abbildung 3.16: Schwellenstrom als Funktion des Betatrante für unterschiedliche Längen der Beschleunigungsstrecken: Die Untersuchungen wurden an dem in Abb. (3.14) dargestellten Modellbeschleuniger durchgeführt. Jede Beschleunigungsstrecke repräsentiert in diesem Falle jeweils 28 fünf- und siebenzellige Resonatoren. Die Berechnungen wurden für folgende Parameter durchgeführt: $\nu_s = 0.1$, $E = 7\text{GeV}$, $\sigma_z = 1\text{cm}$. Der Tabelle entnimmt man die Beziehungen zwischen den Werten $x = \Delta\theta \cdot \nu_{\beta}$ und der Länge der Beschleunigungsstrecke L_{Objekt} ($\Delta\theta = L_{\text{Objekt}} / R$, $R \approx 350\text{m}$ mittlerer Maschinenradius). Wie auch in Abbildung (3.12) bezeichnen die schraffierten Flächen instabile und die weißen stabile Bereiche. Abbildung a) zeigt, daß für $x \leq 1$ sich die Beschleunigungsstrecken wie punktförmige Resonatoren verhalten (vgl. Abb. 3.12). Die Abbildungen c) und e) geben die starke Unterdrückung der Resonanzen für $x = n\pi$ wieder. Für die Länge der Beschleunigungsstrecken in PETRA ($x \approx 3/2\pi$) Abbildung d) erkennt man eine deutliche Unterdrückung der Resonanzen oberhalb der ersten Satellitenfrequenz.

Kapitel 4

Kompensation der transversalen Moden - Kopplungsinstabilität durch Rückkopplungssysteme

Viele Instabilitäten, die durch die Wechselwirkung des Strahls mit der metallischen Umgebung verursacht werden, konnten, nachdem der Instabilitätsmechanismus bekannt war, durch geeignete Maßnahmen erfolgreich bekämpft werden.

Eine Methode zur Stabilisierung des Strahls, die zwar technisch aufwendig ist, besteht im Einsatz von Rückkopplungssystemen.

In Abbildung (4.1) ist der Aufbau eines Rückkopplungssystems vereinfacht dargestellt.

Auch im Falle der Moden - Kopplungsinstabilität wurde vorgeschlagen, mit Hilfe eines Rückkopplungssystems die Instabilität zu kompensieren.

Dabei kann man im Prinzip zwei Wege einschlagen:

1. Man kann versuchen, den instabilen Modus so stark zu *dämpfen*, so daß dieser Modus nicht mehr anwächst. Ein derartiges System ist unter der Bezeichnung *resistives Rückkopplungssystem* bekannt.
2. Man kann daran denken, durch ein Rückkopplungssystem den Frequenzabstand der beiden zur Instabilität koppelnden Moden zu vergrößern (siehe auch Abbildung (4.2)). Ein solches System nennt man *reaktives Rückkopplungssystem*.

Erste theoretische Untersuchungen zeigten, daß ein resistives Rückkopplungssystem nicht zur Stabilisierung des Strahls führt [29].

Ein reaktives Rückkopplungssystem wurde zuerst mit Hilfe des Zweiteilchen-Modells [28] und später im Rahmen des Vlasov-Gleichungsformalismus [29] untersucht. In beiden Arbeiten wurde angenommen, daß die Lokalisierung sowohl der Resonatoren als auch des Rückkopplungssystems nicht berücksichtigt werden muß.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen war, daß der Schwellenstrom der Moden - Kopplungsinstabilität mit Hilfe eines reaktiven Rückkopplungssystems um den Faktor 2 - 4 erhöht werden kann (siehe Abbildung (4.2)).

Die Effekte der Lokalisierung des Rückkopplungssystems wurden daraufhin innerhalb einer Mehrteilchensimulation untersucht und es stellte sich heraus, daß das reaktive System nur unter stark eingeschränkten Bedingungen den gewünschten Effekt erzielt und im allgemeinen sogar den Schwellenstrom reduziert.

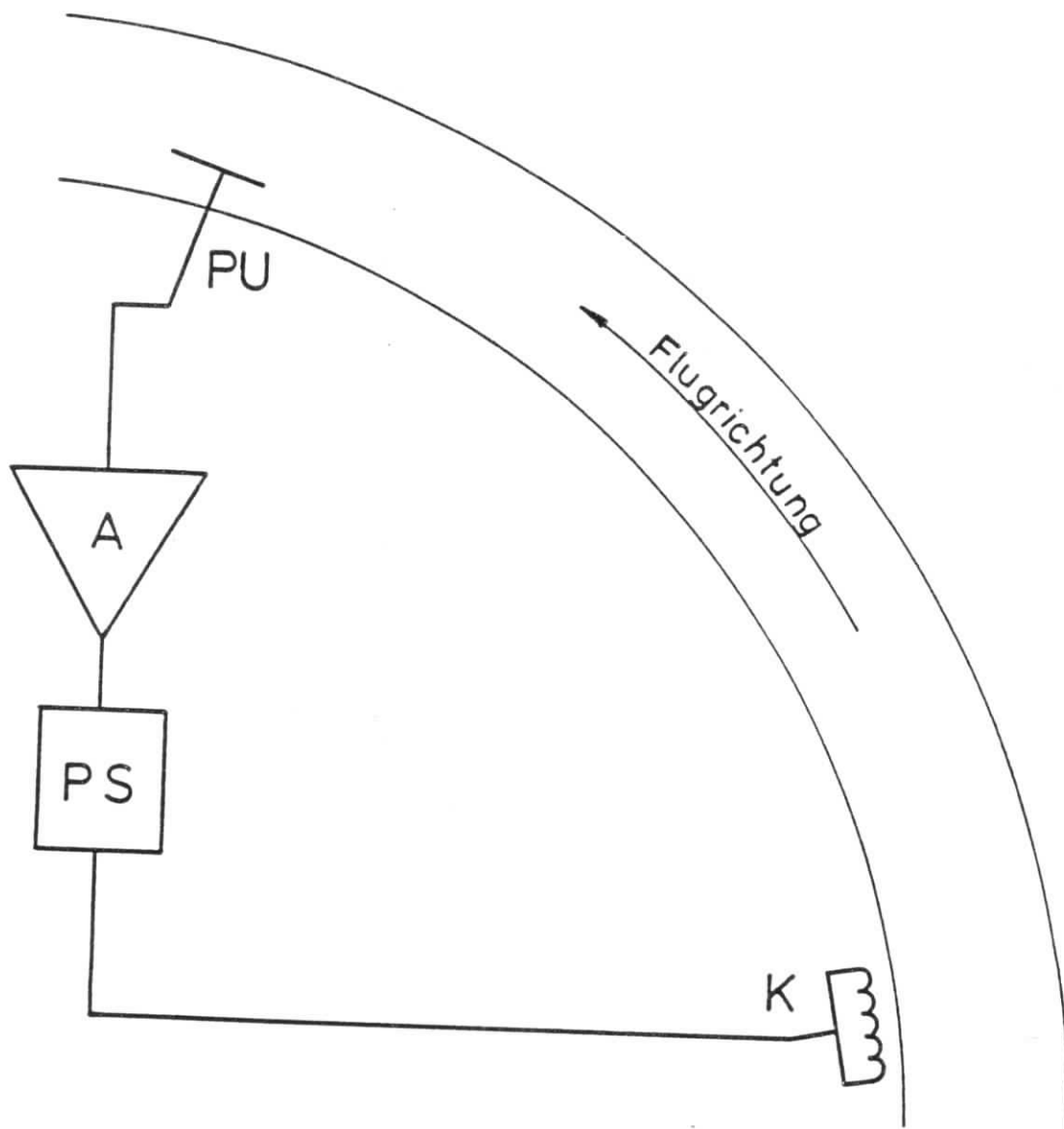


Abbildung 4.1: Vereinfachte Darstellung der Wirkungsweise eines Rückkopplungssystems: Das Schwingungssignal des Strahls wird mittels eines Monitors (pick-up)(PU) erfaßt und verstärkt (A). Nach geeigneter Phasendrehung (PS) wird eine Ablenkeinheit (Resonator oder Kicker)(K), die auf den Strahl zurückwirken kann, mit diesem Signal moduliert. Diese Rückkopplungsschleife (closed loop) führt zu einer Dämpfung der Strahlschwingung

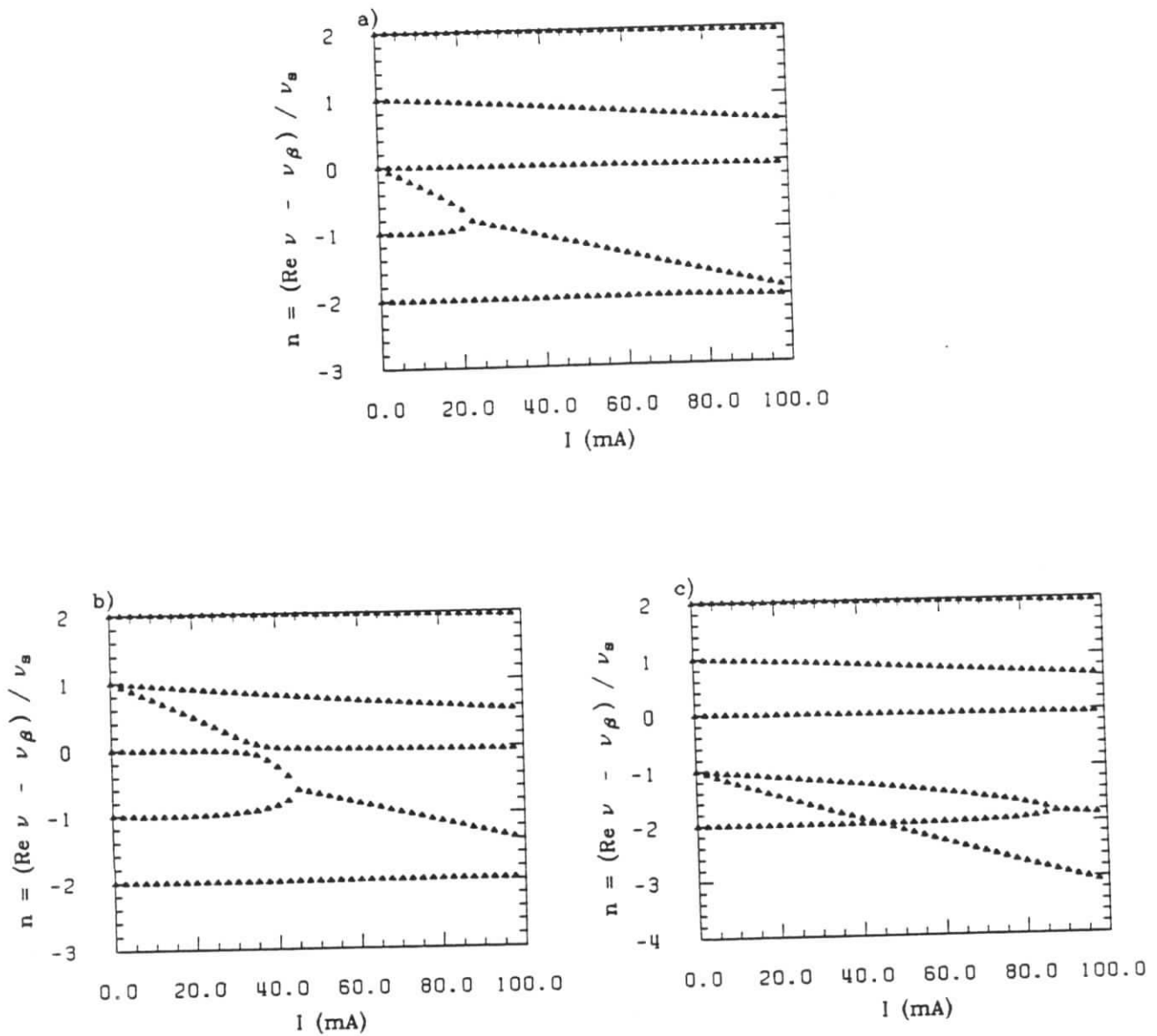


Abbildung 4.2: Vereinfachte Darstellung der Wirkungsweise eines reaktiven Rückkopplungssystems: Abbildung a) zeigt die Moden-Kopplungsinstabilität ohne Rückkopplungssystem; Abbildung b) zeigt einen Speicherring mit einem idealen reaktiven Rückkopplungssystem des Typs A: das Rückkopplungssystem ist in der Lage den Abstand zwischen dem Fundamentalmodus $n = 0$ und dem ersten head-tail Modus $n = -1$ zu vergrößern. Da der Fundamentalmodus auch mit dem Modus $n = 1$ koppeln kann, darf die Vergrößerung des Abstandes den Wert des Synchrotrontunes nicht überschreiten. Damit kann mit dem System Typ A eine maximale Erhöhung des Schwellenstroms um den Faktor 2 erzielt werden ($40\text{mA} / 23\text{mA}$). Abbildung c) zeigt die Wirkung eines idealen reaktiven Rückkopplungssystems vom Typ B: Die Frequenz des Fundamentalmodus wird so weit abgesenkt, daß sie unterhalb der des ersten head-tail Modus liegt. Da im Falle der üblichen Modenkopplung nur ein gerader und ein ungerader Modus zu einer Instabilität koppeln, führt die weitere Absenkung der Frequenz durch die Wechselwirkung des Bunches mit der Umgebung nicht zu einer Instabilität durch Kopplung der Moden $n = 0$ und $n = -2$. Es kommt vielmehr zu einer Art Reflexion des Modus $n = 0$ am Modus $n = -2$ und erst danach koppelt einer der "reflektierten" Moden mit dem Modus $n = -1$, so daß sich eine Erhöhung des Schwellenstroms um den Faktor 4 ergibt ($85\text{mA} / 23\text{mA}$).

Die Vermutung liegt nun nahe, daß die Lokalisierung des Rückkopplungssystems eine wesentliche Rolle spielt.

Der in Kapitel 3 entwickelte Formalismus für lokalisierte Hochfrequenzelemente soll nun herangezogen werden, um den Einfluß eines Rückkopplungssystems auf die transversale Moden - Kopplungsinstabilität zu untersuchen.

4.1 Vorbemerkungen zum Rückkopplungssystem

Um den Strahl zu stabilisieren, wäre es ideal, wenn man die Wirkung der Resonatoren auf die einzelnen Eigenschwingungen des Bunches kompensieren könnte.

Zu einer solchen Kompensation benötigt man aber ein Rückkopplungssystem, das in der Lage ist, auf alle internen Schwingungsmoden des Bunches einzuwirken. Die üblichen Ablenkeinheiten (Resonatoren oder Kicker) sind aber im allgemeinen zu langsam, um auf interne Moden einwirken zu können, so daß in der Regel nur der Fundamentalmodus beeinflusst wird.

Um den Fundamentalmodus anzuregen, muß der Kicker lediglich ein über die Bunchlänge konstante Kraft ausüben. Die Länge des Kickerimpulses orientiert sich an typischen Bunchabständen in Elektron - Positron Speicherringen und beträgt bei großen Speicherringen einige Mikrosekunden. Damit muß das Rückkopplungssystem im Frequenzbereich in etwa eine Bandbreite von einigen 100kHz besitzen. Solche Systeme existieren und sind erprobt.

Interne Schwingungen des Bunches können nur beeinflusst werden, wenn das Kickerfeld innerhalb eines Bunches hinreichend schnell variiert. Bei den kurzen Bunchlängen von Elektronen bzw. Positronen (typisch einige Zentimeter) benötigt man dazu Frequenzen im Gigahertz Bereich. Kicker mit einer derart hohen Grundfrequenz und einer Bandbreite von von einigen hundert Kilohertz sind bisher nicht gebaut worden und erfordern hohen technischen Aufwand. Deshalb wird im folgenden davon ausgegangen, daß der Kicker eine über die Bunchlänge konstante Kraft ausübt.

Da der Kicker nur auf den Fundamentalmodus einwirken kann, erscheint es sinnvoll, bezüglich der Signalerfassung auch nur das über die Bunchlänge gemittelte Dipolmoment zu messen und auf ein aufwendiges Verfahren zur Erfassung interner Schwingungen zu verzichten.

Ein Verständnis der Wirkungsweise dieses Rückkopplungssystems gewinnt man zunächst, wenn man die Modenkopplung vernachlässigt.

4.1.1 Rückkopplungssystem ohne Störung

Zuerst wird der Fall betrachtet, daß der Bunch transversale Dipolschwingungen ausführt, wobei die Bewegung durch die Koordinate x beschrieben wird. Dann gilt

$$x'' + \nu^2 x = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Bekanntlich läßt sich die Bewegung in x durch Transfermatrizen beschreiben (siehe Anhang A.4), d.h. die Änderung der Schwingung zwischen Punkt 1 und 2 erhält man aus:

$$\vec{y}_2 = T_{21} \vec{y}_1 \quad ; \quad \vec{y}_i = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_i$$

$$T_{21} = \begin{pmatrix} \cos \nu(\theta_2 - \theta_1) & \frac{1}{\nu} \sin \nu(\theta_2 - \theta_1) \\ -\nu \sin \nu(\theta_2 - \theta_1) & \cos \nu(\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix} \quad .$$

Der Aufbau des Rückkopplungssystems ist in Abbildung (4.3) schematisch dargestellt.

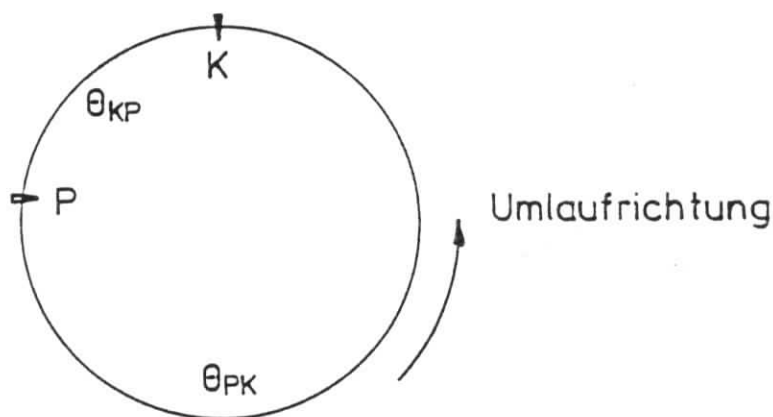


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung des Rückkopplungssystems: der Kicker ist mit K der Monitor mit P bezeichnet;

Startet man direkt hinter dem Kicker, dann wird bei Erreichen des Monitors das Dipolmoment erfaßt und zum Zeitpunkt, an dem die Teilchen den Kicker erreichen, entsprechend dem gemessenen Dipolmoment auf den Strahl eingewirkt.

Da der Kicker verglichen mit der Betatronwellenlänge ($\lambda = \frac{2\pi R}{\nu_\beta}$) kurz ist, erzeugt er eine Änderung von x' , die proportional zur Amplitude am Ort des Monitors ist:

$$\vec{y}_{K^+} = \vec{y}_{K^-} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}_P, \quad (4.2)$$

wobei mit K^+ bzw. K^- die Koordinaten unmittelbar nach bzw. vor dem Kicker bezeichnet werden.

Die Koordinaten am Ort des Monitors und am Ort des Kickers sind durch

$$\vec{y}_P = T_{PK}^{-1} \vec{y}_{K^-} \quad (4.3)$$

verknüpft, und damit erhält man

$$\vec{y}_{K^+} = (\mathbb{1} + k K T_{PK}^{-1}) \vec{y}_{K^-} \quad (4.4)$$

mit

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiert man die Matrix des Rückkopplungssystems durch

$$T_{FB} = (\mathbb{1} + k K T_{PK}^{-1}), \quad (4.5)$$

und ist T_0 die Transfermatrix für die Bewegung unmittelbar hinter dem Kicker bis unmittelbar vor dem Kicker, dann lautet die Transfermatrix für einen Umlauf

$$T = T_{FB} \cdot T_0. \quad (4.6)$$

Die Stabilität der Bewegung ist wiederum durch die Eigenwerte von T bestimmt und diese ergeben sich aus

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Sp}(T) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{Sp}(T)\right)^2 - \det T}. \quad (4.7)$$

Für die Spur und die Determinante von T folgt in diesem Fall (siehe Anhang A.4):

$$\det T = \det T_{FB} = 1 + k (T_{PK}^{-1})_{12} \quad (4.8)$$

und

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \frac{1}{2} \text{Sp}(T_0 + k K T_{KP}) = \frac{1}{2} \text{Sp}(T_0) + \frac{k}{2} (T_{KP})_{12} . \quad (4.9)$$

Setzt man die Umlaufmatrix

$$T_0 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu & \frac{1}{\nu} \sin 2\pi\nu \\ -\nu \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu \end{pmatrix}$$

in die Gleichungen (4.9) und (4.8) ein, dann erhält man

$$\det T = 1 - \frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK} \nu \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + \frac{k}{2\nu} \sin(2\pi - \theta_{PK}) \nu . \quad (4.11)$$

An dieser Stelle wird es möglich Reaktivität und Resistivität zu definieren:

1. reaktives Rückkopplungssystem:

$$\det T = 1 \implies \theta_{PK} \cdot \nu = m \cdot \pi \quad (4.12)$$

Die Betatronphase zwischen Monitor P und Kicker K muß also ein ganzzahliges Vielfaches von π sein.

Damit erhält man für die Spur

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + (-1)^m \frac{k}{2\nu} \sin 2\pi\nu .$$

Da der Rückkopplungsparameter k im allgemeinen klein gegen den Betatronstune ν ist, ergibt sich für den Wert der Spur in guter Näherung

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + (-1)^m \frac{k}{2\nu} \sin 2\pi\nu \approx \cos(2\pi\nu - (-1)^m \frac{k}{2\nu}) .$$

Die Eigenwerte lauten demnach

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\mu}$$

mit

$$\mu = 2\pi\nu - (-1)^m \frac{k}{2\nu} ,$$

d.h. das Rückkopplungssystem führt wie gewünscht *nur* zu einer Frequenzverschiebung.

2. resistives Rückkopplungssystem: Jedes Rückkopplungssystem, das zu einer Dämpfung der Schwingungsamplitude x führt, nennt man resistives Rückkopplungssystem.

Für den Fall das

$$\left(\frac{1}{2} \text{Sp}(T) \right)^2 - \det T < 0$$

gilt, errechnet man für den Betrag der Eigenwerte $\lambda_{1,2}$

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\det T} = \sqrt{1 - \frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK\nu}} .$$

Ist

$$\frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK\nu} > 0 ,$$

dann wird die Schwingung gedämpft und die maximale Dämpfung wird im Falle von

$$|\sin \theta_{PK\nu}| = 1 \implies \theta_{PK\nu} = \frac{m+1}{2} \pi$$

erzielt.

Ein resistives Rückkopplungssystem mit maximaler Dämpfung liegt also vor, wenn der Betatronphasenvorschub zwischen Monitor und Kicker gerade ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist.

Damit ist die Wirkungsweise eines Rückkopplungssystems für ungestörte Dipolschwingungen bekannt. Ein geeignet gewählter Betatronphasenvorschub zwischen Monitor und Kicker erlaubt die Schwingungen zu dämpfen oder in der Frequenz zu verschieben.

4.1.2 Rückkopplungssystem mit mehreren Störungen

Bisher wurde der Einfluß eines Rückkopplungssystems auf ungestörte transversale Dipolschwingungen bei Vernachlässigung der Modenkopplung untersucht. Die Wechselwirkung des Bunches mit seiner metallischen Umgebung soll vereinfacht eingeführt werden.

Da ein Resonator ähnlich wie ein Quadrupol wirkt (vgl. Abschnitt 3.8.2), wird die Wechselwirkung als quadrupolartige Störung eingebaut.

Die Gleichung eines Störquadrupols lautet (siehe Anhang A.4):

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \implies \det T_C = 1 . \quad (4.13)$$

Es gibt zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten den "Quadrupol" einzubauen:

- a) zwischen Kicker und Monitor (siehe Abbildung (4.4)) Durch den Einbau des "Quadrupols" ändert sich nur die Matrix T_{KP} . Berechnet man Spur und Determinante, dann erhält man (siehe Anhang A.4):

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi\nu + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\nu} \sin \theta_{KP\nu} + \frac{C}{\nu^2} \sin \theta_{KC\nu} \sin \theta_{CP\nu} \right) \quad (4.14)$$

und

$$\det T = 1 - \frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK\nu} . \quad (4.15)$$

Somit wird die Determinante durch den Einbau der Störung nicht geändert.

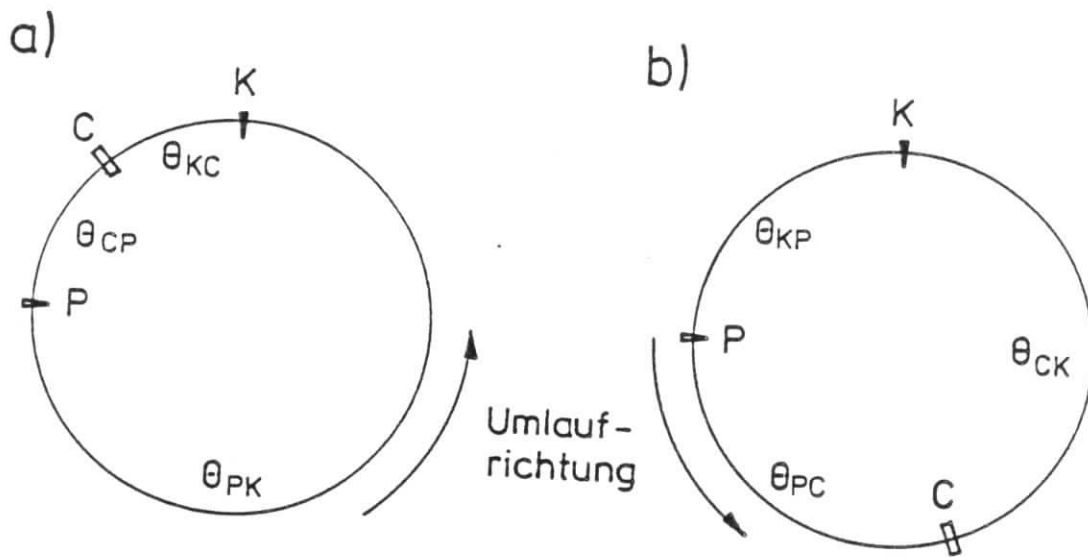


Abbildung 4.4: Eine quadrupolartige Störung durch einen Resonator kann auf zwei verschiedene Arten eingebaut werden: Fall a) zwischen Kicker und Monitor (Abb. a)); Fall b) zwischen Monitor und Kicker (Abb. b)).

b) zwischen Monitor und Kicker (siehe Abbildung (4.4)). In diesem Fall ändert sich nur die Matrix T_{PK} . Die Berechnung von Spur und Determinante führt zu:

$$\det T = 1 + k \left(-\frac{1}{\nu} \sin \theta_{PK} \nu - \frac{C}{\nu^2} \sin \theta_{PC} \nu \sin \theta_{CK} \nu \right) \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi \nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi \nu + \frac{k}{2\nu} \sin(2\pi \nu - \theta_{KP} \nu) \quad (4.17)$$

In beiden Fällen führt der Einbau eines Störquadrupols zur Änderung der Spur oder mit anderen Worten zu einer für einen Quadrupol typischen Frequenzverschiebung:

$$\nu' = \nu - \frac{C}{4\pi \nu} \quad .$$

Weiterhin erhält man einen Term, der die Wirkung des "Quadrupols" und des Rückkopplungssystems koppelt, z.B.

$$\frac{Ck}{2\nu^2} \sin \theta_{KC} \nu \sin \theta_{CP} \nu \quad .$$

Für bestimmte Abstände zwischen Kicker und "Quadrupol" verschwinden diese Terme:

$$\text{a) } \theta_{KC} \cdot \nu = m \cdot \pi \quad \text{b) } \theta_{CK} \cdot \nu = m \cdot \pi \quad . \quad (4.18)$$

In beiden Fällen erhält man dann den ungestörten Fall, der in Abschnitt (4.1.1) behandelt wurde, mit der zusätzlichen Frequenzverschiebung durch den "Quadrupol".

Die Bedingung (4.18) ist ein erster Hinweis darauf, daß die Wirkung des Rückkopplungssystems im Falle eines lokalisierten Störquadrupols entweder stark vom *Betatronune* oder anders ausgedrückt, vom *Abstand zwischen "Quadrupol" und Kicker* abhängt. Auf diesen Punkt wird im Abschnitt (4.2) näher eingegangen.

Üblicherweise befinden sich in einem Speicherring nicht nur ein Resonator sondern mehrere. Diese werden durch mehrere Störquadrupole representiert.

Die Effekte vieler Störungen können sich aufsummieren aber auch gegenseitig aufheben, da die einzelnen Terme mit Winkelfunktionen gewichtet werden.

Um diese Frage zu klären, kann man den Fall a) und b) dahingehend abändern, daß man statt eines Resonators der Stärke C/N "Quadrupole" der Stärke C/N in dem jeweiligen Abschnitt einbaut.

Ein System dieser Art läßt sich näherungsweise untersuchen, mit dem Ergebnis, daß sich die Wirkungen der einzelnen "Quadrupole" nicht aufheben (siehe Anhang A.4.3).

Für den Fall b), daß die Störungen zwischen Monitor und Kicker einbaut werden, erhält man, falls die Reaktivitätsbedingung (4.12) benutzt wird,

$$\det T = 1 + (-1)^m \frac{Ck}{2\nu^2} . \quad (4.19)$$

Im Falle von N Störungen führt die übliche Reaktivitätsbedingung

$$\theta_{PK} \cdot \nu = m \cdot \pi$$

nicht mehr zu

$$\det T = 1 ,$$

d.h. das Rückkopplungssystem ist nicht mehr reaktiv.

Die Ursache dafür ist, daß die im Falle b) zwischen Monitor und Kicker eingebauten "Quadrupole" einen "Tune - shift" bewirken, so daß der Betatron-tune und damit der Phasenvorschub zwischen Monitor und Kicker geändert wird.

Natürlich kann man die Bedingung (4.12) so abändern, daß wieder $\det T = 1$ gilt, z.B. im Fall b) für N "Quadrupole" (siehe Anhang A.4.3):

$$0 = \sin \theta_{PK\nu} - \frac{C}{2\nu} \cos \theta_{PK\nu} \approx \sin(\theta_{PK\nu} - \frac{C}{2\nu}) . \quad (4.20)$$

Dabei beschreibt C die Kickstärke der "Quadrupole".

Da die Kickstärke mit dem Bunchstrom wächst, bedeutet die Bedingung (4.20), daß in Abhängigkeit vom Bunchstrom entweder der Abstand zwischen Monitor und Kicker oder der Betatron-tune geändert werden muß.

Die erste Forderung kann sicherlich nicht erfüllt werden, da der Abstand zwischen Monitor und Kicker stets konstant ist.

Die alternative Forderung hätte zur Folge, daß das Rückkopplungssystem nur für ganz bestimmte Werte des Betatron-tunes funktioniert. Wünschenswert ist dagegen eine weitgehende Unabhängigkeit der Wirkung des Rückkopplungssystems vom Betatron-tune.

Dieses Problem läßt sich mit einem in [28] [29] angegebenen Verfahren lösen. Statt eines Monitors benutzt man zwei und überlagert die Signale der Monitore in geeigneter Weise, um zum einen die gewünschte Frequenzverschiebung zu erzielen und zum anderen die Reaktivitätsbedingung $\det T = 1$ einzuhalten. Die Idee dieses Verfahrens besteht darin, einen zweiten Rückkopplungsparameter k' einzuführen, der so justiert wird, daß man das gewünschte Ergebnis erhält. In Abschnitt 4.2. wird auf dieses Verfahren noch näher eingegangen.

Damit ist die Wirkung des Rückkopplungssystems auf den Fundamentalmodus prinzipiell beschrieben.

Es soll jetzt in vereinfachter Form der

Einfluß der Modenkopplung

untersucht werden.

Dabei wird davon ausgegangen, daß die Resonatoren gleichmäßig um den Ring verteilt sind, so daß die in Abschnitt 3.7.1 angegebenen Gleichungen benutzt werden können.

Es wird weiterhin angenommen, daß die Wirkung des Rückkopplungssystems durch eine entsprechende Änderung des Matrixelement des Fundamentalmodus M_{000}^{000} berücksichtigt werden kann.

Der resistive Anteil des Rückkopplungssystems wird durch einen Imaginärteil δ_{FB} und der reaktive Anteil durch einen Realteil $\Delta\nu_{FB}$ beschrieben (vgl. [29]).

Damit erhält man die Eigenfrequenzen gemäß Gleichung (3.114) aus

$$\nu_{1,2} = \nu_\beta + \frac{K(M_1 + M_2) - \nu_s + \Delta\nu_{FB} + i\delta_{FB}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu_s + K(M_1 - M_2) + \Delta\nu_{FB} + i\delta_{FB}}{2}\right)^2 - K^2 M_{12}^2} . \quad (4.21)$$

Zuerst wird die Wirkung eines *resistiven Rückkopplungssystems* $\delta_{FB} \neq 0$ untersucht.

Für einen sehr kleinen Strom sind die Matrixelemente ebenfalls sehr klein, so daß der erste Term in der Wurzel wesentlich größer als der zweite ist. Entwickelt man in diesem Fall die Wurzel, dann folgt

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_\beta + KM_1 + \Delta\nu_{FB} - i\delta_{FB} - \frac{K^2 M_{12}^2 (\nu_s + K(M_1 - M_2) + \Delta\nu_{FB} + i\delta_{FB})}{(\nu_s + K(M_1 - M_2) + \Delta\nu_{FB})^2 + \delta_{FB}^2} \\ \nu_2 &= \nu_\beta - \nu_s + KM_2 + \frac{K^2 M_{12}^2 (\nu_s + K(M_1 - M_2) + \Delta\nu_{FB} + i\delta_{FB})}{(\nu_s + K(M_1 - M_2) + \Delta\nu_{FB})^2 + \delta_{FB}^2} . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Somit gilt nach (3.102):

$$\begin{aligned} \text{Im}\nu_1 < 0 &\implies \text{Stabilität} \\ \text{Im}\nu_2 > 0 &\implies \text{Instabilität} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dies weist darauf hin, daß im Falle der Modenkopplung die Dämpfung des einen Modus *durch die Kopplung* in eine Anregung des anderen Modus verwandelt wird.

Damit erscheint eine *Stabilisierung* des Strahls mit einem *resistiven Rückkopplungssystem nicht möglich* zu sein.

Für ein reaktives Rückkopplungssystem ($\delta_{FB} = 0$) läßt sich Gleichung (4.21) so deuten, daß die Wirkung des Rückkopplungssystems in einer Ersetzung des Synchrotrontunes durch

$$\nu_s + \Delta\nu_{FB}$$

besteht. Damit ist man in der Lage den Synchrotrontune künstlich zu vergrößern oder zu verkleinern und damit entsprechend den Schwellenstrom zu erhöhen (vgl. Abbildung (4.2)). Ein reaktives Rückkopplungssystem führt also in dieser Näherung zu einer Vergrößerung der Instabilitätsschwelle.

Abschließende Bemerkungen

Die in Abschnitt 4.1 durchgeführten Untersuchungen zeigen schon Möglichkeiten und Schwierigkeiten bei der Kompensation der Moden-Kopplungsinstabilität mit Hilfe eines Rückkopplungssystems auf.

Ein resistives Rückkopplungssystem scheint nicht in der Lage zu sein, den Strahl zu stabilisieren.

Mit einem reaktiven Rückkopplungssystem ist es vielleicht möglich den Schwellenstrom zu erhöhen. Allerdings wurde diese Aussage unter stark vereinfachenden Annahmen gewonnen.

1. Es wurde dabei weder die Lokalisierung des Rückkopplungssystems noch der Resonatoren berücksichtigt.
2. Die Wirkung des Rückkopplungssystems wurde einfach in Form einer Änderung des Matrixelementes M_{000}^{000} eingeführt.

Diese vereinfachenden Annahmen werden im nächsten Abschnitt fallengelassen und eine gründliche Untersuchung des Rückkopplungssystems vorgenommen.

4.2 Modenkopplung mit Dipol - Rückkopplungssystem

Das Dipol - Rückkopplungssystem soll im Rahmen des Transfermatrizenformalismus behandelt werden.

Deshalb wird zunächst die Transfermatrix des Rückkopplungssystem angegeben. Da der allgemeine Fall eines Rückkopplungssystem mit vielen Resonatoren bei Betrachtung einiger Moden des Bunches nur numerisch untersucht werden kann, wird in Abschnitt 4.2.2 ein einfacher Fall so weit wie möglich analytisch untersucht und in passender Art erweitert, um den allgemeinen Fall zu beschreiben.

In Abschnitt 4.3 wird der allgemeine Fall numerisch untersucht und die Abhängigkeit der Wirkung des Rückkopplungssystems von wichtigen Maschinenparametern angegeben. Die mathematischen Umformungen sind im wesentlichen in Anhängen aufgeführt und im folgenden werden nur die wichtigsten Ergebnisse diskutiert.

4.2.1 Transfermatrix des Dipol - Rückkopplungssystems

In Anwesenheit des Kickers eines Rückkopplungssystems ändert sich der Kraftterm in der Vlasov - Gleichung (3.23). Zu dem üblichen Term $\mathcal{F}[u]$ erhält man eine weitere Kraft F_K , die über die Bunchlänge konstant ist und nicht von der Verteilung u abhängt. Die Vlasov - Gleichung mit Kicker wird nun in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführt (vgl. Abschnitt 3.4) mit dem Ergebnis (siehe Anhang A.5):

$$\frac{d\vec{a}(\theta)}{d\theta} = \mathcal{A}(\theta)\vec{a}(\theta) + \vec{k}(\theta) . \quad (4.24)$$

Diese Gleichung wird für den Teil des Ringes gelöst, in dem der Kicker steht. Ähnlich wie im Falle eines Resonators ändert sich die Betafunktion praktisch nicht über die Kickerlänge und da außerdem am Ort des Kickers kein Resonator steht, d.h. dort gilt

$$M_{mnk}^{m'n'k'} = 0 ,$$

ist die Matrix \mathcal{A} unabhängig von θ . Damit kann Gleichung (4.24) integriert werden:

$$\vec{a}(\theta_{i+1}) = e^{\mathcal{A} \cdot \Delta\theta} \vec{a}(\theta_i) + \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} d\theta' e^{\mathcal{A}(\theta_{i+1} - \theta')} \vec{k}(\theta') . \quad (4.25)$$

Im allgemeinen ist die Kickerlänge klein gegen die Betatronwellenlänge, so daß die Annahme $\Delta\theta \rightarrow 0$ eine sehr gute Näherung darstellt. Folglich ändert sich der Zustandsvektor gemäß

$$\vec{a}(\theta_i^+) = \vec{a}(\theta_i^-) + \vec{k} , \quad (4.26)$$

wobei

$$\vec{k} = \sqrt{\beta(\theta_K)} K_{FB} \left(\dots, -\frac{m'}{i} i^{-n'} I_{n'k'}\left(m' \frac{\xi}{\alpha}\right), \dots \right) \quad (\text{siehe Anhang A.5})$$

Ort unmittelbar hinter dem Kicker
Ort unmittelbar vor dem Kicker

ist.

Da die Kraft des Kickers proportional zum mittleren Dipolmoment am Ort des Monitors ist und dieses durch

$$\bar{D}(\theta) = \vec{b}^T \cdot \vec{a}(\theta)$$

gegeben ist (A.23), gilt

$$F_K = k \cdot \bar{D}(\theta_P) \sqrt{\beta(\theta_P)} = k \cdot \sqrt{\beta(\theta_P)} \cdot \vec{b}^T \vec{a}(\theta_P) . \quad (4.27)$$

Damit folgt aus (4.26)

$$\vec{a}(\theta_i^+) = \vec{a}(\theta_i^-) + k_{FB} \vec{k}_0 \left(\vec{b}^T \vec{a}(\theta_P) \right) \quad (4.28)$$

mit

$$k_{FB} = 2\pi^2 \cdot K_{FB} \sqrt{\beta(\theta_K) \beta(\theta_P)}$$

$$\vec{k}_0 = \left(\dots, -\frac{m'}{i} \frac{i^{-n'}}{2\pi^2} I_{n'k'}\left(m' \frac{\xi}{\alpha}\right), \dots \right) .$$

Der Term

$$\vec{k}_0 \left(\vec{b}^T \vec{a}(\theta_P) \right)$$

kann in folgende Form überführt werden (siehe Anhang A.5):

$$\vec{k}_0 \left(\vec{b}^T \vec{a}(\theta_P) \right) = \mathcal{K} \vec{a}(\theta_P) \quad (4.29)$$

und dabei ist

$$\mathcal{K} = \left(K_{mnk}^{m'n'k'} \right) , \quad K_{mnk}^{m'n'k'} = -\frac{m'}{i} i^{n-n'} I_{n'k'}\left(m' \frac{\xi}{\alpha}\right) I_{nk}\left(m \frac{\xi}{\alpha}\right) . \quad (4.30)$$

Die Kickmatrix \mathcal{K} besitzt für verschwindende Chromatizität eine besonders einfache Form:

$$\xi = 0 \implies K_{mnk}^{m'n'k'} = \begin{cases} im' & \text{für } n = n' = 0 \quad k = k' = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (4.31)$$

Aus (4.29) und (4.28) folgt

$$\vec{a}(\theta_i^+) = \vec{a}(\theta_i^-) + k_{FB} \mathcal{K} \cdot \vec{a}(\theta_P) . \quad (4.32)$$

Sei T_{PK} die Transfermatrix zwischen Monitor und Kicker, dann gilt

$$\vec{a}(\theta_P) = T_{PK}^{-1} \vec{a}(\theta_i^-) \quad (4.33)$$

also

$$\vec{a}(\theta_i^+) = \vec{a}(\theta_i^-) + k_{FB} \mathcal{K} \cdot T_{PK}^{-1} \vec{a}(\theta_i^-) . \quad (4.34)$$

Definiert man nun die Transfermatrix des Rückkopplungssystems durch

$$T_{FB} = \mathbb{1} + k_{FB} \mathcal{K} T_{PK}^{-1} , \quad (4.35)$$

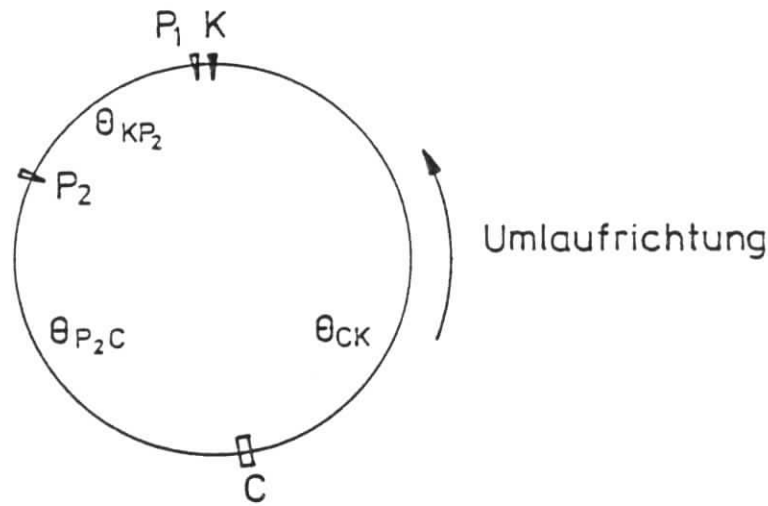


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung des Modellbeschleunigers: der Kicker ist mit K, die Monitore mit (P_1, P_2) und der Resonator mit C bezeichnet

dann verändert das Rückkopplungssystem den Zustandsvektor gemäß

$$\vec{a}(\theta_i^+) = T_{FB} \vec{a}(\theta_i^-) . \quad (4.36)$$

Falls die Signale mehrerer Monitore überlagert werden, läßt sich (4.35) in folgender Weise verallgemeinern:

$$T_{FB} = \mathbb{1} + \sum_{i=1}^n k_{FB}^i \mathcal{K} T_{P_i K}^{-1} . \quad (4.37)$$

Mit Hilfe von Gleichung (4.37) kann die Transfermatrix für den gesamten Beschleuniger angegeben werden

$$T = T_{FB} \cdot T_0 , \quad (4.38)$$

wenn T_0 die Transfermatrix für den Transport von der Stelle unmittelbar hinter dem Kicker bis unmittelbar vor dem Kicker darstellt.

Die Stabilität des Beschleunigers ist durch die Eigenwerte λ von T bestimmt und die Stabilitätsbedingung lautet wie üblich

$$|\lambda| \leq 1 . \quad (4.39)$$

4.2.2 Beschleuniger mit einem Resonator und Dipol-Rückkopplungssystem

Im folgenden wird ein einfacher Modellbeschleuniger betrachtet, der aus einem Resonator C, zwei Monitoren (P_1, P_2) und einem Kicker besteht (siehe Abbildung (4.5)). Der Resonator ist bewußt zwischen dem zweiten Monitor und dem Kicker eingebaut, da erstens der Abstand zwischen Monitor 1 und Monitor 2 klein ist verglichen mit dem Abstand zwischen Monitor 2 und Kicker und sich somit zwischen Monitor 2 und Kicker üblicherweise der Hauptteil der Resonatoren befindet und da zweitens die Resonatoren in dem Bereich zwischen Monitor 2 und Kicker das eigentliche Problem darstellen.

Da man nicht alle Eigenschwingungen des Bunches berücksichtigen kann, werden im folgenden nur die für die Modenkopplung wesentlichen Moden $\nu_\beta; \nu_\beta - \nu_s$ bzw. $-\nu_\beta; -(\nu_\beta - \nu_s)$ berücksichtigt.

Damit sind die Randbedingungen des einfachen Modells bekannt und die Transfermatrix des Beschleunigers kann berechnet werden.

Dazu wird zunächst einmal die Matrix T_0 bestimmt (siehe (4.38)).

Mit den in Abschnitt 3.8.1 angegebenen Bezeichnungen für Abschnitte eines Beschleunigers ohne Resonatoren (3.140) bzw. für punktförmige Resonatoren (3.139) folgt

$$T_0 = \mathcal{R}(\theta_{CK}) (\mathbb{1} - \mathcal{M}) \mathcal{R}(\theta_{KC}) . \quad (4.40)$$

In diesem speziellen Fall gilt

$$\mathcal{R}(\theta_i) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta_i} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_i = -\theta_i \nu_\beta \\ \beta_i = -\theta_i (\nu_\beta - \nu_s) \end{matrix} \quad (4.41)$$

und

$$\mathcal{M} = K \cdot \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} ; \quad K \cdot M = \begin{pmatrix} iM_0 & iM_{11} \\ -iM_{11} & iM_1 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} iM_0 &= M_{100}^{100} \cdot K \\ iM_{11} &= M_{1-10}^{100} \cdot K \\ iM_1 &= M_{1-10}^{1-10} \cdot K . \end{aligned}$$

Die Matrix des Rückkopplungssystems lautet nach (4.37)

$$T_{FB} = \mathbb{1} + k_1 \mathcal{K} T_0^{-1} + k_2 \mathcal{K} \mathcal{R}(\theta_{KP_2}) T_0^{-1} , \quad (4.43)$$

so daß mit Hilfe von (4.40) und (4.43) die Transfermatrix T berechnet werden kann:

$$T = T_0 + k_1 \mathcal{K} + k_2 \mathcal{K} \mathcal{R}(\theta_{KP_2}) . \quad (4.44)$$

Die Stabilität des Modellbeschleunigers ist durch die Eigenwerte von T festgelegt. Die Eigenwerte von T sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von T , die im Anhang A.7 hergeleitet wurde.

Das Ergebnis lautet für $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda^4 &- 2\lambda^3(A + B) + \lambda^2(4AB + 2 + F + E \sin 2\pi\nu_\beta) \\ &- 2\lambda(A + B + BF - ED) + 1 + F = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \cos 2\pi\nu_\beta - M_0 \sin 2\pi\nu_\beta + k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta \\ B &= \cos 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) - M_1 \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) \\ C &= -2(k_1 \sin 2\pi\nu_\beta + k_2 \sin(2\pi - \theta_{KP_2})\nu_\beta) \\ D &= \sin \theta_{CK} \nu_\beta (k_1 \sin \theta_{KC} \nu_\beta + k_2 \sin \theta_{P_2C} \nu_\beta) \\ E &= 4M_{11}^2 \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) \\ F &= C + 4M_0 D . \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung enthält Terme, die durch den Resonator bestimmt sind

$$A, B, E$$

und Terme, die durch das Rückkopplungssystem hervorgerufen werden

$$C, D, F, k_2 \sin \theta_{KP_2\nu\beta} .$$

Vergleicht man (4.45) mit den Ausdrücken (4.16) und (4.17) des einfachen Modells aus Abschnitt 4.1.2

$$\det T = 1 + k \left(-\frac{1}{\nu} \sin \theta_{PK\nu} - \frac{C}{\nu^2} \sin \theta_{PC\nu} \sin \theta_{CK\nu} \right) \\ \frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi\nu + \frac{k}{2\nu} \sin(2\pi\nu - \theta_{KP\nu}) ,$$

dann wird deutlich, daß durch

- A, B:* die Wirkung des Resonators auf den Fundamentalmodus bzw. den ersten head-tail Modus beschrieben wird und der Term $k_2 \sin \theta_{KP_2\nu\beta}$ eine Frequenzverschiebung des Fundamentalmodus mit Hilfe des Rückkopplungssystems zuläßt;
- C:* der resistive Anteil des Rückkopplungssystems gegeben ist;
- D:* die Kopplung zwischen Rückkopplungssystem und Resonator beschrieben wird; dieser Term ist stark abhängig von der Lokalisierung sowohl des Resonators wie auch des Rückkopplungssystems;
- E:* die in dem einfachen Modell fehlende Modenkopplung gegeben ist;
- F:* sowohl der resistive Anteil des Rückkopplungssystems alleine als auch der Anteil, der durch den Kopplungsterm $M_0 D$ verursacht wird, beschrieben wird;
- E · D:* die Wirkung des Rückkopplungssystems auf den ersten head-tail Modus durch die Modenkopplung angegeben wird.

Bevor die Gleichung (4.45) allgemein untersucht wird, soll der wichtige Spezialfall

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{4.46}$$

untersucht werden, da dies die Bedingung für ein *ideales reaktives Rückkopplungssystem* ist. Damit verschwinden alle Terme des Rückkopplungssystems bis auf

$$k_2 \sin \theta_{KP_2\nu\beta} .$$

und Gleichung (4.45) geht dann in

$$\lambda^4 - 2\lambda^3(A + B) + \lambda^2(4AB + 2 + E \sin 2\pi\nu\beta) \\ - 2\lambda(A + B) + 1 = 0 \tag{4.47}$$

über.

Da alle Koeffizienten in dieser Gleichung reell sind, ist neben λ auch stets λ^* Lösung von (4.47).

Außerdem sind die Koeffizienten vor λ^4 und λ^0 bzw. vor λ^3 und λ^1 gleich groß, so daß neben λ auch stets der Kehrwert $1/\lambda$ Gleichung (4.47) löst.

Da λ und $1/\lambda$ Gleichung (4.47) erfüllen, löst

$$x = \lambda + \frac{1}{\lambda} \tag{4.48}$$

die Gleichung

$$x^2 - 2x(A + B) + 4AB + E \cdot \sin 2\pi\nu_\beta = 0 . \quad (4.49)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_{1,2} = A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 - E \sin 2\pi\nu_\beta} . \quad (4.50)$$

Mit

$$\lambda = e^{i\mu}$$

folgt

$$x = 2 \cos \mu ,$$

so daß die Stabilitätsbedingung $|\lambda| \leq 1$ jetzt

$$\text{Stabilität} \implies |x| \leq 2 \quad \text{und} \quad x \text{ reell} \quad (4.51)$$

lautet.

Mit den in Gleichung (4.45) benutzten Abkürzungen gilt

$$E \sin 2\pi\nu_\beta = 4M_{11}^2 \sin 2\pi\nu_\beta \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) . \quad (4.52)$$

Für die Fälle

$$2\pi\nu_\beta \approx m \cdot \pi \quad \text{bzw.} \quad 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) \approx m \cdot \pi \quad (4.53)$$

ist der Term (4.52) vernachlässigbar klein und die Lösungen von (4.50) lauten

$$x_1 = 2A \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 2B . \quad (4.54)$$

Mit den in Gleichung (4.45) eingeführten Abkürzungen erhält man in diesem Fall folgende Stabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} & |\cos 2\pi\nu_\beta - M_0 \sin 2\pi\nu_\beta + k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta| < 1 \\ \text{bzw.} & \\ & |\cos 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) - M_1 \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s)| < 1 . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Vergleicht man (4.53) und (4.55) für $k_2 = 0$ mit (3.153) bzw. (3.154), dann wird deutlich, daß (4.55) nichts anderes als die Stabilitätsbedingung für die in (4.53) angegebenen kohärenten Synchro-Betatron Resonanzen ist. Diese Resonanzen treten erwartungsgemäß auf, da der Resonator punktförmig ist.

Für $M_0 = M_1 = 0$ und $k_2 \neq 0$ folgt aus (4.55), daß der punktförmige Kicker halbzahlige Resonanzen treibt.

Vermeidet man die Resonanzen (4.53), dadurch daß man den Betatronstune größer als die erste Satellitenfrequenz wählt ($\delta\nu_\beta > \nu_s$), dann kann nur noch eine Instabilität auftreten, falls die Diskriminante in (4.50) negativ wird. Somit lautet die Stabilitätsbedingung:

$$(A - B)^2 - E \sin 2\pi\nu_\beta \geq 0 . \quad (4.56)$$

Diese Bedingung erhält eine einfache Bedeutung, wenn man

$$\delta\nu_\beta \approx 0.25$$

wählt. Entwickelt man die Terme in (4.56) nach den kleinen Größen ν_s, M_0, M_1, M_{11} , dann erhält man in erster Näherung

$$(2\pi\nu_s - M_1 + M_0 + k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta)^2 - 4M_{11}^2 \geq 0 \quad (4.57)$$

Durch Vergleich von (4.57) für $k_2 = 0$ mit (3.115) wird ersichtlich, daß es sich bei (4.57) um die Stabilitätsbedingung im Falle gleichmäßig verteilter Resonatoren handelt. Diese Deutung ist auch noch für Werte des Überhanges des Betatrontones zulässig, die in der Nähe der Viertelzahl liegen, etwa

$$\delta\nu_\beta = 0.25 \pm 0.15 \quad .$$

Weiterhin entnimmt man (4.57), daß für $k_2 \neq 0$ die Möglichkeit besteht, den Synchrotrontone künstlich zu vergrößern oder zu verkleinern und damit die in Abbildung (4.2) beschriebene Idee des reaktiven Rückkopplungssystems zu verwirklichen.

Somit lautet die **Bedingung für ein reaktives Rückkopplungssystem**:

$$\text{reaktives Rückkopplungssystem} \iff F = 0 \text{ und } D = 0 \quad (4.58)$$

Die Transfermatrix T besitzt die typische Eigenwertstruktur der Transfermatrix eines Resonators (3.67).

Die Transfermatrix T wie auch die Matrix T_0 erfüllen also die Ähnlichkeitstransformationen (3.68) und (3.69), so daß auch die Matrix des Rückkopplungssystems diesen Relationen genügt, d.h. folgende Aussagen sind äquivalent

$$F = D = 0 \iff J T_{FB}^{-1} J^{-1} = T_{FB}^T \quad ; \quad K^{-1} T_{FB} K = T_{FB}^* \quad (4.59)$$

Diese Äquivalenz erlaubt eine interessante Interpretation des reaktiven Rückkopplungssystems. Das reaktive System verhält sich demnach wie ein spezieller Resonator, der nur auf den Fundamentalmodus einwirkt und damit eine Verschiebung des Tunes des Fundamentalmodus zuläßt, die zu einer Erhöhung der Instabilitätsschwelle um den Faktor 2 -4 führt.

Insofern kommt der Bedingung (4.58) eine besondere Bedeutung zu.

$F = D = 0$ bedeutet nach (4.45) genauer

$$\left. \begin{array}{l} C = 0 \\ D = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 2(k_1 \sin 2\pi\nu_\beta + k_2 \sin(2\pi - \theta_{KP_2})\nu_\beta) = 0 \\ \sin \theta_{CK} \nu_\beta (k_1 \sin \theta_{KC} \nu_\beta + k_2 \sin \theta_{P_2C} \nu_\beta) = 0 \end{array} \right. \quad (4.60)$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizienten Determinante verschwindet:

$$\left| \begin{array}{cc} \sin 2\pi\nu_\beta & \sin(2\pi - \theta_{KP_2})\nu_\beta \\ \sin \theta_{CK} \nu_\beta \sin \theta_{KC} \nu_\beta & \sin \theta_{CK} \nu_\beta \sin \theta_{P_2C} \nu_\beta \end{array} \right| = 0 \quad (4.61)$$

Damit folgt

$$\sin^2 \theta_{CK} \nu_\beta \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta = 0 \quad (4.62)$$

mit den möglichen Lösungen

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta = 0 \implies \theta_{KP_2} \nu_\beta = m \cdot \pi \\ \text{b)} & \sin \theta_{CK} \nu_\beta = 0 \implies \theta_{CK} \nu_\beta = m \cdot \pi \end{array} \quad (4.63)$$

Die Bedingung (4.63a) sorgt zwar dafür, daß (4.60) erfüllt ist, gleichzeitig verschwindet aber auch $k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta$, so daß die *Wirkung des Rückkopplungssystems verschwindet*.

Bedingung (4.63b) bedeutet, daß nur im Falle eines *bestimmten Betatronphasenvorschubs zwischen Resonator und Kicker eine ideale Wirkung des Rückkopplungssystems erzielt werden kann*. Mit anderen Worten heißt das, daß nur für bestimmte Abstände zwischen Resonator und Kicker θ_{CK} bzw. für bestimmte Werte ν_β Gleichung (4.60) erfüllt werden kann (vgl. auch (4.18)).

Im allgemeinen befinden sich in einem Speicherring jedoch mehrere Resonatoren, so daß man in der Regel die Bedingung (4.63b) nicht für alle Resonatoren erfüllen kann.

Es muß also nach einer anderen Möglichkeit zur Stabilisierung des Strahls gesucht werden. Deshalb soll im folgenden auf die Bedingung (4.46) verzichtet werden und es werden die Fälle

$$\mathbf{F} \neq \mathbf{0} \text{ oder } \mathbf{D} \neq \mathbf{0}$$

untersucht.

Gleichung (4.45) besitzt in diesem Fall nicht die angenehmen Eigenschaften von Gleichung (4.47), so daß sie nicht in eine Gleichung zweiten Grades überführt werden kann.

Da die Lösungen von (4.45) nicht einfach angegeben werden können, werden im folgenden nicht die λ_i berechnet, sondern untersucht, ob sich unter den Lösungen λ_i ein zu einer Instabilität führender Wert befindet, dessen Betrag größer als eins ist.

Diese Stabilitätsuntersuchung wird mit dem Hurwitz - Verfahren durchgeführt [46] [47].

Um dieses Verfahren anwenden zu können, muß Gleichung (4.45) umgeformt werden.

Mit Hilfe der Abbildung

$$r_i = \frac{\lambda_i + 1}{\lambda_i - 1} \quad (4.64)$$

bildet man das Innere des Einheitskreises auf die linke und das äußere auf die rechte Hälfte der komplexen Ebene ab. Stabilität erfordert

$$|\lambda_i| \leq 1, \quad (4.65)$$

d.h. die Eigenwerte λ_i müssen in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises liegen. Damit lautet die Stabilitätsbedingung (4.65) jetzt

$$\operatorname{Re} r_i \leq 0. \quad (4.66)$$

Mit dem Hurwitz - Verfahren wird nun geprüft, ob Lösungen einer Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i r^{n-i} = 0$$

positive Realteile besitzen.

Wendet man die Abbildung (4.64) auf Gleichung (4.45) an, dann erhält man (siehe Anhang A.7.1):

$$\sum_{i=0}^4 a_i r^{4-i} = 0 \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 4 - 4(A + B) + 4AB + E \sin 2\pi\nu_\beta + 2F - 2(BF - ED) \\ a_1 &= 4(BF - ED) - 4F \\ a_2 &= 8 - 8AB - 2E \sin 2\pi\nu_\beta + 4F \\ a_3 &= -4(BF - ED) - 4F \\ a_4 &= 4 + 4(A + B) + 4AB + E \sin 2\pi\nu_\beta + 2F + 2(BF - ED) \end{aligned}$$

Nach (A.115) gilt

$$\sum_{i=0}^4 a_i = 16 .$$

Damit das System stabil ist, müssen alle Koeffizienten a_i das gleiche Vorzeichen besitzen [46], also muß

$$\forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} : a_i \geq 0 \quad (4.68)$$

gelten, da die Summe der Koeffizienten positiv ist.

Weiterhin muß auch jede Summe von beliebig vielen Koeffizienten positiv sein und daraus folgt

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 \geq 0 &\implies F \leq 0 \\ a_0 + a_2 + a_4 \geq 0 &\implies F \geq -2 , \end{aligned}$$

d.h. man erhält für F die folgende Einschränkung

$$-2 \leq F \leq 0 \quad (4.69)$$

und somit das für die Determinante des Rückkopplungssystems erwartete Ergebnis

$$|\det T_{FB}| \leq 1 . \quad (4.70)$$

Neben den Koeffizienten a_i müssen auch die Hurwitz - Determinanten positiv sein, da $a_0 \geq 0$ ist [46].

Die Hurwitz - Determinanten für Gleichung (4.67) sind in Anhang A.7.2 berechnet worden und das Ergebnis für die dritte Determinante lautet (siehe Gleichung (A.118)):

$$H_3 = -16^2(E \cdot D)^2 - 16^2 FED(A - B) - 4 \cdot 16 F^2 E \sin 2\pi\nu_\beta . \quad (4.71)$$

Neben der Bedingung (4.68) muß also auch die Bedingung

$$H_3 \geq 0 \quad (4.72)$$

erfüllt sein, damit der Strahl stabil bleibt.

Die folgenden Untersuchungen sollen nicht für beliebige Werte des Betatrones durchgeführt werden.

Eine solche Einschränkung ist aus zwei Gründen sinnvoll:

1. Der Betatrones in einem realen Elektron - Positron Speicherring liegt a) immer oberhalb der ersten Satellitenfrequenz und ist b) immer von einer halben Zahl verschieden, also

$$\nu_\beta = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} + \delta\nu_\beta ; \nu_s - \frac{1}{4} \leq \delta\nu_\beta \leq \frac{1}{4} . \quad (4.73)$$

2. In dem Modellbeschleuniger treten aufgrund der Punktförmigkeit des Resonators und der betrachteten Moden $n = 0$ und $n = -1$ kohärente Synchro-Betatron Resonanzen in der Nähe jeder halben Zahl und in der Nähe der ersten Satellitenfrequenz auf. Da der Effekt des Rückkopplungssystems auf die übliche Modenkopplung untersucht werden soll, ist es vernünftig den Bereich der kohärenten Resonanzen zu meiden und sich entsprechend (4.73) einzuschränken.

Mit der Beschränkung (4.73) ergibt sich

$$E \cdot \sin 2\pi\nu_\beta = 4M_{11}^2 \cdot \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) \cdot \sin 2\pi\nu_\beta > 0 . \quad (4.74)$$

Nun lassen sich zwei interessante Fälle untersuchen:

1. $F = 0$ und $D \neq 0$:

Damit ist die in Abschnitt 4.1.1 angegebene Bedingung für ein reaktives Rückkopplungssystem (4.12) erfüllt, denn es gilt

$$F = 0 \implies \det T_{FB} = 1 .$$

Nach Gleichung (4.71) folgt

$$H_3 = -16^2 (E \cdot D)^2 < 0 \quad (4.75)$$

und nach (4.72) ist also mindestens eine Eigenschwingung des Systems instabil.

Betrachtet man (4.75), dann erkennt man, daß die Instabilität durch die Kopplung E der beiden Moden hervorgerufen wird. Da die Modenkopplung in Abschnitt 4.1.1 bzw. 4.1.2 vernachlässigt wurde, konnte eine derartige Instabilität dort nicht auftreten.

Die in Abschnitt 4.1.1 angegebene Reaktivitätsbedingung ist also zu schwach und muß durch die schärfere Bedingung (4.58) bzw. (4.59) ersetzt werden.

2. $F \neq 0$ und $D = 0$:

Dadurch schaltet man den Term aus, der unter 1. zur Instabilität geführt hat. Die Berechnung von H_3 liefert mit (4.74)

$$H_3 = -4 \cdot 16 F^2 E \sin 2\pi\nu_\beta < 0 . \quad (4.76)$$

Mit (4.69) und $F \neq 0$ erhält man

$$|\det T_{FB}| \leq 1 , \quad (4.77)$$

d.h. nach Abschnitt 4.1.1 hat man ein resistives Rückkopplungssystem vorliegen.

Da H_3 negativ ist ist resistives Rückkopplungssystem nicht stabil.

Wie schon unter 1. ist der Grund für das Auftreten der Instabilität die Kopplung der beiden betrachteten Moden über die Größe E .

Der dritte Term in (4.71)

$$-16^2 FED(A - B)$$

verschwand für die unter 1. und 2. untersuchten Fälle. Eventuell besteht aber die Möglichkeit für

$$\mathbf{F} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{D} \neq \mathbf{0} , \quad (4.78)$$

die unter 1. und 2. auftretenden Effekte mit Hilfe des dritten Terms zu kompensieren. Da der Term

$$-16^2 \cdot (E \cdot D)^2$$

1. immer kleiner gleich null ist und

2. klein ist verglichen mit den beiden anderen Termen von H_3 (4.71), da er proportional zu M_{11}^4 die beiden anderen Terme dagegen proportional zu M_{11}^2 sind und $|M_{11}| \ll 1$ gilt,

erfordert die Stabilitätsbedingung

$$H_3 \geq 0 \quad ,$$

daß wenigstens die Ungleichung

$$-16^2 FDE(A - B) > 4 \cdot 16 F^2 E \sin 2\pi\nu_\beta > 0 \quad (4.79)$$

erfüllt ist.

Um diese Ungleichung zu untersuchen, ist es zweckmäßig, die Größe D umzuschreiben (siehe Anhang A.7.3):

$$D = \alpha \frac{C}{4} - \beta \frac{k_2 \sin \theta_{KP_2\nu_\beta}}{\sin 2\pi\nu_\beta} \quad (4.80)$$

mit

$$\alpha = \cot 2\pi\nu_\beta - \frac{\cos(\theta_{KC} - \theta_{CK})\nu_\beta}{\sin 2\pi\nu_\beta} \quad (4.81)$$

$$\beta = \sin^2 \theta_{CK}\nu_\beta > 0 \quad . \quad (4.82)$$

Die Größen α und β hängen entscheidend vom Abstand zwischen Resonator und Kicker (θ_{CK}) ab. Da in einem Beschleuniger mehrere Resonatoren stehen, ist es sinnvoll für die beiden Größen geeignete Mittelwerte anzugeben und die Untersuchungen mit diesen Mittelwerten zu führen. Diese Mittelwerte lassen sich näherungsweise berechnen, wenn angenommen wird, daß man die Effekte der einzelnen Resonatoren aufsummieren darf und dabei die Kopplung zwischen den Resonatoren vernachlässigen kann, ähnlich wie das in Abschnitt 4.1.2 getan wurde.

Mit dieser Annahme erhält man

$$\bar{\alpha} \approx \cot 2\pi\nu_\beta \quad (4.83)$$

$$\bar{\beta} \approx \frac{1}{2} \quad . \quad (4.84)$$

Insbesondere die Näherung (4.83) wird benutzt, um die Ungleichung (4.79) zu untersuchen. Die Details dieser Untersuchung findet man in Anhang A.7.3 und es sollen hier nur die wesentlichen Ergebnisse diskutiert werden.

Gilt für den in Gleichung (4.73) eingeführten Anteil $\delta\nu_\beta$ des Betatrontrontunes

$$|\delta\nu_\beta| \leq 0.1 \quad . \quad (4.85)$$

dann gilt für beide Typen eines reaktiven Rückkopplungssystems (vgl. Abbildung (4.2)), daß

$$H_3 \leq 0 \quad (4.86)$$

ist, da die Ungleichung (4.79) für typische Werte folgender Parameter nicht erfüllt werden kann

- Frequenzverschiebungen von der Größenordnung des Synchrotrontrontunes (vgl. Abbildung (4.2))
- $0 \leq \nu_s \leq 0.1$

$$\bullet \alpha \approx \cot 2\pi\nu_\beta \approx -2\pi\delta\nu_\beta .$$

Darüberhinaus läßt sich zeigen, daß für beide Typen eines reaktiven Rückkopplungssystems die Bewegung für

$$|\delta\nu_\beta| \leq 0.15 \quad (4.87)$$

nicht stabil ist.

In diesem Fall ist es zwar möglich für große Synchrotrontune-Werte

$$\nu_s \geq 0.1 ,$$

Ungleichung (4.79) zu erfüllen, aber dazu sind sehr große Werte für C notwendig. Damit vergrößert sich aber auch F und die Bedingung (4.69)

$$-2 \leq F \leq 0$$

kann nicht mehr eingehalten werden.

Somit ist für

$$|\delta\nu_\beta| \leq 0.15 \quad (4.88)$$

im Rahmen dieser Näherungen und Annahmen keine stabile Bewegung möglich.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Nur für bestimmte Werte des Betatronphasenvorschubs zwischen Resonator und Kicker (4.63b) läßt sich ein ideales Rückkopplungssystem realisieren. Für alle anderen Werte des Phasenvorschubs treten Instabilitäten auf.

Da die Bedingung (4.63b) im Falle, daß mehrere Resonatoren im Beschleuniger vorhanden sind, nicht eingehalten werden kann, ist die Bewegung im allgemeinen instabil.

Ein Nachteil des hier verwendeten Verfahrens zur Stabilitätsuntersuchung ist, daß man keine Angaben über die Anwachszeiten der instabilen Moden erhält.

Im nächsten Abschnitt soll geklärt werden, ob die Anwachszeiten im Bereich der internen Dämpfungszeiten (Landau- bzw. Strahlungsdämpfung) liegen. Dies kann nur durch die numerische Berechnung der Eigenwerte der Transfermatrix T des gesamten Rings mit Rückkopplungssystem (4.38) geschehen.

Vorher soll die Frage beantwortet werden, ob die Näherungen für α bzw. β ((4.83) bzw. (4.84)) den realistischen Fall eines Speicherrings mit nahezu gleichmäßig verteilten Resonatoren und Rückkopplungssystem richtig beschreiben.

4.3 Numerische Untersuchung des Dipol - Rückkopplungssystems

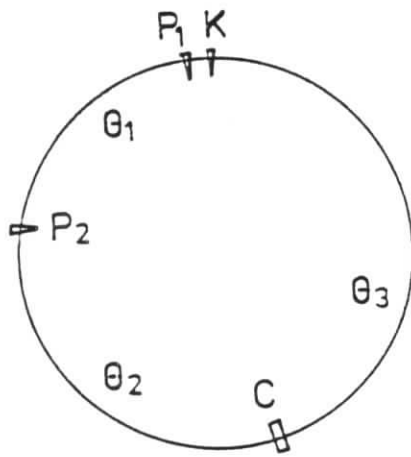
4.3.1 Vergleich des Modellbeschleunigers mit einem realen Beschleuniger

Im Rahmen des einfachen Modells mit einem lokalisierten Resonator ist die Wirkung des Rückkopplungssystems entscheidend vom Phasenvorschub zwischen Resonator und Kicker abhängig.

Diese Abhängigkeit ist dadurch bedingt, daß die Größe D eine Funktion des Abstandes zwischen Resonator und Kicker ist (4.80):

$$D = \alpha \frac{C}{4} - \beta \frac{k_2 \sin \theta_1 \nu_\beta}{\sin 2\pi\nu_\beta}$$

A)



B)

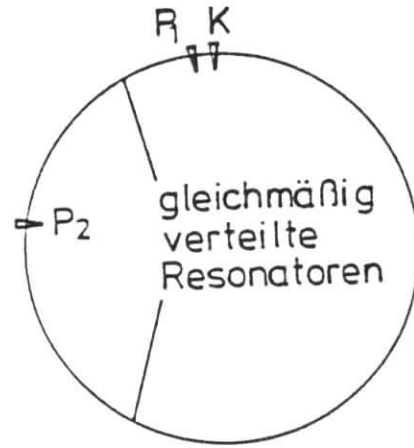


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung der beiden Beschleuniger A und B: Wie üblich bezeichnet K den Kicker, P_1 , P_2 die Monitore und C den Resonator. In dem Beschleuniger A steht nur ein punktförmiger Resonator, so daß dieser identisch mit dem einfachen Modellbeschleuniger des Abschnitts 4.2.2 ist. In dem Beschleuniger B sind die Resonatoren gleichmäßig um den Ring verteilt. Die Parameter k_{\perp} und k_{\parallel} des Resonators in A sind genau so groß wie die Summe der Parameter in B.

mit

$$\alpha = \cot 2\pi\nu_{\beta} - \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)\nu_{\beta}}{\sin 2\pi\nu_{\beta}}$$

$$\beta = \sin^2 \theta_3 \nu_{\beta} > 0 .$$

(Die Bezeichnung der Winkel entnimmt man Abbildung (4.6A))

Um den Fall eines realistischen Beschleunigers mit nahezu gleichmäßig verteilten Resonatoren mit dem einfachen Modell untersuchen zu können, wurden Näherungswerte für α und β angegeben, falls mehrere Resonatoren im Beschleuniger vorhanden sind ((4.83) bzw. (4.84)):

$$\bar{\alpha} \approx \cot 2\pi\nu_{\beta}$$

$$\bar{\beta} \approx \frac{1}{2} .$$

Um die Qualität dieser Näherungen zu überprüfen, werden die in Abbildung (4.6) gezeigten Beschleuniger A und B verglichen.

Dazu wird für jeden dieser Beschleuniger die Transfermatrix T_A bzw. T_B mit Rückkopplungssystem aufgestellt (vgl. (4.38)), die Eigenwerte numerisch berechnet und verglichen.

Es werden zwei Spezialfälle untersucht. In diesen Fällen werden einige Parameter des Rückkopplungssystems und des Beschleunigers A so gewählt, daß die dann auftretenden Werte für α bzw. β gerade mit den Näherungswerten übereinstimmen.

1. Für beide Beschleuniger A und B wird durch entsprechende Wahl des Parameters k_1 $C = 0$ gesetzt.

Der Phasenvorschub zwischen Resonator und Kicker wird im Beschleuniger A zu

$$\theta_3 \cdot \nu_{\beta} = \frac{2m + 1}{4} \pi$$

gewählt, so daß

$$\beta = \frac{1}{2}$$

gilt.

Da $C = 0$ ist, hat der Wert von α keinen Einfluß auf D und damit auf die Wirkung des Rückkopplungssystems.

Unter diesen Voraussetzungen hat die numerische Berechnung der Eigenwerte der Transfermatrizen beider Beschleuniger eine ausgezeichnete Übereinstimmung ergeben.

Somit verhält sich der Beschleuniger mit gleichmäßig verteilten Resonatoren tatsächlich wie der einfache Modellbeschleuniger A mit

$$\bar{\beta} \approx \frac{1}{2} .$$

2. Für beide Beschleuniger wird $k_2 = 0$ gewählt, so daß für den Beschleuniger A D nicht mehr von β abhängt.

Darüberhinaus erreicht man durch geeignete Positionierung des Resonators in Beschleuniger A, daß

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)\nu_\beta = 0 ,$$

ist und folglich

$$\alpha = \cot 2\pi\nu_\beta$$

gilt.

Berechnet man unter diesen Voraussetzungen die Eigenwerte von T_A und T_B , dann erhält man eine ausgezeichnete Übereinstimmung der Resultate.

Das bedeutet, daß sich der Beschleuniger B wie der einfache Beschleuniger A mit

$$\bar{\alpha} \approx \cot 2\pi\nu_\beta$$

verhält.

Leider kann man die Parameter des einfachen Beschleunigers A nicht so wählen, daß die Größen α und β gleichzeitig die Näherungswerte annehmen.

Denn wählt man z.B.

$$\beta = \sin^2 \theta_3 \nu_\beta = \frac{1}{2} ,$$

dann folgt

$$\sin \theta_3 \nu_\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \sin 2\theta_3 \nu_\beta = \pm 1 \implies \cos 2\theta_3 \nu_\beta = 0$$

und damit

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)\nu_\beta = \cos(2\pi - 2\theta_3)\nu_\beta = \pm \sin 2\pi\nu_\beta .$$

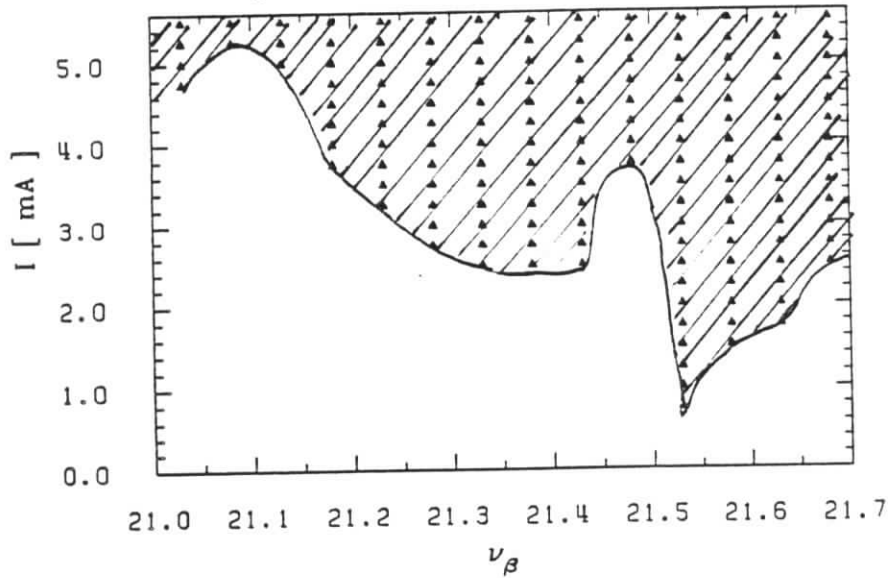
Somit ergibt sich insgesamt

$$\beta = \frac{1}{2} \implies \alpha = \cot 2\pi\nu_\beta \pm 1 . \quad (4.89)$$

Der Vergleich zwischen dem einfachen Modellbeschleuniger und dem realistischen Beschleuniger soll an einem Beispiel illustriert werden, in dem sowohl $C \neq 0$ als auch $k_2 \neq 0$ gewählt wird, so daß beide Parameter α , β die Eigenwerte beeinflussen.

Abbildung (4.7) zeigt die Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Betatrontune für die in Abbildung (4.6) schematisch dargestellten Beschleuniger. Dabei wurde der Resonator im

Beschleuniger mit einem Resonator (vgl. Abb. 4.6A)



Beschleuniger mit gleichmäßig verteilten Resonatoren (vgl. Abb. 4.6B)

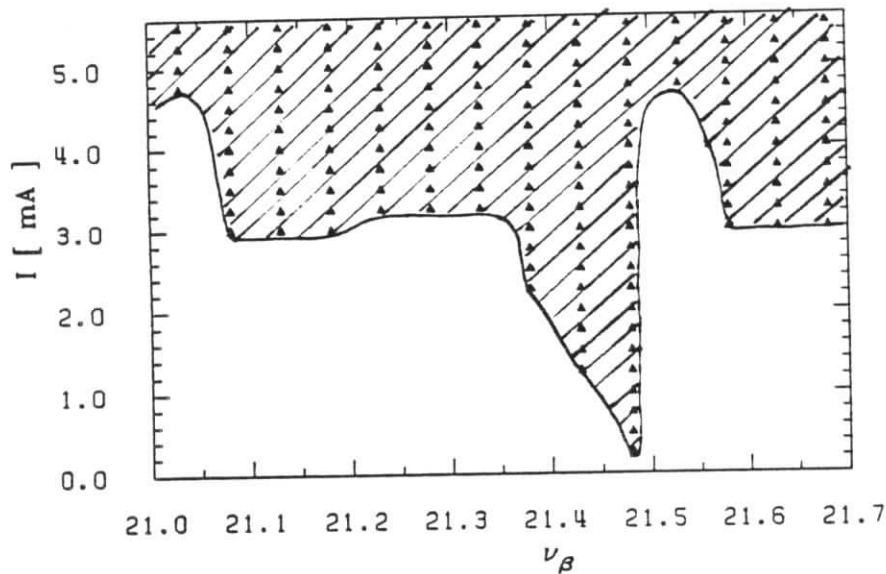


Abbildung 4.7: Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Betatron-tune: Die Berechnungen wurden für die in Abbildung 4.6 gezeigten Modellbeschleuniger durchgeführt. Die durch das Rückkopplungssystem bewirkte Frequenzverschiebung beträgt $\Delta\nu = 1/2\nu_s$; ($\nu_s = 0.06$), so daß in etwa eine Erhöhung des Schwellenstroms um 50 % von 6mA auf 9mA erwartet wird. Der Parameter C wird für beide Beschleuniger so gewählt, daß die aus Abschnitt 4.1.2 bekannte Reaktivitätsbedingung erfüllt ist. Die schraffierten Flächen bezeichnen instabile und die weißen stabile Bereiche. Wie man den Abbildungen entnimmt, wird der Schwellenstrom durch das Rückkopplungssystem in beiden Fällen verkleinert. Die Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Betatron-tune ist für den Modellbeschleuniger mit einem Resonator stärker ausgeprägt als im Falle der gleichmäßig verteilten Resonatoren. Die Ursache dieses unterschiedlichen Verhaltens ist, daß der Parameter β im Falle der gleichmäßig verteilten Resonatoren in etwa den Wert $1/2$ besitzt und für den einfachen Modellbeschleuniger abhängig vom Betatron-tune die Werte $0.15 \leq \beta \leq 0.95$ für $\nu_\beta \in [21.1, 21.4]$ annimmt. Für kleinere Werte des Parameters β ist die Größe D kleiner und damit der Schwellenstrom größer. Dieses Verhalten spiegelt die Abbildung a) wieder.

Beschleuniger A so aufgebaut, daß

$$\beta = \sin^2 \nu_\beta \cdot \theta_3 = \frac{1}{2} \text{ für } \nu_\beta = 21.225$$

gilt.

Die Größe C wurde in beiden Beschleunigern so gewählt, daß die Determinante des Rückkopplungssystems in sehr guter Näherung eins ist, also

$$F = 0 \implies \det T = \det T_{FB} = 1$$

und somit die aus Abschnitt 4.1.1 bekannte Reaktivitätsbedingung erfüllt ist.

Das Rückkopplungssystem bewirkt eine Vergrößerung des Frequenzabstandes zwischen dem Fundamentalmodus ($n = 0$) und dem des ersten head - tail Modus um

$$\Delta\nu = \frac{1}{2} \nu_s, \text{ mit } \nu_s = 0.06,$$

so daß man eine Erhöhung des Schwellenstroms um ca. 50 % von 6 mA auf 9 mA erwartet. Wie man den Abbildungen entnimmt, verkleinert der Einsatz des Rückkopplungssystems in beiden Fällen den Schwellenstrom, wobei die Schwelle mit Rückkopplungssystem durch die interne Dämpfung bestimmt ist, die hier 10 ms beträgt.

Abgesehen von den Abweichungen in der Nähe der ganz- bzw. halbzahligen Betatronumwerte ist der Schwellenstrom bei gleichmäßig verteilten Resonatoren innerhalb des Intervalls

$$\nu_\beta \in [21.1, 21.4]$$

nahezu konstant.

Die Änderung des Schwellenstroms innerhalb dieses Intervalls für den Beschleuniger mit einem Resonator läßt sich dadurch erklären, daß sich die Größe β ändert

$$0.15 \leq \beta \leq 0.95 \text{ für } \nu_\beta \in [21.1, 21.4]. \quad (4.90)$$

Ein kleinerer Wert von β führt zu einem kleineren Wert für D und damit schließlich zu einem höheren Schwellenstrom.

Die Vergleiche des einfachen Modellbeschleuniger mit dem realistischen Fall gleichmäßig verteilter Resonatoren zeigen, daß die Untersuchungsergebnisse des einfachen Modellbeschleunigers auf den realistischen Fall übertragen werden, wenn

$$\nu_\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \delta\nu_\beta, \quad |\delta\nu_\beta| \leq 0.15$$

und

$$\sin^2 \theta_3 \nu_\beta \approx \frac{1}{2}$$

gilt.

Das bedeutet, daß das Rückkopplungssystem in der Regel nicht in der Lage ist, den Strahl zu stabilisieren.

In Abschnitt 4.2.2 wurde aber auch betont, daß solange die Anwachszeiten der instabilen Moden kleiner als die internen Dämpfungskonstanten sind, das Rückkopplungssystem dennoch zu einem stabilen Zustand führen kann.

Damit ist der *Schwellenstrom mit Rückkopplungssystem* durch die *interne Dämpfung* bestimmt.

4.3.2 Parameterabhängigkeit des Schwellenstroms mit Rückkopplungssystem

Im weiteren soll die Abhängigkeit des Schwellenstroms von wichtigen Maschinenparametern wie

- Synchrotrontune ν_s ,
- Energie E und
- Bunchlänge σ_z

untersucht werden.

Die Untersuchungen werden unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt:

1. Die Resonatoren sind gleichmäßig um den Beschleuniger verteilt (vgl. Abb. (4.6))
2. fester Betatrone von $\nu_\beta = 21.225$
3. $C = 0$, so daß das System bei Strom null reaktiv ist
4. Frequenzverschiebung des Fundamentalmodus um $\Delta\nu = \frac{1}{2}\nu_s$,

Bei der vorgegebenen Erhöhung des Synchrotrontunes um 50 % würde man eine Vergrößerung des Schwellenstroms um ca. 50 % erwarten.

Die dritte Bedingung scheint willkürlich gewählt zu sein und soll deshalb gerechtfertigt werden.

Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Parameter C des Rückkopplungssystems

In Abbildung (4.8) ist der Schwellenstrom als Funktion des Betatrone mit und ohne Rückkopplungssystem dargestellt.

Abbildung (4.8b) zeigt die Abhängigkeit für ein Rückkopplungssystem, für das stets

$$C = 0$$

gilt. Wie man der Abbildung entnimmt, ist der Schwellenstrom nahezu unabhängig vom Betatrone.

Abbildung (4.8c) zeigt die Abhängigkeit für ein Rückkopplungssystem, für das der Wert C abhängig vom Betatrone folgende Werte annimmt:

$$\begin{array}{llll} 21.0 \leq \nu_\beta < 21.225 & C \leq 0 & \implies & F \leq F(\nu_\beta = 21.225) & \text{Bereich I} \\ \nu_\beta = 21.225 & C = 0 & & & \\ 21.225 < \nu_\beta \leq 21.500 & C \geq 0 & \implies & F \geq F(\nu_\beta = 21.225) & \text{Bereich II} \end{array}$$

Da die Determinante des Rückkopplungssystems durch

$$\det T_{FB} = 1 + F$$

gegeben ist, erhält man also für Betatrone im Bereich I eine zusätzliche Dämpfung und im Bereich II eine zusätzliche Anregung des Fundamentalmodus.

Abbildung (4.8c) läßt sich entnehmen, daß der Schwellenstrom für $C \approx 0$ am höchsten ist.

Wirkung eines resistiven Rückkopplungssystems

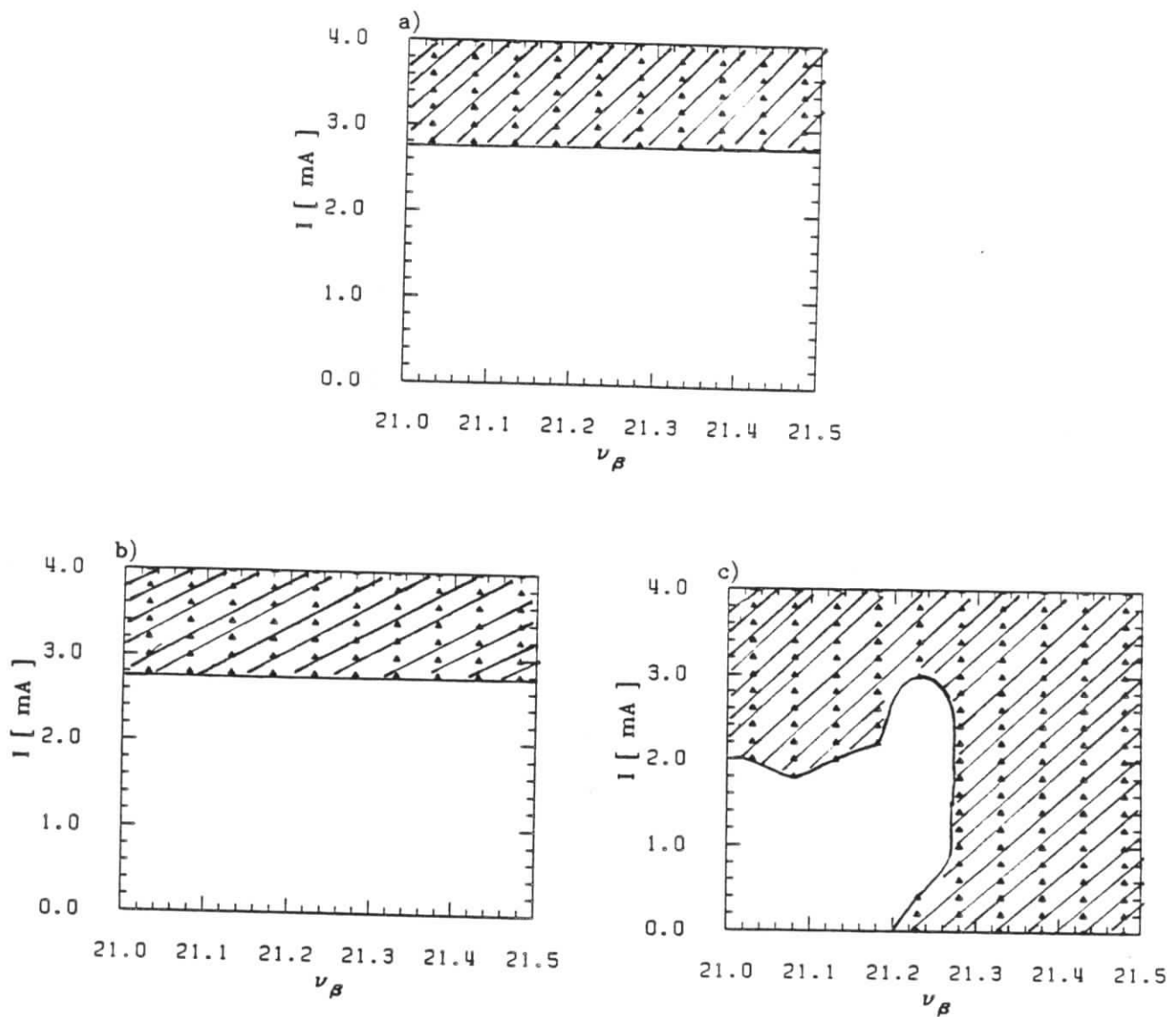


Abbildung 4.8: Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Betatron-tune für unterschiedliche Werte des Parameters C : Die Berechnungen wurden für den Fall gleichmäßig verteilter Resonatoren durchgeführt (vgl. Abb. 4.6B). Die schraffierten Flächen bezeichnen instabile und die weißen stabile Bereiche. Abbildung a) gibt den Schwellenstrom als Funktion des Betatron-tunes ohne Rückkopplungssystem wieder. Dabei zeigt sich das erwartete Ergebnis, daß der Schwellenstrom ($I_{th} \approx 3\text{mA}$) unabhängig vom Betatron-tune ist. Abbildung b) zeigt den Fall, daß das Rückkopplungssystem eine Frequenzverschiebung von $\Delta\nu = 1/2\nu_s$ ($\nu_s = 0.02$) bewirkt und stets $C = 0$ gilt. Auch in diesem Fall ist der Schwellenstrom unabhängig vom Betatron-tune. In Abbildung c) ist die Abhängigkeit wiedergegeben für den Fall, daß $C = 0$ nur für $\nu_\beta = 21.225$ gilt. Für andere Werte des Betatron-tunes erhält man von null verschiedene Werte für C , die dazu führen, daß man eine stärkere Dämpfung des Fundamentalmodus für $\nu_\beta < 21.225$ und eine schwache Anregung für $\nu_\beta > 21.225$ erhält. Deutlich ist zu erkennen, daß man den größten Schwellenstrom für $C = 0$ erhält.

Die Tatsache, daß man für $C \approx 0$ den größten Schwellenstrom für den zuletzt diskutierten Fall erzielen konnte, zeigt das ein resistives Rückkopplungssystem nicht stabilisierend wirkt. Dieser Effekt wurde auch durch weitere numerische Untersuchungen bestätigt, in denen der Schwellenstrom ohne resistives System stets größer als mit war. Aufgrund dieser Tatsachen wird von nun an, die dritte Bedingung ($C = 0$) erfüllt.

Abhängigkeit des Schwellenstroms von der Energie und der Bunchlänge

Die Abbildung (4.9) zeigt die Abhängigkeit des Schwellenstroms von der Energie für den Fall mit und ohne Rückkopplungssystem. In beiden Fällen steigt der Schwellenstrom mit der Energie linear an.

Allerdings ist der *Schwellenstrom mit Rückkopplungssystemen niedriger als ohne* für einen Synchrotrontune von $\nu_s = 0.06$. Weiterhin entnimmt man der Abbildung, daß die Reduktion des Schwellenstroms durch das Rückkopplungssystem unabhängig von der Bunchlänge ist.

Abhängigkeit des Schwellenstroms vom Synchrotrontune und der Bunchlänge

Der Einsatz eines Rückkopplungssystems, das eine Vergrößerung des Frequenzabstandes der beiden zur Instabilität koppelnden Moden bewirkt, kann für kleine Synchrotrontunes ($\nu_s \leq 0.02$) zu einer Erhöhung des Schwellenstroms führen (vgl. Abb. (4.10a)). Der obere Wert des Synchrotrontunes, bis zu dem noch eine positive Wirkung vorliegt, ist eine Funktion der Größe der internen Dämpfung (vgl. Abb. (4.10b)). Die Wirkung des Rückkopplungssystems ist nahezu unabhängig von der Bunchlänge.

Das am Speicherring **PEP** durchgeführte **Maschinenexperiment** zur Untersuchung eines Dipol - Rückkopplungssystems [31] ergab, daß sowohl das reaktive als auch das resistive Rückkopplungssystem zu einer Vergrößerung des Schwellenstroms führte.

Da der Synchrotrontune bei diesem Experiment sehr klein war ($\nu_s \approx 0.02$), kann anhand obiger Ergebnisse noch verstanden werden, warum das reaktive Rückkopplungssystem funktionierte. Jedoch ist das positive Ergebnis des resistiven Rückkopplungssystems nicht zu erklären.

Allerdings waren die experimentellen Bedingungen nicht mit den Voraussetzungen des hier vorgestellten Formalismus vergleichbar.

Unterhalb der Schwelle der transversalen Instabilität wurde eine turbulente Bunchverlängerung festgestellt, die ebenfalls zu einer Stabilisierung führen kann.

Insofern ist nicht ganz klar, inwieweit die Ergebnisse dieses Experiments auf andere Fälle übertragen werden dürfen.

Die mit dem in dieser Arbeit entwickelten Formalismus gewonnenen Ergebnisse lassen den Schluß zu, daß für den Fall eines sehr großen Synchrotrontunes sowohl das reaktive wie auch das resistive Rückkopplungssystem nicht zu einer Erhöhung der Instabilitätsschwelle führen werden.

Für einen sehr großen Protonen - Speicherring, wie dem SSC, kann dagegen der Einsatz eines reaktiven Rückkopplungssystems durchaus zu einer Vergrößerung der Instabilitätsschwelle führen [14], da in Protonen - Speicherringen der Synchrotrontune recht klein ist ($\nu_s < 0.01$).

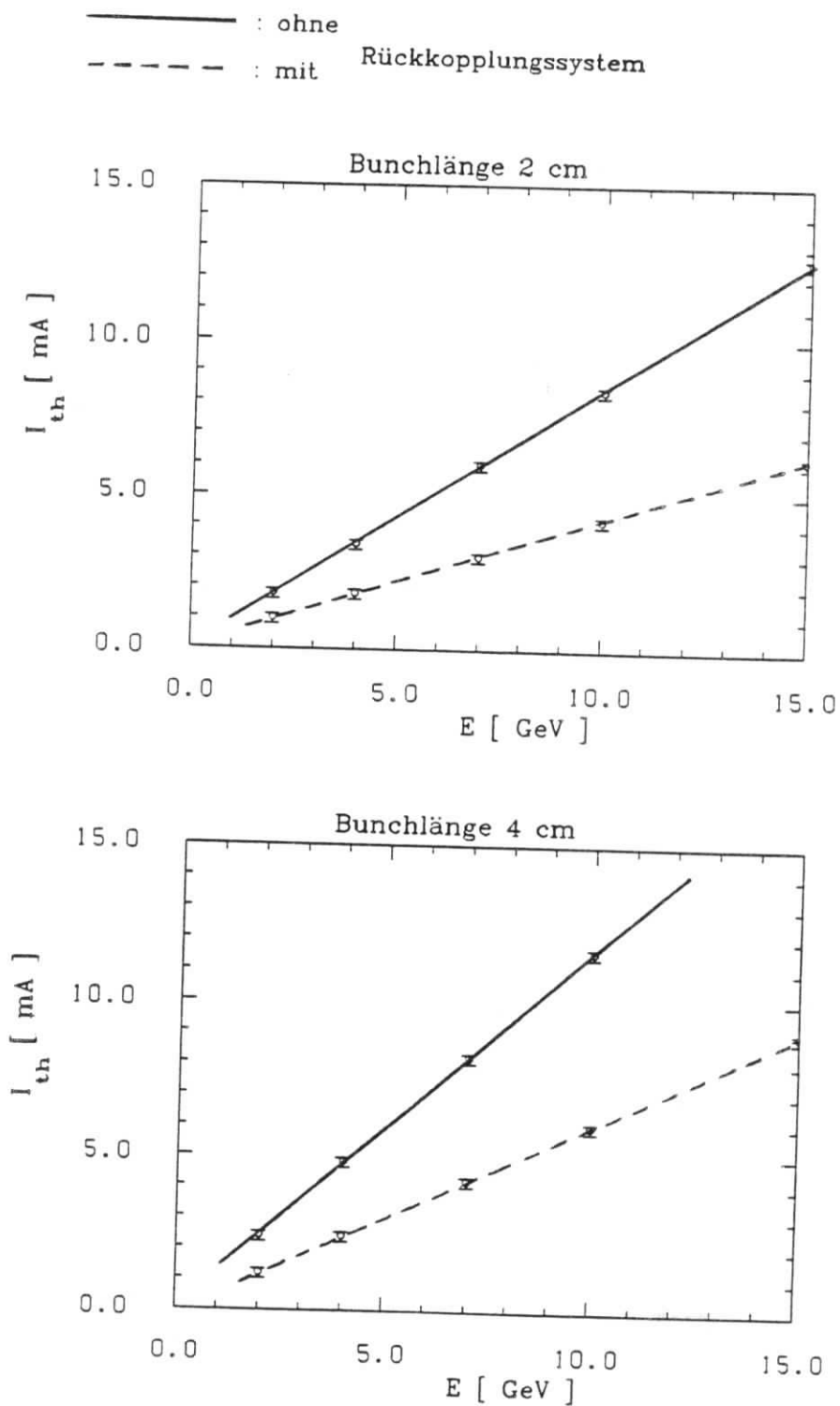


Abbildung 4.9: Abhängigkeit des Schwellenstroms von der Energie: Die Berechnungen werden für den Fall gleichmäßig verteilter Resonatoren durchgeführt. Die durch das Rückkopplungssystem bewirkte Frequenzverschiebung beträgt $\Delta\nu = 1/2\nu_s$, wobei der Synchrotrontune den Wert $\nu_s = 0.06$ besitzt. Sowohl mit und ohne Rückkopplungssystem steigt der Schwellenstrom linear mit der Energie an. Allerdings führt der Einsatz des Systems zu einer Reduktion des Schwellenstroms, wobei die interne Dämpfung (Landau- oder Strahlungsdämpfung) 10 ms beträgt. Diese Effekte sind unabhängig von der Bunchlänge.

— bzw. \circ : ohne
 - - - bzw. \square : mit Rückkopplungssystem

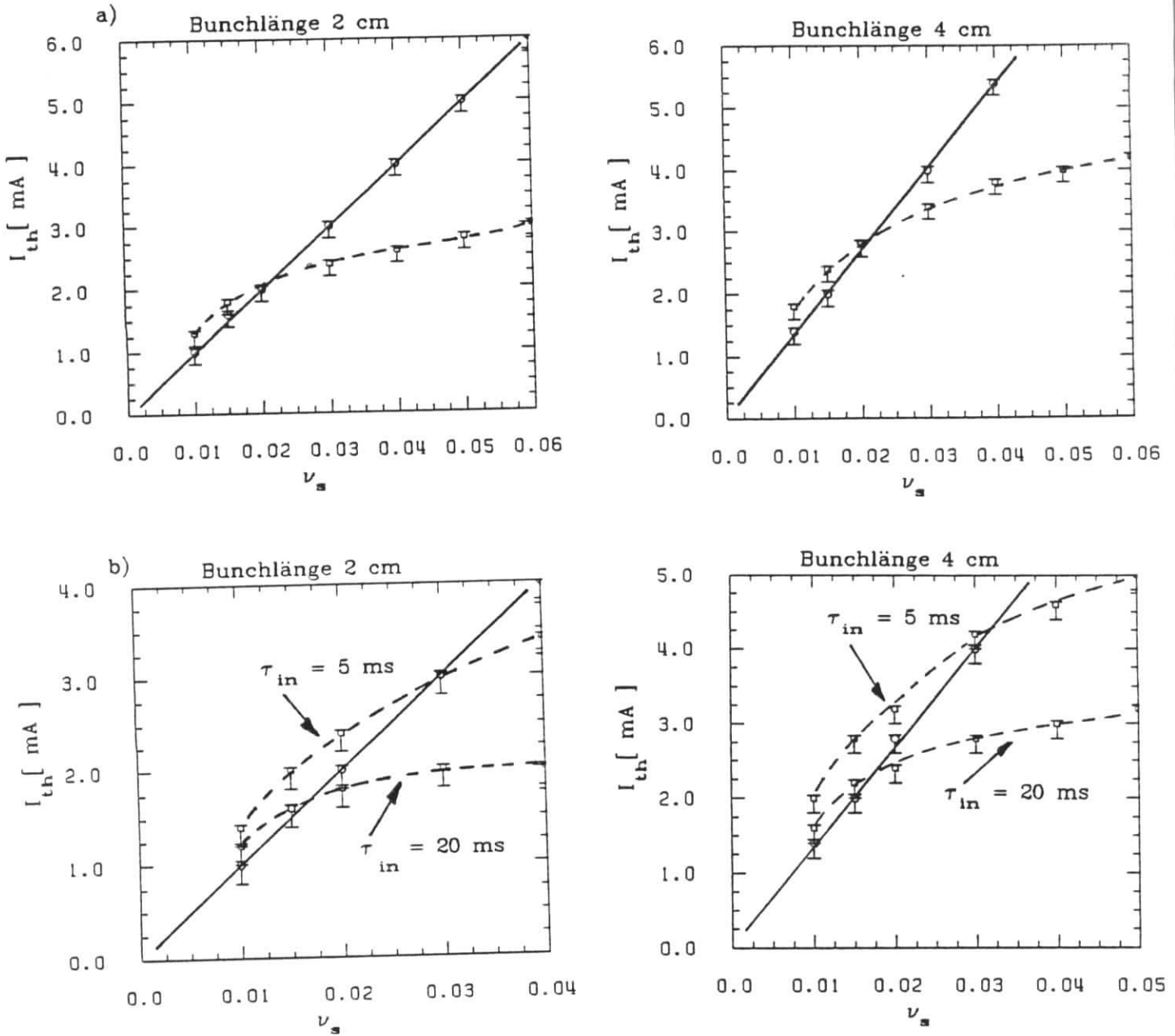


Abbildung 4.10: Schwellenstrom als Funktion des Synchrotrontunes: Die Untersuchungen werden an einem Beschleuniger mit gleichmäßig verteilten Resonatoren vorgenommen (vgl. Abb. 4.6B). Das Rückkopplungssystem bewirkt eine Frequenzverschiebung von $\Delta\nu = 1/2\nu_s$. Abbildung a) entnimmt man, daß das Rückkopplungssystem für kleine Synchrotrontunes ($\nu_s \leq 0.02$) zu einer Erhöhung des Schwellenstroms führt, wobei die interne Dämpfung $10ms$ beträgt. Abbildung b) zeigt die Abhängigkeit für verschiedene Werte der internen Dämpfung τ_{in} . Ist die interne Dämpfung genügend groß, so kann sogar eine positive Wirkung des Systems bis zu Werten von $\nu_s \leq 0.03$ erzielt werden. Zu beachten ist, daß die hier angenommenen Dämpfungen niemals ausreichen würden, die Anwachsraten aufgrund der üblichen Modenkopplung zu kompensieren (vgl. Abb. 3.6).

Kapitel 5

Zusammenfassung

In vielen großen Speicherringen stellt die Moden - Kopplungsinstabilität eine Begrenzung des maximal speicherbaren Stroms dar.

Ursache dieser Instabilität ist die Wechselwirkung einzelner intensiver Bunche mit den Einbauten in der Vakuumkammer, speziell den Hochfrequenzresonatoren.

Insofern wird insbesondere der Betrieb von Elektron - Positron Speicherringen durch diese Instabilität aufgrund der hohen Zahl an Resonatoren beeinträchtigt wie im Falle von PETRA, PEP und TRISTAN. Auch für den im Bau befindlichen Speicherring LEP wird erwartet, daß der speicherbare Strom durch die Moden - Kopplungsinstabilität bestimmt ist.

Für Protonen Speicherringe spielte diese Instabilität bisher keine Rolle, aber für den geplanten sehr großen Speicherring SSC wird wegen der sehr großen Zahl an Querschnittsänderungen in der Vakuumkammer (Faltenbälge, Monitore) eine Begrenzung des Strahlstroms durch die Moden - Kopplungsinstabilität erwartet.

Für den im Bau befindlichen Speicherring HERA wird dagegen diese Instabilität weder für den Elektronen- noch für den Protonenring die entscheidende Intensitätsbegrenzung darstellen, da die Intensität des Strahls auf sehr viele Bunche verteilt ist und somit der Einzelbunchstrom weit unterhalb der Instabilitätsschwelle liegt.

Untersuchungen der letzten Jahre haben gezeigt, daß die Lokalisierung der Resonatoren zu resonanzartigen Instabilitäten führen können - den kohärenten Synchro - Betatron Resonanzen, die zusätzlich zur üblichen Moden - Kopplungsinstabilität auftreten. Dabei wurde immer angenommen, daß die Resonatoren punktförmig sind, d.h. ihre Länge ist null, und die Resonatoren einer Beschleunigungsstrecke an einem Punkt konzentriert sind, so daß die Länge der Beschleunigungsstrecke ebenfalls null ist.

In dieser Arbeit ist ein auf der Vlasov - Gleichung basierender Matrizenformalismus entwickelt worden, der eine gründliche Untersuchung beliebig lokalisierter Resonatoren bei Berücksichtigung der endlichen Länge der Beschleunigungsstrecken ermöglicht.

Die allgemeinen Untersuchungen mit Hilfe dieses Formalismus und spezielle numerische Berechnungen für den Speicherring PETRA zeigen, daß die Lokalisierung der Resonatoren aufgrund der endlichen Länge der Beschleunigungsstrecken den Betrieb eines Speicherrings nicht beeinträchtigt und in guter Näherung angenommen werden darf, daß die Resonatoren gleichmäßig um den Ring verteilt sind.

Die Hoffnung, die Diskrepanzen zwischen gemessenen und berechneten Schwellenstrom durch Effekte der Lokalisierung erklären zu können, haben sich nicht erfüllt.

Wegen der gravierenden Begrenzung des Stroms durch diese Instabilität konzentriert sich das Interesse darauf, einen geeigneten Kompensationsmechanismus in Form eines Rückkopplungssystems zu finden, der eine Erhöhung der Instabilitätsschwelle ermöglicht. Der oben ange-

sprochene Formalismus gestattet eine einheitliche und gründliche Untersuchung der Kompensationsmöglichkeit der Moden - Kopplungsinstabilität mit Hilfe eines Rückkopplungssystems. Dabei stellt sich heraus, daß weder ein "reaktives" noch ein "resistives" System in der Lage sind, die Instabilitätsschwelle zu erhöhen, sondern im Gegenteil den Strahl in der Regel destabilisieren. Nur für Synchrotrontunes, die kleiner als ein durch die interne Dämpfung (Landau- und Strahlungsdämpfung) festgelegter Wert (≈ 0.02) sind, ist eine Erhöhung des Schwellenstroms zu erwarten, so daß der Einsatz eines Rückkopplungssystems in einem Protonen - Speicherring sinnvoll sein könnte.

Da die experimentelle Untersuchung eines Rückkopplungssystems am Speicherring PEP bei einem kleinen Synchrotrontune durchgeführt wurde, ist die positive Wirkung eines reaktiven Systems noch erklärlich.

Nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ist die Übertragung dieses positiven Resultats für größere Synchrotrontunes nicht zulässig.

Die Erhöhung des Schwellenstroms durch ein resistives System ist aber theoretisch nicht geklärt.

Allerdings lassen sich relevante Aussagen über die Wirkung eines Rückkopplungssystems mit Hilfe eines Experiments nur dann gewinnen, wenn die die Instabilitätsschwelle bestimmenden Parameter wie Bunchlänge, Landaudämpfung usw. während der Messung konstant bleiben. Diese Voraussetzungen waren beim PEP - Experiment aufgrund einer turbulenten Bunchverlängerung, die unterhalb der Instabilitätsschwelle der Modenkopplung einsetzte, nicht erfüllt.

Insofern sind die experimentellen Bedingungen undurchsichtig und eine verlässliche Voraussage hinsichtlich der Wirkung eines resistiven Rückkopplungssystems auf die Moden - Kopplungsinstabilität nicht möglich.

Die Schlußfolgerung dieser Arbeit lautet also, daß wie bisher auf die üblichen Verfahren wie Reduktion der Betafunktion innerhalb der Beschleunigungsstrecken, Bunchverlängerung durch longitudinale Entdämpfung usw. zurückgegriffen werden muß, um die Instabilitätsschwelle zu vergrößern.

Anhang A

A.1 Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichung

Die Störung u der stationären Verteilung ist periodisch in den Winkelvariablen φ und ψ . Die Fourierentwicklung von u ergibt

$$u(\theta, \psi, I, \varphi, J) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\psi} e^{im(\varphi + \frac{\xi}{\alpha}\vartheta)} . \quad (\text{A.1})$$

Setzt man diese Entwicklung in die Vlasov - Gleichung (3.16) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{mn} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in\nu_s + im \left(\frac{R}{\beta} + \frac{\xi \nu_s}{\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} + \xi \frac{\Delta E}{E} \right) \right\} u_{mn}(\theta, I, J) \\ = F(I) \frac{dG}{dJ} \frac{R\sqrt{2J\beta}}{E} \mathcal{F}[u] \sin \varphi . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Wegen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = -\sqrt{2I} \sin \psi = -\frac{\alpha}{\nu_s} \frac{\Delta E}{E}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sum_{mn} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in\nu_s + im \frac{R}{\beta} \right\} e^{in\psi} e^{im(\varphi + \frac{\xi}{\alpha}\vartheta)} u_{mn}(\theta, I, J) \\ = F(I) \frac{dG}{dJ} \frac{R\sqrt{2J\beta}}{E} \mathcal{F}[u] \sin \varphi . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Gleichung (A.3) multipliziert man mit $1/2\pi \exp(-im'(\varphi + \frac{\xi}{\alpha}\vartheta))$ und integriert über φ und anschließend multipliziert man mit $1/2\pi \exp(-in'\psi)$ und integriert über ψ . Danach ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im' \frac{R}{\beta} \right\} u_{m'n'}(\theta, I, J) \\ = F(I) \frac{dG}{dJ} \frac{R\sqrt{2J\beta}}{E} \frac{m'}{2i} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{-im' \frac{\xi}{\alpha}\vartheta} \mathcal{F}[u] , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

wobei

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi e^{-im'\varphi} = \frac{1}{2i} \{ \delta_{m',1} - \delta_{m',-1} \} = \frac{m'}{2i} \text{ für } m' = \pm 1$$

benutzt wurde.

Da $\mathcal{F}[u]$ nur von $\Delta\phi$, θ abhängt, kann man die Wirkungsvariable J folgendermaßen eliminieren.

Man definiert

$$d_{mn}(\theta, I) = \int_0^\infty dJ u_{mn}(\theta, I, J) \cdot \sqrt{2J} . \quad (\text{A.5})$$

Multipliziert man (A.4) mit $\sqrt{2J}$ und integriert anschließend über J , dann erhält man

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im' \frac{R}{\beta} \right\} d_{m'n'}(\theta, I) \\ &= -F(I) \frac{m'R\sqrt{\beta}}{2\pi E i} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{-im' \frac{\xi}{\alpha} \vartheta} \mathcal{F}[u] , \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

falls man

$$\int_0^\infty dJ J \frac{dG}{dJ} = G \cdot J \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dJ G = -\frac{1}{2i}$$

($G(\infty) = 0$ und $\int_0^\infty dJ G = -1/2\pi$ folgt aus der Normierungsbedingung (3.22)) berücksichtigt. Mit Hilfe der Gleichungen (A.1) und (A.5) folgt für das in (3.34) definierte Dipolmoment

$$D(\theta, \vartheta_1) = \pi \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_0^\infty dI_1 \delta(\vartheta_1 - \sqrt{2I_1} \cos \psi_1) e^{in\psi_1} e^{im \frac{\xi}{\alpha} \vartheta_1} d_{mn}(\theta, I_1) . \quad (\text{A.7})$$

Benutzt man Gleichung (A.7) sowie (3.34), dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{-im' \frac{\xi}{\alpha} \vartheta} \mathcal{F}[u] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\beta} \epsilon}{R \Delta \theta_i} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{-im' \frac{\xi}{\alpha} \vartheta} \int d\vartheta w_1^j(\vartheta_1 - \vartheta) . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\pi \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_0^\infty dI_1 \delta(\vartheta_1 - \sqrt{2I_1} \cos \psi_1) e^{in\psi_1} e^{im \frac{\xi}{\alpha} \vartheta_1} d_{mn}(\theta, I_1) .$$

Um diesen Ausdruck weiter auswerten zu können, wird für jedes Objekt j eine Impedanzfunktion eingeführt

$$w_1^j(\alpha) = i \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z^j(p) e^{-ip\alpha} . \quad (\text{A.9})$$

Da das Wake - Potential $w_1^j(\alpha)$ reell ist, folgt

$$Z^j(p) = -(Z^j(-p))^* , \quad (\text{A.10})$$

wobei der * das konjugiert Komplexe bezeichnet.

Setzt man die in (A.9) definierte Impedanzfunktion in (A.8) ein und nimmt man an, daß die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf, dann gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{-im' \frac{\xi}{\alpha} \vartheta} \mathcal{F}[u] \\ &= \pi \cdot \frac{i\omega_0 \sqrt{\beta} \epsilon}{R \Delta \theta_i} \sum_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z^i(p) \int_0^\infty dI_1 d_{mn}(\theta, I_1) \cdot \\ & \quad \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{i(p-m') \frac{\xi}{\alpha} \sqrt{2I_1} \cos \psi} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_1 e^{in\psi_1} e^{i(m-p) \frac{\xi}{\alpha} \sqrt{2I_1} \cos \psi} . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Mit

$$\int_0^{2\pi} d\psi e^{in\psi} e^{-ix \cos \psi} = 2\pi i^{-n} J_n(x) \quad (\text{A.12})$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{-im' \frac{\xi}{\alpha}} \mathcal{F}[u] \\ = & \frac{i\pi\omega_0\sqrt{\beta}e}{R\Delta\theta_i} \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z^i(p) \\ & \int_0^{\infty} dI_1 d_{mn}(\theta, I_1) \cdot J_{n'}(\sqrt{2I}(p - m' \frac{\xi}{\alpha})) \cdot J_n(\sqrt{2I_1}(p - m \frac{\xi}{\alpha})) . \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Einsetzen von (A.13) in (A.6) liefert

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im' \frac{R}{\beta} \right\} d_{m'n'}(\theta, I) = \\ & -m' \frac{\omega_0\beta}{2E/e} F(I) \cdot \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z^i(p) \\ & \int_0^{\infty} dI_1 d_{mn}(\theta, I_1) \cdot J_{n'}(\sqrt{2I}(p - m' \frac{\xi}{\alpha})) \cdot J_n(\sqrt{2I_1}(p - m \frac{\xi}{\alpha})) . \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Diese Gleichung wird mit Hilfe eines von Besnier [48] stammenden Verfahrens weiter bearbeitet. Die rechte Seite von Gleichung (A.14) bestimmt die funktionelle Abhängigkeit der Koeffizienten d_{mn} von der Wirkungsvariablen I . Diese Abhängigkeit ändert sich nicht mit dem Vorzeichen von m' bzw. n' . Deshalb kann man die d_{mn} in folgender Weise nach einem vollständigen Funktionensystem entwickeln:

$$d_{mn}(\theta, I) = C \cdot F(I) \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{|n|}(I) a_{mk}^n(\theta), \quad (\text{A.15})$$

wobei die Funktionen $f_k^{|n|}$ durch folgende Orthogonalitätsrelation festgelegt sind:

$$C \int_0^{\infty} dI F(I) f_k^{|n|}(I) f_l^{|n|}(I) = \delta_{kl} . \quad (\text{A.16})$$

Der Faktor C ist aus Gründen der Bequemlichkeit eingeführt worden und der Index m an den Funktionen $f_k^{|n|}$ fortgelassen worden, da m nur die Werte ± 1 annimmt.

Nach Einsetzen der Entwicklung (A.15) in Gleichung (A.14), Multiplikation mit $f_k^{|n'|}$ und anschließender Integration über I ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im' \frac{R}{\beta} \right\} a_{m'k'}^{n'}(\theta) \\ & = -K \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_{mnk}^{m'n'k'(j)} a_{mk}^n(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

mit

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad M_{mnk}^{m'n'k'(j)} & = m' \beta(\theta) i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^j(p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p - m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) \\ \text{(b)} \quad I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) & = C \int_0^{\infty} dI f_k^{|n|}(I) F(I) J_n(\sqrt{2I}(p - m \frac{\xi}{\alpha})) \\ \text{(c)} \quad K & = \frac{\omega_0}{2E/eC} . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Damit ist es gelungen, die Vlasov - Gleichung in ein System von gekoppelten linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zu überführen.
Um das Dipolmoment als Funktion der Koeffizienten a_{mk}^n zu erhalten, setzt man (A.15) in (A.7) ein:

$$D(\theta, \vartheta) = \pi \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk}^n(\theta) C \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} dI \delta(\vartheta - \sqrt{2I} \cos \psi) e^{in\psi} e^{im\frac{\xi}{\alpha}\vartheta} F(I) f_k^{|\eta|}(I) . \quad (\text{A.19})$$

Üblicherweise mißt man nicht das Dipolmoment an einer bestimmten Stelle (θ, ϑ) im Bunch, sondern beobachtet das über die Bunchlänge integrierte Dipolmoment

$$\bar{D}(\theta) = \int d\vartheta D(\theta, \vartheta) , \quad (\text{A.20})$$

und dafür erhält man mit (A.18b)

$$\bar{D}(\theta) = 2\pi^2 \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i^n a_{mk}^n(\theta) I_{nk}(m\xi) . \quad (\text{A.21})$$

Mit

$$\vec{b}^T = 2\pi^2 (\dots i^n I_{nk}(m\xi) \dots)^T \quad (\text{A.22})$$

gilt schließlich

$$\bar{D}(\theta) = \vec{b}^T \cdot \vec{a}(\theta) , \quad (\text{A.23})$$

wobei der Vektor \vec{a} in (3.42) definiert ist.

A.2 Beweis von $J\mathcal{A}_j J^{-1} = -\mathcal{A}_j^T$ und $K^{-1}\mathcal{A}_j K = -\mathcal{A}_j$

A.2.1 Eigenschaften der Matrixelemente

Aufgrund der folgenden Eigenschaft der Besselfunktion

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(-x)$$

folgt aus (3.36b)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & I_{-nk}(p - m\frac{\xi}{\alpha}) = (-1)^n I_{nk}(p - m\frac{\xi}{\alpha}) \\ \text{b)} \quad & I_{nk}(-(p - m\frac{\xi}{\alpha})) = (-1)^n I_{nk}(p - m\frac{\xi}{\alpha}) . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Damit gilt für die in (3.36a) definierten Matrixelemente

$$M_{mnk}^{m'n'k'} = M_{mnk}^{m'-n'k'} = M_{m-nk}^{m'n'k'} = M_{m-nk}^{m'-n'k'} . \quad (\text{A.25})$$

Mit Hilfe von (A.10) läßt sich

$$(M_{mnk}^{m'n'k'})^* = M_{-mnk}^{-m'-n'k'} \quad (\text{A.26})$$

zeigen, wenn * das konjugiert Komplexe bezeichnet.
Denn es gilt

$$\begin{aligned}
(M_{mnk}^{m'n'k'})^* &= m' \beta(\theta) (i^{n'-n})^* \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^{(j)}(p)^*}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p - m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) \\
&= -m' \beta(\theta) i^{n'-n} (-1)^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^{(j)}(-p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p - m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) \\
&= -m' \beta(\theta) i^{n'-n} (-1)^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^{(j)}(p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(-(p + m' \frac{\xi}{\alpha})) I_{nk}(-(p + m \frac{\xi}{\alpha})) \\
&= -m' \beta(\theta) i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^{(j)}(p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p + m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(p + m \frac{\xi}{\alpha}) \\
&= M_{-mnk}^{-m'n'k'} .
\end{aligned}$$

Der Definition der Matrixelemente entnimmt man

$$\begin{aligned}
M_{m'n'k'}^{mnk} &= m \beta(\theta) i^{n-n'} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^{(j)}(p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p - m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) \\
&= (-1)^{n'-n} \frac{m}{m'} m' \beta(\theta) i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^{(j)}(p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p - m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) \\
&= (-1)^{n'-n} \frac{m}{m'} M_{mnk}^{m'n'k'} .
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Für Chromatizität $\xi = 0$ gilt

$$M_{mnk}^{m'n'k'} = m' \beta(\theta) i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{Z^{(j)}(p)}{\Delta\theta_j} I_{n'k'}(p) I_{nk}(p) , \tag{A.28}$$

d.h. die Matrixelemente $M_{mnk}^{m'n'k'}$ sind unabhängig von m , also

$$\xi = 0 : M_{mnk}^{m'n'k'} = M_{-mnk}^{m'n'k'} . \tag{A.29}$$

Darüberhinaus erhält man aus (A.28)

$$\xi = 0 : M_{mnk}^{-m'n'k'} = -M_{mnk}^{m'n'k'} . \tag{A.30}$$

Somit folgt aus (A.26) mit (A.29) (A.30) für $\xi = 0$:

$$\xi = 0 : (M_{mnk}^{m'n'k'})^* = -M_{mnk}^{m'n'k'} . \tag{A.31}$$

A.2.2 Beweis der Äquivalenzrelationen

Unter der Annahme, daß die Chromatizität null ist, gilt (3.61)

$$A_j = \begin{pmatrix} R_1(\theta) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & R_{-1}(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} .$$

(\mathcal{O} bezeichnet die Nullmatrix)

In Abschnitt 3.4 wurde die Notwendigkeit erläutert, sich auf endlich viele Schwingungszustände a_{mk}^n zu beschränken. Es werden deshalb n azimutale Moden und entsprechend die Moden mit $-n$ mit jeweils $k(|n|)$ radialen Moden betrachtet. Damit folgt dann

$$M = (M_n^{n'}) = \begin{pmatrix} M_0^0 & M_1^0 & M_{-1}^0 & \dots & M_{-n}^0 \\ M_0^1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ M_0^{-n} & M_1^{-n} & & \dots & M_{-n}^{-n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

mit

$$M_n^{n'} = \begin{pmatrix} M_{n0}^{n'0} & M_{n1}^{n'0} & \dots & M_{nk(n)}^{n'0} \\ M_{n0}^{n'1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{n0}^{n'k(n')} & \dots & \dots & M_{nk(n)}^{n'k(n')} \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Die Matrix M hat also die Dimension $(2n+1)(2n+1)$, wobei die einzelnen "Matrixelemente" $M_n^{n'}$ Blockmatrizen der Dimension $k(n) \cdot k(n')$ sind. Die Matrizen $R_m(\theta)$ haben die folgende Struktur

$$R_m(\theta) = -im \frac{R}{\beta} \mathbb{1} + B \quad (\text{A.34})$$

mit

$$B = (-in\nu_s \mathbb{1}_{nn}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{O} & \mathbb{1}_{11}(-i\nu_s) & & \mathcal{O} \\ \vdots & & \mathbb{1}_{-1-1}(i\nu_s) & \vdots \\ & & \ddots & \\ \mathcal{O} & \dots & \dots & \mathbb{1}_{-n-n}(in\nu_s) \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

wobei $\mathbb{1}_{nn} = (\delta_{ij})$ eine Einheitsmatrix der Dimension $k(n) \cdot k(n)$ ist. Somit enthalten die Matrizen $R_m(\theta)$ nur Diagonalelemente, so daß man für das transponierte der Matrizen

$$R_m^T(\theta) = R_m(\theta) \quad (\text{A.36})$$

sowie

$$M^T = (M_n^{n'})^T = ((M_{n'}^n)^T)$$

erhält.

Die Matrixelemente von M sind gemäß (3.58) durch

$$M_{nk}^{n'k'} = M_{1nk}^{1n'k'} \quad (\text{A.37})$$

definiert.

Für die Matrixelemente (A.37) folgt dann aus (A.27)

$$M_{nk}^{n'k'} = (-1)^{n'-n} M_{n'k'}^{nk} \quad (\text{A.38})$$

oder für die Matrizen $M_n^{n'}$

$$M_n^{n'} = (-1)^{n'-n} (M_{n'}^n)^T . \quad (\text{A.39})$$

Es wird eine Matrix P_1 definiert

$$P_1 = \left((-1)^{|n|+1} \mathbb{1}_{nn} \right) . \quad (\text{A.40})$$

Für diese Matrix gilt

$$P_1 \cdot P_1 = \left(\sum_n (-1)^{|n|+1} \cdot (-1)^{|n|+1} \mathbb{1}_{nn} \mathbb{1}_{nn} \right) = \mathbb{1} . \quad (\text{A.41})$$

Betrachtet man nun eine beliebige Blockmatrix

$$D = (D_{mn}) ,$$

dann erhält man für

$$\begin{aligned} P_1 D P_1 &= \left((-1)^{|n|+1} \mathbb{1}_{nn} \right) (D_{nm}) \left((-1)^{|n|+1} \mathbb{1}_{nn} \right) \\ &= \left((-1)^{|n|+|m|} D_{nm} \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Besitzt die Matrix D nur "Diagonalelemente" D_{nn} , dann wird sie durch diese Operation nicht verändert. Damit ergibt sich mit (A.39) (A.36)

$$\begin{aligned} P_1 R_m^T P_1^{-1} &= R_m \\ P_1 M^T P_1^{-1} &= M . \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Darüberhinaus wird folgende Matrix definiert:

$$I_m = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{00} & \mathcal{O}_{01} & \dots & & & \mathcal{O}_{0-n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & \mathcal{O}_{m-m} & \mathbb{1}_{mm} & & \\ & & \mathbb{1}_{-m-m} & \mathcal{O}_{-mm} & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathcal{O}_{-n0} & \dots & & & & \mathcal{O}_{-n-n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Diese Matrix bewirkt, wenn man damit eine Blockmatrix von links bzw. von rechts multipliziert, ein Vertauschen der Zeilen m und $-m$ bzw. der Spalten m und $-m$, wie folgende Rechnungen zeigen:

$$I_m \cdot D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{00} & \mathcal{O}_{01} & \dots & & & \mathcal{O}_{0-n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & \mathcal{O}_{m-m} & \mathbb{1}_{mm} & & \\ & & \mathbb{1}_{-m-m} & \mathcal{O}_{-mm} & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathcal{O}_{-n0} & \dots & & & & \mathcal{O}_{-n-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{00} & \dots & \dots & & & D_{0-n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & D_{m0} & \dots & \dots & D_{m-n} \\ & & D_{-m0} & \dots & \dots & D_{-m-n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ D_{-n0} & \dots & & & & D_{-n-n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{00} & \dots & \dots & D_{0-n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ D_{-m0} & \dots & \dots & D_{-m-n} \\ D_{m0} & \dots & \dots & D_{m-n} \\ \vdots & & & \vdots \\ D_{-n0} & \dots & & D_{-n-n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{pmatrix} D_{00} & \dots & \dots & D_{0m} & D_{0-m} & D_{0-n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & \dots & & \dots & \vdots \\ & & \dots & & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ D_{-n0} & \dots & D_{-nm} & D_{-n-m} & D_{-n-n} \end{pmatrix} \begin{matrix} D \cdot I_m = \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbb{1}_{00} & \mathcal{O}_{01} & \dots & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & & & \mathcal{O}_{m-m} & \mathbb{1}_{mm} \\ & & & \mathbb{1}_{-m-m} & \mathcal{O}_{-mm} \\ \vdots & & & & \\ \mathcal{O}_{-n0} & \dots & & & \end{array} \right) \begin{matrix} \mathcal{O}_{0-n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathcal{O}_{-n-n} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{00} & \dots & \dots & D_{0-m} & D_{0m} & D_{0-n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & \dots & & \dots & \vdots \\ & & \dots & & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ D_{-n0} & \dots & D_{-n-m} & D_{-nm} & D_{-n-n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Somit gilt ebenfalls

$$I_m^{-1} = I_m^T = I_m, \quad (\text{A.47})$$

solange die Dimensionen der Blockmatrizen $\mathbb{1}_{mm}$ und $\mathbb{1}_{-m-m}$ übereinstimmen. Aus Gleichung (A.25) folgt mit $m' = m = 1$

$$M_{n'}^n = M_{n'}^{-n} = M_{-n'}^n = M_{-n'}^{-n} \quad (\text{A.48})$$

und damit

$$I_m \cdot M = M \quad (\text{A.49})$$

sowie

$$M \cdot I_m = M$$

also insgesamt

$$I_m \cdot M \cdot I_m^{-1} = M. \quad (\text{A.50})$$

Für die Matrizen R_m gilt

$$\begin{aligned} I_n \cdot R_m \cdot I_n^{-1} &= I_n \cdot R_m \cdot I_n \\ &= -im \frac{R}{\beta} \mathbb{1} + I_n B I_n \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Die Wirkung der Matrizen I_n bzw. I_{-n} besteht in einem Vertauschen benachbarter Zeilen bzw. Spalten und die kombinierte Anwendung auf die Matrix B besteht im Austausch benachbarter Diagonalelemente $-in\nu_s$ bzw. $-i(-n)\nu_s$, so daß man

$$I_k \cdot B \cdot I_k = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{00} & \mathcal{O}_{01} & \dots & & & \mathcal{O}_{0-n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & -i(-k)\nu_s \mathbb{1}_{-k-k} & \mathcal{O}_{-kk} & \\ & & & \mathcal{O}_{k-k} & -i(k)\nu_s \mathbb{1}_{kk} & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathcal{O}_{-n0} & \dots & & & & -i(-n)\nu_s \mathbb{1}_{-n-n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.52})$$

erhält.

Definiert man

$$P_2 = I_n \cdot \dots \cdot I_1, \quad (\text{A.53})$$

dann ist aufgrund der Eigenschaften von I_n (A.47)

$$P_2' = P_2^{-1}. \quad (\text{A.54})$$

Aus (A.50) (A.51) (A.52) folgt jetzt

$$\begin{aligned} P_2^T M P_2 &= M \\ P_2^T R_m P_2 &= -im \frac{R}{\beta} \mathbb{1} + P_2^T B P_2 \\ &= -im \frac{R}{\beta} \mathbb{1} - B \\ &= - \left(-i(-m) \frac{R}{\beta} \mathbb{1} + B \right) = -R_{-m}. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Somit kann man aus den Matrizen P_1 und P_2 eine Matrix P konstruieren

$$P = P_1 \cdot P_2, \quad (\text{A.56})$$

deren Eigenschaften sich aus denen von P_1 bzw. P_2 (A.43) (A.54) (A.55) ableiten:

$$P^T = P_2^T \cdot P_1^T = P^{-1} \quad (\text{A.57})$$

$$P^T R_m P = -R_{-m} \quad (\text{A.58})$$

$$P^T M^T P = M.$$

Schließlich erhält man die Matrix J mittels

$$J = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & P \\ -P & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.59})$$

und es gilt

$$J^T = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & -P^T \\ P^T & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & -P^{-1} \\ P^{-1} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

also

$$J \cdot J^T = J \cdot J^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & P \\ -P & \mathcal{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O} & -P^{-1} \\ P^{-1} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \mathbb{1} .$$

Damit läßt sich die Gültigkeit der ersten Ähnlichkeitsrelation zeigen:

$$\begin{aligned} J^{-1} \mathcal{A}^T J &= \begin{pmatrix} \mathcal{O} & -P^T \\ P^T & \mathcal{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 - M^T & M^T \\ -M^T & R_{-1} + M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O} & P \\ -P & \mathcal{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^T(R_{-1} + M^T)P & P^T M^T P \\ -P^T M^T P & P^T(R_1 - M^T)P \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -R_1 + M & M \\ -M & -R_1 - M \end{pmatrix} \\ &= - \left\{ \begin{pmatrix} R_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & R_{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} \right\} = -\mathcal{A} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

oder

$$\mathcal{A}^T = -J \mathcal{A} J^{-1} . \quad (\text{A.61})$$

Darüberhinaus kann man eine Matrix K definieren

$$K = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & P_2 \\ P_2 & \mathcal{O} \end{pmatrix} , \quad (\text{A.62})$$

wobei P_2 durch (A.53) gegeben ist.
Für diese Matrix gilt

$$\begin{aligned} K^T \mathcal{A} K &= \begin{pmatrix} \mathcal{O} & P_2 \\ P_2 & \mathcal{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 - M & -M \\ M & R_{-1} + M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O} & P_2 \\ P_2 & \mathcal{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_2^T(R_{-1} + M)P_2 & P_2^T M P_2 \\ -P_2^T M P_2 & P_2^T(R_1 - M)P_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften von P_2 (A.55) folgt

$$\begin{aligned} K^T \mathcal{A} K &= \begin{pmatrix} -R_1 + M & M \\ -M & -R_1 - M \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} R_1 - M & -M \\ M & R_1 + M \end{pmatrix} \\ &= -\mathcal{A} \end{aligned}$$

also

$$K^T \mathcal{A} K = -\mathcal{A} \quad (\text{A.63})$$

oder mit $K^T = K^{-1}$

$$K^{-1} \mathcal{A} K = -\mathcal{A} . \quad (\text{A.64})$$

A.3 Berechnung der Matrixelemente

A.3.1 Berechnung der Standardabweichung

Für die Standardabweichung σ_θ gilt

$$\sigma_\theta^2 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty dI (\vartheta(I, \psi))^2 F(I) / \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty dI F(I) \quad (\text{A.65})$$

also mit (3.13) und (3.86)

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 &= \frac{2}{Ne} \int_0^{2\pi} d\psi \cos^2 \psi \int_0^\infty dI \frac{Ne}{2\pi I_0} I e^{-\frac{I}{I_0}} \\ &= \frac{1}{I_0} \int_0^\infty dI I e^{-\frac{I}{I_0}} = I_0 \end{aligned}$$

also

$$\sigma_\theta = \sqrt{I_0} . \quad (\text{A.66})$$

A.3.2 Berechnung der I_{nk}

Mit (3.36b) (3.86) (3.88) (3.89) (3.90) gilt

$$I_{nk}(p - m\frac{\xi}{\alpha}) = \int_0^\infty dx e^{-x} f_k^{(|n|)}(x) J_n(a\sqrt{x}) ,$$

wobei

$$x = \frac{I}{I_0} \text{ und } a = \sqrt{2I_0} (p - m\frac{\xi}{\alpha}) = \sqrt{2}\sigma_\theta (p - m\frac{\xi}{\alpha})$$

ist, also

$$I_{nk}(p - m\frac{\xi}{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{k!(|n|+k)!}} \int_0^\infty dx x^{-\frac{|n|}{2}} J_n(a\sqrt{x}) \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x} x^{|n|+k}) . \quad (\text{A.67})$$

Dieser Ausdruck wird für positive n ausgewertet. Benutzt man die Identität [49]

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x) ,$$

dann folgt

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x}^{-n} J_n(a\sqrt{x})) = -\frac{a}{2} \sqrt{x}^{-(n+1)} J_{n+1}(a\sqrt{x}) . \quad (\text{A.68})$$

Mit Hilfe von (A.68) ergibt eine k - fache partielle Integration von (A.67)

$$I_{nk}(p - m\frac{\xi}{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{k!(|n|+k)!}} \left(\frac{a}{2}\right)^k \int_0^\infty dx \sqrt{x}^{|n|+k} J_{n+k}(a\sqrt{x}) . \quad (\text{A.69})$$

Substitution von x durch v^2 führt zu

$$I_{nk}(p - m\frac{\xi}{\alpha}) = 2 \frac{1}{\sqrt{k!(|n|+k)!}} \left(\frac{a}{2}\right)^k \int_0^\infty dv v^{|n|+k+1} J_{n+k}(av) e^{-v^2} . \quad (\text{A.70})$$

Benutzt man [50]

$$\int_0^\infty dt J_\nu(at) t^{\nu+1} e^{-p^2 t^2} = \frac{a^\nu}{2p^{2\nu+1}} e^{-\frac{a^2}{4p^2}},$$

dann ergibt die Integration über v in (A.70) schließlich

$$I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) = \frac{\text{für } n \geq 0}{\sqrt{k!(|n|+k)! \sqrt{2}^{|n|+2k}} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_\theta(p - m \frac{\xi}{\alpha}))^2}}, \quad (\text{A.71})$$

wenn der Ausdruck für a eingesetzt wird.

Wegen $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, gilt für negative n

$$I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) = (-1)^n I_{-nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}). \quad (\text{A.72})$$

Definiert man also

$$\epsilon_n = \left(\frac{n}{|n|} \right)^{|n|},$$

dann lassen sich (A.71) und (A.72) zusammenfassen:

$$I_{nk}(p - m \frac{\xi}{\alpha}) = \frac{\epsilon_n (\sigma_\theta(p - m \frac{\xi}{\alpha}))^{|n|+2k}}{\sqrt{k!(|n|+k)! \sqrt{2}^{|n|+2k}} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_\theta(p - m \frac{\xi}{\alpha}))^2}}. \quad (\text{A.73})$$

A.3.3 Berechnung der $M_{mnk}^{m'n'k'(j)}$

Zuerst werden die Gleichungen (3.93) hergeleitet.

Nach (3.32) gilt

$$k_\perp = \frac{\int d\alpha \int d\alpha' \lambda(\alpha) \lambda(\alpha') W_1(\alpha - \alpha')}{(\int d\alpha \lambda(\alpha))^2}$$

$$k_{\parallel\perp} = \frac{1}{R} \frac{\int d\alpha \int d\alpha' \lambda(\alpha) \lambda(\alpha') \frac{\partial W_1(\alpha - \alpha')}{\partial \alpha}}{(\int d\alpha \lambda(\alpha))^2},$$

wobei s durch $\alpha = s/R$ ersetzt wurde.

Mit (A.9) gilt

$$\frac{\partial w_1(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) p e^{-ip\alpha}. \quad (\text{A.74})$$

Die Fouriertransformierte der Ladungsdichte $\lambda(\alpha)$ sei

$$\bar{\lambda}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{ip\alpha} \lambda(\alpha).$$

Damit gilt

$$k_\perp = \frac{i\omega_0/2\pi}{(\int d\alpha \lambda(\alpha))^2} \int d\alpha \int d\alpha' \int dp Z(p) e^{-ip(\alpha - \alpha')} \lambda(\alpha) \lambda(\alpha')$$

$$= \frac{i\omega_0/2\pi}{(\int d\alpha \lambda(\alpha))^2} \int dp Z(p) |\bar{\lambda}(p)|^2 \quad (\text{A.75})$$

und analog

$$k_{||\perp} = \frac{\omega_0/2\pi R}{\left(\int d\alpha \lambda(\alpha)\right)^2} \int dp p Z(p) |\bar{\lambda}(p)|^2 . \quad (\text{A.76})$$

Die Ladungen sind nach Voraussetzung gaussverteilt, also ist

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &= \frac{N\epsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_\theta^2}} \\ \Rightarrow \int d\alpha \lambda(\alpha) &= N\epsilon \end{aligned}$$

und das Resultat der Fouriertransformation lautet

$$\bar{\lambda}(p) = N\epsilon e^{-\frac{p^2\sigma_\theta^2}{2}} . \quad (\text{A.77})$$

Setzt man (A.77) in (A.75) bzw. (A.76) ein, dann ergibt sich

$$k_\perp = i \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) e^{-(p\sigma_\theta)^2}$$

bzw.

$$k_{||\perp} = i \frac{\omega_0}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} dp p Z(p) e^{-(p\sigma_\theta)^2} . \quad (\text{A.78})$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich durch ν -fache Differentiation nach σ_θ^2 , anschließender Multiplikation mit $\sigma_\theta^{2\nu}$ und mit $\omega_0 = 2\pi/T_0$ die Beziehung (3.93)

$$\begin{aligned} T_0 \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_\perp}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} &= i(-1)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (p\sigma_\theta)^{2\nu} e^{-(p\sigma_\theta)^2} \\ T_0 \sigma_\theta^{2\nu+1} \frac{d^\nu k_{||\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} &= \frac{(-1)^\nu}{R} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (p\sigma_\theta)^{2\nu+1} e^{-(p\sigma_\theta)^2} \end{aligned}$$

gewinnen.

Um bei der Berechnung der Matrixelemente Schreibarbeit zu sparen, definiert man eine Größe $A_{mnk}^{m'n'k'}$ mittels

$$M_{mnk}^{m'n'k'} = m' \frac{\beta(\theta)}{\Delta\theta_i} \frac{\epsilon_n \epsilon_{n'}}{\sqrt{k!(|n|+k)!k'!(|n'|+k')!}} \frac{1}{\sqrt{2^{|n|+|n'|+2(k+k')}}}} \cdot A_{mnk}^{m'n'k'} , \quad (\text{A.79})$$

dann ist

$$\begin{aligned} A_{mnk}^{m'n'k'} &= i^{n'-n} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta(p - m' \frac{\xi}{\alpha}))^{|n|+k'} (\sigma_\theta(p - m \frac{\xi}{\alpha}))^{|n|+k} e^{-\frac{\sigma_\theta^2}{2} \{(p - m' \frac{\xi}{\alpha})^2 + (p - m \frac{\xi}{\alpha})^2\}} . \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Wegen der Gültigkeit von (3.54)

$$M_{-mnk}^{-m'n'k'} = (M_{mnk}^{m'n'k'})^* ,$$

müssen nur die Matrixelemente für 1. $m = m'$ bzw. 2. $m = -m'$ ausgewertet werden.

1. Für $m = m'$ gilt

$$A_{mnk}^{m'n'k'} = i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta(p - m' \frac{\xi}{\alpha}))^{|n|+|n|+k'+k} e^{-\sigma_\theta^2(p - m' \frac{\xi}{\alpha})^2} . \quad (\text{A.81})$$

Sei $2\nu = |n'| + |n| + 2(k' + k)$ eine gerade Zahl, dann erhält man

$$\begin{aligned} A_{mnk}^{m'n'k'} &= i^{n'-n} (-1)^\nu \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) e^{-\sigma_\theta^2 (p - m' \frac{\xi}{\alpha})^2} \right\} \\ &= i^{n'-n} (-1)^\nu \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} \left\{ e^{-\chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) e^{-\sigma_\theta^2 p^2} e^{2m' \sigma_\theta p \chi} \right\} \end{aligned}$$

mit $\chi = \frac{\sigma_\theta \xi}{\alpha}$.

Entwickelt man $e^{2m' \sigma_\theta p \chi}$ in eine Reihe, dann folgt

$$A_{mnk}^{m'n'k'} = i^{n'-n} (-1)^\nu \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} \left\{ e^{-\chi^2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(2m' \chi)^\mu}{\mu!} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta p)^\mu e^{-\sigma_\theta^2 p^2} \right\}. \quad (\text{A.82})$$

Der Parameter χ ist im allgemeinen eine kleine Größe, denn für $\sigma_z = 3 \text{ cm}$, $R = 300 \text{ m}$ und $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$, alles typische Werte für einen großen Elektron - Positron - Speicherring, gilt

$$\chi \approx 3 \cdot 10^{-2} \xi,$$

d.h. χ ist normalerweise deutlich kleiner als 1.

Berücksichtigt man deshalb in der Reihenentwicklung (A.82) nur Terme bis zur Ordnung χ^1 , dann ergibt sich

$$\begin{aligned} A_{mnk}^{m'n'k'} &= i^{n'-n} (-1)^\nu \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) e^{-\sigma_\theta^2 p^2} + \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta p) e^{-\sigma_\theta^2 p^2} \right\} \\ &= i^{n'-n} (-1)^\nu \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} \left\{ -i T_0 k_\perp + 2m' \chi \sigma_\theta R T_0 k_{\parallel\perp} \right\} \\ &= i^{n'-n} (-1)^\nu \sigma_\theta^{2\nu} T_0 \frac{d^\nu}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} \left\{ -i k_\perp + 2m' R \frac{\xi}{\alpha} \sigma_\theta^2 k_{\parallel\perp} \right\} \\ &= i^{n'-n} (-1)^\nu \sigma_\theta^{2\nu} T_0 \left\{ -i \frac{d^\nu k_\perp}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} + 2m' R \frac{\xi}{\alpha} \sigma_\theta^2 \frac{d^\nu k_{\parallel\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} + 2m' R \frac{\xi}{\alpha} \nu \frac{d^{\nu-1} k_{\parallel\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^{\nu-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Somit erhält man insgesamt

$$A_{mnk}^{m'n'k'} = i^{n'-n} (-1)^\nu T_0 \left\{ -i \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_\perp}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} + 2m' \chi \sigma_z \left\{ \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_{\parallel\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} + \nu \sigma_\theta^{2(\nu-1)} \frac{d^{\nu-1} k_{\parallel\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^{\nu-1}} \right\} \right\}. \quad (\text{A.83})$$

Durch eine analoge Rechnung für $2\nu = |n'| + |n| + 2(k' + k) - 1$ gerade Zahl gewinnt man

$$\begin{aligned} A_{mnk}^{m'n'k'} &= i^{n'-n} (-1)^\nu T_0 \\ &\quad \left\{ \sigma_z \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_{\parallel\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} + im' \chi \left\{ (2\nu + 1) \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_\perp}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} + 2 \sigma_\theta^{2(\nu+1)} \frac{d^{\nu+1} k_\perp}{d(\sigma_\theta^2)^{\nu+1}} \right\} \right\}. \quad (\text{A.84}) \end{aligned}$$

2. Für $m = -m'$ gilt

$$\begin{aligned} A_{mnk}^{m'n'k'} &= i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta (p - m' \frac{\xi}{\alpha}))^{|n'|+2k'} (\sigma_\theta (p + m' \frac{\xi}{\alpha}))^{|n|+2k} e^{-\frac{\sigma_\theta^2}{2} \{(p - m' \frac{\xi}{\alpha})^2 + (p + m' \frac{\xi}{\alpha})^2\}} \\ &= i^{n'-n} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta (p - m' \frac{\xi}{\alpha}))^{|n'|+k'} (\sigma_\theta (p + m' \frac{\xi}{\alpha}))^{|n|+k} e^{-(\sigma_\theta p)^2} e^{-\chi^2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes läßt sich die letzte Gleichung zu

$$A_{mnk}^{m'n'k'} = i^{n'-n} e^{-\chi^2} \sum_{\nu=0}^{|n'+2k'|} \sum_{\mu=0}^{|n|+2k} \binom{|n|+2k}{\mu} \binom{|n'+2k'|}{\nu} (-1)^\nu (m'\chi)^{\nu+\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta p)^{|n'|+|n|+2(k+k')-(\nu+\mu)} e^{-\sigma_\theta^2 p^2}$$

umformen.

Berücksichtigt man nur Terme bis zur Ordnung χ^1 , dann lautet das Ergebnis der Entwicklung

$$A_{mnk}^{m'n'k'} = i^{n'-n} e^{-\chi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta p)^{|n'|+|n|+2(k+k')-(\nu+\mu)} e^{-\sigma_\theta^2 p^2} + m'\chi (|n|+2k - (|n'|+2k')) \int_{-\infty}^{\infty} dp Z(p) (\sigma_\theta p)^{|n'|+|n|+2(k+k')-1} e^{-\sigma_\theta^2 p^2} \right\} .$$

Demzufolge gilt für $|n'|+|n|$ gerade mit $2\nu = |n'|+|n|+2(k'+k)$

$$A_{mnk}^{m'n'k'} = i^{n'-n} (-1)^\nu T_0 \left\{ i\sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_\perp}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} + m'\chi\sigma_z \left\{ \sigma_\theta^{2\nu-1} \frac{d^{\nu-1} k_{\parallel\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^{\nu-1}} [(|n|+2k) - (|n'|+2k')] \right\} \right\} \quad (\text{A.85})$$

und für $|n'|+|n|$ ungerade mit $2\nu = |n'|+|n|+2(k'+k)-1$

$$A_{mnk}^{m'n'k'} = i^{n'-n} (-1)^\nu T_0 \left\{ \sigma_z \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_{\parallel\perp}}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} - im'\chi\sigma_z \left\{ \sigma_\theta^{2\nu} \frac{d^\nu k_\perp}{d(\sigma_\theta^2)^\nu} [(|n|+2k) - (|n'|+2k')] \right\} \right\} \quad (\text{A.86})$$

Mit Hilfe von (A.79) und (A.83) (A.84) (A.85) (A.86) bestimmt man die Matrixelemente für $m' = m$ bzw. $m' = -m$ und mit Gleichung (3.54) die restlichen Matrixelemente.

Ist der Parameter χ klein gegen eins

$$\chi = \xi \frac{\sigma_\theta}{\alpha} \ll 1 ,$$

was im allgemeinen erfüllt ist, dann erhalten die in Gleichung (3.94) angegebenen Matrixelemente eine reelle Korrektur, die proportional zu χ ist.

Zum Schluß sollen noch die wichtigsten Matrixelemente angegeben werden:

$$\begin{aligned} M_{100}^{100} &= \frac{\beta(\theta_i)}{\Delta\theta_i} T_0 \{ -ik_\perp + 2\chi\sigma_z k_{\parallel\perp} \} \\ M_{100}^{110} &= \frac{\beta(\theta_i)}{\Delta\theta_i} \frac{i}{\sqrt{2}} T_0 \left\{ \sigma_z k_{\parallel\perp} + i\chi \left[k_\perp + \sigma_z \frac{dk_\perp}{d\sigma_z} \right] \right\} \\ M_{110}^{110} &= -\frac{\beta(\theta_i)}{\Delta\theta_i} \frac{1}{2} T_0 \left\{ \frac{-i}{2} \sigma_z \frac{dk_\perp}{d\sigma_z} + 2\chi\sigma_z \left[k_{\parallel\perp} + \frac{\sigma_z}{2} \frac{dk_{\parallel\perp}}{d\sigma_z} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

A.4

A.4.1

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 a}{d\theta^2} + \nu^2 a = 0 \quad (\text{A.88})$$

wird mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{da}{d\theta} \end{pmatrix}$$

in das Gleichungssystem

$$\frac{d\vec{y}}{d\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} \quad (\text{A.89})$$

umgeschrieben. Bekanntlich hat dieses System die Lösung

$$\vec{y}(\theta_2) = T(\theta_2 - \theta_1) \vec{y}(\theta_1) \quad (\text{A.90})$$

mit

$$T(\theta_2 - \theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \nu(\theta_2 - \theta_1) & \frac{1}{\nu} \sin \nu(\theta_2 - \theta_1) \\ -\nu \sin \nu(\theta_2 - \theta_1) & \cos \nu(\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.91})$$

Außerdem gelten die wichtigen Relationen

$$T^{-1}(\theta_2 - \theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \nu(\theta_2 - \theta_1) & -\frac{1}{\nu} \sin \nu(\theta_2 - \theta_1) \\ \nu \sin \nu(\theta_2 - \theta_1) & \cos \nu(\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix} = T(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{A.92})$$

und

$$\det T = 1. \quad (\text{A.93})$$

Für den hier interessierenden Fall

$$\nu^2 = \begin{cases} \nu_1^2 = \nu_0^2 + \frac{2\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 & \text{für } 0 \leq \theta \leq \Delta\theta \\ \nu_0^2 & \text{für } \Delta\theta \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (\text{A.94})$$

folgt dann

$$T_\pi = T(\pi) = T(\pi - \Delta\theta) \cdot T(\Delta\theta),$$

woraus man

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) = \cos \nu_0(\pi - \Delta\theta) \cos \nu_1 \Delta\theta - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_0}{\nu_1} + \frac{\nu_1}{\nu_0} \right) \sin \nu_0(\pi - \Delta\theta) \sin \nu_1 \Delta\theta \quad (\text{A.95})$$

errechnet.

Setzt man die Werte für ν_0, ν_1 ein, dann gilt

$$\left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| = \left| \cos \nu_0(\pi - \Delta\theta) \cos \sqrt{\nu_0^2 + 2 \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 \Delta\theta} - \frac{\nu_0 \Delta\theta + \bar{M}}{\sqrt{\nu_0^2 + 2 \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 \Delta\theta}} \sin \nu_0(\pi - \Delta\theta) \sin \sqrt{\nu_0^2 + 2 \frac{\bar{M}}{\Delta\theta} \nu_0 \Delta\theta} \right|. \quad (\text{A.96})$$

Für $\Delta\theta \rightarrow 0$ erhält man die bekannte Gleichung für zwei punktförmige Objekte, die einen Abstand von π haben:

$$\left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right|_{\Delta\theta \rightarrow 0} = |\cos \nu_0 \pi - M \sin \nu_0 \pi|. \quad (\text{A.97})$$

Die Resonanzen treten auf für $\nu_0 \cdot \pi = m \cdot \pi - \delta$, $\delta \ll 1$, denn dann ergibt sich

$$\left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| = \left| 1 + M\delta - \frac{1}{2} \delta^2 \right| > 1 \text{ für } |\delta| < 2|M|. \quad (\text{A.98})$$

Den maximalen Wert der Spur erhält man für

$$\begin{aligned} |\delta| &= |M| \\ \left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right|_{max} &= \left| 1 + \frac{1}{2} M^2 \right| . \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Die Eigenwerte von T_π lauten bekanntlich

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi)\right)^2 - 1}$$

und sind für $\frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) > 1$ rein reell und lassen sich in folgender Form schreiben

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm \frac{T_0}{2\tau}} ,$$

wobei $T_0/2$ die Zeit für einen halben Umlauf angibt.

Mit

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

und $\frac{T_0}{2\tau} \ll 1$ folgt

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{T_0}{2\tau}\right)^2 . \quad (\text{A.100})$$

Somit erhält man für zwei punktförmige symmetrisch angeordnete Resonatoren als Amplitudenzuwachs pro Umlauf:

$$\left(\frac{T_0}{\tau}\right)_{max} = 2|M| . \quad (\text{A.101})$$

$\Delta\theta \rightarrow 0$

Im weiteren soll der Amplitudenzuwachs pro Umlauf für ein endliches $\Delta\theta$ berechnet werden. Mit den Größen

$$\begin{aligned} x &= \Delta\theta \cdot \nu_\beta \\ \nu_0 &= n + \delta \quad \delta \leq 1/2 \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

folgt aus (A.96)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| &= \left| \cos(\delta\pi - x + \sqrt{x^2 + 2Mx}) + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \frac{x + M}{\sqrt{x^2 + 2Mx}}\right) \sin \sqrt{x^2 + 2Mx} \sin(\delta\pi - x) \right| \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

Unter der Annahme, daß $x \gg 2M$ ist, was keine allzu große Einschränkung ist, da die Matrixelemente im allgemeinen klein gegen eins sind, insbesondere in diesem Fall, in dem Instabilitäten für kleine Ströme untersucht werden, kann man die Wurzeln in (A.103) entwickeln mit dem Ergebnis:

$$\left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| = \left| \cos(\delta\pi + M) - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{x}\right)^2 \sin(x + M) \sin(\delta\pi - x) \right| . \quad (\text{A.104})$$

Mit $\epsilon = \delta\pi + M$ gilt für die Spur

$$\left| \frac{1}{2} \text{Sp}(T_\pi) \right| = \left| \cos \epsilon - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{x} \right)^2 \sin(x + M) \sin(x + M - \epsilon) \right|. \quad (\text{A.105})$$

Die maximale Anwachsrates ergibt sich jetzt zu

$$\left(\frac{T_0}{\tau} \right)_{\substack{\text{max} \\ \Delta\theta \neq 0}} = 2 \left| \frac{M}{x} \sin(x + M) \right|. \quad (\text{A.106})$$

Die Resonanzbreiten, d.h. diejenigen Bereiche für δ bzw. ϵ , für die die halbe Spur noch größer als eins ist, sind nach Gleichung (A.98) bzw. (A.105) durch

$$\text{a) } B_{\Delta\theta \rightarrow 0} = 2|M| \quad (\text{A.107})$$

$$\text{b) } B_{\Delta\theta \neq 0} = 2 \left| \frac{M}{x} \sin(x + M) \right|$$

gegeben, wobei (A.107b) nur dann in guter Näherung gilt, wenn $\sin(x + M)$ nicht kleiner als ϵ ist. Falls $\sin(x + M)$ sehr klein ist, dann kann die Resonanzbreite noch bedeutend kleiner sein als (A.107b).

A.4.2

Betrachtet man (A.89) für einen sehr kleinen Winkel $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, dann gilt in erster Näherung

$$T(\Delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\theta \\ -\nu^2 \Delta\theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem in (A.94) vorgegebenen Tune innerhalb des Resonators gilt dann

$$T_C = T(\Delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\theta \\ -(\nu_0^2 M + \frac{2M\nu_0}{\Delta\theta}) \Delta\theta & 1 \end{pmatrix}$$

also für $\Delta\theta \rightarrow 0$ und $C = -2M\nu_0$

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.108})$$

Damit können jetzt Spur und Determinante für Fall a) bzw. b) ausgerechnet werden (vgl. Abbildung (4.4)).

In beiden Fällen gilt

$$T_0 = T_{CK} \cdot T_C \cdot T_{KC} \quad (\text{A.109})$$

also

$$\begin{aligned} T_0 &= T_{CK} \cdot T_{KC} + C T_{CK} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_{KC} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu & \frac{1}{\nu} \sin 2\pi\nu \\ -\nu \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} \cos \theta_{KC\nu} \sin \theta_{CK\nu} & \frac{1}{\nu^2} \sin \theta_{KC\nu} \sin \theta_{CK\nu} \\ \cos \theta_{KC\nu} \cos \theta_{CK\nu} & \frac{1}{\nu} \sin \theta_{KC\nu} \cos \theta_{CK\nu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit erhält man

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T_0) = \cos 2\pi\nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi\nu \quad \text{sowie} \quad \det T_0 = 1 \quad .$$

Außerdem ist in beiden Fällen

$$T = T_{FB} \cdot T_0 \quad .$$

Im Fall a) ändert sich nur die Matrix T_{KP} aber nicht T_{PK} , d.h. es ändert sich nur die Spur von T gegenüber dem Fall ohne Resonator. Mit

$$T_{KP} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{KP\nu} & \frac{1}{\nu} \sin \theta_{KP\nu} \\ -\nu \sin \theta_{KP\nu} & \cos \theta_{KP\nu} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} \cos \theta_{KC\nu} \sin \theta_{CP\nu} & \frac{1}{\nu^2} \sin \theta_{KC\nu} \sin \theta_{CP\nu} \\ \cos \theta_{KC\nu} \cos \theta_{CP\nu} & \frac{1}{\nu} \sin \theta_{KC\nu} \cos \theta_{CP\nu} \end{pmatrix}$$

folgt aus (4.9) Fall a)

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi\nu + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\nu} \sin \theta_{KP\nu} + \frac{C}{\nu^2} \sin \theta_{KC\nu} \sin \theta_{CP\nu} \right)$$

und

$$\det = 1 - \frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK\nu} \quad .$$

Im Fall b) ändert sich nur die Determinante gegenüber dem Fall ohne Resonator. Mit

$$\begin{aligned} T_{PK}^{-1} &= (T_{CK} T_C T_{PC})^{-1} = T_{CK}^{-1} T_C^{-1} T_{PC}^{-1} \\ &= (T_{CK} T_{PC})^{-1} - C \cdot T_{PC}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_{CK}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{PK\nu} & \frac{1}{\nu} \sin \theta_{PK\nu} \\ -\nu \sin \theta_{PK\nu} & \cos \theta_{PK\nu} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} \cos \theta_{CK\nu} \sin \theta_{PC\nu} & \frac{1}{\nu^2} \sin \theta_{CK\nu} \sin \theta_{PC\nu} \\ \cos \theta_{CK\nu} \cos \theta_{PC\nu} & \frac{1}{\nu} \sin \theta_{CK\nu} \cos \theta_{PC\nu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt aus (4.8) Fall b)

$$\det = 1 + k \left(-\frac{1}{\nu} \sin \theta_{PK\nu} - \frac{C}{\nu^2} \sin \theta_{PC\nu} \sin \theta_{CK\nu} \right)$$

$$\frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi\nu + \frac{k}{2\nu} \sin(2\pi\nu - \theta_{PK\nu}) \quad .$$

A.4.3

Um zu untersuchen, ob die Kopplungseffekte zwischen Rückkopplungssystem und Resonator für sehr viele Resonatoren im Mittel verschwinden, wird ein Abschnitt mit N Resonatoren der Stärke $\frac{C}{N}$ betrachtet, die äquidistant aufgestellt sind (vgl. Abbildung (A.1)). Für die Transfermatrix dieses Abschnitts gilt

$$T_{ae} = T_{C_N e} T_C T_{C_{N-1} C_N} \dots T_C T_{C_{i-1} C_i} \dots T_C T_{C_1 C_2} T_C T_{a C_1}$$

Mit

$$T_C = \mathbb{1} + \frac{C}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{C}{N} \ll 1$$

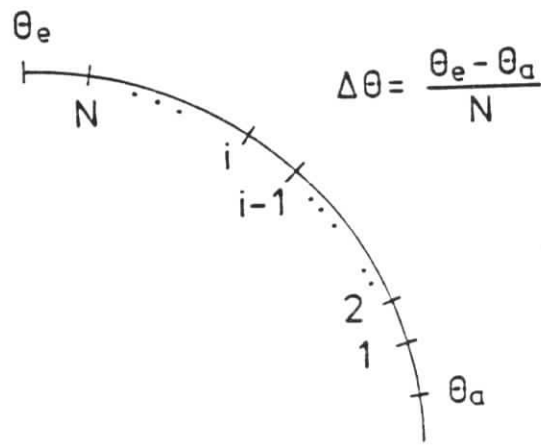


Abbildung A.1: N äquidistant aufgestellte Resonatoren

($\mathbb{1}$ Einheitsmatrix)

erhält man in linearer Näherung

$$T_{ae} \approx T_{0ae} + \frac{C}{N} \sum_{i=1}^N T_{C_i,e} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_{aC_i}$$

$$T_{ae}^{-1} \approx T_{0ae}^{-1} - \frac{C}{N} \sum_{i=1}^N T_{C_i,e}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_{aC_i}^{-1} .$$

In Abschnitt A.4.2 sind die Änderungen der Determinante und Spur für einen Resonator berechnet worden. Die zusätzliche Matrix aufgrund des Resonators ist jetzt durch eine Summe von Matrizen zu ersetzen oder die Matrixelemente durch entsprechende Summen. Da für Änderungen von Determinante und Spur jeweils nur die Matrixelemente $(T_{KP})_{12}$ bzw. $(T_{PK}^{-1})_{12}$ von Interesse sind, müssen die Matrixelemente in Abschnitt A.4.2 nur durch entsprechende Summen ersetzt werden, wenn in dem jeweiligen Abschnitt der eine Resonator durch mehrere ersetzt wird.

$$\text{Fall a): } \frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi\nu + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\nu} \sin \theta_{KP\nu} + \frac{C}{\nu^2 N} \sum_{i=1}^N \sin \theta_{KC_i\nu} \sin \theta_{C_iP\nu} \right)$$

$$\det T = 1 - \frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK\nu}$$

$$\text{Fall b): } \frac{1}{2} \text{Sp}(T) = \cos 2\pi\nu + \frac{C}{2\nu} \sin 2\pi\nu + \frac{k}{2\nu} \sin \theta_{KP\nu}$$

$$\det T = 1 - \frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK\nu} - \frac{kC}{N\nu^2} \sum_{i=1}^N \sin \theta_{C_iK\nu} \sin \theta_{PC_i\nu}$$

In beiden Fällen müssen Summen der Form

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \theta_{aC_i\nu} \sin \theta_{C_i b\nu} \text{ mit } \theta_{aC_i} + \theta_{C_i b} = \theta_{ab}$$

berechnet werden. Es gilt

$$S = -\frac{1}{2} \cos \theta_{ab\nu} + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \cos(2\theta_{aC_i\nu} - \theta_{ab\nu})$$

Falls der Betatronumfange ν und der Abstand θ_{ab} genügend groß ist, genauer $\theta_{ab} \cdot \nu > 1$, dann folgt

$$\left| \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \cos(2\theta_{aC_i} \nu - \theta_{ab} \nu) \right| \approx \frac{1}{\theta_{ab} \cdot \nu}$$

Insbesondere im Fall b) ($\theta_{ab} = \theta_{PK}$) ist der Abstand zwischen Monitor und Kicker größer als der halbe Umfang ($\theta_{PK} > \pi$) und der Betatronumfange ν normalerweise größer als 20, d.h. der zweite Anteil von S kann in guter Näherung vernachlässigt werden, also

$$\begin{aligned} \text{Fall b): } \theta_{ab} \cdot \nu &\gg 1 \\ \det T &\approx 1 - \frac{k}{\nu} \sin \theta_{PK} \nu + \frac{Ck}{2\nu^2} \cos \theta_{PK} \nu . \end{aligned}$$

Benutzt man die Bedingung für ein reaktives Rückkopplungssystem

$$\theta_{PK} \nu = m \cdot \pi ,$$

dann gilt

$$\text{Fall b): } \det T = 1 + (-1)^m \frac{Ck}{2\nu^2} .$$

Somit heben sich im allgemeinen die Effekte der Kopplung zwischen N Resonatoren und dem Rückkopplungssystem nicht weg.

A.4.4

Es gilt nach (3.164)

$$T = T_N \cdot \dots \cdot T_1 = e^{\sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j \Delta \theta_r + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j [\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_i] \Delta \theta_r^2 + \dots}$$

Es soll gezeigt werden, daß die Kommutator-Summe vernachlässigt werden kann. Die Matrix eines Resonators \mathcal{A}_j lautet nach (3.61) für $\xi = 0$

$$\xi = 0 : \mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} R_1(\theta) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & R_{-1}(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} .$$

Mit (3.40) gilt

$$\mathcal{A}_j \Delta \theta_r = -i \frac{\bar{\beta}}{\beta_j} \nu_\beta \Delta \theta_r \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} + \Delta \theta_r \begin{pmatrix} B & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & B \end{pmatrix} - \frac{\beta_j}{\bar{\beta}} \Delta \theta_r \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} .$$

Dabei beschreibt β_j die Betatronfunktion am j -ten Resonator und die Matrixelemente von M sind für den mittleren Wert der Betatronfunktion $\bar{\beta}$ berechnet worden. Darüberhinaus wurde die Beziehung

$$\nu_\beta = \frac{R}{\bar{\beta}}$$

benutzt.

Die Berechnung des Kommutators liefert nun

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \theta_r^2}{2} [\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_i] &= \frac{\Delta \theta_r^2}{2} \\ &\left\{ i \nu_\beta \left(\frac{\bar{\beta}}{\beta_j} - \frac{\bar{\beta}}{\beta_i} \right) \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} \right] - \right. \\ &\left. \left(\frac{\beta_j}{\bar{\beta}} - \frac{\beta_i}{\bar{\beta}} \right) \left[\begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & B \end{pmatrix} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

Die auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Kommutatoren können leicht berechnet werden mit dem Ergebnis

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & 2M \\ 2M & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & B \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [M, B] & [M, B] \\ -[M, B] & -[M, B] \end{pmatrix} .$$

Da die Matrix B nur Diagonalelemente enthält, ergibt sich für den Kommutator $[M, B]$

$$[M, B] = (i\nu_s (n' - n) M_{mnk}^{m'n'k'}) = i\nu_s M' ,$$

d.h. die Diagonalelemente der Matrix M' verschwinden.

Mit der so definierten Matrix M' folgt dann

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j \Delta\theta_r + \frac{1}{2} (\Delta\theta_r)^2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j [\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_i] =$$

$$-i\nu_\beta \Delta\theta_r \sum_{j=1}^N \frac{\bar{\beta}}{\beta_j} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} + N \cdot \Delta\theta_r \begin{pmatrix} B & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & B \end{pmatrix} - \Delta\theta_r \begin{pmatrix} M & M \\ -M & -M \end{pmatrix} \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{\bar{\beta}}$$

$$+ i\nu_\beta (\Delta\theta_r)^2 \begin{pmatrix} \mathcal{O} & M \\ M & \mathcal{O} \end{pmatrix} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j \left(\frac{\bar{\beta}}{\beta_j} - \frac{\bar{\beta}}{\beta_i} \right) i \frac{1}{2} \nu_s (\Delta\theta_r)^2 \begin{pmatrix} M' & M' \\ -M' & -M' \end{pmatrix} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j \left(\frac{\beta_j}{\bar{\beta}} - \frac{\beta_i}{\bar{\beta}} \right) .$$

Da sich die Betatronfunktion über die Länge der Beschleunigungsstrecke periodisch ändert, gilt mit $|\beta_j - \bar{\beta}| \leq \bar{\beta} / 2$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\bar{\beta}}{\beta_j} \approx N$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{\bar{\beta}} \approx N$$

und da die Länge der Beschleunigungsstrecke durch

$$\Delta\theta = N \cdot \Delta\theta_r$$

gegeben ist, beschreibt die einfache Summe der Matrizen \mathcal{A}_j die Transfermatrix eines "Resonators" der Länge $\Delta\theta$:

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_i \Delta\theta_r = \mathcal{A} \Delta\theta ,$$

wobei die Matrixelemente von \mathcal{A} für $\bar{\beta}$ berechnet werden.

In den Summen

$$S_1 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j \left(\frac{\bar{\beta}}{\beta_j} - \frac{\bar{\beta}}{\beta_i} \right)$$

bzw.

$$S_2 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^j \left(\frac{\beta_j}{\bar{\beta}} - \frac{\beta_i}{\bar{\beta}} \right)$$

heben sich im allgemeinen wegen der periodischen Änderung von β_j viele Terme weg. Es ist nun nicht notwendig, die Summen zu berechnen, sondern es reicht aus, folgende Abschätzungen zu kennen:

$$|S_i| \leq N \quad i \in \{1, 2\} .$$

Durch die Kommutator-Summe werden also nur die Matrizen M geändert und die maximale Änderung ist durch

$$N \cdot \Delta\theta_r \begin{pmatrix} M - i\frac{1}{2}\nu_s\Delta\theta_r M' & M - i\frac{1}{2}\nu_s\Delta\theta_r M' + i\nu_\beta\Delta\theta_r M \\ -M + i\frac{1}{2}\nu_s\Delta\theta_r M' + i\nu_\beta\Delta\theta_r M & -M + i\frac{1}{2}\nu_s\Delta\theta_r M' \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die übliche Moden-Kopplungsinstabilität wird durch die Elemente der Matrizen mit $m' = m$ hervorgerufen (vgl. Abschnitt 3.7.1). Die Elemente dieser Matrizen werden gemäß

$$\bar{M}_{m'nk}^{m'n'k'} = \left(1 - \frac{i\nu_s\Delta\theta_r}{2}(n' - n) \right) M_{m'nk}^{m'n'k'}$$

geändert. Somit erfahren nur die Außerdiagonalelemente eine Veränderung und damit auch nur die Kopplungselemente der zur Instabilität koppelnden Moden:

$$\bar{M}_{m'n+1k}^{m'nk} \bar{M}_{m'nk}^{m'n+1k} = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\nu_s\Delta\theta_r \right)^2 \right) M_{m'nk}^{m'n+1k} M_{m'n+1k}^{m'nk} .$$

Für typische Werte

- Länge des Resonators L_r von einigen Metern
- mittlerer Maschinenradius R von einigen hundert Metern , so daß
- $\Delta\theta_r \approx 10^{-2}$ gilt
- Synchrotrontune $\nu_s \leq 0.1$

folgt, daß die Korrektur kleiner als 10^{-6} ist und damit vernachlässigt werden kann.

Die kohärenten Resonanzen kommen durch die Kopplung von Moden mit unterschiedlichem m zustande (vgl Abschnitt 3.8.1). Genau wie im Fall der üblichen Modenkopplung werden auch hier nur die Kopplungselemente

$$M_{-m'nk}^{m'-nk}$$

geändert. Die Änderung ist in diesem Fall größer, da die Korrekturen durch den Betatruntune bestimmt sind:

$$(\nu_\beta \Delta\theta_r)^2 \leq 10^{-2}$$

für einen Betatruntune von ca. 20 und den oben angegebenen Parametern.

Diese Fehler im Prozentbereich können in guter Näherung vernachlässigt werden, da die Effekte, die durch die endliche Länge der Beschleunigungsstrecke hervorgerufen werden, bedeutend größer sind.

A.5 Transfermatrix des Dipol - Rückkopplungssystems

Nach (A.6) ist

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im'\frac{R}{\beta} \right\} d_{m'n'}(\theta, I) \\ &= -F(I) \frac{m'R\sqrt{\beta}}{2\pi Ei} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{-in'\psi} e^{-im'\frac{\xi}{\alpha}\psi} \mathcal{F}[u]. \end{aligned}$$

Mit Rückkopplungssystem besteht der Kraftterm aus zwei Anteilen, dem üblichen Anteil $\mathcal{F}[u]$ und der über die Bunchlänge konstanten Kraft des Kickers des Rückkopplungssystems F_k

$$F_k = \begin{cases} F_k & \text{für } \theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Somit gilt für den durch den Kicker verursachten Kraftterm

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im'\frac{R}{\beta} \right\} d_{m'n'}(\theta, I) \\ &= -F(I) \frac{m'R\sqrt{\beta}}{2\pi Ei} i^{-n'} J_{n'}(m'\frac{\xi}{\alpha}\sqrt{2I}) F_k, \end{aligned}$$

wobei Gleichung (A.12) benutzt wurde.

Mit Hilfe von (A.15) und (A.16) folgt

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im'\frac{R}{\beta} \right\} a_{m'k'}^{n'}(\theta) \\ &= -\frac{m'R\sqrt{\beta}}{2\pi Ei} i^{-n'} F_k C \int_0^\infty dI f_{k'}^{|n'|}(I) F(I) J_{n'}(m'\frac{\xi}{\alpha}\sqrt{2I}). \end{aligned}$$

Definiert man

$$K_{FB} = \frac{R \cdot F_k}{2\pi EC}, \quad (\text{A.111})$$

dann erhält man mit (A.18b) schließlich

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im'\frac{R}{\beta} \right\} a_{m'k'}^{n'}(\theta) \\ &= -\frac{m'i^{-n'}}{i} \sqrt{\beta} K_{FB} I_{n'k'}(m'\frac{\xi}{\alpha}). \end{aligned}$$

Nimmt man die Anteile hinzu, die von dem Kraftterm $\mathcal{F}[u]$ herrühren (A.17), dann gilt

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + in'\nu_s + im'\frac{R}{\beta} \right\} a_{m'k'}^{n'}(\theta) \\ &= -K \sum_{m=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_{mnk}^{m'n'k'(i)} a_{mk}^n(\theta) - \frac{m'i^{-n'}}{i} \sqrt{\beta} K_{FB} I_{n'k'}(m'\frac{\xi}{\alpha}) \quad (\text{A.112}) \end{aligned}$$

Benutzt man die Definitionen von $\vec{a}(\theta)$ bzw. $\mathcal{A}(\theta)$ (3.42) bzw. (3.43) und führt den Vektor

$$\vec{k} = \sqrt{\beta} K_{FB} (\dots, -\frac{m'}{i} i^{-n'} I_{n'k'}(m'\frac{\xi}{\alpha}), \dots) \quad (\text{A.113})$$

ein, dann folgt aus (A.112) (4.24)

$$\frac{d\vec{a}(\theta)}{d\theta} = \mathcal{A}(\theta) \vec{a}(\theta) + \vec{k}(\theta) .$$

Unter der Annahme, daß die Länge des Kickers $\Delta\theta$ vernachlässigt werden kann und am Ort des Kickers kein Resonator steht, erhält man (4.28)

$$\vec{a}(\theta_i^+) = \vec{a}(\theta_i^-) + k_{FB} \vec{k}_0 (\vec{b}^T \vec{a}(\theta_P)) .$$

Allgemein gilt für

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_i) \quad \vec{b} = (b_i) \quad \vec{c} = (c_i) \\ \vec{a} \cdot (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) &= \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j c_j \right) \end{aligned}$$

also mit

$$\begin{aligned} k_{ij} &= a_i \cdot b_j \\ \vec{a} \cdot (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) &= \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot c_j = K \cdot \vec{c} \right) , \end{aligned}$$

wobei die Matrix $K = (k_{ij})$ eingeführt wurde.

Somit erhält man

$$\vec{k}_0 (\vec{b}^T \vec{a}(\theta_P)) = \mathcal{K} \vec{a}(\theta_P)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= (K_{mnk}^{m'n'k'}) \\ K_{mnk}^{m'n'k'} &= -\frac{m'}{i} i^{n-n'} I_{n'k'}(m' \frac{\xi}{\alpha}) I_{nk}(m \frac{\xi}{\alpha}) . \end{aligned}$$

Aus (4.28) ergibt sich also schließlich (4.34)

$$\vec{a}(\theta_i^+) = \vec{a}(\theta_i^-) + k_{FB} \mathcal{K} \vec{a}(\theta_P) .$$

A.6

A.6.1 Berechnung der charakteristischen Gleichung

Zuerst wird T_0 berechnet. Aus Gleichung (4.40) folgt

$$\begin{aligned} T_0 &= \mathcal{R}(\theta_{CK}) (\mathbb{1} - \mathcal{M}) \mathcal{R}(\theta_{KC}) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta_1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} (1 - iM_0) & -iM_{11} & -iM_0 & -iM_{11} \\ iM_{11} & (1 - iM_1) & iM_{11} & -iM_1 \\ iM_0 & iM_{11} & (1 - iM_0) & iM_{11} \\ -iM_{11} & iM_1 & -iM_{11} & (1 + iM_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta_2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\theta_{CK}\nu_\beta & \alpha_2 &= -\theta_{KC}\nu_\beta \\ \beta_1 &= -\theta_{CK}(\nu_\beta - \nu_s) & \beta_2 &= -\theta_{KC}(\nu_\beta - \nu_s) \end{aligned} \quad .$$

Damit gilt

$$T_0 = \begin{pmatrix} (1 - iM_0)e^{i\alpha} & -iM_{11}e^{i(\beta_2 + \alpha_1)} & -iM_0e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)} & -iM_{11}e^{-i(\beta_2 - \alpha_1)} \\ iM_{11}e^{i(\alpha_2 + \beta_1)} & (1 - iM_1)e^{i\beta} & iM_{11}e^{-i(\alpha_2 - \beta_1)} & -iM_1e^{-i(\beta_2 - \beta_1)} \\ iM_0e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} & iM_{11}e^{i(\beta_2 - \alpha_1)} & (1 + iM_0)e^{-i\alpha} & iM_{11}e^{-i(\beta_2 + \alpha_1)} \\ -iM_{11}e^{i(\alpha_2 - \beta_1)} & iM_1e^{i(\beta_2 - \beta_1)} & -iM_{11}e^{-i(\alpha_2 + \beta_1)} & (1 + iM_1)e^{-i\beta} \end{pmatrix}$$

mit

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 \quad .$$

Im Falle, daß die Chromatizität null ist, gilt für die Kickmatrix nach (4.31)

$$K = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$k_1 \cdot K + k_2 \cdot K \cdot \mathcal{R}(\theta_{KP_2}) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei

$$\begin{aligned} c_1 &= i(k_1 + k_2 e^{i\alpha_{KP_2}}) \\ c_2 &= i(k_1 + k_2 e^{-i\alpha_{KP_2}}) \end{aligned}$$

ist.

Damit errechnet sich die gesamte Transfermatrix (4.44) zu

$$T = \begin{pmatrix} (1 - iM_0)e^{i\alpha} + c_1 & -iM_{11}e^{i(\beta_2 + \alpha_1)} & -iM_0e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)} + c_2 & -iM_{11}e^{-i(\beta_2 - \alpha_1)} \\ iM_{11}e^{i(\alpha_2 + \beta_1)} & (1 - iM_1)e^{i\beta} & iM_{11}e^{-i(\alpha_2 - \beta_1)} & -iM_1e^{-i(\beta_2 - \beta_1)} \\ iM_0e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} - c_1 & iM_{11}e^{i(\beta_2 - \alpha_1)} & (1 + iM_0)e^{-i\alpha} - c_2 & iM_{11}e^{i(\beta_2 + \alpha_1)} \\ -iM_{11}e^{i(\alpha_2 - \beta_1)} & iM_1e^{i(\beta_2 - \beta_1)} & -iM_{11}e^{-i(\alpha_2 + \beta_1)} & (1 + iM_1)e^{-i\beta} \end{pmatrix} \quad .$$

Mittels

$$\det(T - \mathbb{1}\lambda) = 0$$

erhält man die charakteristische Gleichung von T .

Setzt man T in die Determinante ein und führt folgende Operationen durch:

1. multipliziere Zeile 3 mit $e^{2i\alpha_1}$ und addiere dies zu Zeile 1
2. multipliziere Zeile 4 mit $e^{2i\beta_1}$ und addiere dies zu Zeile 2
3. multipliziere Spalte 3 mit $e^{2i\alpha_2}$ und subtrahiere dies von Spalte 1
4. multipliziere Spalte 4 mit $e^{2i\beta_2}$ und subtrahiere dies von Spalte 2
5. vertausche Zeile 2 und 3
6. vertausche Spalte 2 und 3

dann erhält man mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda(e^{2i\alpha} - 1) + c_1(1 - e^{2i\alpha_1}) - c_2e^{2i\alpha_2}(1 - e^{2i\alpha_1}) \\ a_{12} &= e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} - \lambda e^{2i\alpha_1} + c_2(1 - e^{2i\alpha_1}) \\ a_{21} &= \lambda e^{2i\alpha_2} - e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} - c_1 + c_2e^{2i\alpha_2} \\ a_{22} &= (1 + iM_0)e^{-i\alpha} - \lambda - c_2 \\ a_{33} &= \lambda(e^{2i\beta} - 1) \\ a_{34} &= e^{-i(\beta_2 - \beta_1)} - \lambda e^{2i\beta_1} \\ a_{43} &= \lambda e^{2i\beta_2} - e^{i(\beta_2 - \beta_1)} \\ a_{44} &= (1 + iM_1)e^{-i\beta} - \lambda \\ x &= iM_{11}e^{-i(\beta_2 + \alpha_1)} \\ y &= -iM_{11}e^{-i(\alpha_2 + \beta_1)} \end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & x \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & y & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - xy a_{11} a_{33} = 0 .$$

Um die einzelnen Terme in der letzten Gleichung zu berechnen, macht man einige der unter 1.-6. aufgeführten Operationen rückgängig und erhält

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 - iM_0)e^{i\alpha} + c_1 - \lambda & -iM_0e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)} + c_2 \\ iM_0e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} - c_1 & (1 + iM_0)e^{-i\alpha} - c_2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda \left((1 - iM_0)e^{i\alpha} + (1 + iM_0)e^{-i\alpha} + c_1 - c_2 \right) - c_1c_2 + (1 - iM_0)(1 + iM_0) \\ &+ c_1(1 + iM_0)e^{-i\alpha} - c_2(1 - iM_0)e^{i\alpha} - M_0^2 + c_1c_2 - c_1M_0e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)} - c_2M_0e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ &= \lambda^2 - 2\lambda(\cos \alpha + M_0 \sin \alpha - k_2 \sin \alpha_{KP_2}) + 1 + 2(k_1 \sin \alpha + k_2 \sin(\alpha - \alpha_{KP_2})) \\ &- 2M_0(k_1 \cos \alpha + k_2 \cos(\alpha - \alpha_{KP_2}) - k_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - k_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_{KP_2})) , \end{aligned}$$

wobei die Ausdrücke für c_1 und c_2 eingesetzt wurden.

Setzt man die Definitionen der einzelnen Koeffizienten α ein, dann ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \lambda^2 - 2\lambda(\cos 2\pi\nu_\beta - M_0 \sin 2\pi\nu_\beta + k_2 \sin \theta_{KP_2\nu_\beta}) + 1 \\ &- 2(k_1 \sin 2\pi\nu_\beta + k_2 \sin(2\pi - \theta_{KP_2})\nu_\beta) + 4M_0 \sin \theta_{CK\nu_\beta} (k_1 \sin \theta_{KC\nu_\beta} + k_2 \sin \theta_{P_2C\nu_\beta}) , \end{aligned}$$

oder mit den in (4.45) definierten Abkürzungen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda A + 1 + F .$$

Ebenso läßt sich

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda B + 1$$

zeigen.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} xya_{11}a_{33} &= M_{11}^2 e^{-i(\alpha+\beta)} \lambda (\epsilon^{2i\beta} - 1) [\lambda (\epsilon^{2i\alpha} - 1) + c_1 (1 - e^{2i\alpha_1}) - c_2 e^{2i\alpha_2} (1 - e^{2i\alpha_1})] \\ &= -4M_{11}^2 \lambda \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) [\lambda \sin 2\pi\nu_\beta + 2 \sin \theta_{CK\nu_\beta} [k_1 \sin \theta_{KC\nu_\beta} + k_2 \sin \theta_{P_2C\nu_\beta}]] \end{aligned}$$

Mit den in (4.45) eingeführten Termen ergibt sich

$$xya_{11}a_{33} = -E \cdot \lambda (\lambda \sin 2\pi\nu_\beta + 2D) .$$

Damit folgt jetzt insgesamt für die charakteristische Gleichung

$$(\lambda^2 - 2\lambda A + 1 + F) (\lambda^2 - 2\lambda B + 1) + E \cdot \lambda (\lambda \sin 2\pi\nu_\beta + 2D) = 0 ,$$

und Ausmultiplizieren liefert Gleichung (4.45).

A.7

A.7.1 Herleitung von Gleichung (4.67)

Mit

$$\begin{aligned} a &= -2(A + B) & b &= 4AB + 2 + F + E \sin 2\pi\nu_\beta \\ c &= -2(A + B) - 2(BF - ED) & d &= 1 + F \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

folgt aus (4.45)

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

also mit (4.64)

$$(r + 1)^4 + a(r + 1)^3(r - 1) + b(r + 1)^2(r - 1)^2 + c(r + 1)(r - 1)^3 + d(r - 1)^4 = 0 .$$

Multipliziert man die einzelnen Terme aus und faßt anschließend zusammen, dann erhält man

$$\begin{aligned} r^4 &\cdot (1 + a + b + c + d) + \\ r^3 &\cdot (4 + 2a - 2c - 4d) + \\ r^2 &\cdot (6 - 2b + 6d) + \\ r &\cdot (4 - 2a + 2c - 4d) + \\ &\cdot (1 - a + b - c + d) = 0 . \end{aligned}$$

Definiert man die Koeffizienten a_i durch

$$\sum_{i=0}^4 a_i r^{4-i} = 0 ,$$

dann gilt

$$\sum_{i=0}^4 a_i = 16 . \quad (\text{A.115})$$

Einsetzen der Definitionen von a, b, c, d (A.114) ergibt

$$\begin{aligned} & r^4 (4 - 4(A + B) + 4AB + E \sin 2\pi\nu_\beta + 2F - 2(BF - ED)) + \\ & r^3 (4(BF - ED) - 4F) + \\ & r^2 (8 - 8AB - 2E \sin 2\pi\nu_\beta + 4F) + \\ & r (-4(BF - ED) - 4F) + \\ & (4 + 4(A + B) + 4AB + E \sin 2\pi\nu_\beta + 2F + 2(BF - ED)) = 0 , \end{aligned}$$

also mit den Definitionen von Gleichung (4.67)

$$\sum_{i=0}^4 a_i r^{4-i} = 0 .$$

A.7.2 Berechnung der Hurwitz Determinanten

Nach [46] lauten die Hurwitz Determinanten für eine Gleichung 4-ten Grades

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^4 a_i r^{4-i} = 0 \\ & H_1 = a_1 \qquad H_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 \\ & H_3 = a_3 H_2 - a_1^2 a_4 \qquad H_4 = a_4 H_3 \end{aligned}$$

Die Bewegung ist stabil falls [46]

$$a_0 H_1 > 0 , H_2 > 0 , a_0 H_3 > 0 , H_4 > 0$$

gilt. Da nach (4.68) alle a_i positiv sein müssen, erhält man folgende Stabilitätsbedingung

$$\text{Stabilität} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} : & a_i > 0 \\ \forall i \in \{1, 2, 3\} : & H_i > 0 \end{cases} . \quad (\text{A.116})$$

Es müssen im wesentlichen nur die Determinanten H_2 und H_3 berechnet werden.

Es ist mit (4.67)

$$\begin{aligned} H_2 &= (4(BF - ED) - 4F)(8 - 8AB - 2E \sin 2\pi\nu_\beta + 4F) + \\ &+ (4(BF - ED) + 4F)(4 - 4(A + B) + 4AB + E \sin 2\pi\nu_\beta + F - 2(BF - ED)) \\ &= 4(BF - ED)(12 - 4(A + B) - 4AB - E \sin 2\pi\nu_\beta + 6F - 2(BF - ED)) \\ &- 4F(4 + 4(A + B) - 12AB - 3E \sin 2\pi\nu_\beta + 2F + 2(BF - ED)) . \quad (\text{A.117}) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 a &= 4(BF - ED) \\
 b &= 4F \\
 x &= 12 - 4(A + B) - 4AB - E \sin 2\pi\nu_\beta + 6F - 2(BF - ED) \\
 y &= 4 + 4(A + B) - 12AB - 3E \sin 2\pi\nu_\beta + 2F + 2(BF - ED) \\
 z &= 4 + 4(A + B) + 4AB + E \sin 2\pi\nu_\beta + 2F + 2(BF - ED)
 \end{aligned}$$

ergibt die Berechnung von H_3

$$\begin{aligned}
 H_3 &= -(a + b)(ax - by) - (a - b)^2 z \\
 &= -a^2(x + z) - b^2(z - y) + ab(y - x + 2z) \\
 H_3 &= -16(BF - ED)^2(16 + 8F) - 16F^2(16AB + 4E \sin 2\pi\nu_\beta) \\
 &\quad + 16F(BF - ED)(16(A + B) + 8(BF - ED)) .
 \end{aligned}$$

Multipliziert man aus und faßt die entsprechenden Terme zusammen, dann erhält man schließlich

$$H_3 = -16^2(E \cdot D)^2 - 16^2 FED(A - B) - 4 \cdot 16 F^2 E \sin 2\pi\nu_\beta . \quad (\text{A.118})$$

A.7.3 Untersuchung der dritten Hurwitz - Determinanten H_3

Um Gleichung (A.118) weiter untersuchen zu können, benötigt man eine Umformung der Größe D . Nach (4.45) ist

$$\begin{aligned}
 C &= -2(k_1 \sin 2\pi\nu_\beta + k_2 \sin(2\pi - \theta_{KP_2})\nu_\beta) \\
 D &= \sin \theta_{CK}\nu_\beta(k_1 \sin \theta_{KC}\nu_\beta + k_2 \sin \theta_{P_2C}\nu_\beta) .
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen kann k_1 eliminiert werden, und man erhält

$$D = \frac{C}{4} \left[\cot 2\pi\nu_\beta - \frac{\cos(\theta_{KC} - \theta_{CK})\nu_\beta}{\sin 2\pi\nu_\beta} \right] - \frac{k_2 \sin \theta_{KP_2}\nu_\beta}{\sin 2\pi\nu_\beta} \sin^2 \theta_{CK}\nu_\beta \quad (\text{A.119})$$

oder mit

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \cot 2\pi\nu_\beta - \frac{\cos(\theta_{KC} - \theta_{CK})\nu_\beta}{\sin 2\pi\nu_\beta} \\
 \beta &= \sin^2 \theta_{CK}\nu_\beta
 \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

$$D = \alpha \frac{C}{4} - \beta \frac{k_2 \sin \theta_{KP_2}\nu_\beta}{\sin 2\pi\nu_\beta} . \quad (\text{A.121})$$

Für die Werte α , β kann man näherungsweise angeben, wie sie sich im Falle mehrerer Resonatoren ändern. Berücksichtigt man ähnlich wie im Abschnitt A.4.3 nur die linearen Beiträge der einzelnen Resonatoren und vernachlässigt alle höheren Terme, dann erhält man

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2 \theta_{C_iK}\nu_\beta \\
 \alpha &= \cot 2\pi\nu_\beta - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\cos(\theta_{KC_i} - \theta_{C_iK})\nu_\beta}{\sin 2\pi\nu_\beta} .
 \end{aligned}$$

Für sehr viele Resonatoren und für

$$\theta_{P_2K} \cdot \nu_\beta \gg 1$$

gilt dann (siehe Abschnitt A.4.3):

$$\begin{aligned} \beta &\approx \frac{1}{2} \\ \alpha &\approx \cot 2\pi\nu_\beta . \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

Nach (4.74) ist

$$E \cdot \sin 2\pi\nu_\beta > 0 \text{ für } \nu_s \leq \delta\nu_\beta + 1/4 \leq 1/2 ,$$

d.h. es ist

$$-4 \cdot 16 F^2 E \sin 2\pi\nu_\beta < 0$$

und

$$-16^2 (E \cdot D)^2 < 0 .$$

Damit die Bewegung stabil ist ($H_3 \geq 0$), muß also wenigstens folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$-16^2 FDE(A - B) > 4 \cdot 16 F^2 E \sin 2\pi\nu_\beta > 0 . \quad (\text{A.123})$$

Nach Gleichung (4.45) gilt

$$\begin{aligned} E \cdot (A - B) = & -4M_{11}^2 \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) \cdot \left(2 \sin 2\pi(\nu_\beta - \frac{\nu_s}{2}) \sin 2\pi\frac{\nu_s}{2} - \right. \\ & \left. k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta + M_0 \sin 2\pi\nu_\beta - M_1 \sin 2\pi(\nu_\beta - \nu_s) \right) . \end{aligned}$$

Nun ist nach (4.73)

$$\nu_\beta = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} + \delta\nu_\beta$$

also folgt

$$\begin{aligned} E \cdot (A - B) = & -4M_{11}^2 \cos 2\pi(\delta\nu_\beta - \nu_s) \cdot \left(2 \cos 2\pi(\delta\nu_\beta - \frac{\nu_s}{2}) \sin \pi\nu_s - \right. \\ & \left. (-1)^m k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta + M_0 \cos 2\pi\delta\nu_\beta - M_1 \cos 2\pi(\delta\nu_\beta - \nu_s) \right) . \end{aligned}$$

Für kleine $\delta\nu_\beta$ und ν_s (≤ 0.1) lassen sich die Winkelfunktionen entwickeln mit dem Resultat

$$E \cdot (A - B) \approx -4M_{11}^2 \cdot (2\pi\nu_s + M_0 - M_1 - (-1)^m k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta) . \quad (\text{A.124})$$

Benutzt man die Frequenzverschiebung, um den Frequenzabstand zwischen den Moden ($n = 0$) ($n = -1$) zu vergrößern, dann gilt

$$-(-1)^m k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta = 2\pi x \nu_s > 0 \implies E \cdot (A - B) < 0 , \quad (\text{A.125})$$

da im allgemeinen

$$2\pi\nu_s + M_0 - M_1 > 0$$

ist.

Verkleinert man hingegen die Frequenz des Fundamentalmodus, so daß sie kleiner als die Frequenz des Modus ($n = -1$) ist, d.h.

$$-(-1)^m k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta = -2\pi\nu_s - 2\pi x \nu_s < 0 ; x \geq 0 , \quad (\text{A.126})$$

dann gilt

$$E \cdot (A - B) > 0 . \quad (\text{A.127})$$

Damit erhält man im Falle (A.125) aus (A.123)

$$F \cdot D > 0 \quad (\text{A.128})$$

und im Falle (A.126) aus (A.123)

$$F \cdot D < 0 . \quad (\text{A.129})$$

Da nach (4.69) eine stabile Bewegung nur dann möglich ist, wenn F negativ ist, folgt insgesamt:

$$-(-1)^m k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta = 2\pi x \nu_s > 0 \quad \text{stabil falls} \quad D < 0 \quad (\text{A.130})$$

$$-(-1)^m k_2 \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta = -2\pi \nu_s (1 + x) \geq 0 \quad \text{stabil falls} \quad D > 0 . \quad (\text{A.131})$$

Nach (A.121) gilt mit (4.73)

$$D = \alpha \frac{C}{4} - (-1)^m k_2 \beta \sin \theta_{KP_2} \nu_\beta ,$$

also im Falle (A.125)

$$D = \alpha \frac{C}{4} + \beta 2\pi x \nu_s \quad (\text{A.132})$$

und im Falle (A.126)

$$D = \alpha \frac{C}{4} - \beta 2\pi \nu_s (1 + x) . \quad (\text{A.133})$$

Aus (A.130) und (A.132) bzw. (A.131) und (A.133) erhält man das wichtige Resultat, daß für $C = 0$ stets $H_3 < 0$ ist und somit wenigstens ein Modus instabil ist:

$$C = 0 \implies \text{Instabilität} . \quad (\text{A.134})$$

Man kann nun zeigen, daß C immer negativ sein muß, da ein positives C stets zu einer Instabilität führt.

Im Falle von (A.130) ist das leicht einzusehen. Da

$$F = C + 4M_0 D < 0$$

immer negativ sein muß und sowohl M_0 als D negativ sind und somit

$$M_0 \cdot D > 0$$

ist, muß C notwendigerweise negativ sein.

Im Falle von (A.131) ist

$$D = \alpha \frac{C}{4} - \beta 2\pi \nu_s (1 + x) > 0 \quad \text{mit} \quad \beta > 0$$

$$\implies \frac{\alpha C}{4} = D + 2\pi \nu_s (x + 1) \beta > D > 0$$

Da α für sehr viele Resonatoren ungefähr durch

$$\alpha \approx \cot 2\pi \nu_\beta \approx -2\pi \delta \nu_\beta < 1$$

gegeben ist, wobei (4.73) benutzt wurde, gilt

$$|C| > 4D .$$

Jetzt ist

$$F = C - 4|M_0||D|$$

und da $|M_0|$ stets kleiner als eins ist, muß

$$C < 0$$

gelten, damit F negativ ist.

Es kann nun für die beiden Fälle (A.130) bzw. (A.131) folgendes ausgesagt werden:

1. positive Frequenzverschiebung (A.130):

Aus $D < 0$ und $C < 0$ folgt mit (A.132)

$$\alpha \geq 0 \tag{A.135}$$

und außerdem gilt

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{|\alpha C|}{4} - 2\pi\nu_s x \beta \\ |F| &= |C| - 4|M_0||D| . \end{aligned} \tag{A.136}$$

2. negative Frequenzverschiebung (A.131):

Mit (A.133) folgt aus $D > 0$ sowie $C < 0$

$$\alpha \leq 0 \tag{A.137}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{|\alpha C|}{4} - 2\pi\nu_s(1+x)\beta \\ |F| &= |C| + 4|M_0||D| . \end{aligned} \tag{A.138}$$

Damit die Bewegung stabil ist, muß für beide Fälle (A.130) bzw. (A.131) die Ungleichung (A.123) erfüllt sein, d.h.

$$|E||D||A-B| > \frac{|F|}{4} \cdot |\sin 2\pi\nu\beta||E| .$$

Benutzt man (4.73) sowie (A.125), dann gilt für 1.

$$|D|(2\pi\nu_s(1+x) - |M_0|) > \frac{|C|}{4} - |M_0||D| ,$$

wobei der Term M_1 vernachlässigt wurde, da $|M_1| \ll 1$ ist, also gilt

$$|C|(|\alpha|2\pi\nu_s(1+x) - 1) > 4 \cdot (2\pi\nu_s)^2 x(1+x)\beta \geq 0 \tag{A.139}$$

und für den 2. Fall erhält man ebenso

$$|C|(|\alpha|2\pi\nu_s x - 1) > 4 \cdot (2\pi\nu_s)^2 x(1+x)\beta \geq 0 . \tag{A.140}$$

Diese beiden Ungleichungen können für typische Werte wie:

- $0 \leq x \leq 1$
- $0 \leq \nu_s \leq 0.1$
- $\alpha \approx \cot 2\pi\nu\beta \approx -2\pi\delta\nu\beta$
- $0 \leq |\delta\nu\beta| \leq 0.1$

nicht erfüllt werden, so daß eine Kompensation für

$$\nu\beta = \frac{m}{2} + \frac{1}{4} + \delta\nu\beta \quad ; \quad |\delta\nu\beta| \leq 0.1 \quad (\text{A.141})$$

nicht möglich ist.

Eventuell ist eine Kompensation für

$$0.1 \leq |\delta\nu\beta| < 0.25$$

möglich.

Untersucht man diese Möglichkeit für den 1. Fall, dann fällt zuerst auf, daß aus

$$\alpha \approx \cot 2\pi\nu\beta = -\tan 2\pi\delta\nu\beta \quad \text{mit} \quad \alpha > 0$$

$$\delta\nu\beta < 0$$

folgt. Somit muß man sich von der Viertelzahl des Betatrontones in Richtung auf die erste Satellitenresonanz bewegen. Da eine Kompensation nach (A.139) nur für sehr große Werte des Synchrotrontones möglich ist und im allgemeinen kein Elektron-Positron Speicherring zwischen einem ganzzahligen Betatron-tone und der ersten Satellitenfrequenz betrieben wird, ist es nur noch sinnvoll, folgende Werte zu betrachten

$$|\delta\nu\beta| \leq 0.15$$

Für Werte $|\delta\nu\beta| \geq 0.1$ sind die Werte von α recht groß, so daß man die Ungleichung (A.139) erfüllen kann, jedoch ist dann im allgemeinen

$$|C| = \frac{2(2\pi\nu_s)^2 x(1+x)}{|\tan 2\pi\delta\nu\beta|(1+x)2\pi\nu_s - 1}$$

eine sehr große Zahl, so daß

$$|F| > 2$$

ist und damit wird (4.69) nicht mehr erfüllt.

Analoges gilt für (A.140), so daß man sagen kann, daß für

$$|\delta\nu\beta| \leq 0.15 \quad (\text{A.142})$$

keine Kompensation möglich ist.

Danksagung

Ich bedanke mich bei den Herren Prof. Dr. B.H. Wiik und Prof. Dr. P. Schmüser dafür, daß sie mir diese Arbeit bei DESY ermöglicht haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Priv. Doz. Dr. R.D. Kohaupt, dessen vorbildliche Betreuung mir ein rasches Einarbeiten in das Thema ermöglicht hat und dessen Ratschläge und Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Für die sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes danke ich Herrn Priv. Doz. Dr. R.D. Kohaupt, und für das Anfertigen einiger Zeichnungen möchte ich mich bei Frau Schultz bedanken.

Literaturverzeichnis

- [1] J.L. Laclare in Referenz [2] und CERN - Accelerator School - Advanced Accelerator Physics, Queens College Oxford, CERN 87-03, 1987 und dort angegebene Referenzen
- [2] CERN - Accelerator School - General Accelerator Physics, Gif - sur - Yvette, Paris CERN 85 - 19
- [3] A. Chao, "Coherent Instabilities of a Relativistic Bunched Beam", SLAC - PUB - 2946, 1982
- [4] J. Gareyte, "Experimental Observations of Electron Instabilities in Storage Rings ", Nuclear Instruments and Methods A239(1985),72
- [5] R.D. Kohaupt, "Transverse Instabilities in PETRA", 11-th Conference on High Energy Accelerators, Genf 1980, Seite 562
- [6] R.D. Kohaupt, "Head Tail Turbulence and the Transverse PETRA - Instability", DESY 80/22, 1980
- [7] R.D. Kohaupt, "Die fundamentale Begrenzung des speicherbaren Stroms in Elektron - Positron Speicherringen durch eine neuartige transversale Instabilität", Habilitationsschrift, 1980 unveröffentlicht
- [8] F. Sacherer, "Methods For Computing Bunched - Beam Instabilities", CERN /SI-BR/72-5,1972
- [9] PEP - Group, "Comparison Between Experimental and Theoretical Results for the Fast-Head-Tail Instability in PEP", 12-th Conference on High Energy Accelerators Fermilab 1983, Seite 209
- [10] K. Satoh, Y. Chin, "Transverse Mode Coupling in a Bunched Beam ", Nuclear Instruments and Methods 207(1983),309-320
- [11] B. Zotter, "Limitations of Bunched Current in LEP by Transverse Mode Coupling ", IEEE NS-30(1983),2519
- [12] B. Zotter, "Transverse Instabilities Due to Wall Impedances in Storage Rings ", CERN - LEP - /TH/ 85-6 und Part. Acc. Conf. Vancouver 1985
- [13] G. Besnier, D. Brandt, B. Zotter. "The Transverse Mode Coupling Instability in Large Storage Rings ", Particle Accelerators 17(1985),51-77
- [14] K.L.F. Bane, R.D. Ruth, "Bellows Wake Fields and Transverse Bunch Instabilities in the SSC ", SLAC - AP - 45, 1985

- [15] T. Suzuki, "Fokker Planck Theory of Transverse Mode Coupling Instability ", Particle Accelerators 20(1986)79-96
- [16] Y. Chin, K. Satoh, K. Yokoya, "Instability of a Bunched Beam with Synchrotron Frequency Spread ", Particle Accelerators 13(1983),45-66
- [17] R.H. Siemann, "Computer Modells of Instabilities in Electron Storage Rings ", Physics of High Energy Accelerators, Summer School 1983, AIP Proceedings 127 und dort aufgeführte Referenzen
- [18] D. Brandt, B. Zotter, "Simulation of Transverse Stability of Single Bunches in Storage Rings ", 12-th International Conference on High Energy Accelerators, Fermilab 1983,309
- [19] D. Brandt, B. Zotter, "Synchro Betatron Resonances Due to Wakefields ", CERN LEP -TH/84-2
- [20] A. Piwinski, CERN - Accelerator School - Advanced Accelerator Physics, Queens College Oxford, CERN 87-03, 1987 und dort aufgeführte Referenzen
- [21] F. Ruggiero, "Transverse Mode Coupling Instability Due to Localized Structures", Particle Accelerators 20(1982),45
- [22] Y.H. Chin, "Coherent Synchro-Betatron Resonances Driven by Localized Wake Fields", CERN SPS / 85-33 (DI-MST),1985
- [23] F. Ruggiero, "The Effect of Radiation Damping and Noise on the Transverse Mode Coupling Instability Due to Localized Structures", CERN - LEP /TH/ 85-13
- [24] T. Suzuki, "Transverse Mode Coupling Due to Piecewise Constant Impedances ", CERN /LEP-TH/ 87-55, 1987
- [25] M. Sands, "The Physics of Electron Storage Rings", SLAC - Report 121, 1970
- [26] E.D. Courant and H.S. Snyder, "Theory of the Alternating Gradient Synchrotron ", Ann. Phy. 3(1958),1
- [27] T. Weiland, "Transverse Beam Cavity Interaction Part1: Short Range Forces ", Nuclear Instruments and Methods 212(1983),13-34
- [28] R. Ruth, "Reactive Feedback in the Two Particle Model ", CERN - LEP - TH/83-22
- [29] R. Ruth, "Transverse Mode Coupling with Feedback " , 12-th International Conference on High Energy Accelerators, Fermilab 1983, Seite 389
- [30] S. Myers, "Effect of Reactive Feedback on the Transverse Mode Coupling Instability Using the Few Particle Model and Simulatons ", CERN - LEP/RF/ 85-22
- [31] S. Myers, "Stabilisation of The Fast Head - Tail Instability by Feedback ", Part. Acc. Conf., Washington 1987
- [32] R.D. Kohaupt, "Simplified Presentation of Head Tail Turbulence ", DESY M-80/19, 1980

- [33] T. Suzuki, "Hamiltonian Formulation For Synchrotron Oscillations and Sacheres Integral Equation", Particle Accelerators 12(1982).237
- [34] A. Chao, "Equations for Multiparticle Dynamics", SSC - 105, 1987
- [35] K. Bane, P. Wilson, "Longitudinal and Transverse Wake Potentials in SLAC ", 11-th Conference on High Energy Accelerators, Genf 1980, Seite 592
- [36] T.Weiland, "Comment on Wake Field Computation in Time Domain", Nuclear Instruments and Methods 216 (1983), 31
- [37] A. Panofsky und W.A. Wenzel, "Some Considerations Concerning the Transverse Deflection of charged Particles in Radio-Frequency Fields ", Rev. of Scientific Instruments 27(1956), 967
- [38] Abramovitz, Stegun, "Handbook of Mathematical Functions " ,1966, Seite 775
- [39] Ref. [38], Seite 785
- [40] private Mitteilung von R. Klatt und T. Weiland
- [41] R.D. Kohaupt, "Longitudinal - Transverse Mode Coupling in Localized Structures with Orbit Dependent Higher Order Mode Losses", DESY 85-140,1985
- [42] M. Sands, SLAC -TN-69-8, SLAC -69-10, 1969
- [43] C. Pellegrini, "On a New Instability in Electron-Positron Storage Rings (The Head-Tail Effect) ", Nuovo Cimento 64A (1969), 447
- [44] R.D. Kohaupt, "Single Beam Instabilities in PETRA " , IEEE NS-26,No.3(1979),3480
- [45] W. Magnus, A. Karras, D. Solitas, "Combinatorial Group Theory " , Wiley Interscience,1966
- [46] F.R. Gantmacher, "Matrizentheorie " , VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986
- [47] S.H. Lehnigh "Stability Theorems For Linear Motions " , Prentice Hall Inc. 1966
- [48] Besnier, Nuclear Instruments and Methods 164(1979) 235
- [49] Bronstein, Semendjajew. "Taschenbuch der Mathematik " .19. Auflage, Verlag Harri Deutsch, 1980
- [50] G.N.Watson, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions " , Cambridge at the University Press, 1958

