



DESY 93-196
December 1993



Photoproduktion von Jets bei HERA
mit aufgelösten Photonen
bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

S. G. Salesch

II. Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg

ISSN 0418-9833

NOTKESTRASSE 85 - 22603 HAMBURG

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

To be sure that your preprints are promptly included in the
HIGH ENERGY PHYSICS INDEX,
send them to (if possible by air mail):

**DESY
Bibliothek
Notkestraße 85
22603 Hamburg
Germany**

**DESY-IfH
Bibliothek
Platanenallee 6
15738 Zeuthen
Germany**

Photoproduktion von Jets bei HERA mit aufgelösten Photonen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

S. G. SALESCH

II. INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK DER UNIVERSITÄT HAMBURG
LURUPER CHAUSSEE 149, D-22761 HAMBURG
Dezember 1993

Zusammenfassung

Die vollständigen ersten Korrekturen der QCD-Störungstheorie zu mehreren Observablen inklusiver Jets in aufgelöster Photoproduktion bei HERA werden bestimmt. Der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ wird nach einer Methode von Aversa *et al.* in einen analytischen und einen numerisch zugänglichen Anteil zerlegt. Im analytischen Teil werden die auftretenden Singularitäten durch Addition aller $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen bzw. Absorption in die Parton-Verteilungen beseitigt. Hierbei können alle endlichen Beiträge im Jetcut vernachlässigt werden. Sie werden im zweiten Schritt mittels üblicher Monte-Carlo-Verfahren numerisch bestimmt. Die relevanten Eigenschaften des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes werden ausführlich diskutiert, wobei auch Parallelen zur Hadroproduktion an $p\bar{p}$ -Collidern aufgezeigt werden. Die Untersuchung der inneren Jetstruktur schließt sich an. Das E_T -Profil wird geeignet definiert, so daß nur noch (2-3) Baumgraphen beitragen. Dies ermöglicht die dann folgende numerische Auswertung. Es zeigen sich universelle Eigenschaften der Jetstruktur, insbesondere lassen sich bei hinreichend niedriger relativer transversaler Energie des Jets (x_T) die Unterschiede zum vergleichbaren Profil in Hadroproduktion bei Tevatron-Energien mittels der laufenden Kopplung einfach faktorisieren. Einige analytische Beziehungen zwischen Jetprofil und Wirkungsquerschnitt werden diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

Kap.1	Einleitung	
Kap.2	Born-Wirkungsquerschnitte: neuere Resultate	
	2.1 Photoproduktion bei HERA	
	2.2 Strukturfunktionen und Parton-Dichten	
	2.2.1 Die Struktur des Protons	
	2.2.2 Die Struktur des Photons	
	2.3 Jets in LO Photoproduktion	
	2.3.1 Vergleich von direktem und aufgelöstem Photon	
	2.3.2 Vergleich verschiedener Parametrisierungen	
Kap.3	Jets in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$	
	3.1 Zur Notwendigkeit der NLO Rechnungen	
	3.2 QCD in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$	
	3.2.1 Virtuelle Korrekturen	
	3.2.2 Reelle Korrekturen	
	3.3 Jets mit kleinen Kegelnradien: SCA	
	3.3.1 Definition des Jet-Wirkungsquerschnittes in NLO	
	3.3.2 Faktorisierung im Eingangszustand	
	3.3.3 Universalität	
	3.4 Übergang zu endlichen Cuts	
	3.4.1 Vom Kollinearitätscut zum Jet?	
	3.4.2 Zerlegung des Wirkungsquerschnittes	
	3.4.3 Bemerkungen zur Jetdefinition	
Kap.4	Numerische Ergebnisse: Jets in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$	
	4.1 Übersicht und Wahl der Parameter	
	4.2 Der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$	
Kap.5	Zur Jetstruktur	
	5.1 Das E_T -Profil	
	5.1.1 Definitionen	
	5.1.2 Ergebnisse	
	5.2 Die invariante Jetmasse	
	5.2.1 Definitionen	
	5.2.2 $d^2\sigma/dE_T d\eta$ vs. $d^2\sigma/dp_T d\eta$ unter dem Blickwinkel $\overline{M_{Tc}}$	
	5.2.3 Ergebnisse	
Kap.6	Zusammenfassung und Ausblick	
Anhang A	E_T vs. p_T , Rapidität und invariante Masse	
B	Zusammenstellung kinematischer Variablen	
C	Zusammenstellung von Jet-Algorithmen	
D	Der Winkelcut δ unter Lorentz-Boosts	
E	Die Jetmasse als Trägheitsmoment	
Literatur		
Danksagung		

Jenes Ding, nach dem so viele Fragen fragen,
jenes Ding, von dem so viele Sagen sagen,
dessen Wichtigkeit man so oft unterstrich
ist es nicht vielleicht das Ding an sich?

Herrmann Hesse

1 Einleitung

Im Laufe des letzten Jahres wurde bei HERA erstmals die angestrebte Schwerpunktsenergie $\sqrt{S_{ep}} \approx 300 \text{ GeV}$ ($p_e = 26.7 \text{ GeV}$, $p_p = 820 \text{ GeV}$) erreicht. Seitdem haben die beiden großen experimentellen Arbeitsgruppen ZEUS und H1 bereits erste Ergebnisse vorgestellt, siehe beispielsweise [ZEUS92, H1.92, H1.93]. Dies ermöglicht nun die ersten Vergleiche mit einer Vielzahl und Vielfalt theoretischer Arbeiten, über die in den beiden Workshops [HERA87, HERA91] ein ausführlicher Überblick gegeben wurde. Die hier vorliegende Arbeit fällt in diesen Rahmen.

Die Wechselwirkung zwischen Elektron und Proton wird durch den Austausch elektroschwacher Vektorbosonen vermittelt, wobei das Photon den Hauptanteil der Ereignisse stellt. Dessen Anteil hoher Virtualität Q^2 werden vom Propagator unterdrückt, so daß das Proton meist an einem (quasi-)reellen Photon gestreut wird. Das Elektron läuft dann unter einem sehr kleinen Winkel zur Strahlachse aus und verschwindet unter Umständen wieder im Strahlrohr. Das entsprechende Photonspektrum im Elektron wird dann in der Regel durch die *equivalent photon approximation* (EPA) ersetzt [WW34]. Während das Photon in der tiefinelastischen Streuung mit hoher Virtualität im wesentlichen punktförmig an die Quarks im Proton koppelt, wird das Bild für kleine Q^2 vielfältiger. Ein reelles Photon kann zwischenzeitlich in ein gebundenes $q\bar{q}$ -Paar übergehen und verhält sich dann im wesentlichen wie ein (leichtes) Vektormeson. Wird es in diesem Moment „erwischt“, so muß seine Wechselwirkung durch einen Satz mesonischer Parton-Verteilungen beschrieben werden, die mit einer effektiven Photon-Meson-Kopplung zu versehen sind. Solche Ereignisse werden Endzustände mit niedrigeren transversalen Energien E_T bevorzugen, da einfach die ursprüngliche Photonenergie aufgeteilt wurde. Neben dieser *aufgelösten* und der *direkten* Wechselwirkung, die im Prinzip über die Suche nach Zerfallsprodukten in Vorwärtsrichtung des Photons unterschieden werden können, müssen aus Konsistenzgründen noch weniger eindeutige Anteile mitgenommen werden. In diesen *anomalen* Situationen zerfällt das Photon zwar in ein Quark-Antiquark-Paar, das die Mesonstruktur bildende Strahlungs-gleichgewicht hat sich aber noch nicht eingestellt. Damit koppelt das Photon zwar punktförmig an ein Parton, andererseits wird aber auch ein *remnant jet* zu beobachten sein. Eine exakte Zuordnung ist experimentell schwierig, aber auch in der Theorie ist zumindest der punktförmige im aufgelösten Beitrag zu berücksichtigen. In niedrigster Ordnung (LO) können aber direkte und aufgelöste harte Streuung noch wohldefiniert voneinander getrennt werden. Nimmt man Korrekturen höherer Ordnung in α_s hinzu, müssen letzten Endes alle Gesichter des Photons zusammen betrachtet werden.

Das Parton-Modell des Protons geht Hand in Hand mit der Idee, daß Teilchen in Endzuständen hochenergetischer Streuprozesse zusammenhängende Cluster bilden sollten. Unter Verzicht auf immerhin so essentielle Forderungen wie Farb-, Ladungs- und Impulserhaltung können solche *Jets* dann als Hinweis auf ein gemeinsames erzeugendes Parton angesehen werden. Oder, etwas poetischer [Ell87]:

Jets are the smile of a Cheshire Parton.

Präzisere Aussagen verlangen dann *etwas* präzisere Definitionen. Ein Jet ist trotz seiner anschaulichen Deutung durch das Parton-Modell kein *Ding an sich* (s.o.), sondern im Vergleich von Experiment und Theorie gemeinsam zu erklären. Die hier verwendeten Definitionen sind im Anhang zusammengestellt. Die prinzipiellen Unterschiede zwischen partonischem und hadronischem Endzustand erschweren solche Vergleiche, andererseits erfordern Jets keine Identifikation der teilnehmenden Teilchen. Der Einfluß phänomenologischer Modelle zur Hadronisierung von Quarks und Gluonen sollte aus diesem Grunde keine sehr große Rolle spielen [JADE84], jedenfalls wenn Schwerpunkts- und transversale Jetenergien — wie hier bei HERA — hinreichend groß gegen Λ_{QCD} sind. Voraussetzung auf der theoretischen Seite ist hier aber, daß sich Jets überhaupt nicht-trivial definieren lassen und die berechneten Observablen möglichst wenig von unzugänglichen Parametern, also den in der Störungstheorie auftretenden Skalen, abhängen. Eine derartige Qualität wird erst in der nächsthöheren Ordnung in der laufenden Kopplung $\alpha_s(\mu)$ erreicht.

In niedrigster Ordnung der Störungstheorie lassen sich Jet-Wirkungsquerschnitte ohne besondere Problem definieren und auswerten. Neben den $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Matrizelementen der QCD gehen noch in vorhergehenden Experimenten gewonnene Parametrisierungen der Parton-Dichten in LO ein. Dies wird in Kap. [2] besprochen. Die dort gezeigten numerischen Ergebnisse wurden mit dem Schwerpunkt auf einem Vergleich zwischen verschiedenen Parametrisierungen der Parton-Dichten im Photon ausgewählt. Ferner wird der Einfluß des direkten Photons auf die Summe aller Beiträge herausgearbeitet. In Kap. [3] wird dann der Weg zu den NLO Korrekturen beschrieben. Die bei der schrittweise Berechnung des inklusiven Partonjet-Wirkungsquerschnittes in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ auftretenden Singularitäten werden diskutiert und mit den üblichen Methoden beseitigt. Hierbei sind einerseits in Übereinstimmung mit dem Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem [KLN62] virtuelle und reelle $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen zu addieren. Andererseits sind die verbleibenden Anfangszustandsingularitäten in die Randbedingungen der — damit in NLO zu definierenden — Parton-Dichten in Photon und Proton zu absorbieren. Dies geschieht hier im Rahmen der von Furman [Fur82] und Aversa *et al.* [Ave89] im $p\bar{p}$ -Rahmen verwendeten Näherung kleiner Jetkegel, SCA. Die zum Vergleich mit dem Experiment notwendigen Korrekturen der Beiträge endlicher Jetkegel, FCC, werden mit Monte-Carlo-Methoden numerisch bestimmt [Ave91]. In Kap. [4] wird dann der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt für aufgelöste Photoproduktion bei HERA in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ numerisch ausgewertet und ausführlich diskutiert. Es zeigen sich eine Reihe von Parallelen zu den Eigenschaften von Jets bei $p\bar{p}$ -Streuung.

Ein weiterer interessanter Punkt neben den Ereignisraten der Jets ist ihre innere Struktur. An ihr lassen sich der Einfluß von Hadronisierungsmodellen im Vergleich mit dem Experiment ebenso untersuchen, wie weitere universelle Eigenschaften der Jetdefinition. Eher als das Auftreten von Teilchenclustern selbst sind dies die relevanten „Fingerabdrücke“ der zugrundeliegenden

universellen Substruktur der Hadronen. In Kap.[5] wird die mittlere Verteilung der transversalen Energie im Jetkegel in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ definiert und die numerischen Ergebnisse *en detail* diskutiert. Da das entsprechende Jetprofil für LO Jets in $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ trivial ist, können die hier diskutierten Verteilungen als die eigentlich führende Ordnung angesehen werden. Neben einigen interessanten Skaleneigenschaften wurden auch große Ähnlichkeiten zu Jets in Hadroproduktion gefunden. Eine Untersuchung der hier diskutierten E_T -Profile ist bei ZEUS in Vorbereitung[BT93].

Zur Nomenklatur: In dieser Arbeit werden 4^{er} -Impulse in *sans serif*, also p_i , gesetzt, während 3^{er} -Impulse \mathbf{p} , **fett gedruckt** sind.

2 Born-Wirkungsquerschnitte: neuere Resultate

2.1 Photoproduktion bei HERA

Wird das einlaufende Elektron unter einem hinreichend kleinen Winkel $\theta \leq \Theta^{max}$ gestreut, so verschwindet es am Detektor vorbei wieder im Strahlrohr. Das von ihm emittierte Photon ist dann nahezu *on-shell* und wird im Rahmen der Weizsäcker-Williams-Näherung[WW34] durch ein Spektrum $f_\gamma^e(x_\gamma)$ realer Photonen mit dem Impuls $\mathbf{p}_\gamma = x_\gamma \mathbf{P}$, beschrieben. Bis auf Multiplikation mit der Verteilung f_γ^e kann ein solches Ereignis also als die Streuung eines realen Photons am Proton geschrieben werden. Ein differentieller Wirkungsquerschnitt für Photoproduktion in ep -Streuung hat die Form

$$d\sigma_{ep}^{Photoprod.}(p_e, p_p) = \int dx_\gamma \int_{\gamma} f_\gamma^e(x_\gamma) d\sigma_{\gamma p}(x_\gamma \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_p) \quad (2-1)$$

oder kurz

$$d\sigma_{ep}^{Photoprod.} = f_\gamma^e \otimes d\sigma_{\gamma p}.$$

In Anlehnung an [BOO89a] wird in dieser Arbeit durchgehend eine Weizsäcker-Williams-Verteilung der Form

$$f_\gamma^e(x_\gamma) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 + (1 - x_\gamma)^2}{x_\gamma} \log\left(\frac{p_e \Theta^{max}}{m_e}\right)^2 \quad (2-2)$$

mit einem maximalen Streuwinkel des Elektrons von $\Theta^{max} = 5^\circ$ im Laborsystem verwendet. Aktuellere Rechnungen für H1 und ZEUS setzen hier $\hat{Q} = p_e \Theta^{max} = 0.1 GeV$, entsprechend einem wesentlich kleineren $\Theta^{max} \approx 4 mrad$. Die Wirkungsquerschnitte für Photoproduktion sind folglich ebenfalls kleiner, mit einer Weizsäcker-Williams-Verteilung in der Form von Gl.(2-2) aber nur um einen separierbaren Faktor $k_{WW} \approx 0.62$. Die aufgrund der typischen Form von f_γ^e zu erwartende mittlere Schwerpunktsenergie von Photon und Proton beträgt bei HERA ungefähr $S_{\gamma p} \approx 200 GeV$. Dies entspricht einer γ -Strahlenergie von rund $35 TeV$ bei Fixed-Target-Experimenten.

Das reelle Photon kann nun direkt mit den Partonen des Protons wechselwirken, dies trägt in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ zum Jet-Wirkungsquerschnitt bei. Auf der anderen Seite können nicht-perturbative Effekte eine hadronische Struktur des Photons hervorrufen, die nur durch phänomenologische Parton-Dichten zu beschreiben ist. Deren führende Anteile sind von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s/\alpha_e)$ — siehe Kap.[2.2]. Die harte Streuung der Partonen des, nun als *aufgelöst (resolved)* bezeichneten, Photons ist ein reiner QCD-Prozess in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, so daß festzustellen ist.

Die führenden Beiträge der direkten und der aufgelösten Wechselwirkung des Photons sind von gleicher Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

([DGo88,DGo89,BOO89a]) Dies heißt natürlich nicht, daß die in fester Ordnung Störungstheorie berechneten Wirkungsquerschnitte auch stets von der gleichen Größenordnung sein müssen. Es ist klar, daß die Zerfallsprodukte im Mittel weniger Energie in den Streuprozess einbringen können als das direkt wechselwirkende Photon. Das aufgelöste Photon wird daher bevorzugt Jets mit eher niedrigerem Transversalimpuls und eher negativer Rapazität¹ erzeugen. Die kinematischen Bereiche in denen das jeweilige Erscheinungsbild dominiert hängen

¹vgl. die Definition der Rapazität in Anh.A

ebenso von Skalen und den verwendeten Parametrisierungen der Parton-Dichten ab wie die Wirkungsquerschnitte selbst. Die Unsicherheiten in Born'scher Näherung sind dementsprechend sehr groß. In NLO ist die Abhängigkeit von den Skalen wesentlich reduziert, aber die nun auftretenden kollinearen Singularitäten im partonischen Anfangszustand verlangen eine *Konvention* über die Zuordnung von Teilen des partonischen Phasenraumes zum direkten oder zum aufgelösten Photon. Eine eindeutige Klassifizierung der beitragenden Feynman-Diagramme ist nur in der niedrigsten Näherung, $\mathcal{O}(\alpha_s)$, möglich. Im Experiment muß die Existenz von Zerfallsprodukten des Photons, also eines *remnant jet* in Richtung des einlaufenden Elektrons, die Frage entscheiden, ob dem jeweiligen Ereignis ein direkt oder ein aufgelöst wechselwirkendes Photon zugrundeliegt [dAM91, Bl91, De91]. Die singulären kollinearen Anteile der $(2 \rightarrow 3)$ -Prozesse $\gamma + i \rightarrow 3 \text{partonen}$ sind nach einem, in gewissem Rahmen frei wählbaren, *Faktorisierungsschema* konsistent in die Parton-Verteilungen des Photons zu absorbieren [BO089b, B3d92]. Diese Problematik ist ein zentraler Aspekt bei der Zusammenfügung beider Wirkungsquerschnitte in NLO. Sie wird in einer späteren Arbeit [BKS93] weiter diskutiert, hier wird nur der Beitrag des aufgelösten Photons betrachtet. In NLO ist er durch die Angabe des verwendeten Faktorisierungsschemas wohldefiniert.

Der folgende Abschnitt enthält eine Zusammenstellung von Definitionen und einigen wohl-bekanntesten Eigenschaften von Parton-Verteilungen in Proton und Photon. Im Kap [2.3] werden Jet-Wirkungsquerschnitte in LO diskutiert. Der Schwerpunkt wird auf dem Vergleich verschiedener Parametrisierungen f_i^p und f_i^γ liegen. Skalenabhängigkeit und einige andere Aspekte sollen später in einen direkten Vergleich mit den Resultaten der NLO-Rechnungen gestellt werden.

2.2 Strukturfunktionen und Parton-Dichten

Eine detaillierte Kenntnis der Zusammenhänge zwischen den elementaren Teilchen des Standardmodells einerseits und den experimentell zugänglichen physikalischen Teilchen andererseits ist eine der Grundlagen für quantitative Vergleiche von Theorie und Messung. Entscheidend für die Möglichkeit einer breiten Anwendung von Parton-Verteilungen in Nukleonen, Mesonen oder Photonen ist die *Universalität* der inneren Struktur der beobachtbaren Teilchen. Hierunter wird die Unabhängigkeit der Parametrisierungen vom jeweils folgenden harten Streuprozess der elementaren Bausteine verstanden. Die wichtigsten Eigenschaften und Definitionen sollen nun kurz skizziert werden, um eine Grundlage für die Diskussion in Kap.[3.4.2] zu haben. Für eine tiefere Diskussion von Details und neuesten Ergebnissen wird auf die entsprechende Literatur verwiesen [Vogt92, OT92].

2.2.1 Die Struktur des Protons

Die Quantenfeldtheorie setzt den theoretischen Rahmen für die Einführung von Strukturfunktionen in die Theorie der Elementarteilchen [LB]. Sie beschreibt beispielsweise die tief-inelastische inklusive ep -Streuung, $e[p_e] + p[p] \rightarrow e[p_e'] + X[p_X]$, als Austausch eines virtuellen Photons mit dem Impuls $q = p_e - p_e'$ und der invarianten Masse $q^2 < 0$. Dessen punktförmige Kopplung an das Elektron ist wohlbekannt und geht über den Tensor

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Tr}(\not{p}_e \gamma_\mu \not{p}_e' \gamma_\nu) \quad (2.3)$$

in den inklusiven Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{2\pi}{p_e p_e'} \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 L_{\nu\mu} \mathcal{W}^{\mu\nu} \quad (2.4)$$

ein. Der Hadrontensor $\mathcal{W}^{\mu\nu}(p, q)$ enthält die vollständige Information über die inklusive Kopplung des Photons an das Proton. Das Photon vermittelt eine paritätserhaltende Wechselwirkung, außerdem ist die Hermitizität des Übergangstromes und relativistische Invarianz zu fordern. Diese Symmetrien gestatten dann nur noch bestimmte Kombinationen der beiden (unabhängigen) Impulse q und p im Hadrontensor, die mit gewissen Faktoren gewichtet werden. Diese Strukturfunktionen (W_i) hängen als lorentz-invariante Größen nur von entsprechenden Kombinationen der 4^{er} -Impulse, wie zum Beispiel

$$Q^2 = -q^2 > 0 \\ \nu = p \circ q,$$

ab. Man erhält schließlich

$$\mathcal{W}_{\mu\nu} = W_1^T(\nu, Q^2) \left(e^{\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}} - g_{\mu\nu} \right) + \frac{W_2^T(\nu, Q^2)}{m_p^2} \left(p_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right). \quad (2.5)$$

Diese Form des Hadrontensors führt nach Verjüngung mit dem Leptontensor gemäß Gl.(2.4) zu einer entsprechenden Zerlegung der Wirkungsquerschnitte. Die Strukturfunktionen können dann experimentell aus diesen bestimmt werden.

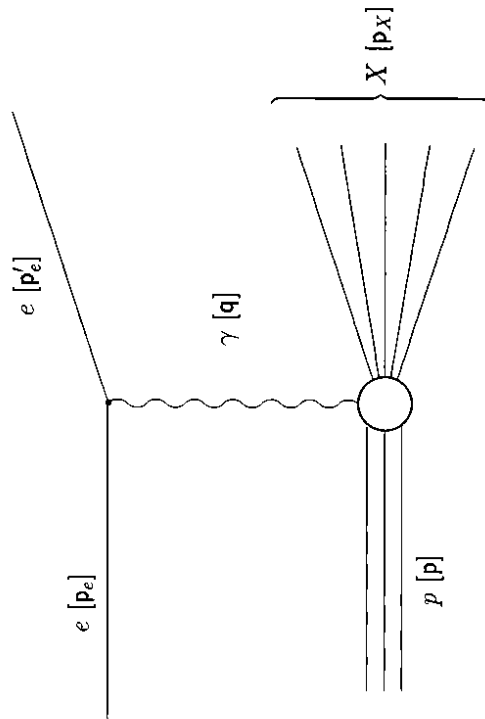


Bild 2-1: Inklusive ep -Streuung.

Dieser Ansatz parametrisiert die im Experiment gemessenen Wirkungsquerschnitte in Übereinstimmung mit allgemeinen Symmetrien. Eine Theorie elementarer Teilchen muß aber nach eventuellen Bausteinen der Hadronen und ihren Wechselwirkungen untereinander als Ursache für die experimentellen Befunde suchen. Sie sollte über $GI(2-5)$ hinaus die Strukturfunktionen in Beziehung zu den Eigenschaften dieser Konstituenten setzen können. Ein entsprechender Ansatz ist das **Parton Modell** nach Feynman und Bjorken[BjP69,Alt82,LB]. Es geht davon aus, daß sich Hadronen im Limes

$$\nu, Q^2 \rightarrow \infty \quad \Lambda \quad x \approx \frac{Q^2}{2\nu} \text{ endlich}$$

mit

$$\begin{aligned} n_p W_1^p(\nu, Q^2) &\longrightarrow \mathcal{F}_1(x) \\ \frac{\nu}{m_p} W_2^p(\nu, Q^2) &\longrightarrow \mathcal{F}_2(x) \end{aligned} \quad (2-6)$$

(*infinite momentum frame*) als *inkohärente Überlagerung masseloser punktförmiger* und insbesondere *freier Fermionen* beschreiben lassen. Diese „Partonen“ (i) haben gewisse unabhängige Impulsverteilungen $f_i^H(x)$ im Hadron H , so daß die hadronischen Wirkungsquerschnitte als gewichtete Summen über die partonischen Beiträge darstellbar sind. Schematisch ist dann

$$d\sigma_{eH} = \sum_{i/H} d\sigma_{ei} \otimes f_i^H. \quad (2-7)$$

$d\sigma_{ei}$ kann per Störungstheorie bestimmt werden. Das Faltungssymbol \otimes deutet an, daß noch über innere kinematische Freiheitsgrade zu integrieren ist.

Diese Beschreibung kann physikalisch nur dann Erfolg haben, wenn die Streuung des Photons am Parton hinreichend „hart“ ist. Sie muß auf so kurzen Zeitskalen stattfinden, daß eine Rückkopplung mit den nicht am harten Streuprozess teilnehmenden Partonen, d. h. den Verteilungen f_j^H , vernachlässigt werden kann². Diese **Impulsapproximation** findet sich in anderen Formulierungen in vielen Bereichen der Physik wieder, z. B. als Franck-Condon-Prinzip in der Molekülspektroskopie. All diese Näherungen sind Varianten eines allgemeineren Modells, in dem die für den jeweiligen Prozess relevanten Teile eines physikalischen Systems im Vergleich zu den Anregungsenergien nur schwach gebunden sind.

Im Parton-Modell findet man einen Zusammenhang zwischen den Strukturfunktionen und den Partondichten f_i^p von der Form

$$\mathcal{F}_E^p \propto \sum_k a_{ik} f_k^p \otimes d\sigma_{point}. \quad (2-8)$$

$d\sigma_{point}$ beschreibt den (Teil-)Prozeß $i + \gamma^* \rightarrow i$, und ist in der niedrigsten Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_{em})$ eine δ -Funktion. Damit entfällt das Integral in $GI(2-8)$ und es bleiben die wohlbekanntesten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} 2x \mathcal{F}_2^i(x) \\ \mathcal{F}_2^i(x) \end{aligned} \right\} = \sum_j x (q_j^i(x) + \bar{q}_j^i(x)), \quad (2-9)$$

also die Callan-Gross-Relation. Eine explizite Abhängigkeit von Q^2 tritt erst bei Berücksichtigung der QCD-Korrekturen (*Bild (2-2)*) auf. Q charakterisiert den maximalen Transversalimpuls k_{\perp} der an γ^* koppelnden auslaufenden Partonen. Die Abhängigkeit der Parton-Verteilungen

²eine Rückkopplung würde die Universalität der Partondichten zerstören

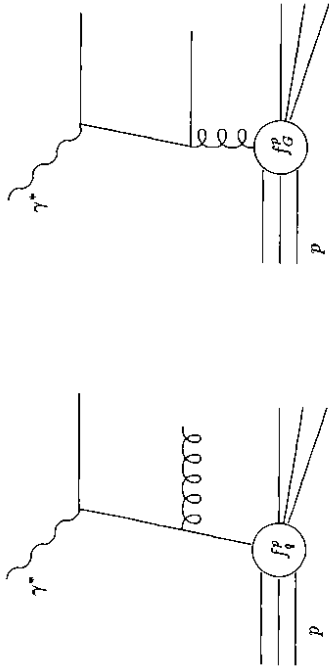


Bild 2-2: Einige erste Strahlungskorrekturen der Parton-Dichten im Proton.

von Q^2 im Bereich nicht zu kleiner x wird durch die Altarelli-Parisi-Entwicklungsgleichungen [AP77] ($t \equiv \log(Q/Q_0)^2$)

$$\frac{\partial}{\partial t} f_i(x, t) = \sum_j \int \frac{dy}{y} P_{ij}\left(\frac{x}{y}\right) f_j(y, t), \quad (2-10)$$

zusammen mit aus dem Experiment zu entnehmenden Randbedingungen bei Q_0^2 , beschrieben. Die Splittingfunktionen lassen sich nach $\alpha_s(\mu)$ entwickeln[Alt82], es ist $P_{ij} = \alpha_s P_{ij}^1 + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$. Bei Abschalten der starken Wechselwirkung verschwinden die partonischen P_{ij} (zwangsläufig), man erhält das Parton-Modell mit von t unabhängigen f_k .

Die zu $GI(2-8)$ führende anschauliche Analyse in [Alt82] zeigt auch den Weg zu Strukturfunktionen in höheren Ordnungen der QCD. Man erhält sie durch Berücksichtigung von QCD-Strahlungskorrekturen in $d\sigma_{point}$, also Diagrammen der Form in *Bild (2-2)*. Diese Beiträge sind in bestimmten Randbereichen des Phasenraumes singular, wenn z. B. bei einer parallelen Abstrahlung eines Gluons von einem Quark eine innere Linie des Graphen *on-shell* geht. In diesem Fall erhält ein eigentlich als virtuell anzusehendes, masseloses Quark eine endliche Lebensdauer, so daß Teile des „harten“ Streuprozesses zeitlich entkoppeln. Die Zeit, die das Gluon nach seiner Abstrahlung benötigt, um frei und isoliert im Phasenraum zu sein, ist eine typische Skala für den Zerfall $q \rightarrow q + G$. Liegt sie im Bereich der (großen) Zeitskalen der strukturbildenden Wechselwirkung im Proton, ist also der transversale Impuls der Zerfallsprodukte hinreichend klein, so kann die Abstrahlung des Gluons als Strahlungskorrektur eben dieser Struktur angesehen werden. Es muß aber auf jeden Fall sichergestellt sein, daß die interne Aufteilung eines Streuprozesses in einen perturbativen und einen zu parametrisierenden Anteil eindeutig ist. Der harte Streuprozess muß sich auf einer großen Energieskala $M \gg \Lambda$ abspielen, auf der alle für den parametrisierten Anteil relevanten Beiträge vernachlässigt werden können. Auch in die Parton-Dichten muß somit die Skala der partonischen Prozesse eingehen. Nur die korrekte Kombination von perturbativem und phänomenologischem Anteil ist physikalisch relevant und unabhängig von M . Dies ist, schematisch, der Inhalt der sogenannten *Faktorisierungstheoreme*, die die Situation

im QPM auf den Fall eingeschalteter starker Wechselwirkung verallgemeinern. In höheren Ordnungen der Störungstheorie ist also zu *definieren*, welcher Streuprozess nun noch der inneren Struktur der physikalischen Teilchen und welcher der harten Wechselwirkung zuzuschreiben ist. Die Verwendung eines *einheitlichen* Faktorisierungsschemas für alle Teilbereiche des Streuprozesses ist speziell für die Aussagekraft der NLO Ergebnisse *zwingend* notwendig. In Kap.[3] wird dieser Punkt weiter vertieft. Wie hängt nun die Faktorisierungsskala M mit der Masse Q der „Sonde“ γ^* zusammen, von der die in tief-inelastischer ep -Streuung gemessenen Strukturfunktionen abhängen? *A priori* sind beides voneinander verschiedene und auch unabhängige Größen. Die einzige große typische Energie ist hier aber die transversale Energie der Partonen im Endzustand, $E_T^{(jet)}$. Sowohl Q als auch M müssen also im Bereich von E_T liegen, da sie beide den harten Endzustand charakterisieren. Üblicherweise wird deswegen $f_i(M) = f_i(\xi E_T) \equiv f_i(Q)$ gesetzt, wobei $\xi \approx \mathcal{O}(1)$ sein sollte. Da die Faktorisierungsskala nur die Organisation von Beiträgen innerhalb eines physikalischen Prozesses parametrisiert, darf der Wirkungsquerschnitt letztendlich nicht von dem Verhältnis von Q zu M , also ξ , abhängen.

2.2.2 Die Struktur des Photons

Als Eichboson der elektromagnetischen Wechselwirkung ist das Photon primär ein elementares Teilchen, das über seine Kopplung an geladene Fermionen — i.e. Quarks — *direkt* an harten Streuprozessen teilnehmen kann. Der störungstheoretische Teil solcher Prozesse wird durch Feynman-Diagramme wie in *Bild (2-3a)* beschrieben. Bei genügender Energie gestattet diese Kopplung Fluktuationen des Photons in gebundene $(q\bar{q})$ -Systeme, so daß es sich mit einer

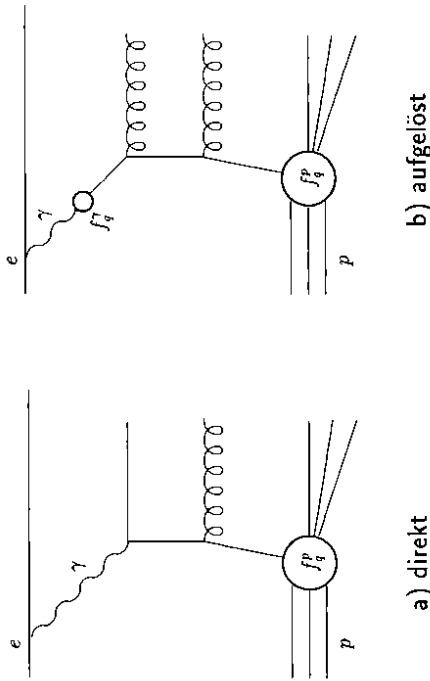


Bild 2-3: Wechselwirkungen des Photons.

gewissen Wahrscheinlichkeit auch wie ein Hadron verhält. Im sogenannten Vektor-Meson-Dominanz-Modell wird eine empirische, effektive Kopplung des Photons an Mesonen mit deren hadronischer Struktur zu einer des Photons verknüpft. Im Bereich relativ kleiner Energien um 1 GeV erklärt dieses Modell experimentelle Daten recht gut[BW85], so daß dem Photon tatsächlich eine hadronische Struktur zugeschrieben werden kann. Den Rahmen hierfür bilden wieder (universelle) Strukturfunktionen und Parton-Verteilungen. In vollständiger Analogie zum Proton können Strukturfunktionen des Photons in tiefinelastischer $\gamma\gamma^*$ -Streuung definiert werden. Sie lassen sich z.B. an e^+e^- -Beschleunigern untersuchen, bisher liegen aber nur Daten über $\mathcal{F}_2(x, M^2)$ vor. Diese zeigen einen Übergang zwischen zwei verschiedenen Verhaltensweisen. Bei kleineren M^2 ($\equiv Q^2$) ist die x -Abhängigkeit von $\mathcal{F}_2(x, M^2)$ vergleichbar mit derjenigen von Hadron-Strukturfunktionen, wie zum Beispiel $\mathcal{F}_2^p(x, M^2)$. Mit wachsender Skala entwickelt sich aber um $x \approx 0.8$ ein Maximum von $\mathcal{F}_2(x, M^2)$, das auf den steigenden Einfluß der punktförmigen Kopplung des Photons an ein fast reelles Quark-Antiquark-Paar zurückzuführen ist. Zusätzlich zum hadronischen Anteil (VMD) müssen die Strukturfunktionen des Photons also auch diesen asymptotisch dominanten, punktierten Beitrag des $(\gamma q\bar{q})$ -Vertex enthalten. Aufbaue und auf Arbeiten von Walsh & Zerwas[WZ73] und Kingsley[Kin73] zeigte Witten[Wit77], daß dieser Anteil in führender Ordnung QCD berechnet werden kann und eine skalenverletzende $1/\alpha_s(M^2)$ -Abhängigkeit enthält. Bardeen & Buras[BB79] bestätigten dieses Resultat in NLL³, so daß einige Zeit die Hoffnung bestand, neben der M^2 -Entwicklung auch die absoluten Werte von $\mathcal{F}_2(x, M^2)$ berechnen zu können. Damit hätte ein direkter Zugriff auf die Massenskala der QCD, Λ_{QCD} , als einzig verbliebenem freien Parameter bestanden. Diese Aussicht, in Verbindung mit dem großen Mangel an experimentellen Daten über $\mathcal{F}_2^p(x, M^2)$, motivierte die Bestimmung entsprechender *asymptotischer* Parton-Verteilungen im Photon ([Nic80], [DO82]). Dieser Anteil divergiert für $x \rightarrow 0$, und der Grad der Singularität nimmt in höheren Ordnungen zu[Ros83]. Die vollständige $\mathcal{F}_2^p(x, M^2)$ ist aber für $x \rightarrow 0$ endlich, da die im hadronischen Anteil implizit enthaltenen Vertexkorrekturen die IR/C-Singularitäten der zur Bestimmung des punktierten Anteils verwendeten Leiterdiagramme kompensieren. Der formal subdominante hadronische Anteil muß also bei der Ableitung von Parton-Verteilungen im Photon stets berücksichtigt werden[GR83, Fra83]. Die deswegen erforderliche Anpassung an experimentelle Daten, zur Festlegung der Randbedingungen der Evolutionsgleichungen bei einem gewählten Q_0^2 , verringert den Einfluß der QCD-Skala. Zudem stellt sich nun wieder, wie schon beim Proton, die Frage nach geeigneten Startpunkten der Q^2 -Entwicklung. Auch ist eine Modellierung des Gluon-Anteils notwendig. Das Fehlen geeigneter Summenregeln für das Photon läßt hier Spielraum für eine Reihe recht verschiedener Parametrisierungen von $G^p(x, Q^2)$, vgl. dazu die entsprechende Diskussion in Abschnitt [2.3].

Das elementare Photon ist ein Teil des physikalischen Photons. Die Evolutionsgleichungen für Parton-Verteilungen können somit für das Photon formal übernommen werden, wenn es selbst als sein eigenes „Parton“ berücksichtigt wird[dW179]. In einer formalen Vektorschreibweise führt dies, wieder mit $t \equiv \log(Q/Q_0)^2$, auf

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q(x, Q^2) \\ \bar{q}(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \\ \Gamma(x, Q^2) \end{pmatrix} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} P_{qq} & P_{qg} & P_{gq} & P_{gg} \\ P_{q\gamma} & P_{q\gamma} & P_{g\gamma} & P_{g\gamma} \\ P_{Gq} & P_{Gq} & P_{GG} & P_{GG} \\ P_{\gamma q} & P_{\gamma q} & P_{\gamma G} & P_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(\frac{x}{y}, Q^2) \\ \bar{q}(\frac{x}{y}, Q^2) \\ G(\frac{x}{y}, Q^2) \\ \Gamma(\frac{x}{y}, Q^2) \end{pmatrix} \cdot (y, Q^2) \quad (2-11)$$

³Ihre Ableitung enthält einen Fehler in der γG -Spaltungsfunktion, der erst vor kurzer Zeit bemerkt wurde[GRV92γ, FoP92]. Er beeinflusst aber nicht die grundsätzliche Richtigkeit ihrer Argumentation.

Üblicherweise beschränkt man sich in der elektromagnetischen Wechselwirkung auf die niedrigste Ordnung, $\mathcal{O}(\alpha)$. Gluon- und (Anti-)Quark-Verteilungen im Photon sind dann proportional zu α , ebenso wie die Splitting-Funktionen des Photons P_γ und $P_{\gamma\gamma}$. Da der führende Beitrag zu $P_{\gamma\gamma}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ist, folgt

$$\Gamma(x, Q^2) = \delta(1-x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2-12)$$

Damit kann $\Gamma(x, Q^2)$ aus den Entwicklungsgleichungen $GI(2-11)$ herausgenommen werden. Nach Transformation auf die (Non-)Singlett-Verteilungen [GR83]

$$\begin{aligned} \Sigma(x, Q^2) &= \sum_f (q_f(x, Q^2) - \bar{q}_f(x, Q^2)) \\ q_{NS}(x, Q^2) &= \sum_f (e_f^2 - (e_f^2)) (q_f(x, Q^2) - \bar{q}_f(x, Q^2)) \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$\text{mit} \quad (e_f^2) = \frac{1}{N_f} \sum_f e_f^2$$

erhält man die wohlbekanntesten, infolge der unvollständigen Abkopplung von $\Gamma(x, Q^2)$ inhomogenen, Evolutionsgleichungen der Parton-Verteilungen im Photon

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q_{NS}(x, Q^2) \\ \Sigma(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_{NS}(x, Q^2) \\ k_\Sigma(x, Q^2) \\ k_G(x, Q^2) \end{pmatrix} \\ &+ \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} P_{NS} & 0 & 0 \\ 0 & P_{qq'} & P_{qG} \\ 0 & P_{Gq} & P_{GG} \end{pmatrix} (y, Q^2) \circ \begin{pmatrix} q_{NS}(x, Q^2) \\ \Sigma(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-14)$$

wobei $k_i \equiv P_{i\gamma}$ der üblichen Notation entspricht. Die Splittingfunktionen P_{ij} bzw. k_i können in QCD und QED berechnet werden, so daß auch die modifizierten Altarelli-Parisi-Gleichungen im Mellin-Raum analytisch lösbar sind. Die bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ für die Parton-Dichten relevanten Beiträge sind

$$\begin{aligned} k_i(x, Q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} k_i^{(0)}(x) + \frac{\alpha\alpha_s(Q)}{(2\pi)^2} k_i^{(1)}(x) \\ P_{ij}(x, Q^2) &= \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} P_{ij}^{(0)}(x) + \left(\frac{\alpha_s(Q)}{2\pi}\right)^2 P_{ij}^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (2-15)$$

Man sieht hieran sofort, daß die AP-Gleichungen des Photons im Quark-Parton-Modell ($\alpha_s \rightarrow 0$) wegen des auch in diesem Limes verbleibenden $k_i^{(0)}$ eine logarithmische Abhängigkeit der Quark-Dichten q_i von Q^2 beschreiben, die im Gegensatz zum Skalenverhalten des Protons steht.

Drees & Grassie [DG85] verwendeten als erste die volle Lösung von $GI(2-14)$ zur Bestimmung von Parton-Verteilungen im Photon in führender Ordnung. Auf diese Weise wird die oben beschriebene problematische Trennung des hadronischen VMD- vom asymptotic point-like Beitrag in der Q^2 -Entwicklung vermieden. Ihre Parametrisierung des Quark-Anteils ist dementsprechend die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen $GI(2-14)$ und einer Lösung der zugehörigen homogenen, also hadronischen Evolutionsgleichung. In niedrigster Ordnung ist wegen der nicht vorhandenen γG -Kopplung $k_G^{(0)} = 0$, also der Gluon-Anteil von der typischen, rein hadronischen Form

$$xG_\gamma(x) \propto x^A(1-x)^B$$

mit an die Daten zu fittenden Parametern $A(Q^2)$ und $B(Q^2)$. Drees und Grassie wählten $Q_0 = 1\text{GeV}$ und paßten ihre Parametrisierungen an PLUTO-Daten von $\mathcal{F}_2^{\gamma}(x, M_T^2)$ bei $Q^2 = 5.9\text{GeV}^2$ an. Bis vor kurzer Zeit war dies die einzige zur Verfügung stehende Parametrisierung der Parton-Dichten im Photon für nicht-asymptotisch hohe Energiebereiche. Eine für den Gebrauch bei HERA notwendige Aktualisierung wurde 1991 von H. Abramowicz, K. Charchula und A. Levy durchgeführt[LAC91]. Sie verwendeten den Ansatz von [DG85], konnten aber nun auf einen bedeutend größeren Vorrat an experimentellen Daten zur Bestimmung der Fit-Parameter zurückgreifen. Diese Daten zeigen, daß sich $\mathcal{F}_2^{\gamma}(x, M_T^2)$ im Bereich von $Q \approx 1\text{GeV}$ durch VMD-Annahmen beschreiben läßt, aber bereits bei $Q^2 \approx 5\text{GeV}^2$ im Bereich großer x eine klare Signatur der punktförmigen γq -Kopplung trägt. Die Diskussion, ob dieser Übergang allein mit der durch die AP-Gleichungen beschriebenen logarithmischen Abhängigkeit von M_T beschrieben werden kann, dauert an. Sie findet ihren Ausdruck in den verschiedenen Startpunkten Q_0^2 der Entwicklungen. Um dieser Unsicherheit Rechnung zu tragen bestimmten Levy et al. zusätzlich Parton-Verteilungen mit einem etwas höheren Anfangswert $Q_0 = 2\text{GeV}$.

Die deutlich verbesserte experimentelle Kenntnis der Photon-Struktur erlaubt nun auch die Bestimmung vernünftiger Parametrisierungen in der nächsthöheren Ordnung in $\alpha_s(Q)$. Hier liegen mittlerweile drei Versionen vor ([GRV92 γ , GS92c, FoP92]). Die zum Teil sehr großen quantitativen Unterschiede spiegeln die durchaus kontroversen Ansätze wider. Die Manchester-Gruppe um J.K. Storrow[GS92c] startet bei $Q_0^2 = 5.3\text{GeV}^2$ um den eben beschriebenen schnellen Übergang in $\mathcal{F}_2^{\gamma}(x, M_T^2)$ von rein hadronischer zu eher punktförmiger Wechselwirkung auszu-schließen. Dagegen entschied man sich in Dortmund gerade für ein sehr kleines $Q_0^2 = 0.25\text{GeV}^2$, um dort mit einem reinen VMD-Ansatz für Valenz-Quarks und Gluonen zu beginnen. Der Quark-See wird dann im Laufe der Q^2 -Entwicklung durch Strahlungskorrekturen dynamisch erzeugt[GRV92 γ]. Ein äquivalenter Ansatz im Proton [GRV92p] beschreibt NMC-Daten[GRV93] und H1-Daten[H1.93b] im Bereich kleiner x recht gut. Fontannaz & Pilon gehen einen sehr ähnlichen Weg[FoP92]. Alle Ansätze beschreiben die Daten im Bereich nicht zu kleiner Q^2 recht gut, allerdings werden einige Abweichungen der Parametrisierungen von GRV zu TPC-Daten unterhalb von $Q^2 \approx 3\text{GeV}^2$ sehr unterschiedlich bewertet [VS91, Vogt92, Sto92]. Es ist dabei zu beachten, daß ein Startpunkt $Q_0 \approx 1\text{GeV}$ für die Evolution $GI(2-14)$ zusammen mit einem reinen VMD-Ansatz bei Q_0 $\mathcal{F}_2^{\gamma}(x, M_T^2)$ bei höheren $Q \gg Q_0$ unterschätzt. Ein wesentlich kleineres Q_0 ist also erforderlich, damit sich der punktarartige Anteil in Übereinstimmung mit den vorliegenden Daten entwickeln kann. Prinzipiell ist aber nicht zu erwarten, daß $GI(2-14)$ allein die Entwicklung der Parton-Dichten für $Q < 1\text{GeV}$ beschreiben kann. Einen Ausweg aus diesem Konflikt kann nur eine ausführliche experimentelle Untersuchung von $\mathcal{F}_2^{\gamma}(x, Q_0^2)$ mit einem Q_0 im gesicherten Geltungsbereich der Störungstheorie zeigen. Darüber hinaus müssen hinreichend viele Daten bei weiteren $Q > Q_0$ vorliegen, um auch die verbleibenden Parameter als Funktion von Q fitten zu können. Ein entsprechender Ansatz ist dann experimentell gesichert und muß nicht mehr auf Modellvorstellungen zum nicht-perturbativen Bereich zurückgreifen.

Ein weiterer Unterschied ist die Verwendung eines neuen Faktorisierungsschemas von Glück et al. bei der Parametrisierung der Parton-Dichten in der nächsthöheren Ordnung in $\alpha_s(Q^2)$. Die Unterschiede zwischen diesem \overline{MS} - und dem von Gordon & Storrow bzw. von Fontannaz & Pilon benutzten, wohlbekannteren \overline{MS} -Schema [BDDM78] zur Behandlung von kollinearen Singularitäten im Anfangszustand des harten Streuprozesses werden im Zusammenhang mit den NLO-Wirkungsquerschnitten diskutiert. Sie zeigen, daß in höheren Ordnungen der Unterschied zwischen direkter und aufgelöster Wechselwirkung des Photons nicht mehr an verschiedenen

Feynman-Diagrammen festzumachen, sondern - z.B. über kinematische Cuts - zu definieren ist.

2.3 Jets in LO Photoproduktion

Im Experiment werden in benachbarte Raumwinkel gestreute Teilchen zu Jets zusammengefaßt. Dabei wird iterativ vorgegangen, d.h., von einer Starkkonfiguration (*initial cluster*) ausgehend werden stabile Fixpunkte der Zuordnung von Teilchen zu einem Jet gesucht. Details dieser Algorithmen sind nicht von der Theorie fest vorgegeben, sondern im wesentlichen durch die Forderung nach Zweckmäßigkeit motiviert. Im Anh.C werden einige der gebräuchlichen Jet-Definitionen zusammengestellt und diskutiert. Der Ausgangszustand eines harten QCD-Prozesses in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ enthält (nur) zwei im Phasenraum isolierte Partonen. Gibt man sich also mit der führenden Ordnung Störungstheorie zufrieden, so muß man je eines dieser beiden *farbig*en Teilchen mit einem Jet identifizieren. Dies wirkt natürlich konzeptionelle Probleme auf. Sowohl Farbneutralität als auch die ganzzahlige elektromagnetische Ladung der beobachteten Jets verlangen eine Hadronisierung der Partonen. Diese Prozesse spielen sich auf Skalen im Bereich von Λ_{QCD} ab, und können deswegen nur in Form phänomenologischer Modelle berücksichtigt werden. Die Fragmentation von Quarks und Glukonen kann, und muß, auch nachweisbare Teilchen erzeugen, die außerhalb des gewählten Jet-Radius um den Impuls des Schwerpunktsystems der Zerfallsprodukte liegen. Die Zuordnung der Jet-Impulse zu den ursprünglichen Parton-Impulsen ist also nicht trivial.

Diese Widersprüche kann die Störungstheorie auch in höheren Ordnungen *prinzipiell* nicht auflösen. Es ist aber notwendig, wenigstens elementare Eigenschaften der im Experiment betrachteten Jets bereits auf der Ebene der Partonen im harten Streuprozess reproduzieren zu können. Dies gelingt erst in der nächsten Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$, dann aber bereits überraschend(?) gut. Bleiben wir vorerst aber noch in LO.

Läßt man die eben angerissenen Probleme beiseite, so sind Jet-Wirkungsquerschnitte auf Born-Niveau einfach Parton-Wirkungsquerschnitte ohne Identifizierung der Teilchen im Endzustand. Der vollständig differenzielle Wirkungsquerschnitt für die inklusive Erzeugung eines Jets in Photoproduktion bei HERA ist also [Owe87]

$$d\sigma(e + p \rightarrow Jet + X) = f_a^e(x_a) dx_a \sum_{a/\gamma} f_a^p(x_{a/\gamma}) dx_{a/\gamma} \sum_{b/p} f_b^p(x_b) dx_b \sum_{c,d} d\sigma(a + b \rightarrow c + d), \quad (2-16)$$

wobei die Abhängigkeit der Parton-Dichten von ihrer jeweiligen Faktorisierungsskala M unterdrückt ist. Soll der Impuls des aus dem Photon stammenden Partons a gemäß

$$x_a \equiv \frac{p_a}{p_e} = x_{a/\gamma} x_\gamma \quad (2-17)$$

auf die Energie des einlaufenden Elektrons normiert werden, so lautet Gl.(2-16)

$$d\sigma(e + p \rightarrow Jet + X) = f_a^e\left(\frac{x_a}{x_\gamma}\right) dx_a \sum_{a/\gamma} f_a^p(x_{a/\gamma}) dx_{a/\gamma} \sum_{b/p} f_b^p(x_b) dx_b \sum_{c,d} d\sigma(a + b \rightarrow c + d). \quad (2-18)$$

Damit ist auch $d\sigma_{pp}$ aus Gl.(2-1) beschrieben. Der über die Spin- und Farbfreiheitsgrade summierte, bzw. im Anfangszustand gemittelte, Parton-Parton-Wirkungsquerschnitt ist

$$d\sigma(a + b \rightarrow c + d) = \frac{1}{2s} \sum_i |M_{ab \rightarrow cd}^{(i)}|^2 \prod_{i=c,d} \left(\frac{E_i}{2\pi} \right)^3 dE_i^{(i)} d\Phi^{(i)} d\eta^{(i)} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i). \quad (2-19)$$

$P_{i(j)}$ ist die Summe der auf Parton-Ebene ein(aus)laufenden 4^e -Impulse. Nach Auswertung der Energie-Impuls-Erhaltung und der Zylindersymmetrie um die Strahlachse erhält man zum Beispiel

$$\frac{d\sigma}{dE_T d\eta_L} = \sum_{abcd} \int_{x_a}^1 \int_{x_b}^1 \frac{dx_\gamma}{x_\gamma} \frac{2\pi}{E_T S} f_a^e(x_\gamma) f_a^p\left(\frac{x_a}{x_\gamma}\right) f_b^p(x_b) \frac{\alpha_s(\mu)^2}{4C_a C_b} A_{ab,cd}^{(0)}(s, t, u) \quad (2-20)$$

und den nach dem Impulsanteil $x_{i/\gamma}$, des am harten Streuprozess teilnehmenden Partons i im Photon differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$x_{i/\gamma} \frac{d\sigma}{dx_{i/\gamma}} = \sum_{abcd} \int_{x_a}^{x_{i/\gamma}} dx_\gamma \int_{x_b}^{x_{i/\gamma}} dx_T \int_{x_c}^{x_{i/\gamma}} dx_T \int_{x_d}^{x_{i/\gamma}} dx_T \Theta(1 - x_\gamma) \Theta(1 - x_b) \quad (2-21)$$

$$\frac{x_T}{32\pi s} f_a^e(x_\gamma) f_a^p\left(\frac{x_a}{x_\gamma}\right) f_b^p(x_b) f_c^p(x_c) f_d^p(x_d) \frac{\alpha_s(\mu)^2}{4C_a C_b} A_{ab,cd}^{(0)}(s, t, u).$$

Die quadrierten Matrixelemente $A_{i,j,k,l}$ hängen nur von lorentzinvarianten Kombinationen der 4^e -Impulse der Partonen ab. Dies sind üblicherweise die Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = 4p_a p_b = x_a x_b S \\ t &= (p_a - p_j)^2 = -2p_a E_T e^{-\eta_j} = x_a T \\ u &= (p_b - p_j)^2 = -2p_b E_T e^{+\eta_j} = x_b U, \end{aligned}$$

die unter Vernachlässigung der Quarkmassen die Bedingung

$$s + t + u = 0$$

erfüllen. Die Definitionen der in dieser Arbeit verwendeten kinematischen Variablen sind im Anh.B noch einmal zusammengefaßt. Man beachte, daß f^r nur noch über die Faktorisierungsskala M_r als Funktion von E_T im Integranden von Gl.(2-21) steht. $x_T^{min} = E_T^{min}/2\sqrt{S}$ begrenzt den der Störungsrechnung zugänglichen Bereich, und liegt typischerweise um $x_T^{min} \approx 0.01$. In Gl.(2-21) wird über die (Pseudo-)Rapiditäten η, η' der beiden auslaufenden Partonen integriert, so daß man

$$\begin{aligned} x_\gamma &= \frac{x_T}{2x_{i/\gamma}} (e^\eta + e^{\eta'}) \\ x_b &= \frac{x_T}{2} (e^{-\eta} + e^{-\eta'}). \end{aligned}$$

erhält. Der Faktor $1/4C_a C_b$ berücksichtigt Spin- und Farbmittelung im Anfangszustand, es ist

$$C_i = \begin{cases} N_c & , i \equiv Quark \\ V_c = N_c^2 - 1 & , i \equiv Gluon \\ 1 & , i \equiv Photon \end{cases} \quad (2-22)$$

mit $N_c = 3$ Farben. Wird in dimensionaler Regularisierung die Zahl der Spinzustände des Gluons zu $s_G = 2(1 - \epsilon)$ gewählt, so ist $2C_G$ natürlich durch $s_G C_G$ zu ersetzen. Die Funktionen $A_{ab,cd}$ sind definiert über [ES86]

$$\sum |M_{ab \rightarrow cd}|^2 = \frac{\alpha_s(\mu)^2}{4C_a C_b} A_{ab,cd}^{(0)}(s, t, u) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \quad (2-23)$$

Man beachte, daß

$$A_{ab,cd}^{(0)}(s, t, u) = A_{ab,dc}^{(0)}(s, u, t) = A_{ba,cd}^{(0)}(s, u, t) \quad (2-24)$$

ist. Eine erste vollständige Liste der quadrierten Matrixelemente in niedrigster Ordnung QCD findet sich bei Combridge, Kripfganz & Rauff[CKR77], eine Zusammenfassung unter Einbeziehung des Photons bei Owens[Owe87].

Den Beitrag der direkten Wechselwirkung des Photons erhält man einfach durch die Substitution

$$f_a^-(x_{\gamma/\gamma}, M_T^2) \rightarrow f_a^+(x_{\gamma/\gamma}, M_T^2) \equiv \delta(1 - x_{\gamma/\gamma}) \quad (2-25)$$

in der führenden Ordnung gemäß Gl.(2-12). Auch wenn eine Integration über $x_{\gamma/\gamma}$ nicht notwendig sein sollte, wie zum Beispiel in Gl.(2-26), ist die δ -Funktion natürlich über ein gewisses Intervall $\Delta x = 2\epsilon$ zu verschmieren. Sollen die Beiträge von direktem und aufgelöstem Photon zu $d\sigma/dx_{\gamma/\gamma}$ unmittelbar miteinander verglichen werden, so ist auch Gl.(2-21) in gebogener Form zu betrachten. Um ein sinnvolles Resultat zu erhalten, ist diese Intervallbreite den experimentellen Bedingungen anzupassen. Mit der Definition

$$\bar{\sigma}_{dir} \equiv \sum_{bc} \int_{x_{\gamma/\gamma}^{min}}^{dx_T} \int \int d\eta d\eta' \Theta(1 - x_\gamma) \Theta(1 - x_b)$$

$$\frac{x_T}{32\pi s} f_a^-(x_\gamma) f_b^+(x_b, M_p) \frac{\alpha\alpha_s(\mu)}{4C_F C_b} \mathcal{A}_{\gamma b, cd}^{(0)}(s, t, u),$$

$$\text{und} \quad x_\gamma = \frac{x_T}{2}(e^\eta + e^{\eta'})$$

ist das direkte Analogon zu Gl.(2-21)

$$\frac{d\sigma}{dx_{\gamma/\gamma}} = \bar{\sigma}_{dir} \delta(1 - x_{\gamma/\gamma}). \quad (2-26)$$

$d\sigma/dx_{\gamma/\gamma}$ ist also das mit dem Parton-Parton-Wirkungsquerschnitt gewichtete Spektrum der Partonen im Photon, und deswegen vom theoretischen Standpunkt aus gesehen zur Bestimmung von Parton-Verteilungen geeigneter als Gl.(2-20). Im Experiment muß allerdings mittels einer Analyse des gesamten Endzustandes der Partonimpuls $x_{\gamma/\gamma, p_\gamma}$ rekonstruiert werden, so daß das Ergebnis potentiell von mehr Fehlerquellen beeinflusst werden kann als ein „einfacher“ inklusiver Jet-Wirkungsquerschnitt.

2-3.1 Vergleich von direktem und aufgelöstem Photon

Da in dieser Arbeit nur ein Teil der Eigenschaften des realen Photons betrachtet wird, muß zuerst geklärt werden, wo die Vernachlässigung der fehlenden Beiträge vertretbar erscheint. Den Zerfallsprodukten des Photons, bzw. des entsprechenden virtuellen Vektormesons, steht naturgemäß weniger Energie zur Verfügung als dem direkt wechselwirkenden Photon selbst. Insbesondere am weichen Ende des Spektrums können aber sehr viele Gluonen in den harten Streuprozess eingreifen, so daß das aufgelöste Photon bei HERA sehr effektiv partonische Ausgangszustände mit invarianten Massen im Bereich weniger GeV produzieren kann. Aus diesem Grund wird der Anteil des direkt wechselwirkenden Photons am *totalen* inklusiven Jet-Wirkungsquerschnitt eher gering sein. In Bild (2-4) ist der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{dE_T} = \int_{E_T^0 - \Delta E_T}^{E_T^0 + \Delta E_T} \frac{dE_T}{2\Delta E_T} \int d\eta_L \frac{d\sigma}{dE_T d\eta_L} \quad (2-27)$$

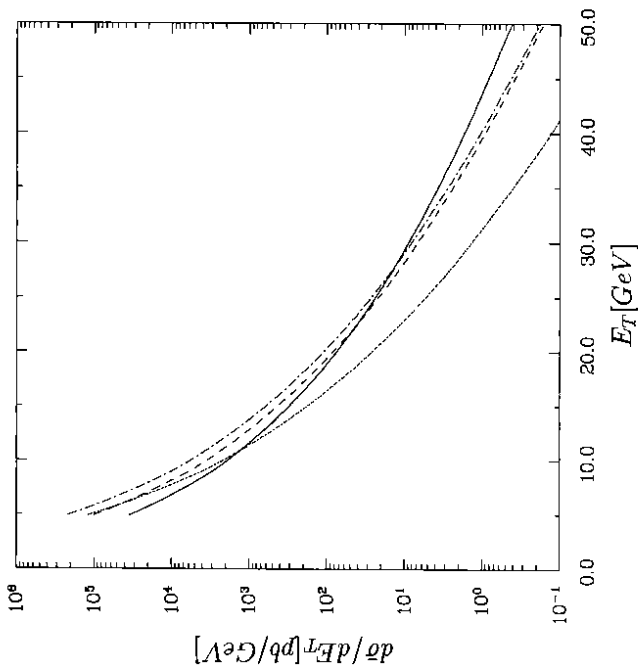


Bild 2-4: Direkt vs. resolved. E_T -Abhängigkeit.

Born-Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dE_T$ (Gl.(2-27)) für das direkte Photon (—) und den aufgelösten Anteil (---), dieser ist zusätzlich aufgeschlüsselt in den Beitrag der Quarks q_i (- · -) und der Gluonen G_γ (···) im Photon.

mit $\Delta E_T = 0.1 \text{ GeV}$ in LO aufgetragen. Faktorierungs- und Renormierungsskala sind gleich E_T gesetzt, es ist $p_s = 27 \text{ GeV}$ und $p_p = 820 \text{ GeV}$ ($\sqrt{s} = 298 \text{ GeV}$). Die Parametrisierungen der Parton-Dichten sind im Photon GRV(LO) und im Proton MT(SL), jeweils mit 4 aktiven Quarkflavours. Es wurde $\alpha_s(\mu)$ in 1-loop-Näherung gemäß Gl.(2-35) verwendet. Die E_T -Abhängigkeit spiegelt die Impulsverteilung der verschiedenen Partonen im Photon gut wieder. Das (sehr) weiche Gluon dominiert nur bei sehr kleinen $E_T \leq 5 \text{ GeV}$, das sehr harte elementare Photon macht oberhalb von $E_T \approx 45 \text{ GeV}$ mindestens $2/3$ des gesamten inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes aus. In einem mittlerem Bereich um $E_T \approx 14 \text{ GeV}$ ist der Anteil des semi-harten (anomalen) Quarks an der Summe aller drei Beiträge mit nicht ganz 50% maximal. In Tab.(2-1) sind für einige Werte von E_T die auf die Summe aller drei Beiträge normierten Anteile von G_γ , q_i und Γ_γ (\equiv direktes Photon) angegeben. Die Zahlen entsprechen denen in Bild (2-4).

E_T [GeV]	Γ_γ	G_γ	q_γ
5	0.14	0.47	0.40
7.5	0.20	0.36	0.44
10	0.25	0.29	0.46
12.5	0.30	0.24	0.47
15	0.33	0.20	0.47
20	0.41	0.14	0.45
25	0.47	0.11	0.42
30	0.52	0.08	0.40
35	0.57	0.06	0.37
40	0.62	0.05	0.33
45	0.66	0.04	0.30
50	0.70	0.03	0.27

Tabelle 2-1: Relative Anteile der Partonen im Photon ($\Gamma_\gamma \equiv$ direktes Photon) am Wirkungsquerschnitt Gl.(2-27) als Funktion der transversalen Jetenergie E_T . Details siehe Bild (2-4). (Abweichungen der Summe der drei Beiträge von 1 wegen Rundung möglich.)

In Bild (2-5) ist die Rapiditätsverteilung des doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnittes

$$\frac{d\sigma}{dE_T d\eta_L} = \int_{E_T - \Delta E_T}^{E_T + \Delta E_T} \frac{dE_T}{2\Delta E_T} \int_{\eta - \Delta\eta}^{\eta + \Delta\eta} \frac{d\eta_L}{2\Delta\eta} \frac{d\sigma}{dE_T d\eta_L} \quad (2-28)$$

mit $\Delta E_T = 0.1 \text{ GeV}$ und $\Delta\eta = 0.1$ bei $E_T = 25 \text{ GeV}$, also dem ungefähren Schnittpunkt des direkten mit dem aufgelösten Photon in Bild (2-4), aufgetragen. Alle weiteren Parameter sind wie in Bild (2-4). In Vorwärtsrichtung des Elektrons, also positiver Rapiditäten, dominiert das „härteste“ Parton des Elektrons, das Photon selbst. Das weiche Gluon zeigt ein eher schmales Maximum im Proton-Richtung bei $\eta_L \approx -1.7$, was im ep -Schwerpunktsystem Streuwinkel um 90° entspricht. Der Beitrag des typischerweise um $x_e/\tau \approx 0.8$ maximalen (anomalen) Quarks q_γ liegt wieder zwischen Gluon und Γ_γ , und ist in der Nähe des Schnittpunktes von aufgelöstem und direktem Wirkungsquerschnitt, bei $\eta_L = -1$, maximal.

Das in Gl.(2-28) im Gegensatz zu Gl.(2-20) durchgeführte Verschmieren kann bei großen Binweiten durchaus zu Abweichungen im Wirkungsquerschnitt führen. Vor allem bei der E_T -Verteilung wird das entsprechende Integral von dem Wirkungsquerschnitt am „linken“ Rand so dominiert, daß Gl.(2-28) zu etwas größeren Wirkungsquerschnitten führt als Gl.(2-20).

Während die Parton-Dichten des Protons beide Beiträge beeinflussen und somit kaum Einfluß auf das Verhältnis von aufgelöstem zu direktem Wirkungsquerschnitt haben, ist insbesondere die derzeit eher vage Kenntnis des Gluon-Anteils im Photon eine große Fehlerquelle. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das aufgelöste Photon gegenüber dem direkt wechselwirkenden bei niedrigeren E_T und in Vorwärtsrichtung des Protons dominieren wird.

Im Zusammenhang mit Gl.(2-21) und Gl.(2-26) wurde argumentiert, daß die dort definierten Wirkungsquerschnitte zur Bestimmung von Parton-Verteilungen aus experimentellen Daten geeigneter sein könnten, als die bisher behandelten inklusiven Jet-Wirkungsquerschnitte. Dies soll nun weiter diskutiert werden. Um direktes und aufgelöstes Photon konsistent gemeinsam behandeln zu können, werden beide Wirkungsquerschnitte über ein gewisses Intervall in $x_{i/\gamma}$

verschmiert. Für das aufgelöste Photon wird dies durch einfache Mittelung innerhalb geeigneter Intervalle der Breite 2ϵ erreicht,

$$\frac{d\bar{\sigma}_{\text{res}}(x_{i/\gamma}, \epsilon)}{dx_{i/\gamma}} \equiv \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_{i/\gamma}-\epsilon}^{x_{i/\gamma}+\epsilon} \frac{dx'}{x'} \sum_{ab,cd} \int_{x_{i/\gamma}^{\text{min}}}^{\sqrt{x'}} dx_T \int \int d\eta d\eta' \Theta(1-x_\gamma) \Theta(1-x_b) \quad (2-29)$$

$$\frac{x_T}{32\pi s} f_\gamma^c(x_\gamma) f_a^c(x', M_T^2) f_b^c(x_b, M_T^2) \frac{\alpha_s(\mu)^2}{4C_s C_b} A_{ab,cd}^{(0)}(s, t, u),$$

während die δ -Verteilung in Gl.(2-26) durch eine Gauß-Kurve der Breite 2ϵ ersetzt wird. Es ist

$$\frac{d\bar{\sigma}_{\text{dir}}(x_{i/\gamma}, \epsilon)}{dx_{i/\gamma}} \equiv \bar{\sigma}_{\text{dir}} \frac{\exp[-((x_{i/\gamma}-1)/(2\epsilon))^2]}{2\epsilon\sqrt{\pi}} \quad (2-30)$$

Die Parametrisierungen der Parton-Dichten in Photon und Proton sind weiterhin GRV(LO) und MT(SL), auch die anderen gemeinsamen Parameter sind wie oben beschrieben. $x_{i/\gamma}$ wurde auf Intervalle der Breite $2\epsilon = 0.05$ verteilt. Unter der Annahme, daß zu Beginn der Messungen der Fehler im rekonstruierten $x_{i/\gamma}$ deutlich größer als die gewählte Binweite sein wird,

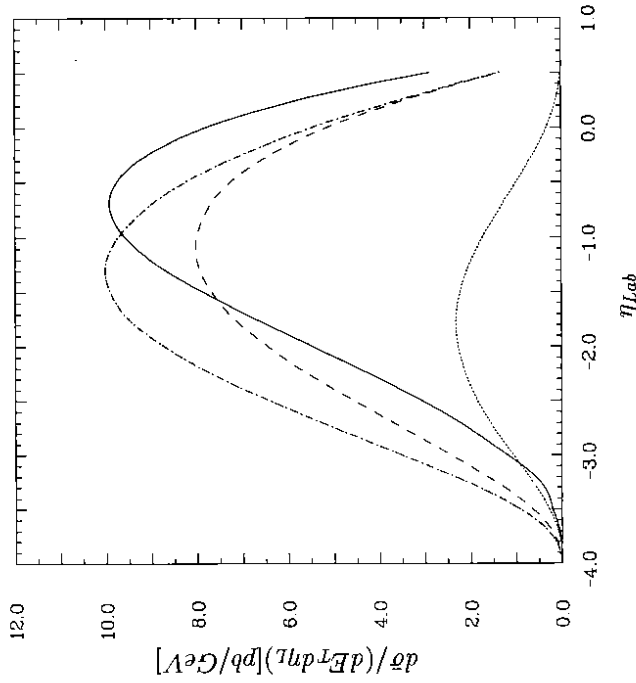


Bild 2-5: Direkt vs. resolbed: η -Abhängigkeit. Born-Wirkungsquerschnitt $d\bar{\sigma}/(dE_T d\eta_L)$ (Gl.(2-28)) bei $E_T = 25 \text{ GeV}$, Auftragung wie in Bild (2-4).

Quark q_i bei. Diese allgemeinen Eigenschaften sind unabhängig von den verwendeten Parton-Dichten, so daß eine gute Bestimmung insbesondere von $G_T(x)$ bei hinreichender Genauigkeit der Daten bereits in den derzeitigen kinematischen Detektorbereichen möglich sein wird. Der totale Wirkungsquerschnitt für Jets in LO Photoproduktion

$$\sigma_{tot} \equiv \int_{(E_T^{min})^2}^1 dx_{i/\gamma} \frac{d\sigma}{dx_{i/\gamma}} \quad (2-31)$$

ist hier $\sigma_{tot} = 94nb$. Davon entfällt auf das direkte Photon $\sigma_{tot}^{\gamma} = 20nb$. Im aufgelösten Photon tragen Quarks und Gluonen für das hier gewählte $E_T^{min} = 5GeV$ zu praktisch gleichen Teilen bei, dies wird sich aber bei kleineren E_T^{min} zugunsten des Gluons G_T verschieben. Verzichtet man auf die o.g. Cuts an $W_{\gamma p}$ und die Rapiditäten, so erhält man einen totalen Wirkungsquerschnitt für die Photoproduktion von Jets von $\sigma_{tot}(E_T > 5GeV) = 318nb$, bzw. $\sigma_{tot}(E_T > 5GeV) = 55nb$. Durch geeignete Beschränkung des betrachteten $x_{i/\gamma}$ -Intervalls kann also der Anteil des direkten Photons verstärkt werden.

2.3.2 Vergleich verschiedener Parametrisierungen

In dieser Arbeit steht das aufgelöste Photon im Vordergrund, so daß die Wirkungsquerschnitte von der Wahl der Kombination von Parton-Verteilungen im Proton und im Photon abhängen. Insbesondere für das Proton stehen mittlerweile eine Reihe verschiedener Parametrisierungen der Parton-Dichten, sowohl in LO als auch in NLO, zur Verfügung. Für das Photon ist die Auswahl aufgrund der weniger komfortablen experimentellen Situation noch nicht so reichhaltig. Es zeichnet sich deswegen auch noch keine *Asymptotik* in den verschiedenen Parametrisierungen ab, deren Unterschiede immer mehr „nur“ noch in Details liegen. Die Ergebnisse von HERA werden hier sicherlich einigen Fortschritt bringen. Eine vollständige Bibliothek wurde am CERN zusammengestellt, findet sich in ähnlicher Form aber auch am DESY[PDF].

Jet-Wirkungsquerschnitte in niedrigster Ordnung basieren in der Regel auf der Kombination der in führender Ordnung bestimmten „Bausteine“, also Parton-Verteilungen f und Parton-Parton-Wirkungsquerschnitten $\hat{\sigma}$. Diese, im folgenden als *minimale LO* bezeichnete Näherung verzichtet also auf sämtliche Korrekturen der nächsten Ordnung in $\alpha_s(\mu)$, kurz

$$\sigma_{miLO} = \hat{\sigma}_{LO} \otimes f_{LO} \quad (2-32)$$

Sie wurde zum Beispiel auch im vorangehenden Abschnitt verwendet. Die zu Wirkungsquerschnitten in der nächsthöheren Ordnung in $\alpha_s(\mu)$ beitragenden Kombinationen von

$$\begin{aligned} f &= f_{LO} + \alpha_s(\mu) f_{NLO} \\ \hat{\sigma} &= \alpha_s(\mu)^2 M_{LO} + \alpha_s(\mu)^3 M_{NLO} \end{aligned}$$

sind, ohne weitere Unterscheidung der Parton-Dichten nach Elektron bzw. Proton,

$$\begin{aligned} \sigma_{NLO} &= \alpha_s(\mu)^2 M_{LO} \otimes f_{LO} \\ &+ \alpha_s(\mu)^2 M_{LO} \otimes \alpha_s(\mu) f_{NLO} + \alpha_s(\mu)^3 M_{NLO} \otimes f_{LO} \\ &\equiv \alpha_s(\mu)^2 M_{LO} \otimes f + \alpha_s(\mu)^3 M_{NLO} \otimes f_{LO} \end{aligned}$$

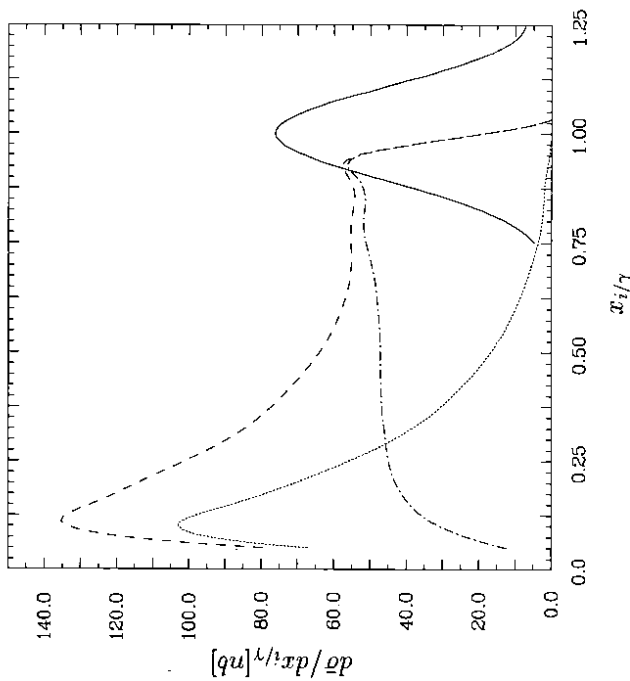


Bild 2-6: Direkt und resolved: Abhängigkeit vom Parton-Impuls. Born-Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dx_{i/\gamma}$ (Gl.(2-29,-30)). Wahl der Cuts: siehe Text, auftragen sind das direkte Photon (—) und der aufgelöste Anteil (---), dieser ist zusätzlich aufgeschlüsselt in den Beitrag der Quarks q_i (- · - ·) und der Gluonen G_T (· · ·) im Photon.

muß zumindest der Beitrag des direkten Photons auf mehrere Intervalle verteilt werden. In Bild (2-6) geht aus diesem Grund Gl.(2-30) mit $\epsilon' = 0.1 = 4\epsilon$ ein. Es ist $E_T^{min} = 5GeV$, also $x_T^{min} = 0.034$. Ferner sind die Rapiditäten der beiden auslaufenden Partonen im Laborsystem auf $\eta_{lab} \in [-2.5, +2.0]$, und die Schwerpunktsenergie im γp -System auf $W_{\gamma p} \in [140GeV, 260GeV]$ beschränkt. Dies berücksichtigt den derzeit zur Verfügung stehenden Arbeitsbereich der Detektoren. Man erkennt in Bild (2-6), daß die Dominanzbereiche der Partonen G_T , q_i und γ , des Photons sehr klar voneinander getrennt sind. Es sei daran erinnert, daß bei $E_T = 5GeV$ das Gluon nur knapp die Hälfte des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes $d\hat{\sigma}/dE_T$ ausmacht, und damit kaum über dem Anteil des Quarks q_i liegt (vgl. Tab.(2-1)). In Bild (2-6) erkennt man deutlich, daß das Gluon den Bereich kleiner $x_{i/\gamma} < 0.25$ beherrscht, und insbesondere für den starken Peak bei sehr kleinen $x_{i/\gamma} \approx 0.1$ allein verantwortlich ist. Diese Struktur wird mit abnehmendem x_T^{min} zunehmend klarer herauskommen. Um $x_{i/\gamma} = 1$ ruft das direkte Photon ein Maximum von $d\hat{\sigma}/dx_{i/\gamma}$ hervor, welches aber wegen der Wahl $\epsilon' \gg \epsilon$ schwächer ausgeprägt ist als dasjenige des Gluons. Im Bereich mittlerer $x_{i/\gamma}$ trägt nahezu ausschließlich das semi-harte

so daß der die LO Matrixelemente enthaltende Anteil

$$\sigma_{LO'} = \tilde{\sigma}_{LO} \otimes f \quad (2-33)$$

die vollständigen NLO Partondichten enthält. Der volle $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ Wirkungsquerschnitt kann also auf die zwei verschiedenen Arten

$$\begin{aligned} \sigma_{NLO} &= \sigma_{mLO} + \alpha_s(\mu)^2 M_{LO} \otimes \alpha_s(\mu) f_{NLO} + \alpha_s(\mu)^3 M_{NLO} \otimes f_{LO} \\ &\equiv \sigma_{LO'} + \alpha_s(\mu)^3 M_{NLO} \otimes f_{LO} \end{aligned} \quad (2-34)$$

zerlegt werden. Der Unterschied zwischen $\sigma_{LO'}$ und σ_{mLO} ist durch die $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -Korrekturen der Parton-Dichten, also die endlichen Anteile der kollinearen Singularitäten im partonischen Eingangszustand gegeben. Die Differenz zwischen σ_{NLO} und $\sigma_{LO'}$ wiederum basiert auf den $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -Korrekturen der harten Streuung, so daß die Einbeziehung von $\sigma_{LO'}$ in den Vergleich zwischen den Born- und den vollen $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -Wirkungsquerschnitten im Prinzip einen Zugang zum Faktorisierungsschema eröffnet. Diese Möglichkeit ist aber in der Praxis stark eingeschränkt. Die Aufteilung Gl.(2-34) verlangt die Verwendung einer konsistenten Zerlegung der $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ Parton-Dichten in f_{LO} und f_{NLO} , sowohl im Proton als auch im Photon. Derartige Parametrisierungen stehen zur Zeit nur von einer Gruppe [GRV92] zur Verfügung. Bei der numerischen Auswertung in Kap.[4] werden ausschließlich die vollen NLO Parton-Dichten verwendet. Der Fehler ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ und wird, verglichen mit dem Unterschied zwischen den entsprechenden Born-Wirkungsquerschnitten in Tab.(2-3), eher klein sein, da die $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen der Wirkungsquerschnitte meist selbst bereits relativ klein sind. Die Aussagekraft der LO' Ergebnisse allein ist durch die willkürliche Trennung der vollständigen $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -Korrekturen gegenüber den mLO Resultaten noch einmal reduziert, obwohl dies quantitativ wohl kaum weiter ins Gewicht fällt.

Die nun zu diskutierenden Ergebnisse unterscheiden sich nur durch die jeweils verwendeten Parametrisierungen der Parton-Dichten in Photon und Proton. Es wurden stets die wohlbekanntesten (2→2)-Wirkungsquerschnitte auf Parton-Ebene und $\alpha_s(\mu)$ in 1-loop-Näherung, also

$$\alpha_s^{(1)}(\mu^2) = \frac{2\pi}{\beta_0 \log(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})} \quad (2-35)$$

N°	Photon	Proton
1	GRV(LO)	MT(SL)
2	LAC 1	MT(SL)
3	DG	MT(SL)
4	GS(hard G)	MT(SL)
5	GS(soft G)	MT(SL)
6	GRV(NLO)[MS]	MT(SL)
7	GRV(NLO)[MS]	MT(B1)[MS]
8	GRV(NLO)[DIS _γ]	MT(B1)[MS]
9	GS(NLO)[MS]	MT(B1)[MS]
10	GRV(NLO)[MS]	MRS(D0)[MS]

Tabelle 2-2: Geästetete Kombinationen von Parton-Verteilungen.

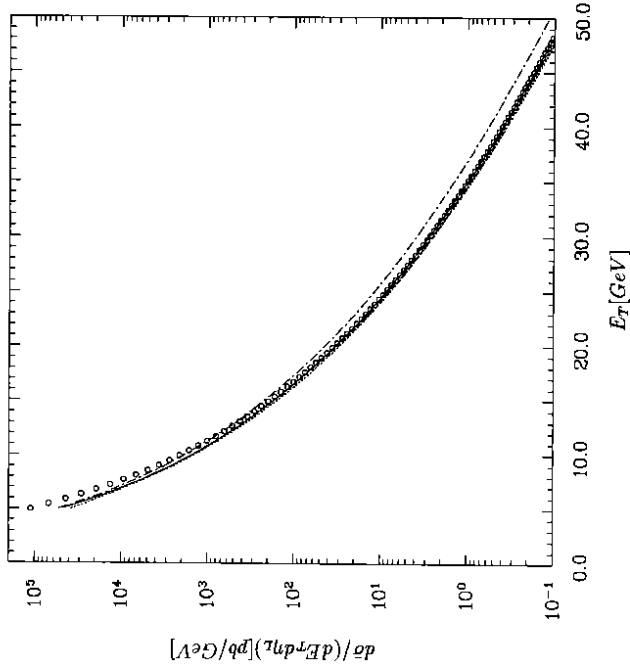


Bild 2-7: Einfluß der Parton-Dichten: E_T -Abhängigkeit. Born-Wirkungsquerschnitt $d\sigma/(dE_T d\eta_L)$ bei $\eta_L = -2$. Gezeigt sind die Kombinationen 1 (-), 2 (o o o), 3 (· · ·) und 7 (---) aus Tab.(2-2).

mit

$$\beta_0 = \frac{11}{6} N_c - \frac{1}{3} N_f \quad (2-36)$$

und $\mu = Q = E_T$ benutzt. Wie überall in dieser Arbeit wurde für Λ die entsprechende Skala der Parton-Verteilung im Proton eingesetzt. Ebenso durchgehend ist $N_c = 3$ und $N_f = 4$. In Bild (2-7) ist der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt $d\sigma/(dE_T d\eta_L)$ gemäß Gl.(2-20) in LO resolved photoproduction in Abhängigkeit von E_T bei $\eta_L = -2$ aufgetragen. Die getesteten Kombinationen der Parton-Verteilungen sind in Tab.(2-2) zusammengestellt. Ein Anspruch auf Vollständigkeit wird natürlich nicht erhoben, die folgende Diskussion dient dem Abstecken von Rahmenbedingungen. Dabei wurde auf die — ohnehin nur demonstrativen Zwecken dienende — Parametrisierung LAC3 verzichtet, da sie bereits experimentell ausgeschlossen sein dürfte [H1.93a]. Der Übersichtlichkeit halber zeigt Bild (2-7) nur die vier Kombinationen 1, 2, 3, 7 aus Tab.(2-2), ein vollständiger Vergleich findet sich in Tab.(2-3) für einige Werte von E_T . Die Wirkungsquerschnitte sind hier auf die Kombination GRV(LO) \otimes MT(5L) bezogen. Während GRV(LO) eine eher typische Parametrisierung der Parton-Dichten im Proton ist, zeigt LAC1 das wohlbekannteste, von seinem Gluon $G_\gamma(x) \propto x^{-0.34}$ [LAC91] hervorgerufene starke An-

E_T [GeV]	MT(SL)				MT(BI, \overline{MS})				MRS(D0, \overline{MS})	
	DG	LAC1	GRV (\overline{MS})	GS (hard)	GS (soft)	GRV (\overline{MS})	GRV (DIS $_{\gamma}$)	GS (\overline{MS})	GRV (\overline{MS})	GRV (\overline{MS})
5	0.79	2.30	1.00	0.88	1.14	1.10	1.09	0.81	1.17	
7.5	0.94	1.65	1.05	0.95	1.18	1.16	1.14	0.86	1.24	
10	0.93	1.34	1.08	0.96	1.15	1.21	1.17	1.01	1.30	
12.5	0.93	1.19	1.10	0.94	1.11	1.25	1.20	1.02	1.34	
15	0.91	1.11	1.12	0.93	1.07	1.28	1.22	1.05	1.38	
20	0.91	1.04	1.15	0.88	0.98	1.33	1.25	1.05	1.45	
25	0.90	1.01	1.18	0.89	0.97	1.37	1.27	1.12	1.49	
30	0.90	1.00	1.19	0.89	0.95	1.41	1.28	1.15	1.53	
40	0.90	1.01	1.23	0.86	0.90	1.46	1.29	1.16	1.56	
50	0.89	1.01	1.26	0.83	0.86	1.48	1.26	1.14	1.56	

Tabelle 2-3: Born-Wirkungsquerschnitt $d\sigma/(d\eta_L dE_T)$ für verschiedene E_T bei $\eta_L = -2$. Verschiedene Kombinationen von Parton-Dichten in Photon und Proton, normiert auf $MT(SL) \otimes GRV(LO)$.

steigen des Wirkungsquerschnittes unterhalb von $E_T \approx 15\text{GeV}$, also gerade im Dominanzbereich des aufgelösten Photons. Bei größeren Transversalenergien sind sich LAC1 (und LAC2!) und GRV(LO) sehr ähnlich. Bei DG ist die c -Schwelle bei $Q^2 = 32\text{GeV}^2$ explizit eingebaut, was dort zu einem sprunghaften relativen Anstieg des Wirkungsquerschnittes führt. Ansonsten liegt DG rund 10% unterhalb von GRV(LO). Die beiden unterschiedlichen Ansätze für das Gluon G_γ bei GS^4 wirken sich natürlich im wesentlichen bei kleineren E_T aus. Hier führt das weicher modellierte Gluon zu rund 20% größeren Wirkungsquerschnitten als das härtere. Dieser Unterschied nimmt mit dem Einfluß von G_γ ab, siehe dazu Bild (2-4). Das oben angesprochene Problem der Kombination von NLO Parametrisierungen mit LO Parton-Wirkungsquerschnitten wird im Vergleich von GRV(LO) mit den beiden Versionen in der nächsthöheren Ordnung sichtbar. So liefert GRV(NLO,DIS $_{\gamma}$) bei $E_T = 50\text{GeV}$ einen um rund 17% kleineren Wirkungsquerschnitt als die \overline{MS} -Version, da die Quark-Verteilungen durch die Absorption von B_γ [GRV92 γ] weicher sind. Bei kleinen E_T dominiert das unter der Transformation zwischen den beiden Schemata invariante Gluon G_γ , so daß die Unterschiede entsprechend geringer ausfallen. Die Differenzen zwischen DIS $_{\gamma}$ und LO sind geringer als bei Verwendung des \overline{MS} -Schemas, gemäß dem Ziel von GRV, ein Faktorisierungsschema zu finden, das die Instabilitäten von \overline{MS} (in $F_2^{\gamma}(x, M_T^2)$) beim Übergang zur NLO beseitigt. Es ist zu beachten, daß der Unterschied zwischen \overline{MS} und DIS $_{\gamma}$ in den Parton-Dichten des Photons nur über die harte Streuung des direkten Photons kompensiert werden kann. Die in den Parton-Parton-Wirkungsquerschnitten des aufgelösten Photons auftauchenden kollinearen Singularitäten im Anfangszustand werden in beiden Fällen konsistent mit \overline{MS} faktorisiert. Im Proton stehen die Parametrisierungen von Morfin & Tung [MT91] neben \overline{MS} auch im DIS-Schema zur Verfügung. Wirkungsweise und Konsequenzen der verschiedenen Faktorisierungen von Singularitäten werden konsistenterweise im Zusammenhang mit den NLO Korrekturen ausführlicher diskutiert, so daß hier nur die quantitativen Unterschiede interessieren. Da DIS in dieser Arbeit nicht weiter verwendet wird, kann eine weitere Diskussion entfallen. Es bleibt festzustellen, daß MT(BI) — in \overline{MS} — noch einmal

⁴Die Q^2 -Abhängigkeit der zur Zeit vorliegenden Parametrisierungen von Gordon & Storrow besitzt noch einige Eigenschaften (private Mitteilung, B.Kniehl), die eine weitere Verwendung nicht zweckmäßig erscheinen läßt.

10 – 15% größere Wirkungsquerschnitte liefert als MT(SL), während die Unterschiede zwischen MRS(D0) und MT(BI) mit rund 5% eher gering sind.

Bei dem Vergleich der η_L -Abhängigkeit der verschiedenen Kombinationen bei $E_T = 10\text{GeV}$ in Bild (2-5) fällt zuerst LAC1 auf. Mit rund 2.05nb/GeV hat sie das größte, und mit $\eta_L \approx -2.5$ das am weitesten auf der Elektron-Seite liegende Maximum. Alle anderen Kombinationen sind zwischen $\eta_L \approx -2$ und -1.5 maximal. GRV(LO), DG und GS(hard G) zeigen hier über alle Rapiditäten einen sehr ähnlichen Wirkungsquerschnitt. Dieser mündet oberhalb von $\eta_L \approx -0.5$, also im Bereich der Dominanz von q_γ , auch in die Ergebnisse mit LAC1, deren wesentlicher Unterschied zu den anderen im Gluon G_γ liegt, siehe auch Bild (2-7). Ein weiterer Punkt ist der Beach von GRV(NLO, \overline{MS}) um $\eta_L \approx 0.5$, im Vergleich zu den LO Parametrisierungen enthält sie also mehr Quarks. Bild (2-8b) zeigt, daß dies bei Verwendung von DIS $_{\gamma}$ abgeschwächt wird, die Verteilung also mehr den in LO bestimmten ähnelt. Bei negativeren Rapiditäten nimmt der Einfluß von q_γ ab, die beiden Versionen von GRV(NLO) führen dort dementsprechend zu identischen Ergebnissen aufgrund ihres identischen Gluon-Anteils.

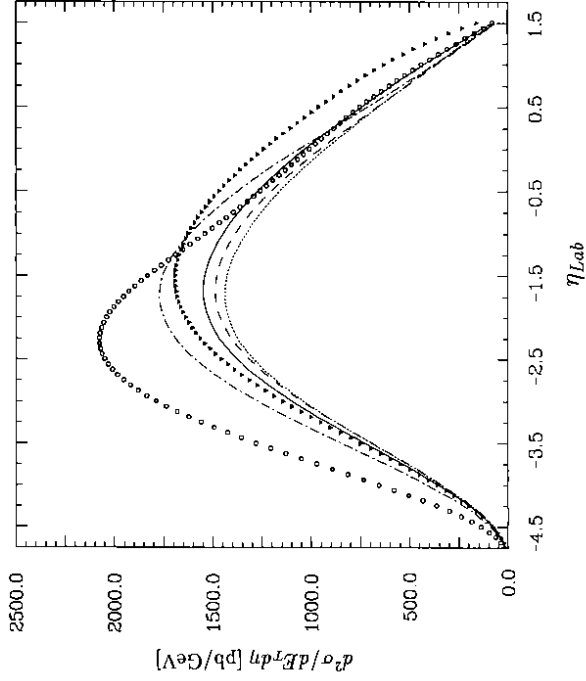


Bild 2-8a: Einfluß der Parton-Dichten: η -Abhängigkeit. $d\sigma/(dE_T d\eta)$ (LO) bei $E_T = 10\text{GeV}$. Gezeigt sind die Kombinationen 1 (---), 2 (ooo), 3 (· · ·), 4 (—), 5 (— · —) und 6 (△△△), also diejenigen Kombinationen aus Tab. (2-2) mit MT(SL).

3 Jets in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

3.1 Zur Notwendigkeit von NLO Rechnungen

Wirkungsquerschnitte für Jets in Photoproduktion bei HERA benötigen drei grundlegende Zutaten. Auf der einlaufenden Seite muß die *partonische Struktur von Proton und aufgelöstem Photon* zur Verfügung stehen. Sie parametrisiert den Eingangszustand des durch $d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow \{k_i\}}$ beschriebenen harten Streuprozesses. Der partonische Endzustand $\{k_i\}$ ist schließlich einem *Jet-Algorithmus \mathcal{J}* zu unterwerfen. Ein (inklusive) Jet-Wirkungsquerschnitt hat also formal die Form:

$$d\sigma_{\gamma p \rightarrow \text{Jet} + X} = (f_i^p, f_j^p) \otimes d\hat{\sigma}_{ij \rightarrow \{k_i\}} \otimes \mathcal{J} \quad (3-1)$$

Faltungen über unzugängliche Partonimpulse sind durch \otimes angedeutet, Flavoursummen wurden unterdrückt. Diese Zerlegung ist ein zentraler Punkt im Parton-Modell von Feynman und Bjorken. Die Störungstheorie kann den Teil des zugehörigen Diagramms in Bild (3-1) beschreiben, dessen typische Zeiten und Längen hinreichend klein sind. Auf dieser Skala Λ/M langreichweitige Anteile können als von der harten Streuung $ij \rightarrow \{k_i\}$ unabhängig angesehen, und als Beitrag der Partonverteilungen $f^H(M)$ interpretiert werden. Diese willkürliche Trennung darf das Gesamtergebnis $d\sigma_{\gamma p \rightarrow \text{Jet} + X}$ eigentlich nicht beeinflussen, bei Abbruch der Störungsreihe in einer festen endlichen Ordnung n in α_s ist dies aber nicht zu vermeiden. Die Skalenabhängigkeit in nächsthöherer Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^{n+1})$ bleibt stets unkompensiert. An der eben beschriebenen Umorganisation kann die harte (2 \rightarrow 2) Streuung in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ nicht teilnehmen, da sie nur auf einer Skala (E_T) stattfindet. Die Abhängigkeit der Parton-Dichten von der Auflösung Λ/M der Hadronen

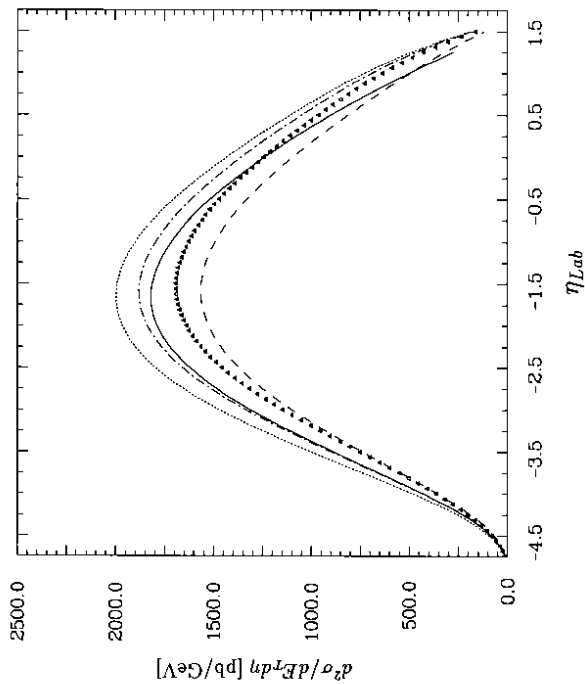


Bild 2-8b: Einfluß der Parton-Dichten: η -Abhängigkeit. $d^2\sigma/(dE_T d\eta_L)$ (LO) bei $E_T = 10\text{GeV}$. Gezeigt sind die Kombinationen 7 (---), 8 (—), 9 (—), 10 (· · ·), also Kombinationen mit NLO Parton-Dichten im Proton, und noch einmal zum besseren Vergleich 6 (△△△).

Sieht man einmal von LAC1 ab, so liegen hier alle Kombinationen in einem Bereich von $\pm 20\%$ um $GRV(NLO, \overline{MS}) \otimes MT(SL)$. HERA sollte hier helfen können, dieses Intervall deutlich zu verkleinern.

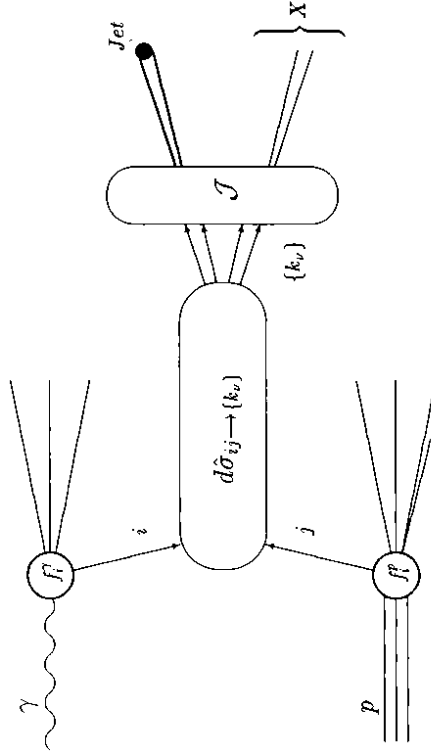


Bild 3-1: $\gamma + p \rightarrow \text{Jet} + X$, schematische Struktur für aufgelöste Photoproduktion gemäß Gl.(3-1).

geht deswegen ebenso unkomponiert ein, wie die laufende Kopplung $\alpha_s(\mu)$. Alle Bausteine werden in LO unabhängig voneinander behandelt. Der anomale Anteil der Parton-Dichten im Photon trägt zur Skalenabhängigkeit mit $\log M_\gamma$ bei, der hadronische (VDM) Teil wie auch das Proton skaliert nahezu. Die Skalenabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte in Born'scher Näherung ist damit, mit der üblichen Wahl $\mu = M_\gamma = M_p = \xi E_T$, typischerweise von der gleichen Ordnung wie der Wirkungsquerschnitt selbst,

$$d\sigma_{TP}^{LO} \rightarrow J_{s+X} \propto \frac{\alpha}{\log \xi} \propto \alpha \alpha_s(\xi). \quad (3-2)$$

Dieser starke Einfluß der Skalen auf die LO Wirkungsquerschnitte, der die Vorhersagekraft sehr reduziert, erklärt sich also aus der Eigenständigkeit der einzelnen Komponenten in Gl.(3-1). In der nächsthöheren Ordnung in α_s verbessert sich diese Situation entscheidend, da die Skalenabhängigkeit dann von (noch) höherer Ordnung, also konsistent vernachlässigbar ist.

Auch Jetalgorithmen liefern in NLO erstmals nicht-triviale Ergebnisse. Clusterbildung ist zwar eine offensichtliche Eigenschaft von Teilchen im Endzustand hochenergetischer Streuprozesse, die entsprechend konstruierten Jets sind aber nicht elementarer Bestandteil der Theorie. Sie müssen also zusätzlich definiert werden. Sowohl in der Theorie als auch im Experiment — und natürlich aufeinander abgestimmt — ist zu erklären, was unter diesem Begriff verstanden wird, wie also der jeweilige Endzustand über J zu organisieren ist. Eine Zusammenstellung der hier betrachteten Jetdefinitionen findet sich in Anh C.

Die Definition von Jets erfordert keine Spezifizierung der Teilchen im Endzustand, deswegen hat ihre Einführung bereits auf Parton-Niveau Sinn. Da man also nicht auf die Produktion bestimmter Teilchensorten angewiesen ist, scheint auch eine tiefere Kenntnis der nicht-perturbativen Hadronisierungsprozesse nicht zwingend erforderlich zu sein. Dies wird beispielsweise von dem beobachteten geringen Einfluß der Fragmentation auf Jet-Wirkungsquerschnitte in e^+e^- -Annihilation (PETRA) [JADE84] nahegelegt und ist ein deutlicher Hinweis auf die Qualität des Parton-Modells. Übersetzt man im Experiment verwendete Jet-Algorithmen in die Sprache der Partonen, so hängen die Rechnungen zum inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt in LO von der jeweiligen Definition nicht ab. Stets wird jedes der beiden auslaufenden Quarks oder Gluonen mit einem Jet identifiziert, weitere Feinheiten der Algorithmen greifen nicht. Eine sinnvolle Anwendung experimenteller Jet-Definitionen erfordert hier die Zwischenschaltung eines Fragmentationschemas bzw. die Modellierung weicher Abstrahlung zusätzlicher Quarks und Gluonen, quasi zur Auffüllung des Phasenraumes. Ein tieferes Verständnis von Jets bleibt somit zum Teil in nicht-perturbativen Modellen hängen. Erst die Berücksichtigung mehrerer auslaufender Teilchen bereits auf kurzen Zeitskalen kann den störungstheoretischen Zugriff auf intrinsische Eigenschaften von Jets, wie die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte vom Jet-Cut R oder die Energie-Verteilung im Jetkegel, verbessern. Die Diskussion der Jetstruktur in NLO Störungstheorie ist eine weitere Möglichkeit zum Test der QCD.

Natürlich bleibt die Problematik der Zuordnung von Partonen zu den hadronischen Jets auch in höheren Ordnungen der Störungstheorie bestehen, Partonjets sind sozusagen nicht farblich. Zudem sind Unterschiede zwischen dem im Experiment bzw. in der Störungstheorie verwendeten Jetalgorithmen unvermeidbar. Dies ist auch dann der Fall, wenn in beiden Gebieten von der gleichen Definition ausgegangen wird. Das Auftreten einer inneren Jetstruktur und damit eine Abhängigkeit vom Jetcut verbessert aber die Zuverlässigkeit der Theorie entscheidend. Auch muß bedacht werden, daß ein Einbau der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Matrixelemente in Detektorsimulationen wegen ihrer singulären Struktur nicht ohne weiteres möglich ist und noch auf entscheidende Ideen wartet.

3.2 QCD in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

Die harte Streuung in *resolved photoproduction* ist per *définitionem* ein reiner QCD-Prozess. Der vollständige Satz der führenden reellen Strahlungskorrekturen zu den (2→2) Beiträgen in Born'scher Näherung [CKR77] wurde in $d=4$ Dimensionen von mehreren Autoren [z.B. Ber81] vor einigen Jahren berechnet. Mit Hilfe dieser (2→3)-Prozesse können zum Beispiel 3-Jet-Wirkungsquerschnitte in Photoproduktion bei HERA in niedrigster Ordnung untersucht werden [BOO89], da sich hier die im 3-Teilchen-Phasenraum enthaltenen IR/C-Singularitäten durch geeignete Cuts ausschließen lassen. Die Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ über diese singulären Bereiche des Phasenraumes, so daß gemäß KLN-Theorem [KLN62] auch virtuelle Korrekturen derselben Ordnung in $\alpha_s(\mu)$ mit einzubeziehen sind. Diese wurden zuerst von Ellis & Sexton [ES86] in dimensionaler Regularisierung für alle Prozesse bestimmt. Ihre (2→3)-Korrekturen stimmen im Limes $d \rightarrow 4$ mit den Resultaten von [Ber81] überein.

3.2.1 Virtuelle Korrekturen

Bild (3-2) zeigt einige virtuelle Korrekturen zum Prozess $q + G \rightarrow q + G$. Ihre Beiträge zum Parton-Parton-Wirkungsquerschnitt in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ erhält man durch Interferenz mit den Born-Graphen. Die Schleifen-Freiheitsgrade werden durch die Wahl der äußeren Impulse nicht festgelegt, so daß über sie unter Einschuß aller auftretenden Pole (UV, IR, Kollinearitäten) zu integrieren ist. Die quadrierten, über Spin und Farben der einlaufenden (auslaufenden) Partonen gemittelten (summierten), Matrixelemente wurden von [ES86] mittels dimensionaler Regularisierung [HV72] als Laurent-Reihe in $d - 4$ per

$$\sum_{\text{virt}} |\mathcal{M}_{v,k}|^2(\epsilon) = \frac{M_{-2}^{(v)}}{\epsilon^2} + \frac{M_{-1}^{(v)}}{\epsilon} + M_0^{(v)} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3-3)$$

dargestellt. Die Kinematik der virtuellen Korrekturen ist die gleiche wie in der niedrigsten Ordnung, $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, so daß auch $\sum |\mathcal{M}_{v,k}|^2$ nur von den Mandelstam-Variablen s, t und u abhängt. Wie die Born-Beiträge lassen sich alle virtuellen Korrekturen vier disjunkten Klassen zuordnen, so daß die Angabe von $\sum |\mathcal{M}_{v,k}|^2(\epsilon)$ für jeweils einen stellvertretenden Prozess genügt. Alle anderen erhält man durch entsprechendes Vertauschen der äußeren Impulse, letztlich also von s, t und u (Anh.B). Im Zusammenhang mit dem inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt in NLO werden die $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen des elastischen Parton-Parton-Wirkungsquerschnittes benötigt, der mit Gl.(3-3) über

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\sigma}{d^2w} \right)^{el} (s, v = 1 + \frac{t}{s}, w = \frac{-u}{s+t}; \epsilon) \\ = \frac{1}{16\pi s} \left(\sum |\mathcal{M}_{v,k}|^2(s, v, \epsilon) + \sum |\mathcal{M}_{v,k}|^2(s, 1-v, \epsilon) \right) \delta(1-w) \end{aligned} \quad (3-4)$$

zusammenhängt. Die Vertauschung von $v \rightarrow 1 - v$ entspricht $t \rightarrow u$, für Jet-Wirkungsquerschnitte ist über alle Permutationen der auslaufenden Teilchen zu summieren.

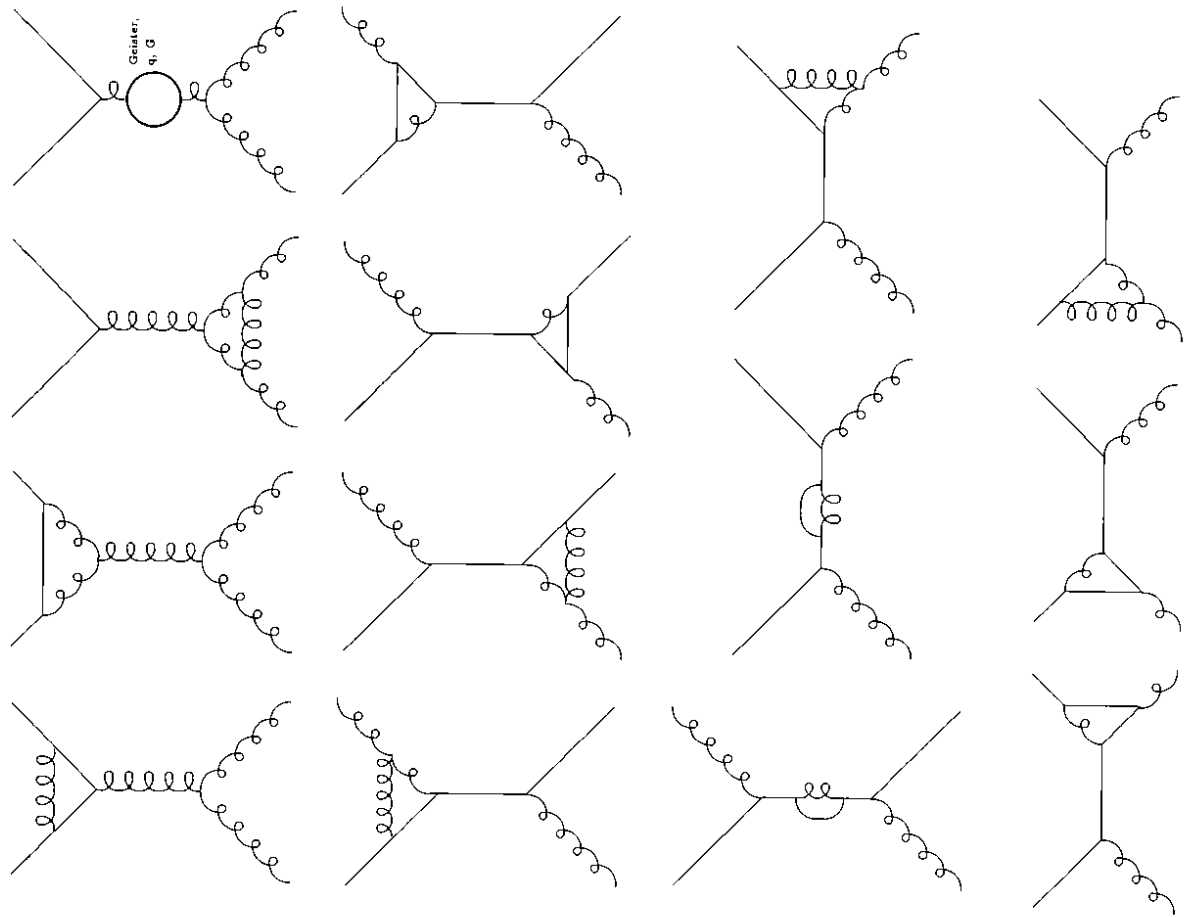


Bild 3-2a: Virtuelle Korrekturen zu $q+G \rightarrow q+G$ (Teil I).

29

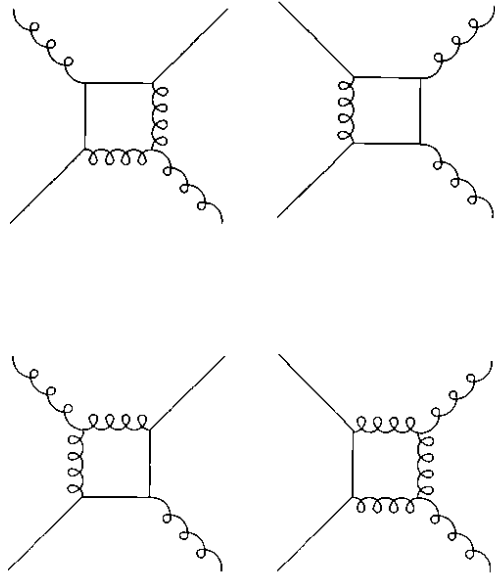


Bild 3-2b: Virtuelle Korrekturen zu $q+G \rightarrow q+G$ (Teil II).

3.2.2 Reelle Korrekturen

Einige der zu den reellen Korrekturen beitragenden Feynman-Graphen sind in *Bild (3-3)* dargestellt. Sie besitzen keinerlei innere Freiheitsgrade und sind dementsprechend im Phasenraum der drei auslaufenden Teilchen für $d = 4$ Dimensionen bis auf, durch geeignete Cuts isolierbare, Nullmengen endlich. Für inklusive Prozesse ist aber eine Betrachtung der $(2 \rightarrow 3)$ -Beiträge in $d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen erforderlich, um mit den auftretenden IR/C-Singularitäten arbeiten zu können. Die quadrierten, über Spin und Farben der einlaufenden (auslaufenden) Partonen gemittelten (summierten), Matrixelemente haben dann die allgemeine Form [ES86]

$$\sum_i |M_{r,k}|^2(\epsilon) = M_0^{(r)} + \epsilon M_1^{(r)} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3-5)$$

Die $M_i^{(r)}$ hängen nur von Lorentz-invarianten Kombinationen $\xi_{ij} = f(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ der 5 äußeren Impulse

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 \quad (3-6)$$

ab, siehe dazu *Bild (3-8)*. Einen vollständigen Satz der ξ_{ij} erhält man üblicherweise durch Verallgemeinerung der ursprünglich für $(2 \rightarrow 2)$ -Prozesse definierten Mandelstam-Variablen s, t und u . Man kann zum Beispiel

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2, & s' &= (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)^2 \\ t &= (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2, & t' &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4)^2 \\ u &= (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4)^2, & u' &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2. \end{aligned} \quad (3-7)$$

betrachten [Ber81], aber auch für die von [ES86], von $GL(3-7)$ leicht abweichend definierten Größen gilt im Limes masseloser Partonen

$$s + t + u + s' + t' + u' \equiv 0. \quad (3-8)$$

Wie schon die elastischen Prozesse werden auch die $(2 \rightarrow 3)$ -Beiträge in $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ in vier disjunkte Klassen aufgeteilt, die durch Anzahl der beteiligten äußeren Quarks und ihrer Flavours charakterisiert sind. Die entsprechenden Basisfunktionen sind für

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 2 \text{ Quarks} \\ (2 \text{ Flavours}) \\ 1 \text{ Gluon} \end{array} \right\} A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5) = C_q \sum_i |M|^2(q[\mathbf{p}_1] + q'[\mathbf{p}_2] - q[\mathbf{p}_3] + q'[\mathbf{p}_4] + G[\mathbf{p}_5]) \\ & \left. \begin{array}{l} 4 \text{ Quarks} \\ (1 \text{ Flavour}) \\ 1 \text{ Gluon} \end{array} \right\} B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5) = C_q^2 \sum_i |M|^2(q[\mathbf{p}_1] + q[\mathbf{p}_2] - q[\mathbf{p}_3] + q[\mathbf{p}_4] + G[\mathbf{p}_5]) \\ & \left. \begin{array}{l} 2 \text{ Quarks} \\ (1 \text{ Flavour}) \\ 3 \text{ Gluonen} \end{array} \right\} C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5) = C_q^2 \sum_i |M|^2(q[\mathbf{p}_1] + \bar{q}[\mathbf{p}_2] - G[\mathbf{p}_3] + G[\mathbf{p}_4] + G[\mathbf{p}_5]) \\ & \left. \begin{array}{l} 5 \text{ Gluonen} \end{array} \right\} D(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5) = C_G^2 \sum_i |M|^2(G[\mathbf{p}_1] + G[\mathbf{p}_2] - G[\mathbf{p}_3] + G[\mathbf{p}_4] + G[\mathbf{p}_5]) \end{aligned} \quad (3-9)$$

Die Mittlungsfaktoren C_i wurden bereits in $GL(2-22)$ definiert. Die Funktionen A, B, C, D sind in $d = 4$ Dimensionen bei [Ber81] und in $d = 4 - 2\epsilon$ bei [ES86] zu finden. Die verbleibenden harten $(2 \rightarrow 3)$ -Wirkungsquerschnitte in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ erhält man durch geeignetes Umsortieren im Argument der entsprechenden Basisfunktion (*crossing*), wie in *Tab. (3-1)* angegeben. Dabei ist auf die Reihenfolge zu achten. Insbesondere muß festgelegt werden, welches Parton aus dem Photon

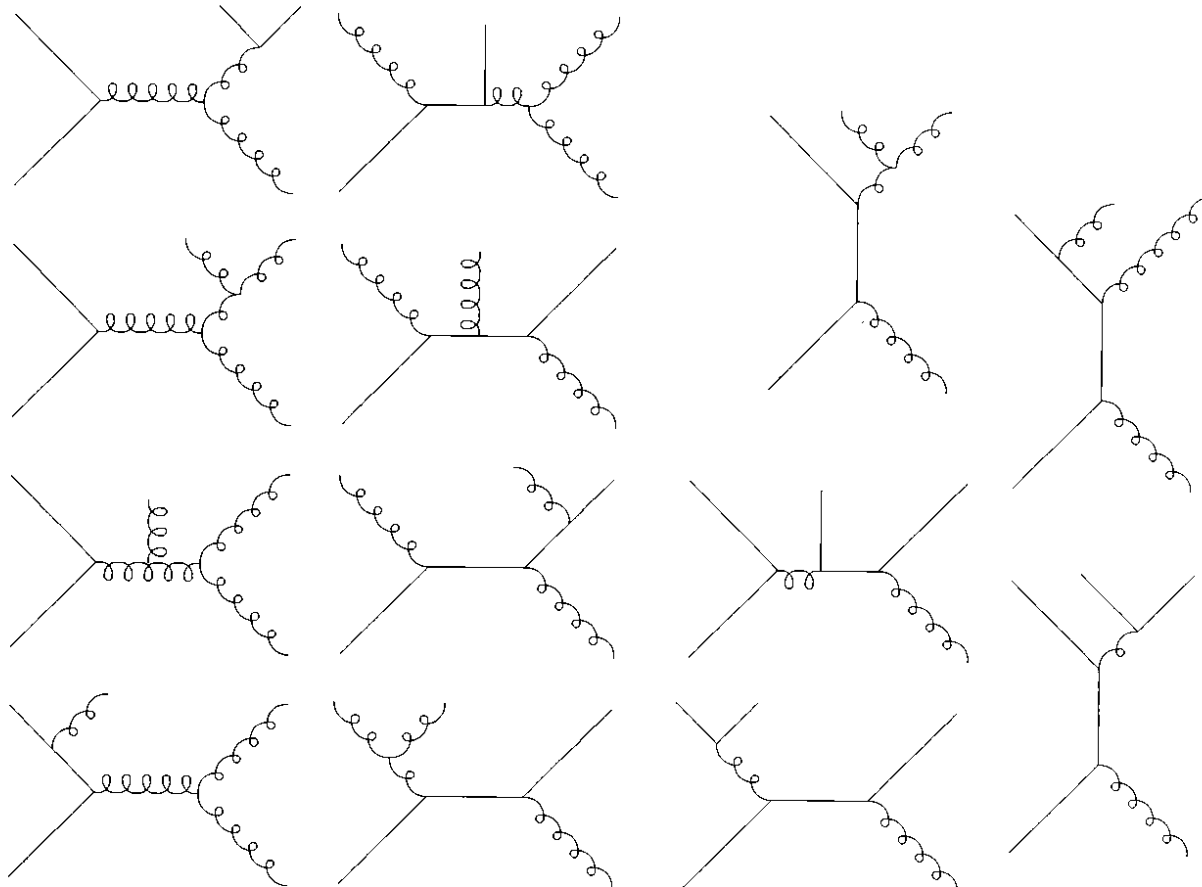


Bild 3-3: Reelle Korrekturen zu $q+G \rightarrow q+q+G$.

j_0	$a + b \rightarrow z_1 + z_2 + z_3$	$C_a C_b \sum_{ab \rightarrow z_1, z_2, z_3} \mathcal{M}^2$
1	$q + \bar{q}' \rightarrow q + \bar{q}' + G$	$A(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5)$
1	$\bar{q} + \bar{q}' \rightarrow \bar{q} + \bar{q}' + G$	$A(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2, p_5)$
2	$q + \bar{q}' \rightarrow q + \bar{q}' + G$	$A(p_1, -p_4; p_3, -p_2, p_5)$
2	$\bar{q} + \bar{q}' \rightarrow \bar{q} + \bar{q}' + G$	$A(-p_3, p_2; -p_1, p_4, p_5)$
3	$q + q \rightarrow q + q + G$	$B(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5)$
3	$\bar{q} + \bar{q} \rightarrow \bar{q} + \bar{q} + G$	$B(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2, p_5)$
4	$q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}' + G$	$A(p_1, -p_3; p_4, -p_2, p_5)$
4	$q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q} + G$	$B(p_1, -p_4; p_3, -p_2, p_5)$
4	$q + \bar{q} \rightarrow G + G + G$	$C(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5)$
5	$q + G \rightarrow q + q + \bar{q}'$	$-A(p_1, -p_5; p_3, p_4, -p_2)$
5	$\bar{q} + G \rightarrow \bar{q} + q' + \bar{q}'$	$-A(-p_3, -p_5; -p_1, p_4, -p_2)$
5	$q + G \rightarrow q + q + \bar{q}$	$-B(p_1, -p_5; p_3, p_4, -p_2)$
5	$\bar{q} + G \rightarrow q + \bar{q} + \bar{q}$	$-B(-p_4, -p_5; p_3, -p_1, -p_2)$
5	$q + G \rightarrow q + G + G$	$-C(p_1, -p_3; -p_2, p_4, p_5)$
5	$\bar{q} + G \rightarrow \bar{q} + G + G$	$-C(p_2, -p_3; -p_1, p_4, p_5)$
5	$q + G \rightarrow q + q + \bar{q}$	$-B(p_1, -p_5; p_3, p_4, -p_2)$
6	$G + G \rightarrow q + \bar{q} + G$	$C(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2, p_5)$
6	$G + G \rightarrow G + G + G$	$D(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5)$

Tabelle 3-1: Darstellung der $(2 \rightarrow 3)$ -Prozesse durch die 4 verschiedenen Klassen gemäß Gl.(3-9). Der Parameter j_0 in der ersten Spalte ordnet den harten Streuprozess nach seinem Eingangszustand, in Anlehnung an die Notation von [Ave89].

(Proton) stammt, um eine konsistente Kombination mit den Parton-Dichten zu gewährleisten. Es werden nun die Symmetrien der quadrierten Matrixelemente unter Vertauschung der Impulse innerhalb einer Topologie angegeben. Sie können durch explizites Einsetzen in die bei [Ber81, ES86] angegebenen Basisfunktionen gemäß Gl.(3-9) einfach bestätigt werden. Mit ihrer Hilfe kann die numerische Berechnung der Korrekturen endlicher Jet-Kegel (Kap.[3.4.2]) deutlich beschleunigt werden.

Topologie A: $qq' \rightarrow qq'G$.

Die Funktion A ist invariant unter den folgenden Operationen

- simultane Vertauschung der beiden Quark-Flavours in Anfangs- und Endzustand
- gleichzeitiger Übergang in beiden Flavours zu Anti-Quarks in Anfangs- und Endzustand

Für die partonischen Wirkungsquerschnitte gelten dementsprechend

$$\sum \mathcal{M}^2(q[p_1] + q'[p_2] - q[p_3] + q'[p_4] + G[p_5]) = \sum \mathcal{M}^2(q[p_2] + q'[p_1] - q[p_4] + q'[p_3] + G[p_5]) \quad (3-10)$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(\bar{q}[-p_3] + \bar{q}'[-p_4] - \bar{q}'[-p_4] - \bar{q}[-p_1] + \bar{q}'[-p_2] + G[p_5])$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(\bar{q}[-p_4] + \bar{q}'[-p_3] + \bar{q}'[-p_2] - \bar{q}[-p_1] + \bar{q}'[-p_1] + G[p_5])$$

Topologie B: $qq \rightarrow qqG$.

Die Funktion B ist invariant unter

- simultaner Vertauschung der ununterscheidbaren Fermionen jeweils in Anfangs- und Endzustand
- vollständigem Übergang zu Anti-Quarks.

Das heißt

$$\sum \mathcal{M}^2(q[p_1] + q[p_2] - q[p_3] + q[p_4] + G[p_5]) \quad (3-11)$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(q[p_2] + q[p_1] - q[p_3] + q[p_4] + G[p_5])$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(q[p_1] + q[p_2] - q[p_3] + q[p_4] + G[p_5])$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(\bar{q}[-p_3] + \bar{q}'[-p_4] - \bar{q}'[-p_4] - \bar{q}[-p_1] + \bar{q}'[-p_2] + G[p_5])$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(\bar{q}[-p_4] + \bar{q}'[-p_3] + \bar{q}'[-p_2] - \bar{q}[-p_1] + \bar{q}'[-p_1] + G[p_5])$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(\bar{q}[-p_4] + \bar{q}'[-p_3] + \bar{q}'[-p_2] - \bar{q}[-p_1] + \bar{q}'[-p_1] + G[p_5])$$

Topologie C: $q\bar{q}' \rightarrow G G G$.

Die Funktion C ist invariant unter

- beliebigen Permutationen der Gluonen im Endzustand
- Vertauschung von Quark und Anti-Quark im Anfangszustand.

Für eine beliebige Permutation $(ijk) = \Pi(123)$ gilt also

$$\sum \mathcal{M}^2(q[p_1] + \bar{q}[p_2] - G[p_3] + G[p_4] + G[p_5]) \quad (3-12)$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(q[p_1] + \bar{q}[p_2] - G[p_1] + G[p_2] + G[p_3])$$

$$= \sum \mathcal{M}^2(q[p_2] + \bar{q}[p_1] - G[p_1] + G[p_2] + G[p_3])$$

Topologie D: $GG \rightarrow GGG$.

D ist vollständig symmetrisch in allen äußeren Impulsen, also invariant unter

- beliebiger Vertauschung der Gluonen.

Für alle Permutationen $(ijkim) = \Pi(12345)$ gilt also

$$D(p_1, p_2; p_3, p_4, p_5) = D(p_1, p_2; p_4, p_3, p_5) \quad (3-13)$$

3.3 Jets mit kleinen Kegelradien: SCA

Die in Kap.[2.2] diskutierten Jet-Wirkungsquerschnitte in niedrigster Ordnung der Störungstheorie sind für eine Untersuchung wichtiger Eigenschaften der Jetdefinition ungeeignet. Jede Jetdefinition führt hier zum gleichen Ergebnis: beide auslaufenden Partonen werden jeweils mit einem Jet identifiziert. Diese Situation ist nur durch Berücksichtigung weiterer Teilchen im Endzustand zu verbessern. Um dabei nicht von Modellen zur Fragmentation von Quarks und Gluonen abhängig zu sein, ist die nächsthöhere Ordnung der $pQCD$, $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, im partonischen Wirkungsquerschnitt mit einzubeziehen.

3.3.1 Definition des Jet-Wirkungsquerschnittes in NLO

Die Ergebnisse dieser Arbeit bauen im wesentlichen auf einer Arbeit von Furman[Fur82] auf, die von Aversa *et al.*[Ave89] vervollständigt wurde. Im Zusammenhang mit $p\bar{p}$ -Streuung wurde dort eine einfache und anschauliche Jetdefinition verwendet (Anh.C), die aber der Kinematik bei HERA nicht gerecht wird und zudem nicht in den experimentell interessierenden Bereich großer Jets und Streuwinkel ausgedehnt werden kann. Der Formalismus von Furman kann aber problemlos auf geeignetere Jetdefinitionen übertragen werden, wie in Kap.[3.3] erläutert wird. Wird im folgenden explizit auf Eigenschaften der Jetdefinition Bezug genommen, so wird der Snowmass-Accord verwendet.

Gegeben sei nun ein Jetcut R , gesucht wird der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt, zum Beispiel $E_J d\sigma/d^3p_J(p_J)$. Der Jetimpuls p_J sei dementsprechend vorgegeben. In $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ zerfallen die beitragenden Jets in zwei Klassen, je nach Anzahl der kombinierten Partonen. Aus kinematischen Gründen ist die Zusammenfassung aller auslaufenden Partonen zu einem Jet auszuschließen. Betrachtet wird nun der Beitrag von Jets, die aus zwei Partonen (1,2) gebildet werden.

Für den inklusiven Wirkungsquerschnitt interessieren Jet-interne Freiheitsgrade nicht, so daß der partonische Wirkungsquerschnitt $d\hat{\sigma}$ über die Differenz der beiden $4\epsilon^r$ -Impulse $p_1 - p_2$ innerhalb des Jetkegels zu integrieren ist. Dies schiebt eine kollineare Singularität bei $p_1 \parallel p_2$, also $p_1 \cdot p_2 = 0$ mit ein, da hier nur masselose Quarks berücksichtigt werden. $d\hat{\sigma}$ ist damit in $d = 4$ Dimensionen nicht definiert, kann aber durch analytische Fortsetzung des Parton-Parton-Wirkungsquerschnittes in $d \rightarrow d = 4 - 2\epsilon$ auf wohlbekannte Weise[HV72] regularisiert werden. Die Integrale über den Jet-internen Phasenraum sind dann wohldefiniert, für allgemeine Jetcone-approximation) auf einfachere Integrale zurückgeführt werden. Mittels Partiabruchzerlegung werden die Singularitäten der verschiedenen Bereiche des Phasenraumes auf unterschiedliche Summanden verteilt, die sich dann unabhängig integrieren lassen. Die kollinear-divergenten Anteile sind, stark vereinfacht, proportional zu Integralen der typischen Form

$$\int_0^R dR_{12} R_{12}^{1-\epsilon} \frac{1}{(R_{12}^{1-\epsilon})^2} = \frac{R^\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} + \log R + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3-14)$$

Dieses Integral ist in der SCA äquivalent zu I_1 bei [Fur82]. Dabei kann $R_{12} = 2p_1 \cdot p_2$ für sehr kleine Werte von R mit dem kartesischen Abstand zwischen 1 und 2 in der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene

⁵vgl. aber [EKS89]

($Gl.(C-2)$) identifiziert werden. Dort ist dann der winkelabhängige Teil des Integrationsmaßes $d\Delta\eta_{12} d\Delta\Phi_{12} \approx 2\pi R_{12} dR_{12}$. Für große R_{12} sind die Beiträge zu berücksichtigen, die sich aus den höheren Korrekturen zu

$$\cosh y - \cos x = \frac{1}{2} (y^2 - x^2) \left(1 + \frac{1}{6} (y^2 - x^2) + \mathcal{O}(y^4, x^4) \right) \quad (3-15)$$

ergehen. Die Kinematik der (2→3)-Prozesse im singulären IR/C-Limes ist effektiv die einer elastischen (2→2) Streuung. Es ist hier zweckmäßig, anstelle der üblichen Mandelstam-Variablen s, t, u die Kombinationen v, w gemäß

$$v = 1 + \frac{t}{s} \\ 1 - w = \frac{s + t + u}{s + t}$$

(siehe $Gl.(B-5)$) für die Arbeit mit den Singularitäten zu wählen, die dann im Limes $w \rightarrow 1$ die typische Form $1/(1-w)^{1+\epsilon}$ haben. Letztlich tragen die (2→3)-Anteile über den inklusiven Parton-Parton-Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\hat{\sigma}}{dw} \right)^{\text{incl}} (Parton + Parton \rightarrow Jet + X_r) = \frac{A_2^{(r)}}{\epsilon^2} + \frac{A_0^{(r)}}{\epsilon} + A_0^{(r)} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3-16)$$

zum $\epsilon\bar{p}$ -Wirkungsquerschnitt bei[Fur82,Ave89]. In die Ableitung von $Gl.(3-16)$ geht die Entwicklung der Singularitäten nach $1/\epsilon$ ein, also zum Beispiel

$$\left(\frac{1}{1-w} \right)^{1+\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon} \delta(1-w) + \left(\frac{1}{1-w} \right)_+ + \epsilon \left(\frac{\log(1-w)}{1-w} \right)_+ + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3-17)$$

Die $()_+$ -Distributionen sind über die Subtraktion der Singularität im Intervall $[0, 1]$ definiert, es ist

$$\int_0^1 dw f(w) \left(\frac{1}{1-w} \right)_+ \equiv \int_0^1 dw \frac{f(w) - f(1)}{1-w} \quad (3-18)$$

usw. Ist die untere Integrationsgrenze von 0 verschieden, so müssen Korrekturen zur einfachen Subtraktion der Singularität bei $w = 1$ angebracht werden[Fur82,App.B]. Die Koeffizienten aus $Gl.(3-16)$ sind dementsprechend ebenfalls Distributionen. Es ist entscheidend, daß $A_2^{(r)}$ nur im elastischen Limes $\delta(1-w)$ beiträgt und keine $()_+$ -Distributionen enthält. Die Integration über unzugängliche Freiheitsgrade beim Schritt vom identifizierenden zum inklusiven Jet-Wirkungsquerschnitt auf Parton-Ebene projiziert also die ursprünglich separierbaren IR/C-Singularitäten des 3-Teilchen-Phasenraumes auf den gesamten Partonjet-Phasenraum in $d = 4$ Dimensionen, so daß ein Regularisierungsverfahren notwendig wird. Die formale Analogie zur Integration über die unzugänglichen (Schleifen-) Freiheitsgrade der virtuellen $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen fällt sofort auf. Ein Vergleich mit $Gl.(3-4,-3)$ zeigt die identische Struktur der partonischen Wirkungsquerschnitte. Im Sinne eines bekannten, aber für die QCD unbewiesenen Theorems [KLN62] ist erst die Summe über entartete Zustände physikalisch, also insbesondere endlich. Die Ununterscheidbarkeit auslaufender Partonen wird hier durch die Jetdefinition gegeben. Es zeigt sich[Fur82,Ave89,EKS89]⁶ daß die Summe von virtuellen und inklusiven reellen Korrekturen zur harten Streuung keine $1/\epsilon^2$ -Beiträge mehr enthält. Es verbleiben aber noch

⁶aber auch bei allen anderen bisher explizit untersuchten Wirkungsquerschnitten, siehe zum Beispiel [EPH86,Kra84 (inkl. dort zitierter Literatur),Aur87,GPW89,AR89]

1/ε-Singularitäten, da nur über entartete *Endzustände* summiert wurde. Diese lassen sich auf Pole in den Invarianten

$$\frac{1}{s_0 p_i \circ p_i} \text{ und } \frac{1}{s_0 p_p \circ p_i}$$

($i \equiv$ auslaufendes Parton) zurückführen und werden demgemäß als *Anfangszustandssingularitäten* bezeichnet. Sie werden mittels einer Redefinition der NLO Parton-Verteilungen beschriftet. Dies wird im nächsten Abschnitt betrachtet.

Die gegenseitige Neutralisation der Singularitäten im partonischen Endzustand zwischen virtuellen und reellen Korrekturen funktioniert unabhängig vom Zahlenwert des Jetscuts, solange $R > 0$ ist. Voraussetzung ist aber eine eindeutige Zerlegung des 3-Teilchen-Phasenraumes durch die Jetdefinition. Der von [Fur82,Ave89] verwendete Cut δ an Winkel $\Delta\Psi$ zwischen 3^{er} -Impulsen auslaufender Partonen *allein* ist hierfür im allgemeinen nicht hinreichend:

Angenommen, zwei Partonen (1,2) rekombinieren zu einem Furman-Jet, es ist also $|\Psi_1 - \Psi_2| \leq 2\delta$. Hieraus folgt nur

$$p_1 \circ p_2 \leq p_{T,1} p_{T,2} \cosh \eta_1 \cosh \eta_2 (1 - \cos \delta),$$

dies ist aber keine echte Abschätzung. Insbesondere werden die Streuwinkel Θ_i ($GI(A.5)$) nicht eingeschränkt. Bei entsprechenden Kombinationen von η_j und δ ist die Teilnahme auf der Strahlachse auslaufender Partonen am Jet erlaubt. Dann muß auch über in $1/(p_{e,p} \circ p_i)$ singulären Beiträge zum Jet integriert werden. Eine eindeutige Zuordnung der Singularitäten zum Jet, bzw. zum partonischen Eingangszustand ist damit aber nicht mehr gegeben. Die Summe über *entartete 3-Teilchen-Zustände* enthält nun Anteile, die von den virtuellen Korrekturen nicht mehr kompensiert werden können. In der von [Fur82,Ave89] verwendeten Näherung $\delta \ll 1$ tritt diese Inkonsistenz allerdings noch nicht auf, da die Wahrscheinlichkeit für derartige unkorrelierte Rekombinationen $\mathcal{O}(\delta^2)$ ist, also dort vernachlässigt werden konnte. Prinzipiell muß aber

$$\cosh \eta_j \leq \frac{1}{\sin \delta} \quad (3-19)$$

erfüllt sein, um die Strahlachse aus dem Jet auszuschließen. Das im Snowmass-Accord definierte Rekombinationskriterium zerlegt dagegen den 3-Teilchen-Phasenraum eindeutig, da der Abstand zwischen einem beliebigen Streuwinkel $\Theta \neq n\pi$ (n ganze Zahl) und der Strahlachse in der Metrik der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene stets ∞ ist.

3.3.2 Faktorisierung, Parton-Dichten in NLO

Die nach Addition von virtuellen und inklusiven reellen Korrekturen verbleibenden Singularitäten haben eine *universelle* Struktur, d.h., sie hängen nicht vom Typ der einlaufenden Teilchen (γ, p) ab. Es ist bis auf Terme in $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\left(\frac{d\sigma}{dv dw} \right)_{l/\gamma+i/p \rightarrow j e+t X}^{d+t+inel} (s, v, w; \epsilon) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{\gamma'} \mathcal{H}_{i-1}(M_p; \epsilon) \otimes d\sigma_{l/\gamma'}^{LO} \rightarrow j e+t X, \\ + \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{j'} \mathcal{H}_{j'-j}(M_p; \epsilon) \otimes d\sigma_{l/j'}^{LO} \rightarrow j e+t X,$$

Die Faltungen

$$\mathcal{H}_{a'-a}(M_\gamma; \epsilon) \otimes d\sigma_{a'b \rightarrow j e+t X}^{LO} \\ \equiv \int_v^1 \frac{d\omega}{\omega} \mathcal{H}_{a'-a}(\omega, M_\gamma; \epsilon) \left(\frac{d\hat{\sigma}}{dv dw} \right)_{a'b \rightarrow j e+t X, \omega}^{LO} \quad (3-20)$$

bzw. (Zuordnung der Partonen zum Hadron beachten!)

$$\mathcal{H}_{b'-b}(M_p; \epsilon) \otimes d\sigma_{a'b \rightarrow j e+t X}^{LO} \\ \equiv \int_{\omega'}^1 \frac{d\omega'}{\omega'} \mathcal{H}_{b'-b}(\omega', M_p; \epsilon) \left(\frac{d\hat{\sigma}}{dv dw} \right)_{a'b \rightarrow j e+t X, \omega'}^{LO}$$

mit

$$v' \equiv 1 + \frac{u}{s} = 1 - vw \\ w' \equiv \frac{-t}{s+u} = \frac{1-v}{1-vw}$$

über den Anteil des abgespaltenen LO (2→2) Prozesses an der ursprünglichen partonischen Schwerpunktsenergie \sqrt{s} lösen sich trivial auf, da der Born-Wirkungsquerschnitt

$$d\hat{\sigma}/dv dw(\omega s, v, w/\omega) \propto \delta(1-w/\omega)$$

ist. Die 1/ε-Singularität ist in

$$\mathcal{H}_{b'-a}(w, M_H; \epsilon) \equiv -\frac{1}{\epsilon} \mathcal{P}_{b'-a}(w) \left(\frac{4\pi\mu^2}{M_H^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} + C_{b'-a}(w) \quad (3-21) \\ \equiv \left(-\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{\mu^2}{M_H^2} \right) \mathcal{P}_{b'-a}(w) + C_{b'-a}(w)$$

mit der typischen Modifikation der minimal zu subtrahierenden (\overline{MS}) Singularität

$$\frac{1}{\epsilon} \equiv \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \quad (3-22)$$

enthalten. M_H ist die Faktorisierungsskala im Hadron H , μ ist die Renormierungsskala. Die Skalenabhängigkeit ist nur im zu den Splitting-Funktionen $\mathcal{P}_{b'-a}$ [AP77] proportionalen Teil enthalten, die endlichen Anteile C hängen von M_H und μ nicht ab. Faßt man nun im γp -Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{dV dW} \right)_{\gamma+p \rightarrow j e+t X} (S, V, W) = \sum_{ij} \int \frac{dv}{1-v} \int \frac{dw}{w} \tilde{f}_i^j(x_1 = \frac{VW}{v}) \tilde{f}_j^i(x_2 = \frac{1-V}{1-v}) \quad (3-23) \\ \cdot \left[\left(\frac{d\hat{\sigma}}{dv} \right)_{l/\gamma+i \rightarrow j e+t X}^{LO} \delta(1-w) + \left(\frac{d\hat{\sigma}}{dv dw} \right)_{l/\gamma+i \rightarrow j e+t X, s}^{e+l+inel} (s, v, w; \epsilon) \right]$$

die gemäß $GI(3-19)$ auftretenden Beiträge des LO Wirkungsquerschnittes zusammen, so erhält man bis auf Terme in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

$$\left(\frac{d\sigma}{dV dW} \right)_{\gamma+p \rightarrow j e+t X} (S, V, W) = \sum_{ij} \int \frac{dv}{1-v} \int \frac{dw}{w} \tilde{f}_i^j(x_1 = \frac{VW}{v}) \tilde{f}_j^i(x_2 = \frac{1-V}{1-v}) \quad (3-24) \\ \cdot \left[\left(\frac{d\hat{\sigma}}{dv} \right)_{l/\gamma+i \rightarrow j e+t X}^{LO} \delta(1-w) + \frac{\alpha_s}{2\pi} K_{i+j \rightarrow j e+t X, s}(s, v, w; M_\gamma, M_p, \mu; R) \right]$$

mit wohldefinierten α_s -Korrekturen zur harten Streuung[Ave89]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(s, v, w; M_\gamma, M_H, \mu; R) = & \quad (3-25) \\
 K_0^{(\gamma)}(v, w) + K_1^{(\gamma)}(v, w) \log R + K_2^{(\gamma)}(v, w) \log \frac{M^2}{s} + K_3^{(\gamma)}(v, w) \log \frac{M^2}{s} + K_4^{(\gamma)}(v, w) \log \frac{\mu^2}{s} \\
 + \left[K_0^{(\phi)}(v) + K_1^{(\phi)}(v) \log R + K_2^{(\phi)}(v) \log \frac{M^2}{s} + K_3^{(\phi)}(v) \log \frac{M^2}{s} + K_4^{(\phi)}(v) \log \frac{\mu^2}{s} \right] \delta(1-w) \\
 + \left[K_0^{(\omega)}(v, w) + K_1^{(\omega)}(v, w) \log R + K_2^{(\omega)}(v, w) \log \frac{M^2}{s} + K_3^{(\omega)}(v, w) \log \frac{M^2}{s} \right] \left(\frac{1}{1-w} \right) + \\
 + \left[K_0^{(\epsilon)}(v, w) \right] \left(\frac{\log(1-w)}{1-w} \right) +
 \end{aligned}$$

In $Gl.(3-24)$ haben die *Parton-Verteilungen* in $NLO(\bar{f})$ durch Absorption der Singularitäten gemäß

$$\bar{f}_i^H(x, M_H^2) \equiv \sum_{i'} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(\delta_{ii'} \delta(1-y) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \gamma_{L, -i}(y, M_H; \epsilon) \right) f_{i'}^H(x/y) \quad (3-26)$$

die Stelle der „nackten“ Parton-Dichten eingenommen. Bildet man ihre die Ableitung nach $t = \log(M/M_0)^2$, so fällt der $1/\epsilon$ -Anteil heraus. Er ist also implizit in die experimentell bestimmten Randbedingungen⁷ der Altarelli-Parisi-Entwicklungsgleichungen [AP77] eingearbeitet worden. Der Wirkungsquerschnitt $Gl.(3-24)$ ist damit $\mathcal{O}(\epsilon^0)$.

Der in $Gl.(3-20)$ mit C bezeichnete endliche Anteil am Counterterm \mathcal{H} ist im Rahmen der Summenregel frei wählbar. Damit sind aber die Parton-Dichten in NLO keine eigenständigen Objekte mehr, sondern von der Konvention über C abhängig. Im \overline{MS} -Schema ist stets

$$C_{3-\alpha}(w) \equiv 0$$

gesetzt. Die Forderung nach Forminvarianz der Proton-Strukturfunktionen $Gl.(2-9)$ in NLO bestimmt $C_{(\phi, \sigma) - \gamma}$ [AEM79]. Die restlichen Funktionen (Distributionen!) müssen *geeignet gewählt* werden, siehe z. B. [DFLM88, Ave89]. Im aufgelösten Photon tritt die zusätzliche Komplikation auf, daß Mischbeiträge mit dem direkten Photon beitragen [GR83, DGGR85]. Damit hängt auch die Klassifizierung nach aufgelöstem bzw. direktem Photon in NLO vom Faktorisierungsschema ab. Die \overline{MS} -Faktorisierung führt hier zu großen Unterschieden zwischen Parton-Dichten in LO und NLO , was störungstheoretisch nicht wünschenswert ist. Absorbiert man die problematischen Beiträge in die Quark-Dichten $f_q^{\overline{MS}}$ (DIS_{γ} -Faktorisierung), so wird diese Instabilität vermieden [GRV92⁷].

Der volle ep -Wirkungsquerschnitt hängt im Prinzip nicht vom Faktorisierungsschema ab, da dieses nur Anteile innerhalb der Bausteine ($Gl.(3-1)$) verschiebt. „Der“ Anteil des Gluons im Photon an der Photoproduktion ist deswegen eine Frage der Wahl von C . In der Praxis ist die Kompensation aber nur *bis auf höhere Ordnungen* realisiert, im Photon müssen zudem direktes und aufgelöstes Photon addiert werden, da eine Variation von M_s , die einzelnen Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ beeinflusst [BK593]. So wird zum Beispiel der Unterschied zwischen DIS_{γ} - und \overline{MS} -Parton-Dichten nun über eine entsprechende Transformation der harten direkten Streuung, $\gamma + Parton \rightarrow 3 Partonen$, kompensiert, der Anteil $d\hat{\sigma}$ im aufgelösten Photon bleibt unberührt. Die Trennungslinie zwischen den beiden Typen der Photon-Wechselwirkung geht in NLO also durch die Faktorisierung der Anfangszustandsingularitäten.

⁷freie Parameter!

3.3.3 Universalität

Die von [Fur82] und [Ave89] für Jets in $p\bar{p}$ -Reaktionen verwendete Jetdefinition lehnt sich an die von Sterman und Weinberg [StW77] für e^+e^- -Streuung diskutierte an. Der entsprechende Cut δ ist aber abhängig vom Bezugssystem. Für e^+e^- -Annihilation ist dies unproblematisch, stößt aber bereits bei der $p\bar{p}$ -Streuung auf das Problem, daß das partonische Schwerpunktsystem i. a. nicht das Laborsystem ist. Bei HERA kommt noch die Asymmetrie $p_e/p_p \ll 1$ hinzu. Hier ist eine Jetdefinition zu bevorzugen, die invariant unter Boosts entlang der ep -Strahlachse ist. Es soll nun gezeigt werden, daß Furman's Jetdefinition im Zusammenhang mit HERA zwar ungeeignet, aber doch kompatibel mit invarianten Definitionen ist. Hierzu zählt z. B. der Snowmass-Accord [Sno90], auf dem die bei H1 und ZEUS verwendeten Algorithmen aufbauen. Eine Zwischenstellung hat die hier als CDF bezeichnete Definition, die den (4^{er}) Impuls des Jets als Summe der beteiligten Partonimpulse (ähnlich zu [Fur82]) erklärt, aber zu Rekombination den boostinvarianten Cut von [Sno90] verwendet. Die erwähnten Jetdefinitionen sind in Anh. C zusammengefaßt.

Es wird nun gezeigt, daß alle drei hier interessierenden Definitionen im Limes sehr kleiner Jetkegel entarten. Sie liefern dort identische Ergebnisse, wenn die Cutparameter in geeigneter Weise „übersetzt“ werden. Zuerst wird der Zusammenhang zwischen Furman- und CDF-Definition diskutiert, dann derjenige zwischen CDF und Snowmass.

a) Furman vs. CDF

In beiden Fällen wird der 3^{er} -Impuls des Jets als Summe der 3^{er} -Impulse der kombinierten Partonen definiert. Die zusätzliche Definition von E_J bei CDF ist hier irrelevant. Gegeben sei nun neben diesem Jetimpuls

$$\mathbf{p}_J \equiv p_T (\cos \Phi_J, \sin \Phi_J, \sinh \eta_J), \quad |\mathbf{p}_J| = p_J$$

ein Parton i mit dem 3^{er} -Impuls \mathbf{p}_i . Das Skalarprodukt der beiden Impulse masseloser Partonen ist

$$\mathbf{p}_J \cdot \mathbf{p}_i = p_T p_{T,i} (\cos \Delta \Phi + \sinh \eta_J \sinh \eta_i) \quad (3-27)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_J \cdot \mathbf{p}_i &= p_J p_{T,i} \cos \Delta \Psi \\
 &= p_T p_{T,i} \cosh \eta_J \cosh \eta_i \cos \Delta \Psi
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Beziehung zwischen dem Winkel $\Delta \Psi$ zwischen \mathbf{p}_J und \mathbf{p}_i und den Differenzen in Azimuth ($\Delta \Phi$) bzw. Rapidität ($\Delta \eta$):

$$\cos \Delta \Psi = 1 - \frac{\cosh \Delta \eta - \cos \Delta \Phi}{\cosh \eta_J \cosh(\eta_J + \Delta \eta)}. \quad (3-28)$$

Gezeigt wird nun

Gilt $R \ll 1$ oder $\delta \cosh \eta_J \ll 1$, dann sind die Jetdefinitionen nach Furman und CDF identisch und es gilt $R = \delta \cosh \eta_J + \mathcal{O}(R^2)$.⁸

⁸ Alle Relationen verstehen sich in diesem Abschnitt bis auf höhere Ordnungen im Jetcut.

andererseits. Die Gleichungen (9) bis (3) zusammen sind natürlich äquivalent zu

$$p_J^{SM} = \sum_{\nu} p_{\nu} = p_J^{CDF},$$

also zur Aussage, daß die $\{\nu\}$ einen CDF-Jet mit Kegelradius R definieren.

c) Furman vs. Snowmass: folgt aus a) und b).

Der entscheidende Punkt für die asymptotische Äquivalenz von CDF- und Snowmass-Definition ist

$$\cosh \Delta\eta - \cos \Delta\Phi \stackrel{R \ll 1}{\approx} \frac{1}{2} ((\Delta\eta)^2 + (\Delta\Phi)^2), \quad (3-29)$$

siehe auch Gl.(3-15). Ersetzt man also das Kombinationskriterium $Gl.(C-2)$ durch die Forderung

$$\cosh \Delta\eta_i - \cos \Delta\Phi_i \leq \frac{1}{2} R^2, \quad (3-30)$$

so erhält man im Limes kleiner Jets wieder die ursprüngliche Version $Gl.(C-2)$. Das Verhältnis

$$c \equiv \frac{\cosh \Delta\eta - \cos \Delta\Phi}{\frac{1}{2} ((\Delta\eta)^2 + (\Delta\Phi)^2)} \quad (3-31)$$

liegt aber auch für endliche $R \approx 1$ nahe bei 1. Die Kurve $\Delta\eta = \text{arcosh}(\cos \Delta\Phi + 2R^2)$ ist für $R \leq 0.7$ praktisch ein Kreis in der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene. Eine separate Diskussion einer Jetdefinition mit der Bedingung $Gl.(3-29)$ ist also nicht erforderlich.

3.4 Übergang zu endlichen Jets

3.4.1 Vom Kollinearitäts-Cut zum Jet ?

In den vorhergegangenen Abschnitten wurde gezeigt, wie ein wohldefinierter inklusiver Jet-Wirkungsquerschnitt in NLO die Berücksichtigung reeller und virtueller Korrekturen verlangt. Über die kollineare Singularität zweier Partonen im Jet wird im Sinne einer *Ununterscheidbarkeit parallel abgestrahlter Teilchen* integriert, Endzustände mit einem sehr weichen Teilchen werden in einen effektiven $(2 \rightarrow 2)$ -Anteil eingebettet. Die dabei auftretenden Singularitäten in $\epsilon = (d-4)/2$ müssen gegen entsprechende Beiträge in den virtuellen Korrekturen aufgerechnet werden. Es bleibt eine logarithmische Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte vom Winkelcut R in $d = 4$ Dimensionen übrig. In den analytischen Rechnungen tritt zusammen mit R die auf die partonische Schwerpunktsenergie \sqrt{s} bezogene transversale Jetenergie E_T auf. Die Wirkungsquerschnitte hängen von

$$\log R' = \log \left(\frac{R E_T}{\sqrt{s}} \right) \stackrel{R \ll 1}{\approx} \log \frac{\overline{M}_{Jet}}{\sqrt{s}} + \text{const.} \quad (3-32)$$

ab. \overline{M}_{Jet} ist die mittlere invariante Masse des Jets, siehe Kap [5.2], mithin eine typische Energieskala für Prozesse innerhalb des Jetkells. Die Abstrahlung eines Gluons parallel zur Jetachse, zum Beispiel, wird für $R \ll 1$ durch eine Energieskala $\propto R$ charakterisiert, die im Bereich von

Beweis: (i) CDF \Rightarrow Furman.
Das Teilchen i sei im CDF-Jet enthalten, es ist $(\Delta\eta)^2 + (\Delta\Phi)^2 \leq R^2 \ll 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \cosh \Delta\eta - \cos \Delta\Phi \leq \frac{1}{2} R^2 \\ \wedge \quad & \cosh(\eta_J + \Delta\eta) = \cosh \eta_J \\ \stackrel{Gl.(3-28)}{\Rightarrow} \quad & \cos \Delta\psi \leq 1 - \frac{R^2}{2 \cosh^2 \eta_J} \\ \Rightarrow \quad & (\Delta\psi)^2 \leq \frac{R^2}{\cosh^2 \eta_J} \\ \Rightarrow \quad & (max_i |\Delta\psi_i|) = \delta \leq \frac{R}{\cosh \eta_J} \quad (*) \end{aligned}$$

(ii) Furman \Rightarrow CDF.

Es sei also $|\Delta\psi| \leq \delta \ll 1/\cosh \eta_J$.

$$\begin{aligned} \stackrel{Gl.(3-28)}{\Rightarrow} \quad & \cosh \Delta\eta - \cos \Delta\Phi \leq \frac{1}{2} \delta^2 \cosh \eta_J \cosh(\eta_J + \Delta\eta) \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2} R^2 \leq \frac{1}{2} \delta^2 \cosh \eta_J \cosh \eta_J \\ \Rightarrow \quad & R \leq \delta \cosh \eta_J \quad (**) \end{aligned}$$

Aus (*) und (**) folgt $R = \delta \cosh \eta_J (+O(R^2, \delta^2))$, also die Behauptung.

q.e.d.

b) Snowmass vs. CDF

CDF und Snowmass verwenden das gleiche Kombinationskriterium, unterscheiden sich aber in der Definition der kinematischen Jetvariablen. Zu zeigen ist also

Gilt $R \ll 1$, dann sind die Jetdefinitionen nach Snowmass und CDF identisch und es gilt $p_{CDF}^{SM} = p_J^{SM}$.

Beweis: Ein Ensemble von Teilchen $\{\nu\}$ bilde einen Snowmass-Jet mit Kegelradius $R \ll 1$, d.h. $(\Delta\eta_\nu)^2 + (\Delta\Phi_\nu)^2 \leq R^2$ für alle ν . Wegen $Gl.(C-1)$ gilt dann

$$\begin{aligned} E_T^{SM} &= \sum_{\nu} p_{T,\nu}(1 \pm \Delta\eta_\nu) \\ &\approx \sum_{\nu} p_{T,\nu} \exp(\pm \Delta\eta_\nu) \\ \Leftrightarrow E_T^{SM} \exp(\pm i\psi_J^{SM}) &= \sum_{\nu} p_{T,\nu} \exp(\pm i\eta_\nu) \\ \Leftrightarrow E_T^{SM} \cosh \eta_J^{SM} &= \sum_{\nu} p_{T,\nu} \cosh \eta_\nu \\ \wedge E_T^{SM} \sinh \eta_J^{SM} &= \sum_{\nu} p_{T,\nu} \sinh \eta_\nu \end{aligned} \quad \begin{matrix} (0) \\ (3) \end{matrix}$$

einerseits, und für die transversalen Komponenten

$$\begin{aligned} E_T^{SM} &= \sum_{\nu} p_{T,\nu}(1 \pm i\Delta\Phi_\nu) \\ &\approx \sum_{\nu} p_{T,\nu} \exp(\pm i\Delta\Phi_\nu) \\ \Leftrightarrow E_T^{SM} \exp(\pm i\psi_J^{SM}) &= \sum_{\nu} p_{T,\nu} \exp(\pm i\Phi_\nu) \\ \Leftrightarrow E_T^{SM} \cos \Phi_J^{SM} &= \sum_{\nu} p_{T,\nu} \cos \Phi_\nu \\ \wedge E_T^{SM} \sin \Phi_J^{SM} &= \sum_{\nu} p_{T,\nu} \sin \Phi_\nu \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Λ_{QCD} liegt. Die innere Struktur eines Jets mit sehr kleinen Kegelradien wird also durch nicht-perturbative Effekte dominiert. Erst für größere, massive Jets mit $\overline{M_{J,i}}/E_T \approx \mathcal{O}(1)$ wird die Jet-Struktur, zumindest in den äußeren Bereichen des Jetkegels, durch die Störungstheorie vernünftig beschrieben. Es ist also zu erwarten, daß die SCA allein in diesem Bereich die R -Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte nicht mehr alleine beschreiben kann. Es ist notwendig, die aus Gründen der analytischen Handhabung vernachlässigten Beiträge mit endlicher Jetmasse mit einzubeziehen, um mit dem Experiment vergleichbare numerischen Ergebnisse zu erhalten.

In Kap.[3.3.3] wurde bewiesen, daß die SCA in gewisser Weise universell ist, da sie den gemeinsamen Grenzfall kleiner Cuts für einige Jet-Definitionen darstellt. Diese Eigenschaft ist aber nicht konsistent mit der experimentellen Situation, da dort der Jet-Wirkungsquerschnitt vom verwendeten Algorithmus abhängt. Das in Kap.[3.1] formulierte Ziel, schon auf Parton-Ebene eine vernünftige Jetdefinition zu implementieren, ist mit der SCA also noch nicht vollständig erreicht. Es ist notwendig, die Korrekturen zu berechnen, die sich aus der Berücksichtigung aller zum Jet beitragenden Prozesse, insbesondere also der *Rekombination unkorrelierter Partonen* ergeben. Es wird sich zeigen, daß dann auch Feinheiten verschiedener Algorithmen greifen, was sich in unterschiedlichen Gewichten der R^2 -Abweichung vom universellen logarithmischen Verhalten äußert.

3.4.2 Zerlegung des Wirkungsquerschnittes

Die oben angesprochene Universalität ist eine spezielle Eigenschaft der SCA im Limes perturbativ nicht zugänglicher Jetcuts. Sie erweist sich als vorteilhaft, wenn die Korrekturen endlicher Kegelradius (*finite cone corrections*, FCC) für unterschiedliche Jet-Definitionen berechnet werden sollen. Dies kann nun mit entsprechend reduziertem Aufwand an CPU-Zeit und nur einem allgemeinen Schema realisiert werden, dieses wird nun vorgestellt. Sollte der Bezug auf einen bestimmten Jet-Algorithmus hilfreich sein, wird die Definition [Sho90] verwendet.

Es soll ein differentieller inklusiver Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt $d\sigma(R, \mathcal{J})$ für einen gegebenen Jet-Algorithmus \mathcal{J} bestimmt werden. Zu diesem Zweck zerlegt man den mittels \mathcal{J} definierten Jetkegel \mathcal{K}_R mit dem Radius R in der (η, Φ) -Ebene in einen inneren Kegel \mathcal{K}_{R_0} mit $R_0 \ll R \approx \mathcal{O}(1)$, und den verbleibenden Mantel $\mathcal{M}(R_0, R) = \mathcal{K}_R \setminus \mathcal{K}_{R_0}$. Der Wirkungsquerschnitt wird dementsprechend in

$$d\sigma(R, \mathcal{J}) = d\sigma(R_0) + d\sigma(\mathcal{M}(R_0, R), \mathcal{J}), \quad (3-33)$$

aufgespalten. Eine solche Aufteilung ist nur eine Frage der Definition von $d\sigma(\mathcal{M}(R_0, R), \mathcal{J})$ und deswegen stets möglich. Aber nur für $R_0 \ll 1$ ist der erste Anteil unabhängig vom Jetalgorithmus (Kap.[3.3.3]). Zu $d\sigma(\mathcal{M}(R_0, R), \mathcal{J})$ tragen in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ nur $(2 \rightarrow 3)$ -Baumgraphen bei, deren langreichweitige Anteile zudem bereits in $d\sigma(R_0)$ enthalten sind. Die FCC können unter Verwendung üblicher Monte-Carlo-Methoden [Lep78] numerisch bestimmt werden [Ave91], da $d\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ eine ähnliche Struktur wie ein 3-Jet-Wirkungsquerschnitt in niedrigster Ordnung hat. Betrachten wir nun einmal die entsprechenden Beiträge.

Die drei auslaufenden Partonen i, j, k sind im Phasenraum wohlgetrennt. Für sinnvolle Jetcuts wird aufgrund der Kinematik stets mindestens ein Parton, k , außerhalb von \mathcal{K}_R liegen um den transversalen Jet-Impuls auszutariieren. Gegeben ist nun neben R_0 und R auch der Impuls,

d.h., E_T, η und Φ des Jets. VEGAS erzeuge eine zu $d\sigma(\mathcal{M}(R_0, R), \mathcal{J})$ beitragende Parton-Konfiguration mit 2 Teilchen in \mathcal{K}_R . Sie wird genau dann zu $d\sigma(R_0)$ beitragen, wenn beide Partonen auch in \mathcal{K}_{R_0} liegen. In der Korrektur müssen alle verbleibenden Ereignisse berücksichtigt werden, d.h. es muß sich mindestens ein Parton im Kegelmantel befinden. Es ist zweckmäßig, diesen Beitrag noch nach der Zahl der Partonen in $\mathcal{M}(R_0, R)$ aufzuteilen. Alle Ereignisse, deren Jet aus genau einem Parton i besteht, sind in $d\sigma(R_0)$ enthalten, wenn alle anderen Teilchen von i mindestens um R_0 entfernt sind. Es müssen also diejenigen wieder herausgenommen werden, bei denen sich ein zweites Teilchen im Mantel $\mathcal{M}(R_0, R)$ befindet, da sie nicht zu $d\sigma(E_T, \eta, \Phi)$ beitragen. In $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ist folglich

$$d\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{J}) = \sum_{ij} d\sigma(i, j \in \mathcal{M} | \text{Jet} = i \oplus j) + d\sigma(i \in \mathcal{K}_{R_0}, j \in \mathcal{M} | \text{Jet} = i \oplus j) - d\sigma(i \in \mathcal{K}_{R_0}, j \in \mathcal{M} | \text{Jet} = i) \quad (3-34)$$

Der erste Summand in Gl.(3-34) ist endlich, da i mit $E_{T,i} \rightarrow 0$ aus \mathcal{M} heraus in das Zentrum des Jets hineinläuft. Solche Ereignisse tragen zu $d\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ nicht bei. Dagegen enthalten die anderen beiden eine IR-Singularität für $E_{T,i} \rightarrow 0$, da die regularisierenden Terme der virtuellen Korrekturen

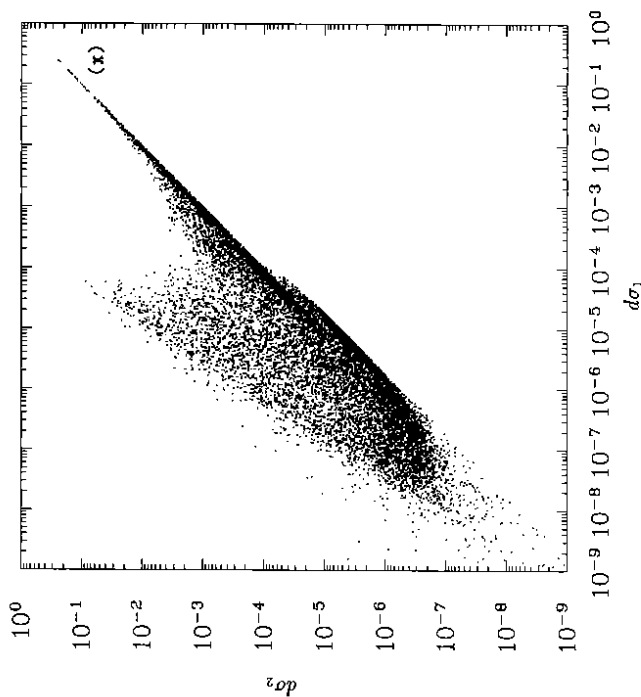


Bild 3-4: Zur IR-Singularität in den Beiträgen zu den Korrekturen endlicher Jetkegel Gl.(3-34), siehe Text.

fehlen. In diesem Limes haben aber beide Beiträge die gleiche Struktur: ein Teilchen definiert vollständig den Jet, eines variiert ihn aus und das dritte ist kinematisch effektiv nicht vorhanden. Über das unterschiedliche Vorzeichen kompensieren sich die divergenten Terme, so daß $d\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{J}) - d\sigma(R_c)$ endlich bleibt. Für diese Arbeit wurde ein FORTRAN-Programm erstellt, das $d\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ in einem Schritt berechnet. Dies vermeidet die explizite Aufteilung in singuläre Summanden gemäß Gl.(3-34), so daß ein IR-Cut im Prinzip nicht notwendig ist. Die Beiträge kinematisch ähnlicher Ereignisse im kritischen Bereich sollten sich bereits im Integranden eliminieren. Für die numerische Auswertung ist trotzdem die Einführung eines IR-Cuts hilfreich, um die Monte-Carlo-Iterationen zu stabilisieren: In der Nähe der Singularität werden große Zahlen gleicher Größenordnung voneinander subtrahiert, was aufgrund der endlichen Maschinengenauigkeit mit großen Fehlern im Endergebnis verbunden sein kann. Da dieser Cut bei einer analytischen Durchführung nicht auftritt, muß er so gewählt werden, daß der Wirkungsquerschnitt von ihm weitestgehend unabhängig ist. Verlangt man z.B.

$$E_j \geq \zeta E_{jet} \quad (3-35)$$

oder auch

$$E_{T,j} \geq \zeta E_T$$

so muß ζ einerseits so klein sein, daß keine relevanten Beiträge abgeschnitten werden. Auf der anderen Seite muß natürlich die Singularität abdeckt werden. Mit einer *plausiblen* Argumentation lassen sich von R und R_c abhängige entsprechende Ausdrücke für ζ „ableiten“ [Ave91]⁹, im Prinzip genügt aber eine feste kleine Zahl ζ . In Bild (3-4) ist zur Illustration das Ergebnis eines Monte-Carlo-Laufes dargestellt. Wie oben angedeutet, ist hier

$$d\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{J}) = \int d\Phi_3(d\sigma_2 - d\sigma_1)$$

Es sind die generierten Paare $(d\sigma_1, d\sigma_2)$ eingetragen, die zu $d\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ beitragen ($d\sigma_i \equiv$ Anteil mit i Teilchen im Jet). Man erkennt deutlich, daß mit wachsendem $d\sigma_1$ zunehmend nur noch Ereignisse mit $d\sigma_1 = d\sigma_2$ auftreten. ζ bestimmt einen maximalen Wert $d\sigma(\zeta)$ für die $d\sigma_i$, der in diesem asymptotischen Bereich liegen muß. Andererseits sollte er möglichst nahe am Hauptbeitrag zum Wirkungsquerschnitt liegen, um eine optimale Statistik zu sichern. Die hier verwendeten Werte für ζ führen typischerweise zum Abschneiden oberhalb von $\langle x \rangle$ in Bild (3-4), was für eine gute Statistik ausreicht.

Jetdefinitionen beziehen sich nur auf die Kinematik des Streuprozesses, so daß im harten Endzustand über alle Permutationen der Partonen zu summieren ist. Zu den FCC, Gl.(3-34), tragen die $(2 \rightarrow 3)$ -Prozesse also nur über

$$\langle \mathcal{M}^2 \rangle_{\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b, \mathcal{P}_c, \mathcal{P}_d, \mathcal{P}_e, \mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g, \mathcal{P}_h, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j, \mathcal{P}_k, \mathcal{P}_l, \mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_o, \mathcal{P}_p, \mathcal{P}_q, \mathcal{P}_r, \mathcal{P}_s, \mathcal{P}_t, \mathcal{P}_u, \mathcal{P}_v, \mathcal{P}_w, \mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z} \equiv \sum_{(123) \in \mathcal{G}_n} \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_n)} |\mathcal{M}|^2 [a|\mathcal{P}_{a/l}| + b|\mathcal{P}_{b/l}|]_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}_n)} \quad (3-36)$$

bei. $\sum_{\mathcal{J}_0}$ bezeichnet die Summe über die verschiedenen Endzustände einer Klasse \mathcal{J}_0 , siehe Tab.(3-1). Die dort angegebenen Symmetrien der quadrierten Matrixelemente laufen teilweise auf Symmetrien von $\langle \mathcal{M}^2 \rangle_{\mathcal{J}_0}$ im Anfangszustand hinaus, da ein Vertauschen der Zuordnung der einlaufenden Partonen zu den Impulsen in Gl.(3-36) meist durch eine Umstellung der Summanden in $\sum_{\mathcal{P}}$ wieder aufgehoben wird. Für $\mathcal{J}_0 = 3$ ist dies trivial und für $\mathcal{J}_0 \neq 5$ durch einfaches

⁹Beachte den Unterschied der dortigen Gl.(7) zum entsprechenden Preprint CERN-TH.5710/90!

Aufschreiben sofort explizit zu zeigen. Für $\mathcal{J}_0 = 5$ ($g + G \rightarrow \dots$) gilt die Invarianz

$$\langle \mathcal{M}^2 \rangle_{\mathcal{P}_a}^{(j_0)} (\mathcal{P}_a = x_1 \mathcal{P}_a, \mathcal{P}_a = x_2 \mathcal{P}_a; \{\mathcal{P}_{j_{in a l}}\}) = \langle \mathcal{M}^2 \rangle_{\mathcal{P}_a}^{(j_0)} (\mathcal{P}_a = x_2 \mathcal{P}_a, \mathcal{P}_a = x_1 \mathcal{P}_a; \{\mathcal{P}_{j_{in a l}}\}) \quad (3-37)$$

allerdings nicht mehr. Gl.(3-37) vereinfacht die Summe über den partonischen Eingangszustand im ep -Wirkungsquerschnitt, da die Parton-Dichten für $\mathcal{J}_0 \neq 5$ herausgezogen werden können. Es tragen dann nur noch die Kombinationen

$$(\mathcal{P}_a^i(x_1) \mathcal{P}_b^j(x_2) + \mathcal{P}_b^j(x_1) \mathcal{P}_a^i(x_2)) \langle \mathcal{M}^2 \rangle_{\mathcal{P}_a}^{(j_0)} (\mathcal{P}_a = x_1 \mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b = x_2 \mathcal{P}_a; \{\mathcal{P}_{j_{in a l}}\}) \quad (3-38)$$

bei, wobei symmetrische Flavournutzen $N_j^i = N_j^i$ angenommen werden. Eine Berücksichtigung dieser Symmetrien bei der numerischen Auswertung spart (ca. 20%) CPU-Zeit.

3.4.3 Bemerkungen zur Jetdefinition

Das Rekombinationskriterium von Furman[Fur82] ist in einigen Bereichen des 3-Teilchen-Phasenraumes nicht eindeutig[EKS89]. Einerseits zählt ein Teilchen i genau dann bereits als selbständiger Jet, wenn alle anderen Teilchen j im Endzustand weiter als der gewählte Jetcut R von ihm entfernt sind, also $R_{ij} > R$ gilt. Andererseits bilden zwei Teilchen i, j zusammen einen Jet genau dann, wenn sie beide von ihrem gemeinsamen Schwerpunkt, dem Jet, nicht weiter als R getrennt sind, also

$$R_i < R \wedge R_j < R$$

ist. Diese beiden Bedingungen schließen sich gegenseitig nicht aus. Jedes Ereignis, für daß

$$\left. \begin{array}{l} R_i \\ R_j \end{array} \right\} < R < R_{ij} \quad (3-39)$$

erfüllt ist trägt damit, abgesehen von dem dritten Teilchen k , *dreimal* zum inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt bei.

1. (i) = Jet
2. (j) = Jet
3. (ii) = Jet

Um für jedes Ereignis eine eindeutige, nicht vom Startpunkt des Jet-Algorithmus abhängende Jetmultiplizität zu gewährleisten, muß dieser zusätzlich definieren, wie in den durch Gl.(3-39) charakterisierten Bereichen des Phasenraumes Jets zu bilden sind. Eine Festlegung auf die 3. Möglichkeit zeichnet die Jets durch eine *minimale Multiplizität* aus. Der Einfluß der Zahlweise wird in Kap.[4.2] quantitativ ausgewertet.

Untersuchungen der inneren Jetstruktur bei CDF zeigen, daß Parton-Jets im Vergleich zu den hadronischen Jets im Experiment eine breitere Energieverteilung in der (η, Φ) -Ebene haben, die allein durch die Wahl der Skalen nicht nachvollzogen werden kann. Die experimentellen Algorithmen scheinen also im Bereich von Gl.(3-39) eher zur Separation als zur Vereinigung von

4 Der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Eigenschaften der NLO Korrekturen am Beispiel des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes in Photoproduktion mit aufgelösten Photonen ausführlich diskutiert. In Kap.[4.1] wird der dabei verwendete Standard der Parameter zusammengefaßt, um die nachfolgende Diskussion in Kap.[4.2] übersichtlicher gestalten zu können.

4.1 Überblick und verwendete Parameter

Die Abhängigkeit des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes von der Wahl der Partonverteilungen wurde in Kap.[2.3] in LO, $\mathcal{O}(\alpha_s)$, ausführlich untersucht. Es ist nicht zu erwarten, daß sich die Ergebnisse dieser Diskussion entscheidend ändern, wenn die NLO Korrekturen der Parton-Parton-Streuung mitgenommen werden. Die im folgenden Abschnitt gezeigten Ergebnisse wurden aus diesem Grund mit der festen Kombination

$$\begin{aligned} f_{i/p} &: \text{Morfín \& Tung, Set B1, } \overline{\text{MS}}[\text{MT91}] \\ f_{j/r} &: \text{Glück, Reya \& Vogt, NLO, } \overline{\text{MS}}^{(1)}[\text{GRV92}\gamma] \end{aligned}$$

berechnet. Die Parametrisierungen von [MT91] fiten zwar nicht die neuesten Daten bei kleinen x , dies ist aber hier ($x \geq 0.03$) nicht relevant. Im Proton stehen Partondichten in NLO auch im Faktorisierungsschema DIS zur Verfügung [AEM78,DPLM88,MT91]. Ihre konsistente Verwendung erfordert eine explizite Transformation der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen der harten Streuung in $\overline{\text{MS}}$ -Notation. Speziell für das Photon wurde von Glück *et al.* [GRV92 γ] ein weiteres Faktorisierungsschema (DIS_γ) entwickelt, das die unerwünschte Singularität von NLO Partonverteilungen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema für $x_{i/\gamma} \rightarrow 1$ eliminiert. Der Unterschied zwischen DIS_γ und $\overline{\text{MS}}$ im aufgelösten Photon kann dementsprechend nur über den Beitrag des direkten Photons kompensiert werden [Vogt92,BKS93]. Sein Einfluß auf das aufgelöste Photon allein soll im folgenden Abschnitt kurz diskutiert werden, ansonsten wird aber stets die $\overline{\text{MS}}$ -Version von GRV verwendet. Es soll noch einmal betont werden, daß die Kombination des harten Wirkungsquerschnittes in DIS-Faktorisierung mit $\overline{\text{MS}}$ - (und DIS_γ -) Partondichten — und *vice versa* — sinnlos ist. Sie erzeugt einen Fehler in der betrachteten Ordnung in α_s .

Während die harte Streuung in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ mit $\alpha_s^{(1)}$ aus Gl.(2-35) kombiniert wird, wird in NLO durchgehend die 2-Schleifen-Näherung der laufenden Kopplung [PDG92], also

$$\alpha_s^{(2)}(\mu; \Lambda, N_f, N_c) = \alpha_s^{(1)}(\mu; \Lambda, N_f, N_c) \left(1 - \frac{\beta_1 \log \log(\mu/\Lambda)^2}{\beta_0^2 \log(\mu/\Lambda)^2} \right) \quad (4-1)$$

mit $N_c = 3$, $\Lambda = 194 \text{ MeV}$ und $N_f = 4$ aktiven Quarkflavours, unabhängig von der Renormierungsskala μ , verwendet. Solange die Skalen nicht explizit variiert werden, ist stets $\mu = M = E_T$ (bzw. $= p_T$ im Zusammenhang mit $d^2\sigma/dp_T d\eta$) fixiert. Alle wesentlichen Eigenschaften des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes werden hier anhand eines Conealgorithmus diskutiert, der auf dem *Snoumass-Accord*[Sno90] basiert. Wie in Kap.[3.3] dargelegt wurde, entarten im Limes sehr kleiner Jets, SCA, eine Reihe verschiedener Conealgorithmen, so daß einfache Zusammenhänge zwischen den jeweiligen Cutparametern angegeben werden können. Um eine erste Vorstellung vom Einfluß der Jetdefinition auf den Wirkungsquerschnitt bei experimentell

¹¹wenn nicht explizit DIS_γ verwendet wird

Jetclustern zu neigen. Dies kann auf Parton-Ebene durch Einführung eines Separationsparameters R_{sep} simuliert werden[EKS92]. Zwei Partonen i, j werden nun nicht mehr zu einem Jet zusammengefaßt, wenn zwar die Bedingung (3-39) erfüllt ist, aber außerdem

$$R_{ij} > R_{sep} \quad (3-40)$$

gilt. Man erhält den ursprünglichen Algorithmus zurück, wenn $R_{sep} = 2R$ gesetzt wird. Der Einfluß von R_{sep} wird hier nicht weiter diskutiert, da dieser Parameter primär der Anpassung des Jetalgorithmus an den experimentell verwendeten dient.

In dieser Arbeit werden ausschließlich sogenannte *Conealgorithmen* betrachtet, in denen Teilchen über einen Winkelcut zum Jet gezählt werden. Jetdefinitionen vom Typ des JADE-Algorithmus¹⁰ verwenden eher Cuts in der invarianten Masse von Teilchenpaaren, zum Beispiel

$$M_{ij}^2 \equiv p_i \cdot p_j = p_T i p_T j (\cosh \Delta\eta_{ij} - \cos \Delta\phi_{ij}) \stackrel{!}{\leq} \epsilon (E_T^2)^2 \quad (3-41)$$

mit einem dimensionslosen Cutparameter ϵ . Die Unterschiede zu den reinen Winkelcuts zeigen sich in der Behandlung weicher auslaufender Teilchen mit $p_{T,k} \rightarrow 0$. Während sie nach Gl.(3-41) stets kombiniert werden, hängt dies bei Gl.(C-2) noch vom Streuwinkel ab. Die beiden Typen zeigen also ein unterschiedliches IR-Verhalten. Mit der hier diskutierten Methode können also Jetdefinitionen vom JADE-Typ nicht behandelt werden, es müssen weitere Terme zu Gl.(3-34) hinzugefügt werden.

¹⁰Siehe zum Beispiel [Cat91] und die dort zitierte Literatur.

zugänglichen Jets zu bekommen, soll noch ein weiterer Jetalgorithmus diskutiert werden. Im Unterschied zu [Sno90] wird hier die Summe der 4^{er} -Impulse der Teilchen im Kegel als 4^{er} -Impuls des Jets definiert, siehe Anh. C. Insbesondere ist dann die Jetenergie die Summe der Teilchenenergien. Das Kombinationskriterium ist aber ebenfalls durch $GL(C-2)$ gegeben. Im Zusammenhang mit dieser Definition soll der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/dp_T d\eta$ betrachtet werden. Er wird hier als **CDFp** bezeichnet. Im Snowmass-Accord ist, neben Rapidität und Azimuth, nur die transversale Energie des Jets, E_T , definiert. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel im Zusammenhang mit dieser Definition ausschließlich $d^2\sigma/dE_T d\eta$ betrachtet. Um die Notation abzukürzen, wird er im folgenden **SME** genannt. In beiden Fällen müssen Teile des 3-Jet-Wirkungsquerschnitt wieder abgezogen werden, wenn jedem Ereignis eine eindeutige Zahl von Jets zugeordnet werden soll (Kap. [3.4.3]). Ein direkter Vergleich dieser beiden Wirkungsquerschnitte ist für große R nicht sofort möglich. Der Unterschied zwischen $d^2\sigma/dE_T d\eta$ und $d^2\sigma/dp_T d\eta$ verschwindet aber quadratisch mit der invarianten Jetmasse, also mit dem Jetcut R , siehe Kap. [5]. In Kap. [5.3] wird der nicht direkt zugängliche Wirkungsquerschnitt **SMp**, also $d^2\sigma/dp_T d\eta$ für Snowmass-Jets, über die mittlere Jetmasse bestimmt. Es zeigt sich, daß die Auswirkungen der verschiedenen Jetdefinitionen allein sehr klein sind. Eine separate Diskussion beider Algorithmen anhand eines Wirkungsquerschnittes ist deswegen nicht erforderlich. In Kap. [4.2] werden **SME** und **CDFp** parallel untersucht. **Zur Vereinfachung der Notation bezeichne dann φ_T , je nach Zusammenhang, die transversale Energie oder den Transversalimpuls des Jets.** Es ist also

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi_T d\eta} \equiv \begin{cases} d^2\sigma/dE_T d\eta, & \text{Snowmass(SME)} \\ d^2\sigma/dp_T d\eta, & \text{CDF(CDFp)} \end{cases} \quad (4-2)$$

Die nun folgende Auswertung beschränkt sich auf die Diskussion des doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnittes $d^2\sigma/d\varphi_T d\eta$ für den Prozess $ep \rightarrow \text{Jet} + X$, da sich an ihm bereits alle wesentlichen Eigenschaften der NLO Korrekturen zeigen. Die Integration über einen weiten Jet-Freiheitsgrad hin zu den bei HERA bereits gemessenen Wirkungsquerschnitten $d\sigma/dE_T$ oder $d\sigma/d\eta$ [H1.93a] ist unproblematisch. Man erhält aber nur in quantitativer Hinsicht neue Aussagen, die zudem durch Einschränkung der Wertebereiche kinematischer Variablen (Cuts) zum Vergleich an das Experiment angepaßt werden müssen. In diesem Zusammenhang sei angemerkt, daß erste, vorläufige $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Rechnungen zu den von der H1-Kollaboration bei HERA gemessenen E_T - und η_{Lab} -Spektren [H1.93a] zu ähnlichen Ergebnissen wie die Born-Rechnung, bzw. PYTHIA-Simulation führt [Sal93]. Insbesondere bleibt eine Diskrepanz zwischen theoretischer Rechnung und den Daten bestehen.

Der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Wirkungsquerschnitt wurde, wie in Kap. [3] diskutiert, in mehreren Schritten berechnet. Zuerst wurde ein sehr kleiner Wert des Jetcuts ($R_0 = 0.01$) im Gültigkeitsbereich der SCA fixiert, und der entsprechende Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/dE_T d\eta|_{R_0}$ bestimmt. Dabei muß der von [Ave89] verwendete (Furman-)Cut δ gemäß $GL(C-7)$ aus R_0 und der jeweiligen Rapidität bestimmt werden. δ und η sind im gleichen Bezugssystem zu nehmen. Mit Hilfe der numerischen Integrationsroutine VEGAS[Lep78] kann nun die Differenz zum vollständigen $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ Wirkungsquerschnitt sowohl für Snowmass- als auch für CDF-Jets bestimmt werden [KS93a]. Die bei diesem Verfahren in einigen Bereichen des 3-Jet-Phasenraumes auftretende Mehrfachzählung wird nun ebenfalls mittels VEGAS-Integration numerisch bestimmt und im Endergebnis berücksichtigt. Um unmittelbare SCA-Wirkungsquerschnitte im Sinne von [Ave89] angeben zu können, wurden die in den folgenden Abschnitten gezeigten Ergebnisse für $R = 0.01$

NICHT weiter korrigiert. Aufgrund des zu kleinen R ist dies für einen Vergleich mit dem Experiment irrelevant. Die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl des inneren Kegels, R_0 , wurde in repräsentativen Stichproben im Bereich $R_0 \in [10^{-4}, 0.1]$ bestätigt. Die auftretenden Abweichungen im Endergebnis liegen eindeutig im Bereich des statistischen Fehlers (natürlich unter der Bedingung, daß R_0 im Gültigkeitsbereich der SCA liegt).

Ersetzt man das Elektron durch ein (Anti-)Proton per

$$f_{i/e}(x) \equiv \int_x^1 \frac{dx_{i/\tau}}{x_{i/\tau}} f_{i/\tau}(x_{i/\tau}) f_{\tau/e}(x_{\tau/e}) \longrightarrow f_{i/p}(x),$$

so können mit diesem Ansatz TeVatron-Wirkungsquerschnitte berechnet werden. Soweit die dort verwendeten Parameter angegeben waren und zur Verfügung standen, konnten die in der Literatur angegebenen Ergebnisse [Ave91, EKS92] bestätigt werden.

4.2 Diskussion der numerischen Ergebnisse

Um einen Überblick zu erhalten, werden zunächst einige E_T - und η_{Lab} -Verteilungen betrachtet. In Bild (4-1) ist **SME** mit $R = 1$ für verschiedene Rapiditäten¹² $\eta_{\text{Lab}} \in \{-3, -2, -1\}$ aufgetragen. Verhältnisse zum (2 \rightarrow 2) Born-Wirkungsquerschnitt einerseits, und zu **CDFp** andererseits, sind in Tab. (4-1) für $R = 1$ und $\eta_{\text{Lab}} = -2$ angegeben. Die Unterschiede zu vergleichbaren Zahlen in [KS93a] resultieren aus der hier berücksichtigten Korrektur möglicher Mehrfachzählung, siehe Kap. [3.4.3] und die Diskussion am Ende dieses Abschnittes. Es sind

$$\begin{aligned} r_K(\varphi_T, \eta_{\text{Lab}}; R) &\equiv \frac{d^2\sigma/dE_T d\eta|_{\text{SME}}}{d^2\sigma/dE_T d\eta|_{\text{Born}}} \quad ; \quad E_T = \varphi_T, \eta_{\text{Lab}} \\ &\text{und} \\ r_{\text{Ave}}(\varphi_T, \eta_{\text{Lab}}; R) &\equiv \frac{d^2\sigma/dE_T d\eta|_{\text{SME}}}{d^2\sigma/dE_T d\eta|_{\text{CDFp}}} \quad ; \quad E_T = \varphi_T, \eta_{\text{Lab}} \end{aligned} \quad (4-3)$$

¹² zur Definition des Vorzeichens von η_{Lab} siehe Anh. A

φ_T [GeV]	r_K	r'_{Ave}	r_{Ave}
5	1.13	1.82	1.19
7.5	1.12	1.76	1.15
10	1.14	1.75	1.16
12.5	1.14	1.72	1.15
15	1.14	1.71	1.14
20	1.17	1.72	1.15
25	1.17	1.71	1.12
30	1.19	1.72	1.13
40	1.19	1.70	1.11
50	1.22	1.73	1.13

Tabelle 4-1: Verhältnisse des Snowmass-Wirkungsquerschnittes **SME** zu $d^2\sigma/dE_T d\eta$ in LO (r_K), zum mit $\alpha_s^{(2)}$ berechneten **LO** Wirkungsquerschnitt (r'_{Ave}) und zu **CDFp** (r_{Ave}); $p_T^{\text{CDF}} \equiv \varphi_T \equiv E_T^{\text{SME}}$. Es ist $R = 1$ und $\eta_{\text{Lab}} = -2$. Beachte, daß $r_K/r'_K = (\alpha_s^{(2)}/\alpha_s^{(1)})^2$ ist.

definiert. In Bild (4-2) sind $\eta_{L,ab}$ -Verteilungen für verschiedene Werte von E_T (5, 15, 50 GeV) aufgetragen. Neben CDF_p sind der Wirkungsquerschnitt in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ und SM_E für $R = 0.1, 0.7$ und 1.0 gezeigt. Während die $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ -Korrekturen für $R = 1$ im Bereich des Maximums, $\eta_S \approx 0$, über einen großen Bereich von E_T ungefähr +15% beitragen, werden sie zum Rand des Phasenraumes hin kleiner und teilweise sogar negativ. Dort ist dann $\tau_K < 1$. Mit zunehmender Annäherung der Jetachse an die $e\gamma$ -Strahlachse wächst, bei festem E_T , die Jetenergie mit $\cosh \eta$ stark an. Die 3-Jet-Beiträge werden dann relativ zu den 2-Jet-Beiträgen unterdrückt. Die geringere Abhängigkeit des Verhältnisses r'_K von E_T zeigt, daß der Anstieg von τ_K im Bereich großer E_T auf den wachsenden Unterschied zwischen 1-Schleifen- bzw. 2-Schleifen-Näherung der laufenden Kopplung $\alpha_s(\mu)$ zurückzuführen ist.

Sowohl τ_K als auch $\tau_{A,iso}$ hängen natürlich von R ab. Man erkennt in Bild (4-2), daß für $R_o \approx 0.7$ über einen weiten Bereich in $\eta_{L,ab}$ die LO Kurve mit SM_E übereinstimmt, also $\tau_K = 1$ ist. Allerdings hängt der Wert von R_o von der Definition des Born-Wirkungsquerschnittes ab, siehe hierzu die Diskussion in Kap.[2]. So führt zum Beispiel die Verwendung der laufenden Kopplung α_s in 2-Schleifen-Näherung im Born-Wirkungsquerschnitt bei kleineren $R_o \approx 0.25(5GeV)$ bis zu $R_o \approx 0.15(50GeV)$ zu $r'_K = 1$.

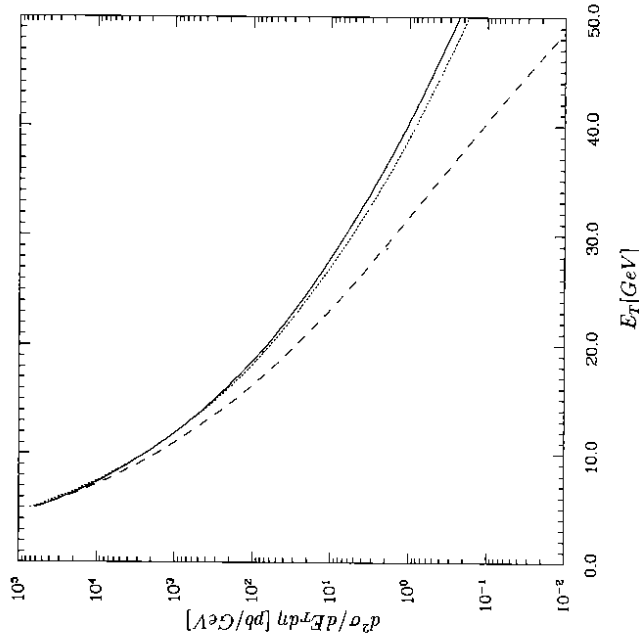


Bild 4-1: E_T -Spektrum in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ für Snowmass-Jets mit $R = 1$. Es ist $\eta_{L,ab} = -3$ (---), -2 (···) und -1 (—). Alle weiteren Parameter siehe Kap.[4.1].

Das unterschiedlich starke Abfallen des Wirkungsquerschnittes mit E_T bei verschiedenen Rapiditäten erklärt sich aus dem Verschieben des Phasenraumes, insbesondere bei $\eta_{L,ab} = -3$. Man erkennt außerdem, daß sich die E_T -Verteilungen von $\eta_{L,ab} = -2$ und $\eta_{L,ab} = -1$ bei $E_T \approx 10GeV$ kreuzen, bzw. sich das Maximum der η -Verteilung mit zunehmender transversaler Energie des Jets hin zu positiveren $\eta_{L,ab}$ verschiebt. Dies ist auf eine Verschiebung in den Gewichten der Subprozesse im Gesamt-Wirkungsquerschnitt zurückzuführen. Das weiche Gluon G , dominiert bei kleinen E_T den Bereich eher negativer $\eta_{L,ab}$ und prägt hier das Maximum des gesamten Wirkungsquerschnittes. Es wird aber mit zunehmendem E_T vom harten Quark q , verdrängt, das in $e(\gamma)$ -Vorwärtsrichtung maximal beiträgt. Dieser Zusammenhang wurde in Kap.[2] anhand des LO Wirkungsquerschnittes bereits diskutiert. In NLO verschmirt die scharfe Grenze zwischen Quarks und Gluonen im Photon bzw. im Proton als Konsequenz der in NLO notwendigen Faktorisierungsprozedur. In einer festen Ordnung der Störungstheorie hat die Wahl eines Faktorisierungsschemas zwar keinen Einfluß auf die Summe aller Beiträge, erlaubt aber eine gewisse Willkür bei der Interpretation des Eingangszustandes des harten Streuprozesses. Dieses Problem tritt ebenfalls auf, wenn in NLO die Anteile von direktem und aufgelöstem Photon unterschieden werden sollen [Aur87,BKS93].

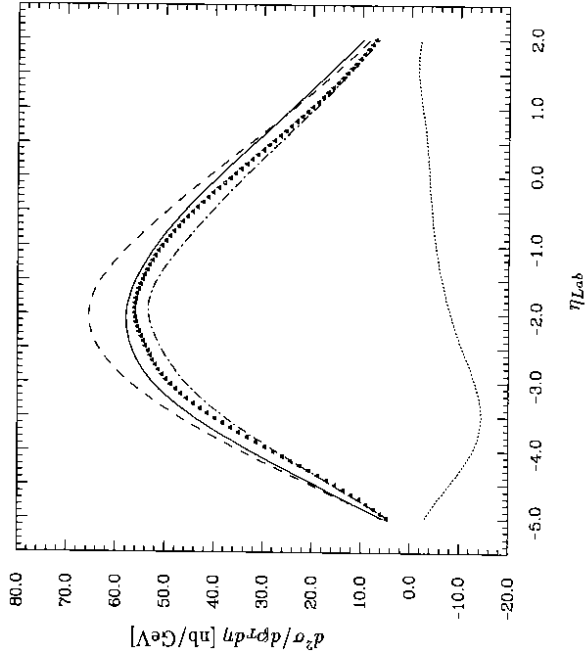


Bild 4-2a: Rapiditätsverteilung für $E_T = 5GeV$. Neben dem Born-Wirkungsquerschnitt (—) ist SM_E mit $R = 0.01$ (···), 0.7 (---) und 1.0 (- · - ·) gezeigt. Außerdem ist CDF_p mit $R = 1$ aufgetragen ($\Delta\Delta\Delta$).

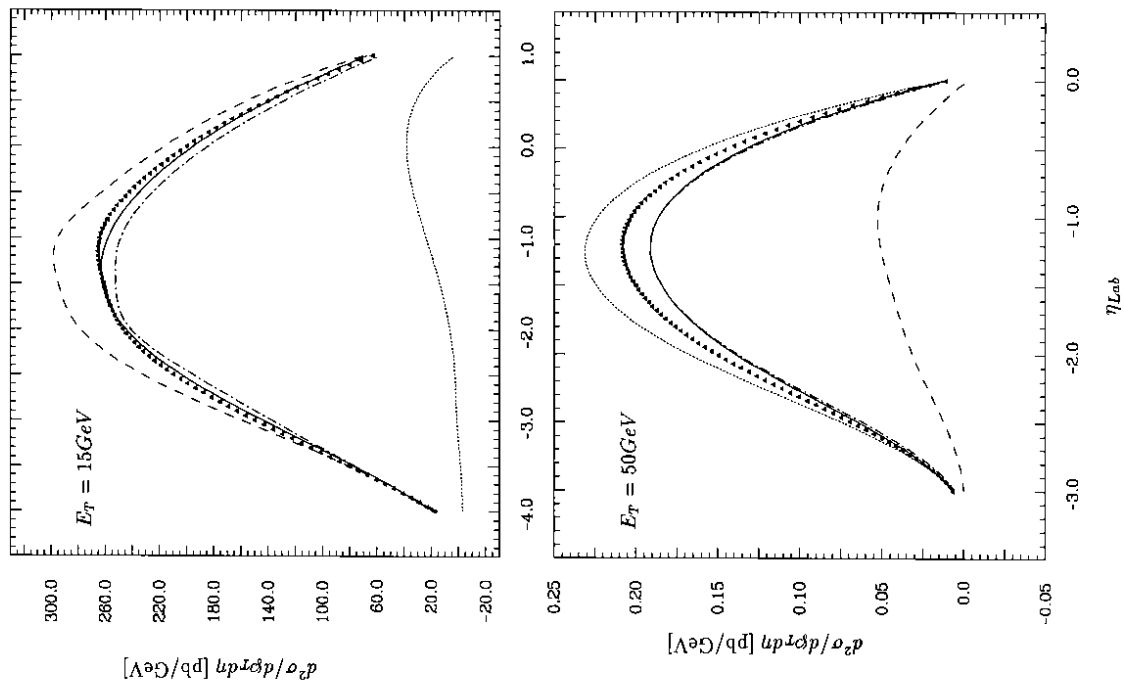


Bild 4-2b: Rapiditätsverteilung für $E_T = 15\text{GeV}$ (sonst wie Bild (4-2a)) und $E_T = 50\text{GeV}$.
Dort ist SM_E mit $R = 0.1$ (---), $R = 0.6$ (- · - ·) und $R = 1$ (···) zusammen mit CDF_p
($R = 0.85$, $\Delta\Delta$) und dem Born-Wirkungsquerschnitt (—) aufgetragen.

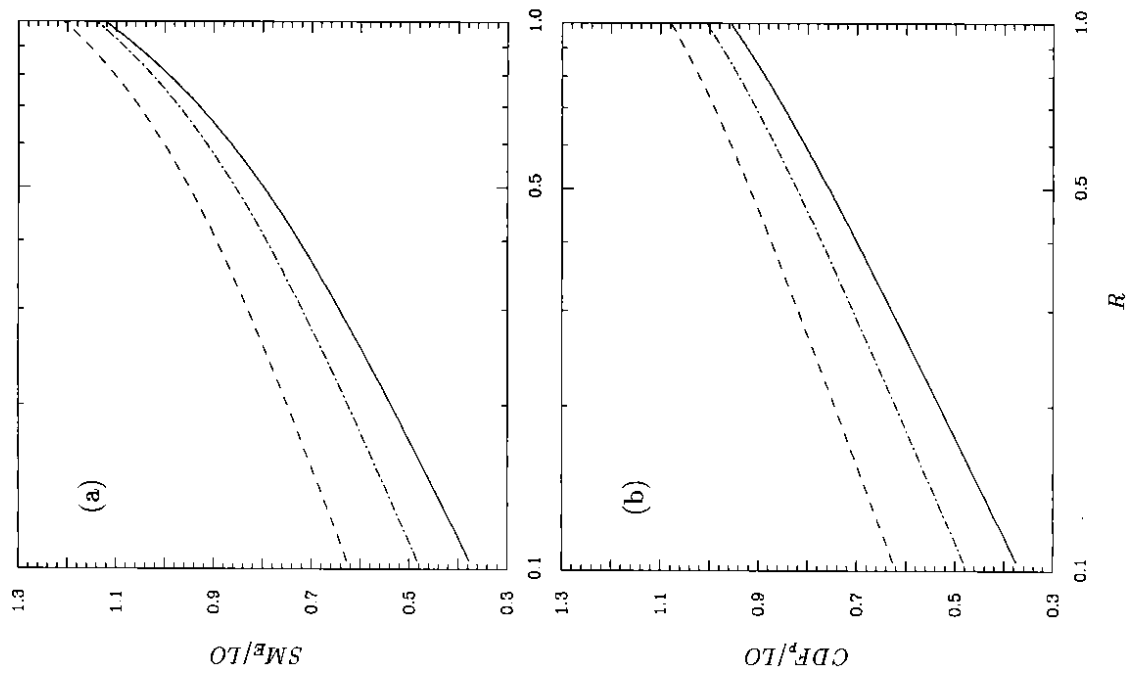


Bild 4-3: Abhängigkeit des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes SM_E (a) und CDF_p
(b) vom Jetcut R bei $\eta_{Lab} = -2$ und $E_T = 5\text{GeV}$ (—), 15GeV (- · - ·) und 50GeV (---).
Es wurde jeweils auf den Born-Wirkungsquerschnitt normiert.

Ein Schwachpunkt der Jet-Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung Störungstheorie ist der unbefriedigende Ansatz für eine sinnvolle Jetdefinition. Im Fall des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes fehlt diese Sensitivität sogar vollständig. In der nächsthöheren Ordnung in $\alpha_s(\mu)$ kann dies teilweise behoben werden, da nun die Kombination mehrerer Partonen zu einem Jet möglich ist. Der Jet-Wirkungsquerschnitt hängt nun *a priori* von der Definition des Jetimpulses ebenso ab wie vom Rekombinationskriterium und vom Jetcut. In Bild (4-3a) ist für $\eta_{LoS} = -2$ und $E_T = 5, 15, 50 \text{ GeV}$ der auf die LO normierte und gemäß Gl.(4-4) interpolierte Snowmass-Wirkungsquerschnitt als Funktion von R aufgetragen. Wie oben bereits diskutiert, liegt der Schnittpunkt mit der von R unabhängigen LO (also mit der 1), zwischen $R_{lo} = 0.6$ ($E_T = 50 \text{ GeV}$) und $R_{lo} = 0.8$ ($E_T = 5 \text{ GeV}$). Es ist überraschend, daß die vom Ansatz $M_{jet}^2 \ll E_T^2$ ausgehende SCA noch bis $R \approx 0.4$ sehr gut mit dem vollständigen $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ Wirkungsquerschnitt übereinstimmt. Die Verwendbarkeit der SCA wird im Bereich großer R durch das Anwachsen der FCC eingeschränkt. Aber auch für sehr kleine R eignet sie sich nicht gut zum Vergleich mit experimentellen Daten, da hier der „K-Faktor“ $K(R) = |1 - NLO(R)/LO| \gg 1$ ist. Korrekturen höherer Ordnung in α_s sind hier erforderlich. Nimmt man $K(R = 1) \approx 0.2$ als Maßstab für die Qualität der NLO, $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, so sollte sie bei HERA bis hinunter zu $R_{min} \approx 0.4$ zuverlässig sein. Bei größeren Schwerpunktsenergien (TeVatron) wird der Wert von R_{min} etwas kleiner sein. K hängt aber natürlich von der *Philosophie* ab, wie ein LO-Wirkungsquerschnitt zu definieren ist. [Ave89] und [EKS89] erhalten für $p\bar{p}$ -Streuung im Tevatron-Rahmen eine rein logarithmische Abhängigkeit vom Jetcut bis hinauf zu $R \approx 0.7$. Allerdings liegt die Schwerpunktsenergie dort um fast eine Größenordnung über derjenigen von HERA, so daß dort von vornherein schmalere, also gebündeltere Jets zu erwarten sind. In Bild (4-3b) ist analog zu Bild (4-3a) der CDF_p -Wirkungsquerschnitt aufgetragen. Eine nun deutlich geringere R^2 -Abweichung ist zu erkennen. Sie ist aber eher auf den Unterschied zwischen E_T und p_T als auf den Einfluß des Jetalgorithmus zurückzuführen: Fixiert man p_T , so steigt die zugehörige mittlere transversale Energie des Jets mittels der mittleren Jetmasse mit R leicht an (Kap.[5.2]). Dieses größere E_T neigt zu einer Unterdrückung des Wirkungsquerschnittes, die aber durch den anwachsenden Phasenraum (über-)kompensiert wird. Die ersten Korrekturen zum log R -Verhalten sollten von der Ordnung $\mathcal{O}(R^2)$ sein, wie man sich leicht überlegen kann. Betrachtet man einmal anstelle des Snowmass-Accords die Jetdefinition von Furman[Fur82], so ist die übliche Näherung kleiner Jetkegel (SCA) in den auftretenden Integralen vom Typ $\tan \delta \approx \sin \delta \approx \delta$ und $\cos \delta \approx 1$, siehe Kap.[3.2]. Die Korrekturen hierzu können als Faktor $1 + \mathcal{O}(\delta^2)$ geschrieben werden. Sie wirken sich dementsprechend auf den Wirkungsquerschnitt per

$$\log \delta \rightarrow \log(\delta(1 + a\delta^2)) \approx \log \delta + a\delta^2$$

aus. Die R -Abhängigkeit des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ kann also per

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi_T d\eta}(\varphi_T, \eta_{LoS}; R) = A(\varphi_T, \eta_{LoS}) + B(\varphi_T, \eta_{LoS}) \log R + C_p(\varphi_T, \eta_{LoS}) R^2 \quad (4-4)$$

parametrisiert werden. B bezieht sich hier auf den natürlichen Logarithmus von R . Die Koeffizienten A, B und C_p in Tab.(4-2) wurden in zwei Schritten durch Interpolation bestimmt. B erhält man bereits in SCA, also mit Hilfe des Programms von [Ave89]. Subtrahiert man den log R -Beitrag nun vom Wirkungsquerschnitt, so erhält man A und C_p mittels einfacher linearer (in R^2) Interpolation von

$$\begin{aligned} (d^2\sigma/d\varphi_T d\eta)^* &\equiv d^2\sigma/d\varphi_T d\eta - B_{10} \log_{10} R \\ &\equiv A + C_p R^2. \end{aligned}$$

φ_T [GeV]	5	15	50
A	$5.25 \cdot 10^4$	233.	0.143
B	$1.36 \cdot 10^4$	50.8	0.0248
C(SM_E)	$1.25 \cdot 10^4$	45.9	0.0247
C(CDF_p)	$2.90 \cdot 10^3$	13.0	0.0069
LO	$5.79 \cdot 10^4$	245.	0.139
LO'	$3.10 \cdot 10^4$	138.	0.0828

Tabelle 4-2: Zu Gl.(4-4) und Bild (4-3): Koeffizienten der R -Entwicklung des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes für SM_E (und CDF_p) bei verschiedenen Werten von E_T (p_T) und $\eta_{LoS} = -2$. Zusätzlich ist der Born-Wirkungsquerschnitt mit 1-Schleifen-Kopplung (LO) und mit 2-Schleifen-Kopplung (LO') angegeben. Alle Zahlen in pb/GeV.

Der statistische Fehler der VEGAS-Integration und des eben beschriebenen Interpolationsverfahren führt zu kleinen Abweichungen in dem so bestimmten A für SM_E , bzw. für CDF_p . Da diese Differenzen im Bereich weniger Promille liegen, wurde in Tab.(4-2) nur $A(SM_E)$ berücksichtigt. Die relative Abweichung

$$\Delta_{\text{poi}} \equiv \frac{d\sigma_{CALC} - d\sigma_{POL}}{d\sigma_{CALC}} \quad (4-5)$$

der ursprünglich berechneten von den interpolierten Werten ist in allen untersuchten Fällen kleiner als 2%. Er liegt damit im Rahmen des statistischen Fehlers von maximal 1%. Diese gute Übereinstimmung gilt auch für $R \rightarrow 1$, so daß der Ansatz Gl.(4-4) tatsächlich sehr gut die R -Abhängigkeit des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ beschreibt.

Der Koeffizient A in Gl.(4-4) setzt sich, neben dem Born-Wirkungsquerschnitt mit $\alpha_s^{(2)}$, auch aus den R -unabhängigen, endlichen Anteilen der Summe von virtuellen und realen $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ Beiträgen zusammen. Nur dieser Teil des $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -Wirkungsquerschnittes enthält also die kompensierende Skalenabhängigkeit der harten Streuung. B wird von den singulären 2-Jet-Ereignissen bestimmt, in denen die (beiden) Zerfallsprodukte eines (fast-reellen) Quarks oder Gluons zu einem Jet zusammengefaßt werden. Dieser Art der Rekombination liegt also eine Korrelation der Teilchen im Jet zugrunde. Dagegen berücksichtigt C Ereignisse mit unkorrelierter Rekombination¹³. Es zeigen sich einige stabile Zusammenhänge zwischen den Zahlen in Tab.(4-2). So hängt

$$\frac{A}{LO'} = 1 + \alpha_s^{(2)} A' \approx 1.7 \quad (4-6)$$

kaum von E_T ab, während die Verhältnisse von B und C zum Born-Wirkungsquerschnitt mit 2-Schleifen-Kopplung schwächer als log E_T abfallen. Dies hängt nur teilweise mit dem α_s -Anteil in B/LO' und C/LO' zusammen. Ein weiterer Punkt ist die Beziehung zwischen den Vorfaktoren des R -abhängigen Anteils in SM_E . Es ist $B \approx C_B$, man kann also Gl.(4-4) durch

$$SM_E \approx A + B (\log R + \tilde{c} R^2) \quad (4-7)$$

mit

$$\tilde{c} \equiv \frac{C_E}{B} \approx 1 + \mathcal{O}(0.1)$$

¹³Die Wahrscheinlichkeit für unkorrelierte Kombination wird durch die Größe des entsprechenden 2-Teilchen-Phasenraumes, also des Jetkegels, gegeben. Diese ist proportional zu R^2 .

\hat{p}_T [GeV]	5	15	50
$R_{opt}[SM_E]$	0.67	0.67	0.65
$R_{opt}[CDF_p]$	0.86	0.84	0.83

Tabelle 4-3: Werte des Jetscuts für eine optimal stabile Skalenabhängigkeit in NLO gemäß Gl.(4-9) und den Koeffizienten aus Tab.(4-2).

annähernd beschreiben. Aufgrund des geringen Einflusses des in R quadratischen Terms ist die Abweichung im Snowmass-Wirkungsquerschnitt deutlich kleiner als 10%, wenn man einfach $\tilde{c} = 1$ setzt. Jedenfalls ist \tilde{c} von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ und hängt damit nicht von der Renormierungsskala μ ab. Da es ein Verhältnis zweier Größen ist, die beide mittels identischer Parton-Dichten bestimmt werden, ist seine Abhängigkeit von den Faktorisierungsskalen vernachlässigbar. Die gesamte Skalenabhängigkeit von SM_E wird somit über den Koeffizienten B reguliert, gewichtet durch eine Funktion

$$f(R) \equiv \log R + (\tilde{c})R^2 \quad (4-8)$$

von Jetscut R (und vom Jetalgorithmus via \tilde{c}). Die Skalenabhängigkeit in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ wird folglich dann optimal, da bestmöglich kompensiert, wenn der R -abhängige Anteil in Gl.(4-4) verschwindet. Hierfür ist

$$\begin{aligned} d^2\sigma/dE_T d\eta (R_{opt}) - A &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow f(R_{opt}) &= 0 \end{aligned} \quad (4-9)$$

zu fordern. Mittels Iteration erhält man für $\tilde{c} = 1$ den Wert

$$R_{opt} \approx 0.6529 \dots \quad (4-10)$$

Die auf die gefundenen Werte von B und C abgestimmten Werte von R_{opt} sind in Tab.(4-3) angegeben. Für die Untersuchung der Skalenabhängigkeit wird hier die übliche Wahl

$$\mu = M_\tau = M_p = \xi E_T \quad (4-11)$$

getroffen. Dies ist allerdings nur eine Richtung in dem entsprechenden 3-dimensionalen Parameterraum. Man kann aber zeigen, daß die Faktorisierungsskalen einen geringeren Einfluß auf den NLO Wirkungsquerschnitt haben als μ . Während M_p in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ resolved photoproduction bereits — bis auf höhere Ordnungen — vollständig kompensiert ist, kann eine ähnlich flache Abhängigkeit von M_τ nur durch Addition der Beiträge des direkten Photons[Bö92] erreicht werden[BKS93]. Die Wahl Gl.(4-11) sollte bereits auf das gesuchte Plateau hinweisen. In Bild (4-4) ist für die üblichen Werte von E_T bei $\eta_{Lab} = -2$ die ξ -Abhängigkeit von SM_E für $R = 0.1, 0.7$ und 1.0 aufgetragen. Zusätzlich ist wieder der Born-Wirkungsquerschnitt und CDF_p ($R = 0.85$) gezeigt. Man sieht, daß bei sehr kleinen R der Einfluß der negativen Singularität der virtuellen Korrekturen recht groß ist, während bei großen R die 2- \rightarrow 3 Born-Graphen dominieren. Dort ist die Skalenabhängigkeit mit derjenigen in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ vergleichbar, wenn auch die absolute Variation kleiner ist. Wie erwartet, zeigt SM_E bei $R = 0.7$ ein relativ breites Maximum in ξ , so daß hier im Prinzip genaue quantitative Vorhersagen zum Experiment möglich sind. Da hier $R = 0.7 \approx R_{opt}$ ist, beschreiben diese Kurven in Bild (4-4) im wesentlichen die Skalenabhängigkeit von A . Dieser Koeffizient ist für CDF_p und SM_E identisch, so daß die Identität

$$CDF_p(\xi; R = 0.85) = SM_E(\xi; R = 0.70)$$

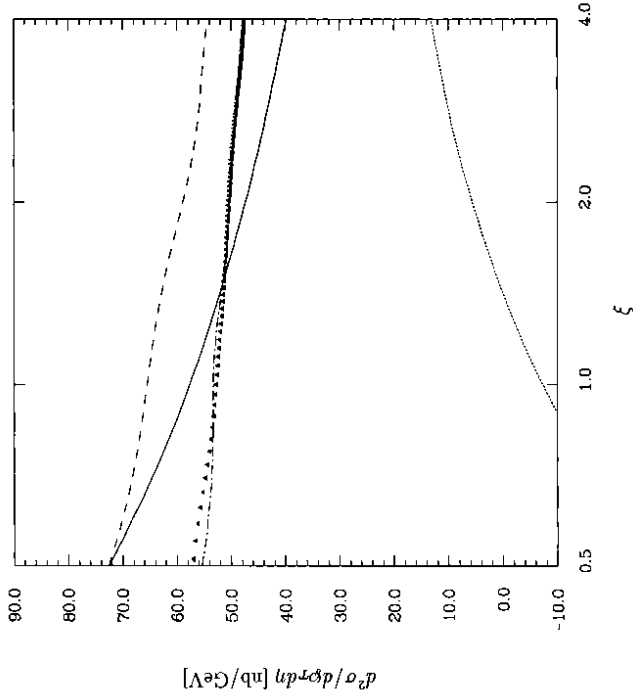


Bild 4-4a: Skalenabhängigkeit für $E_T = 5\text{GeV}$ und $\eta_{Lab} = -2$. Neben dem Born-Wirkungsquerschnitt (—) ist SM_E mit $R = 0.01$ (---), 0.7 (- · - ·) und 1.0 (- - -) gezeigt. Außerdem ist CDF_p mit $R = 0.85$ aufgetragen ($\Delta\Delta\Delta$). ξ ist in Gl.(4-11) definiert. Die Wellen in den Kurven werden durch die Interpolation erzeugt.

über einen großen Bereich in ξ nicht weiter überrascht. Dies wurde auch für verschiedene Rapidityen untersucht und dort bestätigt. Ellis et al.[EKS92] finden für pp -Streuung sehr ähnliche Resultate, und insbesondere eine minimale Skalenabhängigkeit bei ebenfalls $R_{opt} \approx 0.7$. Dies deutet darauf hin, daß der Wert von R_{opt} eine universelle Eigenschaft des Jet-Algorithmus sein könnte. Mit anderen Worten, das Verhältnis \tilde{c} der Koeffizienten B und C_E in Gl.(4-4) liegt stets in der Nähe von 1.

Zum Abschluß soll kurz das Problem der Jetmultiplizität angesprochen werden. Wie in Kap.[3.4.3] beschrieben, sind die Jetdefinitionen SM und CDF in ihrer einfachen Form gemäß Anh.C in einigen Bereichen des 3-Teilchen-Phasenraumes nicht eindeutig. Da diese Beiträge aber wohldefiniert und unter Kontrolle sind, ist die entsprechende, in Kap.[4.2] berücksichtigte Korrektur eigentlich erst im direkten Vergleich mit dem Experiment relevant. Um einen Eindruck vom Einfluß dieses Problems zu erhalten, wird die Abhängigkeit dieser Korrekturen $\Delta d^2\sigma/dE_T d\eta$ zu SM_E vom Jetcut R für einige Werte von E_T betrachtet. Bei $R \ll 1$ werden die inklusiven Wirkungsquerschnitte von der Kollinearität masseloser Partonen (1,2) typischerweise über

$$|\mathcal{M}|^2 \stackrel{R \ll 1}{\propto} \frac{M(0)}{R_{12}^2}$$

dominiert. R_{12} ist der in Gl.(C-3) definierte Abstand der beiden Partonen in der $(\Delta\phi, \Delta\eta)$ -Ebene. Um $\Delta d^2\sigma/dE_T d\eta$ zu erhalten, muß über den Kegelmantel zwischen R und $2R$ um einen

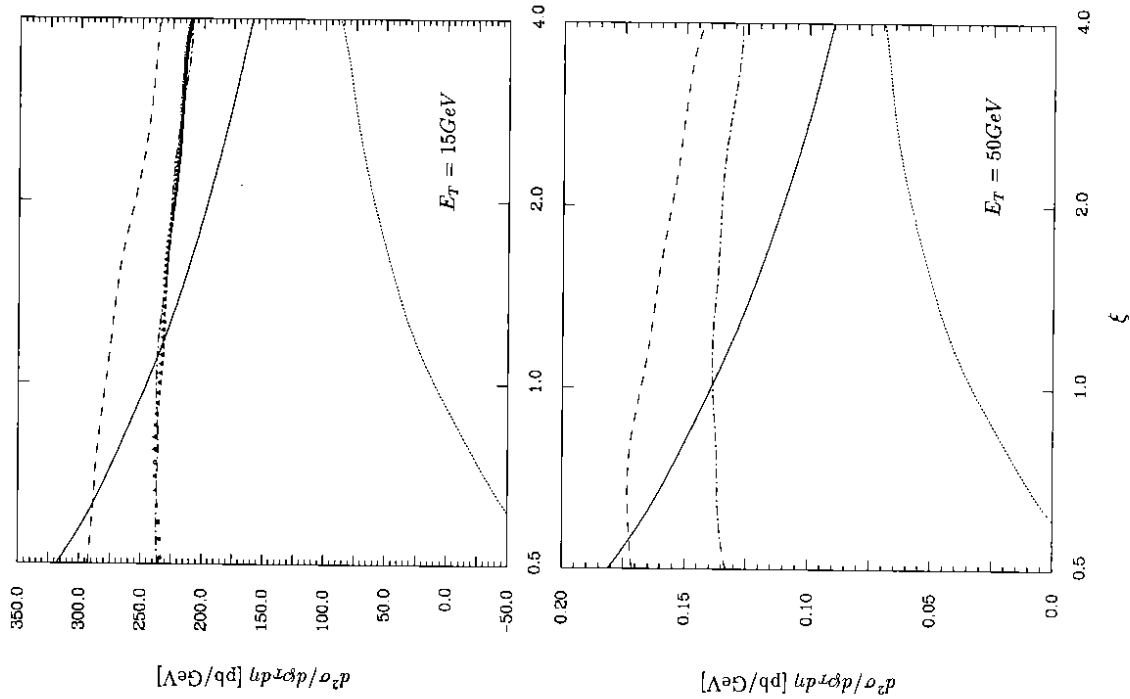


Bild 4-4b: Skalendependenz für $E_T = 15$ und 50 GeV . Bei $E_T = 50 \text{ GeV}$ ist $R = 0.6$ (statt 0.7) aufgetragen, hier wurde auch auf die Darstellung von CDF_p verzichtet. Sonst wie Bild (4-4a).

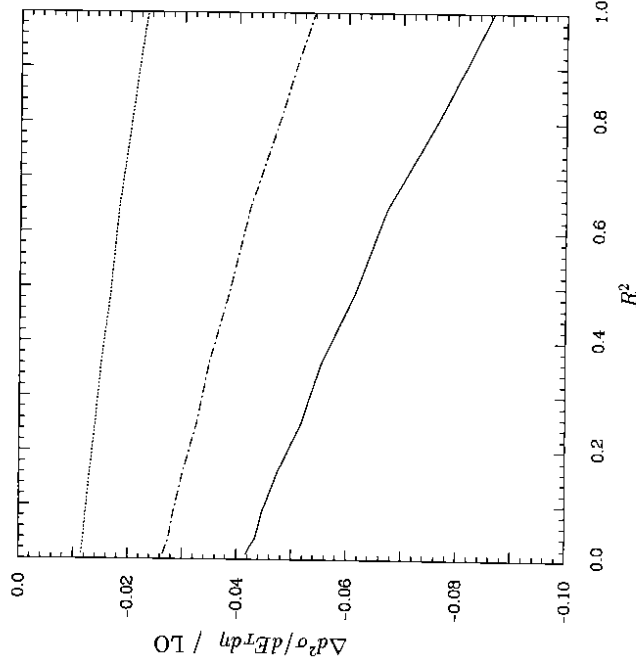


Bild 4-5: Zur Eindeutigkeit der Jetmultiplizität, siehe Gl.(4-12). Es ist $\eta_{Lab} = -2$ bzw. $E_T = 5 \text{ GeV}$ (—), 15 GeV (- - -) und 50 GeV (· · ·).

(1-Teilchen-) Jet per $\int d\Delta\eta_3 d\Phi_{1,2} \approx 2\pi \int dR_{1,2} R_{1,2}$ integriert werden. Dementsprechend ist

$$\Delta d^2\sigma/dE_T d\eta \stackrel{SCA}{\propto} 2\pi \int_R^{2R} dR_{1,2} R_{1,2} \frac{M(0)}{R_{1,2}^2} \dots$$

$$\propto \log(2R) - \log(R) = \log 2$$

für $R \rightarrow 0$ endlich. Für große R müssen wieder Korrekturen in R^2 berücksichtigt werden, so daß

$$\Delta d^2\sigma = a + bR^2. \quad (4-12)$$

ist. In Bild (4-5) ist $\Delta d^2\sigma/dE_T d\eta$ zu SM_E auf den LO-Wirkungsquerschnitt normiert über R^2 aufgetragen, die Kurven zeigen eine gute Übereinstimmung mit Gl.(4-12). $\Delta d^2\sigma/dE_T d\eta$ ist also durchweg klein, aber eigentlich nicht vernachlässigbar. Seine relative Bedeutung nimmt, wie zu erwarten, mit zunehmendem E_T (logarithmisch) ab. Im übrigen verhält er sich wie ein 3-Jet-Wirkungsquerschnitt in Born'scher Näherung.

Anmerkung: Der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt bei HERA in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ wurde unabhängig auch von Gordon & Storrow [GS92a] (GS) und vor kurzem von Vicini & Greco [GV93] berechnet. Beide Gruppen verwendeten ebenfalls den hier diskutierten Formalismus. Die numerischen Resultate von GS sind i.a. (bei $R = 0.7$) um rund 40% kleiner als die in der vorliegenden Arbeit bestimmten. Dies allein kann aber unter Umständen noch auf die Unterschiede in den verwendeten Parton-Dichten, speziell im Photon, zurückgeführt werden. Gravierend ist eine qualitative Diskrepanz in der R -Abhängigkeit. Die in Bild (3b) bei [GS92a] gezeigte Kurve kann mit dem Ansatz Gl.(4-4) kaum gefittet werden. Die Abweichung von rein logarithmischen Verhalten setzt bei $R \approx 0.6$ überraschend spät ein und ist dann zu stark, um gut durch eine reine R^2 -Korrektur beschrieben werden zu können. Dies steht im Widerspruch zu den hier gezeigten Resultaten. Eine von mir durchgeführte Testrechnung mit den von GS angegebenen Parton-Dichten reproduziert das dortige Ergebnis nicht. Dies kann nicht nur auf eventuellen Unterschieden in der verwendeten Weizsäcker-Williams-Verteilung (bei GS nicht angegeben) beruhen.

Eine längere Diskussion mit Alessandro Vicini ergab einige Unterschiede in verwendeten Details, z.B. in der Formel für $\alpha_s^{(2)}$, führte aber letztlich zu keiner numerischen Übereinstimmung der NLO Ergebnisse. VG verwenden die von Plathow-Besch erstellte FORTRAN-Bibliothek [PDF], wobei anscheinend Probleme auftraten. Nachdem diese beseitigt waren, konnten die Resultate auf Born-Level gegenseitig verifiziert werden. Die von VG bestimmten NLO Korrekturen sind aber weiterhin um rund 50% kleiner als die entsprechenden in Kap.[4-2]. Hierfür konnte keine Erklärung gefunden werden.

Es sollte in diesem Zusammenhang noch einmal betont werden, daß mit der für diese Arbeit erstellten FORTRAN-Bibliothek die in der Literatur angegebenen Wirkungsquerschnitte in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ für $p\bar{p}$ -Streuung [Ave91, El91, EKS92] sowie Jetprofile [EKS92] reproduziert werden konnten.

5 Zur Jetstruktur

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ausführlich diskutiert, wie die Berücksichtigung von (2-3)-Prozessen in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ auf Parton-Ebene zur Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte vom Jet-Algorithmus führt. Am Beispiel der mittleren Verteilung der transversalen Energie im Kegel inklusiver Jets bei HERA soll nun zuerst die damit verbundene innere Struktur der Jets in Abhängigkeit von E_T , η , und den Skalen μ und M untersucht werden [EKS92, KS93b]. Der Einfluß des partonischen Anfangszustandes auf den Jetaufbau wird diskutiert. Für kleine Jetradien zeigt der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt eine rein logarithmische Abhängigkeit von R , siehe Kap.[4-2]. Es soll untersucht werden, ob sich auch die Jetstruktur in diesem Bereich asymptotisch verhält. Der nächste Schritt wird die Bestimmung der mittleren invarianten Jetmasse $M_{J,et}$ sein. Mit ihrer Hilfe läßt sich zum Beispiel das Verhalten des Jetprofils in übersichtlicher Weise darstellen. Außerdem bestimmt die invariante Masse eines Teilchens/Jets die Beziehung zwischen seiner transversalen Energie E_T und seinem transversalen Impuls p_T , so daß der in Kap.[4] begonnene Vergleich verschiedener Jetdefinitionen (Snowmass, CDF) nun abgeschlossen werden kann.

5.1 Das E_T -Profil

5.1.1 Definitionen

Auf der Basis des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes $d^2\sigma/dE_T d\eta$ kann ein Erwartungswert für eine Variable X durch Wichtung mit dem Parton-Parton-Wirkungsquerschnitt erklärt werden. Definiere also

$$\bar{X}(E_T, \eta; R, \mu, M, \dots) \equiv \frac{\int d\Omega X(\Omega) \rho(\Omega)}{\int d\Omega \rho(\Omega)} \quad (5-1)$$

mit der Normierung (vgl. Gl.(2-20) und Gl.(3-24))

$$\int d\Omega \rho(\Omega) \equiv d^2\sigma/dE_T d\eta. \quad (5-2)$$

$\int d\Omega$ integriert über alle partonischen Freiheitsgrade und $\rho(\Omega)$ enthält neben den Parton-Dichten und Matrixelementen insbesondere die Jetdefinition. Gegeben sei nun ein Ereignis Ω mit einem Jet der Transversalenergie E_T innerhalb eines Kegels mit Radius R gemäß Gl.(C-2). $E_T(C, R, \Omega)$ bezeichne die in einen inneren, zum Jetkegel in der (η, Φ) -Ebene konzentrischen Kegel C_r mit dem Halbmesser $r \leq R$ abgestrahlte transversale Energie. Insbesondere ist also $E_T(C_R, R, \Omega) = E_T$. Betrachtet wird nun die Verteilung des relativen Anteils

$$X_T(C, R, \Omega) \equiv \frac{E_T(C, R, \Omega)}{E_T}. \quad (5-3)$$

Die explizite Phasenraumabhängigkeit von $X_T(C, R)$ und $E_T(C, R)$ wird im folgenden unterdrückt. Berücksichtigt man alle Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$, so zerfällt der Zähler der rechten Seite von Gl.(5-1) in die Anteile mit 2 bzw. 3 Partonen im Endzustand. Es ist

$$\int d\Omega X_T(C, R) \rho(\Omega) = \alpha_s^2 \int d\Omega_2 1 \rho_{Born}(\Omega_2) + \int d\Omega_3 X_T(C, R) \rho_{eul}(\Omega_3).$$

Virtuelle bzw. reelle Korrekturen werden so bei der Bildung des Mittelwertes $\overline{\mathcal{X}_T}$ mit unterschiedlichen Gewichten (1 bzw. $\mathcal{X}_T(C, R)$) belegt, da für (2-2)-Prozesse die gesamte Jetenergie stets punktförmig auf die Jetachse zentriert ist. Wegen der singulären Anteile der Matrixelemente in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ist $\phi(\Omega)$ nicht positiv definit und kann nur für große innere Kegel ($r \approx R$) als Wahrscheinlichkeitsverteilung gedeutet werden. Nach Einschieben der Counterterme

$$\pm \alpha_s^3 \int d\Omega_3 \mathbf{1} \phi_{\text{real}}(\Omega_3) \quad (5-6)$$

können die in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ auftretenden Singularitäten durch geeignetes Umsortieren der Summanden wie im Fall des Wirkungsquerschnittes eliminiert werden. Man erhält schließlich den endlichen, wohldefinierten Ausdruck

$$\begin{aligned} \int d\Omega \mathcal{X}_T(C, R) \phi(\Omega) &= \alpha_s^2 \int d\Omega_2 \mathbf{1} \phi_{\text{Born}}(\Omega_2) \\ &+ \alpha_s^3 \left\{ \int d\Omega_3 \mathbf{1} \phi_{\text{virt}}(\Omega_3) + \int d\Omega_3 \mathbf{1} \phi_{\text{real}}(\Omega_3) \right\} \\ &- \alpha_s^3 \int d\Omega_3 (1 - \mathcal{X}_T(C, R)) \phi_{\text{real}}(\Omega_3) \\ &= d^2\sigma / dE_T d\eta - \alpha_s^3 \int d\Omega_3 (1 - \mathcal{X}_T(C, R)) \phi_{\text{real}}(\Omega_3). \end{aligned} \quad (5-7)$$

Es tragen nur Ereignisse mit 3 separaten, harten Partonen im Endzustand bei, d.h., das Integral in der letzten Zeile von Gl.(5-6) ist ein spezieller 3-Jet-Wirkungsquerschnitt. Bezeichnet man die „Krone“ zwischen dem inneren und dem äußeren Kegel mit \mathcal{K}_R , so ist $1 - \mathcal{X}_T(C, R) = \mathcal{X}(\mathcal{K}_R, R)$. Die mittlere relative E_T -Verteilung im Jet hat nun die Form [EKS92]

$$\rho(R, r) \equiv 1 - \frac{\alpha_s^3 \int d\Omega_3 \mathcal{X}_T(\mathcal{K}_R, R) \phi_{\text{real}}(\Omega_3)}{d^2\sigma / dE_T d\eta} \Big|_{LO} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (5-8)$$

Die laufende Kopplung wird hier in 1-Schleifen-Näherung gewählt, da ρ ohne den vollständigen Satz der Matrixelemente in $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ nur in führender Ordnung konsistent zugänglich ist,

$$\rho(R, r) = 1 - \alpha_s^{(1)} f(R, r) + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (5-9)$$

Für $r > 0$ tragen also effektiv nur (2-3) Born-Graphen bei. Das eben beschriebene Verfahren regularisiert die bei der Berechnung von ρ auftretenden Endzustands-Singularitäten letzten Endes durch Betrachtung von $1 - \rho$, also der E_T -Verteilung am Kegelrand \mathcal{K}_R . Das im Zähler von $f(R, r)$ auftretende Integral gemäß Gl.(5-7) läßt sich sehr ähnlich den Finite-Cone-Korrekturen der inklusiven Em-Jet-Wirkungsquerschnitte durch Monte-Carlo-Integration über die bekannten (2-3) Matrixelemente bestimmen, siehe Kap.[3.4].

Die — vielleicht etwas anschaulichere — mittlere Verteilung der Transversalenergie über den Jetkegel erhält man aus ρ durch Bildung der partiellen Ableitung nach r , d.h.

$$E_T'(R, r) \equiv \frac{dE_T}{dr}(R, r) = E_T \frac{\partial \rho(R, r)}{\partial r}. \quad (5-10)$$

Wegen der logarithmischen Singularität von $\rho(R, r)$ für $r \rightarrow 0$ kann E_T' nicht konsistent auf die Jetenergie normiert werden. Gl.(5-9) beschreibt das differentielle E_T -Profil der harten Streuung und ist für eine Untersuchung des Untergrundes nicht geeignet. Die Unterschiede zwischen Photon und Proton zeigen sich in einer Asymmetrie des Jetprofils $dE_T/d\eta$ bei HERA [H1.93a], die eben definierte Größe E_T' ist aber implizit über alle $\Delta\eta$ und $\Delta\Phi$ zu festem $r^2 = (\Delta\eta)^2 + (\Delta\Phi)^2$ gemittelt.

5.1.2 Ergebnisse

Die für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte in Kap.[4.1] gewählten *Standards* werden beibehalten, also die Parton-Verteilungen im Photon bzw. im Proton durch die NLO Parametrisierungen von Glück & al. bzw. von Morfin und Tung, Set B1, beschrieben. Es wurden wieder jeweils die $\overline{\text{MS}}$ -Versionen verwendet. Da $1 - \rho$ ein Verhältnis zweier Größen ist, die mit der gleichen Kombination von Parton-Dichten definiert werden (sollten), hat die Wahl spezieller Struktur-Funktionen aber keinen großen Einfluß auf das Resultat. In der Form Gl.(2-2) fällt die logarithmische Abhängigkeit der Weizsäcker-Williams-Verteilung von den Cuts an das auslaufende Elektron sogar vollständig heraus. Das Problem der eindeutigen Jetmultiplizität, wie in Kap.[3.4.3] diskutiert, hat für die hier betrachteten Größen keine Bedeutung. Die relevanten 3-Jet-Beiträge tragen zu ρ nur bei $r = 0$ bei und sind damit dem Zugriff der Störungstheorie entzogen.

Mit zunehmender Energie des Jets wird der Einfluß reeller Strahlungskorrekturen im Kegel zurückgehen, bedingt durch die kleiner werdende laufende Kopplung $\alpha_s(\mu \propto E_T)$. Der Anteil der transversalen Energie in der Nähe der Jetachse steigt dementsprechend mit der gesamten Jetenergie an. In Bild (5-1a) ist die Verteilung $\rho(R, r)$ als Funktion von r für $R = 1$ und verschiedene $E_T = 5, 15, 30$ GeV aufgetragen. Es ist stets $\eta_{\text{Lab}} = -2$ und $\mu = M_{\gamma,p} = E_T$. Man erkennt, daß mit wachsendem E_T die Ähnlichkeit mit in LO definierten Jets zunimmt. Diese haben eine verschwindende Jetmasse, entsprechend

$$\rho_{LO\text{-Jets}}(C, R) = \theta(r). \quad (5-11)$$

In Bild (5-1b) ist die Verteilung der Transversalenergie auf den Jetkegel, also $E_T'(R, r)$ gemäß Gl.(5-9) aufgetragen. Diese Verteilung wurde durch Differenzbildung aus der entsprechenden Kurve in Bild (5-1a) ermittelt, es ist

$$E_T'(R, r) = E_T \frac{\rho(R, r + \Delta r) - \rho(R, r)}{\Delta r} \quad (5-12)$$

mit $\Delta r = 0.1$. Die Grenzen der störungstheoretischen Untersuchung der Jetstruktur zeigen sich in Divergenzen der Verteilungen ρ und E_T' im Limes $r \rightarrow 0$, in dem zunehmende Kollinearität der beiden Partonen im Jet zugelassen wird. Definiert man $E_T'(R; 0)$, also die transversale Energie im Zentrum des Jetkegels, durch Normierung von E_T' auf E_T , so wird dieser Wert unter Umständen negativ. Im Energiebereich von HERA fällt $\rho(R, r)$ mit r zu schnell ab. Am Tevatron sind die Verhältnisse aufgrund der großen Schwerpunktsenergie günstiger, siehe [Cat93]. Im Gegensatz zu einer im Experiment zu sehenden glockenförmigen Verteilung der Energie um die Jetachse [H1.93a] in der (η, Φ) -Ebene ist hier

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \rho(R, r) &= -\infty \\ \lim_{r \rightarrow 0} E_T'(R, r) &= \infty. \end{aligned}$$

Das per Gl.(5-7) berechnete ρ wird also nur den Randbereich des Jets gut beschreiben können, in dem die $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Korrekturen zum LO Jetprofil hinreichend klein sind.

E_T (GeV)	$f(E_T, \eta_{Lab}, R = 1; \tau)$		
	$\tau=0.3$	$\tau=0.5$	$\tau=0.7$
5	3.00	1.78	0.961
7.5	2.94	1.74	0.940
10	2.90	1.70	0.926
12.5	2.82	1.67	0.917
15	2.81	1.65	0.911
20	2.74	1.63	0.885
25	2.67	1.59	0.876
30	2.63	1.56	0.856
40	2.49	1.51	0.834
50	2.42	1.45	0.810

Tabelle 5-1: $f(R; \tau)$ gemäß Gl.(5-8) zu Bild (5-2), $\eta_{Lab} = -2$, Genauigkeit ca. 0.5%.

Also zurück zum Rand des Jetkegels. Bild (5-1a) zeigt, daß $\partial_r \rho$ für $\tau \rightarrow R$, also $E_T'(R; R)$, nicht verschwindet. Bei näherer Betrachtung sieht man zumindest oberhalb von $\tau/R = 0.9$ ein rein logarithmisches Verhalten von ρ , was einer $\frac{1}{r}$ -Abhängigkeit der E_T -Verteilung entspricht. Dies gilt unabhängig von E_T und R . Es ist nicht überraschend, da die Jetdefinition in der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene nach [Sno90] für (genau) 2 Teilchen (1,2) im Jet zu der Beziehung

$$\frac{E_{T,1}}{E_{T,2}} = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \quad \tau_i^2 = (\Delta\eta_i)^2 + (\Delta\Phi_i)^2 \quad (5-12)$$

führt. In einiger Entfernung von der Jetachse ist die Variation von $\rho(\Omega)$ hinreichend gering, so daß die Mittelung mit dem partonischen Wirkungsquerschnitt auf eine Beziehung der Form

$$E_T'(R; \tau) \approx \frac{\tau_0 E_T(\tau_0, R)}{\tau} \quad (5-13)$$

hinausläuft. Die „Restenergie“ $E_T'(R; R)$ am Kegelfrand ist der Teil der Untergrundstrahlung des Jets, der nur vom harten Streuprozess erzeugt wird. Details über Photon- bzw. Proton-fragmente gehen hier ebenso wenig ein wie die Hadronisierung der auslaufenden Partonen. Die Berücksichtigung eines homogenen, also von τ unabhängigen Untergrundes $E_{T,so}$ führt zum Beispiel zu kleineren $\rho(R; \tau)$ ($\tau < R$), also zu relativ breiteren Jets. Dieser weiche Anteil des Untergrundes geht als freier Parameter in den Vergleich der gemessenen Jetprofile mit den hier gezeigten Ergebnissen ein.

In Bild (5-2) ist die E_T -Abhängigkeit von $\rho(R = 1; \tau)$ für drei Werte von τ ($= 0.3, 0.5, 0.7$) aufgetragen. Es ist wieder $\eta_{Lab} = -2$ und $\mu = M_{\tau,p} = E_T$. Der Anteil der Energie im Zentrum des Jets nimmt mit der gesamten Jetenergie $E \propto E_T$ monoton zu, wie bereits in Bild (5-1a) zu sehen ist. Beschreibt man $\rho(E_T, \eta_{Lab}, R; \tau)$ durch Gl.(5-8) mit $\Lambda = 194 \text{ GeV}$ und $\mu = E_T$ so zeigt sich, daß $f(R; \tau)$ im untersuchten Bereich in etwa logarithmisch mit E_T abnimmt. Tab.(5-1) enthält die zu Bild (5-2) gehörigen Werte von f . Das „Einschnüren“ der Jets mit E_T kann also nicht allein auf die laufende Kopplung $\alpha_s(E_T)$ zurückgeführt werden, da auch die Kinematik der QCD-Matrixelemente hierzu beiträgt. Die Abhängigkeit des Profils ρ von der Rapidität des Jets wird hier ($\mu \propto E_T$) nicht von $\alpha_s(\mu)$ beeinflusst. Die Variation der Rapidität bei fester transversaler Energie ändert die invariante Masse \sqrt{s} des einlaufenden Parton-Paares ebenfalls, es ist

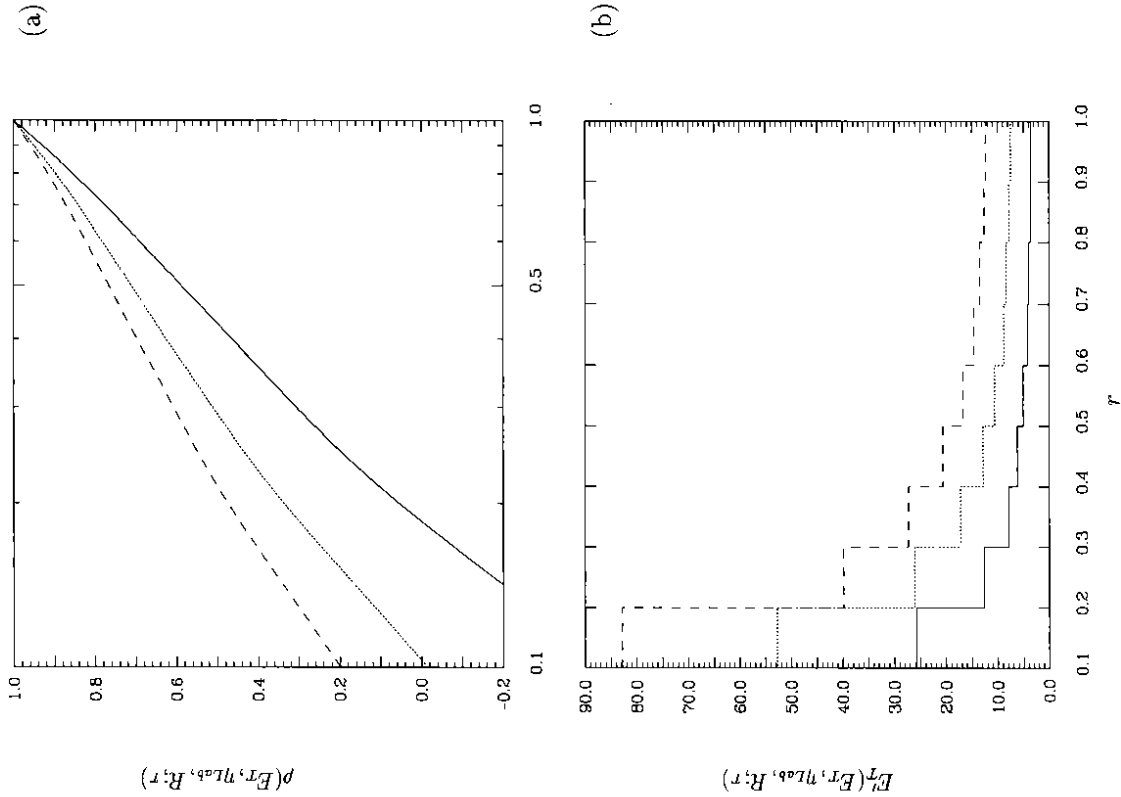


Bild 5-1: Das Jetprofil bei $\eta_{Lab} = -2$ und $E_T = 5 \text{ GeV}$ (—), 15 GeV (···) und 30 GeV (- - -). Alle Skalen sind gleich E_T gesetzt, es ist $R=1$. (a) $\rho(E_T, \eta_{Lab}, R; \tau)$, (b) $E_T'(E_T, \eta_{Lab}, R; \tau)$

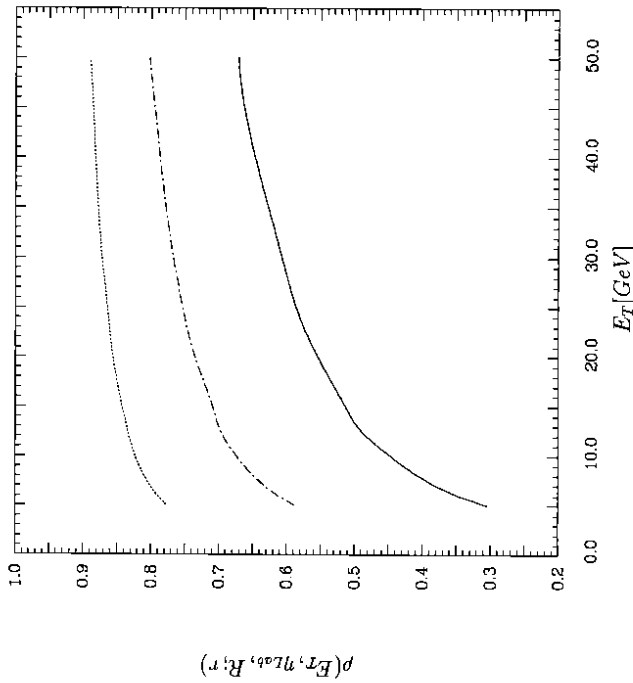


Bild 5-2: Jetprofil $\rho(R = 1; r)$ als Funktion der totalen transversalen Energie des Jets für $r=0.3$ (—), 0.5 (---) und 0.7 (···). Es ist $\eta_{Lab} = -2$ und $\mu = M_{\gamma,p} = E_T$.

also ein mit Bild (5-2) konsistentes Verhalten zu erwarten. Im ep -Schwerpunktsystem S wird \sqrt{s} am Rand des η -Phasenraumes maximal und durchläuft bei $\eta_s = 0$ ein Minimum. Alle drei Kurven in [KS93b, Fig.3], also für $E_T = 5, 15, 30 \text{ GeV}$, zeigen qualitativ eine η -Abhängigkeit wie $\log \frac{\sqrt{s}}{E_T} \propto \log \cosh \eta_s$. Im Bereich mittlerer Streuwinkel um ca. 90° in S hängt $\rho(R = 1; r = 0.3)$ kaum von der Rapidität ab, während es zum Rand des Phasenraumes hin deutlich ansteigt. Die Asymmetrie zwischen positiven und negativen Rapiditäten wird natürlich von den Unterschieden in der hadronischen Struktur von Elektron und Proton hervorgerufen. Es stellt sich die Frage, ob sich die η -Abhängigkeit des Jetprofils mit E_T effektiv ändert — es verschieben sich die Gewichte der partonischen Subprozesse — oder ob der Einfluß der Rapidität separierbar ist. Die Ähnlichkeit der drei Kurven in [KS93b, Fig.3] legt es nahe, η in einer geeigneten Weise so zu normieren, daß das Phasenraumvolumen unabhängig von E_T wird. Zudem ist es dann wieder zweckmäßig, den Entwicklungskoeffizienten $f(E_T, \eta, R; r)$ aus Gl.(5-8) zu betrachten. Dieser wird noch durch $f(E_T, \eta_{Lab} = -2, R; r)$ dividiert, um die E_T -Abhängigkeit weiter zu reduzieren. Betrachtet man das derart normierte Jetprofil nun als Funktion der skalierten Rapidität

$$x_\eta \equiv \frac{\eta_s}{\text{arccosh} x_{\eta}^{-1}} \in \{-1, 1\}, \quad (5-14)$$

so erhält man eine von der transversalen Energie des Jets nur wenig ($\leq \pm 5\%$) im untersuchten E_T -Intervall abhängige Funktion, die im folgenden mit $f_2(x_\eta, R; r)$ bezeichnet wird. Sie hat ein Maximum um $x_\eta = 0$ und geht für $|x_\eta| \rightarrow 1$ monoton gegen Null. f_2 ist nicht invariant unter Wechsel des Vorzeichens von x_η , siehe Bild (5-3). Die Abhängigkeit des Jetprofils $\rho(E_T, \eta, R; r)$ von den kinematischen Jetvariablen kann im hier betrachteten Bereich in guter Näherung gemäß

$$\rho(E_T, \eta, R; r) = 1 - \alpha_s(\mu) f_1(E_T, R; r) f_2(x_\eta, R; r) \quad (5-15)$$

mit

$$f_1(E_T, R; r) \equiv f(E_T, \eta_{Lab} = -2, R; r)$$

faktoriert werden. f_1 enthält nun die gesamte Abhängigkeit des Jetprofils von E_T , wenn x_η fixiert ist. Es sollte noch angemerkt werden, daß eine entsprechende Aufspaltung für den inklusiven Wirkungsquerschnitt allein nicht vorgenommen werden kann. Das Maximum des η_{Lab} -Spektrums wandert, wie in Kap.[2.3] diskutiert, mit steigendem E_T deutlich in Richtung positiverer η_{Lab} . Zudem wird die Verteilung schmaler. Diese Effekte heben sich bei der Bildung des Verhältnisses Gl.(5-7) weitgehend heraus.

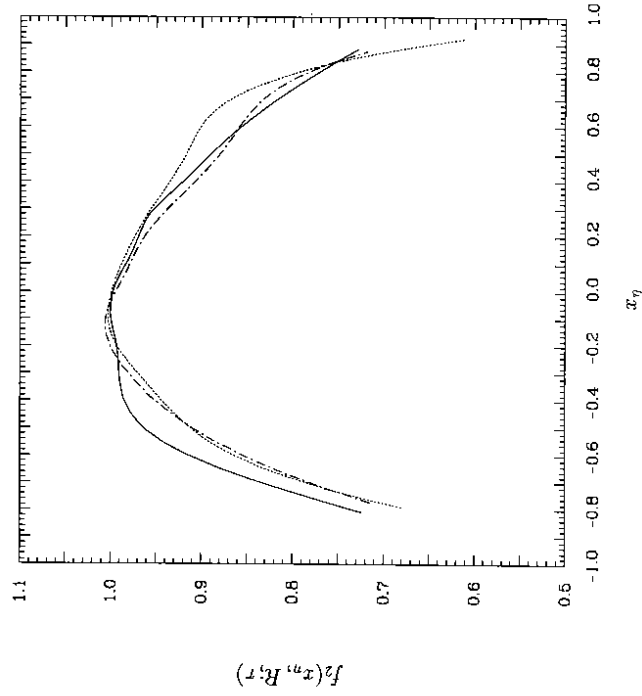


Bild 5-3: Zur Abhängigkeit des relativen E_T -Anteils im Jet von der Rapidität. Gezeigt wird $f_2(x_\eta, R = 1; r = 0.3)$ gemäß Gl.(5-15) für verschiedene Werte von $E_T = 5 \text{ GeV}$ (—), 15 GeV (---) und 30 GeV (···). Es ist $\mu = M_{\gamma,p} = E_T$.

r	$f(R; \tau)$					
	ep [HERA]		ep [$\sqrt{s} = 1800\text{GeV}$]		$p\bar{p}$ [TeVatron]	
	$x_T = 0.1$	$x_T = 0.5$	$x_T = 0.1$	$x_T = 0.5$	$x_T = 0.1$	$x_T = 0.5$
0.95	0.142	0.151	0.147	0.154	0.147	0.195
0.9	0.286	0.295	0.285	0.298	0.301	0.391
0.8	0.583	0.573	0.586	0.596	0.611	0.750
0.7	0.909	0.860	0.912	0.884	0.953	1.10
0.6	1.25	1.15	1.25	1.18	1.29	1.42
0.5	1.66	1.50	1.68	1.53	1.73	1.81
0.4	2.13	1.88	2.15	1.92	2.23	2.17
0.3	2.74	2.36	2.75	2.38	2.87	2.68
0.2	3.75	3.09	3.76	3.13	3.95	3.46
0.1	5.72	4.54	5.77	4.58	6.03	4.88

Tabelle 5-2: Vergleich von Jetprofilen: HERA vs. Tevatron und einem hypothetischen ep -Collider mit $p_s = p_p = 900\text{ GeV}$. Aufgetragen ist $f(R; \tau)$ gemäß Gl.(5-8) für $R = 1$ bei $\eta_s = 0$.

Vergleicht man die Profile inklusiver Jets bei HERA ($\sqrt{s} = 314\text{ GeV}$) mit entsprechenden Werten bei $p\bar{p}$ -Streuung (TeVatron, $\sqrt{s} = 1.8\text{ TeV}$) bei gleicher relativer Transversalenergie

$$x_T \equiv \frac{E_T}{\sqrt{s}/2}, \quad (5-16)$$

so zeigt sich zuerst, daß Jets bei größeren Energien schmäler sind. Dieser Effekt in ρ kann aber wieder über die laufende Kopplung $\alpha_s(\mu \propto E_T)$ per Gl.(5-8) separiert werden. Dies entspricht dem eben diskutierten Verhalten bei HERA. $f(R = 1; \tau)$ zeigt in Tab.(5-2) eine gute Übereinstimmung zwischen den nahezu durch eine Größenordnung in der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} getrennten Streuprozessen, wenn man sich auf kleinere x_T beschränkt. Für $x_T = 0.5$ dominiert bei HERA das direkte Photon Γ_γ . Addiert man das Jetprofil für Γ_γ , so werden die Abweichungen zum Tevatron größer. Eine Ähnlichkeit zwischen ep - und $p\bar{p}$ -Streuung ist also bei eher kleineren x_T zu erwarten, wenn neben der direkten Kopplung des Photons an ein $q\bar{q}$ -Paar auch der punktarige Anteil im aufgelösten Photon vernachlässigt werden kann. Um einen geeigneten Zwischenschritt zwischen Tevatron und HERA zu haben, soll zusätzlich ein hypothetischer ep -Collider mit Tevatron-Energie, also $p_s = p_p = 900\text{ GeV}$, betrachtet werden. Die entsprechenden Werte sind ebenfalls in Tab.(5-2) eingetragen. Wie nun zu erwarten, ist die Übereinstimmung mit den HERA-Werten sehr gut, auch für größere x_T . f hängt also nur über Gl.(5-16) von der transversalen Jetenergie ab. Gleiches gilt für die skalierte Rapidität x_T , so daß Gl.(5-15) durch eine fast vollständig skalierende Formulierung

$$\rho \rightarrow \rho(x_T, \eta, R; \tau) = 1 - \alpha_s(\mu) f_1(x_T, R; \tau) f_2(x_T, R; \tau). \quad (5-15')$$

ersetzt werden kann. Die hier untersuchten Verteilungen sind, wie gesagt, in führender Ordnung in $\alpha_s(\mu)$ definierte Größen. Ihre Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ ist nur von $\alpha_s(\mu) \propto \frac{1}{\log \mu}$ bestimmt und dementsprechend groß. Der Einfluß der Faktorisierungsskalen

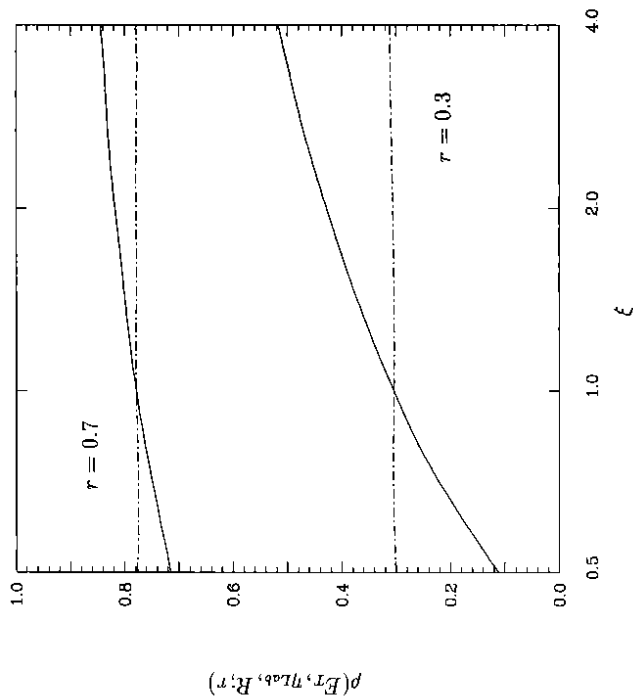


Bild 5-4: Skalenabhängigkeit des relativen E_T -Anteils im Jet. Es ist $E_T = 5\text{ GeV}$ und $\eta_{Lab} = -2$. Aufgetragen ist $\rho(R = 1; \tau)$ für $\tau = 0.3$ (untere Kurven) und 0.7 (obere Kurven). Variiert werden einerseits alle Skalen gleichzeitig, dann ist $\mu = M_{\gamma,p} = \xi E_T$ (-), und andererseits bei fester Renormierungsskala $\mu = E_T$ nur die Faktorisierungsskalen $M_\gamma = M_p = \xi E_T$ (-.-.-).

$M_{\gamma,p}$ ist dagegen eher gering, da sie über die Parton-Dichten in Photon bzw. Proton in Zähler und Nenner von $1 - \rho$ eingehen. In Bild (5-4) ist für $E_T = 5\text{ GeV}$ und $\eta_{Lab} = -2$ die Skalenabhängigkeit von ρ bei $R = 1$ und $\tau = 0.3, 0.7$ gezeigt. Einerseits ist hier die übliche Wahl $\mu = M_{\gamma,p} = \xi E_T$ getroffen worden und andererseits die Abhängigkeit von der Renormierungsskala durch Fixierung $\mu = E_T$ unterdrückt. Die eben durchgeführten Überlegungen werden bestätigt. So ist $\rho(\tau = 0.7, R = 1)$ zwischen $\xi = 1/2$ und $\xi = 4$ praktisch unabhängig von $M_\gamma = M_p = \xi E_T$, wenn $\mu = E_T$ festgehalten wird, dagegen variiert es in diesem Bereich mit der Renormierungsskala um rund 20%. Für $\tau = 0.3$ wird mit den absoluten Werten von $1 - \rho$ auch die Skalenabhängigkeit größer. Für $E_T = 30\text{ GeV}$ ergibt sich qualitativ das gleiche Bild. Hier variiert $\rho(R = 1; \tau)$ zwischen 6% ($\tau = 0.7$) bzw. 24% ($\tau = 0.3$) mit μ . Die Faktorisierungsskalen haben also auf das Profil inklusiver Jets in LO resolved photoproduction keinen Einfluß. Dessen gesamte Skalenabhängigkeit stammt von der laufenden Kopplung.

Es stellt sich die Frage nach weiteren universellen Eigenschaften der Jetstruktur, im Sinne einer Unabhängigkeit von Details des Jetalgorithmus. Motivation für eine entsprechende Untersuchung ist das entsprechende Verhalten des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes im Bereich kleiner Kegelradien. Wie in Kap.[4] diskutiert, geben verschiedene Jetdefinitionen bei HERA -Energien für $R \leq 0.3$ gleiche Wirkungsquerschnitte bei festem Wert des Cut-Parameters. Die Unterschiede in der Bildung von Jets greifen erst bei relativ großen R und führen nur zu verschiedenen starken R^2 -Abweichungen von der rein logarithmischen Abhängigkeit in der SCA. Es wurde $\rho(\tau)$ für verschiedene Werte von R im Bereich von 0.01 bis 1.0 untersucht. Es zeigt sich, daß im Gültigkeitsbereich der SCA die Verteilung der transversalen Energie im Jet nur noch vom Verhältnis τ/R abhängt. In Bild (5-5) ist zu sehen, daß $\rho(R; \tau)$ bei festgehaltenem τ/R unterhalb von $R_0 \approx 0.3$ unabhängig von R wird:

$$\rho(R; \tau) \stackrel{R \leq R_0}{\longrightarrow} \rho\left(\frac{\tau}{R}\right) \quad (5-17)$$

Der genaue Wert von R_0 hängt dabei noch etwas von τ ab. Mit Blick auf die entsprechende Eigenschaft des inklusiven Jet-Wirkungsquerschnittes überrascht es nicht, daß die

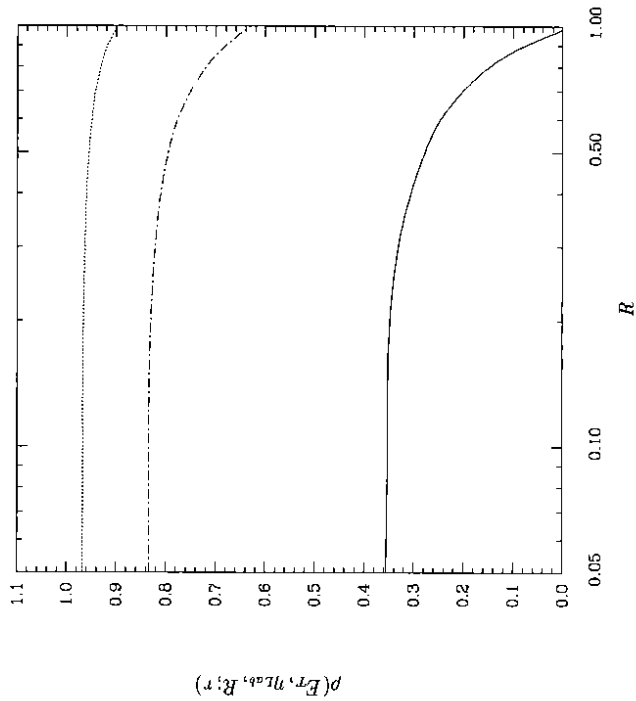


Bild 5-5: Jetprofil $\rho(R; \tau)$ als Funktion von R (!) für verschiedene Verhältnisse $\tau/R=0.1$ (—), 0.4 (···) und 0.8 (---). Es ist $\eta_{Lab} = -2$ und $E_T = 15\text{GeV}$.

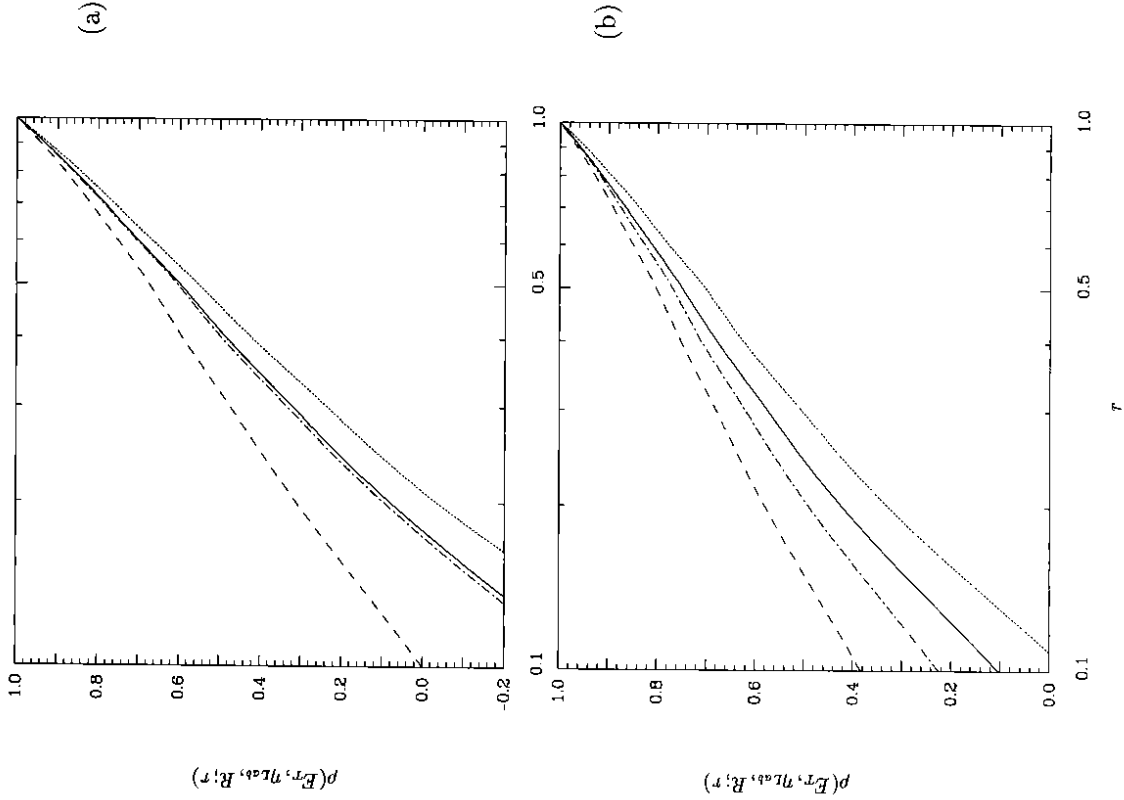


Bild 5-6: Jetprofil $\rho(R = 1; \tau)$ als Funktion von τ für Klassen partonischer Subprozesse bei $\eta_{Lab} = -2$. (a) $E_T = 5\text{GeV}$; (b) $E_T = 30\text{GeV}$. Betrachtet werden zusätzlich zum Gesamtbeitrag des aufgelösten Photons (—) die Kombinationen GG (···), qG (---) und qq (— · —) im Anfangszustand.

CDF_T-Definition zum gleichen Ergebnis führt. Abgesehen von einer etwas flacheren R -Abhängigkeit oberhalb von $R = 0.6$ erhält man im Bereich kleinerer R die gleichen Werte für $\rho(R, \tau)$ wie mit dem Snowmass-Accord. Im Gültigkeitsbereich der SCA zeigt die Jetstruktur in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ — und trivialerweise auch in $\mathcal{O}(1)$ — Selbstähnlichkeit unter Variation der 'Jetskala' R .

Der innere Aufbau von Jets wird wesentlich durch den im Wirkungsquerschnitt dominanten Teilprozess bestimmt. Während bei kleinen E_T der Beitrag $GG \rightarrow Jet+X$ wichtig ist, spielen bei $E_T \approx 50 \text{ GeV}$ die Quarks im partonischen Anfangszustand die größte Rolle im aufgelösten Photon bei der Zusammensetzung des Wirkungsquerschnittes. Eine separate Untersuchung der Jetprofile einzelner Subprozesse kann somit helfen, die E_T -Abhängigkeit von ρ in Bild (5-2) besser zu verstehen. In Bild (5-6) sind die relativen E_T -Verteilungen in einem inneren Kegel C_r für die Beiträge $GG, qG, qq' \rightarrow Jet+X$ gezeigt. Es ist jeweils $R = 1$ und $\eta_{L0} = -2$. In Bild (5-6a) ist $E_T = 50 \text{ GeV}$ und in Bild (5-6b) $E_T = 30 \text{ GeV}$. Für jeden Subprozess wurde ρ auf seinen Anteil am Wirkungsquerschnitt normiert. Die Energieverteilung in der Summe aller Beiträge ist also das mit den Wirkungsquerschnitten gewichtete Mittel der einzelnen Prozesse. Man erhält die jeweils dominanten Beiträge einer Klasse zu ρ aus den entsprechenden, mit einem zusätzlich auslaufenden Gluon versehenen, dominanten (2-2)-Prozessen. Die Zahl einlaufender Gluonen ist nicht unabhängig von der Zahl der auslaufenden Gluonen, die letztlich den Jet bilden. Mehr Gluonen verbreitern einen Jet, führen also zu mehr Energie am Kegelrand. Die Verbreiterung der E_T -Verteilung im Jet mit abnehmender Jetenergie läßt sich damit auch auf den zunehmenden Einfluß des Gluons zurückführen. Nicht weiter aufgetragen wurden die Ergebnisse einer Klassifizierung allein nach dem Parton aus dem Photon (q, G_r), da sich qualitativ das gleiche Bild ergibt. Die Einbeziehung der Beiträge des direkt an den harten Streuprozess koppelnden Photons wird den inneren Aufbau des partonischen Endzustandes erst bei großen Jetenergien beeinflussen.

5.1.3 Jetprofil und Wirkungsquerschnitt

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen eine funktionale Beziehung zwischen dem E_T -Profil und dem Wirkungsquerschnitt inklusiver Jets abgeleitet werden kann. Die Gültigkeit der entsprechenden Annahmen wird diskutiert. In diesem Zusammenhang beschränken wir uns auf eine beliebige, aber feste Rapidität η_{L0} .

Betrachten wir nun einmal *Höhenlinien* σ in der Menge der Paare (E_T, R) , definiert durch einen konstanten Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta}(E_T, R) = E_T^a(R, R) = \text{konst.} \equiv C_a, \quad (5-18)$$

siehe Bild (5-7). Dies erklärt implizit eine Funktionenschar $E_T = E_T^a(R)$. Die Variation des Wirkungsquerschnittes

$$\delta \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta}(E_T, R) = \frac{\partial}{\partial E_T} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} \delta E_T + \frac{\partial}{\partial R} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} \delta R \quad (5-19)$$

verschwindet innerhalb σ , es folgt also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E_T} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} + \frac{\partial}{\partial R} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dE_T^a}{dR} &= - \frac{\frac{\partial}{\partial R} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta}}{\frac{\partial}{\partial E_T} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta}} \end{aligned} \quad (5-20)$$

Angenommen, $E_T^a(R)$ entspricht wenigstens lokal dem Jetprofil $\rho(E_T^a(R), R, \tau)$, dann ist

$$E_T^a(R) = E_T^a(R') \rho(E_T^a(R'), R'; \tau = R), \quad R' = R + dR. \quad (5-21)$$

Mit

$$\frac{d\rho(E_T^a(R), R; \tau)}{dR} = \frac{\partial \rho}{\partial R} + \frac{dE_T^a(R)}{dR} \frac{\partial \rho}{\partial E_T} \quad (5-22)$$

folgt hieraus nach kurzem Umformen

$$\frac{dE_T^a(R)}{dR} = - \frac{E_T^a(R) \partial_R \rho(E_T^a(R), R; \tau)|_{r=R}}{\rho(E_T^a(R), R; \tau) + E_T^a(R) \partial_{E_T} \rho(E_T^a(R), R; \tau)|_{r=R}} \quad (5-23)$$

Nun wurde im vorigen Abschnitt gezeigt, daß ρ am Kegelrand rein logarithmisch von τ abhängt, man also

$$\rho(E_T, R; \tau) \rightarrow 1 + a(E_T, R) \log\left(\frac{\tau}{R}\right) \quad (5-24)$$

für $\tau \rightarrow R$ ansetzen kann. Dies kann direkt in Gl.(5-23) eingesetzt werden, und führt auf

$$\begin{aligned} \frac{dE_T^a(R)}{dR} &= E_T^a(R) a(E_T, R) \frac{1}{R} \\ &= E_T^a(R) \frac{\partial \rho}{\partial \tau}(E_T^a(R), R; \tau)|_{r=R}. \end{aligned} \quad (5-25)$$

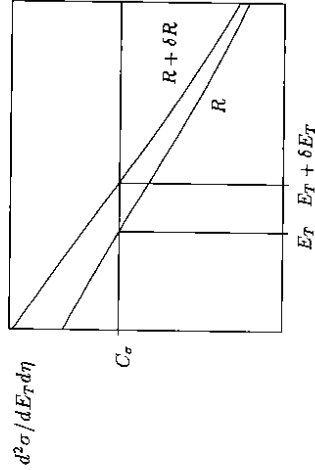


Bild 5-7: Schematische Darstellung zu Gl. (5-18)ff.

E_T [GeV]	$-\frac{\Delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}}}{E_T}$ [pb/GeV]	a_0	$-B^{1-loop}/\Delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}}$	a_1	$-2C_E^{1-loop}/\Delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}}$
5	$2.72 \cdot 10^5$	0.20	0.13	0.38	0.23
15	$1.26 \cdot 10^3$	0.13	0.096	0.28	0.17
50	1.06	0.079	0.051	0.20	0.10

Tabelle 5-3: Auswertung von $Gl.(5-28)$ bei $\eta_{Lab} = -2$. Die Koeffizienten B und C_E entsprechen den in $Tab(4-2)$ angegebenen Werten nach Transformation auf α_s^{1-loop} , $Gl.(2-35)$. Es ist $\Delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}} \equiv E_T \frac{\partial}{\partial E_T} d^2\sigma/dE_T d\eta|_{LO}$.

Verknüpft man die beiden Gleichungen $Gl.(5-20, 25)$, so erhält man eine Beziehung zwischen Wirkungsquerschnitt und Profil inklusiver Jets[Ell92]:

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta}(E_T(R), R) = -\frac{\partial \rho}{\partial r}(E_T^r(R), R; r)|_{r=R} \frac{\partial}{\partial \log E_T} \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta}(E_T^r(R), R) \quad (5-26)$$

Die Änderung des Wirkungsquerschnittes mit dem Jetcut ist in Kap.[4.2] in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ untersucht worden, das Jetprofil ist in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ bekannt. Aus Gründen der Konsistenz trägt in $Gl.(5-26)$ also nur die Ableitung des $(2 \rightarrow 2)$ BORN-Wirkungsquerschnittes nach E_T bei. Die R -Abhängigkeiten von ρ und $d^2\sigma/dE_T d\eta$ sind dann direkt proportional zueinander, bis auf Korrekturen höherer Ordnung in $\alpha_s(\mu)$. Aus $Gl.(5-17)$ und $Bild(5-5)$ folgt, daß $a(E_T, R)$ für hinreichend kleine Jetcuts nicht mehr von R abhängt. $\partial_r \rho(r=R)$ geht dann mit $1/R$. Nach dem eben Gesagten muß dann in diesem Bereich $d^2\sigma/dE_T d\eta$ proportional zu $\log R$ sein, dies ist genau die in Kap.[4] gesehene Form. $Gl.(4-4)$ läßt schließlich erwarten, daß die Entwicklung von $a(E_T, R)$ mit einem quadratischen Term in R fortgesetzt wird, also

$$a(E_T, R) = a_0(E_T) + a_1(E_T)R^2 \quad (5-27)$$

gilt. Die Koeffizienten a_i hängen über $Gl.(5-26)$ direkt mit den entsprechenden Parametern aus $Gl.(4-4)$ zusammen, es ist

$$a_i(E_T, R) = \frac{-1}{E_T \frac{\partial}{\partial E_T} d^2\sigma/dE_T d\eta|_{LO}} (B(E_T) + 2C(E_T)R^2) \quad (5-28)$$

Bei der Auswertung von $Gl.(5-28)$ ist zu beachten, daß alle Beiträge mit der gleichen laufenden Kopplung $\alpha_s(\mu)$ bestimmt werden. Da $\rho(E_T, R)$ eine LO Größe ist, wurde in $Tab.(5-3)$ ebenfalls die 1-Schleifen-Näherung $Gl.(2-35)$ verwendet. Beim Vergleich mit den Koeffizienten B und C in $Tab.(4-2)$ muß der entsprechende Faktor berücksichtigt werden. Die Ableitung $\Delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}} \equiv E_T \frac{\partial}{\partial E_T} d^2\sigma/dE_T d\eta|_{LO}$ wurde durch Differenzbildung mit $\Delta E_T = \pm 0.25 \text{ GeV}$ ermittelt. Man erkennt, daß die Übereinstimmung der jeweiligen Koeffizienten unabhängig von E_T nicht besonders gut ist. Beide a_i sind ungefähr um einen Faktor 1.5...2 größer als $Gl.(5-28)$ erwarten läßt. Auch das Verhältnis a_0/a_1 weicht mit zunehmendem E_T immer mehr von $B/2C_E$ ab. Es sollte deswegen noch einmal betont werden, daß über $\Delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}}$ auf der rechten Seite auch die $(2 \rightarrow 2)$ -Graphen beitragen, während a hier vollständig durch die $(2 \rightarrow 3)$ -Diagramme bestimmt wird. Eine genauere Untersuchung zeigt zudem, daß der quadratische Ansatz $Gl.(5-27)$ nur für $R \leq 0.8$ akzeptabel ist. Für die Bestimmung von a_i wurden nur die entsprechenden $a(E_T, R)$ berücksichtigt. Liegt der Jetcut in der Gegend von $R = 1$, so müßte noch ein weiterer Entwicklungsterm ($\propto R^4$) mitgenommen werden. Die Ergebnisse in Kap.[4.2] zeigen dagegen eine sehr gute Übereinstimmung des Wirkungsquerschnittes mit dem analogen Ansatz $Gl.(4-4)$.

Diese Voraussetzungen sind mit $Gl.(5-26)$ von vornherein nicht konsistent. Es ist also auch nicht zu erwarten, daß die oben abgeleitete Beziehung zwischen Profil und Wirkungsquerschnitt für störungstheoretisch zugängliche Jetcuts $R \approx 1$ quantitativ gut bestätigt werden kann.

Die Annahme $Gl.(5-21)$ scheint demnach zu stark zu sein. Die Abweichung von $E_T^r(R)$ zum Jetprofil kann nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Eine tiefere Diskussion von $Parton-Gl.(5-28)$ ist sicherlich notwendig, zum Beispiel mit einer modifizierten Definition von Parton-Jets, erscheint aber nur im direkten Zusammenhang mit Daten von HI und ZEUS zweckmäßig.

5.2 Die invariante Jetmasse

5.2.1 Definition

Die in Kap.[5.1] definierten Verteilungen $\rho(R, \tau)$ und $E_T^r(R, \tau)$ enthalten detaillierte Informationen über innere Eigenschaften von Jets, die über inklusive Wirkungsquerschnitte allein nicht zu erhalten sind. Für einen Jet mit gegebener transversaler Energie E_T innerhalb eines Kegels mit Radius R um die Jetachse η_{Lab} kann mit Hilfe von $Gl.(5-1)$ eine mittlere invariante Masse

$$\overline{M_{J_{et}}^2} = \left(\sum_{i \in J_{et}} p_i \right)^2 \quad (5-29)$$

definiert werden. Hierbei ist

$$\chi = 2 p_1 \circ p_2, \quad J_{et} = 1 \oplus 2 \quad (5-30)$$

zu wählen, da in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ zu $\overline{M_{J_{et}}^2}$ nur Ereignisse mit genau 2 (masselosen) Partonen (i, j) im Jet beitragen. Die mittlere invariante Jetmasse ist einerseits eine Eigenschaft des gesamten, den Jet definierenden Teilchensembles. Sie hängt aber auch noch eng mit seiner inneren Struktur zusammen. Ist der Jet — bei festem E_T — breiter, wird also im Mittel viel von der zur Verfügung stehenden Energie in die Nähe des Kegelmantels abgestrahlt, so ist $\overline{M_{J_{et}}^2}$ größer. Bereits das Verhalten von $\overline{M_{J_{et}}^2}$ gibt also Hinweise auf einige globale Eigenschaften des Jetprofils $E_T^r(r, R)$. Üblicherweise wird ein Jet im Sinne eines Schwerpunktes seiner Bausteine definiert. Dies wird beim Snowmass-Accord[Sno90] besonders deutlich. Zur Vertiefung dieses mechanistischen Analogons wird in Anh.[E] gezeigt, daß man in einigen Fällen die invariante Jetmasse als das *Trägheitsmoment* der E_T -Verteilung im Jet bezüglich dessen Achse ansehen kann.

5.2.2 $d^2\sigma/dp_T d\eta$ vs. $d^2\sigma/dE_T d\eta$ über $\overline{M_{J_{et}}^2}$

In Kap.[4.2] wurden die inklusiven 1-Jet-Wirkungsquerschnitte $d^2\sigma/dE_T d\eta$ und $d^2\sigma/dp_T d\eta$ diskutiert. In dieser Arbeit werden nur masselose Quarks betrachtet, deswegen sind in niedrigster Ordnung in $\alpha_s(\mu)$ transversale Energie und Transversalimpuls des Jets identisch. Die mittlere invariante Jetmasse bietet nun einen Ansatz, beide Wirkungsquerschnitte auch in NLO zu verknüpfen. Auf diese Weise kann nun auch der Einfluß des Jetalgorithmus (CDF, Snowmass) bestimmt werden.

Für festen Cut R kann die invariante Masse eines aus zwei masselosen Partonen i, j bestehenden (Snowmass-)Jets leicht abgeschätzt werden, wenn man gemäß

$$\cosh \Delta\eta - \cos \Delta\Phi = \frac{1}{2}(\Delta\eta^2 + \Delta\Phi^2) \left(1 + \frac{1}{12}(\Delta\eta^2 - \Delta\Phi^2) + \dots \right) \quad (5-31)$$

das Vierer-Skalarprodukt zweier Teilchenimpulse nach den Differenzen von Rapidität und Azimut entwickelt. Berücksichtigt man die Additivität der Abstände $\tau_i = (\Delta\eta_i^2 + \Delta\Phi_i^2)^{1/2}$ in 2-Teilchen-Jets nach Snowmass-Definition (Gl.(C-3)), dann ist mit der Kombinationsbedingung $\tau_i \leq R$

$$\begin{aligned} M_{ij}^2 &= 2p_i \cdot p_j \\ &= 2p_{T,i} p_{T,j} (\cosh(\eta_i - \eta_j) - \cos(\Phi_i - \Phi_j)) \\ &\leq 2p_{T,i} p_{T,j} \frac{1}{2} (2E)^2 (1 + \frac{2(2R)^2}{12}) + \mathcal{O}(R^6) \end{aligned}$$

also unter Vernachlässigung der Beiträge ab $\mathcal{O}(R^6)$

$$M_{ij}^2 \leq E_T^2 R^2 (1 + \frac{2}{3} R^2). \quad (5-32)$$

Dies läßt eine Abhängigkeit der mittleren Jetmasse $\overline{M_{jet}^2}$ vom Jetcut in der entsprechenden Form

$$\overline{M_{jet}^2} \approx aR^2(1 + bR^2) E_T^2 \quad (5-33)$$

erwarten, wobei die Koeffizienten a, b nun natürlich von $E_T, \eta_{L,ab}$ usw. abhängen. Über die invariante Masse M_{ij} kann dem Partonjet ein Transversalimpuls mit dem Betrag

$$p_T \equiv \sqrt{E_T^2 - M_{ij}^2} \quad (5-34)$$

zugeordnet werden, so daß

$$\frac{dE_T}{dp_T} = \frac{p_T}{E_T} = \sqrt{1 - \frac{M_{ij}^2}{E_T^2}} \quad (5-35)$$

gilt (siehe Anh.A). Für das Folgende ist es hilfreich, den Wirkungsquerschnitt $Gl(2-20)$ in der Form

$$\frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} \equiv \int dM_{ij}^2 \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta dM_{ij}^2}, \quad (5-36)$$

und die Definition des Mittelwertes $Gl(5-1)$ entsprechend

$$\overline{M_{jet}^2} \equiv \frac{\int dM_{ij}^2 M_{ij}^2 \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta dM_{ij}^2}}{d^2\sigma/dE_T d\eta} \quad (5-37)$$

zu schreiben. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dp_T d\eta} &= \int dM_{ij}^2 \frac{d^2\sigma}{dp_T d\eta dM_{ij}^2} \\ &\approx \int dM_{ij}^2 \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta dM_{ij}^2} \frac{dE_T}{dp_T}. \end{aligned}$$

$d^2\sigma/dE_T d\eta dM_{ij}^2$ divergiert für $M_{ij}^2 \rightarrow 0$ wie $1/M_{ij}^2$, so daß die Beiträge von Partonjets mit großer relativer Masse $\overline{M_{jet}^2}/E_T^2$ zum Mittelwert unterdrückt sind. Obwohl für große $R \approx 1$ nach $Gl(5-32)$ nicht allgemein $M_{ij}^2 \ll E_T^2$ gelten muß, kann man so in guter Näherung mit

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dp_T d\eta} &\approx \int dM_{ij}^2 \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta dM_{ij}^2} \left(1 - \frac{M_{ij}^2}{2E_T^2}\right) \\ &= \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} - \frac{1}{2E_T^2} \int dM_{ij}^2 M_{ij}^2 \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta dM_{ij}^2} \end{aligned}$$

E_T [GeV]	a	b	$a/\alpha_i(E_T)$
5	0.130	1.08	0.56
15	0.091	1.08	0.52
50	0.055	1.24	0.40

Tabelle 5-4: Durch Interpolation bis $R_{max} = 0.8$ gemäß $Gl(5-33)$ erhaltene Werte der Koeffizienten a, b zu den Kurven in Bild (5-8).

fortfahren. Die numerischen Ergebnisse im nächsten Abschnitt zeigen, daß $\overline{M_{jet}^2} \ll E_T^2$ gilt, was die eben durchgeführte Näherung unterstützt. Mit $Gl(5-37)$ folgt nun sofort

$$\frac{d^2\sigma}{dp_T d\eta} \approx \frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta} \cdot \left(1 - \frac{\overline{M_{jet}^2}}{2E_T^2}\right), \quad (5-38)$$

woraus sich mit $Gl(5-33)$ eine Abschätzung über den Jetcut ergibt. $Gl(5-38)$ wird im folgenden Abschnitt ausgewertet. Für einen festen gemeinsamen Zahlenwert für E_T und p_T ist ein nach der transversalen Energie des Jets differentieller Wirkungsquerschnitt stets größer als einer, der sich auf den Transversalimpuls bezieht (einfach, weil $d\sigma$ mit E_T bzw. p_T monoton fällt und stets $p_T \leq E_T$ ist).

5.2.3 Ergebnisse

Wie bisher werden die Parametrisierungen $GRV(NLO, \overline{MS})$ und $MT(B1, \overline{MS})$ für die Partonichten in Photon und Proton verwendet. Untersucht wird nun die mittlere invariante Jetmasse in NLO, gemäß $Gl(5-1, -30)$ definiert als

$$\overline{M_{jet}^2} = \frac{\int d\Omega_3 2p_1 \cdot p_2 \mathcal{P}(p_1, p_2, \dots)}{d^2\sigma/dE_T d\eta|_{p_{orn}}}. \quad (5-39)$$

In führender Ordnung gilt $\overline{M_{jet}^2} = 0$. In Anlehnung an $Gl(5-33)$ sei

$$\mu_j^2 \equiv \frac{\overline{M_{jet}^2}}{(R E_T)^2} \quad (5-40)$$

definiert. In Bild (5-8) ist die Abhängigkeit der so normierten mittleren Jetmasse (nach Snowmass) von R^2 für $E_T = 5, 15$ und 50 GeV bei $\eta_{L,ab} = -2$ aufgetragen. Der Ansatz $Gl(5-33)$, also

$$\mu_j^2 \approx a(1 + bR^2), \quad (5-33')$$

beschreibt die numerischen Ergebnisse nur für etwa $R < 0.8$ zufriedenstellend. Bei $R \approx 1$ liegt die Abweichung mit ca. 10% eindeutig außerhalb der statistischen Ungenauigkeit, so daß hier höhere Ordnungen in R^2 berücksichtigt werden müssen. Aus diesem Grunde wurden die Koeffizienten a, b in Tab. (5-4) nur über $\mu_j^2(R^2)$ für $R \leq 0.8$ ermittelt. Der Einfluß höherer Ordnungen in R^2 steht wieder im Kontrast zur R -Abhängigkeit des inklusiven Wirkungsquerschnittes, die durch $Gl(4-4)$ auf dem gesamten Intervall konsistent beschrieben wird. Der größte Teil der

p_T [GeV]	SM_p [pb/GeV]	CDF_p
5	$5.58 \cdot 10^4$	$5.54 \cdot 10^4$
7.5	$8.19 \cdot 10^3$	$8.24 \cdot 10^3$
10	$2.05 \cdot 10^3$	$2.01 \cdot 10^3$
12.5	$6.57 \cdot 10^2$	$6.39 \cdot 10^2$
15	$2.50 \cdot 10^2$	$2.46 \cdot 10^2$
20	$5.29 \cdot 10^1$	$5.37 \cdot 10^1$
25	$1.45 \cdot 10^1$	$1.42 \cdot 10^1$
30	4.90	4.74
40	0.758	0.739
50	0.158	0.150

Tabelle 5-5: Inklusiver 1-Jet-Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/dp_T d\eta$ für Snowmass- und CDF-Jets bei $\eta_{lab} = -2$ mit $R = 1$.

Da für $R \approx 1$ die Beiträge in $\mathcal{O}(R^4)$ wegen $b \approx 1$ nicht vernachlässigbar sind, wurde SM_p aus SM_E via Gl.(5-38) mit dem vollen Ausdruck Gl.(5-39) für $\overline{M}_{J_{et}}^2$ bestimmt. In Tab.(5-5) sind CDF_p und SM_p in Abhängigkeit von p_T aufgetragen. Es ist $\eta_{lab} = -2$ und $R = 1$, der Unterschied zwischen den beiden Algorithmen verschwindet mit R^2 , siehe Kap.[3]. Er ist ein direktes Maß für den Einfluß der Definition der Jetvariablen, da die Kombinationsbedingung in beiden Fällen Gl.(C-2) ist. Das Verhältnis $j_p \equiv SM_p/CDF_p$ schwankt bei Variation von p_T im Rahmen der statistischen Genauigkeit um $j_p \approx 1$. Die Art der Definition des Jetimpulses hat also relativ geringen Einfluß auf den Wirkungsquerschnitt, solange das Kombinationskriterium nicht geändert wird. Neuere Arbeiten von Catani et al.[Cat93] zeigen auch eine Übereinstimmung der Wirkungsquerschnitte für unterschiedliche Kombinationskriterien bei $p\bar{p}$ -Streuung. Nach Reskalierung des Jets mit einem einfachen Faktor führt die auf dem JADE-Algorithmus basierende Jet-Definition (k_{\perp}) zum gleichen Wirkungsquerschnitt wie der Cone-Algorithmus nach Snowmass[Sno90]. In beiden Fällen werden die Jetvariablen wie in Gl.(C-1) definiert. Eine Anwendung auf Photoproduktion bei HERA steht zur Zeit noch aus.

Im Limes sehr kleiner Jets ist also $\overline{M}_{J_{et}}^2 \propto R^2$. Der inklusive Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt kann deswegen zumindest in SCA auch in der Form

$$\frac{d^2\sigma}{dE_T d\eta}|_{SCA}(\overline{M}_{J_{et}}^2) = A' + \frac{B}{2} \log \frac{\overline{M}_{J_{et}}^2}{E_T^2} \quad (5-41)$$

mit $A' = A - B/2 \log a$ geschrieben werden. Für endliche R weicht $\overline{M}_{J_{et}}^2$ mit R^2 vom SCA-Verhalten ab. Unter der Annahme, daß die Korrekturen endlicher Jetkegel (FCC) allein durch diejenigen zu $M_{J_{et}}^2$ bestimmt sind, kann man einen Koeffizienten C_M in Analogie zu C aus Gl.(4-4) bestimmen. Es sei

$$SM_p^{(M)} \equiv d^2\sigma/dE_T d\eta^{(M)}(R) = A + B \log R + C_M R^2 \quad (5-42)$$

mit

$$C_M = \frac{1}{2} bB. \quad (5-43)$$

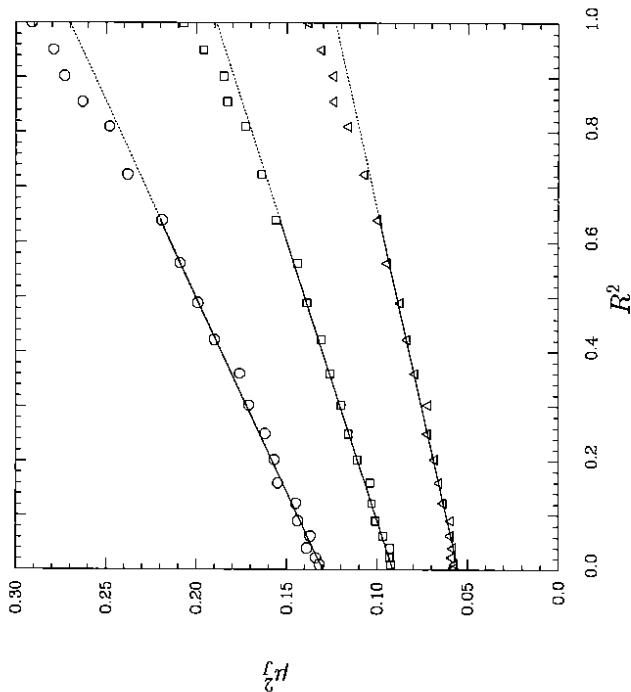


Bild 5-8: Die per Gl.(5-38) normierte mittlere invariante Jetmasse μ_J^2 von Snowmass-Jets als Funktion des quadrierten Jetradius R bei $\eta_{lab} = -2$ und $E_T = 5\text{GeV}$ (Kreise), 15GeV (Quadrate) bzw. 50GeV (Dreiecke). Zusätzlich sind die jeweiligen, bis $R \leq 0.8$ interpolierenden Geraden aufgetragen, siehe Tab.(5-4).

E_T -Abhängigkeit von μ_J^2 kann wieder¹⁴ mit der laufenden Kopplung $\alpha_s(E_T)$ eliminiert werden, $\alpha_s(\alpha_s(E_T))$ hängt nur noch schwach von E_T ab.

In Übereinstimmung mit den Resultaten zum Jetprofil nimmt die (wie ρ) auf E_T normierte Jetmasse mit E_T ab. Ein kleineres μ_J entspricht schmalen Jets, also einer näher bei 1 liegenden Verteilung $\rho(\tau)$. Weitere Eigenschaften von $\overline{M}_{J_{et}}^2$, wie z.B. Rapiditätsverteilung oder Skalensabhängigkeit, können deswegen qualitativ leicht aus den entsprechenden Bildern in Kap.[5.1.2] entnommen werden.

Wie eben gesehen, ist die mittlere Jetmasse auch bei kleinen transversalen Energien sehr viel kleiner als der maximale Wert der Partonjetmasse, Gl.(5-32), so daß Gl.(5-38) den Zusammenhang zwischen $d^2\sigma/dp_T d\eta$ und $d^2\sigma/dp_T d\eta$ in guter Näherung beschreibt. $d^2\sigma/dp_T d\eta$ kann nun für Snowmass-Jets (SM_p , siehe die Nomenklatur in Kap.[4.1]) abgeschätzt und direkt mit dem in Kap.[4.3] vorgestellten entsprechenden Wirkungsquerschnitt CDF_p verglichen werden.

¹⁴ siehe ρ in Kap.[5.1]

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden wesentliche Eigenschaften inklusiver Jets in *resolved photoproduction* bei HERA mit den Mitteln der pQCD untersucht. Die anschauliche Vorstellung, die das Quark-Parton-Modell vom harten Streuprozess vermittelt, wird mit einem weitgehenden Verzicht auf zuverlässige quantitative Aussagen bezahlt. Die Notwendigkeit der Einbeziehung höherer Ordnungen in α_s zur partonischen Wechselwirkung wurde in Kap.[3.1] ausführlich diskutiert. Die in Kap.[2] betrachteten Anteile der Gluon- bzw. Quark-Verteilungen im aufgelösten Photon und des direkten Photons am LO Wirkungsquerschnitt verlieren in der nächsthöheren Ordnung (NLO) ihre einfache Interpretation. Die scharfe Trennung zwischen harter Streuung und nicht-perturbativem Bereich im Parton-Phasenraum unterliegt in NLO der Konvention. Ursache hierfür sind kollineare Singularitäten im Anfangszustand der partonischen (2→3) Beiträge, die als universelle Strahlungskorrekturen in die Partonverteilungen eingebettet werden. Die damit mitzunehmenden endlichen Anteile sind nicht festgelegt. Die analogen Probleme im partonischen Endzustand können durch Einführung universeller Hadronisierungsfunktionen (Parton→Hadron) beseitigt werden. Für Jet-Wirkungsquerschnitte ist die Spezifizierung auslaufender Teilchen aber nicht notwendig, so daß im Endzustand über entartete Zustände summiert werden muß, um ein endliches Resultat zu erhalten. Dabei müssen einerseits die virtuellen Korrekturen berücksichtigt werden und andererseits eine „Ununterscheidbarkeit“ auslaufender Partonen für die (2→3) Beiträge erklärt werden. Zu diesem Zweck wird ein Kollinearitätscut R definiert, der bereits die wesentlichen Eigenschaften eines Jetscuts besitzt. Die analytische Durchführung der Summation der $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ Korrekturen zur harten Streuung wird wesentlich vereinfacht, wenn $R \ll 1$ gewählt wird. Dies ist möglich, da das gegenseitige Neutralisieren der Singularitäten nicht vom Wert von R abhängt. Die in dieser Näherung kleiner Jetkegel (SCA) vernachlässigten Beiträge verschwinden für $R \rightarrow 0$ mit R^2 . Sie sind für endliche Werte von $R \approx \mathcal{O}(1)$ relevant und werden mittels numerischer Integration von (2→3) Beiträgen bestimmt.

E_T - und η_{LS} -Spektren des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes in voller NLO, $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, wurden in Kap.[4] gezeigt. Entscheidende Fortschritte gegenüber der LO zeigen sich bei der Skalenabhängigkeit. Deren Qualität hängt zwar vom Jetcut ab, ist aber im Bereich vernünftiger R klar verbessert. Es wurden optimale Werte für R abgeleitet, bei denen der Wirkungsquerschnitt als Funktion der Skalen (insbesondere der Renormierungsskala μ) ein breites Plateau zeigt. R_{opt} scheint eine universelle Größe des jeweiligen Jetalgorithmus zu sein. Da $NLO(R_{opt}) \approx LO$ ist, eignen sich die entsprechenden Werte von R_{opt} tatsächlich für einen sehr genauen Vergleich des störungstheoretischen Wirkungsquerschnittes mit dem Experiment.

Die R -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes in NLO hängt mit der nun auftretenden inneren Struktur des Jets zusammen. In Kap.[5] wurden Erwartungswerte für die Verteilung der transversalen Energie für Abstände $0 \neq r \leq R$ in der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene von der Jetschere definiert, wobei Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha_s)$ berücksichtigt werden konnten. Es wurde gezeigt, daß diese Funktionen nach Abspaltung der laufenden Kopplung α_s einige interessante universelle Eigenschaften haben. Für feste kleine x_T ist das Jetprofil bei HERA und am Tevatron sehr ähnlich. Dies ist ein Zeichen dafür, daß die Photoproduktion von Jets mit kleinem x_T vom hadronischen Anteil des aufgelösten Photons dominiert wird. Ferner hängen diese Verteilungen nur über die skalierten Größen x_T und x_η von der transversalen Energie und der Rapidität des Jets ab. Ähnlich dem Wirkungsquerschnitt zeigt auch das Jetprofil eine Asymptotik im Limes $R \rightarrow 0$. Es hängt hier nur noch von dem Verhältnis r/R ab.

Es wurde gezeigt, unter welchen Voraussetzungen ein einfacher analytischer Zusammenhang zwi-

E_T [GeV]	C_M [pb/GeV]	C_E [pb/GeV]	$SM_E / SM_E^{(M)}$	SM_E / A
5	$7.34 \cdot 10^5$	$1.25 \cdot 10^4$	1.09	1.24
15	$2.74 \cdot 10^1$	$4.59 \cdot 10^1$	1.07	1.20
50	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$2.47 \cdot 10^{-2}$	1.07	1.19

Tabelle 5-6: Zur Abhängigkeit von $d^2\sigma/dE_T d\eta$ vom Jetcut R über die invariante Jetmasse M_{jet}^2 (siehe Gl.(5-42)). Beachte, daß in der Näherung kleinerer Jetscuts die R^2 -Abhängigkeit fehlt, und deswegen $d^2\sigma/dE_T d\eta$ ($R = 1$) = A ist.

In Tab.(5-6) wird C_M für die üblichen Werte von E_T und η_{LS} mit dem vollen Koeffizienten C_E aus Tab.(4-2) verglichen. Zusätzlich sind die Verhältnisse des exakten Wirkungsquerschnittes SM_E zum eben *ad hoc* definierten $SM_E^{(M)}$ und zur SCA (keine R^2 -Korrektur, $C=0$) für $R = 1$ aufgetragen. Sie sind ein Maß für die fehlenden Beiträge, wenn die gesamte R^2 -Abhängigkeit der FCC allein über die R -Abhängigkeit der invarianten Jetmasse, $Gl(5-33)$, angesetzt wird. Die Ergebnisse zeigen, daß C_M ungefähr einen Anteil von 60% an C_E hat. Da beide Koeffizienten im Vergleich zum gesamten Wirkungsquerschnitt relativ klein sind, ist die Näherung $Gl(5-42)$ recht gut. Im Bereich großer R weicht der Ansatz einer rein logarithmischen Abhängigkeit von M_{jet}^2 (R^2) nur um rund 10% vom korrekten SM_E ab. Zum Vergleich: Eine Extrapolation der SCA bis $R = 1$ unterschätzt den Wirkungsquerschnitt um bis zu 25% bei großen R . Es wird aber auch deutlich, daß $Gl(5-41)$ allein zur Bestimmung der Korrekturen endlicher Jetkegel (FCC) nicht genügt, sondern auch hier Korrekturen in $\mathcal{O}((M_{jet}^2/E_T^2)^2)$ zu berücksichtigen sind.

schen dem Jetprofil ρ (Gl.(5-7)) und dem entsprechende Wirkungsquerschnitt abgeleitet werden kann. Obwohl einige Beziehungen zwischen den auftretenden Koeffizienten (vor R) bestätigt werden konnten, zeigen die numerischen Ergebnisse keine gute quantitative Betätigung von Gl.(5-26). Es sollte sich testen lassen, inwieweit die notwendigen Annahmen zur Ableitung dieser Beziehung mit den experimentellen Daten verträglich sind, oder ob sich dort sogar eine bessere Übereinstimmung ergibt.

Ein vorläufiger Vergleich mit ZEUS-Daten zum Jetprofil [BT93] weist auf ein Problem hin, das in ähnlicher Form auch am Tevatron auftritt. Ein optimaler Fit an die gemessenen Verteilungen scheint allein durch die geeignete Wahl der Renormierungsskala μ nicht möglich. Die Kurvenverläufe sind zu unterschiedlich. Eine mögliche Ursache für dieses Problem könnte die schlechte Anpassung der Jetalgorithmen zwischen Theorie und Experiment sein. Berücksichtigt man zum Beispiel einen weiteren Parameter R_{lep} [EJ91], so gelingt eine sehr gute Anpassung an die Daten im störungstheoretischen Bereich von r . Allerdings sind nun 2 unabhängige Parameter zu fitten.

Auf diesem Gebiet bleibt also noch einiges zu tun, man darf auch auf die ersten Daten von H1 und ZEUS zu $d^2\sigma/dE_T d\eta$ (R) gespannt sein! Es wird aber auf jeden Fall instruktiv sein, verschiedene Jetdefinitionen parallel in Theorie und Experiment zu untersuchen. Dies könnte helfen, den Einfluß der Hadronisierungseffekte zu separieren, um so die Partonjets der pQCD direkter mit den hadronischen Jets im Detektor vergleichen zu können. Mit Hilfe der mittleren invarianten Jetmasse \overline{M}_{Jet} wurde gezeigt, daß die Unterschiede zwischen CDF- und Snowmass-Definition auch bei endlichen Jets relativ klein (wenige Prozent) sind. Die R -Abhängigkeit von \overline{M}_{Jet} erklärt über einen reinen $\log \overline{M}_{Jet}$ -Ansatz die R^2 -Korrekturen nur zum Teil. Unabhängig von solchen Überlegungen bietet sich \overline{M}_{Jet} als weitere Eigenschaft des Jetprofils zur experimentellen Analyse an.

Es zeigt sich bei genauerer Untersuchung [BKS93], daß die Abhängigkeit des aufgelösten Photons von M_γ nicht vernachlässigbar ist. Dies gilt auch in den kinematischen Bereichen (kleines x_T , negatives η_{Lab}), in denen das direkte Photon *augenscheinlich* nur wenig beiträgt. In NLO ist stets die Summe von direktem und aufgelöstem Photon zu betrachten, wenn die Faktorisierungsskala im Photon kompensiert sein soll. Auf die hier diskutierten Zusammenhänge, z.B. R_{opt} , hat dies aber nur einen geringen (quantitativen) Einfluß.

Zum Abschluß sollte noch einmal angemerkt werden, daß ein vorläufiger Vergleich der von H1 vorgestellten E_T - und (insbesondere) η -Spektren [H1.93a] mit an die Cuts angepaßten NLO Rechnungen (aufgelöstes Photon) zu ähnlichen Ergebnissen führt, wie in LO [Sal93] und PYTHIA.

Die 4^{er} -Impulse von Elektron und Proton sind in dieser Arbeit definiert als

$$\begin{aligned} p_e &= p_e (1, 0, 0, 1) \\ p_p &= p_p (1, 0, 0, -1) \end{aligned} \quad (A-1)$$

Das einlaufende Elektron definiert also die positive Richtung der z -Achse, e_z . Betrachten wir nun ein Teilchen mit der Energie E und dem Impuls \mathbf{p} , o.B.d.A. im Ruhesystem von H1 und ZEUS. Seine invariante Masse ist dann $M^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$. Bezüglich der ep -Strahlachse kann der Impuls in einen (2-dimensionalen) transversalen Anteil p_T mit dem Betrag p_T und einen parallelen Anteil $p_{||}$ zerlegt werden. Die Rapidität y des Teilchens wird über

$$e^{2y} = \frac{E + p_{||}}{E - p_{||}} \quad (A-2)$$

definiert, woraus

$$\sinh^2 y = \frac{p_{||}^2}{p_T^2 + M^2} \quad (A-3)$$

folgt. Der Winkel Θ zwischen \mathbf{p} und e_z erfüllt

$$\tan \Theta = \frac{p_T}{p_{||}} \quad (A-4)$$

Als Pseudorapidität η wird der asymptotische Wert von y im Limes $M^2/E^2 \rightarrow 0$ bezeichnet. Sie hängt mit Θ direkt über

$$\begin{aligned} \sinh \eta &= 1/\tan \Theta \\ \cosh \eta &= 1/\sin \Theta \\ \tanh \eta &= \cos \Theta \end{aligned} \quad (A-5)$$

zusammen. In einem festen Bezugssystem lautet die allgemeine Beziehung zwischen y und η

$$(p_T^2 + M^2)^{1/2} \sinh y = p_T \sinh \eta, \quad (A-6)$$

woraus sofort

$$E = \sqrt{p_T^2 + M^2} \cosh y \quad (A-7)$$

folgt. Es bietet sich an, die transversale Energie des Teilchens als

$$E_T = \sqrt{p_T^2 + M^2} \quad (A-8)$$

zu definieren. Sie ist, wie p_T und M^2 , invariant unter Boosts entlang der ep -Strahlachse und ist für masselose Partikel mit dem Betrag des Transversalimpulses identisch. Der 4^{er} -Impuls eines (auslaufenden) Teilchens kann nun in der Form

$$\mathbf{p} = (E_T \cosh y, p_T \cos \Phi, p_T \sin \Phi, p_T \sinh \eta) \quad (A-9)$$

geschrieben werden, wobei Φ der Azimuth gegen eine feste Richtung in der Transversalebene, z.B. gegen die Projektion der Jetachse, ist. Um es noch einmal hervorzuheben: Definiert man

die transversale Energie eines massiven Teilchens oder Jets durch die Projektion der gesamten Energie auf die zur Strahlachse orthogonale Ebene per

$$\begin{aligned} E_T' &= E \sin \Theta \\ &= E / \cosh \eta, \end{aligned}$$

so folgt u.a.

$$E_T'^2 = p_T'^2 + \frac{M^2}{\cosh \eta} \quad (\text{A-10})$$

Da sich die (Pseudo-)Rapidity unter Boosts additiv transformiert -- Differenzen $y_1 - y_2$ ($\eta_1 - \eta_2$) sind invariant -- ist E_T' für massive Teilchen seinerseits nicht invariant unter Lorentztransformationen entlang der z -Achse, im Gegensatz zu E_T aus Gl.(A-8)!

Der Unterschied zwischen E_T und p_T ebenso wie der zwischen y und η verschwindet quadratisch mit der Jetmasse. Die Ergebnisse in Kap.[5-3] zeigen, daß er demnach für kleine R auch quadratisch im Jetcut sein muß und für große Kegetradien zu berücksichtigen ist.

Anhang B Zusammenstellung kinematischer Variablen

Unter der üblichen Vernachlässigung transversaler Impulsanteile einlaufender Partonen erhält man ihre 4^v -Impulse durch Multiplikation mit x_a (Parton a aus dem Photon) bzw. x_b (b aus dem Proton). Alle beitragenden Teilchen werden hier als bei HERA -Energien masselos angenommen. Der 4^{ev} -Impuls eines auslaufenden Teilchens oder Jets mit der invarianten Masse M , einem Transversalimpuls vom Betrag p_T zur ep -Achse, einem Azimutalwinkel Φ gegen eine gegebene Richtung in der Transversalebene und der (Pseudo-)Rapidity y_{Lab} (η_{Lab}) im Laborsystem von HERA ist gemäß Gl.(A-9)

$$\mathbf{p} = (E_T \cosh y_{Lab}, p_T \cos \Phi, p_T \sin \Phi, p_T \sinh \eta_{Lab}). \quad (\text{B-1})$$

Für masselose Partonen geht dies über in

$$\mathbf{p} = p_T (\cosh \eta_{Lab}, \cos \Phi, \sin \Phi, \sinh \eta_{Lab}). \quad (\text{B-2})$$

Die Mandelstam-Variablen [LB] für den inklusiven (2-2) Prozess $e + p \rightarrow Jet + X$ sind

$$\begin{aligned} S &= (p_e + p_p)^2 = 4p_e p_p \\ T &= (p_e - p_{Jet})^2 = -2p_e p_T e^{-\eta_{Lab}^{et}} + M_{Jet}^2 \\ U &= (p_p - p_{Jet})^2 = -2p_p p_T e^{+\eta_{Lab}^{et}} + M_{Jet}^2 \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

mit

$$S + T + U = M_{Jet}^2 + M_X^2. \quad (\text{B-4})$$

Die entsprechenden Variablen auf Parton-Niveau für den Prozess $a + b \rightarrow Jet + \hat{x}(s, t, u)$ erhält man durch entsprechende Reskalierung der einlaufenden Impulse. Es ist zweckmäßig für die

Behandlung der NLO-Beiträge zwei weitere Variablen zu definieren [EFHH80], die insbesondere den Umgang mit den IR/C-Singularitäten der (2-3)-Prozesse vereinfachen, vgl. Kap.[3-3]. Sie sind als Kombinationen der Mandelstam-Variablen S, T und U per

$$V = 1 + \frac{T}{S} \quad W = \frac{-U}{S+T}, \quad (\text{B-5})$$

definiert, v und w entsprechend. Aus dieser Definition folgt sofort

$$\begin{aligned} s + t + u &= sv(1-w) \\ S + T + U &= SV(1-W), \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

also auch

$$\delta(s + t + u) = \frac{1}{sv} \delta(1-w). \quad (\text{B-7})$$

Wenn M_{Jet} vernachlässigt werden kann, bleiben mit der Boostinvarianten p_T auch alle entsprechenden Kombinationen der Mandelstam-Variablen beim „Abstieg“ vom Hadron- auf das Parton-Niveau forminvariant. Dann sind

$$\left. \begin{aligned} svw(1-v) &= SVW(1-V) \\ tu/s &= TU/S \\ -twv &= -TVW \\ -u(1-v) &= -U(1-V) \end{aligned} \right\} = p_T^2. \quad (\text{B-8})$$

Als Konsequenz aus der Summation über alle beitragenden Kombinationen von Partonen müssen Jet-Wirkungsquerschnitte invariant unter Vertauschen von $t \leftrightarrow u$ sein. Für die Variablen v und w sind die Transformationen etwas komplizierter, was aber durch ihren Vorteil bei der Behandlung der IR/C-Singularitäten kompensiert wird:

$$\begin{aligned} t &\leftrightarrow u \\ v &\leftrightarrow v' \equiv 1-vw \\ w &\leftrightarrow w' \equiv \frac{1-v}{1-vw} \\ 1-w &\leftrightarrow \frac{v}{1-vw}(1-w) \\ 1-v &\leftrightarrow vw \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

Das entsprechende Transformationsverhalten der Φ -Distributionen in $z \equiv 1-w$ (Kap.[3-3])

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_0(z) &= \delta(z) \\ \tilde{\mathcal{D}}_1(z) &= 1/(z)_+ \\ \tilde{\mathcal{D}}_2(z) &= \left(\frac{\log(z)}{z} \right)_+ \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

unter Gl.(B-9), also $z \rightarrow z' \equiv 1-w'$, ist

$$z' \tilde{\mathcal{D}}_k(z') = \sum_{i=0}^k \frac{[\log(z'/z)]^i}{i!} z \tilde{\mathcal{D}}_{k-i}(z). \quad (\text{B-11})$$

Vergleiche [Fur82, App.B].

Anhang C Zusammenstellung von Jetdefinitionen

Die partonischen Endzustände der pQCD unterscheiden sich von den hadronischen im Experiment u.v.a. durch die wesentlich geringere Zahl auslaufender Teilchen. Vereinbarungen, was unter einem *Jet* zu verstehen ist, sollten daher nur einen allgemeinen Rahmen vorgeben, der auf beide Situationen anwendbar sein muß. Unter einer **Jetdefinition** wird (in dieser Arbeit) die Kombination zweier Vorschriften in der Form

Rekombinationskriterium (benötigt Jetachsen, bestimmt die Teilnehmer)
Definition der Jetparameter (bestimmt Jetachsen, benötigt die Teilnehmer)

verstanden. Eine Definition dieser Art erfordert einen **Jet-Algorithmus**, der ausgehend von einem Startpunkt iterativ einen Fixpunkt sucht, an dem die beiden Vorschriften miteinander kompatibel sind. Dieser Fixpunkt entspricht dann einer Zuordnung der auslaufenden Teilchen zu „den“ Jets. Er kann von der Wahl der Anfangskonfiguration abhängen, d.h., Jets sind keine *Dinge an sich*. Im Experiment ist eine zusätzliche Konvention über den Startpunkt (*initiator*) erforderlich. In der störungstheoretischen Berechnung von Wirkungsquerschnitten wird der Jetimpuls vorgegeben, so daß nur noch über die partonischen Freiheitsgrade in Übereinstimmung mit dem Rekombinationskriterium zu integrieren ist.

Das in Kap.[3.5.3] angesprochene Problem nicht-eindeutiger Jetmultiplizitäten, bzw. des Überlappens von Jetkegeln, ist Gegenstand des Rekombinationskriteriums, also der *Jetdefinition*. Die von Catani *et al.* [Cat91,92,93] angegebene Jetdefinition (k_{\perp}) ist in diesem Punkt von vornherein eindeutig. Eine Anwendung auf Photoproduktion steht noch aus.

Die in dieser Arbeit betrachteten Jetdefinitionen sind

a.) Snowmass-Accord[Sno90]

Jetparameter: Werden die auslaufenden Teilchen eines Ensembles $\{i\}$ mit der transversalen Energie $E_{T,i}$, der Pseudorapidität η_i und dem Azimuth ϕ_i zu einem Jet zusammengefaßt, so sind die entsprechenden Parameter E_T, η, Φ des Jets durch die Forderung

$$\sum_{\{i\}} E_{T,i} \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta\eta_i \\ \Delta\phi_i \end{pmatrix} \equiv E_T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Delta\phi_i \equiv \phi_i - \Phi, \quad \Delta\eta_i \equiv \eta_i - \eta \quad (\text{C-1})$$

definiert. Die Jetachse entspricht also dem Schwerpunkt der transversalen Energie des Ensembles $\{i\}$ in der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene.

Rekombination: Ein Teilchen i trägt genau dann zum Jet bei, wenn es in einen Kegel um die Jetachse gestreut wird. Dieser Kegel wird durch einen Kreis mit Radius R in der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene definiert, es muß

$$(\Delta\eta_i)^2 + (\Delta\Phi_i)^2 \equiv R_i^2 \leq R^2 \quad (\text{C-2})$$

gelten.

Bemerkung: Besteht ein Snowmass-Jet aus (genau) 2 Teilchen (i, j) , so liegen sich diese in der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene bezüglich der Jetachse gegenüber. Es gelten dann die einfachen Beziehungen

$$R_i E_{T,i} = R_j E_{T,j} \quad \text{und} \quad R_{ij} = R_i + R_j \quad (\text{C-3})$$

R_k ist der Abstand des Teilchens k von der Jetachse, R_{ij} der Abstand der beiden Teilchen voneinander (in der Metrik der $(\Delta\Phi, \Delta\eta)$ -Ebene).

b) CDF-Definition

Jetparameter: Der 4^{er} -Impuls eines Jets wird als Summe der 4^{er} -Impulse des ihn bildenden Teilchenensembles $\{i\}$ definiert, also per

$$\sum_{\{i\}} p_i \equiv p_J \quad (\text{C-4})$$

Der Jetimpuls ist hier der Impuls des Schwerpunktsystems des Ensembles $\{i\}$.

Rekombination: wie bei a).

Beide Definitionen sind invariant unter Boosts entlang der Referenzachse für Rapidität und Transversalimpuls. Besteht der Jet aus einem Teilchen, so sind sie trivialerweise identisch. Sie entarten aber auf jeden Fall im Limes sehr kleiner Jetcuts R , siehe Kap.[3.4.2]. Die CDF-Definition erlaubt die zwanglose Einführung einer invarianten Jetmasse per

$$M_J^2 \equiv p_J \circ p_J \quad (\text{C-5})$$

Im Rahmen des Snowmass-Accords muß sie zusätzlich definiert werden, da dort nur für $R \ll 1$ der 4^{er} -Impuls des Jets wohldefiniert ist.

Die in der ursprünglichen Formulierung der SCA [Fur82] verwendete Jetdefinition ist die

c) Furman-Definition

Jetparameter: Der 3^{er} -Impuls \mathbf{p}_J eines Jets wird als Summe der 3^{er} -Impulse des ihn bildenden Teilchensembles $\{i\}$ definiert, also per

$$\sum_{(i)} \mathbf{p}_i \equiv \mathbf{p}_J \quad (\text{C-6})$$

Rekombination: Es sei ein festes Bezugssystem S gegeben. Ein Teilchen i trägt genau dann zum Jet bei, wenn es in S in einen Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel 2δ um die Jetachse gestreut wird. Es muß

$$|\Delta\Psi_i| \leq \delta \quad (\text{C-7})$$

erfüllt sein, $\Delta\Psi$ ist der Winkel zwischen den 3^{er} -Impulsen vom Jet und dem Teilchen i .

Bemerkung: Die Festlegung eines Referenzsystems S ist essentiell. Der Jetkegel ist außerhalb S nicht mehr kreisförmig, also nicht mehr allein durch einen Cutparameter (δ) definiert.

Anhang D Der Winkelcut δ unter Lorentz-Boosts

Furman[Fur82] und Aversa *et al.*[Ave89] definieren einen Jet als Ensemble von Teilchen innerhalb eines Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel $2\delta \ll 1$ um die Jetachse η_{Jet} . Als Winkel zwischen 3^{er} -Impulsen ist δ ebenso wie die Form des Kegel-Querschnittes senkrecht zur Jetachse abhängig vom Bezugssystem. In den zitierten Arbeiten wird δ im Schwerpunktsystem der einlaufenden Hadronen ($pp, p\bar{p}$) erklärt. In den analytischen Ausdrücken zum inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt tritt der Winkelcut stets zusammen mit der Energie des Jets auf. $d\sigma$ hängt von δ nur über

$$\log(\delta E_{Jet}) \stackrel{\delta \ll 1}{\approx} \log(\delta E_T \cosh \eta) \quad (\text{D-1})$$

ab. Hier soll explizit gezeigt werden, daß diese Kombination invariant unter Lorentz-Boosts entlang der ep -Strahlachse ist. Die Konsequenz dieses Transformationsverhaltens von δ ist, daß die Gültigkeitsbedingung für die Lösungen von Furman und ACGG durch die Forderung

$$\delta \ll 1 \quad (\text{D-2})$$

allein nicht wohldefiniert sein kann. $Gl.(D-2)$ legt Bezugssysteme fest, in denen $\eta_{Jet} \approx 0$ und der Kegel noch 'ungefähr' kreisförmig ist[Fur82, Ave89]. Diese Bedingungen können in der Forderung nach

$$\delta \cosh \eta_{Jet} \ll 1 \quad (\text{D-3})$$

zusammengefaßt werden. Die Konsistenz der SCA im HERA -Laborsystem im Bereich kleiner Streuwinkel läßt sich, streng genommen, nur nachträglich bestätigen, wenn die R^2 -Korrekturen bekannt sind. Sie verlangt eine sorgfältige Wahl von δ , damit $Gl.(D-3)$ im gesamten Phasenraum des Jets erfüllt ist. Die Ergebnisse in Kap.[4.2] zeigen, daß die Näherung kleiner Jetcuts (SCA) *überraschenderweise* bis $\delta \cdot \cosh \eta_{Jet} \approx 0.3$ hinaus sehr gut ist. Für $E_T \geq 5 \text{ GeV}$ ist im ep -Schwerpunktsystem $\cosh \eta_{Jet} \leq 30$. Meist ist $\cosh \eta_{Lab}$ allerdings wesentlich kleiner, womit die Wahl $\delta = 0.01$ für die Berechnung des SCA-Anteils des inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnittes *à posteriori* zu rechtfertigen ist.

Nun aber zum Beweis der Boostinvarianz von $Gl.(D-3)$.

In einem Bezugssystem S sei ein Kreiskegel der Apertur $\delta (\ll 1)$ um eine durch die Pseudorapidität $\eta = arctanh(1/\cos\Theta)$ und einen Azimuth $\Phi = 0$ definierte Richtung gegeben. Nach einem Boost entlang der z -Achse in ein Bezugssystem S' entspricht diese Richtung einer Pseudorapidität

$$\eta' = \eta + \Delta\eta, \quad (\text{D-4})$$

der Öffnungswinkel des (Kreis-)Kegels sei hier δ' . Der Azimuth bleibt unverändert. Zu beweisen ist also

$$\delta \cosh \eta = \delta' \cosh \eta'. \quad (\text{D-5})$$

Zu diesem Zweck nimmt man sich die beiden Schnittpunkte des Kegels mit der durch $\Phi = 0$ und die ep -Strahlachse definierten Ebene vor. Sie entsprechen den Winkeln

$$\Theta_{\pm} = \Theta \pm \delta \quad (\text{D-6})$$

zur z -Achse. Gesucht sind nun Θ'_{\pm} . Unter Berücksichtigung von $Gl.(D-2)$ erhält man einerseits

$$\cos(\Theta_{\pm}) = \cos\Theta \mp \delta \sin\Theta, \quad (\text{D-7})$$

andererseits aber auch

$$\begin{aligned} \cos(\Theta'_{\pm}) &= \tanh \eta_{\pm} \\ &= \tanh(\eta'_{\pm} - \Delta\eta) \\ &= \frac{\tanh \eta'_{\pm} - \tanh \Delta\eta}{1 - \tanh \Delta\eta \tanh \eta'_{\pm}} \\ &= \frac{\cos \Theta'_{\pm} - \tanh \Delta\eta}{1 - \tanh \Delta\eta \cos \Theta'_{\pm}} \\ &= \frac{\tanh \eta' - \tanh \Delta\eta \mp \delta' \sin \Theta'}{1 - \tanh \Delta\eta \tanh \eta' \pm \delta' \sin \Theta' \tanh \Delta\eta} \\ &= \tanh \eta \left(1 \mp \delta' \sin \Theta' \left\{ \frac{1}{\tanh \eta' - \tanh \Delta\eta} + \frac{\tanh \Delta\eta}{1 - \tanh \Delta\eta \tanh \eta'} \right\} \right) \\ &= \tanh \eta \mp \delta' \sin \Theta' \tanh \eta \left(\frac{\cosh \Delta\eta \cosh \eta'}{\sinh \eta} + \frac{\sinh \Delta\eta \cosh \eta'}{\cosh \eta} \right) \\ &= \tanh \eta \mp \delta' (\cosh \Delta\eta \cosh \eta + \sinh \Delta\eta \sinh \eta) / \cosh^2 \eta \\ &= \tanh \eta \mp \delta' \frac{\cosh \eta'}{\cosh^2 \eta} \\ &= \cos \Theta \mp \delta' \frac{\sin^2 \Theta}{\sin \Theta'} \end{aligned} \quad (\text{D-8})$$

Bis auf $\mathcal{O}(\delta'^2)$, bzw. $\mathcal{O}(\delta'^2)$, folgt aus dem Vergleich der $Gl.n.(D-7, -8)$

$$\delta' \sin \Theta = \delta \sin \Theta'.$$

Wegen $Gl.(A-5)$ ist dies äquivalent zu $Gl.(D-5)$, womit die Behauptung selbstkonsistent in führender Ordnung in δ bewiesen ist.

q.e.d.

In Kap.[3.4.2] wird gezeigt, daß im Limes kleiner Jetcuts

$$\delta \cosh \eta_{\mu\alpha} = R \quad (\text{D-9})$$

gilt. R definiert den Jetradius in der (η, Φ) -Ebene. Dies ist invariant unter Lorentz-Boosts entlang der ep -Achse, man erhält also noch einmal:

q.e.d.

Anhang E Jetmasse als Trägheitsmoment

In Kap.[5.3] wurde angedeutet, daß die invariante Jetmasse als Trägheitsmoment der E_T -Verteilung im Jet interpretiert werden kann. Es soll nun kurz erläutert werden, wie sich diese anschauliche Vorstellung zumindest im Bereich kleiner Jetcuts R quantifizieren läßt. Wie in Kap.[3.4] gezeigt, spielen dort die Unterschiede zwischen den in dieser Arbeit betrachteten Jetdefinitionen keine Rolle. Der Einfachheit halber kann der Beweis also für den Spezialfall des Snowmass-Accords geführt werden.

Ein Vektor \mathbf{r} bezeichne im folgenden einen Punkt in der (η, Φ) -Ebene, also einen Streuwinkel zur ep -Achse. Gegeben seinen N (!) masselose Partonen mit transversalen Impulsen $p_{T,i}$ und den Winkelkoordinaten $\mathbf{r}_i, i \in \{1, \dots, N\}$. Diese Partonen bilden einen Jet mit Transversalenergie E_T und den Koordinaten \mathbf{r}_J , d.h.

$$\begin{aligned} E_T &= \sum_i p_{T,i} \\ E_T \mathbf{r}_J &= \sum_i p_{T,i} \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (\text{E-1})$$

bzw.

$$\sum_i p_{T,i} \Delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{E-1})$$

mit $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_J$. Normiert man alle Transversalimpulse auf E_T und schreibt

$$\xi_{T,i} = \frac{p_{T,i}}{E_T}, \quad (\text{E-2})$$

so lautet die Definition des Jetimpulses à la Snowmass (siehe Gl.(C-1))

$$\begin{aligned} \sum_i \xi_{T,i} &= 1 \\ \sum_i \xi_{T,i} \Delta \mathbf{r}_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E-3})$$

Die mechanische Deutung ist einfach: Die Jetachse \mathbf{r}_J wird durch den Schwerpunkt der p_T -Verteilung der Partonen in der (η, Φ) -Ebene bestimmt. Da der 4^{er} -Impuls des Jets auf diese Weise nicht vollständig definiert ist, kann man als seine invariante Masse M_J diejenige des ihn definierenden Teilchenensembles wählen. Wegen der Masselosigkeit der beteiligten Partonen ist dann

$$M_J^2 = \left(\sum_i p_i \right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} \mathbf{p}_i \circ \mathbf{p}_j \\ &= \sum_{i,j} p_{T,i} p_{T,j} (\cosh(\eta_i - \eta_j) - \cos(\Phi_i - \Phi_j)) \\ &\stackrel{SCA}{\simeq} \frac{1}{2} \sum_{i,j} p_{T,i} p_{T,j} ((\eta_i - \eta_j)^2 + (\Phi_i - \Phi_j)^2) \\ &= \sum_{i \neq j} p_{T,i} p_{T,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \end{aligned}$$

für kleine Jetcuts $|\mathbf{r}_i| \leq R \ll 1$. Normiert auf E_T ist

$$m_J^2 = (M_J / E_T)^2 \quad (\text{E-4})$$

$$= \sum_{i \neq j} \xi_{T,i} \xi_{T,j} (\Delta \mathbf{r}_i - \Delta \mathbf{r}_j)^2. \quad (\text{E-5})$$

Das Trägheitsmoment der E_T -Verteilung des Partonensembles in der (η, Φ) -Ebene ist nach Normierung auf E_T definiert durch

$$t_J = \sum_i (\Delta \mathbf{r}_i)^2 \xi_{T,i}. \quad (\text{E-6})$$

Durch Einsetzen von Gl.(E-3) erhält man über

$$\begin{aligned} m_J^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \xi_{T,i} \xi_{T,j} ((\Delta \mathbf{r}_i)^2 + (\Delta \mathbf{r}_j)^2 - 2 \Delta \mathbf{r}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \xi_{T,i} \sum_j \xi_{T,j} \Delta \mathbf{r}_j + \sum_j \xi_{T,j} \sum_i \xi_{T,i} \Delta \mathbf{r}_i - 2 \left(\sum_i \xi_{T,i} \Delta \mathbf{r}_i \right) \cdot \left(\sum_j \xi_{T,j} \Delta \mathbf{r}_j \right) \right) \end{aligned}$$

schließlich

$$m_J^2 = t_J \quad (\text{E-7})$$

Die strenge Äquivalenz von Trägheitsmoment der E_T -Verteilung und dem Quadrat der Jetmasse in Einheiten der transversalen Energie gilt also für Jets aus einer beliebigen Anzahl masseloser Teilchen im Bereich kleiner Jetcuts. Die Analogie hilft der Vorstellung aber sicherlich auch noch bei endlichen Kegelradien.

Literatur

- Abr91** H. Abramowicz, K. Charchula, A. Levy, M. Krawczyk und U. Maor, DESY 90-019, 91-057 (unveröffentlicht)
- AEM78** G. Altarelli, R.K. Ellis und G. Martinelli, Nucl. Phys. **B143**(1978)521, Nucl. Phys. **B146**(1978)544 Nucl. Phys. **B157**(1979)461
- Alt82** G. Altarelli, Phys. Rep. **81**(1982)1
- dAM91** G. D'Agostini und D. Monaldi, in: [HERA91], Vol.1, 527
- AR89** P.B. Arnold und M. Hall Reno, Nucl. Phys. **B319**(1989)37 [E: Nucl. Phys. **B330**(1990)284]
- AP77** G. Altarelli und G. Parisi, Nucl. Phys. **B126**(1977)298
- APV78** D. Amati, R. Petronzio und G. Veneziano, Nucl. Phys. **B140**(1978)54, Nucl. Phys. **B146**(1978)28
- Aur87** P. Aurenche, R. Baier, A. Douri, M. Fontannaz und D. Schiff, Nucl. Phys. **B286**(1987)509, 553
- Ave89** F. Aversa, P. Chiappetta, M. Greco und J. Ph. Guillet, Nucl. Phys. **B210**(1988)225, Nucl. Phys. **B211**(1988)465, Z. Phys. **C46**(1990)253, Nucl. Phys. **B327**(1989)105
- Ave90** F. Aversa, P. Chiappetta, M. Greco und J. Ph. Guillet, Phys. Rev. Lett. **65**(1990)401
- Ave91** F. Aversa, P. Chiappetta, I. Gonzales, M. Greco und J. Ph. Guillet, Z. Phys. **C49**(1991)459
- BB79** W.A. Bardeen und A.J. Buras, Phys. Rev. **D20**(1979)166 [E: Phys. Rev. **D21**(1980)2041]
- BBDM78** W.A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke und T. Muta, Phys. Rev. **D18**(1978)3998
- Ber81** F. A. Berends et. al., Phys. Lett. **103B**(1981)124
- Bit91** J. Bilitzinger et al., in: [HERA91], Vol.1, 563
- BJP69** J.D. Bjorken und E.A. Paschos, Phys. Rev. **185**(1969)1975
- BKS93** D. Bödeker, G. Kramer und S.G. Salesch, in preparation
- Böd92** D. Bödeker, Phys. Lett. **292B**(1992)164, Z. Phys. **C59**(1993)501
- BOO89a** H. Baer, J. Ohnemus und J.F. Owens, Z. Phys. **C42**(1989)657
- BOO89b** H. Baer, J. Ohnemus und J.F. Owens, Phys. Rev. **D40**(1989)2844
- BS91** R.J. Buttery und J.K. Storrow, Manchester Preprint MUTP 91/16
- BT93** F. Barreiro und J. Terron, private Mitteilungen
- BW85** Ch. Berger und W. Wagner, Phys. Rep. **146**(1987)1
- Cat91** S. Catani, Yu.L. Dokshitzer, M. Olsson, G. Turnock und B.R. Webber, Phys. Lett. **269B**(1991)432
- Cat92** S. Catani, Yu.L. Dokshitzer und B.R. Webber, Phys. Lett. **285B**(1992)291
- Cat93** S. Catani, Yu.L. Dokshitzer, M.H. Seymour und B.R. Webber, Nucl. Phys. **B406**(1993)187
- CKR77** B.L. Combridge, J. Kripfganz und J. Rauf, Phys. Lett. **70B**(1977)234
- CS78** R. Cutler und D. Sivers, Phys. Rev. **D17**(1978)197
- De91** K. Desch, Diplomarbeit, Bonn Preprint Bonn-IR-91-73
- DFLM88** M. Dienoz, F. Ferroni, E. Longo und G. Martinelli, Z. Phys. **C39**(1988)21
- DGo88** M. Drees und R. M. Godbole, Phys. Rev. Lett. **61**(1988)682
- DGo89** M. Drees und R. M. Godbole, Phys. Rev. **D39**(1989)169
- DGo90** M. Drees und R. M. Godbole, Nucl. Phys. **B339**(1990)335
- DG85** M. Drees und K. Grassie, Z. Phys. **C28**(1985)451
- DGGR85** M. Drees, M. Glück, K. Grassie und E. Reya, Z. Phys. **C27**(1985)587
- DO82** D.W. Duke und J.F. Owens, Phys. Rev. **D26**(1982)1600
- DO84** D.W. Duke und J.F. Owens, Phys. Rev. **D30**(1984)49
- Dre93** M. Drees, Vortrag auf dem 23rd International Symposium on Multiparticle Dynamics, Aspen (Colorado) September 1993, Univ. Wisconsin Preprint MAD/PH/797, Oktober 1993
- EFHH80** R.K. Ellis, M.A. Furman, H.E. Haber und I. Hinchliffe, Nucl. Phys. **B173**(1980)397
- ElI79** R.K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H.D. Politzer und G.G. Ross, Nucl. Phys. **B152**(1979)285
- ElI87** S. D. Ellis, Vorlesungen im Theoretical Advanced Study Institute, St. John's College, Santa Fe, Juli 1987
- ElI91** S. D. Ellis, J. Phys. **G17**(1991)1552
- ElI92** S. D. Ellis, Vortrag im SSC Physics Symposium, Wisconsin, April 1992
- EKS89** S. D. Ellis, Z. Kunszt und D. E. Soper, Phys. Rev. Lett. **62**(1989)726, Phys. Rev. **D40**(1989)2188, Phys. Rev. Lett. **64**(1990)2121
- EKS92** S. D. Ellis, Z. Kunszt und D. E. Soper, Phys. Rev. Lett. **69**(1992)3615
- ES86** R. K. Ellis und J. C. Sexton, Nucl. Phys. **B269**(1986)445

- FoP92** M. Fontannaz und E. Pilon, Phys. Rev. **D45**(1992)382;
P. Aurenche, P. Chiappetta, M. Fontannaz, J.Ph. Guillet und E. Pilon,
Z. Phys. **C56**(1992)589
- Fra87** W.R. Frazer, Phys. Lett. **194B**(1987)287
- Fur82** M. Furman, Nucl. Phys. **B197**(1982)413
- GPW89** R.J. Gonsalves, J. Pawlowski und Ch.-F. Wai, Phys. Rev. **D40**(1988)2245
- GR83** M. Glück und E. Reya, Phys. Rev. **D28**(1983)2749
- GRV92 γ** M. Glück, E. Reya und A. Vogt,
Phys. Rev. **D45**(1992)3886, Phys. Rev. **D46**(1992)1973
- GRV92p** M. Glück, E. Reya und A. Vogt, Z. Phys. **C53**(1992)127
- GRV93** M. Glück, E. Reya und A. Vogt, Phys. Lett. **306B**(1993)391
- GS92a** L. E. Gordon und J. K. Storrow, Phys. Lett. **291B**(1992)320
- GS92b** L. E. Gordon und J. K. Storrow, Manchester Preprint M/C.TH.92/06
- GS92c** L. E. Gordon und J. K. Storrow, Z. Phys. **C56**(1992)307
- Gui91** J.Ph. Guillet, Z. Phys. **C51**(1991)387
- GV93** M. Greco und A. Vicini, Frascati Preprint LNF-93/017 (P), April 1993
- HERA87** Proc. HERA Workshop, Hamburg, 12.-14. Oktober 1987, (Edt. R.D. Pececi, 1988)
- HERA91** Proc. *Physics at HERA* Workshop, Hamburg, 29.-30. Oktober 1991 (1992) (Edt.
W. Buchmüller und G. Ingelman).
- HMR590** P.N. Harriman, A.D. Martin, R.G. Roberts und W.J. Stirling,
Phys. Rev. **D42**(1990)798
- tHV72** G. 't Hooft und M. Veltman, Nucl. Phys. **B44**(1972)189
- H1.92** H1 Kollaboration, T. Ahmed et al., Phys. Lett. **297B**(1992)205
- H1.93a** H1 Kollaboration, T. Ahmed et al., Phys. Lett. **314B**(1993)436
- H1.93b** H1 Kollaboration, T. Ahmed et al., Nucl. Phys. **B407**(1993)515
- Jac90** M. Jacob, CERN TH-5821 (September 1990)
- JADE84** JADE Kollaboration, W. Bartel et al., Phys. Lett. **134B**(1984)275
- Kin73** R.L. Kingsley, Nucl. Phys. **B60**(1973)45
- KLN62** T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3**(1962)650;
T.D. Lee und M. Nauenberg, Phys. Rev. **133**(1964)B1549
- KMR590** J. Kwiecinski, A.D. Martin, R.G. Roberts und W.J. Stirling,
Phys. Rev. **D42**(1990)3645
- Kra84** G. Kramer, *Theory of Jets in Electron-Positron Annihilation*, Springer Tracts in
Modern Physics, Vol.102(1984)
- KS91** G. Kramer und S.G. Salesch, in: [HERA91], Vol.1, 649
- KS93a** G. Kramer und S.G. Salesch, **DESY** 93-010, Januar 1993, erscheint in Z. Phys. **C()**
- KS93b** G. Kramer und S.G. Salesch, Phys. Lett. **317B**(1993)218
- LAC91** H. Abramowicz, A. Levy und K. Charchula, Phys. Lett. **269B**(1991)458
- Lep78** G.P. Lepage, J. Comp. Phys. **27**(1978)192
- Mar91** A.D. Martin, Z. Phys. **C51**(1991)241
- MRS88** A.D. Martin, R.G. Roberts und W.J. Stirling,
Phys. Rev. **D37**(1988)1161, Mod. Phys. Lett. **4**(1989)1135
- MRS91** A. Martin, R. Roberts und W.J. Stirling, Phys. Rev. **D43**(1991)3648
- MRS93** A.D. Martin, W.J. Stirling und R.G. Roberts, Phys. Rev. **D47**(1993)867,
Phys. Lett. **306B**(1993)145 [E:Phys. Lett. **309B**(1993)492]
- MT91** J.G. Morfin und Wu-Ki Tung, Z. Phys. **C52**(1991)113
- Nic80** A. Nicolaidis, Nucl. Phys. **B163**(1980)156
- Owe80** J.F. Owens, Phys. Rev. **D21**(1980)54
- Owe87** J.F. Owens, Rev. Mod. Phys. **59**(1987)465
- ORG78** J.F. Owens, E. Reya und M. Glück, Phys. Rev. **D18**(1978)1501
- OT92** J.F. Owens und Wu-Ki Tung, FERMLAB-Pub-92/59-T
- PDF** K. Charchula, *PHOPDF. A FORTRAN package of parametrizations of parton dis-
tribution functions in the photon*, Vers. 2.0 (IX 1992)
*PAKPDF. A FORTRAN package of parametrizations of parton distribution func-
tions in the proton*, Vers. 1.2 (IX 1992)
H. Plothow-Besch, *PDFLIB. A Library of all available Parton Density Functions of
the Nucleon, the Pion and the Photon*, Vers. 3.0 (VII 1992), CERN-PPE/92-123
- PDG92** Particle Data Group, Review of Particle Properties, Phys. Rev. **D45**(1992)S1
- Ros83** G. Rossi, Phys. Lett. **130B**(1983)105, Phys. Rev. **D29**(1984)852
- Sai93** S.G. Salesch, vorgestellt im Rahmen der H1-Arbeitsgruppe *Photoproduktion* (un-
veröffentlicht)
- Sch93** F. Borzumati und G.A. Schuler, Z. Phys. **C58**(1993)139
T. Sjöstrand und G.A. Schuler, CERN TH.6718 (1992), TH.6796 (Februar 1993)
- Sj692** T. Sjöstrand, CERN TH.6488 (Mai 1992)
- Sno90** J.E. Huth et al., FERMLAB-Conf-90/249-E (1990)

Danksagung

Ich möchte Prof. Dr. Gustav Kramer für die stets interessierte und engagierte Betreuung meiner Arbeit in Form vieler wertvoller Diskussionen und Anregungen danken. Ich hoffe, daß ich seine Geduld nicht zu oft strapaziert habe. Dr. Jean-Phillipe Guillet habe ich für die Möglichkeit zu danken, das FORTRAN-Paket *JETLIB* mit den Ergebnissen von [Ave89] benutzen zu können. Interessant und hilfreich waren Diskussionen mit Dr. Dietrich Bödeler und Dr. Bernd Kniehl, die u.v.a. auch *cross checks* der Born-Wirkungsquerschnitte ermöglichten. Ich bedanke mich bei Dr. Martin Erdmann für die Möglichkeit, einige meiner Ergebnisse zum inklusiven Ein-Jet-Wirkungsquerschnitt mit entsprechenden vorläufigen Daten von H1 vergleichen und im Rahmen der AG Photoproduktion bei H1 diskutieren zu können. Insbesondere der Vergleich mit PYTHIA-Ergebnissen von Dr. Andrei Rostovtsev war sehr aufschlußreich. Das Interesse von Prof. Dr. Fernando Barreiro und Dr. Juan Terron von ZEUS an meinen Ergebnissen zum Jetprofil hat mich sehr gefreut und motiviert. Aus dem Vergleich mit ihren vorläufigen ZEUS - Daten habe ich viel gelernt.
Mein Dank gilt nicht zuletzt dem DESY sowohl für die finanzielle Unterstützung während meiner Arbeit, als auch für das interessante Arbeitsumfeld.

- StK87 W.J. Stirling und Z. Kunszt, in: [HERA87], Vol.1, S. 331
- Sto92 J.K. Storrow, Manchester Preprint M/C.TH 92/11
- StW77 G. Sterman und S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **39**(1977)1436
- Vogt92 A. Vogt, Dissertation, Dortmund Preprint DO-TH 92/15
- VS90 J.H. Da Luz Viera und J.K. Storrow, Z. Phys. **C51**(1991)241
- Wit77 E. Witten, Nucl. Phys. **B120**(1977)189
- dWit79 R.J. de Witt *et al.*, Phys. Rev. **D19**(1979)2046 [E:Phys. Rev. **D20**(1979)1751]
- WW34 C.F. von Weizsäcker, Z. Phys. **88**(1934)612;
E.J. Williams, Phys. Rev. **45**(1934)729
- WZ73 T.F. Walsh und P. Zerwas, Phys. Lett. **44B**(1973)195
- ZEUS92 ZEUS Kollaboration, M. Derrick *et al.*, Phys. Lett. **297B**(1992)404
- LB J.D. Bjorken und S.D. Drell,
Relativistic Quantum Fields, Mc Graw-Hill 1965
T.-P. Cheng und L.-F. Li,
Gauge Theory of Elementary Particle Physics
C. Itzykson und J.-B. Zuber,
Quantum Field Theory, Mc Graw-Hill 1985