DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON

DESY

DESY 94-118
July 1994

Kanonische Formulierung von Gravitations- und Supergravitations-Theorien

H.-J. Matschull

Fachbereich Physik, Universität Hamburg

ISSN 0418-9833

NOTKESTRASSE 85 - 22603 HAMBURG

DESY 94-118
July 1994

ISSN 0418-9833

Kanonische Formulierung von Gravitations- und Supergravitations-Theorien

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Hans-Jürgen Matschull
aus Köppern im Taunus

Hamburg
1994

Gutachter der Dissertation:	Prof. Dr. H. Nicolai Prof. Dr. F. Steiner
Gutachter der Disputation:	Prof. Dr. H. Nicolai Prof. Dr. K. Fredenhagen
Datum der Disputation:	12. Juli 1994
Sprecher des Fachbereichs Physik und Vorsitzender des Promotionsausschusses:	Prof. Dr. E. Lohrmann

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden einige neuere Ergebnisse aus der kanonischen Formulierung und Ansätze zur Quantisierung der allgemeinen Relativitätstheorie vorgestellt, die in Zusammenhang mit Ashtekars Variablen stehen. Im ersten Teil werden die Variablen auf der Ebene der Lagrange-Funktion eingeführt. Das Konzept der kanonischen Quantisierung wird auf die Gravitation und Supergravitation angewandt und einige Lösungsansätze für die Zwangsbedingungen werden kritisch diskutiert, insbesondere in Zusammenhang mit dem Problem der singulären Metriken, das bei den sogenannten Schleifenzuständen auftritt. Im zweiten Teil werden dreidimensionale Modelle untersucht. Eine vollständige Quantisierung der reinen N=2 Supergravitation wird durchgeführt. Anschließend wird dieses Modell durch Materiefelder ergänzt, die Algebra der Zwangsbedingungen ermittelt und ein Lösungsansatz vorgestellt.

Abstract

In this thesis some recent results concerning canonical formulation and ansätze for quantization of general relativity are presented, which are related to Ashtekar's variables. In the first part the new variables are introduced on the Lagrangian level. The program of canonical quantization is applied to gravity and supergravity and some ansätze for solutions to the constraints are discussed, with special emphasis on the singular metric problem of the so called loop states. The second part is concerned with three dimensional models. For pure N=2 supergravity the complete physical state space is constructed by using the canonical method. Finally, the canonical structure of matter coupled N=2 supergravity is worked out and its quantization and an ansatz for a solution to the constraints is discussed.

Diese Arbeit ist allen gewidmet, die in den letzten drei Jahren für eine abwechslungsreiche, unterhaltsame und angenehme Zeit in Hamburg und anderswo gesorgt haben:

Andreas, Anita, Astrid, Bettina, Brigitte, Carla, Catrine, Claudia, Dieter, Dirk, Elfriede, Eva, Götz, Hartmut, Helvi, Hermann, Herman, Jörg, Katrin, Leila, Luciana, Lutz, Markku, Markus, Mark, Marrit, Martin, Martin, Matti, Maximilian, Michael, Mika, Nina, Ole, Paula, Pieter, Reinhold, Sanna, Sas, Susanne, Sven, Tarja, Theresa, Thomas, Tuula, Ute, Viljo, Ville, Walter und Wolfgang.

Für viele intensive Diskussionen, kritische Fragen und hilfreiche Bemerkungen über das Thema dieser Arbeit möchte ich mich besonders bedanken bei

Hermann Nicolai, Norbert Dragon, Bernard De Wit, George Papadopoulos, Anton van de Ven, Dan Freedman, Jörg Teschner, Reinhold Gebert und Sven Moch.

Die nötige finanzielle Unterstützung, technische Ausstattung und praktische Hilfe verdanke ich dem Graduiertenkolleg der Deutschen Forschungsgemeinschaft, dem II. Institut für Theoretische Physik und DESY.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mieleni minun tekevi,
Aivoni ajattelevi...
[1]

Was heißt kanonische Formulierung und was macht sie interessant bei der Suche nach einer Quantentheorie der Gravitation? Die kanonische Quantisierung ist konzeptuell wahrscheinlich die einfachste Methode zur Konstruktion einer Quantentheorie, die einen gegebenen klassischen Limes haben soll, welcher meist durch eine Lagrange-Funktion gegeben ist. Es ist auch der Weg, der in fast allen Lehrbüchern und Vorlesungen über Quantenmechanik beschritten wird, denn die grundlegenden Begriffe wie Zustand, Hilbertraum, Observable etc. sind in dieser Formulierung wohl am besten zu verstehen.

In der Quantenfeldtheorie haben sich jedoch andere Methoden durchgesetzt, insbesondere sogenannte kovariante Methoden, in denen keine "Zeit" mehr ausgezeichnet ist und die volle Lorentz-Symmetrie der Raumzeit bei der Quantisierung erhalten bleibt. Sie sind zwar konzeptuell etwas anspruchsvoller, aber technisch einfacher zu handhaben und erlauben einen sehr guten Zugang zu Näherungsverfahren, die sich in der Vergangenheit als überaus erfolgreich erwiesen haben.

Warum also nicht die Gravitation mit Hilfe dieser modernen Methoden quantisieren? Es gibt zwei grundlegende Hindernisse, die diesem Versuch im Wege stehen. Das erste ist vielleicht ein eher technisches Problem. Die kovarianten Methoden beruhen sehr wesentlich auf der Existenz der globalen Lorentz- bzw. Poincaré-Symmetrie der Raumzeit. Sie geht an vielen Stellen in die Theorie ein, insbesondere bei der Definition von "Teilchen", welche letztlich als Darstellungen dieser Gruppe definiert sind. Eine solche globale Isometriegruppe existiert in der Einsteinschen Gravitation nicht. Die Hintergrundstruktur für die Gravitation ist eine nackte Mannigfaltigkeit, die a priori keine sinnvolle Darstellung von Teilchen etwa als "ebene Wellen" erlaubt.

Das zweite Hindernis ist etwas problematischer. Die durch die Einstein-Hilbert-Wirkung beschriebene Feldtheorie ist nicht renormierbar, daß heißt es ist nicht möglich, durch Einführen von endlich vielen Parametern zu endlichen Übergangs-Amplituden zu gelangen. Ein störungstheoretischer Zugang zur Quantengravitation, bei dem man das metrische Feld um ein Hintergrundfeld entwickelt und die "Störung" dann als Quantenfeld im üblichen Sinne betrachtet, scheint also nicht möglich zu sein.

Obwohl dies unabhängig von der Raumzeit-Dimension gilt, kann man die reine Gravitation in drei Dimensionen in der kanonischen Formulierung vollständig quantisieren, ohne dabei eine Renormierung durchführen zu müssen. Man bekommt einen Hilbertraum von physikalischen Zuständen und eine vollständige Menge von Observablen, die bereits ohne Regularisierung endlich sind. Natürlich beruht diese Tatsache im wesentlichen darauf, daß es sich um eine topologische Feldtheorie mit endlich vielen physikalischen Freiheitsgraden handelt. Es ist aber zu bemerken, daß der kanonische Zugang eine Lösung dieses Modells erlaubt, *ohne* vorher die klassische Theorie zu lösen und anschließend nur die endlich vielen Observablen zu quantisieren.

Die störungstheoretische Nicht-Renormierbarkeit besagt also keineswegs, daß eine auf andere Weise konstruierte Quantentheorie nicht existiert. Ein weiterer Grund, der gegen den kanonischen Zugang sprechen könnte, ist, daß durch die Einführung einer Zeitkoordinate die Poincaré-Symmetrie gebrochen wird, was ja gerade bei den kovarianten Methoden verhindert werden soll. In der allgemeinen Relativitätstheorie spielt die Poincaré-Gruppe jedoch eine ganz andere Rolle als in den speziell-relativistischen Feldtheorien. Sie tritt hier nicht als globale Symmetrie mit erhaltenen Strömen und Ladungen auf, nach denen die "Teilchenzustände" charakterisiert sind, sondern als lokale *Eichgruppe*.

Nun sind die moderneren Quantisierungs-Methoden zwar manifest kovariant bezüglich der *globalen* Poincaré-Gruppe, erfordern aber für eine Eichtheorie grundsätzlich eine Eichfixierung, etwa um ein Pfadintegral definieren zu können, das zunächst die Integration über die Eichgruppe enthält. Anscheinend führt das in der Gravitation zu einem gewissen Dilemma, denn um die "kovarianten" Methoden anzuwenden, müssen wir nun die lokale Kovarianz brechen.

Betrachtet man dieses Problem etwas genauer, so stellt man fest, daß es gerade der kanonische Zugang ist, der eine Lorentz-kovariante Formulierung zuläßt, was an der in der allgemeinen Relativitätstheorie auftretenden Vermischung von Raumzeit-Struktur und dynamischen Größen liegt. Es ist nämlich gar nicht die lokale Lorentz-Symmetrie, die für den kanonischen Zugang gebrochen werden muß, sondern die Invarianz unter lokalen Koordinantentransformationen. Um die Einstein-Hilbert-Wirkung als Zeitintegral über eine Lagrange-Funktion zu schreiben, müssen wir eine der vier Koordinaten als *Zeit* auszeichnen, bezüglich der wir der Übergang zur Hamilton-Jacobi-Formulierung durchführen.

Die Zeitkoordinate hat zunächst nichts mit der physikalischen Zeit zu tun, die ja selbst eine dynamische Größe ist. Da wir diese Koordinate völlig beliebig wählen können, erhalten wir eine seltsame Vermischung von Eichsymmtrie und Zeitentwicklung. Wir können eine Änderung des Wertes dieser Koordinate einerseits als Eichtransformation interpretieren, andererseits aber auch als dynamischen Prozeß. Wenn aber die Zeitentwicklung nur in einer Eichtransformation besteht, findet dann überhaupt eine Zeitentwicklung statt?

Ein beliebtes Standardbeispiel für die kanonische Formulierung von Systemen, deren Wirkungsfunktion durch ein Integral der Lagrange-Funktion über einen unphysikalischen Zeitparameter gegeben ist, ist das relativistische Punktteilchen, dessen Wirkung die Länge der Bahn im Minkowski-Raum ist. Die Dynamik eines solchen Systems wird ausschließlich durch Zwangsbedingungen beschrieben, die einen Unterraum des Phasenraumes, den physikalischen Phasenraum, bestimmen. Die Hamilton-Funktion ist eine Linearkombination der Zwangsbedingungen, die auf dem physikalischen Phasenraum verschwindet.

Die kanonische Formulierung von Systemen mit Zwangsbedingungen geht im wesentlichen auf Dirac[1] zurück. Die Zwangsbedingungen werden dabei zu den Generatoren der Eichsymmetrien, die sie über die Poisson-Klammern auf den kanonischen Variablen erzeugen. Für ein System mit Parameterzeit ist die Hamilton-Funktion also sowohl der Erzeuger der Zeitentwicklung als auch der einer Eichtransformation. Es zeigt sich, daß die "echte" Zeitentwicklung, also die bezüglich einer physikalischen Zeit, nicht durch die Hamilton-Funktion beschrieben wird, sondern durch geeignete "Observable".

Observable im Sinne von Dirac sind Phasenraumfunktionen, die mit den Zwangsbedingungen vertauschen, also eichinvariante Größen, was in unserem Fall gleichzeitig Erhaltungsgrößen sind. Daß eine Erhaltungsgröße (bezüglich der Koordinatenzeit) eine Zeitentwicklung (bezüglich der physikalischen Zeit) beschreiben kann, erscheint zunächst widerspüchlich. Es ist daher nützlich, die Begriffe Eichtransformation, Erhaltungsgröße, Zeitentwicklung etc. für Systeme mit Parameterzeit, in der die physikalische Zeit selbst eine dynamische Variable ist, erst an Hand eines einfachen Beispiels klar zu definieren.

Im Kapitel I werden wir daher das relativistische Punktteilchen unter diesem Gesichtspunkt etwas genauer diskutieren. Wir werden viele der Fragestellungen, die sich dort ergeben, auch in der kanonischen Formulierung und Quantisierung der Gravitation wiederfinden.

Die klassische Hamiltonsche Formulierung der Graviation besteht also im wesentlichen daraus, die Diracsche Methode auf die Einstein-Hilbert-Wirkung anzuwenden, die man als Zeitintegral einer Lagrange-Funktion schreibt, welche wiederum ein Integral über einen dreidimensionen Raum ist. Sie geht auf Arnowitt, Deser und Misner[2] zurück und wird als ADM-Formalismus bezeichnet. Die ersten Ansätze zur Quantisierung stammen von Wheeler und De Witt.[3] In der Quantentheorie werden die Zwangsbedingungen zu Operatoren, die die physikalischen Zustände definieren als diejenigen "Wellenfunktionale", die von den Operatoren annihiliert werden.

Aus dem ADM-Formalismus ergeben sich vier Zwangsbedingungen an jedem Punkt des Raumes, von denen drei verlangen, daß das Wellenfunktional invariant unter Koordinatentransformationen auf der räumlichen Hyperfläche ist. Die vierte Bedingung ist dann das Analogon zur Klein-Gordon-Gleichung des relativistischen Punktteilchens, die ebenfalls zu einer Funktional-Differentialgleichung zweiter Ordnung wird und in gewissem Sinne (s.o.) die "Zeitentwicklung" beschreibt. Sie wird als Wheeler-DeWitt-Gleichung bezeichnet und ist eine inhomogene Differentialgleichung mit sehr komplizieren Koeffizienten, für die bisher noch keine Lösung bekannt ist.

An dieser Stelle blieb das Programm der kanonischen Quantisierung lange Zeit stecken, bis Ashtekar einen neuen Satz von Variablen fand, in denen die Zwangsbedingungen eine sehr viel einfachere Form annehmen.[4] Sie werden zu homogenen Differentialgleichung mit höchstens

[1] Eine sehr klare und einfache Darstellung des Verfahrens wird in [2] gegeben, eine neuere Beschreibung in [3].
[2] Die Originalarbeit ist [4]. Für eine anschauliche Beschreibung siehe [5], Kapitel 21.
[3] Die "Wheeler-DeWitt"-Gleichung wird in [6, 7] abgeleitet.
[4] Die Einführung der Variablen erfolgt in [8, 9], für alternative Zugänge siehe [10, 11, 12, 13].

quadratischen Koeffizienten. Der kanonische Zugang zur Quantengravitation wurde dadurch wieder zu einem aktuellen Forschungsgebiet. Sehr schnell wurden zum ersten Mal (formale) Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung gefunden, die (noch ein wenig formaler) sogar zu Lösungen *aller* Zwangsbedingungen erweitert wurden.

Die neuen Variablen haben ein paar ungewöhnliche Eigenschaften, die die Konstruktion der Zwangsbedingungen technisch vereinfachen, aber konzeptuell einige Fragen aufwerfen. So sind sie zum Beispiel komplex, tragen aber nicht wie gewöhnliche komplexe Felder zwei reelle Freiheitsgrade, sondern ihr Realteil ist durch eine Funktion der anderen Felder gegeben. Wie wir in Kapitel I zeigen werden, kann man diese "Realitätsbedingungen" als Zwangsbedingungen zweiter Klasse interpretieren.[5] Die Wirkungsfunktion für diese neuen Variablen wird der Realteil einer holomorphen Funktion sein, so daß die gleichen Bewegungsgleichungen auch aus einer komplexen Wirkung abgeleitet werden können. Wir werden sehen, daß unter gewissen Voraussetzungen auch diese Wirkung als Ausgangspunkt für die kanonische Formulierung dienen kann.

In Kapitel II führen wir Ashtekars Variable ein und zeigen, daß die Voraussetzungen für den Übergang zu einer komplexen Wirkung erfüllt sind. Wir leiten die Zwangsbedingungen ab und diskutieren die Realitätsbedingungen ein wenig ausführlicher in Zusammenhang mit dem allgemeinen Verfahren aus Kapitel I. Wir werden dabei finden, daß die Realitätsbedingungen in gewisser Weise auf die alten, metrischen Variablen zurückführen. Es liegt daher nahe, daß durch die Einführung der neuen Variablen einige Probleme aus dem alten Zugang nur verlagert wurden. Die Realitätsbedingungen werden nämlich erst bei der Definition eines Skalarproduktes auf den physikalischen Zustandsraum wieder zum Tragen kommen, und dies stellt in Ashtekars Formulierung sicher ein größeres Problem dar als in der urpsrünglichen metrischen Formulierung.

Für die einfache Form der Zwangsbedingungen müssen wir aber noch einen weiteren Preis bezahlen. Da sie im Gegensatz zur alten Wheeler-DeWitt-Gleichung zu Polynomen in den kanonischen Variablen werden, insbesondere geht die Metrik auf der raumartigen Hyperfläche quadratisch ein, nahm man zunächst an, sie wären ideal zur Beschreibung von singulären Metriken geeignet. Man kann tatsächlich eine Wirkung angeben, die von vornherein polynomial in den kanonischen Variablen und linear in den Lagrange-Multiplikatoren ist; die die Zwangsbedingungen erzeugen. Allerdings ist diese Wirkung nicht mehr invariant unter der vollen Gruppe der vierdimensionalen Diffeomorphismen, was eine der grundlegenden Eigenschaften der allgemeinen Relativitätstheorie ist.

Unter diesem Gesichtspunkt werden wir die bekannten Schleifen-Lösungen von Jacobson und Smolin[6] diskutieren und mit zwei anderen Lösungsansätzen vergleichen, die nicht das Problem haben, daß sie singuläre Metriken repräsentieren.

In Kapitel III wenden wir das gleiche Verfahren auf die Supergravitation an. Es zeigt sich,

[5] Man kann den Übergang zu den neuen Variablen auch als nicht-unitäre kanonische Transformation darstellen [14].
[6] Das waren die ersten formalen Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung in Ashtekars Variablen [15], auf deren Grundlage die sogenannte Schleifendarstellung entwickelt wurde [16, 17, 18]. Die formalen Lösungen lassen sich auch auf materiegekoppelte Modelle erweitern [19]. Für eine kritische Diskussion dieser Schleifenzustände siehe auch [20].

daß hier Ashtekars Variable bereits "ganz von selbst" als die Spinordarstellung eines vierdimensionalen Zusammenhangs auftreten, es im nachhinein daher verwunderlich erscheint, daß ihre Entdeckung nicht über die Supergravitation erfolgte.[7] Die Ableitung der Zwangsbedingungen ist völlig analog zur reinen Gravitation und wir werden am Schluß auch ähnliche Lösungen finden. Insbesondere werden wir feststellen, daß die Schleifen-Lösungen unverändert auch zu formalen Lösungen der Supergravitation werden. Es ist daher höchst fraglich, ob sie tatsächlich so etwas wie Quantenzustände des Gravitationsfeldes beschreiben können. Sie spüren weder die Anwesenheit eine kosmologischen Konstante, noch die Masse eines angekoppelten Klein-Gordon-Feldes oder die Supersymmetrie.

Der letzte Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Gravitation in drei Raumzeit-Dimensionen. In Kapitel IV betrachten wir die reine N=2 Supergravitation. Sie ist eine topologische Feldtheorie, das heißt sie besitzt keine lokalen Freiheitsgrade, es gibt also keine Gravitationswellen und keine Fernwirkung von Gravitationskräften. Die Raumzeit ist im Vakuum stets flach und damit sind die Gravitationsfelder bis auf Eichfreiheitsgrade eindeutig fixiert.

Ist jedoch die Topologie der Raumzeit nichttrivial, insbesondere wenn es nicht zusammenziehbare Schleifen gibt, so lassen sich nicht alle Lösungen der Einstein-Gleichung durch Eichtransformationen ineinander überführen. Es verbleiben endlich viele Freiheitsgrade, sogenannte Moduli, die die Äquivalenzklassen von Lösungen parametrisieren. Wir haben es also mit einem endlichdimensionalen Raum von klassischen Lösungen zu tun. Durch die geschickte Wahl von Variablen kann man die kanonische Quantisierung[8] durchführen und gelangt zu einem wohldefinierten physikalischen Zustandsraum, auf dem die Observablen als Operatoren wirken.

Die Observablen haben dabei die gleiche Form wie die Schleifenoperatoren in der vierdimensionalen Gravitation, jedoch sind sie hier Observable im Sinne von Dirac. Tatsächlich kann man mit ihnen diejenigen Zustandsfunktionale konstruieren, die den formalen Schleifen-Lösungen in vier Dimensionen entsprechen: jetzt handelt es sich aber um exakte Lösungen der Zwangsbedingungen. Trotzdem haben sie keine Interpretation als physikalische Zustände, denn sie sind nicht normierbar. Sie eignen sich also nicht als Basis für den physikalischen Zustandsraum, und der Schluß liegt nahe, daß ähnliches auch für die Schleifen in vier Dimensionen gilt. Doch werden wir sehen, daß solche Schlüsse aufgrund der sehr verschiedenen Struktur der Eichgruppen in drei und vier Dimensionen nur sehr eingeschränkt möglich sind.

In Kapitel V betrachten wir eine materiegekoppelte Supergravitation in drei Dimensionen. Sie soll als ein Spielzeugmodell für eine vierdimensionale Theorie dienen. Als spezielles Beispiel wählen wir die N=2 Theorie mit je zwei angekoppelten bosonischen und fermionischen Materiefeldern. Diese ergibt sich als Kaluza-Klein-Theorie durch dimensionale Reduktion aus der N=1 Theorie in vier Dimensionen aus Kapitel III.[9] Es handelt sich also im wesentlichen um eine vierdimensionale reine Supergravitation, jedoch betrachten wir nur Metriken mit einem gegebenen Killing-Vektorfeld.

Das Modell hat immer noch alle Eigenschaften, die die Gravitation von anderen Feldtheorien unterscheidet, insbesondere die allgemeine Invarianz unter Diffeomorphismen. Die Gravitationsfelder tragen aber selbst keine lokalen Freiheitsgrade mehr. Das Modell ist daher wesentlich einfacher als eine vierdimensionale materiegekoppelte Theorie. Obwohl es noch nicht gelungen ist, physikalische Zustände zu konstruieren, so haben sich doch einige Ergebnisse, die auch für die vierdimensionale Theorie interessant sind, bei der Untersuchung solcher dreidimensionaler Modelle ergeben. Dazu gehören unter anderem die Erweiterung der Schleifen-Lösungen auf materiegekoppelte Modelle, was allerdings deren physikalische Bedeutung eher fraglicher erscheinen läßt, und die Vakuum-artigen formalen Lösungen der Zwangsbedingungen der reinen Gravitation, die analog zu den Lösungen der reinen dreidimensionalen Gravitation in der metrischen Darstellung gebildet werden und auch hier topologische Freiheitsgrade tragen.

Gerade das letzte Beispiel wird zeigen, daß Ashtekars Variable auch dann noch den kanonischen Zugang zu einer Quantengravitation erleichtern können, wenn man auf die polynomialen Zwangsbedingungen verzichtet. Bisher wurde fast ausschließlich die sogenannte Zusammenhang-Darstellung untersucht, in der man die polynomiale Form der Zwangsbedingungen benötigt, denn die Metrik (bzw. das Dreibein) wird als Differentialoperator dargestellt. In der metrischen Darstellung, in der Ashtekars Zusammenhang zu einem Differentialoperator wird, kann man dagegen auf die polynomiale Form verzichten. Daß es in dieser Darstellung eine (formale) Lösung der Zwangsbedingungen gibt, die unmittelbar einer (exakten) Lösung der dreidimensionalen Theorie entspricht, zeigt, daß es nicht unbedingt die polynomiale Form der Zwangsbedingungen sein muß, die deren Handhabung erleichtert.

[7] Implizit werden die neuen Variablen bereits bei D'Eath [21] verwendet, der die kanonische Formulierung der N=1 Supergravitation in vier Dimensionen erstmals durchgeführt hat. Jedoch erst durch die Einführung der holomorphen Wirkung vereinfacht sich der kanonische Zugang erheblich [22], und zwar auch im metrischen Formalismus [20].

[8] Daß die Quantisierung der dreidimensionalen Gravitation im Rahmen des "Dirac-Programms" möglich ist, wurde von Witten gezeigt [23]. Die Erweiterung auf die Supergravitation ist in [24] ausgeführt.

[9] Zur Konstruktion dieses Modells siehe [25], ausführlichere Darstellungen der kanonischen Formulierung und Ansätze zur Quantisierung werden in [27, 28] gegeben.

KAPITEL I:

METHODEN

...
— but arguing is not just saying "no it isn't".
— yes, it is.
— no, it isn't.
[29]

Bei der kanonischen Quantisierung der Gravitation in den von Ashtekar 1986 entdeckten neuen Variablen, die wir in Kapitel II einführen werden, ergeben sich im wesentlichen zwei prinzipielle Probleme, die bei anderen Eichtheorien, etwa Yang-Mills-Theorien in einer Minkowski-Raumzeit, nicht auftreten.

Zum einen gibt es in der allgemeinen Relativitätstheorie keine "a priori" Zeitkoordinate, die man normalerweise für die kanonische Quantisierung eines durch eine klassische Wirkung gegebenen Systems benötigt: Der erste Schritt in der kanonischen Behandlung eines solchen Systems besteht darin, die Wirkung als *Zeit*integral über eine Lagrange-Funktion zu schreiben, aus der man Impulse, Zwangsbedingungen und die Hamilton-Funktion abliest. Diese Hamilton-Funktion bestimmt dann die Dynamik des Systems, also seine *Zeit*entwicklung.

Dieses Problem ist nicht neu und zum Beispiel aus der Beschreibung eines relativistischen Punktteilchens bekannt, wo man die Wirkung, also die Länge der Bahn, als Integral über einen frei wählbaren Bahnparameter schreibt. Dieser Bahnparameter übernimmt dann die Rolle der Zeit in der kanonischen Quantisierung. Wir werden daher die Methode der kanonischen Quantisierung mit einem "unphysikalischen" Zeitparameter anhand dieses einfachen Beispiels in Abschnitt 1 diskutieren, denn dort treten genau die gleichen Fragen auf, denen wir bei der Quantisierung der Einsteinschen Gravitation auch begegnen werden.

Das zweite Problem ist direkt mit Ashtekars Variablen verknüpft. Die neuen Variablen sind nämlich nicht nur selbst komplex, sondern ihre Bewegungsgleichungen leiten sich auch aus einer komplexen Wirkungsfunktion ab. Für die klassische Beschreibung der Gravitation ergeben sich hieraus keine Probleme, solange die Wirkung eine *holomorphe* Funktion der komplexen Felder ist. Dann kann man wie üblich verlangen, daß die Wirkung für die tatsächlich realisierte "Bahn" ein Extremum annimmt. Die Bewegungsgleichungen sind die gleichen, die auch durch den Real- oder Imaginärteil der Wirkung, also eine gewöhnliche reelle Wirkung, induziert würden.

Beim Übergang zur Quantentheorie tritt jedoch ein neues Problem auf: Die klassischen Größen sind nicht mehr reell, also sind die zugeordneten Operatoren auch nicht hermitesch. Bei einer gegebenen reellen Wirkungsfunktion von komplexen Variablen ist das kein Problem, da neben einer Variablen immer auch ihre komplex konjugierte Variable auftritt und sich diese $*$-Relation auch auf die kanonisch konjugierten Impulse überträgt. Die $*$-Relation bestimmt dann im wesentlichen das Skalarprodukt auf dem Zustandsraum.

Bei einer holomorphen Wirkung tritt die komplex konjugierte Variable aber gerade nicht auf und auch der einer reellen Variablen zugeordnete Impuls ist nicht unbedingt reell, das heißt die $*$-Relation überträgt sich nicht auf die Impulse. Der übliche Zugang zu diesem Problem in Zusammenhang mit Ashtekars Variablen für die Gravitation besteht darin, daß man zunächst mit reellen Variablen startet und dann eine kanonische Transformation mit komplexen Parametern durchführt. Für die so erhaltenen Variablen existiert dann eine wohldefinierte $*$-Relation, die man auf die Quantenoperatoren übertragen kann.

Im Abschnitt 2 werden wir sehen, daß es auch möglich ist, direkt von einer gegebenen holomorphen Wirkung zu einer Quantentheorie zu gelangen. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Methode, die man zur Vereinfachung der Rechnungen üblicherweise bei komplexen Feldern mit einer reellen Wirkung verwendet: Dort betrachtet man die Felder und ihre konjugierten Felder zunächst als unabhängig, so daß die Wirkung holomorph in diesen Variablen ist, führt dann die kanonische Quantisierung durch und erst bei der Definition des Skalarproduktes verwendet man wieder die $*$-Relationen. Im Unterschied dazu sind jedoch die $*$-Relationen für Ashtekars Variable nicht von Anfang an vorgegeben, sondern ergeben sich, wie wir sehen werden, als sekundäre Zwangsbedingungen bei der kanonischen Behandlung der Theorie.

Zum Schluß dieses Kapitels werden wir dann noch kurz die kanonische Beschreibung von Feldern diskutieren, die Werte auf einer Gruppen-Mannigfaltigkeit oder einem Cosetraum, also dem Quotienten einer Lie-Gruppe modulo einer Untergruppe, annehmen. Solche Sigmamodelle tauchen natürlicherweise als Materiefelder in der Supergravitation auf.

1. Die Parameterzeit

Die Einführung der relativistischen Quantenmechanik wird oft durch die Vorschrift "ersetze die Schrödinger-Gleichung durch die Klein-Gordon-Gleichung" vollzogen, da diese die nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung durch die relativistische ersetzt. Führt man diese Vorschrift aus, gelangt man zu einer Quantenmechanik, in der die Wahrscheinlichkeits-Erhaltung nicht mehr gilt, was oft mit der Notwendigkeit einer Quantenfeldtheorie begründet wird und der Schlußfolgerung, daß in einer relativistischen Theorie *immer* Prozesse wie Erzeugung und Vernichtung von Teilchen enthalten sein müssen.

Im folgenden werden wir die Diracsche Methode der kanonischen Quantisierung anwenden und sehen, daß alle diese Problem nicht auftreten, wenn wir uns nur genau an diese Methode halten. Wir gelangen zu einer Beschreibung des Punktteilchens, das sich im klassischen Limes geradlinig durch den Raum bewegt, dessen quantisierte Version aber ohne Erzeugung und Vernichtung auskommt und für dessen Wellenfunktion trotzdem eine wohldefinierte Wahrscheinlichkeits-Interpretation existiert. Dies widerspricht natürlich nicht der Notwendigkeit einer Quantenfeldtheorie, soll aber zeigen, daß es gerade für eine Theorie wie die Einsteinsche Gravitation, in der fast alle physikalischen Objekte, wie zum Beispiel Uhren, implizit durch die Theorie selbst beschrieben werden und nicht von "außen" vorgegeben sind, notwendig ist, die Begriffe und Methoden, die für den Übergang zu einer Quantentheorie benötigt werden, genau zu definieren.

Das relativistische Punktteilchen

Die Wirkung des relativistischen Punktteilchens ist gegeben durch

$$I = \int \mathrm{d}\tau L(x^\mu, \dot{x}^\mu), \quad L = -m\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}. \tag{1.1.1}$$

Die Metrik im Minkowski-Raum hat die Signatur (−,+,+,+) und τ wird unsere Parameterzeit sein, die wir auch einfach "Zeit" nennen, wenn eine Verwechslung mit der physikalischen Zeit x^0 ausgeschlossen ist. Ein Punkt bezeichnet immer die Ableitung nach dieser Parameterzeit. Die erste Gemeinsamkeit mit der Einstein-Hilbert-Wirkung der Gravitation ist, daß diese Wirkung zwar eine sehr einfache physikalische Interpretation hat (die Länge der Bahn bzw. das Integral über den Krümmungs-Skalar), sie ist aber für den mathematischen Zugang etwas "unhandlich". In beiden Fällen ist es möglich, durch Einführen weiterer Variablen zu einer polynomialen Wirkung zu gelangen. Dazu benutzen wir eine zusätzliche Variable $e(\tau)$, ein sogenanntes "Einbein".[1] Eine äquivalente Wirkung ist dann

$$L = \tfrac{1}{2}e^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \tfrac{1}{2}em^2. \tag{1.1.2}$$

Die Bewegungsgleichung für e ist $e = \sqrt{-\dot{x}^2}/m$. Setzt man das ein, so bekommt man (1.1.1) zurück. Gehen wir noch einen Schritt weiter zu einer Wirkung erster Ordnung in den Zeitableitungen, indem wir die Impulse $p_\mu = \partial L/\partial \dot{x}^\mu = e^{-1}\dot{x}_\mu$ einführen. Dann haben wir insgesamt neun Variablen $p_\mu(\tau)$, $x^\mu(\tau)$ und $e(\tau)$ und die Lagrange-Funktion lautet

$$L = p_\mu \dot{x}^\mu - \tfrac{1}{2}e(p_\mu p^\mu + m^2) = p_\mu \dot{x}^\mu - H_e(p,x). \tag{1.1.3}$$

Eine in dieser Standardform gegebene Wirkung wird auch der Ausgangspunkt für die kanonische Formulierung der Gravitation bzw. Supergravitation sein: Die kanonischen Variablen sind die "Orte" und "Impulse" x und p sowie der Multiplikator e. Die Menge aller Werte, die die Ortsvariablen annehmen können (also hier den Minkowski-Raum) bezeichen wir als Konfigurationsraum und den Raum aller Paare (x,p) als Phasenraum. In diesem Sinne sind also die Lagrange-Multiplikatoren keine Phasenraumkoordinaten.

[1] Diese Idee ist aus [30] entnommen. Das Einbein ist das Analogon zur internen Metrik auf der String-Weltfläche in der Polyakov-Wirkung.

Wir können direkt die Hamilton-Funktion H ablesen und die Poisson-Klammern

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu. \tag{1.1.4}$$

Die primären Zwangsbedingungen sind diejenigen Bewegungsgleichungen, die keine Zeitableitungen enthalten, also die Ableitungen der Hamilton-Funktion nach den Multiplikatoren. Wir bekommen die Bedingung

$$\boldsymbol{H} = \tfrac{1}{2}(p_\mu p^\mu + m^2) \approx 0. \tag{1.1.5}$$

Wir wählen hier die gleiche Bezeichnung wie später für die "Hamiltonsche Zwangsbedingung" (siehe (2.3.17)), da diese dort die gleiche Rolle übernimmt wie hier die "Klein-Gordon-Gleichung". Die Relation "schwach gleich" $\approx$ ist so definiert, daß $A \approx B$ für Phasenraumfunktionen genau dann gilt, wenn $A = B$ ist auf dem physikalischen Phasenraum, das heißt auf dem durch die Zwangsbedingung bestimmten Unterraum des Phasenraumes. Weitere, sekundäre Zwangsbedingungen ergeben sich nicht, da die Hamilton-Funktion mit $\boldsymbol{H}$ "vertauscht", was in der klassischen Theorie bedeuten soll, daß die Poisson-Klammer verschwindet.

Nach Dirac haben wir also eine Zwangsbedingung erster Klasse, die eine Eichsymmetrie erzeugen sollte. Da nur x nicht mit H vertauscht, wirkt diese Eichtransformation auch nur auf x und wir bekommen

$$\delta x^\mu = \{x^\mu, \xi \boldsymbol{H}\} = \xi p^\mu, \tag{1.1.6}$$

wobei ξ ein beliebiger "Eichparameter" ist. Tatsächlich ändert sich die Lagrange-Funktion unter der Transformation $\delta x^\mu = \xi p^\mu$ nur um eine totale Zeitableitung. Im allgemeinen ist der zu einem solchen Erzeuger einer Eichsymmetrie gehörende Multiplikator e die Zeitkomponente des zugehörigen Eichfeldes, was wir später auch bei den Erzeugern der Symmetrien der Gravitation wiederfinden werden. Genau genommen müssen wir für zeitabhängige Eichtransformationen mit Parameter $\xi(\tau)$ noch die Variation $\delta e = \dot{\xi}$ hinzunehmen, damit δL eine totale Zeitableitung wird.

Gehen wir jetzt zur Hamiltonschen Beschreibung unseres Systems über. Eine klassische Lösung wird durch den Anfangspunkt $(\bar{p}_\mu, \bar{x}^\mu)$ im physikalischen Phasenraum, also einer Lösung der Zwangsbedingung, und die Bewegungsgleichungen

$$\dot{p}_\mu(\tau) = \{p_\mu, H_e\} = 0, \quad \dot{x}^\mu(\tau) = \{x^\mu, H_e\} = e(\tau)p^\mu(\tau). \tag{1.1.7}$$

gegeben. Hier ist $e(\tau)$ eine *beliebige* Funktion der Zeit. Wie in jeder Eichtheorie ist die Hamilton-Funktion nicht eindeutig bestimmt: Zusätzlich zur Zeitentwicklung findet noch eine beliebige Eichtransformation statt, die Hamilton-Funktion ist nur bis auf eine frei wählbare Linearkombination der Zwangsbedingungen erster Klasse bestimmt. Die Besonderheit in unserem Fall ist jedoch, daß die Hamilton-Funktion *nur* aus der mit einem beliebigen Faktor versehenen Zwangsbedingung besteht, somit also nur diese Eichtransformation erzeugt. Da wir für $e(\tau)$ jede beliebige Funktion wählen können, sollte auch $e = 0$ erlaubt sein. Wir bekommen eine etwas merkwürdige Lösung der Bewegungsgleichung, nämlich

$$p_\mu(\tau) = \bar{p}_\mu, \quad x^\mu(\tau) = \bar{x}^\mu. \tag{1.1.8}$$

Dieses Teilchen beschreibt scheinbar keine Weltlinie in der Raumzeit, sondern sitzt an einem "Ereignis" $\bar{x}^\mu$ fest. Trotzdem hat es einen nicht verschwindenden Impuls. Es scheint keine Bewegung durch den Raum (im Sinne einer Funktion $x^i(x^0)$, $i = 1, 2, 3$) zu beschreiben, sondern nur kurz aufzutauchen und wieder zu verschwinden. Aber andererseits wissen wir, daß durch eine andere Wahl der Eichung, aber unter Beibehaltung der Anfangswerte $\bar{x}^\mu$ und $\bar{p}_\mu$, die gleiche physikalische Situation beschrieben wird. Wählen wir als eine andere Eichung $e(\tau) = m^{-1}$. Dann lautet die Lösung der Bewegungsgleichungen

$$p_\mu(\tau) = \bar{p}_\mu, \quad x^\mu(\tau) = \bar{x}^\mu + \tau m^{-1}\bar{p}^\mu. \tag{1.1.9}$$

Jetzt bekommen wir das gewohnte Bild einer Bahn durch die Raumzeit und τ bezeichnet sogar die Eigenzeit des Teilchens. Wir können leicht angeben, wo sich das Teilchen zur (echten) Zeit $x^0 = t$ im Raum befindet. Nennen wir diese Funktion d_t^i. Dann ist

$$d_t^i = \bar{x}^i + \frac{\bar{p}^i}{\bar{p}^0}(t - \bar{x}^0) = x^i(\tau) + \frac{p^i(\tau)}{p^0(\tau)}(t - x^0(\tau)) = d_t^i(\tau). \tag{1.1.10}$$

Zwei Dinge sind hier zu bemerken: Zum einen sind diese Ausdrücke nur dann wohldefiniert, wenn die Zwangsbedingung erfüllt ist, da dann stets $p^0 \neq 0$ ist. Wir können dies ändern, indem wir $(p^0)^{-1}$ durch $p^0/(p_ip_i + m^2)$ ersetzen, was auf dem ganzen Phasenraum definiert ist und auf dem physikalischen Unterraum gleich $(p^0)^{-1}$ ist.

Zum anderen sind die beiden angegebenen Darstellungen für d_t^i voneinander sehr verschieden. Der erste Ausdruck stellt d_t^i als Funktion der *Anfangswerte* dar, der zweite ist eine Funktion auf dem Phasenraum, also der *dynamischen Variablen* $x^\mu(\tau)$ und $p_\mu(\tau)$, und damit selbst eine dynamische Größe. Unter Verwendung der Bewegungsgleichungen sieht man leicht, daß d_t^i eine *Erhaltungsgröße* ist bezüglich der Parameterzeitentwicklung, es ist also von τ unabhängig. Nun haben wir aber gesehen, daß die Parameterzeitentwicklung durch die Poisson-Klammer mit dem Erzeuger der Eichtransformation gegeben ist: d_t^i ist auch eine *Eichinvariante*, was demnach dasselbe ist wie eine Erhaltungsgröße.

In eine mehr physikalische Sprache übersetzt heißt das einfach: Der Ort $x^i = d_t^i$, an dem sich das Teilchen zur (physikalischen!) Zeit $x^0 = t$ befindet, ist unabhängig von der gewählten Eichung, also der Funktion $e(\tau)$. Nun löst sich auch der scheinbare Widerspruch von oben auf. Auch für die Lösung (1.1.8) ergibt sich natürlich der gleiche Wert für d_t^i und nur dieser hat eine physikalische Bedeutung. Die tatsächliche Bahn des Teilchens wird nicht durch das Bild der Funktion $\tau \mapsto (x^0(\tau), \ldots, x^3(\tau))$ beschrieben. Je nach der Wahl von $e(\tau)$ kann dies ein Punkt, eine Gerade oder eine endlich lange Strecke sein, die einmal oder sogar immer wieder durchlaufen wird; den Funktionen $x^\mu(\tau)$ kommt in diesem Sinne keine physikalische Realität zu. Die Bahn ist statt dessen gegeben durch das Bild von $t \mapsto (t, d_t^1, d_t^2, d_t^3)$.

In der Sprechweise von Dirac sind die d_t^i "physikalische Observable" oder einfach Observable, also Funktionen auf dem Phasenraum, die mit allen Zwangsbedingungen schwach vertauschen, das heißt die Poisson-Klammern mit den Zwangsbedingungen verschwinden auf dem physikalischen Phasenraum. Zwei Observablen betrachten wir nur dann als verschieden, wenn sie nicht schwach gleich sind. Für unser einfaches Beispiel können wir bereits die vollständige Menge aller unabhängigen Observablen angeben: Es sind die Funktionen

$$d^i = d_{t=0}^i \approx x^i - \frac{p^i}{p^0}x^0, \quad p_i, \quad c = \operatorname{sign}(p_0). \tag{1.1.11}$$

Wir bezeichnen sie als Ort zur Zeit $x^0 = 0$, räumlichen Impuls und Ladung. Man beachte, daß die Ladung $c = \pm 1$ bereits hier in der klassischen kanonischen Beschreibung des Teilchens erscheint und nicht erst in der quantisierten Version. Sie ist einfach ein zusätzlicher Freiheitsgrad des Teilchens, der nur zwei Werte annimmt.

Tatsächlich lassen sich aus diesen Observablen die üblicherweise benutzten Erhaltungsgrößen Impuls und Drehimpuls ableiten, welche jedoch nicht unabhängig sind:

$$p_0 = c\sqrt{p_ip_i + m^2}, \quad J^{0i} = p^0 d^i, \quad J^{ij} = p^i d^j - p^j d^i. \tag{1.1.12}$$

Nun war unser Beispiel vielleicht ein wenig zu einfach, da wir die klassischen Bewegungsgleichungen lösen konnten, was uns ermöglichte, die Observablen (1.1.10) zu definieren. Was ändert sich, wenn wir zu einem komplizierteren System übergehen, etwa einem Teilchen im elektromagnetischen Feld. Die Hamilton-Funktion ist dann gegeben durch

$$H_e(x, p) = \tfrac{1}{2}e\left((p_\mu - A_\mu(x))(p^\mu - A^\mu(x)) + m^2\right). \tag{1.1.13}$$

Die Zwangsbedingung lautet also

$$\boldsymbol{H} = \tfrac{1}{2}\left((p_\mu - A_\mu(x))(p^\mu - A^\mu(x)) + m^2\right) \approx 0, \tag{1.1.14}$$

und die Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned} \dot{p}_\mu &= \{p_\mu, H_e\} = e(p^\nu - A^\nu)\,\partial_\mu A_\nu, \\ \dot{x}^\mu &= \{x^\mu, H_e\} = e(p^\mu - A^\mu). \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Für diese können wir (im allgemeinen) keine geschlossene Lösung in der Form (1.1.9) mehr angeben. Trotzdem kann man auch jetzt danach fragen, wo sich das Teilchen zu einer bestimmten physikalischen Zeit $x^0 = t$ befindet und es sollte die entsprechende Observable d_t^i geben. Tatsächlich können wir d_t^i als eine Reihe darstellen.

Wir definieren dazu einen Zeitentwicklungsoperator

$$\mathcal{E}(F, H, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n \underbrace{\{\ldots\{\{F, H\}, H\}, \ldots, H\}}_{n}. \tag{1.1.16}$$

Für eine beliebige Phasenraumfunktion F, ein Zeitintervall u und eine Hamilton-Funktion H. Die Funktion genügt der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{E}(F, H, u) = \{\mathcal{E}(F, H, u), H\}, \quad \mathcal{E}(F, H, 0) = F, \tag{1.1.17}$$

und natürlich ist sie das klassische Analogon zum quantenmechanischen Operator

$$\widehat{\mathcal{E}}(\widehat{F}, \widehat{H}, u) = \exp(\mathrm{i}\widehat{H}u)\, \widehat{F} \exp(-\mathrm{i}\widehat{H}u), \tag{1.1.18}$$

dessen Reihenentwicklung gerade durch $\mathcal{E}$ gegeben ist, wobei die Poisson-Klammern durch Kommutatoren zu ersetzen sind.

Mit Hilfe des $\mathcal{E}$ könnten wir leicht eine Menge von Observablen angeben. Dazu fixieren wir zunächst die Eichung, wählen also ein e als Funktion der kanonischen Variablen. Dadurch ist auch H fixiert. Als nächstes wählen wir eine Phasenraumfunktion $F(x^\mu, p_\mu)$ und definieren

$$\mathcal{O} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\, \mathcal{E}(F, H, u). \tag{1.1.19}$$

Dieses $\mathcal{O}$ ist also eine durch eine Reihe definierte Funktion auf dem Phasenraum. Wenn wir e und F so wählen, daß $\mathcal{E}(F, H, u)$ schnell genug verschwindet für $u \to \pm\infty$, so ist $\mathcal{O}$ eine Observable, denn es gilt

$$\begin{aligned} \{\mathcal{O}, \boldsymbol{H}\} &= \int \mathrm{d}u\, \{\mathcal{E}(F, H, u), \boldsymbol{H}\} \\ &\approx e^{-1} \int \mathrm{d}u\, \{\mathcal{E}(F, H, u), H\} = e^{-1} \int \mathrm{d}u\, \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{E}(F, H, u) = 0. \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Die zweite Gleichung gilt hier nur schwach, da e eine beliebige Funktion von x und p ist und deshalb nicht mit F vertauschen muß. An dieser Stelle tritt gewissermaßen "durch die Hintertür" eine Bedingung aus der urspünglichen Euler-Lagrange-Formulierung unseres Beispiels wieder auf, die wir im Rahmen der kanonischen Formulierung bis jetzt ignoriert haben: Die Existenz dieser Observablen hängt nämlich von der richtigen Wahl von e ab. Würden wir hier $e = 0$ setzen, würde das Integral natürlich nicht existieren.

Um die gesuchte Funktion d_t^i zu erhalten, müssen wir

$$F = \delta(x^0 - t)\, x^i, \quad e = (p^0 - A^0(x))^{-1} \tag{1.1.21}$$

setzen. Letzteres ist wieder aufgrund der Zwangsbedingung wohldefiniert. Um d_t^i zu bestimmen, benutzen wir, daß in der gewählten Eichung die Zeitentwicklung von x^0 trivial ist, also $\mathcal{E}(x^0, H, u) = x^0 + u$, und erhalten

$$d_t^i = \int \mathrm{d}u\, \delta(x^0 + u - t)\, \mathcal{E}(x^i, H, u) = \mathcal{E}(x^i, H, t - x^0). \tag{1.1.22}$$

Der letzte Ausdruck ist mit Vorsicht zu behandeln, da der dritte Parameter von $\mathcal{E}$ ein Zahl sein sollte und keine Phasenraumfunktion; man beachte, daß u in (1.1.16) außerhalb der Klammern steht, also

$$d_t^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - x^0)^n}{n!} \underbrace{\{\ldots\{\{x^i, H\}, H\}, \ldots, H\}}_{n}. \tag{1.1.23}$$

Durch explizites Nachrechnen findet man $\{d_t^i, \boldsymbol{H}\} \approx 0$, es handelt sich also tatsächlich um eine Observable.

Das so definierte d_t^i liefert für ein gegebenes t genau den Wert von x^i zu der Parameterzeit, zu der $x^0 = t$ ist. Natürlich können wir statt x^i in eine beliebige Funktion in diesen Ausdruck einsetzten und erhalten so eine Observable, deren Bedeutung der Wert dieser Funktion zur *physikalischen Zeit* $x^0 = t$ ist. Die Parameterzeit τ kommt jedoch in der Formel nicht vor: d_t^i ist einfach eine Phasenraumfunktion, die sich für bestimmte $A_\mu(x)$ auch explizit angeben läßt. So bricht zum Beispiel für $A_\mu = 0$ die Reihe nach dem zweiten Gleid ab und stimmt mit (1.1.10) überein.

Um die Physik des Teilchens zu beschreiben, benötigen wir also gar nicht die Bewegungsgleichungen (1.1.15), die den willkürlichen Parameter e enthalten. Die "Bewegung" wird einzig und allein durch Angabe eines Zustandes (etwa durch die Anfangswerte $(\bar{x}, \bar{p})$) und die Werte der Observablen an diesem Punkt des Phasenraumes gegeben.

Dabei sind zwei Zustände äquivalent, wenn sie durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen, die durch die Zwangsbedingung $\boldsymbol{H}$ erzeugt wird. Die Bedingung $\{\mathcal{O}, \boldsymbol{H}\}$ an die Observablen stellt dann sicher, daß der Wert von $\mathcal{O}$ unabhängig von dem speziell gewählten Repräsentanten der Äquivalenzklasse ist. Die in (1.1.15) gegebene Parameter-Zeitentwicklung können wir dann vollkommen ignorieren, denn sie verändert die Werte von x und p nur innerhalb einer Äquivalenzklasse.

Quantisierung

Betrachten wir nun die Quantisierung in der Ortsdarstellung, wobei wir genau nach der Diracschen Vorschrift vorgehen. Entsprechend der Unterscheidung zwischen Phasenraum und physikalischem Phasenraum müssen wir nun unterscheiden zwischen dem Zustandsraum und dem physikalischen Zustandsraum. Einen Operator, der auf dem physikalischen Zustandsraum gleich Null ist, bezeichnen wir dann als schwach verschwindend, einen Operator, der mit der Zwangsbedingung schwach vertauscht, als Observable.

In der Ortsdarstellung wird der Zustandsraum durch die Eigenzustände der Ortsoperators $\widehat{x}^\mu | x \rangle = x^\mu | x \rangle$ aufgespannt. Der Impulsoperator ist definiert durch $\widehat{p}_\mu | x \rangle = \mathrm{i}\hbar\partial_\mu | x \rangle$, das heißt wir fordern für den Kommutator zweier Operatoren, daß er das $(-\mathrm{i}\hbar)$-fache der Poisson-Klammer ergibt.

Der physikalische Zustandsraum ist definiert als derjenige Unterraum des Zustandsraums, für den gilt

$$\widehat{\boldsymbol{H}} | \Psi \rangle = (\widehat{p}^\mu \widehat{p}_\mu + m^2) | \Psi \rangle = 0. \tag{1.1.24}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist eine Linearkombination von Basiszuständen $| \vec{k}, + \rangle$ und $| \vec{k}, - \rangle$, wobei $\vec{k}$ einen dreidimensionaler Vektor,

$$| \vec{k}, \pm \rangle = \int \mathrm{d}^4x\, \exp\left(\mathrm{i}\vec{k}\vec{x} \pm \mathrm{i}\omega(\vec{k})x^0\right) | x \rangle, \quad \omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2/\hbar^2}, \tag{1.1.25}$$

und $\vec{x}$ die raumartigen Komponenten von x bezeichnet. Man beachte hier einen ganz wesentlichen Unterschied zu der "heuristischen" Herleitung der Klein-Gordon-Gleichung von oben: Dies ist nicht der Ersatz für Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung in der nichtrelativistischen Quantenphysik. Unser Zeitparameter ist τ und nicht x^0. Es handelt sich bei (1.1.25) nicht um einen sich in der Zeit x^0 entwickelnden Zustand $\Psi(x^i)$. Die Zeitentwicklung des Zustandes findet in der Parameterzeit τ statt und ist für einen physikalischen Zustand $|\,\Psi\,\rangle$ gegeben durch

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\tau}|\,\Psi\,\rangle = \widehat{H}|\,\Psi\,\rangle = 0, \qquad (1.1.26)$$

denn der Hamilton-Operator verschwindet auf den physikalischen Zuständen. Als Konsequenz der Tatsache, daß der Parameterzeit τ keine physikalische Bedeutung zukommt, ist also der Quantenzustand von ihr unabhängig. Insbesondere ist auch der Unterschied zwischen dem Schrödinger- und dem Heisenberg-Bild der Quantenmechanik aufgehoben, denn wir haben ja im Schrödinger-Bild gefunden, daß die Zustände zeitunabhängig sind.

Sind also auch die Operatoren im Heisenberg-Bild zeitunabhängig? Die Bedingung dafür, daß ein Operator $\widehat{O}$ zeitunabhängig ist, lautet $[\widehat{O},\widehat{H}] = 0$. Das ist allerdings nicht für alle Operatoren der Fall. Ist also das Schödinger-Bild doch nicht dem Heisenberg-Bild identisch? Der Übergang von einem zum anderen wird durch die Forderung hergestellt, daß die Zeitentwicklung in beiden Bildern gleich sein muß. Betrachten wir die Zeitentwicklung (damit ist stets die in der Parameterzeit τ gemeint) des Erwartungswertes von x^i. Im Schrödinger-Bild ist dieser Erwartungswert natürlich konstant, denn weder der Operator noch der Zustand ändert sich. Dagegen sollte im Heisenberg-Bild die τ-Ableitung des Erwartungswertes von x^i durch den Erwartungswert von ep^i gegeben sein, also nicht verschwinden.

Dieser scheinbare Widerspruch läßt sich sogar ohne die Interpretation der Größen als Zeitableitungen und nur mit Hilfe der Zwangsbedingung $\boldsymbol{H}$ anstatt der Hamilton-Funktion formulieren. Dazu berechnen wir den Erwartungswert von $[\widehat{x}^i,\widehat{\boldsymbol{H}}]$ auf zwei verschiedene Arten und bekommen

$$-\,\mathrm{i}\langle\,\Psi\,|\widehat{p}^i|\,\Psi\,\rangle = \langle\,\Psi\,|\,[\widehat{x}^i,\widehat{H}]\,|\,\Psi\,\rangle = \langle\,\Psi\,|\widehat{x}^i\widehat{H}|\,\Psi\,\rangle - \langle\,\Psi\,|\widehat{H}\widehat{x}^i|\,\Psi\,\rangle = 0. \qquad (1.1.27)$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch, wenn wir zum Beispiel $|\,\Psi\,\rangle = |\,\vec{k},+\,\rangle$ setzen mit $\vec{k}\neq 0$.

Welche Annahmen haben wir in (1.1.27) gemacht? Zum einen haben wir vorausgesetzt, daß $\widehat{\boldsymbol{H}}$ hermitesch ist. Das erscheint sinnvoll, denn es ist eine reelle Funktion der $\widehat{p}^i$, und wenn wir wollen, daß $\langle\,\Psi\,|\widehat{p}^i|\,\Psi\,\rangle$ stets reell ist, muß $\widehat{p}^i$ hermitesch sein. Zum anderen haben wir vorausgesetzt, daß das Skalarprodukt in dieser Form überhaupt existiert. Tatsächlich ist es genau diese Annahme, die auch zu dem oben genannten Widerspruch mit der Wahrscheinlichkeits-Interpretation führt.

Nun hatten wir gesehen, daß der Funktion $x(\tau)$ keine physikalische Realität zukommt und daher ist auch die Bedeutung des Erwartungswertes des zugehörigen Operators $\widehat{x}$ keine sinnvolle Größe ist. Statt dessen waren die einzigen meßbaren Größen durch die Observablen $\mathcal{O}$ gegeben, die mit der Zwangsbedingung schwach vertauschen. Die zugeordneten Operatoren $\widehat{\mathcal{O}}$ bilden den physikalischen Zustandsraum in sich ab, denn

$$[\widehat{\mathcal{O}},\widehat{\boldsymbol{H}}]\approx 0,\quad \widehat{\boldsymbol{H}}|\,\Psi\,\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \widehat{\boldsymbol{H}}\,\widehat{\mathcal{O}}|\,\Psi\,\rangle = 0. \qquad (1.1.28)$$

Für eine solche Observable statt x^i ergibt sich in (1.1.27) kein Widerspruch mehr, da beide Seiten verschwinden.

Da die einzigen "meßbaren" Größen die Observablen sind, genügt es, ein Skalarprodukt auf dem Raum der physikalischen Zustände zu definieren. Die einzige Forderung an dieses Skalarprodukt ist dann, daß die den reellen Observablen zugeordneten Operatoren hermitesch werden (hierauf werden wir im nächsten Abschnitt noch näher eingehen).

In unserem Fall wirken die Observablen wie folgt auf physikalische Zustände:

$$\widehat{p}_i|\,\vec{k},\pm\,\rangle = \hbar k_i|\,\vec{k},\pm\,\rangle,\quad \widehat{p}_0|\,\vec{k},\pm\,\rangle = \pm\hbar\omega(\vec{k})|\,\vec{k},\pm\,\rangle,\quad \widehat{d}^i|\,\vec{k},\pm\,\rangle = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial k_i}\,|\,\vec{k},\pm\,\rangle. \qquad (1.1.29)$$

Um die letzte Gleichung zu erhalten, muß man die Ordnung der nicht vertauschenden Operatoren p^0 und x^0 in der Definition von d^i fixieren. Eine andere Wahl würde zusätzlich eine Konstante erzeugen, wir müßten dann aber auch ein anderes Skalarprodukt benutzten, um den Operator d^i_t hermitesch zu machen, so daß sich wieder die gleichen Erwartungswerte ergäben. Mit der in (1.1.29) benutzen Operatorordnung ist das Skalarprodukt, das die geforderten Eigenschaften hat, leicht anzugeben. Wir definieren

$$\langle\,\vec{k},+\,|\,\vec{k}',+\,\rangle = \langle\,\vec{k},-\,|\,\vec{k}',-\,\rangle = (2\pi)^3\,\delta(\vec{k}-\vec{k}'),\quad \langle\,\vec{k},-\,|\,\vec{k}',+\,\rangle = 0. \qquad (1.1.30)$$

Bis auf eine Konstante ist das Produkt durch die Forderung, daß die reellen Observablen hermitesch sind, eindeutig bestimmt. Man beachte, daß dieses, wenn man die Zustände gemäß (1.1.25) als Ortswellenfunktionen schreibt, *nicht* als ein Integral über eine raumartige Fläche definiert werden kann. Es gibt auch keine Erweiterung auf den ganzen Zustandsraum, denn dann hätten wir ja den Widerspruch (1.1.27) wieder. Da $\widehat{x}^i|\,\Psi\,\rangle$ kein physikalischer Zustand ist, können wir mit ihm auch kein Skalarprodukt bilden und (1.1.27) ist nicht definiert.

Wir haben also das freie relativistische Teilchen streng im Diracschen Sinne kanonisch quantisiert. Für einen gegebenen Zustand $|\,\Psi\,\rangle$ können wir nun die Erwartungswerte für die Observablen (1.1.29) berechnen und daraus Übergangsamplituden und ähnliches ableiten. Um jedoch physikalisch sinnvolle Aussagen zu gewinnen, müßten wir uns noch etwas eingehender damit beschäftigen, wie hier überhaupt Messungen durchgeführt werden können. So ist es im Rahmen eine relativistischen Theorie sicher nicht möglich, eine "Ortmessung" durchzuführen zu einer gegebenen Zeit x^0, so daß wir also nicht direkt d^i_t messen können.

Im Prinzip können wir auch das oben beschriebene Teilchen im Elektromagnetischen Feld in gleicher Weise quantisieren, nur daß wir die Lösungen nicht explizit angeben können und entsprechende Übergangsamplituden nur als Reihe darstellen können, die im wesentlichen nach den Feynman-Regeln gebildet wird.

Ein in diesem Zusammenhang oft diskutiertes Problem ist die physikalische Interpretation des Eigenwertes von $\hat{p}_0$ bzw. der Unterschied zwischen den Zuständen $|\vec{k},+\rangle$ und $|\vec{k},-\rangle$. Ein weiteres Problem ist, daß die Zustände $|\vec{k},-\rangle$ eine beliebig große negative "Energie" p_0 annehmen können.

Im Rahmen der Diracschen Quantisierung können wir diese Probleme wie folgt lösen: Wir hatten schon gesehen, daß in der kanonischen Formulierung der zusätzliche Isospin auch in der klassischen Theorie vorhanden ist. Wir hatten ihn dort Ladung genannt und für das an ein Feld gekoppelte Teilchen (1.1.13) bestimmt das Vorzeichen von p_0 tatsächlich das Vorzeichen der Ankopplung an das äußere Feld.

In der kanonischen Beschreibung haben wir es also mit einem Teilchen-Antiteilchen-System zu tun. Jedoch gibt es keine Erzeugungs- und Vernichtungs-Prozesse; es ist stets genau ein Teichen vorhanden und das kann entweder ein Teilchen oder ein Antiteilchen (oder in der Quantentheorie ein Superposition) sein. Das Problem der negativen Energie ist in diesem Zusammenhang völlig ohne Bedeutung, denn es ist reine Willkür, p_0 (oder $p_0 - A_0$) als Energie zu bezeichnen. Es gibt keine Kopplung an irgendwelche anderen physikalische Objekte (außer bei eine "Messung", bei der sowieso keine Erhaltungsätze gelten), und demzufolge kann auch das Antiteilchen nicht beliebig viel Energie abgeben.

2. Holomorphe Quantisierung

Im Gegensatz zur gewöhnlichen Einstein-Hilbert-Wirkung (2.1.5) der vierdimensionalen Gravitation ist Ashtekars Wirkung (2.2.24) nicht eine reelle Funktion von reellen Feldern. Wir können sie entweder als Wirkungsfunktion zweiter Ordnung des (reellen) Vierbeinfeldes $E_M{}^A$ auffassen oder als Wirkung erster Ordnung des Vierbeinfeldes und des komplexen Zusammenhangs $\mathcal{A}_{Ma}$.

Im ersten Fall ist $I[E]$ eine komplexe Funktion von reellen Feldern, deren Imaginärteil eine totale Ableitung ist und damit nicht zu den Bewegungsgleichungen beiträgt. Der Imaginärteil der Wirkung bewirkt aber, daß die den Feldern zugeordneten Impulse komplex werden, so daß er sich erst bei der kanonischen Formulierung bemerkbar macht. Man kann dann zeigen,[2] daß das Hinzufügen des Imaginärteils einer kanonischen Transformation zu komplexen Variablen entspricht, deren quantisierte Version nicht mehr durch einen unitären Operator gegeben ist.

Im zweiten Fall haben wir eine Wirkung erster Ordnung $I[E,\mathcal{A}]$, deren Imaginärteil keine totale Ableitung mehr ist. Das ist nur dann der Fall, wenn wir für $\mathcal{A}$ die Lösungen der Bewegungsgleichungen, also "$\mathcal{A} = \mathcal{A}[E]$" einsetzen, womit wir aber wieder beim ersten Fall wären. Wollen wir mit einer Wirkung erster Ordnung arbeiten, so können wir die komplexen Felder $\mathcal{A}$ nicht als durch eine (kanonische) Transformation aus reellen Feldern hervorgegangen betrachten. Es gibt keine Transformation, die die Ashtekar-Wirkung in die Einstein-Hilbert-Wirkung erster Ordnung (2.1.21) überführt.

[2] Eine Diskussion der Quantisierung eines allgemeinen Systems mit einer solchen Wirkung wird in [14] durchgeführt.

Es stellt sich die Frage, wie man ein System, das durch eine komplexe Wirkung gegeben ist, die in den komplexen Feldern holomorph ist, kanonisch beschreiben und quantisieren kann. Zum einen können wir eine solche Wirkung I natürlich in den Real- und Imaginärteil $I = I_{\mathrm{re}} + \mathrm{i}I_{\mathrm{im}}$ aufspalten und dann verlangen, daß beide für eine Lösung der Bewegungsgleichungen extremal werden sollen. Bei der Variation von Ashtekars Wirkung stellt man fest, daß eine Lösung der Bewegungsgleichungen für den Realteil stets auch eine für den Imaginärteil ist. Natürlich ist das kein Zufall. Da die Wirkung holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und damit

$$\frac{\delta I_{\mathrm{re}}}{\delta \phi_{\mathrm{re}}} = \frac{\delta I_{\mathrm{im}}}{\delta \phi_{\mathrm{im}}}, \qquad \frac{\delta I_{\mathrm{re}}}{\delta \phi_{\mathrm{im}}} = -\frac{\delta I_{\mathrm{im}}}{\delta \phi_{\mathrm{re}}}, \tag{1.2.1}$$

wobei $\phi = \phi_{\mathrm{re}} + \mathrm{i}\phi_{\mathrm{im}}$ die komplexen Felder sind. Real- und Imaginärteil der Wirkung liefern also die gleichen Bewegungsgleichungen. Die von einer holomorphen Wirkung beschriebene Physik ist die gleiche wie die von ihrem Realteil (oder Imaginärteil) als gewöhnliche reelle Wirkungsfunktion beschriebene. Da die holomorphe Form aber meistens einfacher zu handhaben ist, wollen wir im folgenden ein Verfahren angeben, wie ein durch eine solche Wirkung definiertes System quantisiert werden kann. Nennen wir es "holomorphe Quantisierung".

Um eine komplexe Wirkung möglichst allgemein zu diskutieren, gehen wir noch einen Schritt weiter und nehmen an, daß die Wirkung eine Funktion ausschließlich von komplexen Feldern gegeben ist und zusätzlich eine Reihe von "Realitätsbedingungen" gestellt werden. Für Ashtekars Wirkung heißt das, daß wir auch E als komplexe Größe betrachten und als eine Zwangsbedingung verlangen, daß E reell ist. Die Wirkung ist dann holomorph in E und $\mathcal{A}$.

Wir werden sehen, daß diese Realitätsbedingungen im Prinzip genauso behandelt werden können wie Zwangsbedingungen im üblichen Sinn. Das Verfahren ist im wesentlichen nichts anderes als eine Verallgemeinerung des Diracschen kanonischen Formalismus für eine reelle Wirkung von komplexen Feldern ϕ: Statt nur formal ϕ und ϕ^* als unabhängige Felder zu variieren, betrachtet man $\psi = \phi^*$ als ein zweites komplexes Feld, so daß die Wirkung in beiden holomorph wird, und erhält als Realitätsbedingungen $\phi + \psi \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{i}(\phi - \psi) \in \mathbb{R}$.

Auf den ersten Blick scheint es natürlich kompliziert, die einfache Beziehung $\phi = \psi^*$ in zwei etwas unhandliche Relationen zu übersetzen. Man beachte aber, daß die beiden Größen *holomorphe* Funktionen der Felder sind.

Bei der Quantisierung eines solchen Systems werden die Realitätsbedingungen unter gewissen Voraussetzungen, die wir in diesem Abschnitt diskutieren wollen, als Zwangsbedingungen zweiter Klasse auftreten. Da solche Bedingungen als exakte Operatorgleichungen erfüllt sein müssen, verlangen die Realitätsbedingungen gerade, daß die zugeordneten Operatoren hermitesch sind. Das heißt, daß erst bei der Definition des Skalarproduktes auf dem physikalischen Zustandsraum die Realitätsbedingungen zum Tragen kommen.

Außerdem müssen wir beim Auftreten von Zwangsbedingungen zweiter Klasse Dirac-Klammern einführen. Die Vertauschungsrelationen für die Operatoren ergeben sich dann aus diesen und nicht aus den Poisson-Klammern. Ein wesentliches Ergebnis der folgenden Betrachtung wird sein, daß unter bestimmten, leicht zu prüfenden Voraussetzungen die Dirac-Klammern identisch werden mit den sogenannten holomorphen Klammern, die wir direkt aus der holomorphen Lagrange-Funktion ablesen können.

Ein einfaches Beispiel

Der kanonische Formalismus für ein derartiges System läßt sich am besten an einem Standardbeispiel erläutern: Für zwei komplexe Variable w und z definieren wir eine Lagrange-Funktion erster Ordnung und eine Realitätsbedingung

$$L = w\dot{z} + \mathrm{i}wz, \quad z - \mathrm{i}w \in \mathbb{R}. \tag{1.2.2}$$

Das ist eine etwas ungewöhnliche Formulierung für ein einfaches System: setzen wir $z = \sqrt{2}x + \mathrm{i}w$, so bekommen wir

$$L = \sqrt{2}\,w\dot{x} + \mathrm{i}\sqrt{2}\,wx - w^2, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.2.3}$$

bis auf eine totale Ableitung. Auflösen der Bewegungsgleichung für w ergibt

$$\dot{x} + \mathrm{i}x - \sqrt{2}\,w = 0, \quad L = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2), \tag{1.2.4}$$

wiederum bis auf eine totale Ableitung. Die Realitätsbedingung ist jetzt trivial und wir haben die Lagrange-Funktion eines harmonischen Oszillators mit Frequenz $\omega = 1$.

Wie kann man nun ohne diese Transformation auf ein bekanntes "reelles" Problem das durch (1.2.2) gegebene System quantisieren? Da die Lagrange-Funktion bereits in der Standardform $L = w\dot{z} - H(w,z)$ gegeben ist, lesen wir direkt die Poisson-Klammern und die Hamilton-Funktion ab:

$$\{z, w\} = 1, \quad H = -\mathrm{i}wz. \tag{1.2.5}$$

Die Bedingung $z - \mathrm{i}w \in \mathbb{R}$ behandeln wir nun genauso wie sonst eine primäre Zwangsbedingung, nur daß wir nicht verlangen, daß sie für physikalische Zustände verschwindet, sondern reell wird. Da auch ihre Zeitableitung reell sein muß, ergeben sich sekundäre Realitätsbedingungen, wenn ihre Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion nicht verschwindet. Tatsächlich finden wir

$$\{z - \mathrm{i}w, H\} = w - \mathrm{i}z, \tag{1.2.6}$$

also $w - \mathrm{i}z \in \mathbb{R}$. Nochmaliges Bilden der Poisson-Klammer mit H führt wieder auf die erste Bedingung zurück. Die Realitätsbedingungen bilden ein Paar von Zwangsbedingungen zweiter Klasse

$$R_1 = z - \mathrm{i}w, \quad R_2 = w - \mathrm{i}z, \quad \{R_1, R_2\} = 2. \tag{1.2.7}$$

Wir quantisieren nun in üblicher Weise, indem wir Operatoren $\widehat{w}$ und $\widehat{z}$ einführen, die die Vertauschungsrelationen[3]

$$[\widehat{z}, \widehat{w}] = -\mathrm{i}\widehat{\{z, w\}} = -\mathrm{i} \tag{1.2.8}$$

[3] Von hier ab setzen wir auch $\hbar = 1$.

erfüllen, und zusätzlich die Relationen

$$(\widehat{z} - \mathrm{i}\widehat{w})^\dagger = \widehat{z} - \mathrm{i}\widehat{w}, \quad (\widehat{w} - \mathrm{i}\widehat{z})^\dagger = \widehat{w} - \mathrm{i}\widehat{z}, \tag{1.2.9}$$

oder etwas einfacher

$$\widehat{z}^\dagger = -\mathrm{i}\widehat{w}, \quad \widehat{w}^\dagger = -\mathrm{i}\widehat{z}. \tag{1.2.10}$$

Eine mögliche Darstellung ist

$$\widehat{z} = z, \quad \widehat{w} = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.2.11}$$

wobei beide auf Wellenfunktionen $\Psi(z)$ wirken. Aber auf welche Funktionen? Man muß beachten, daß wegen (1.2.10) $\widehat{z}^\dagger = \partial/\partial z$ ist und nicht durch Multiplikation mit z^* dargestellt wird. Verlangen wir, daß die Darstellung der durch $\widehat{z}$ und $\widehat{w}$ aufgespannten Algebra irreduzibel ist, so können wir keine beliebigen Funktionen $\Psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zulassen, sondern müssen uns zum Beispiel auf holomorphe beschränken.[4]

Wir haben also eine Operator-Algebra für den harmonischen Oszillator, jetzt brauchen wir nur noch ein Skalarprodukt auf dem Zustandsraum. Es muß positiv definit sein und die Relationen (1.2.10) für die Adjungierten der Operatoren $\widehat{z}$ und $\widehat{w}$ liefern. Dies ist ein wohlbekanntes Problem,[5] und ein Produkt mit den geforderten Eigenschaften ist

$$\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int \mathrm{d}^2 z\; e^{-zz^*}\, \Phi^*(z^*)\Psi(z), \tag{1.2.12}$$

wobei $\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{Re}\,z)\mathrm{d}(\mathrm{Im}\,z)$ das Lebesgue Maß auf der komplexen Ebene ist. Natürlich müssen wir hier noch den Zustandsraum auf diejenigen Funktionen Ψ einschränken, für die $\langle \Psi \,|\, \Psi \rangle$ endlich ist.

Um den Hamilton-Operator anzugeben, müssen wir uns für eine Operatorordnung entscheiden, da sowohl $\mathrm{i}\widehat{z}\widehat{w}$ als auch $\mathrm{i}\widehat{w}\widehat{z}$ hermitesch sind. Um die übliche Normierung der Energie-Eigenwerte zu erhalten, wählen wir die symmetrische Kombination

$$\widehat{H} = \tfrac{\mathrm{i}}{2}(\widehat{z}\,\widehat{w} + \widehat{w}\,\widehat{z}) = \tfrac{1}{2} + z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.2.13}$$

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n, \quad \widehat{H}\,\Psi_n = (n + \tfrac{1}{2})\Psi_n, \tag{1.2.14}$$

[4] Statt uns auf holomorphe Funktionen zu beschränken, könnten wir einfach Funktionen einer reellen Variablen $\Psi(q)$ verwenden und $\widehat{z} = q$, $\widehat{w} = \mathrm{i}\partial/\partial q$ setzen. Das gleiche Phänomen tritt bei der Diskussion der Wirkung zweiter Ordnung in [14] auf. Auch dort wird die Wellenfunktion als Funktion von *reellen* Variablen dargestellt. Natürlich sind die beiden Darstellungen äquivalent, da eine holomorphe Funktion bereits durch ihre Werte auf der reellen Achse festgelegt ist.

[5] Diese Darstellung das harmonischen Oszillators entspricht natürlich der bekannten Bargmann-Darstellung [31]. Man erhält sie üblicherweise durch eine kanonische Transformation aus der reellen Darstellung; siehe [32], Kapitel 12-7.

und natürlich sind $\hat{z}$ und $\hat{z}^\dagger = -\mathrm{i}\hat{w}$ gerade die Auf- und Absteiger:

$$\hat{z}\,\Psi_n = \sqrt{n+1}\,\Psi_{n+1}, \quad -\mathrm{i}\hat{w}\,\Psi_n = \sqrt{n}\,\Psi_{n-1}. \tag{1.2.15}$$

Wir haben also den harmonischen Oszillator im Auf- und Absteiger-Formalismus quantisiert. Allerdings haben wir nicht wie üblich diese Operatoren erst in der Quantentheorie eingeführt, sondern sie treten bereits als "Orts-" und "Impulsvariable" in der klassischen Beschreibung auf.

Allgemeine Formulierung

Nachdem wir die holomorphe Quantisierung für das Standardbeispiel erarbeitet haben, werden wir nun die allgemeine Struktur dieses Verfahrens diskutieren.

Wir hatten uns bereits klargemacht, daß eine Lagrange-Funktion, die in allen komplexen Variablen holomorph ist, die gleichen klassischen Bewegungsgleichungen induziert wie ihr Realteil oder ihr Imaginärteil.

Da die kanonische Quantisierung nach Dirac eine reelle Lagrange-Funktion L voraussetzt, nehmen wir an, daß eine solche als Realteil einer in den komplexen Feldern holomorphen Funktion $\widetilde{L}$ gegeben ist. Tatsächlich wird genau das die Ausgangssituation in der Ashtekarschen Formulierung der Gravitation und Supergravitation sein. Es können jedoch auch noch reelle Variable in dieser Lagrange-Funktion auftreten, etwa das Vierbein in der Gravitation. Wir berücksichtigen das, indem wir zu der gegebenen Wirkung noch Zwangsbedingungen hinzufügen, die jeweils den Imaginärteil der reellen Felder, die wir dann auch als komplex betrachten, zu Null setzen.

Um eine möglichst große Klasse von Systemem beschreiben zu können, wollen wir nicht nur einfach reelle Variable zulassen, sondern beliebige Realitätsbedingungen, die von gewissen holomorphen Funktionen R_α der Felder verlangen, daß sie reell sind.

Die Lagrange-Funktion ist dann von der Form

$$L[z, \dot{z}, \lambda] = \mathrm{Re}\,(\widetilde{L}[z, \dot{z}]) + \lambda_\alpha \mathrm{Im}\, R_\alpha[z], \tag{1.2.16}$$

wobei z ein Satz von komplexen Variablen bezeichnet und die λ_α reelle Variablen sind, die als Lagrange-Multiplikatoren bewirken, daß die $R_\alpha[z]$ tatsächlich reelle Werte annehmen.

Um unsere Arbeit ein wenig zu erleichtern, nehmen wir an, daß die Wirkung durch eine Funktion erster Ordnung in den Zeitableitungen gegeben ist. In unseren Anwendungen wird das immer der Fall sein, ansonsten kann man durch Einführen von Impulsen und Bestimmen der Hamilton-Funktion stets zu einer neuen Lagrange-Funktion übergehen, die dann die gewünschte Form hat:

$$L[z, w, n, \lambda, \zeta] = \mathrm{Re}\,(\dot{z}_i w_i - \widetilde{H}_n[z, w]) + \lambda_\alpha \mathrm{Im}\,(R_\alpha[z, w]) + \zeta_\mu \mathrm{Im}\,(S_\mu[n, z, w]). \tag{1.2.17}$$

Der Phasenraum wird durch die komplexen Variablen z_i und w_i, $i = 1 \ldots N$, aufgespannt. Wir betrachen hier nur endlich-dimensionale Systeme, für unendlich viele Variablen muß man lediglich einzelne Bedingungen entsprechend umformulieren, die Ergebnisse sind im Prinzip die gleichen. Mit n_a bezeichnen wir diejenigen Variablen, die ohne Zeitableitung, also als Lagrange-Multiplikatoren in $\widetilde{L}$ enthalten sind.

Die λ_α von oben haben wir in λ_α und ζ_μ aufgeteilt, und zwar so, daß die zugehörigen Zwangsbedingungen R_α die kanonischen Variablen selbst einschränken, während die S_μ die Real- bzw. Imaginärteile von Multiplikatoren n_a als Funktion der kanonischen Variablen bestimmen.

Um die an dem Beispiel des harmonischen Oszillators beschriebene holomorphe Quantisierung mit einem durch L definierten System durchführen zu können, müssen wir noch ein paar zusätzliche Forderungen stellen. Im wesentlichen müssen wir fordern, daß das System in gewisser Weise "reell" ist, sich also im Prinzip auf ein reelles System zurückführen läßt. Wir brauchen diese Transformation aber nicht explizit zu kennen.

Wir verlangen folgendes:

- Die R_α sind unabhängig, das heißt kein R_α kann als Funktion der anderen dargestellt werden.

- Die R_α enthalten mindestens einen maximalen Satz von vertauschenden Phasenraumfunktionen, also N Funktionen R_α, deren Poisson-Klammern untereinander verschwinden.

- Die Bewegungsgleichungen für L sind äquivalent zu denen der holomorphen Lagrange-Funktion

$$\widetilde{L}[n, z, w] = \dot{z}_i w_i - \widetilde{H}_n[z, w], \tag{1.2.18}$$

zusammen mit den Gleichungen

$$\mathrm{Im}\, R_\alpha[z, w] = 0, \quad \mathrm{Im}\, S_\mu[n, z, w] = 0. \tag{1.2.19}$$

Die erste Forderung verlangt mehr als die Tatsache, daß die Zwangsbedingungen $\mathrm{Im}\, R_\alpha$ unabhängig sind, denn die sind unabhängig, wenn keines der R_α eine *reelle* Funktion der anderen ist, also eine Funktion, die reelle Zahlen wieder auf reelle abbildet. So sind zum Beispiel F und $\mathrm{i}F$ nicht unabhängig im Sinne der ersten Forderung, aber $\mathrm{Im}\,(F) = 0$ und $\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}F) = 0$ sind zwei unabhängige Gleichungen. Offenbar kann man das aber als eine Zwangsbedingung $F = 0$ schreiben, und diese läßt sich durch Hinzufügen eines Terms nF in der holomorphen Wirkung $\widetilde{L}$ erzeugen. Es ist also sinnvoll zu fordern, daß die R_α unabhängig sind, damit wir nicht unnötig viele nicht-holomorphe Zwangsbedingungen erhalten, die wir im folgenden Realitätsbedingungen nennen.

Die zweite Bedingung stellt sicher, daß es so etwas wie einen reellen Konfigurationsraum gibt: mindestens die Hälfte der Variablen hat nur je einen reellen Freiheitsgrad. Die Definition von Poisson-Klammern ist nicht ganz trivial, wie wir gleich sehen werden. Hier ist es unerheblich, welche der unten definierten Klammern wir verwenden: Da alle Funktionen holomorph sind, benutzen wir die durch

$$\{F, G\}_{\mathbb{C}} = \frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial G}{\partial w_i} - \frac{\partial G}{\partial z_i}\frac{\partial F}{\partial w_i} \tag{1.2.20}$$

definierten holomorphen Klammern.

Die dritte Forderung ist äquivalent zu der Bedingung, daß die Bewegungsgleichungen der reellen Wirkung (1.2.17) $\lambda_\alpha = \zeta_\mu = 0$ implizieren, daß also keine Zwangskräfte auftreten. Betrachen wir dazu die Lagrange-Funktion (1.2.16). Indem wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ausnutzen, können wir ihre Bewegungsgleichungen für die komplexen z_i und reellen λ_α folgt schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial z_i} = -\mathrm{i}\lambda_\alpha \frac{\partial R_\alpha}{\partial z_i}, \quad \operatorname{Im} R_\alpha[z] = 0. \tag{1.2.21}$$

Die Bewegungsgleichungen für $\widetilde{L}$ zusammen mit den Realtitätsbedingungen sind

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial z_i} = 0, \quad \operatorname{Im} R_\alpha[z] = 0. \tag{1.2.22}$$

Die beiden Systeme sind offenbar genau dann äquivalent, wenn das erste System von Gleichungen $\lambda_\alpha = 0$ impliziert, denn die R_α sind unabhängig und somit hat die Matrix $\partial R_\alpha / \partial z_i$ maximalen Rang.

Als Ausgangspunkt für den holomorphen Formalismus dient somit eine holomorphe Funktion $\widetilde{L}$ und eine Reihe von "primären Realitätsbedingungen", die wir in der Form

$$\widetilde{L}[z, w, n] = \dot{z}_i w_i - \widetilde{H}_n[z, w], \quad R_\alpha[z, w] \in \mathbb{R}, \quad S_\mu[n, z, w] \in \mathbb{R} \tag{1.2.23}$$

schreiben und die die oben angegeben Forderungen erfüllen. *Die* Lagrange-Funktion im üblichen Sinne ist jedoch durch L gegeben und im folgenden werden wir diese kanonisch quantisieren und dabei zeigen, daß die holomorphe Quantisierung des Systems (1.2.23) zum selben Ergebnis führt.

Die Multiplikatoren n_a sind in der Regel die Zeitkomponenten von Eichfeldern, in der Gravitation die Lapse- und Shift-Funktionen sowie die Zeitkomponenten der Ashtekar-Variablen (siehe (2.3.15)). Wir nehmen daher an, daß die Hamilton-Funktion in ihnen linear ist. Sonst können wir (jedenfalls im Prinzip) ihre Bewegungsgleichungen lösen oder sie so umdefinieren, daß nur noch lineare Terme, multipliziert mit den zugeordneten Zwangsbedingungen, übrig bleiben.

Es ist dann

$$\widetilde{H}_n[z, w] = \widetilde{H}_0[z, w] + n_a Z_a[z, w] \tag{1.2.24}$$

Nun ist dieses $\widetilde{H}$ nicht ganz eindeutig, denn eigentlich haben wir nur H vorgegeben. Da wir nur den Realteil von $\widetilde{H}$ kennen und $\widetilde{H}$ holomorph sein soll, ist dieses nur bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt.

$$\widetilde{H}'_n[z, w] = \widetilde{H}_n[z, w] + \mathrm{i}c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{1.2.25}$$

ist eine mögliche andere Hamilton-Funktion. Im Prinzip könnten wir auch noch eine beliebige imaginäre Funktion der reellen Größen R_α (und S_μ) dazuaddieren. Dies entspräche jedoch einem Übergang zu neuen Multiplikatoren $\lambda_\alpha \longrightarrow \lambda'_\alpha$. Die Bewegungsgleichungen für diese neuen Multiplikatoren wären aber nicht mehr $\lambda'_\alpha = 0$, so daß $\widetilde{H}_n$ tatsächlich bis auf die Konstante c fixiert ist.

Für den harmonischen Oszillator hatten wir diese Probleme völlig ignoriert und die holomorphe Funktion (1.2.2) als *die* Lagrange-Funktion betrachtet. Es ist aber leicht nachzuprüfen, daß die oben gemachten Voraussetzungen erfüllt sind.

Um zu einem vollständig reellen Formalismus zurückzukehren, können wir unser System auch durch eine reelle Wirkung als Funktion von reellen Feldern beschreiben, indem wir $z = x + \mathrm{i}y$, $w = p - \mathrm{i}q$ und $n = u + \mathrm{i}v$ setzen. Mit reellen Variablen x_i und y_i, konjugierten Impulsen p_i und q_i sowie Multiplikatoren u, v, λ, ζ lautet die Wirkung dann

$$\begin{aligned} L[x, y, p, q, u, v, \lambda, \zeta] &= \dot{x}_i p_i + \dot{y}_i q_i - H_{u,v}[x, y, p, q] \\ &\quad + \lambda_\alpha \operatorname{Im} R_\alpha[x + \mathrm{i}y, p - \mathrm{i}q] + \zeta_\mu \operatorname{Im} S_\mu[u + \mathrm{i}v, x + \mathrm{i}y, p - \mathrm{i}q], \\ H_{u,v}[x, y, p, q] &= \operatorname{Re} \widetilde{H}_{u+\mathrm{i}v}[x + \mathrm{i}y, p - \mathrm{i}q]. \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

Betrachten wir diese Wirkung als Ausgangspunkt für die kanonische Quantisierung. Mit den durch

$$\{p_i, x_j\} = -\delta_{ij}, \quad \{q_i, y_i\} = -\delta_{ij} \tag{1.2.27}$$

definierten Poisson-Klammern[6] können wir in üblicher Weise die Bewegungsgleichungen für (1.2.26) formulieren. Wir erhalten zum Beispiel für x_i die Gleichung

$$\dot{x}_i = \{x_i, H_{u,v} + \lambda_\alpha \operatorname{Im} R_\alpha + \zeta_\mu \operatorname{Im} S_\mu\}. \tag{1.2.28}$$

Da wir aber bereits wissen, daß alle Bewegungsgleichungen zusammen $\lambda_\alpha = \zeta_\mu = 0$ implizieren, können wir hier die entsprechenden Terme weglassen und bekommen als kompletten Satz von reellen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \{x_i, H_{u,v}\}, & \dot{y}_i &= \{y_i, H_{u,v}\}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H_{u,v}\}, & \dot{q}_i &= \{q_i, H_{u,v}\}, \\ \operatorname{Re}\left(Z_a[x + \mathrm{i}y, p - \mathrm{i}q]\right) &\approx 0, & \operatorname{Im}\left(Z_a[x + \mathrm{i}y, p - \mathrm{i}q]\right) &\approx 0, \\ \operatorname{Im}\left(R_\alpha[x + \mathrm{i}y, p - \mathrm{i}q]\right) &\approx 0, & \operatorname{Im}\left(S_\mu[u + \mathrm{i}v, x + \mathrm{i}y, p - \mathrm{i}q]\right) &\approx 0. \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Natürlich können wir diese Gleichungen, bis auf die letzten beiden, auch direkt aus der holomorphen Lagrange-Funktion $\widetilde{L}$ ableiten, denn sie erzeugt ja nach Voraussetzung die gleichen

[6] Die hier gegeben Definition gilt so auch für fermionische Variable, während das Vorzeichen von $\{x, p\}$ von dem Vertauschungsverhalten abhängt. Im übrigen läßt sich das ganze hier konstruierte Verfahren auch für Graßmann-wertige Variablen formulieren, wie wir es dann auch für die Supergravitation verwenden werden.

Bewegungsgleichungen. Definieren wir dazu die "holomorphen" Poisson-Klammern durch

$$\{w_i, z_j\}_{\mathbb{C}} = -\delta_{ij}. \tag{1.2.30}$$

Diese bildet zwei *holomorphe* Phasenraumfunktionen auf eine neue ab. Man beachte, daß $\{F, G\}_{\mathbb{C}}$ *nur* für holomorphe Funktionen F, G definiert ist (wir führen keine Klammern $\{z^*, w\} = 0$ etc. ein). Außerdem stimmen sie nicht mit den reellen Klammern überein, statt dessen gilt für holomorphe Funktionen F und G auf dem Phasenraum

$$\{F, G\} = 2\{F, G\}_{\mathbb{C}}. \tag{1.2.31}$$

Dies ist natürlich gerade der "berühmte Faktor 2", den man aus der Wirkung für ein Dirac-Fermion erhält, wenn man von der Poisson- zur Dirac-Klammer übergeht. Tatsächlich wird sich zeigen, daß die komplexen Klammern unter gewissen Voraussetzungen mit den Dirac-Klammern übereinstimmen, und Ziel des Restes dieses Abschnittes ist es, diese zu ermitteln.

Ein paar weitere nützliche Formeln für den Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Klammern sind

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{Re}\, F, \mathrm{Re}\, G\} &= -\{\mathrm{Im}\, F, \mathrm{Im}\, G\} = \mathrm{Re}\,\{F, G\}_{\mathbb{C}},\\
\{\mathrm{Im}\, F, \mathrm{Re}\, G\} &= \{\mathrm{Re}\, F, \mathrm{Im}\, G\} = \mathrm{Im}\,\{F, G\}_{\mathbb{C}},\\
\{F, \mathrm{Re}\, G\} &= \{\mathrm{Re}\, F, G\} = \{F, G\}_{\mathbb{C}},\\
\{F, \mathrm{Im}\, G\} &= \{\mathrm{Im}\, F, G\} = -\mathrm{i}\{F, G\}_{\mathbb{C}}.
\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

Hier sind F und G beliebige holomorphe Funktionen.

Damit können wir leicht zeigen, daß die Bewegungsgleichungen (1.2.29) äquivalent sind zu den holomorphen Gleichungen

$$\dot{z}_i = \{z_i, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}}, \quad \dot{w}_i = \{w_i, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}}, \qquad Z_a \approx 0, \tag{1.2.33}$$

die sich aus der Variation von $\widetilde{L}$ nach w_i, z_i und n_a ergeben. Jedoch lauten die Realitätsbedingungen weiterhin

$$\mathrm{Im}\,(R_\alpha[z, w]) \approx 0, \quad \mathrm{Im}\,(S_\mu[n, z, w]) \approx 0 \tag{1.2.34}$$

und sind natürlich keine holomorphen Funktionen in den Variablen z, w.

Diese Gleichungen sind zwar die vollständigen Bewegungsgleichungen, allerdings sind sie noch nicht notwending in der üblichen Hamiltonschen Formulierung angegeben, denn die eigentlichen Bewegungsgleichungen (1.2.33) können noch weitere Zwangsbedingungen induzieren und die Multiplikatoren λ, ζ und n einschränken.

Um den kompletten Satz von Zwangsbedingungen zu erhalten, müssen wir aus den Bewegungsgleichungen alle solchen Gleichungen bestimmen, die keine Zeitableitung enthalten. Diese bekommen wir, indem wir jeweils die Zeitableitungen von allen bisher ermittelten Zwangsbedingungen berechenen und von diesen wieder verlangen, daß sie (schwach) verschwinden. Wir erhalten dann, wenn die Ableitung nicht selbst schwach verschwindet, eine neue Zwangsbedingung oder eine Gleichung für die Lagrange-Multiplikatoren.

Als Ausgangspunkt für diese Prozedur dienen die primären Zwangsbedingungen $\mathrm{Im}\, R_\alpha \approx 0$ und $Z_a \approx 0$ sowie die Gleichungen $\mathrm{Im}\, S_\mu = 0$ für die Multiplikatoren.

Bestimmen wir die Zeitableitungen von $\mathrm{Im}\, R_\alpha$:

$$0 \approx \mathrm{Im}\, \dot{R}_\alpha = \mathrm{Im}\,\{R_\alpha, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}}. \tag{1.2.35}$$

Dies kann offenbar eine neue Zwangbedingung von der Form $\mathrm{Im}\, R'_\beta[z, w] \approx 0$ ergeben, also eine sekundäre Realitätsbedingung, oder eine Gleichung, die sich wieder in der Form $\mathrm{Im}\, S'_\nu = 0$ schreiben läßt. Im folgenden bezeichnen wir mit den gestrichenen Größen immer die bis jetzt ermittelten Zwangsbedingungen einschließlich der primären. Die ungestrichenen Größen bezeichnen nur die primären Bedingungen.

Laut Voraussetzung waren die primären R_α unabhängig. Wir wollen nun zeigen, daß auch der komplette Satz von Realitätsbedingungen so gewählt werden kann, daß alle R'_β voneinander unabhängig sind: Nehmen wir an, wir hätten aus (1.2.35) eine neue Realitätsbedingung $\mathrm{Im}\, C[z, w] \approx 0$ bekommen. Wenn C von allen bisher ermittelten R'_α unabhängig ist, fügen wir sie als ein neues $\mathrm{Im}\, R'_\beta$ hinzu. Ist C nicht unabhängig von den bereits vorhandenen R'_α, so ist $C[z, w] = F[\{R'_\alpha\}]$, wobei F eine holomorphe Funktion ist. Wir können jede holomorphe Funktion in der Form $F = F_1 + \mathrm{i} F_2$ schreiben, wobei F_1 und F_2 reelle Funktionen sind, indem wir sie formal in ihren Real- und Imaginärteil aufspalten. Dann ist $C = F_1[\{R'_\alpha\}] + \mathrm{i} F_2[\{R'_\alpha\}]$ und die neue Zwangsbedingung ist $\mathrm{Im}\, C = \mathrm{Im}\, F_1 + \mathrm{Re}\, F_2 \approx F_2$, denn F_1 und F_2 sind reell, wenn die R'_α alle reell sind. Statt $\mathrm{Im}\, C$ als neue Realitätsbedingung hinzuzufügen, können wir auch F_2, den "formalen Imaginärteil" von C, als neue Zwangsbedingung Z'_b definieren. Auf diese Weise bleiben die R'_β stets unabhängig.

Die so gefundenen neuen Realitätsbedingungen setzen wir wieder in (1.2.35) ein, bis das Verfahren schließlich abbricht. Daß dies geschehen muß, werden wir gleich sehen.

Das gleiche machen wir auch mit den Z_a. Aus

$$0 \approx \dot{Z}_a = \{Z_a, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}} \tag{1.2.36}$$

kann sich eine neue Zwangsbedingung ergeben oder eine Gleichung für die Multiplikatoren. In der Regel wird diese Funktion aber selbst schwach verschwinden, etwa dann, wenn die Z_a Erzeuger von Eichtransformationen sind: Dann bilden sie eine geschlossene Poisson-Algebra und auch die Hamilton-Funktion $\widetilde{H}_0$ sollte in diesem Fall eine Eichinvariante sein, so daß die rechte Seite von (1.2.36) schwach verschwindet. Im allgemeinen können wir aber eine neue Zwangsbedingung $Z'_b \approx 0$, eine Gleichung für die Multiplikatoren $S'_\nu = 0$ oder sogar eine neue Realitätsbedingung erhalten, mit der wir dann wieder wie oben beschrieben verfahren. Der letzte Fall kann dann eintreten, wenn sich zunächst eine holomorphe Gleichung für die Multiplikatoren n_a ergibt, diese dann aber in Verbindung mit einer schon vorhandenen Gleichung $\mathrm{Im}\, S_\mu = 0$ auf eine Realitätsbedingung an die kanonischen Variablen führt.

Bewegungsgleichungen. Definieren wir dazu die "holomorphen" Poisson-Klammern durch

$$\{w_i, z_j\}_{\mathbb{C}} = -\delta_{ij}. \tag{1.2.30}$$

Diese bildet zwei *holomorphe* Phasenraumfunktionen auf eine neue ab. Man beachte, daß $\{F, G\}_{\mathbb{C}}$ *nur* für holomorphe Funktionen F, G definiert ist (wir führen keine Klammern $\{z^*, w\} = 0$ etc. ein). Außerdem stimmen sie nicht mit den reellen Klammern überein, statt dessen gilt für holomorphe Funktionen F und G auf dem Phasenraum

$$\{F, G\} = 2\{F, G\}_{\mathbb{C}}. \tag{1.2.31}$$

Dies ist natürlich gerade der "berühmte Faktor 2", den man aus der Wirkung für ein Dirac-Fermion erhält, wenn man von der Poisson- zur Dirac-Klammer übergeht. Tatsächlich wird sich zeigen, daß die komplexen Klammern unter gewissen Voraussetzungen mit den Dirac-Klammern übereinstimmen, und Ziel des Restes dieses Abschnittes ist es, diese zu ermitteln.

Ein paar weitere nützliche Formeln für den Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Klammern sind

$$\begin{aligned} \{\mathrm{Re}\, F, \mathrm{Re}\, G\} &= -\{\mathrm{Im}\, F, \mathrm{Im}\, G\} = \mathrm{Re}\,\{F, G\}_{\mathbb{C}}, \\ \{\mathrm{Im}\, F, \mathrm{Re}\, G\} &= \{\mathrm{Re}\, F, \mathrm{Im}\, G\} = \mathrm{Im}\,\{F, G\}_{\mathbb{C}}, \\ \{F, \mathrm{Re}\, G\} &= \{\mathrm{Re}\, F, G\} = \{F, G\}_{\mathbb{C}}, \\ \{F, \mathrm{Im}\, G\} &= \{\mathrm{Im}\, F, G\} = -\mathrm{i}\{F, G\}_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

Hier sind F und G beliebige holomorphe Funktionen.

Damit können wir leicht zeigen, daß die Bewegungsgleichungen (1.2.29) äquivalent sind zu den holomorphen Gleichungen

$$\dot{z}_i = \{z_i, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}}, \quad \dot{w}_i = \{w_i, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}}, \qquad Z_a \approx 0, \tag{1.2.33}$$

die sich aus der Variation von $\widetilde{L}$ nach w_i, z_i und n_a ergeben. Jedoch lauten die Realitätsbedingungen weiterhin

$$\mathrm{Im}\,(R_\alpha[z, w]) \approx 0, \quad \mathrm{Im}\,(S_\mu[n, z, w]) \approx 0 \tag{1.2.34}$$

und sind natürlich keine holomorphen Funktionen in den Variablen z, w.

Diese Gleichungen sind zwar die vollständigen Bewegungsgleichungen, allerdings sind sie noch nicht notwending in der üblichen Hamiltonschen Formulierung angegeben, denn die eigentlichen Bewegungsgleichungen (1.2.33) können noch weitere Zwangsbedingungen induzieren und die Multiplikatoren λ, ζ und n einschränken.

Um den kompletten Satz von Zwangsbedingungen zu erhalten, müssen wir aus den Bewegungsgleichungen alle solchen Gleichungen bestimmen, die keine Zeitableitung enthalten. Diese bekommen wir, indem wir jeweils die Zeitableitungen von allen bisher ermittelten Zwangsbedingungen berechenen und von diesen wieder verlangen, daß sie (schwach) verschwinden. Wir erhalten dann, wenn die Ableitung nicht selbst schwach verschwindet, eine neue Zwangsbedingung oder eine Gleichung für die Lagrange-Multiplikatoren.

Als Ausgangspunkt für diese Prozedur dienen die primären Zwangsbedingungen $\mathrm{Im}\, R_\alpha \approx 0$ und $Z_a \approx 0$ sowie die Gleichungen $\mathrm{Im}\, S_\mu = 0$ für die Multiplikatoren.

Bestimmen wir die Zeitableitungen von $\mathrm{Im}\, R_\alpha$:

$$0 \approx \mathrm{Im}\, \dot{R}_\alpha = \mathrm{Im}\,\{R_\alpha, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}}. \tag{1.2.35}$$

Dies kann offenbar eine neue Zwangbedingung von der Form $\mathrm{Im}\, R'_\beta[z, w] \approx 0$ ergeben, also eine sekundäre Realitätsbedingung, oder eine Gleichung, die sich wieder in der Form $\mathrm{Im}\, S'_\nu = 0$ schreiben läßt. Im folgenden bezeichnen wir mit den gestrichenen Größen immer die bis jetzt ermittelten Zwangsbedingungen einschließlich der primären. Die ungestrichenen Größen bezeichnen nur die primären Bedingungen.

Laut Voraussetzung waren die primären R_α unabhängig. Wir wollen nun zeigen, daß auch der komplette Satz von Realitätsbedingungen so gewählt werden kann, daß alle R'_β voneinander unabhängig sind: Nehmen wir an, wir hätten aus (1.2.35) eine neue Realitätsbedingung $\mathrm{Im}\, C[z, w] \approx 0$ bekommen. Wenn C von allen bisher ermittelten R'_α unabhängig ist, fügen wir sie als ein neues $\mathrm{Im}\, R'_\beta$ hinzu. Ist C nicht unabhängig von den bereits vorhandenen R'_α, so ist $C[z, w] = F[\{R'_\alpha\}]$, wobei F eine holomorphe Funktion ist. Wir können jede holomorphe Funktion in der Form $F = F_1 + \mathrm{i}F_2$ schreiben, wobei F_1 und F_2 reelle Funktionen sind, indem wir sie formal in ihren Real- und Imaginärteil aufspalten. Dann ist $C = F_1[\{R'_\alpha\}] + \mathrm{i}F_2[\{R'_\alpha\}]$ und die neue Zwangsbedingung ist $\mathrm{Im}\, C = \mathrm{Im}\, F_1 + \mathrm{Re}\, F_2 \approx F_2$, denn F_1 und F_2 sind reell, wenn die R'_α alle reell sind. Statt $\mathrm{Im}\, C$ als neue Realitätsbedingung hinzuzufügen, können wir auch F_2, den "formalen Imaginärteil" von C, als neue Zwangsbedingung Z'_b definieren. Auf diese Weise bleiben die R'_β stets unabhängig.

Die so gefundenen neuen Realitätsbedingungen setzen wir wieder in (1.2.35) ein, bis das Verfahren schließlich abbricht. Daß dies geschehen muß, werden wir gleich sehen.

Das gleiche machen wir auch mit den Z_a. Aus

$$0 \approx \dot{Z}_a = \{Z_a, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}} \tag{1.2.36}$$

kann sich eine neue Zwangsbedingung ergeben oder eine Gleichung für die Multiplikatoren. In der Regel wird diese Funktion aber selbst schwach verschwinden, etwa dann, wenn die Z_a Erzeuger von Eichtransformationen sind: Dann bilden sie eine geschlossene Poisson-Algebra und auch die Hamilton-Funktion $\widetilde{H}_0$ sollte in diesem Fall eine Eichinvariante sein, so daß die rechte Seite von (1.2.36) schwach verschwindet. Im allgemeinen können wir aber eine neue Zwangsbedingung $Z'_b \approx 0$, eine Gleichung für die Multiplikatoren $S'_\nu = 0$ oder sogar eine neue Realitätsbedingung erhalten, mit der wir dann wieder wie oben beschrieben verfahren. Der letzte Fall kann dann eintreten, wenn sich zunächst eine holomorphe Gleichung für die Multiplikatoren n_a ergibt, diese dann aber in Verbindung mit einer schon vorhandenen Gleichung $\mathrm{Im}\, S_\mu = 0$ auf eine Realitätsbedingung an die kanonischen Variablen führt.

Schließlich bekommen wir alle Zwangsbedingungen und alle Bewegungsgleichungen für die Multiplikatoren, die wir in der Form

$$Z_b'[z,w] \approx 0, \quad \mathrm{Im}\left(R_\beta'[z,w]\right) \approx 0, \quad \mathrm{Im}\left(S_\nu'[n,z,w]\right) = 0 \tag{1.2.37}$$

schreiben können. Die Dynamik unseres durch (1.2.23) beschriebenen Systems wird also durch Vorgabe der Anfangswerte $z_i(0)$, $w_i(0)$ und der Funktionen $n_a(t)$ festgelegt, die (1.2.37) erfüllen, und die Zeitableitung einer beliebigen Phasenraumfunktion ist dann durch die Poisson-Klammer mit H gegeben, und die einer holomorphen Phasenraumfunktion ebenfalls durch die holomorphe Klammer mit $\widetilde{H}$.

Nun hatten wir beim Bestimmen der sekundären Zwangsbedingungen die λ- und ζ-Terme der "eigentlichen" Lagrange-Funktion (1.2.26) ganz weggelassen, was wir aufgrund der Voraussetzung, daß $\lambda_\alpha = \zeta_\mu = 0$ ein Teil der Bewegungsgleichungen ist, auch durften. Aber wie kommen die Bewegungsgleichungen für diese Multiplikatoren überhaupt zustande? Sie sollten sich, genau wie die zusätzlichen Gleichungen $\mathrm{Im}\, S_\mu' = 0$ für die anderen Multiplikatoren, beim Bestimmen der sekundären Zwangsbedingungen ergeben, wenn wir statt $\widetilde{H}_n$ in (1.2.35) bzw. (1.2.36) die volle Hamilton-Funktion einsetzen. Die Gleichungen für die λ_α und ζ_μ lauten also

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left\{R_\beta', \widetilde{H}_n\right\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{Re}\left\{R_\beta', R_\alpha\right\}_{\mathbb{C}}\lambda_\alpha + \mathrm{Re}\left\{R_\beta', S_\mu\right\}_{\mathbb{C}}\zeta_\mu &= 0, \\ \left\{Z_b', \widetilde{H}_n\right\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\left\{Z_b', R_\alpha\right\}_{\mathbb{C}}\lambda_\alpha + \mathrm{i}\left\{Z_b', S_\mu\right\}_{\mathbb{C}}\zeta_\mu &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Damit alle diese Gleichungen eine einheitliche Form bekommen, erweitern wir nochmal den Satz der Realitätsbedingungen, ohne den kompletten Satz aller Zwangsbedingungen zu verändern: Falls es unter den Gleichungen mit Z_b' noch solche gibt, die unabhängig von den oberen Gleichungen sind, so fügen wir zu den R_β' noch das entsprechende Z_α' oder $\mathrm{i}Z_\beta'$ hinzu, so daß schließlich alle Gleichungen von der Form der ersten Zeile von (1.2.38) sind.

Die so erhaltenen Gleichungen sind *alle* Bewegungsgleichungen für λ_α und ζ_μ. Da diese genau durch $\lambda_\alpha = \zeta_\mu = 0$ gelöst werden, können wir zwei Schlüsse ziehen: Zum einen stellen wir fest, daß das durch (1.2.35) und (1.2.36) gegebene Verfahren zur Ermittlung der sekundären Zwangsbedingungen tatsächlich abbricht, denn sobald wir eine Bedingung erhalten, die nicht mehr mit allen anderen Zwangsbedingungen vertauscht, ergibt sich eine Gleichung der Form (1.2.38), welche durch $\lambda_\alpha = \zeta_\mu = 0$ gelöst wird. Also verschwindet der erste Term von (1.2.38) und durch (1.2.35) bzw. (1.2.36) wir keine neue Bedingung induziert.

Zum anderen muß es mindestens so viele Gleichungen geben wie Unbekannte, das heißt die Matrix $\mathrm{Re}\left\{R_\beta', R_\alpha\right\}_{\mathbb{C}}$ hat maximalen Rang, gegeben durch die Anzahl der primären Realitätsbedingungen R_α.

Da diese einen maximalen Satz von N vertauschenden Funktionen enthalten, muß es unter den restlichen R_β' nochmal mindestens N Funktionen geben, die nicht mit diesen vertauschen. Betrachten wir nur diese $2N$ Funktionen und bezeichnen sie ab jetzt nur noch mit R_β ohne Strich. Dann hat auch die Matrix

$$C_{\beta\gamma} = \mathrm{Re}\left\{R_\beta, R_\gamma\right\}_{\mathbb{C}} = -\left\{\mathrm{Im}\, R_\beta, \mathrm{Im}\, R_\gamma\right\} \tag{1.2.39}$$

maximalen Rang und ist invertierbar.

Was können wir aus der Invertierbarkeit der Matrix $C_{\alpha\beta}$ schließen? Es ist (bis auf das Vorzeichen) die Matrix der Poisson-Klammern der Zwangsbedingungen $\mathrm{Im}\, R_\alpha \approx 0$. Wenn diese invertierbar ist, handelt es sich um einen Satz von Zwangsbedingungen zweiter Klasse. Durch Einführung von Dirac-Klammern können wir sie zu exakten Identitäten machen.

Die Dirac-Klammern sind definiert durch[7]

$$\left\{F, G\right\}_* = \left\{F, G\right\} + \left\{F, \mathrm{Im}\, R_\alpha\right\} C_{\alpha\beta}^{-1} \left\{\mathrm{Im}\, R_\beta, G\right\}, \tag{1.2.40}$$

für beliebige Phasenraumfunktionen F, G. Die wesentliche Eigenschaft der Dirac-Klammern ist, daß sie (schwach) verschwinden, wenn man sie auf die Zwangsbedingungen selbst anwendet, das heißt wir können auch innerhalb der Klammern $\mathrm{Im}\, R_\alpha = 0$ verwenden, welches nun eine exakte Gleichung ist, die den Phasenraum entsprechend verkleinert.[8]

Wir können uns jetzt der Frage zuwenden, ob bzw. wann diese Dirac-Klammern mit der holomorphen Klammern übereinstimmen. Eine notwendige Bedingung dafür bekommen wir, indem wir zunächst fordern, daß die Dirac-Klammern für die R_β selbst mit deren holomorphen Klammern übereinstimmen.

Definieren wir noch eine Matrix $D_{\beta\gamma}$ als Imaginärteil von $\left\{R_\beta, R_\gamma\right\}_{\mathbb{C}}$, so ist

$$\left\{R_\beta, R_\gamma\right\}_{\mathbb{C}} = C_{\beta\gamma} + \mathrm{i}D_{\beta\gamma}. \tag{1.2.41}$$

Für die Dirac-Klammer bekommen wir

$$\begin{aligned} \left\{R_\beta, R_\gamma\right\}_* &= \left\{R_\beta, R_\gamma\right\} + \left\{R_\beta, \mathrm{Im}\, R_\delta\right\} C_{\delta\varepsilon}^{-1} \left\{\mathrm{Im}\, R_\varepsilon, R_\gamma\right\} \\ &= 2\left\{R_\beta, R_\gamma\right\}_{\mathbb{C}} - \left\{R_\beta, R_\delta\right\}_{\mathbb{C}} C_{\delta\varepsilon}^{-1} \left\{R_\varepsilon, R_\gamma\right\}_{\mathbb{C}} \\ &= 2\left(C_{\beta\gamma} + \mathrm{i}D_{\beta\gamma}\right) - \left(C_{\beta\delta} + \mathrm{i}D_{\beta\delta}\right) C_{\delta\varepsilon}^{-1} \left(C_{\varepsilon\gamma} + \mathrm{i}D_{\varepsilon\gamma}\right) \\ &= C_{\beta\gamma} + \left(DC^{-1}D\right)_{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{1.2.42}$$

Dies ist offenbar reell, das heißt es kann nur dann mit den holomorphen Poisson-Klammern übereinstimmen, wenn diese auch reell sind, also $D_{\beta\gamma} = 0$ ist. Man beachte, daß dies nur modulo der Zwangsbedingungen zweiter Klasse gelten muß, die ja nun als exakte Gleichungen gelten. $D_{\beta\gamma} = 0$ bedeutet also nichts anderes, als daß die holomorphen Klammern der R_β selbst wieder *reelle* Funktionen der R_β sind.

[7] Man kann einwenden, daß diese noch nicht alle Zwangsbedingungen zweiter Klasse sind und die Dirac-Klammern erst durch Summation über alle solchen Bedingungen in (1.2.40) gegeben sind. Das ist zwar richtig, man kann sich aber überlegen, daß Dirac-Klammern auch schrittweise bestimmt werden können, indem man erst einige Bedingungen zweiter Klasse eliminiert. Wenn dann immer noch solche existieren, also wenn es noch Bedingungen gibt, die unter diesen neuen Klammen nicht schwach vertauschen, kann man ausgehend von diesen Klammern als "Poisson"-Klammern nach (1.2.40) wieder neue Dirac-Klammern definieren, bis man schließlich zu den "endgültigen" Dirac-Klammern gelangt, die mit denen identisch sind, die man bekommt, wenn man gleich alle Zwangsbedingungen zweiter Klasse berücksichtigt.

[8] Man beachte, das dies nichts mit der Einschränkung des Phasenraums auf den physikalischen Phasenraum durch Zwangsbedingungen erster Klasse zu tun hat [2].

Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend dafür, daß die holomorphen Klammern mit den Dirac-Klammern übereinstimmen. Wenn nämlich $\{R_\beta, R_\gamma\}_{\mathbb{C}} = C_{\beta\gamma}$ invertierbar ist, so bilden die R_β ein vollständiges System von Funktionen auf dem Phasenraum, das heißt jede holomorphe Funktion $F[z,w]$ läßt sich als Funktion der R_β darstellen. Um das zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe eine Funktion $G[\{R_\beta\}]$, die auf dem Phasenraum identisch verschwindet. Dann verschwindet natürlich auch die Klammer mit jeder beliebigen Funktion und es gilt

$$\{G, R_\gamma\}_{\mathbb{C}} = \frac{\partial G}{\partial R_\beta} C_{\beta\gamma} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial G}{\partial R_\beta} = 0. \tag{1.2.43}$$

G ist also eine konstante Funktion und somit selbst identisch Null. Damit haben wir gezeigt, daß die R_β unabhängig sind. Da wir zur Konstruktion der Matrix C in (1.2.39) genau $2N$ Stück aus den Realitätsbedingungen R'_β ausgewählt hatten, bilden die R_β ein vollständiges System von Phasenraumfunktionen.[9] Damit haben wir aber auch gezeigt, daß für alle holomorphen Funktionen F, G gilt

$$\{F, G\}_{\mathbb{C}} = \{F, G\}_*, \tag{1.2.44}$$

denn wir können F und G als Funktionen der R_β schreiben.

Außerdem können wir jede (nicht-holomorphe) Phasenraumfunktion als holomorphe Funktion von R_β und R^*_β schreiben. Nun ist $R_\beta = R^*_\beta$ aber eine Zwangsbedingung zweiter Klasse, die wir als exakte Gleichung verwenden können. Es gibt also zu jeder Phasenraumfunktion $F[z, w, z^*, w^*]$ eine holomorphe Funktion $\widetilde{F}[z,w]$, die bis auf Zwangsbedingungen zweiter Klasse mit F übereinstimmt, und es genügt, die Dirac-Klammern für holomorphe Phasenraumfunktionen zu kennen.

Um zu der üblichen Formulierung von Realitätsbedingungen zurückkehren, betrachten wir die speziellen nicht-holomorphen Funktionen z^*_i und w^*_i. Auch für sie gilt, daß es holomorphe Funktionen $z^*_i[z,w]$ und $w^*_i[z,w]$ gibt, die diesen modulo den $\operatorname{Im} R_\beta$ entsprechen. Wir können dann die Realitätsbedingungen als $z^*_i = z^*_i[z,w]$ und $w^*_i = w^*_i[z,w]$ schreiben, und in dieser Form werden sie auch in Zusammenhang mit Ashtekars Variablen gewöhnlich formuliert.

Wenn wir diese Funktionen kennen, können wir auch Klammern zwischen z, w und deren konjugierten Größen angeben. Es gilt dann

$$\{z_i, z^*_j\}_* = \frac{\partial z^*_j}{\partial w_i}, \quad \{w_i, z^*_j\}_* = -\frac{\partial z^*_j}{\partial z_i} \quad \text{etc.} \tag{1.2.45}$$

Als letztes wollen wir noch den Zusammenhang zwischen der holomorphen Hamilton-Funktion $\widetilde{H}_n[z,w]$ und der "echten" Hamilton-Funktion untersuchen, die wir in (1.2.26) definiert hatten. Wir wissen bereits, daß $\widetilde{H}_n$ die Bewegungsgleichungen erzeugt. Die zweite Bedeutung der Hamilton-Funktion ist die der Energie. Sie ist auf den physikalischen Phasenraum durch $\operatorname{Re}\widetilde{H}_0[z,w]$ gegeben und wir wollen auch sie als holomorphe Funktion darstellen.

[9] Alle übrigen R'_γ können wir, wie wir gleich sehen werden, als holomorphe Funktionen schreiben, indem wir $R_\beta = R^*_\beta$ benutzen, so daß sie zu Zwangsbedingungen Z'_b werden.

Wegen der Vollständigkeit der R_β können wir natürlich auch $\widetilde{H}_n$ als Funktion der R_β schreiben, und wir spalten diese Funktion wieder in ihren Real- und Imaginärteil auf, also $\widetilde{H}_n = F_1[\{R_\beta\}] + \mathrm{i}F_2[\{R_\beta\}]$, wobei F_1 und F_2 reelle Funktionen sind, die natürlich noch von den n_a abhängen, soweit sie nicht durch die Gleichungen $\operatorname{Im} S_\nu = 0$ eingeschränkt sind.

Nun waren die sekundären Realitätsbedingungen so konstruiert, daß für alle R_β gilt

$$0 \approx \operatorname{Im}\{R_\beta, \widetilde{H}_n\}_{\mathbb{C}} = C_{\beta\gamma}\frac{\partial F_2}{\partial R_\gamma}, \tag{1.2.46}$$

wobei wir verwendet haben, daß $C_{\beta\gamma}$ reell ist und F_1 und F_2 reelle Funktionen sind. Da $C_{\beta\gamma}$ invertierbar ist, folgt daraus, daß F_2 (auf den physikalischen Phasenraum) konstant ist. Da $\widetilde{H}_n$ ohnehin nur bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt war, können wir demnach das c in (1.2.25) so wählen, daß

$$\widetilde{H}_0 + \mathrm{i}c \approx \widetilde{H}_n + \mathrm{i}c \approx \operatorname{Re}(\widetilde{H}_n + \mathrm{i}c) \approx \operatorname{Re}\widetilde{H}_0 \tag{1.2.47}$$

wird. $\widetilde{H}_0$ ist also bis auf eine Konstante reell und stimmt (schwach) mit der echten Hamilton-Funktion überein. Da auch diese stets nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, besteht der einzige Unterschied zum reellen Formalismus darin, daß diese Konstante für $\widetilde{H}_0$ beliebig komplex ist.

Quantisierung

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Zwangsbedingungen $Z_a \approx 0$ solche erster Klasse sind, also untereinander schwach vertauschen. Wäre dies nicht der Fall, müßten wir, wie schon erwähnt, nochmal zu neuen Dirac-Klammern übergehen und könnten dann einige der Variablen z_i und w_i eliminieren, so daß schließlich alle verbleibenden Zwangsbedingungen erster Klasse sind.

Die üblichen Probleme der Operatorordnung oder Anomalien beim Übergang zur Quantentheorie sollen uns hier nicht beschäftigen. Wir werden nur die Besonderheiten betrachen, die durch die "holomorphe Darstellung" in der Quantisierung auftreten.

Eine Operatordarstellung muß die folgenden Eigenschaften haben: Sie sollte jeder Phasenraumfunktion F einen Operator $\widehat{F}$ zuordnen, wobei die Zwangsbedingungen zweiter Klasse als Operator-Identitäten gelten und die Kommutatoren durch das $(-\mathrm{i})$-fache der Dirac-Klammern gegeben sind. Außerdem sollten den reellen Funktionen hermitesche Operatoren zugeordnet werden. Tatsächlich ist dies zunächst keine Bedingung, die wir an die Operatoren selbst stellen müssen; statt dessen wird sie das Skalarprodukt bestimmen. Stellen wir sie also zunächst zurück.

Wenn wir die z-Darstellung wählen, so sind die Operatoren

$$\widehat{z}_i = z_i, \quad \widehat{w}_i = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z_i}, \tag{1.2.48}$$

wobei beide auf holomorphe Wellenfunktionen $\Psi[z]$ wirken. Soweit ist das nichts anderes als die übliche holomorphe Darstellung, zum Beispiel für ein Dirac-Fermion χ, dessen Impuls $\bar{\chi}$ durch den Operator $\mathrm{i}\partial/\partial\chi$ dargestellt wird. Nun besteht aber zwischen diesen beiden Operatoren nicht nur die Vertauschungsrelation, sondern der Impuls ist auch das ($\mathrm{i}\gamma_0$-fache des) komplex konjugierten Feldes, und diese Relation soll sich auf die Operatoren übertragen, das heißt die Operatoren sollen zueinander hermitesch konjugiert sein.

In unserem etwas allgemeineren Fall sind die den Funktionen z_i^* und w_i^* zugeordneten Operatoren gegeben durch

$$\widehat{z}_i^* = z_i^*\Big[z, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\Big], \quad \widehat{w}_i^* = w_i^*\Big[z, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\Big], \tag{1.2.49}$$

mit den oben eingeführen holomorphen Funktionen $z_i^*[z,w]$ und $w_i^*[z,w]$. Nun sollen sich diese Beziehungen auf die Operatoren übertragen, es soll also $\widehat{z}_i^\dagger = z_i^*[\widehat{z},\widehat{w}]$ sein. Eine etwas andere Schreibweise für diese Bezeihungen ist

$$\widehat{R}_\beta = \widehat{R}_\beta^\dagger. \tag{1.2.50}$$

Der adjungierte Operator $\widehat{R}_\beta^\dagger$ ist aber erst definiert, wenn wir ein Skalarprodukt haben, und in Abschnitt 1 hatten wir gesehen, daß ein solches nur auf dem physikalischen Zustandsraum existieren kann. Wenn die $R_\beta[z,w]$ keine Observablen sind, existiert der adjungierte Operator davon nicht und die Gleichung (1.2.50) macht gar keinen Sinn. Das wird in den Diskussionen über die Realitätsbedingungen zum Beispiel der Gravitation in Ashtekars Variablen oft übersehen: Man kann nicht verlangen, daß $\widehat{A}^\dagger$ eine bestimmte Funktion von Ashtekars Zusammenhang $\widehat{A}$ und dem kanonisch konjugierten Dreibein ist, denn $\widehat{A}^\dagger$ existiert nicht.

Um die Bedingungen an das Skalarprodukt zu formulieren, müssen wir uns auf die Observablen beschränken. Sei also $\mathcal{O}[z,w]$ eine Observable, die wir als holomorphe Funktion geschrieben haben. Dann ist

$$\{\mathcal{O}, Z_a\}_{\mathbb{C}} \approx 0 \tag{1.2.51}$$

für alle Zwangsbedingungen erster Klasse Z_a. Mit $\mathcal{O}$ ist nun auch $\mathcal{O}^*$ eine Observable. Das kann man wie folgt zeigen: Statt Z_a bilden auch Z_a^* einen vollständigen Satz von Zwangsbedingungen erster Klasse (weil $Z_a = 0 \Leftrightarrow Z_a^* = 0$, beide Formulierungen also den selben physikalischen Phasenraum definieren). Spalten wir sowohl $\mathcal{O} = F + \mathrm{i}G$ als auch $Z_a = X_a + \mathrm{i}Y_a$ in ihren formalen Real und Imaginärteil auf, wobei F, G, X_a, Y_a reelle Funktionen der R_β sind, so gilt

$$\{\mathcal{O}, Z_a\}_{\mathbb{C}} = \{F, X_a\}_{\mathbb{C}} - \{G, Y_a\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\{F, Y_a\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\{G, X_a\}_{\mathbb{C}} \approx 0 \tag{1.2.52}$$

und

$$\{\mathcal{O}, Z_a^*\}_{\mathbb{C}} = \{F, X_a\}_{\mathbb{C}} + \{G, Y_a\}_{\mathbb{C}} - \mathrm{i}\{F, Y_a\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\{G, X_a\}_{\mathbb{C}} \approx 0 \tag{1.2.53}$$

Außerdem wissen wir, daß Klammern von reellen Funktionen wieder reelle Funktionen sind. Wir können dann die beiden Gleichungen addieren bzw. subtrahieren und sehen, daß F und G ebenfalls Observable sind und damit natürlich auch $\mathcal{O}^* = F - \mathrm{i}G$. Damit können wir die Forderung an das Skalarprodukt stellen: Für jede Observable muß gelten

$$\widehat{\mathcal{O}}^* = \widehat{\mathcal{O}}^\dagger. \tag{1.2.54}$$

Den physikalischen Zustandsraum selbst können wir aber ermitteln, ohne die Realitätsbedingungen bzw. die Konjugations-Relationen zu kennen. $\Psi[z]$ ist nämlich genau dann ein physikalischer Zustand, wenn er von den Zwangsbedingungen annihiliert wird, das heißt es muß

$$\widehat{Z}_a\,\Psi[z] = 0 \tag{1.2.55}$$

sein für alle $\widehat{Z}_a$. Da alle Zwangsbedingungen bereits als holomorphe Funktionen von z und w gegeben sind, benötigen wir zur Definition des physikalischen Zustandsraumes die Realitätsbedingungen R_β bzw. die Funktionen $z_i^*[z,w]$ und $w_i^*[z,w]$ nicht. Dasselbe gilt auch für den Hamilton-Operator. Wir hatten gesehen, daß er auf dem physikalischen Phasenraum (bis auf eine Konstante) durch $\widetilde{H}_0[z,w]$ gegeben ist, also ist der zugehörige Operator

$$\widehat{H}_0 = \widetilde{H}_0\Big[z, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\Big]. \tag{1.2.56}$$

Allerdings kennen wir durch diese Konstruktion den physikalischen Zustandsraum noch nicht vollständig, denn wie beim harmonischen Oszillator erhalten wir zunächst einen zu großen Raum, der durch die Forderung nach Normierbarkeit der Zustände eingeschränkt werden muß. Natürlich können wir diese Forderung erst stellen, nachdem wir ein Skalarprodukt definiert haben.

Der anfängliche Erfolg der kanonischen Formulierung der Gravitation in Ashtekars Variablen liegt daher wohl im wesentlichen darin begründet, daß dieser Zugang die Probleme in einer geschickten Reihenfolge angeht: Die zuerst zu lösenden Aufgaben wie Quantendarstellung der Operatoren und Zwangsbedingungen etc. werden durch die neuen Variablen erleichtert, während die "späteren" Probleme der kanonischen Quantisierung, etwa das finden eines Skalarproduktes, eher erschwert werden. Wir werden dieses Problem am Ende von Kapitel II aufgreifen und einige Hinweise darauf finden, daß genau an dieser Stelle möglicherweise alle Probleme des metrischen Formalismus wieder auftauchen.

3. Nichtlineare Sigmamodelle

Im Rahmen der dreidimensionalen Gravitation und Supergravitation werden sehr spezielle Materiefelder auftreten, sogenannte nichtlineare Sigmamodelle. Im allgemeinen bezeichnet man damit Feldtheorien, in denen das Feld keine Abbildung der Raumzeit in einen Vektorraum ist, sondern der "Targetraum" eine Mannigfaltigkeit ist. In unserem Fall wird diese Mannigfaltigkeit noch weitere Strukturen tragen, so werden wir es mit einer Lie-Gruppe bzw. einem Coseträum, also einer Menge von Äquivalenzklassen von Elementen einer Lie-Gruppe, zu tun haben.

In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren beschreiben, mit dem wir die kanonische Behandlung eines solchen Systems durchführen können.[10] Die naheliegende Methode würde darin bestehen, auf dem Targetraum Koordinaten einzuführen und diese als Felder zu betrachten,

[10] Einen etwas anderen Zugang findet man in [33]. Der hier verwendete Formalismus wurde in [34] entwickelt.

Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend dafür, daß die holomorphen Klammern mit den Dirac-Klammern übereinstimmen. Wenn nämlich $\{R_\beta, R_\gamma\}_\mathbb{C} = C_{\beta\gamma}$ invertierbar ist, so bilden die R_β ein vollständiges System von Funktionen auf dem Phasenraum, das heißt jede holomorphe Funktion $F[z,w]$ läßt sich als Funktion der R_β darstellen. Um das zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe eine Funktion $G[\{R_\beta\}]$, die auf dem Phasenraum identisch verschwindet. Dann verschwindet natürlich auch die Klammer mit jeder beliebigen Funktion und es gilt

$$\{G, R_\gamma\}_\mathbb{C} = \frac{\partial G}{\partial R_\beta} C_{\beta\gamma} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial G}{\partial R_\beta} = 0. \tag{1.2.43}$$

G ist also eine konstante Funktion und somit selbst identisch Null. Damit haben wir gezeigt, daß die R_β unabhängig sind. Da wir zur Konstruktion der Matrix C in (1.2.39) genau $2N$ Stück aus den Realitätsbedingungen R'_β ausgewählt hatten, bilden die R_β ein vollständiges System von Phasenraumfunktionen.[9] Damit haben wir aber auch gezeigt, daß für alle holomorphen Funktionen F, G gilt

$$\{F, G\}_\mathbb{C} = \{F, G\}_*, \tag{1.2.44}$$

denn wir können F und G als Funktionen der R_β schreiben.

Außerdem können wir jede (nicht-holomorphe) Phasenraumfunktion als holomorphe Funktion von R_β und R^*_β schreiben. Nun ist $R_\beta = R^*_\beta$ aber eine Zwangsbedingung zweiter Klasse, die wir als exakte Gleichung verwenden können. Es gibt also zu jeder Phasenraumfunktion $F[z, w, z^*, w^*]$ eine holomorphe Funktion $\widetilde{F}[z, w]$, die bis auf Zwangsbedingungen zweiter Klasse mit F übereinstimmt, und es genügt, die Dirac-Klammern für holomorphe Phasenraumfunktionen zu kennen.

Um zu der üblichen Formulierung von Realitätsbedingungen zurückkehren, betrachten wir die speziellen nicht-holomorphen Funktionen z^*_i und w^*_i. Auch für sie gilt, daß es holomorphe Funktionen $z^*_i[z,w]$ und $w^*_i[z,w]$ gibt, die diesen modulo den $\operatorname{Im} R_\beta$ entsprechen. Wir können dann die Realitätsbedingungen als $z^*_i = z^*_i[z,w]$ und $w^*_i = w^*_i[z,w]$ schreiben, und in dieser Form werden sie auch in Zusammenhang mit Ashtekars Variablen gewöhnlich formuliert.

Wenn wir diese Funktionen kennen, können wir auch Klammern zwischen z, w und deren konjugierten Größen angeben. Es gilt dann

$$\{z_i, z^*_j\}_* = \frac{\partial z^*_j}{\partial w_i}, \quad \{w_i, z^*_j\}_* = -\frac{\partial z^*_j}{\partial z_i} \quad \text{etc.} \tag{1.2.45}$$

Als letztes wollen wir noch den Zusammenhang zwischen der holomorphen Hamilton-Funktion $\widetilde{H}_n[z,w]$ und der "echten" Hamilton-Funktion untersuchen, die wir in (1.2.26) definiert hatten. Wir wissen bereits, daß $\widetilde{H}_n$ die Bewegungsgleichungen erzeugt. Die zweite Bedeutung der Hamilton-Funktion ist die der Energie. Sie ist auf den physikalischen Phasenraum durch $\operatorname{Re} \widetilde{H}_0[z,w]$ gegeben und wir wollen auch sie als holomorphe Funktion darstellen.

[9] Alle übrigen R'_γ können wir, wie wir gleich sehen werden, als holomorphe Funktionen schreiben, indem wir $R_\beta = R^*_\beta$ benutzen, so daß sie zu Zwangsbedingungen Z'_b werden.

Wegen der Vollständigkeit der R_β können wir natürlich auch $\widetilde{H}_n$ als Funktion der R_β schreiben, und wir spalten diese Funktion wieder in ihren Real- und Imaginärteil auf, also $\widetilde{H}_n = F_1[\{R_\beta\}] + \mathrm{i} F_2[\{R_\beta\}]$, wobei F_1 und F_2 reelle Funktionen sind, die natürlich noch von den n_a abhängen, soweit sie nicht durch die Gleichungen $\operatorname{Im} S_\nu = 0$ eingeschränkt sind.

Nun waren die sekundären Realitätsbedingungen so konstruiert, daß für alle R_β gilt

$$0 \approx \operatorname{Im}\{R_\beta, \widetilde{H}_n\}_\mathbb{C} = C_{\beta\gamma} \frac{\partial F_2}{\partial R_\gamma}, \tag{1.2.46}$$

wobei wir verwendet haben, daß $C_{\beta\gamma}$ reell ist und F_1 und F_2 reelle Funktionen sind. Da $C_{\beta\gamma}$ invertierbar ist, folgt daraus, daß F_2 (auf den physikalischen Phasenraum) konstant ist. Da $\widetilde{H}_n$ ohnehin nur bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt war, können wir demnach das c in (1.2.25) so wählen, daß

$$\widetilde{H}_0 + \mathrm{i}c \approx \widetilde{H}_n + \mathrm{i}c \approx \operatorname{Re}(\widetilde{H}_n + \mathrm{i}c) \approx \operatorname{Re} \widetilde{H}_0 \tag{1.2.47}$$

wird. $\widetilde{H}_0$ ist also bis auf eine Konstante reell und stimmt (schwach) mit der echten Hamilton-Funktion überein. Da auch diese stets nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, besteht der einzige Unterschied zum reellen Formalismus darin, daß diese Konstante für $\widetilde{H}_0$ beliebig komplex ist.

Quantisierung

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Zwangsbedingungen $Z_a \approx 0$ solche erster Klasse sind, also untereinander schwach vertauschen. Wäre dies nicht der Fall, müßten wir, wie schon erwähnt, nochmal zu neuen Dirac-Klammern übergehen und könnten dann einige der Variablen z_i und w_i eliminieren, so daß schließlich alle verbleibenden Zwangsbedingungen erster Klasse sind.

Die üblichen Probleme der Operatorordnung oder Anomalien beim Übergang zur Quantentheorie sollen uns hier nicht beschäftigen. Wir werden nur die Besonderheiten betrachen, die durch die "holomorphe Darstellung" in der Quantisierung auftreten.

Eine Operatordarstellung muß die folgenden Eigenschaften haben: Sie sollte jeder Phasenraumfunktion F einen Operator $\widehat{F}$ zuordnen, wobei die Zwangsbedingungen zweiter Klasse als Operator-Identitäten gelten und die Kommutatoren durch das $(-\mathrm{i})$-fache der Dirac-Klammern gegeben sind. Außerdem sollten den reellen Funktionen hermitesche Operatoren zugeordnet werden. Tatsächlich ist dies zunächst keine Bedingung, die wir an die Operatoren selbst stellen müssen; statt dessen wird sie das Skalarprodukt bestimmen. Stellen wir sie also zunächst zurück.

Wenn wir die z-Darstellung wählen, so sind die Operatoren

$$\widehat{z}_i = z_i, \quad \widehat{w}_i = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z_i}, \tag{1.2.48}$$

wobei beide auf holomorphe Wellenfunktionen $\Psi[z]$ wirken. Soweit ist das nichts anderes als die übliche holomorphe Darstellung, zum Beispiel für ein Dirac-Fermion χ, dessen Impuls $\bar{\chi}$ durch den Operator $\mathrm{i}\partial/\partial\chi$ dargestellt wird. Nun besteht aber zwischen diesen beiden Operatoren nicht nur die Vertauschungsrelation, sondern der Impuls ist auch das ($\mathrm{i}\gamma_0$-fache des) komplex konjugierten Feldes, und diese Relation soll sich auf die Operatoren übertragen, das heißt die Operatoren sollen zueinander hermitesch konjugiert sein.

In unserem etwas allgemeineren Fall sind die den Funktionen z_i^* und w_i^* zugeordneten Operatoren gegeben durch

$$\widehat{z}_i^* = z_i^*\Big[z, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\Big], \quad \widehat{w}_i^* = w_i^*\Big[z, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\Big], \tag{1.2.49}$$

mit den oben eingeführen holomorphen Funktionen $z_i^*[z,w]$ und $w_i^*[z,w]$. Nun sollen sich diese Beziehungen auf die Operatoren übertragen, es soll also $\widehat{z}_i^\dagger = z_i^*[\widehat{z},\widehat{w}]$ sein. Eine etwas andere Schreibweise für diese Bezeihungen ist

$$\widehat{R}_\beta = \widehat{R}_\beta^\dagger. \tag{1.2.50}$$

Der adjungierte Operator $\widehat{R}_\beta^\dagger$ ist aber erst definiert, wenn wir ein Skalarprodukt haben, und in Abschnitt 1 hatten wir gesehen, daß ein solches nur auf dem physikalischen Zustandsraum existieren kann. Wenn die $R_\beta[z,w]$ keine Observablen sind, existiert der adjungierte Operator davon nicht und die Gleichung (1.2.50) macht gar keinen Sinn. Das wird in den Diskussionen über die Realitätsbedingungen zum Beispiel der Gravitation in Ashtekars Variablen oft übersehen: Man kann nicht verlangen, daß $\widehat{A}^\dagger$ eine bestimmte Funktion von Ashtekars Zusammenhang $\widehat{A}$ und dem kanonisch konjugierten Dreibein ist, denn $\widehat{A}^\dagger$ existiert nicht.

Um die Bedingungen an das Skalarprodukt zu formulieren, müssen wir uns auf die Observablen beschränken. Sei also $\mathcal{O}[z,w]$ eine Observable, die wir als holomorphe Funktion geschrieben haben. Dann ist

$$\big\{\mathcal{O}, Z_a\big\}_{\mathbb{C}} \approx 0 \tag{1.2.51}$$

für alle Zwangsbedingungen erster Klasse Z_a. Mit $\mathcal{O}$ ist nun auch $\mathcal{O}^*$ eine Observable. Das kann man wie folgt zeigen: Statt Z_a bilden auch Z_a^* einen vollständigen Satz von Zwangsbedingungen erster Klasse (weil $Z_a = 0 \Leftrightarrow Z_a^* = 0$, beide Formulierungen also den selben physikalischen Phasenraum definieren). Spalten wir sowohl $\mathcal{O} = F + \mathrm{i}G$ als auch $Z_a = X_a + \mathrm{i}Y_a$ in ihren formalen Real und Imaginärteil auf, wobei F, G, X_a, Y_a reelle Funktionen der R_β sind, so gilt

$$\big\{\mathcal{O}, Z_a\big\}_{\mathbb{C}} = \big\{F, X_a\big\}_{\mathbb{C}} - \big\{G, Y_a\big\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\big\{F, Y_a\big\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\big\{G, X_a\big\}_{\mathbb{C}} \approx 0 \tag{1.2.52}$$

und

$$\big\{\mathcal{O}, Z_a^*\big\}_{\mathbb{C}} = \big\{F, X_a\big\}_{\mathbb{C}} + \big\{G, Y_a\big\}_{\mathbb{C}} - \mathrm{i}\big\{F, Y_a\big\}_{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\big\{G, X_a\big\}_{\mathbb{C}} \approx 0 \tag{1.2.53}$$

Außerdem wissen wir, daß Klammern von reellen Funktionen wieder reelle Funktionen sind. Wir können dann die beiden Gleichungen addieren bzw. subtrahieren und sehen, daß F und G ebenfalls Observable sind und damit natürlich auch $\mathcal{O}^* = F - \mathrm{i}G$. Damit können wir die Forderung an das Skalarprodukt stellen: Für jede Observable muß gelten

$$\widehat{\mathcal{O}}^* = \widehat{\mathcal{O}}^\dagger. \tag{1.2.54}$$

Den physikalischen Zustandsraum selbst können wir aber ermitteln, ohne die Realitätsbedingungen bzw. die Konjugations-Relationen zu kennen. $\Psi[z]$ ist nämlich genau dann ein physikalischer Zustand, wenn er von den Zwangsbedingungen annihiliert wird, das heißt es muß

$$\widehat{Z}_a\,\Psi[z] = 0 \tag{1.2.55}$$

sein für alle $\widehat{Z}_a$. Da alle Zwangsbedingungen bereits als holomorphe Funktionen von z und w gegeben sind, benötigen wir zur Definition des physikalischen Zustandsraumes die Realitätsbedingungen R_β bzw. die Funktionen $z_i^*[z,w]$ und $w_i^*[z,w]$ nicht. Dasselbe gilt auch für den Hamilton-Operator. Wir hatten gesehen, daß er auf dem physikalischen Phasenraum (bis auf eine Konstante) durch $\widetilde{H}_0[z,w]$ gegeben ist, also ist der zugehörige Operator

$$\widehat{H}_0 = \widetilde{H}_0\Big[z, \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\Big]. \tag{1.2.56}$$

Allerdings kennen wir durch diese Konstruktion den physikalischen Zustandsraum noch nicht vollständig, denn wie beim harmonischen Oszillator erhalten wir zunächst einen zu großen Raum, der durch die Forderung nach Normierbarkeit der Zustände eingeschränkt werden muß. Natürlich können wir diese Forderung erst stellen, nachdem wir ein Skalarprodukt definiert haben.

Der anfängliche Erfolg der kanonischen Formulierung der Gravitation in Ashtekars Variablen liegt daher wohl im wesentlichen darin begründet, daß dieser Zugang die Probleme in einer geschickten Reihenfolge angeht: Die zuerst zu lösenden Aufgaben wie Quantendarstellung der Operatoren und Zwangsbedingungen etc. werden durch die neuen Variablen erleichtert, während die "späteren" Probleme der kanonischen Quantisierung, etwa das finden eines Skalarproduktes, eher erschwert werden. Wir werden dieses Problem am Ende von Kapitel II aufgreifen und einige Hinweise darauf finden, daß genau an dieser Stelle möglicherweise alle Probleme des metrischen Formalismus wieder auftauchen.

3. Nichtlineare Sigmamodelle

Im Rahmen der dreidimensionalen Gravitation und Supergravitation werden sehr spezielle Materiefelder auftreten, sogenannte nichtlineare Sigmamodelle. Im allgemeinen bezeichnet man damit Feldtheorien, in denen das Feld keine Abbildung der Raumzeit in einen Vektorraum ist, sondern der "Targetraum" eine Mannigfaltigkeit ist. In unserem Fall wird diese Mannigfaltigkeit noch weitere Strukturen tragen, so werden wir es mit einer Lie-Gruppe bzw. einem Cosetraum, also einer Menge von Äquivalenzklassen von Elementen einer Lie-Gruppe, zu tun haben.

In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren beschreiben, mit dem wir die kanonische Behandlung eines solchen Systems durchführen können.[10] Die naheliegende Methode würde darin bestehen, auf dem Targetraum Koordinaten einzuführen und diese als Felder zu betrachten,

[10] Einen etwas anderen Zugang findet man in [33]. Der hier verwendete Formalismus wurde in [34] entwickelt.

ihre Impulse zu bestimmen etc. Auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit ist das auch die einzige Möglichkeit, jedoch geht dadurch jede zusätzliche Struktur, zum Beispiel eine Gruppenmultiplikation, verloren, denn selbst in geschickt gewählten Koordinaten ergeben sich sehr komplizierte Formeln für die Multiplikation.

Wir werden explizit ausnutzen, daß es für die für uns interessanten Lie-Gruppen stets eine Matrixdarstellung gibt und in gewissem Sinne diese als (globale!) Koordinaten benutzen. Natürlich sind das keine richtigen Koordinaten im Sinne eines Satzen von Karten, die die Mannigfaltigkeit lokal auf einen $\mathbb{R}^n$ abbildet. Ein möglicher Ansatz wäre, in einer gebenen Theorie, die ein Gruppen-wertiges Feld enthält, dieses durch ein Matrixfeld zu ersetzen und dann geeignete Zwangsbedingungen hinzuzufügen, die das Feld auf die Gruppe einschränken. Das ist zwar im Prinzip möglich, führt jedoch für höhere Gruppen auf gewisse Schwierigkeiten, denn man muß die explizite Form der Einschränkungen kennen.

Wir werden daher zunächst die Mannigfaltigkeits-Eigenschaften des Targetraumes ausnutzen, um eine kanonische Formulierung durchzuführen, und danach auf dem Phasenraum die Matrixdarstellung verwenden, um jegliches Auftreten von Koordinaten in den Darstellungen von Poisson-Klammern oder Operatoren zu vermeiden.

Wir betrachten also ein Feld φ, daß eine Raumzeit $\mathcal{M}$ in eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}$ abbildet. Von der Raumzeit wollen wir hier annehmen, daß sie flach ist und ihre Metrik durch $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ gegeben ist. Mit φ^m bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes $\varphi \in \mathcal{G}$. Eine Wirkung ist dann gegeben als ein Integral über eine von φ und dessen Ableitungen $\partial_\mu \varphi^m$ abhängige Lagrange-Dichte

$$I[\varphi] = \int \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\ \mathcal{L}[\varphi, \partial_\mu\varphi]. \tag{1.3.1}$$

Ein Standardbeispiel erhält man mit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}$ mit Metrik G_{mn} und Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu} G_{mn} \partial_\mu \varphi^m \partial_\nu \varphi^n. \tag{1.3.2}$$

Wir wollen uns aber nicht auf diese Form der Wirkung festlegen. Wenn wir das Modell kanonisch behandeln wollen, müssen wir zunächst die Impulse der Felder φ^m bestimmen. Sie sind

$$p_m = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^m}, \tag{1.3.3}$$

wobei L das Integral von $\mathcal{L}$ über den Raum $\mathcal{N} = \mathbb{R}^{d-1}$ ist und der Punkt die Ableitung nach der Zeitkoordinate bezeichnet, die wir t nennen. Für unser Beispiel ist

$$p_m = G_{mn}(\varphi)\,\dot{\varphi}^m. \tag{1.3.4}$$

Als Hamilton-Funktion bekommen wir

$$H = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\ (\dot{\varphi}^m p_m - \mathcal{L}), \tag{1.3.5}$$

und für das Beispiel

$$H = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\ \tfrac{1}{2}\big(p_m p_n G^{mn}(\varphi) + \eta^{ij} G_{mn}(\varphi)\partial_i\varphi^m \partial_j \varphi^n\big), \tag{1.3.6}$$

wobei i, j über die $d-1$ räumlichen Koordinaten laufen und $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ ist. Der Phasenraum wird aufgespannt von den Koordinaten $\varphi^m(\boldsymbol{x})$ und den Kovektoren $p_m(\boldsymbol{x})$, ein Punkt im Phasenraum ist also eine Abbildung des Raumes in den Kotangentialraum $T_*\mathcal{G}$. Alle weiteren Größen, Zwangsbedingungen und Bewegungsgleichungen können wir daraus mit Hilfe der Poisson-Klammern

$$\{\varphi^m(\boldsymbol{x}), p_n(\boldsymbol{y})\} = \delta^m_n \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{1.3.7}$$

ableiten. In dieser Formulierung erkennen wir allerdings keine der Strukturen von $\mathcal{G}$ wieder: Die grundlegenden Klammern sind gegeben als solche einer (willkürlichen) Koordinate mit einem Kovektor.

Nun gibt es eine alternative Ableitung für die Hamilton-Funktion und die Poisson-Klammern, die sich für eine Gruppen-Mannigfaltigkeit als sehr nützlich erweisen wird. Dazu führen wir auf $\mathcal{G}$ ein Vielbein ein, das die Metrik durch

$$G^{mn} = E_A{}^m E_B{}^n \eta^{AB}, \quad G_{mn} = E_m{}^A E_n{}^B \eta_{AB} \tag{1.3.8}$$

parametrisiert. Die Konstruktion ist natürlich ganz analog zur Einführung des Vierbeins in der Gravitation (siehe Kapitel II, Abschnitt 1), wo wir die Raumzeit-Metrik durch ein Vierbein parametrisieren werden. Allerdings gibt es zwei wesentliche Unterschiede: Hier ist das Vielbein kein Feld auf der Raumzeit, sondern eines auf dem Targetraum, und außerdem ist es eine fest vorgegebene Struktur, also keine dynamische Variable.

Die "flache Metrik" η_{AB} ist hier eine beliebige konstante, symmetrische, invertierbare Matrix. Die "flachen Indizes" $_{A,B}$ laufen von 1 bis $\dim\mathcal{G}$ und können mit der flachen Metrik bzw. ihrem Inversen η^{AB} nach unten bzw. oben gebracht werden. $E_m{}^A$ ist das "inverse Vielbein", das heißt

$$E_m{}^A E_A{}^n = \delta^n_m. \tag{1.3.9}$$

Wir können nun die Lagrange-Funktion als Funktion des Feldes φ und den auf das Vielbein projezierten Ableitungen schreiben,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\varphi, P_\mu{}^A], \quad P_\mu{}^A = \partial_\mu \varphi^m E_m{}^A, \tag{1.3.10}$$

und daraus können wir die Hamilton-Funktion wie folgt ableiten. Wir definieren neue Impulse durch

$$P_A = \frac{\delta L}{\delta P_t^A} = E_A{}^m p_m. \tag{1.3.11}$$

Dann bilden wir die Hamilton-Funktion

$$H = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\ (P_t^A P_A - \mathcal{L}), \tag{1.3.12}$$

was, wenn man die Definition für $P_\mu{}^A$ einsetzt, mit der ursprünglichen Hamilton-Funktion übereinstimmt. Für unser Beispiel ist

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{AB}P_\mu{}^A P_\nu{}^B\,, \quad P_A = \eta_{AB}P_t^B$$

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, \tfrac{1}{2}\big(P_A P_B \eta^{AB} + \eta^{ij} P_i^A P_j^B \eta_{AB}\big). \tag{1.3.13}$$

Anscheinend sind die P_A und P_i^A bessere Phasenraumkoordinaten als φ^m und p_m, denn bereits in dem einfachen Beispiel wird aus der für eine allgemeine Metrik G_{mn} sehr komplizierten Hamilton-Funktion (1.3.6) eine homogene quadratische Funktion der P_A und P_i^A. Bei der Quantisierung eines solchen Modells ist es also möglicherweise sinnvoller, direkt Operatoren für diese Größen einzuführen statt für die ursprünglichen Felder φ^m und p_m. Allerdings sind die Vertauschungsrelationen nun ein wenig komplizierter, denn irgendwo muß ja die Nichtlinearität unseres Modells wieder auftauchen. Außerdem haben die neuen Phasenraum-Variablen noch einen kleinen Nachteil: Sie sind nicht vollständig. Wir können zwar von den neuen Impulsen auf die alten zurücktransformieren, die neuen Ortsvariablen P_i^A fixieren aber nur die räumlichen Ableitungen des Feldes φ. Wir müßten also noch das Feld an einem bestimmten Punkt oder etwas ähnliches hinzunehmen. Bei unserem Beispiel hat das keine Rolle gespielt, denn dort hing die Wirkung von Anfang an nur von den Ableitungen von φ ab. Dieses Problem wird uns aber nicht weiter stören, denn für eine allgemeine Mannigfaltigkeit werden wir ohnehin nicht viel mit den neuen Variablen anfangen können, für eine Gruppen-Mannigfaltigkeit jedoch werden wir noch bessere Variable finden.

Indem wir P_A und P_i^A als Funktionen der urprünglichen Orts- und Impulsvariablen auffassen und mit (1.3.7) deren Poisson-Klammern berechnen, finden wir

$$\begin{aligned}
\{P_A(\boldsymbol{x}), P_B(\boldsymbol{y})\} &= \Sigma_{AB}{}^C(\varphi(\boldsymbol{x}))P_C(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\
\{P_A(\boldsymbol{x}), P_i^B(\boldsymbol{y})\} &= \big(\delta_A^B\,\partial_i - \Sigma_{AC}{}^B(\varphi(\boldsymbol{x}))P_i^C(\boldsymbol{x})\big)\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\
\{P_i^A(\boldsymbol{x}), P_i^B(\boldsymbol{y})\} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Die Ableitung auf die Delta-Funktion wirkt hier wie im folgenden immer auf das erste Argument, hier also auf $\boldsymbol{x}$.

Anscheinend haben wir die Einfachheit der Hamilton-Funktion jetzt damit bezahlt, daß die Poisson-Klammern sehr kompliziert werden, denn auf der rechten Seite erscheinen die sogenannten Anholonomie-Koeffizienten auf $\mathcal{G}$, die die Abweichung der Vielbein-Basis von der Koordinaten-Basis messen. Sie sind definiert als

$$\Sigma_{AB}{}^C(\varphi) = 2\,E_{[A}{}^m E_{B]}{}^n\,\partial_m E_n{}^C = -2\,E_{[A}{}^m \partial_m E_{B]}{}^n\,E_n{}^C \tag{1.3.15}$$

wobei ∂_m die Ableitung nach φ^m bezeichnet. Versucht man, eine Darstellung dieser Algebra durch Operatoren zu finden, so scheint die einzig sinnvolle Wahl

$$\widehat{P}_i^A(\boldsymbol{x}) = \partial_i\varphi^m(\boldsymbol{x})E_m{}^A(\varphi(\boldsymbol{x})),$$

$$\widehat{P}_A(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}E_A{}^m(\varphi(\boldsymbol{x}))\frac{\delta}{\delta\varphi^m(\boldsymbol{x})} \tag{1.3.16}$$

zu sein, wobei beide auf Wellenfunktionale $\Psi[\varphi]$ wirken. Das gleiche bekämen wir, wenn wir einfach die ursprüngliche Algebra (1.3.7) quantisieren.

Für eine allgemeine Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}$ läßt sich nicht viel mehr erreichen. Man wählt gewöhnlich als ein am besten geeignetes Koordinatensystem Riemannsche Normalkoordinaten um ein frei gewähltes "Ursprungsfeld" $\varphi_0(\boldsymbol{x})$, das man als Hintergrundfeld bezeichnet, und entwickelt die Metrik um diesen Punkt in eine Potenzreihe, so daß man zu einer Wirkung gelangt, die einen Störungstheoretischen Zugang zur Quantentheorie erlaubt.[11]

Die Algebra (1.3.14) läßt sich stark vereinfachen, wenn $\mathcal{G}$ eine Lie-Gruppe ist. Dann können wir ein sehr spezielles Vielbein wählen, indem wir für $E_A{}^m$ die linksinvarianten Vektorfelder benutzen. Ein linksinvariantes Vektorfeld ist so definiert, daß es unter dem Diffeomorphismus $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}(\varphi) = \varphi_0 \cdot \varphi$, also unter Multiplikation von links mit einem konstanten Gruppenelement, in sich übergeht. Explizit gilt

$$E_A{}^m(\tilde{\varphi}(\varphi)) = E_A{}^n(\varphi)\frac{\partial\tilde{\varphi}^m(\varphi)}{\partial\varphi^n}. \tag{1.3.17}$$

Aus der allgemeinen Theorie der Lie-Gruppen wissen wir, daß immer $\dim\mathcal{G}$ solche Vektorfelder existieren und diese global definiert sind. Wir können sie also als Vielbein verwenden. Damit haben wir noch keine Metrik, denn wir kennen die flache Metrik η_{AB} noch nicht. Unabhängig davon können wir aber aus (1.3.17) schließen, daß die Metrik auch invariant unter Linksmultiplikation ist.

Wenn wir jetzt einen Anholonomie-Koeffizienten an der Stelle $\tilde{\varphi}$ berechnen, finden wir, daß

$$\Sigma_{AB}{}^C(\tilde{\varphi}(\varphi)) = \Sigma_{AB}{}^C(\varphi) = -f_{AB}{}^C \tag{1.3.18}$$

auf ganz $\mathcal{G}$ konstant ist, denn durch Multiplikation können wir jedes Gruppenelement auf jedes andere abbilden. Daß die $f_{AB}{}^C$ in der Tat die Strukturkonstanten der Gruppe sind, können wir direkt aus (1.3.15) ableiten, denn dort steht der Kommutator der Vektorfelder E_A und E_B, projeziert auf E_C.

Damit hat sich die Algebra (1.3.14) schon wesentlich vereinfacht, denn auf der rechten Seite erscheinen jetzt nur noch Struktur*konstanten* und die Klammern sind linear in den kanonischen Variablen P_A und P_i^A.

Nun gibt es auf einer Lie-Gruppe (bis auf Skalierungen) eine bevorzugte Metrik, die durch die Kontraktion zweier Strukturkonstanten gegeben ist.

$$\eta_{AB} = f_{AC}{}^D f_{BD}{}^C. \tag{1.3.19}$$

[11] Für die allgemeine Konstruktion von Normalkoordinaten siehe [5], Kapitel 11.6. Ein Beispiel für die Anwendung dieser sogenannten Hintergrund-Quantenfeld-Entwicklung auf die Quantisierung eines Sigmamodells auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit findet man in [35].

Die sich daraus ergebende Cartan-Killing-Metrik $G_{mn} = E_m{}^A E_n{}^B \eta_{AB}$ ist invariant unter links- und rechtsseitiger Multiplikation. Da sie nur für halbeinfache Gruppen invertierbar ist, wollen wir uns hier auf solche beschränken.

Es bleibt aber immer noch das Problem, daß die P_i^A den Konfigurationsraum nicht vollständig beschreiben, denn sie enthalten nur die Ableitungen der Felder. Aus der Linksinvarianz des Vielbeins folgt, daß sie invariant sind unter einer Multiplikation des Feldes $\varphi(\boldsymbol{x})$ von links mit einer Konstanten. Um dieses Problem zu überwinden, müssen wir irgendwelche Koordinaten auf $\mathcal{G}$ einführen. Wir benötigen diese aber nicht mehr, um Impulse oder Vertauschungrelationen zu definieren, sondern lediglich, um jede andere Funktion auf dem Phasenraum durch sie darstellen zu können. Und dazu ist eine Matrixdarstellung von $\mathcal{G}$ am besten geeignet, denn durch Sie geht die Gruppenstruktur nicht verloren.

Wählen wir also irgendeine Matrixdarstellung $\mathcal{V}(\varphi)$. Sie liefert uns gleichzeitig eine Darstellung für die Lie-Algebra von $\mathcal{G}$, deren Basis durch die Matrizen

$$Z_A = E_A{}^m(\varphi)\mathcal{V}^{-1}(\varphi)\partial_m \mathcal{V}(\varphi) \tag{1.3.20}$$

gegeben ist. Wieder folgt aus der Linksinvarianz von $E_A{}^m$, daß die rechte Seite dieser Gleichung gar nicht von φ abhängt, so daß die Definition überhaupt sinnvoll ist. Für den Matrix-Kommutator findet man dann

$$[Z_A, Z_B] = f_{AB}{}^C Z_C, \tag{1.3.21}$$

indem man die Definition von Z_A nach φ^n ableitet, mit $E_B{}^n$ multipliziert und in A,B antisymmetrisiert.

Die Matrix $\mathcal{V}$ ist eine bestimmte Funktion auf dem Phasenraum. Sie vertauscht mit allen Funktionen, die nicht von den Impulsen abhängen. Ihre Klammern mit den Impulsen sind

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}(\varphi(\boldsymbol{x})), P_A(\boldsymbol{y})\} &= \partial_m \mathcal{V}(\varphi(\boldsymbol{x}))\{\varphi^m(\boldsymbol{x}), P_A(\boldsymbol{y})\}\\ &= \partial_m \mathcal{V}(\varphi(\boldsymbol{x}))E_A{}^m(\varphi(\boldsymbol{x}))\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\ &= \mathcal{V}(\varphi(\boldsymbol{x}))Z_A\,\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{1.3.22}$$

Nun können wir aber jede Phasenraumfunktion als Funktion der P_A und $\mathcal{V}$ schreiben, vorausgesetzt, die Darstellung $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ ist injektiv. Wir können also $\mathcal{V}, P_A$ als Phasenraumkoordinaten betrachten, deren Klammern durch

$$\begin{aligned}\{P_A, P_B\} &= -f_{AB}{}^C P_C,\\ \{\mathcal{V}, P_A\} &= \mathcal{V}Z_A,\\ \{P_A, \mathcal{V}^{-1}\} &= Z_A\mathcal{V}^{-1}\end{aligned} \tag{1.3.23}$$

gegeben sind. Natürlich sind hier noch die räumlichen Delta-Funktionen zu ergänzen, die wir aber von nun an immer weglassen, wenn keine Ableitungen oder Nichtlokalitäten auftreten.

Für eine Gruppen-Mannigfaltigkeit nehmen die Vertauschungsrelationen in der Vielbein-Darstellung also eine sehr einfache Form an, die im Gegensatz zu (1.3.7) die Gruppenstruktur voll respektiert. Die Verwendung einer expliziten Matrixdarstellung vereinfacht zusätzlich die Klammern, denn nur dann ergibt das Produkt $\mathcal{V}Z_A$ eines Elementes der Gruppe mit einem der Algebra einen Sinn.

Natürlich können wir alle auftretenden Größen statt als Funktionen von φ auch als Funktionen von $\mathcal{V}$ schreiben. So bekommen wir etwa die $P_\mu{}^A$ aus der Entwicklung

$$\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu\mathcal{V} = P_\mu{}^A Z_A \quad\Rightarrow\quad P_\mu{}^A = \mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu\mathcal{V}Z_B)\tilde{\eta}^{AB}, \tag{1.3.24}$$

wobei $\tilde{\eta}^{AB}$ das Inverse der Spur-Metrik

$$\tilde{\eta}_{AB} = \mathrm{Tr}(Z_A Z_B) \tag{1.3.25}$$

ist, die sich von der Cartan-Killing-Metrik durch eine von der Darstellung abhängige Konstante für jede einfache Untergruppe von $\mathcal{G}$ unterscheiden kann. Für die adjungierte Darstellung ergibt sich $\eta_{AB} = \tilde{\eta}_{AB}$. Nehmen wir die räumlichen Komponenten P_i^A und bilden deren Klammern mit P_B, so bekommen wir tatsächlich die Ausdrücke (1.3.14) zurück.

Wählen wir die adjungierte Darstellung, so ist die Wirkung unseres Standardbeispiels

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{AB}P_\mu{}^A P_\nu^B = \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{AB}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu\mathcal{V}Z_A)\,\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\nu\mathcal{V}Z_B)\\ &= \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu\mathcal{V}\,\mathcal{V}^{-1}\partial_\nu\mathcal{V}).\end{aligned} \tag{1.3.26}$$

Würden wir gleich mit dieser Wirkung starten, müßten wir, wie oben erwähnt, die Matrixelemente selbst als dynamische Variable auffassen[12] und durch zusätzliche Terme in der Wirkung die Werte von $\mathcal{V}$ auf die Matrix-Gruppe einschränken.

Quantisierung

Um eine Quantentheorie für das nichtlineare Sigmamodell zu definieren, müssen wir eine Operatordarstellung der Kommutatoralgebra

$$[\widehat{P}_A, \widehat{P}_B] = \mathrm{i}f_{AB}{}^C\widehat{P}_C, \quad [\widehat{\mathcal{V}}, \widehat{P}_A] = -\mathrm{i}\widehat{\mathcal{V}}Z_A \tag{1.3.27}$$

finden. Wir hatten bereits gesehen, daß wir alle Vorteile des Matrix-Formalismus wieder verlieren, wenn wir die Operatoren durch Funktionalableitungen (1.3.16) nach Koordinaten darstellen.

Die Vertauschungsrelationen legen nahe, daß es irgendwie möglich sein muß, auch die Quantenoperatoren in Matrix-Form zu realisieren. Da $\widehat{\mathcal{V}}$ auf jeden Fall ein Multiplikationsoperator

[12] Für sehr einfache Gruppen wie $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ kann man das auch tun: In [27] wurde so vorgegangen. Man bekommt dann ein zusätzliches Paar von Zwangsbedingungen zweiter Klasse und die sich ergebenden Dirac-Klammern sind die gleichen wie (1.3.23).

sein sollte, lassen wir die Operatoren auf Wellenfunktionen wirken, die Funktionale $\Psi[\mathcal{V}(\boldsymbol{x})]$ sind. Wie man sofort nachrechnet, erzeugen dann die Operatoren

$$\widehat{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{V}(\boldsymbol{x}), \quad \widehat{P}_A(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\Big(\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) Z_A \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}(\boldsymbol{x})}\Big) \tag{1.3.28}$$

die richtige Algebra, wobei die matrixwertige Ableitung einer Funktion durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{V}}\right)_{ab} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{V}_{ba}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \mathcal{V}} \mathrm{Tr}(\mathcal{V}A) = A \tag{1.3.29}$$

definiert ist, und entsprechend die Funktionalableitung durch Ergänzen einer Delta-Funktion.

Nun gibt es aber ein Problem: Wenn die Darstellung der Gruppe $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ keine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{N\times N}$ (N die Dimension der Darstellung) ist, können wir die Ableitungen nach Matrixelementen nicht benutzen, denn die Wellenfunktion sollte ja nur auf solchen Feldern definiert sein, die Werte in $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ annehmen.

Ist die Wellenfunktion als eine Potenzreihe in $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}^{-1}$ gegeben, so können wir die Operatoren natürlich einfach *formal* durch (1.3.27) definieren. Ansonsten müssen wir, um $\widehat{P}_A\Psi[\mathcal{V}]$ zu berechnen, das Funktional zunächst auf eine Umgebung von $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ fortsetzen, um dann die Ableitung zu berechenen. Nun liegt aber $\mathcal{V}Z_A$ an der Stelle $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ tangential zur Gruppe $\mathcal{V}(\mathcal{G})$, das heißt $\widehat{P}_A\Psi$ mißt nur die Variation von Ψ entlang der Gruppe und ist somit unabhängig von der gewählten Fortsetzung.

Die Quantendarstellung (1.3.28) ist also wohldefiniert für beliebige Gruppen und Darstellungen, abgesehen natürlich von den üblichen Problemen der Darstellung von Funktionalableitungen im Ortsraum, die in der Quantisierung von solchen Modellen natürlich genauso auftreten wie sonst auch. Wir haben aber zunächst diejenigen Probleme gelöst, die durch die spezielle Struktur der Gruppen-Mannigfaltigkeit aufgetreten sind und haben einen Impulsoperator bekommen, der dem Operator $\delta/\delta\varphi(\boldsymbol{x})$ für ein skalares Feld φ entspricht.

Coseträume

Die in der dreidimensionalen Supergravitation auftretenden Materiefelder sind in der Regel[13] Sigmamodelle mit einem Targetraum, der als Quotient einer Lie-Gruppe $\mathcal{G}$ modulo einer Untergruppe $\mathcal{H}$ dargestellt werden kann. Die Metrik auf diesem Cosetraum ist dabei die durch die Cartan-Killing-Metrik der Lie-Gruppe induzierte Metrik und die Wirkung durch (1.3.2) gegeben. Wir werden sehen, daß wir diese Cosetraum-Sigmamodelle mit dem gleichen Verfahren kanonisch behandeln und quantisieren können, indem wir sie als Sigmamodelle auf $\mathcal{G}$ realisieren, jedoch als Wirkung nicht die Standard-Wirkung (1.3.2) verwenden sondern eine, die eine $\mathcal{H}$-Eichsymmetrie besitzt.

[13] Für eine vollständige Klassifikation aller dreidimensionalen Supergravitationstheorien siehe [36]. In allen Theorien mit mehr als 2 Gravitinofeldern treten dabei Coseträume als Targeträume für den bosonischen Anteil der Materie auf. Auch unser Beispiel in Kapitel V wird von dieser Art sein.

Sei also $\mathcal{G}$ eine Lie-Gruppe und $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ eine Untergruppe. Dann sollen zwei Elemente $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}$ äquivalent heißen, wenn es ein $\zeta \in \mathcal{H}$ gibt mit $\varphi_1 = \varphi_2 \cdot \zeta$. Der Cosetraum $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ ist definiert als die Menge dieser Äquivalenzklassen.

Bezeichnen wir im folgenden eine solche Äquivalenzklasse mit ϑ. Wir können dann auf $\mathcal{G}$ Koordinaten einführen, die die Zerlegung in $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ respektieren. Wir benutzen dazu zunächst lokale Koordinaten ζ^r, $r = 1, \ldots, \dim\mathcal{H}$, auf $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, und ϑ^m, $m = \dim\mathcal{H}+1, \ldots, \dim\mathcal{G}$ auf $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Dann erhalten wir Koordinaten auf $\mathcal{G}$, indem wir jedem ϑ einen Repräsentanten $\varphi_0(\vartheta)$ zuordnen und $\mathcal{G}$ durch

$$\varphi(\vartheta^m, \zeta^r) = \varphi_0(\vartheta^m)\cdot\zeta(\zeta^r) \tag{1.3.30}$$

parametrisieren. Im allgemeinen existieren diese Koordinaten nur lokal und definieren $\mathcal{G}$ als $\mathcal{H}$-Bündel über $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. In diesem Sinne ist dann $\varphi_0(\vartheta)$ ein lokaler Schnitt.

Wie sieht nun die Metrik G^{coset}_{mn} auf $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ aus? Sie ist definiert als der orthogonale Abstand zwischen den Äquivalenzklassen ϑ und $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ in $\mathcal{G}$, gemessen mit der Cartan-Killing-Metrik. Tatsächlich ist dieser Abstand unabhängig von dem Punkt innerhalb der Klasse, an dem wir den Abstand messen, wie wir gleich sehen werden. Um die Metrik G^{coset}_{mn} (die zunächst nichts mit den Komponenten G_{mn} der Metrik auf $\mathcal{G}$ zu tun hat) zu ermitteln, beginnen wir diesmal mit einer Matrixdarstellung und konstruieren daraus ein Vielbein.

Sei also $\mathcal{V} : \varphi \mapsto \mathcal{V}(\varphi)$ wieder eine Matrixdarstellung von $\mathcal{G}$, dann ist $\mathcal{V} : \zeta \mapsto \mathcal{V}(\zeta)$ die Darstellung der Untergruppe. Durch $\mathcal{V}_0(\vartheta) = \mathcal{V}(\varphi_0(\vartheta))$ ist außerdem eine "Darstellung" des Cosetraumes definiert. Entsprechend sei X_α, $\alpha = 1, \ldots, \dim\mathcal{H}$ eine Basis der Darstellung der Algebra von $\mathcal{H}$ mit

$$[X_\alpha, X_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma X_\gamma, \tag{1.3.31}$$

und Y_A, $A = \dim\mathcal{H}+1, \ldots, \dim\mathcal{G}$, seien die restlichen Basiselemente der Algebra von $\mathcal{G}$, die dann gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
[X_\alpha, Y_B] &= f_{\alpha B}{}^C Y_C + f_{\alpha B}{}^\gamma X_\gamma, \\
[Y_A, Y_B] &= f_{AB}{}^C Y_C + f_{AB}{}^\gamma X_\gamma.
\end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Nun können wir stets die Y_A orthogonal zu den X_α wählen, das heißt so, daß die Komponenten

$$\eta_{\alpha A} = f_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{A\gamma}{}^\beta + f_{\alpha B}{}^\gamma f_{A\gamma}{}^B + f_{\alpha B}{}^C f_{AC}{}^B \tag{1.3.33}$$

der Metrik verschwinden. Da die Metrik invertierbar ist, kann man sogar stets eine orthonormale Basis einführen. Wegen der Jacobi-Identität verschwinden dann alle Strukturkonstanten mit zwei griechischen Indizes und die volle Algebra lautet

$$\begin{aligned}
[X_\alpha, X_\beta] &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma X_\gamma, \\
[X_\alpha, Y_A] &= f_{\alpha A}{}^B Y_B, \\
[Y_A, Y_B] &= f_{AB}{}^\gamma X_\gamma + f_{AB}{}^C Y_C.
\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

Durch $f_{\alpha A}{}^B$ wird also eine Darstellung von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ erzeugt, die wir im folgenden $\mathcal{H}$-Rotation nennen wollen. Sie ist eine Transformation, unter der die Metrik η_{AB} invariant bleibt, denn es gilt

$$f_{\alpha A}{}^C \eta_{CB} + f_{\alpha B}{}^C \eta_{AC} = f_{\alpha AB} + f_{\alpha BA} = 0. \tag{1.3.35}$$

Nun können wir durch (1.3.20) ein Vielbein auf $\mathcal{G}$ konstruieren, indem wir die Ableitungen $\mathcal{V}^{-1}\partial_m \mathcal{V}$ bzw. $\mathcal{V}^{-1}\partial_r \mathcal{V}$ nach der Basis der Algebra entwickeln:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{-1}\partial_m \mathcal{V} &= \mathcal{V}^{-1}(\zeta)\mathcal{V}_0^{-1}(\vartheta)\partial_m \mathcal{V}_0(\vartheta)\mathcal{V}(\zeta) = E_m{}^A Y_A + E_m{}^\alpha X_\alpha, \\ \mathcal{V}^{-1}\partial_r \mathcal{V} &= \mathcal{V}^{-1}(\zeta)\partial_r V(\zeta) = E_r{}^\alpha X_\alpha. \end{aligned} \tag{1.3.36}$$

Wegen der speziellen Wahl der Koordinaten ζ^r, ϑ^m verschwinden also die Komponenten $E_r{}^A$ des (inversen) Vielbeins und $E_r{}^\alpha$ hängt nur von ζ ab. Die übrigen Komponenten sind zwar von ζ und ϑ abhängig, für die ζ-Abhängigkeit finden wir aber, indem wir die Definition nach ζ^r ableiten,

$$\begin{aligned} \partial_r E_m{}^A &= -E_r{}^\beta f_{\beta B}{}^A E_m{}^B, \\ \partial_r E_m{}^\alpha &= -E_r{}^\beta f_{\beta\gamma}{}^\alpha E_m{}^\gamma, \end{aligned} \tag{1.3.37}$$

das heißt sie erfahren beide eine $\mathcal{H}$-Rotation.

Wir wollen nun den orthogonalen Abstand zweier Äquivalenzklassen ϑ und $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ bestimmen. Für zwei Punkte in $\mathcal{G}$ bekommen wir das Abstandsquadrat

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vartheta^m \mathrm{d}\vartheta^n E_m{}^A E_n{}^B \eta_{AB} + (\mathrm{d}\vartheta^m E_m{}^\alpha + \mathrm{d}\zeta^r E_r{}^\alpha)(\mathrm{d}\vartheta^n E_n{}^\beta + \mathrm{d}\zeta^s E_s{}^\beta)\,\eta_{\alpha\beta}. \tag{1.3.38}$$

Um den Abstand auf $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ zu bekommen, müssen wir $\mathrm{d}\zeta^r$ so wählen, daß dieser Ausdruck extremal wird. Wir bekommen also

$$\mathrm{d}s^2_{\text{coset}} = \mathrm{d}\vartheta^m \mathrm{d}\vartheta^n E_m{}^A E_n{}^B \eta_{AB}, \quad \Rightarrow \quad G^{\text{coset}}_{mn} = E_m{}^A E_n{}^B \eta_{AB}. \tag{1.3.39}$$

Aus (1.3.37) können wir sofort entnehmen, daß dieser Abstand unabhängig von der Wahl des speziellen Punktes ist, denn es ist $\partial_r G^{\text{coset}}_{mn} = 0$ und somit G^{coset}_{mn} nur eine Funktion von ϑ.

Wir können jetzt die Standard-Wirkung für ein Cosetraum-Sigmamodell angeben. Sie ist

$$\mathcal{L}[\vartheta] = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu} G^{\text{coset}}_{mn}(\vartheta)\partial_\mu \vartheta^m \partial_\nu \vartheta^n. \tag{1.3.40}$$

Wir können aber hier nicht einfach die Metrik als Funktion des Vielbeins einsetzen, denn das hängt ja von ζ ab. Aber es hindert uns niemand daran, zunächst die Wirkung als eine Funktion von ϑ *und* ζ zu betrachten, die gar nicht von ζ anhängt. Dann können wir schreiben

$$\mathcal{L}[\vartheta,\zeta] = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu} G^{\text{coset}}_{mn}(\vartheta)\partial_\mu \vartheta^m \partial_\nu \vartheta^n = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu} E_m{}^A(\vartheta,\zeta) E_n{}^B(\vartheta,\zeta)\eta_{AB}\partial_\mu \vartheta^m \partial_\nu \vartheta^n. \tag{1.3.41}$$

Natürlich können wir das wieder als ein Sigmamodell auf einer Gruppe auffassen, denn durch ϑ, ζ wird ja die ganze Gruppe $\mathcal{G}$ parametrisiert. Um diese Wirkung auf die Standardform (1.3.10) zu bringen, benutzen wir die Projektionen der Ableitungen auf die Vielbeine:

$$\begin{aligned} P_\mu{}^A &= E_m{}^A \partial_\mu \vartheta^m + E_r{}^A \partial_\mu \zeta^r = E_m{}^A \partial_\mu \vartheta^m, \\ Q_\mu{}^\alpha &= E_m{}^\alpha \partial_\mu \vartheta^m + E_r{}^\alpha \partial_\mu \zeta^r \end{aligned} \tag{1.3.42}$$

wobei ζ^r und ϑ^m die lokalen Koordinaten auf $\mathcal{G}$ sind. Wir können die Wirkung dann schreiben als

$$\mathcal{L}[\varphi, P_\mu{}^A, Q_\mu{}^\alpha] = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{AB} P_\mu{}^A P_\mu{}^B. \tag{1.3.43}$$

Sie sieht formal genauso aus wie die für ein Sigmamodell auf einer Gruppe, jedoch laufen die Indizes A, B hier nur über die Coset-Komponenten und nicht über die ganze Gruppe. Von den restlichen Komponenten $Q_\mu{}^\alpha$ hängt $\mathcal{L}$ nicht ab.

Die $P_\mu{}^A$ und $Q_\mu{}^\alpha$ lassen sich auch wieder aus der Matrixdarstellung ableiten, indem wir die Ableitung $\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V}$ nach der Basis der Algebra entwickeln:

$$\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V} = P_\mu{}^A Y_A + Q_\mu{}^\alpha X_\alpha \tag{1.3.44}$$

Wie für die Gruppe können wir auch für das Cosetmodell die Wirkung direkt als Funktion der Matrixdarstellung schreiben. Nehmen wir der Einfachheit halber an, $\mathcal{V}$ sei die adjugierte Darstellung, sonst würden im folgenden lediglich andere Vorfaktoren erscheinen. Es gilt dann

$$\mathrm{Tr}(Y_A Y_B) = \eta_{AB}, \quad \mathrm{Tr}(X_\alpha Y_B) = 0, \quad \mathrm{Tr}(X_\alpha X_\beta) = \eta_{\alpha\beta}, \tag{1.3.45}$$

und wir erhalten

$$P_\mu{}^A = \mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V} Y_B)\eta^{AB}, \quad Q_\mu{}^\alpha = \mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V} X_\beta)\eta^{\alpha\beta}, \tag{1.3.46}$$

Nun können wir die Summe über die P_μ^A aber nicht so einfach ausführen wir oben, denn die Y_A bilden erst zusammen mit den X_α eine vollständige Basis der Algebra. Um die Wirkung dennoch auf eine ähnliche Form zu bringen, benutzen wir die "kovariante Ableitung" der Matrix $\mathcal{V}$

$$D_\mu \mathcal{V} = \partial_\mu \mathcal{V} - Q_\mu^\alpha \mathcal{V} X_\alpha. \tag{1.3.47}$$

Durch Einsetzen bestätigt man dann, daß die Wirkung durch

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1} D_\mu \mathcal{V}\, \mathcal{V}^{-1} D_\nu \mathcal{V}) \tag{1.3.48}$$

gegeben ist. Die so definierte Ableitung ist kovariant bezüglich der $\mathcal{H}$-Eichsymmetrie der Wirkung. Da die ursprüngliche Wirkung eine Funktion nur von ϑ war und nicht von ζ abhing, besitzt sie eine Eichsymmetrie, die durch Multiplikation der Gruppenelemente von rechts mit einem beliebigen (Raumzeit-abhängigen) Element von $\mathcal{H}$ realisiert ist. Unter dieser Symmetrie transformieren die Felder wie

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{V} &= q^\alpha\,\mathcal{V}X_\alpha,\\ \delta P_\mu^A &= -q^\alpha\,f_{\alpha B}{}^A P_\mu{}^B,\\ \delta Q_\mu{}^\alpha &= \partial_\mu q^\alpha - q^\beta\,f_{\beta\gamma}{}^\alpha Q_\mu{}^\gamma,\end{aligned} \tag{1.3.49}$$

und somit ist $Q_\mu{}^\alpha$ tatsächlich das zugehörige Eichfeld und die oben eingeführte Ableitung $\mathcal{H}$-kovariant.

Um das Modell kanonisch zu formulieren, brauchen wir nur noch den allgemeinen Formalismus auf die Wirkung (1.3.43) anzuwenden. Die Impulse sind

$$P_A = \frac{\delta L}{\delta P_t^A} = \eta_{AB}P_t^B, \quad Q_\alpha = \frac{\delta L}{\delta Q_t^\alpha} = 0. \tag{1.3.50}$$

Offenbar bekommen wir hier einen Satz von Zwangsbedingungen

$$Q_\alpha \approx 0 \tag{1.3.51}$$

und die Hamilton-Funktion enthält dafür einen freien Parameter q^α:

$$H = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,\big(\tfrac{1}{2}P_A P_B \eta^{AB} + \tfrac{1}{2}\eta^{ij}P_i^A P_j^B\eta_{AB} + q^\alpha Q_\alpha\big). \tag{1.3.52}$$

Die Poisson-Klammern können wir direkt aus (1.3.23) übernehmen, sie lauten

$$\begin{aligned}\{P_A, P_B\} &= -f_{AB}{}^C P_C - f_{AB}{}^\gamma Q_\gamma \approx -f_{AB}{}^C P_C,\\ \{Q_\alpha, P_B\} &= -f_{\alpha B}{}^C P_C,\\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -f_{\alpha\beta}{}^\gamma Q_\gamma\end{aligned} \tag{1.3.53}$$

für die Impulse und

$$\{\mathcal{V}, P_A\} = \mathcal{V}Y_A, \quad \{\mathcal{V}, Q_\alpha\} = \mathcal{V}X_\alpha \tag{1.3.54}$$

für das Matrixfeld. Daraus entnehmen wir, daß $\mathcal{V}$ und P_A die physikalischen Freiheitsgrade sind, die Zwangsbedingungen Q_α auf diesen $\mathcal{H}$-Rotationen erzeugen und selbst eine $\mathcal{H}$-Algebra bilden, also Zwangsbedingungen erster Klasse sind.

In der quantisierten Version müssen wir die Impulse durch die Operatoren

$$\widehat{P}_A = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\Big(\mathcal{V}Y_A\frac{\delta}{\delta\mathcal{V}}\Big), \quad \widehat{Q}_\alpha = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\Big(\mathcal{V}X_\alpha\frac{\delta}{\delta\mathcal{V}}\Big) \tag{1.3.55}$$

ersetzen und in unserem speziellen Beispiel verlangen die Zwangsbedingungen

$$\widehat{Q}_\alpha\Psi[\mathcal{V}] = \mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\Big(\mathcal{V}X_\alpha\frac{\delta\Psi}{\delta\mathcal{V}}\Big) = 0, \tag{1.3.56}$$

daß die Wellenfunktion invariant ist unter Multiplikation von $\mathcal{V}$ von rechts mit einem beliebigen Matrixfeld aus $\mathcal{H}$.

Ströme und Ladungen

Außer den gerade diskutieren Eichsymmetrien von Sigmamodellen auf Coseträumen treten im allgemeinen auch noch globale Symmetrien auf, die zu erhaltenen Strömen und Ladungen führen. Und zwar bekommen wir immer dann einen Satz von Strömen, wenn die Wirkung nur über die $P_\mu{}^A$ (wobei A jetzt wieder über alle Erzeuger einer Gruppe $\mathcal{G}$ laufen soll) von dem Feld $\varphi(x)$ abhängt. Wie man am einfachsten aus der Matrixdarstellung für $P_\mu{}^A$ in (1.3.24) entnehmen kann, ist $P_\mu{}^A$ invariant unter Multiplikation des Feldes von links mit einer Konstanten

$$\mathcal{V}(x) \mapsto \mathcal{V}_0\mathcal{V}(x), \tag{1.3.57}$$

bzw. unter der Variation

$$\delta\mathcal{V}(x) = C^A Z_A \mathcal{V}(x). \tag{1.3.58}$$

Um den erhaltenen Strom zu finden, bestimmen wir zunächst die Bewegungsgleichungen für eine Wirkung, die durch eine lokale Funktion $\mathcal{L}(P_\mu{}^A)$ gegeben ist. Machen wir C^A ortsabhängig, so ist (1.3.58) die allgemeinste Variation von $\mathcal{V}$ und wir können daraus die Bewegungsgleichung ableiten. Um die Variation der Wirkung zu bestimmen, benutzen wir

$$\delta(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu\mathcal{V}) = \mathcal{V}^{-1}Z_A\mathcal{V}\,\partial_\mu C^A \quad\Rightarrow\quad \delta P_\mu{}^C = \partial_\mu C^A\,\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}Z_A\mathcal{V}Z_B)\,\tilde{\eta}^{BC}, \tag{1.3.59}$$

wobei $\tilde{\eta}^{AB}$ wieder das Inverse der Spur-Metrik aus (1.3.24) ist. Als Bewegungsgleichungen bekommen wir dann

$$\partial_\mu\Big(\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}Z_A\mathcal{V}Z_B)\,\tilde{\eta}^{BC}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial P_\mu{}^C}\Big) = 0. \tag{1.3.60}$$

Daraus können wir sofort den erhaltenen Strom ablesen:

$$\mathcal{J}_A{}^\mu = \mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}Z_A\mathcal{V}Z_B)\,\tilde{\eta}^{BC}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial P_\mu{}^C}. \tag{1.3.61}$$

Im kanonischen Formalismus bekommen wir eine erhaltene Ladung, indem wir die Zeitkomponente über den Raum integrieren

$$\mathcal{Q}_A = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}Z_A\mathcal{V}Z_B)\,\tilde{\eta}^{BC}\,P_C. \tag{1.3.62}$$

Übrigens ist diese Ladung ein Beispiel für eine Phasenraumfunktion, die wir nicht durch P_A und P_i^A alleine ausdrücken können, das heißt ohne die Matrixdarstellung wären wir hier auf die Verwendung von Koordinaten auf $\mathcal{G}$ angewiesen. Natürlich kann man nun durch Nachrechnen bestätigen, daß die Poisson-Klammer dieser Ladung mit der Hamilton-Funktion verschwindet und auch die mit den Zwangsbedingungen für das Cosetraum-Modell, es handelt sich als wirklich um eine Erhaltungsgröße.

Man beachte, daß der Ausdruck (1.3.62) *nicht* von der expliziten Form der Wirkung abhängt, wir haben lediglich vorausgesetzt, daß diese nur über ${P_\mu}^A$ von $\mathcal{V}$ abhängt. Die Ladung existiert also auch dann als Observable, wenn wir beliebige weitere Materiefelder oder auch Gravitation ankoppeln, solange keine expliziten $\mathcal{V}$-Abhängigkeiten in der Wirkung auftreten. Denn dann werden auch alle Zwangsbedingungen und die Hamilton-Funktion nur über P_i^A von $\mathcal{V}$ abhängen und $\mathcal{Q}_A$ vertauscht mit diesen.

Daß die Ladung auch mit den Impulsen P_A vertauscht, kann man explizit nachrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\{\mathcal{Q}_A, P_D\} &= \mathrm{Tr}\big(\{\mathcal{V}^{-1}, P_D\}\, Z_A \mathcal{V} Z_B + \mathcal{V}^{-1} Z_A\, \{\mathcal{V}, P_D\}\, Z_B\big)\, \tilde{\eta}^{BC}\, P_C \\ &\quad + \mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}^{-1} Z_A \mathcal{V} Z_B\big)\, \tilde{\eta}^{BC}\, \{P_C, P_D\} \\ &= \mathrm{Tr}\big(-\mathcal{V}^{-1} Z_A \mathcal{V} Z_B Z_D + \mathcal{V}^{-1} Z_A \mathcal{V} Z_D Z_B\big)\, \tilde{\eta}^{BC}\, P_C \\ &\quad + \mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}^{-1} Z_A \mathcal{V} Z_B\big)\, \tilde{\eta}^{BC} {f_{DC}}^E P_E \\ &= \mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}^{-1} Z_A \mathcal{V} Z_E\big)\, {f_D}^{CE}\, P_C + \mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}^{-1} Z_A \mathcal{V} Z_B\big)\, {f_D}^{CB}\, P_E = 0 \qquad (1.3.63)\end{aligned}$$

Die Poisson-Klammern der Komponenten der Ladung untereinander bilden natürlich wieder eine Algebra

$$\{\mathcal{Q}_A, \mathcal{Q}_B\} = {f_{AB}}^C \mathcal{Q}_C, \qquad (1.3.64)$$

die der Lie-Algebra der Symmetriegruppe $\mathcal{G}$ entspricht.

Der Operator für die Ladung hat eine noch einfachere Form als (1.3.62). Durch Einsetzen von (1.3.28) bekommt man

$$\hat{\mathcal{Q}}_A = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, \mathrm{i}\, \mathrm{Tr}\Big(Z_A \mathcal{V} \frac{\delta}{\delta \mathcal{V}}\Big), \qquad (1.3.65)$$

was gerade eine Linksmultiplikation mit einem räumlich konstanten Gruppenelement erzeugt.

KAPITEL II: KANONISCHE GRAVITATION

In der Relativität sagt die Materie dem Raum,
wie er sich biegen soll,
und der Raum sagt der Materie,
wie sie sich zu bewegen hat.
[42]

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Wege, Ashtekars Variable in der kanonischen Behandlung der Gravitation einzuführen. Die ursprügliche Formulierung[1] benutzt eine kanonische Transformation *nach* der Aufspaltung der Raumzeit in Raum und Zeit und der Einführung von Impulsen und Zwangsbedingungen.

Man kann die Variablen aber auch *vor* dieser Aufspaltung, das heißt in der Einstein-Hilbert-Wirkung, einführen. Dieser Zugang ist ein wenig eleganter, da hier explizit zu sehen ist, daß die neuen Variablen einfach die raumartigen Komponenten des vierdimensionalen Spinzusammenhangs in der selbstdualen Darstellung sind. Wir werden diesen Weg auch deshalb hier benutzen, weil die Lagrange-Funktion dadurch zum Realteil einer holomorphen Funktion wird, die alle im Kapitel I gestellten Forderungen erfüllt.

Wir bekommen eine etwas andere Interpretation der Realitätsbedingungen für Ashtekars Variable. Wir betrachten sie nicht wie üblich als durch eine nicht-unitäre kanonische Transformation aus reellen Variablen hervorgegangen, sondern verstehen die Realitätsbedingungen als Zwangsbedingungen zweiter Klasse. Am Schluß werden wir aber sehen, daß die kanonische Transformation in gewissem Sinne implizit in den Zwangsbedingungen enthalten ist, die beiden Interpretationen also gar nicht so verschieden sind.

1. Einsteinsche Gravitation

Als "Hintergrundstruktur" für alle folgenden Betrachtungen sei eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gegeben. Punkte in $\mathcal{M}$ werden mit x, y etc. bezeichnet, lokale Koordinaten auf $\mathcal{M}$ nennen wir $\mathsf{t}, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}$, entsprechend sind $V^{\mathsf{t}}, \ldots, V^{\mathsf{z}}$ die Komponenten eines Vektors V^M, und ∂_M bezeichnet die Ableitungen $\partial/\partial\mathsf{t}, \ldots, \partial/\partial\mathsf{z}$. Der Levi-Civita-Tensor ε^{MNPQ} und seine duale 4-Form ε_{MNPQ} sind so definiert, daß $\varepsilon^{\mathsf{txyz}} = 1$ und $\varepsilon_{\mathsf{txyz}} = -1$ ist.

Die einzige Forderung, die wir an $\mathcal{M}$ stellen müssen, um eine kanonische Formulierung der Gravitation zu ermöglichen, ist die Existenz einer globalen Koordinatenzeit, bezüglich der wir den Übergang von der Euler-Lagrange-Formulierung, also der Beschreibung durch eine Wirkungsfunktion, zur Hamilton-Jacobi-Formulierung vornehmen können. Die Hamilton-Funktion beschreibt dann die Zeitentwicklung bezüglich der ausgezeichneten Zeitkoordinate t, welche dadurch zu der in Kapitel I eingeführten Parameterzeit wird.

[1] Die Originalarbeiten sind [8, 9].

Die metrische Formulierung

Betrachten wir ganz kurz die "klassische" metrische Formulierung der Gravitation, um dann Ashtekars Variable einzuführen und zu zeigen, daß die beiden Beschreibungen äquivalent sind: In der ursprünglichen Formulierung von Einstein wird die Gravitation durch das metrische Feld G_{MN} mit Signatur (−,+,+,+) beschrieben.[2] Die Metrik definiert den metrischen oder Christoffel-Zusammenhang

$$\Gamma^M{}_{PQ} = \tfrac{1}{2} G^{MN} \left(\partial_Q G_{NP} + \partial_P G_{NQ} - \partial_N G_{PQ}\right) \tag{2.1.1}$$

und die metrisch kovariante Ableitung eines Vektors

$$\nabla_M V^N = \partial_M V^N + \Gamma^N{}_{MP} V^P . \tag{2.1.2}$$

Der Krümmungstensor ist definiert als die Feldstärke des metrischen Zusammenhangs

$$\tfrac{1}{2} R_{MN}{}^P{}_Q = \partial_{[M} \Gamma^P{}_{N]Q} + \Gamma^P{}_{[M R} \Gamma^R{}_{N]Q} , \tag{2.1.3}$$

wobei die eckigen Klammern die antisymmetrisierte Form in den beiden *unmittelbar rechts bzw. links der Klammern* stehenden Indizes bezeichnet. Für symmetrisierte Indizes verwenden wir entsprechend runde Klammern.

Aus dem Riemann-Tensor bildet man den Ricci-Tensor und den Krümmungs-Skalar:

$$R_{MN} = R_{PM}{}^P{}_N , \quad R = G^{MN} R_{MN} . \tag{2.1.4}$$

Die Dynamik wird durch die Einstein-Hilbert-Wirkung

$$I[G] = \tfrac{1}{2} \int d^4x \, \sqrt{-G} \, R[G] \tag{2.1.5}$$

bestimmt, wobei G die Determinate von G_{MN} ist. Variation dieser Wirkung nach G_{MN} liefert die Einsteinschen Feldgeichungen

$$R_{MN} - \tfrac{1}{2} G_{MN} R = 0 . \tag{2.1.6}$$

[2] Die Konventionen stimmen mit denen in [5] überein, woraus auch alles über die metrische Formulierung der Gravitation, was hier vorausgesetzt wird, entnommen werden kann.

Die Einstein-Hilbert-Wirkung ist invariant unter lokalen Koordinatentransformationen, die von Vektorfeldern V^M erzeugt werden. Die Metrik transformiert dabei wie ihre Lie-Ableitung

$$\delta G_{MN} = \mathcal{L}_{(V)} G_{MN} = V^P \partial_P G_{MN} + \partial_M V^P G_{PN} + \partial_N V^P G_{MP} = 2\,\nabla_{(M} V_{N)} . \qquad (2.1.7)$$

Diese lokale Eichsymmetrie führt in der kanonischen Formulierung zu Zwangsbedingungen erster Klasse,[3] die über die Poisson-Klammern die Eichtransformationen erzeugen. Da bei der kanonischen Formulierung eine Zeitrichtung ausgezeichnet werden muß, zerfallen diese Zwangsbedingungen in drei Erzeuger von raumartigen Translationen, die die Koordinatentransformationen auf der durch $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ aufgespannten raumartigen Hyperfläche erzeugen, und einen Erzeuger von Zeittranslationen.

Die Lösung dieser Zwangsbedingungen, und insbesondere die der quantisierten Versionen, ist deshalb so schwierig, weil sie neben den Komponenten der Metrik auch die Wurzel der Determinante und die inverse Metrik enthalten. Wir werden daher zuerst die Wurzel aus der Wirkung entfernen, indem wir den Vierbein-Formalismus einführen, und anschließend durch Einführung von Ashtekars Variablen erreichen, daß alle Zwangsbedingungen als Polynome in zueinander kanonisch konjugierten Variablen dargestellt werden.

Das Vierbein

Der Schritt vom metrischen zum Vierbein-Formalismus ist sehr einfach: Die Geometrie wird nicht durch die Metrik selbst, sondern durch die Angabe von einem zeitartigen und drei raumartigen orthogonalen Einheitvektoren $E_0{}^M, \ldots, E_3{}^M$ definiert, die wir als Vierbein $E_A{}^M$ bezeichnen. Die Metrik ist dann eindeutig bestimmt durch die Forderung

$$E_A{}^M E_B{}^N G_{MN} = \eta_{AB}, \quad \eta_{AB} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1). \qquad (2.1.8)$$

Mit dem inversen Vierbein $E_M{}^A$, das durch $E_A{}^M E_M{}^B = \delta_A^B$ definiert ist, ergibt sich

$$G_{MN} = E_M{}^A E_N{}^B \eta_{AB}, \qquad (2.1.9)$$

Den Index A werden wir im folgenden als "flachen" Index bezeichnen: er kann mit der flachen Metrik η^{AB} beliebig nach oben oder unten gebracht werden. Um auch die Werte, die flache und "gekrümmte" Indizes annehmen, unterscheiden zu können, nehmen flache Indizes immer numerische Werte an, also $A = 0,1,2,3$, gekrümmte dagegen die Werte $M = \mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$. Diese Unterscheidung wird sowohl bei der kanonischen Formulierung, bei der die Zeitkomponente eine besondere Bedeutung bekommt, als auch bei der Reduktion der Dimension von vier nach drei nützlich sein, die wir in Kapitel V durchführen werden.

[3] Die kanonische Formulierung der Einsteinschen Gravitation, auch als ADM-Formalismus bekannt, wurde in [4] durchgeführt, eine anschauliche Beschreibung befindet sich in[5], Kapitel 21.

Da die Wirkung nur über die Metrik vom Vierbein abhängt und die Metrik invariant unter lokalen Lorentz-Transformationen

$$\delta E_M{}^A = -\Lambda^A{}_B E_M{}^B, \quad \Lambda_{AB} = -\Lambda_{BA}, \qquad (2.1.10)$$

ist, ergibt sich eine neue lokale Eichsymmetrie. Das zugehörige Eichfeld wird als Spinzusammenhang bezeichnet. Es wirkt auf flache Indizes und definiert die Lorentz-kovariante Ableitung

$$D_M V^A = \partial_M V^A + \Omega_M{}^A{}_B V^B, \quad \Omega_{MAB} = -\Omega_{MBA}. \qquad (2.1.11)$$

Mit D werden wir im folgenden immer die auf flache Indizes wirkenden kovarianten Ableitungen mit Eichfeld Ω bezeichnen. Ω_{MAB} soll nun als Funktion des Vierbeins durch die Forderung festgelegt werden, daß die *volle* kovariante Ableitung des Vierbeins verschwinden soll, also

$$D^{\mathrm{voll}}_M E_N{}^A = \nabla_M E_N{}^A + \Omega_M{}^A{}_B E_N{}^B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_M{}^A{}_B[E] = E_N{}^A \nabla_M E_B{}^N . \qquad (2.1.12)$$

Um den Christoffel-Zusammenhang zu eliminieren, können wir die Bedingungen auch als "Rotation"

$$D^{\mathrm{voll}}_{[M} E_{N]}{}^A = D_{[M} E_{N]}{}^A = 0 \qquad (2.1.13)$$

schreiben. Auch in der Supergravitation werden derartige Bedingungen immer nur in Form von Rotationen auftreten, in denen der Christoffel-Zusammenhang nicht mehr vorkommt. Die Rotations-Gleichung können wir dann auch ohne explizite Verwendung des Christoffel-Zusammenhangs auflösen. Da solche Gleichungen noch öfter auftreten werden, betrachten wir die allgemeine Form

$$\Omega_{[MAB} E_{N]}{}^B + \Sigma_{[MN]}{}^A = 0. \qquad (2.1.14)$$

In unserem Fall ist $\Sigma_{[MN]}{}^A = \partial_{[M} E_{N]}{}^A$. Der entsprechende Tensor mit flachen Indizes

$$\Sigma_{[AB]}{}^C = E_{[A}{}^M E_{B]}{}^N \partial_M E_N{}^C \qquad (2.1.15)$$

ist im wesentlichen die Anholonomie des Vierbeins.[4] Die Lösung der Gleichung für Ω ist dann

$$\Omega_{MAB}[E] = \Sigma_{[MA]B} - \Sigma_{[MB]A} - \Sigma_{[AB]M}. \qquad (2.1.16)$$

Wie hier werden wir manchmal nach Belieben flache durch gekrümmte Indizes ersetzen und umgekehrt, also Kontraktionen mit Vierbeinen nicht explizit ausschreiben, wenn keine Gefahr von Zweideutigkeit besteht, das Kontrahieren also nicht innerhalb von Ableitungen erfolgt.

Bestimmt man die Feldstärke des Spinzusammenhangs

$$\tfrac{1}{2} R_{MN}{}^A{}_B[\Omega] = \partial_{[M} \Omega_{N]}{}^A{}_B + \Omega_{[M}{}^A{}_C \Omega_{N]}{}^C{}_B, \qquad (2.1.17)$$

[4] Eigentlich ist 2Σ die Anholonomie, die wir schon in Kapitel I eingeführt hatten und deren Komponenten definiert sind als die Strukturfunktionen der von den Vierbein-Vektorfeldern aufgespannten Algebra $[E_A, E_B] = 2\Sigma_{[AB]}{}^C E_C$.

so stimmt diese mit dem Riemann-Tensor überein, wenn man durch Multiplikation mit Vierbeinen die flachen Indizes in gekrümmte verwandelt:

$$R_{MN}{}^{P}{}_{Q} = E_A{}^P E_Q{}^B R_{MN}{}^A{}_B. \tag{2.1.18}$$

Man sieht dies am einfachsten, wenn man die Definition der Feldstärke bzw. des Riemann-Tensors als Kommutator von zwei kovarianten Ableitungen benutzt und diesen Kommutator auf das Vierbein selbst anwendet, dessen volle kovarianten Ableitungen laut Definition verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 = \left[D_M^{\text{voll}}, D_N^{\text{voll}}\right] E^{AP} &= \left[D_M, D_N\right] E^{AP} + \left[\nabla_M, \nabla_N\right] E^{AP} \\ &= R_{MN}{}^P{}_Q E^{AQ} + R_{MN}{}^A{}_B E^{BP} \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Um die Einstein-Hilbert-Wirkung als Funktion des Vierbeins auszudrücken, muß man nur noch verwenden, daß $G = -E^2$ ist, wobei E die Determinante von $E_M{}^A$ ist, und man bekommt

$$I[E] = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x\, E\, E_A{}^M E_B{}^N R_{MN}{}^{AB}[\Omega[E]]. \tag{2.1.20}$$

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Wirkung, wie auch der metrischen Wirkung, ist, daß man sie auch als Wirkungsfunktion von E und Ω betrachten kann, da die Bewegungsgleichungen für Ω gerade $\Omega = \Omega[E]$ liefern und damit auf (2.1.20) zurückführen. In der metrischen Formulierung kann man entsprechend G und Γ als unabhängige Felder betrachten und erhält auch dort eine Wirkung erster Ordnung, also eine, die die Zeitableitungen der Felder nur linear enthält.[5] Da eine solche Wirkung den Zugang zur kanonischen Formulierung, das heißt der Bestimmung von Impulsen, Zwangsbedingungen und der Hamilton-Funktion erheblich erleichtert, werden wir soweit möglich mit Wirkungen erster Ordnung arbeiten. Somit setzen wir

$$I[E, \Omega] = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x\, E\, E_A{}^M E_B{}^N R_{MN}{}^{AB}[\Omega], \tag{2.1.21}$$

und die von dieser Wirkung erzeugten Bewegungsgleichungen sind

$$\varepsilon^{MNPQ} E_N{}^{[A} D_P E_Q{}^{B]} = 0$$

$$E^{MA} R_{MNAB}[\Omega] - \tfrac{1}{2} E_{NB} E^{PA} E^{QB} R_{PQAB}[\Omega] = 0. \tag{2.1.22}$$

Die erste wird offenbar durch $\Omega = \Omega[E]$ gelöst. Setzt man dies in die zweite ein, so bekommt man wieder Einsteins Gleichungen (2.1.6).

[5] Für eine Darstellung dieser "Palatini-Methode" siehe zum Beispiel[5], Kapitel 21.2.

2. Ashtekars Variable

Die Formulierung von Ashtekar benutzt als primäre Feldvariable nicht den Spinzusammenhang Ω_{MAB} sondern seinen "selbstdualen Anteil"

$$\mathcal{A}_{MAB} = \tfrac{1}{2}\Omega_{MAB} - \tfrac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon_{AB}{}^{CD}\Omega_{MCD}. \tag{2.2.1}$$

Hier ist ε^{ABCD} der "flache" Levi-Civita-Tensor, der durch $\varepsilon^{0123} = 1$ definiert ist. Durch Herunterziehen der Indizes mit η_{AB} bekommt man $\varepsilon_{0123} = -1$.

Für einen festen Index M sind die $\mathcal{A}_{MAB}$ drei komplexe Größen statt sechs reeller Komponenten des antisymmetrischen Tensors Ω, denn die zunächst ebenfalls sechs Komponenten von $\mathcal{A}$ sind nicht unabhängig:

$$\mathcal{A}_{MAB} = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{AB}{}^{CD}\mathcal{A}_{MCD}. \tag{2.2.2}$$

Diese Eigenschaft eines antisymmetrischen Tensors nennen wir "selbstdual", explizit ist zum Beispiel $\mathcal{A}_{M01} = \mathrm{i}\mathcal{A}_{M23}$. Um dies zu zeigen muß man benutzen, daß

$$\varepsilon_{ABCD}\varepsilon^{CDEF} = -2\delta_A^E\delta_B^F + 2\delta_A^F\delta_B^E, \tag{2.2.3}$$

wobei sich das Vorzeichen aus der Signatur der Lorentz-Metrik ergibt und den Faktor in (2.2.2) bis auf das Vorzeichen festlegt. Insbesondere würde für eine euklidische Raumzeit ein reeller Faktor auftreten. Entsprechend bezeichnen wir

$$\mathcal{A}^*_{MAB} = \tfrac{1}{2}\Omega_{MAB} + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon_{AB}{}^{CD}\Omega_{MCD} \tag{2.2.4}$$

mit

$$\mathcal{A}^*_{MAB} = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{AB}{}^{CD}\mathcal{A}^*_{MCD} \tag{2.2.5}$$

als antiselbstdualen Anteil von Ω. Beide sind festgelegt durch ihre Eigenschaften (selbst- bzw. antiselbstdual) und die Forderung $\Omega = \mathcal{A} + \mathcal{A}^*$.

Für eine euklidische Raumzeit wäre das tatsächlich eine Zerlegung von Ω in zwei (reelle) Anteile, und diese Zerlegung entspräche gerade der Zerlegung der Algebra $\mathfrak{so}(4)$ in $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$. Für die hier gegebene Minkowski-Raumzeit bekommen wir statt dessen drei komplexe Eichfelder und deren konjugierte Felder. Da beide die volle Information enthalten, haben wir keine Zerlegung im eigentlichen Sinn. Statt dessen sind wir von der Lorentz-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ zu der isomorphen Algebra $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ übergegangen.

Insgesamt enthält $\mathcal{A}$ die gleiche Information wie Ω und es sollte daher möglich sein, die Wirkung als Funktion von $\mathcal{A}$ zu schreiben. Dazu definieren wir zunächst eine neue kovariante Ableitung

$$\mathcal{D}_M V^A = \partial_M V^A + \mathcal{A}_M{}^A{}_B V^B, \tag{2.2.6}$$

die allerdings nicht mehr die gleichen Transformationseigenschaften unter der lokalen Lorentz-Symmetrie hat wie D.[6] Sie erfüllt aber weiterhin alle benötigten Eigenschaften einer Ableitung,

[6] Genau genommen ist diese Ableitung gar nicht kovariant, da sich $\mathcal{D}_M V^A$ nicht wie ein Vektor unter Lorentz-Transformation verhält, wir betrachten (2.2.6) daher einfach als eine formale Definition.

insbesondere entspricht sie, wenn sie auf Lorentz-invariante Größen angewandt wird, der gewöhnlichen Ableitung, wir können sie also partiell integrieren. Und sie definiert eine Feldstärke

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{F}_{MNAB}[\mathcal{A}] = \partial_{[M}\mathcal{A}_{N]AB} + \mathcal{A}_{[MAC}\mathcal{A}_{N]}{}^{C}{}_{B}. \tag{2.2.7}$$

Durch explizites Nachrechen oder durch den Schluß, daß auch die Feldstärke wieder eine Darstellung der $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ ist, kann man zeigen, daß auch $\mathcal{F}$ selbstdual ist,

$$\mathcal{F}_{MNAB} = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{AB}{}^{CD}\mathcal{F}_{MNCD}, \tag{2.2.8}$$

und daß es der selbstduale Anteil der Feldstärke von Ω ist:

$$\mathcal{F}_{MNAB} = \tfrac{1}{2}R_{MNAB} - \tfrac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon_{AB}{}^{CD}R_{MNCD}. \tag{2.2.9}$$

Um die hinter dem Übergang zu Ashtekars Variablen verborgenen Gruppenstruktur näher zu analysieren, führen wir eine etwas bessere Bezeichung für die neuen Variablen ein. Dazu stellen wir die Größen $\mathcal{A}_{MAB}$, die ja nicht alle unabhängig sind, als Funktionen von $3\cdot 4$ unabhängigen komplexen Feldern $\mathcal{A}_{Ma}$ dar ($a = 1, 2, 3$), indem wir eine Basis J_{aAB} von selbstdualen Tensoren verwenden:

$$\mathcal{A}_{MAB} = \mathcal{A}_{Ma}J_{aAB}, \quad J_{aAB} = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ABCD}J_a{}^{CD}. \tag{2.2.10}$$

Die J_{aAB} sind explizit gegeben durch

$$J_{aAB} = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\eta_{Aa}\delta^0_B - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\eta_{Ba}\delta^0_A - \tfrac{1}{2}\varepsilon^0{}_{aAB}. \tag{2.2.11}$$

Wir benutzen hier, daß die Indizes a und A beide numerische Werte annehmen, so daß η_{Aa} und $\varepsilon^0{}_{aAB}$ einfach gewisse Komponenten der bereits definierten Objekte sind. Da $\eta_{ab} = \delta_{ab}$ ist, schreiben wir die Indizes a, b, etc. immer nach unten und für Kontraktionen von "großen" Indizes gilt $X^AY_A = X_aY_a - X_0Y_0$.

Durch explizites Nachrechnen bestätigt man, daß die so definierten Tensoren eine vierdimensionale komplexe Darstellung der $\mathfrak{so}(3)$ erzeugen:

$$J_{aA}{}^{B}J_{bB}{}^{C} = -\tfrac{1}{4}\eta_{ab}\delta^C_A + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{cA}{}^{C}, \tag{2.2.12}$$

wobei $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^0{}_{abc}$ der dreidimensionale Levi-Civita-Tensor mit $\varepsilon_{123} = 1$ ist. Das komplexe Feld $\mathcal{A}_{Ma}$ ist also ein $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$-Eichfeld. Wir führen außerdem eine (komplex konjugierte) Basis von antiselbstdualen Tensoren ein

$$J^*_{aAB} = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\eta_{Aa}\delta^0_B + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\eta_{Ba}\delta^0_A - \tfrac{1}{2}\varepsilon^0{}_{aAB}, \tag{2.2.13}$$

die ebenfalls eine Darstellung der $\mathfrak{so}(3)$ erzeugen,

$$J^*_{aA}{}^{B}J^*_{bB}{}^{C} = -\tfrac{1}{4}\eta_{ab}\delta^C_A + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}J^*_{cA}{}^{C}, \tag{2.2.14}$$

und die mit den J's vertauschen:

$$J^*_{aA}{}^{B}J_{bB}{}^{C} = J_{bA}{}^{B}J^*_{aB}{}^{C}. \tag{2.2.15}$$

Weitere nützliche Formeln sind

$$\begin{aligned} J_{aAB}J_b{}^{AB} &= \eta_{ab}, \quad J^*_{aAB}J^{*AB}_b = \eta_{ab}, \\ J_{aAB}J_a{}^{CD} &= \tfrac{1}{2}\delta^{[C}_{[A}\delta^{D]}_{B]} - \tfrac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon_{AB}{}^{CD}, \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

und entsprechend für J^* mit $\mathrm{i} \mapsto -\mathrm{i}$. $J_{aAB}J_a{}^{CD}$ ist also der Projektor auf den selbstdualen Anteil. Der Übergang vom Spinzusammenhang Ω_{MAB} zu Ashtekars Variablen $\mathcal{A}_{Ma}$ lautet nun

$$\mathcal{A}_{Ma} = \Omega_{MAB}J_a{}^{AB}, \quad \mathcal{A}^*_{Ma} = \Omega_{MAB}J^{*AB}_a, \tag{2.2.17}$$

und umgekehrt

$$\Omega_{MAB} = \mathcal{A}_{Ma}J_{aAB} + \mathcal{A}^*_{Ma}J^*_{aAB}. \tag{2.2.18}$$

In der neuen Darstellung erhalten wir für die Feldstärke $\mathcal{F}_{MNAB} = \mathcal{F}_{MNa}J_{aAB}$ den Ausdruck

$$\mathcal{F}_{MNa}[\mathcal{A}] = \partial_M\mathcal{A}_{Na} - \partial_N\mathcal{A}_{Ma} + \varepsilon_{abc}\mathcal{A}_{Mb}\mathcal{A}_{Nc}, \tag{2.2.19}$$

und wenn wir die konjugierte Feldstärke definieren als die Feldstärke des konjugierten Zusammenhangs $\mathcal{A}^*$, also

$$\mathcal{F}^*_{MNa}[\mathcal{A}^*] = \partial_M\mathcal{A}^*_{Na} - \partial_N\mathcal{A}^*_{Ma} + \varepsilon_{abc}\mathcal{A}^*_{Mb}\mathcal{A}^*_{Nc}, \tag{2.2.20}$$

so erhalten wir für den Riemann-Tensor formal den gleichen Ausdruck wie für den Spinzusammenhang:

$$R_{MNAB} = \mathcal{F}_{MNa}J_{aAB} + \mathcal{F}^*_{MNa}J^*_{aAB}. \tag{2.2.21}$$

Setzen wir das in die Einstein-Hilbert-Wirkung (2.1.21) ein und benutzen wir als Variable nicht mehr $E_M{}^A$ und Ω_{MAB}, sondern $E_M{}^A$ und $\mathcal{A}_{Ma}$, so lautet sie

$$I[E,\mathcal{A}] = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, E\, E_A{}^M E_B{}^N \left(\mathcal{F}_{MNa}[\mathcal{A}]J_a{}^{AB} + \mathcal{F}^*_{MNa}[\mathcal{A}^*]J^{*AB}_a\right). \tag{2.2.22}$$

Offensichtlich ist dies gerade der Realteil einer in $\mathcal{A}_{Ma}$ holomorphen Funktion

$$\tilde{I}[E,\mathcal{A}] = \int \mathrm{d}^4x\, E\, E_A{}^M E_B{}^N J_a{}^{AB}\,\mathcal{F}_{MNa}[\mathcal{A}] \tag{2.2.23}$$

Diese können wir noch ein wenig umschreiben, indem wir die Selbstdualität von J benutzen und die Definition der Determinante E. Wir bekommen dann eine polynomiale Funktion in den Variablen $E_M{}^A$ und $\mathcal{A}_{Ma}$:

$$\tilde{I}[E,\mathcal{A}] = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \varepsilon^{MNPQ}E_M{}^A E_N{}^B J_{aAB}\mathcal{F}_{PQa}[\mathcal{A}]. \tag{2.2.24}$$

Die Frage, ob diese Wirkung ein geeigneter Kandidat für die holomorphe Quantisierung aus Kapitel I ist, stellen wir noch kurz zurück. Statt dessen betrachten wir noch einmal die Lorentz-Symmetrie von $\tilde{I}$, wobei wir auch $E_M{}^A$ als komplexes Feld auffassen.

Die volle Lorentz-Symmetrie ist dann gegeben durch die Algebra $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \times \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$. Unter dem ersten Faktor transformieren die Felder wie (ω_a ein komplexer dreikomponentiger Vektor)

$$\delta E_M{}^A = -\omega_a J_a{}^A{}_B E_M{}^B, \quad \delta \mathcal{A}_{Ma} = \partial_M \omega_a - \varepsilon_{abc}\omega_b \mathcal{A}_{Mc}, \qquad (2.2.25)$$

das heißt, $\mathcal{A}$ ist das Eichfeld für den ersten Faktor. Man erhält die übliche Transformationseigenschaft der Feldstärke und mit (2.2.12) bekommt man

$$\delta(E_M{}^A E_N{}^B J_{aAB}) = -\varepsilon_{abc}\omega_b (E_M{}^A E_N{}^B J_{cAB}), \quad \delta \mathfrak{F}_{MNa} = -\varepsilon_{abc}\omega_b \mathfrak{F}_{MNc}, \qquad (2.2.26)$$

so daß die Wirkung tatsächlich invariant ist.

Unter dem zweiten Faktor transformiert nur das Vierbein

$$\delta E_M{}^A = -v_a J_a^{*A}{}_B E_M{}^B, \qquad (2.2.27)$$

und die Invarianz der Wirkung folgt, da J_a mit J_b^* kommutiert (siehe (2.2.15)).

Wenn das Vierbein reell bleiben soll, so muß man verlangen, daß für die Parameter gilt $\omega_a = v_a^*$: Wir kommen dann wieder von der komplexen Algebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$ auf ihre reelle Form $\mathfrak{so}(3,1)$ zurück.

3. Kanonische Formulierung

Die im Kapitel I beschriebene holomorphe Quantisierung werden wir jetzt auf die Wirkung (2.2.24) anwenden. Wir fassen auch $E_A{}^M$ als komplexe Größen auf und betrachten $E_M{}^A \in \mathbb{R}$ als primäre Realitätsbedingungen. Wir haben also eine holomorphe Wirkung und Realitätsbedingungen

$$\tilde{I}[E,\mathcal{A}] = -\tfrac{i}{2}\int d^4x\, \varepsilon^{MNPQ} E_M{}^A E_N{}^B J_{aAB}\, \mathfrak{F}_{PQa}[\mathcal{A}], \quad E_M{}^A \in \mathbb{R}. \qquad (2.3.1)$$

Zunächst müssen wir prüfen, ob die Forderungen an die Lagrange-Funktion und die Realitätsbedingungen (Seite 11) erfüllt sind. Die erste ist offenbar erfüllt, den alle Realitätsbedingungen sind unabhängige Funktionen. Die zweite Forderung können wir erst überprüfen, wenn wir die Wirkung auf die Standardform (1.2.23) gebracht haben, denn erst dann kennen wir die kanonischen Variablen und deren Poisson-Klammern.

Die dritte Forderung können wir bereits jetzt verifizieren. Dazu müssen wir feststellen, ob die Bewegungsgleichungen der reellen Wirkung

$$I[E,\mathcal{A},\lambda] = \mathrm{Re}\,\tilde{I}[E,\mathcal{A}] + \int d^4x\, \lambda_A{}^M \,\mathrm{Im}\, E_M{}^A \qquad (2.3.2)$$

mit denen der holomorphen Wirkung (2.3.1) übereinstimmen. Da uns dieses Problem auch in der Supergravitation begegnen wird, lösen wir es ein wenig allgemeiner.

Sei $(E,\mathcal{A})$ ein beliebiger Satz von Variablen, und seien die E wie in (2.3.2) auch gleichzeitig die Realitätsbedingungen. Außerdem soll $\tilde{I}[E,\mathcal{A}]$ eine reelle Funktion der E werden (möglicherweise bis auf eine totale Ableitung), wenn die Bewegungsgleichungen für $\mathcal{A}$ erfüllt sind. Dann ist auch die dritte Forderung erfüllt.

Man sieht das wie folgt: Wir ermitteln zuerst die Bewegungsgleichungen der komplexen Variablen $\mathcal{A}$. Diese sind für $\tilde{I}$ und I identisch, denn die λ-Terme tragen zu ihnen nicht bei und I ist der Realteil der holomorphen Funktion $\tilde{I}$. Setzen wir diese jeweils in die Wirkung ein, so erhalten wir eine nur noch von E abhängige reelle Wirkung

$$I[E] = \mathrm{Re}\,\tilde{I}[E] + \lambda \cdot \mathrm{Im}\, E, \qquad (2.3.3)$$

welche immer noch der Realteil einer in E holomorphen Funktion ist. Die Bewegungsgleichungen der reellen Wirkung für E sind

$$\frac{\delta \mathrm{Re}\,\tilde{I}[E]}{\delta \mathrm{Re}\, E} = \mathrm{Re}\,\frac{\delta \tilde{I}[E]}{\delta E} = 0, \quad \frac{\delta \mathrm{Re}\,\tilde{I}[E]}{\delta \mathrm{Im}\, E} = -\mathrm{Im}\,\frac{\delta \tilde{I}[E]}{\delta E} = -\lambda, \quad \mathrm{Im}\, E = 0. \qquad (2.3.4)$$

Nun hatten wir angenommen, daß aus der Bewegungsgleichung für $\mathcal{A}$ folgt, daß $\tilde{I}$ bis auf eine totale Ableitung eine reelle Funktion von E ist. Dann ist $\delta\tilde{I}/\delta E$ auch eine reelle Funktion von E, also mit der letzten Gleichung selbst reell. Damit wird die zweite Gleichung zu $\lambda = 0$ und die erste zu $\delta\tilde{I}/\delta E = 0$, so daß sie mit der Bewegungsgleichung der holomorphen Wirkung übereinstimmt.

Wir müssen also zeigen, daß die Wirkung (2.3.1) eine reelle Funktion von $E_M{}^A$ wird, wenn die Bewegungsgleichung für $\mathcal{A}_{Ma}$ erfüllt ist. Nun kennen wir aber die Lösungen der Bewegungsgleichung für $\mathcal{A}_{Ma}$ bereits, denn es sind die gleichen wie die für I. Dort können wir einfach die Variablen $\mathrm{Re}\,\mathcal{A}_{Ma}$ und $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}_{Ma}$ durch Ω_{MAB} ersetzen. Die Lösung ist dann

$$\mathcal{A}_{Ma} = \mathcal{A}_{Ma}[E] = J_a{}^{AB}\,\Omega_{MAB}[E]. \qquad (2.3.5)$$

Setzen wir das in $\tilde{I}[E,\mathcal{A}]$ ein, und benutzen wir die Formeln für den Zusammengang zwischen der selbstdualen Feldstärke, der Feldstärke von Ω und dem Riemann-Tensor, so gilt

$$\begin{aligned}\tilde{I}[E,\mathcal{A}[E]] &= -\tfrac{i}{2}\int d^4x\, \varepsilon^{MNPQ} E_M{}^A E_N{}^B J_{aAB}\, \mathfrak{F}_{PQa}[\mathcal{A}[E]] \\ &= -\tfrac{i}{4}\int d^4x\, \varepsilon^{MNPQ} E_M{}^A E_N{}^B \left(R_{PQAB}[\Omega[E]] - \tfrac{i}{2}\varepsilon_{AB}{}^{CD} R_{PQCD}[\Omega[E]]\right) \\ &= -\tfrac{i}{4}\int d^4x\, \varepsilon^{MNPQ} R_{PQMN}[E] + I[E], \end{aligned} \qquad (2.3.6)$$

wobei $I[E]$ die in (2.1.20) gegebene Einstein-Hilbert-Wirkung des Vierbeins ist, also eine reelle Funktion von $E_M{}^A$. Der erste Term verschwindet indentisch aufgrund der ersten Bianchi-Indentität des Riemann-Tensors:

$$R_{MNPQ} + R_{MPQN} + R_{MQNP} = 0. \tag{2.3.7}$$

Wir haben damit gezeigt, daß (2.3.1) die gleichen Bewegungsgleichungen erzeugt wie die reelle Wirkung (2.2.22).

Aufspaltung der Raumzeit

Wir müssen nun die Wirkung auf die Standardform (1.2.23) bringen, also als Zeitintegral über eine Lagrange-Funktion $L[\mathcal{A}, E]$ schreiben, die linear in den Zeitableitungen ist (wir lassen die Tilde für die Unterscheidung zwischen reeller und holomorpher Wirkung ab jetzt weg, da nur noch die holomorphe Wirkung auftritt).

Als Zeitparameter wählen wir die Koordinate t, von der 4-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ nehmen wir an, daß sie als ein Produkt eines dreidimensionalen Raumes $\mathcal{N}$ mit der reellen Achse $\mathbb{R}$ gegeben ist. Die Koordinaten des Raumes $\mathcal{N}$ sind dann gerade die drei übrigen Koordinaten von $\mathcal{M}$, also $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$, die wir mit kleinen Buchstaben $m, n, p, \ldots$ indizieren. Punkte in $\mathcal{N}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, etc, so daß ein Punkt in $\mathcal{M}$ durch ein Paar $(\mathrm{t}, \boldsymbol{x})$ gegeben ist. Kontraktionen über Raumzeit-Koordinaten zerfallen entsprechend in $X^M Y_M = X^{\mathrm{t}} Y_{\mathrm{t}} + X^m Y_m$.

Führen wir diese Zerlegung aus, so erhalten wir die Lagrange-Funktion

$$L[E, \mathcal{A}] = -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{mnp} \left(E_m{}^A E_n{}^B J_{aAB} \mathcal{F}_{\mathrm{t}pa} + E_{\mathrm{t}}^A E_m{}^B J_{aAB} \mathcal{F}_{npa} \right). \tag{2.3.8}$$

Diese vereinfacht sich erheblich, wenn wir eine teilweise Eichfixierung der Lorentz-Gruppe durchführen. Wir verlangen, daß der Kovektor E^0 nur eine Komponente in Richtung der Zeitkoordinate hat, also $E_m{}^0 = 0$. Die übrigen Komponenten des Vierbeins sind E_{ma}, E_{t}^0 und $E_{\mathrm{t}a}$. Die räumlichen Komponenten bilden ein Dreibein $e_{ma} = E_{ma}$ auf der raumartigen Hyperfläche und erzeugen dort eine Metrik $g_{mn} = e_{ma} e_{na}$, die in der gewählten Eichung gerade mit den entprechenden Komponenten der vierdimensionalen Metrik G_{mn} übereinstimmt. Die anderen Komponenten parametrisieren wir durch einen Skalar n und einen Vektor n^m, und zwar so, daß das Vierbein folgende Form annimmt:

$$E_M{}^A = \left(\begin{array}{c|c} E_{\mathrm{t}}^0 & E_{\mathrm{t}}^a \\ \hline E_m{}^0 & E_m{}^a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} ne & n^m e_{ma} \\ \hline 0 & e_{ma} \end{array} \right) \tag{2.3.9}$$

Hier liegt zunächst kein Grund vor, den zusätzlichen Faktor $e = \det(e_{ma})$ in der Zeitkomponente einzufügen und damit n das Gewicht -1 unter Diffeomorphismen auf $\mathcal{N}$ zu geben,[7] er wird allerdings später dafür sorgen, daß alle Zwangsbedingungen zu Polynomen in den kanonischen Variablen werden.

Wenn wir das Vierbein auf diese Weise parametrisieren, haben wir zunächst festgelegt, daß die $\mathrm{t} = \mathrm{const}$-Hyperflächen tatsächlich stets raumartig sind, t also wirklich eine Art "Zeitkoordinate" ist.[8]

Allerdings müssen wir noch eine andere sehr wesentliche Annahme machen. Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß die Metrik nicht entartet ist. Natürlich können wir nur dann das n in (2.3.9) einführen, wenn $e \neq 0$ ist.

Die Lagrange-Funktion (2.3.8) ist aber wohldefiniert auch für entartete Vierbeine mit $E = 0$, denn sie ist quadratisch in $E_M{}^A$ und enthält nicht dessen Inverses. Das gilt auch für die Wirkung als Funktion von Vierbein und Spinzusammenhang (man setze die Definition von E in (2.1.21) ein), es ist also keine Folge von Ashtekars Variablen. Es gibt dann lediglich für entartete Vierbeine keine eindeutige Lösung der Bewegungsleichung für Ω_{MAB} (oder $\mathcal{A}_{Ma}$) mehr, so daß wir nicht mehr zu der ursprünglichen Einstein-Hilbert-Wirkung als Funktion der Metrik übergehen können, die für entartete Metriken nicht definiert ist.

Wir müssen also dieses Problem im Auge behalten, denn es wird bei der Diskussion der quantisierten Zwangsbedingungen eine ganz wesentliche Rolle spielen. Für den Moment nehmen wir stets an, daß das Dreibein invertierbar ist.

Die neben dem räumlichen Dreibein auftretenden Felder n und n^m werden als "Lapse" bzw. "Shift" bezeichnet. Auf ihre physikalische Bedeutung werden wir noch einmal zurückkommen.[9]

Um die verbleibende Lorentz-Symmetrie zu bestimmen, berechnen wir die Wirkung einer Transformation mit Parametern ω_a und v_a auf die Eichfixierung

$$\delta E_{m0} = -\omega_a J_{a0B} E_m{}^B - v_a J^*_{a0B} E_m{}^B = \tfrac{\mathrm{i}}{2}(\omega_a - v_a) E_{ma}. \tag{2.3.10}$$

Es verbleibt also nur noch ein Parameter $\omega_a = v_a$ und die Eichgruppe ist die diagonale Untergruppe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$. Nehmen wir wieder die Realitätsbedingungen hinzu, so muß zusätzlich $\omega_a = \omega_a^*$ sein: wir bekommen die Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$, die in natürlicher Weise auf das räumliche Dreibein $e_{ma} = E_{ma}$ wirkt.

Bestimmen wir nun die in der Lagrange-Funktion auftretenden Funktionen des Vierbeins in der fixierten Eichung. Es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon^{mnp} E_m{}^A E_n{}^B J_{aAB} &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{mnp} e_{mb} e_{nc} \varepsilon_{abc} = -e e_a{}^p = -\tilde{e}_a{}^p, \\ \varepsilon^{mnp} E_{\mathrm{t}}^A E_m{}^B J_{aAB} &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{mnp} n e e_{ma} - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{mnp} n^q e_{qb} e_{mc} \varepsilon_{abc} \\ &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2} n \varepsilon_{abc} \tilde{e}_b{}^n \tilde{e}_c{}^p + n^{[n} \tilde{e}_a{}^{p]}. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

[7] Das Gewicht g eines Tensors ist definiert durch sein Transformations-Verhalten unter einem durch einen Vektor ξ^m erzeugten Diffeomorphismus. Für einen Skalar S gilt zum Beispiel $\delta S = \xi^m \partial_m S + g \partial_m \xi^m S$.

[8] Das ist im Prinzip keine notwendige Voraussetzung, denn es handelt sich ohnehin nur um eine Parameterzeit im Sinne von Kapitel I. Man kann alles auch ohne diese Eichung ableiten, sie vereinfacht aber die Rechnungen ein wenig. Die Herleitung der Zwangsbedingungen ohne diese Eichung ist in [20] ausgeführt. Ohne die Eichung sind außerdem die Voraussetzungen für die holomorphe Quantisierung nicht mehr erfüllt, da es nicht genug Realitätsbedingungen gibt.

[9] Eine anschauliche Darstellung dieser Größen wird in [5], Kapitel 21, gegeben.

Dies sind also Funktionen des Dreibeins “mit Gewicht 1”, das durch $\tilde{e}_a{}^m = e e_a{}^m$ definiert ist. Entsprechend gibt es ein inverses Dreibein mit Gewicht 1, $\tilde{e}_{ma} = e e_{ma}$, und aus dem “gedichteten” Dreibein können wir eine “gedichtete” Metrik $\tilde{g}^{mn}$ bauen. Beides sind quadratische Funktionen von $\tilde{e}_a{}^m$:

$$\tilde{e}_{ma} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{abc}\tilde{e}_b{}^n\tilde{e}_c{}^p, \quad \tilde{g}^{mn} = \tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_a{}^n. \tag{2.3.12}$$

Die Determinante von $\tilde{e}_a{}^m$ bezeichnen wir mit $\tilde{e}$, für sie gilt

$$\tilde{e} = \tfrac{1}{6}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{mnp}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\tilde{e}_c{}^p = \tfrac{1}{3}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_{ma} = e^2, \tag{2.3.13}$$

sie ist also, wie auch $\tilde{g}^{mn}$, eine Funktion vom Gewicht 2.

Man kann auch (2.3.11) als Definition von $\tilde{e}_d{}^p$ auffassen, ohne vorher eine Eichfixierung durchzuführen. Dieses wäre aber dann nicht reell und die Realitätsbedingungen entsprechend komplizierter zu handhaben. Der dreidimensionale flache Index a transformiert jedoch in jedem Fall in der selbstdualen Darstellung der Lorentz-Gruppe, da die flachen Vierbein-Indizes mit J_a kontrahiert werden. Wir können also die kovariante Ableitung eines “flachen” 3-Vektors definieren:

$$\mathcal{D}_m V_a = \partial_m V_a + \varepsilon_{abc}\mathcal{A}_{mb}V_c. \tag{2.3.14}$$

Schreiben wir noch für die Zeitkomponente des Eichfeldes $\mathcal{A}_{ta} = \mathcal{A}_a$, so ist die Lagrange-Funktion gegeben durch das räumliche Integral von

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m\dot{\mathcal{A}}_{ma} - \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m\mathcal{D}_m\mathcal{A}_a - \tfrac{1}{2}n\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\mathcal{F}_{mnc} - \mathrm{i}n^m\tilde{e}_a{}^n\mathcal{F}_{mna}. \tag{2.3.15}$$

Wir haben also die Wirkung auf die Standardform gebracht, die Lagrange-Funktion ist

$$L = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m\dot{\mathcal{A}}_{ma} - \widetilde{H}[\tilde{e}_a{}^m, \mathcal{A}_{ma}, n, n^m, \mathcal{A}_a], \tag{2.3.16}$$

und die primären Realitätsbedingungen lauten $\tilde{e}_a{}^m, n^m, n \in \mathbb{R}$.

Zwangsbedingungen

Unsere kanonischen Orts- und Impulsvariablen sind $\mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x})$ und $\tilde{e}_a{}^m(\boldsymbol{x})$. Die Lagrange-Multiplikatoren sind $n(\boldsymbol{x})$, $n^m(\boldsymbol{x})$ und $\mathcal{A}_a(\boldsymbol{x})$. Da sie linear auftreten, bekommen wir die primären Zwangsbedingungen sofort als Funktion der kanonischen Variablen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_a &= \frac{\delta L}{\delta \mathcal{A}_a} = \mathrm{i}\mathcal{D}_m\tilde{e}_a{}^m, \\ \boldsymbol{K}_m &= \frac{\delta L}{\delta n^m} = -\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^n\mathcal{F}_{mna}, \\ \boldsymbol{H} &= \frac{\delta L}{\delta n} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\mathcal{F}_{mnc}. \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Der zu $\mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x})$ konjugierte Impuls ist $\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m(\boldsymbol{x})$. Der zusätzliche Faktor i erscheint dann auch in den Poisson-Klammern

$$\{\mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x}), \tilde{e}_b{}^n(\boldsymbol{y})\} = -\mathrm{i}\eta_{ab}\delta^n_m\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \tag{2.3.18}$$

An dieser Stelle wird klar, warum wir n zu einer Dichte mit Gewicht -1 machen wollten, indem wir in (2.3.9) einen zusätzlichen Faktor e einführten: Ohne diesen würde in $\boldsymbol{H}$ ein Faktor e^{-1} auftreten und dies wäre kein Polynom in den kanonischen Variablen $\mathcal{A}_{ma}$ und $\tilde{e}_a{}^m$. Mit der Einführung von Ashtekars Variablen und der speziellen Wahl der Eichung und der Parametrisierung des Vierbeins werden also alle Zwangsbedingungen der Gravitation zu Polynomen in zueinander konjugierten Variablen.

Als nächstes müssen wir feststellen, ob durch die primären Zwangsbedingungen $\boldsymbol{G}_a$, $\boldsymbol{K}_m$ und $\boldsymbol{H}$ weitere, sekundäre Zwangsbedingungen induziert werden, da auch deren Zeitentwicklung, gegeben durch die Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion, verschwinden muß.

Dazu führen wir zunächst “verschmierte” Bedingungen ein, indem wir die Zwangsbedingungen mit Parametern $\omega_a(\boldsymbol{x})$ etc. multiplizieren und über den Raum integrieren:

$$\boldsymbol{G}[\omega_a] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\omega_a\boldsymbol{G}_a, \quad \boldsymbol{K}[\xi^m] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\xi^m\boldsymbol{K}_m, \quad \boldsymbol{H}[\xi] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\xi\boldsymbol{H}. \tag{2.3.19}$$

Mit diesen Definitionen können wir die Hamilton-Funktion sehr elegant schreiben als

$$H = \boldsymbol{G}[\mathcal{A}_a] + \boldsymbol{K}[n^m] + \boldsymbol{H}[n]. \tag{2.3.20}$$

Wie erwartet ist sie eine Linearkombination der Zwangsbedingungen, denn die Zeit t war ja, genau wie beim Punktteilchen in Kapitel I, nur ein willkürlicher Parameter.

Um festzustellen, ob noch weitere Zwangsbedingungen induziert werden, betrachten wir zunächst die Wirkung von $\boldsymbol{G}_a$, $\boldsymbol{K}_m$ und $\boldsymbol{H}$ auf die kanonischen Variablen.

Für $\boldsymbol{G}[\omega_a]$ bekommen wir

$$\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{G}[\omega_a]\} = \varepsilon_{abc}\omega_b\tilde{e}_c{}^m, \quad \{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{G}[\omega_a]\} = -\mathcal{D}_m\omega_a. \tag{2.3.21}$$

Offenbar ist $\boldsymbol{G}_a$ der Erzeuger der SO(3)-Transformationen, deren Eichfeld $\mathcal{A}_{ma}$ ist. $\boldsymbol{G}_a$ wird daher auch als SO(3)- oder Gauß-Bedingung bezeichnet, da es formal dem Gaußschen Gesetz für eine SO(3) Eichtheorie entspricht, das besagt, daß die Divergenz des elektrischen Feldes verschwindet. In gewissem Sinne ist das Dreibein das zum Potential $\mathcal{A}_{ma}$ konjugierte elektrische Feld, jedoch gilt diese Analogie nur sehr eingeschränkt: Die Wirkung ist nicht die Yang-Mills-Wirkung für eine SO(3)-Eichtheorie. Trotzdem lassen sich einige aus der Eichtheorie bekannten Invarianten, zum Beispiel Wilson-Schleifen, ganz ähnlich definieren und sie werden weiter unten auch noch eine Rolle spielen.

Die von $\boldsymbol{K}[\xi^m]$ erzeugten Transformationen sind

$$\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{K}[\xi^m]\} = \mathcal{D}_n(\xi^m\tilde{e}_a{}^n - \xi^n\tilde{e}_a{}^m), \quad \{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{K}[\xi^m]\} = \xi^n\mathcal{F}_{mna}. \tag{2.3.22}$$

Diese lassen sich zerlegen in eine Translation und eine SO(3)-Drehung mit feldabhängigem Parameter $\omega_a = -\mathcal{A}_{ma}\xi^m$, jedenfalls für physikalische Feldkonfigurationen, daß heißt die Zerlegung gilt nur bis auf Terme proportional zu den Zwangsbedingungen (in diesem Fall zu $\boldsymbol{G}_a$):

$$\begin{aligned}\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{K}[\xi^m]\} &\approx \tilde{e}_a{}^n \partial_n \xi^m - \partial_n(\xi^n \tilde{e}_a{}^m) - \varepsilon_{abc}\xi^n \mathcal{A}_{nb}\tilde{e}_c{}^m, \\ \{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{K}[\xi^m]\} &= -\xi^n \partial_n \mathcal{A}_{ma} - \partial_m \xi^n \mathcal{A}_{na} + \mathcal{D}_m(\xi^n \mathcal{A}_{na}).\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Die beiden ersten Terme sind jeweils die Lie-Ableitungen des Vektors $\tilde{e}_a{}^m$ mit Gewicht 1 bzw. des Kovektors $\mathcal{A}_{ma}$ in Richtung des Vektors $-\xi^m$. Die letzten Terme entsprechen einer SO(3)-Transformation mit Parameter $-\xi^m \mathcal{A}_{ma}$. Das legt nahe, einen Erzeuger $\boldsymbol{D}[\xi^m]$ von Translationen so zu definieren, daß dieser nur die Lie-Ableitungen liefert:

$$\begin{aligned}\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= -\mathcal{L}_{(\xi^m)}\tilde{e}_a{}^m = \tilde{e}_a{}^n \partial_n \xi^m - \partial_n(\xi^n \tilde{e}_a{}^m), \\ \{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= -\mathcal{L}_{(\xi^m)}\mathcal{A}_{ma} = -\xi^n \partial_n \mathcal{A}_{ma} - \partial_m \xi^n \mathcal{A}_{na}.\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Wir erhalten ihn, indem wir von $\boldsymbol{K}_m$ den entsprechenden Erzeuger der "überflüssigen" SO(3)-Transformation abziehen:

$$\boldsymbol{D}_m = \boldsymbol{K}_m + \mathcal{A}_{ma}\boldsymbol{G}_a = \mathrm{i}\partial_n(\tilde{e}_a{}^n \mathcal{A}_{ma}) - \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^n \partial_m \mathcal{A}_{na}. \tag{2.3.25}$$

Mit diesem neuen Erzeuger von "echten Translationen" können wir die Hamilton-Funktion schreiben als

$$H = \boldsymbol{G}[\mathcal{A}_a - n^m \mathcal{A}_{ma}] + \boldsymbol{D}[n^m] + \boldsymbol{H}[n]. \tag{2.3.26}$$

Die Funktionen $\boldsymbol{G}_a$ und $\boldsymbol{D}_m$ bilden die sogenannten "kinematischen" Zwangsbedingungen. Sie sind in den kanonischen Variablen höchstens bilinear und erzeugen deshalb lineare Transformationen im Phasenraum. Wie kennen in diesem Fall auch die entsprechenden endlichen Transformationen: es sind die SO(3)-Rotationen und die Diffeomorphismen auf der raumartigen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Die kinematischen Zwangsbedingungen bilden eine geschlossene Algebra:

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{G}[\omega_a], \boldsymbol{G}[\omega'_a]\} &= \boldsymbol{G}[\varepsilon_{abc}\omega'_b\omega_c], \\ \{\boldsymbol{D}[\xi^m], \boldsymbol{D}[\xi'^m]\} &= \boldsymbol{D}[\xi'^n \partial_n \xi^m - \xi^n \partial_n \xi'^m], \\ \{\boldsymbol{G}[\omega_a], \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= \boldsymbol{G}[\xi^m \partial_m \omega_a],\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

wobei die auf der rechten Seite stehenden Argumente gerade durch die Wirkung der einen Transformation auf den Parameter des jeweils anderen Erzeugers gegeben ist.

Die sechs Erzeuger (je Raum-Punkt) $\boldsymbol{G}_a(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{D}_m(\boldsymbol{x})$ entsprechen also den Eichsymmetrien der Lagrange-Funktion L: sie ist invariant unter lokalen SO(3)-Rotationen und unter $\mathcal{N}$-Diffeomorphismen. Die ursprüngliche Wirkung hatte aber noch eine weitere Eichsymmetrie: sie war invariant unter beliebigen Diffeomorphismen der 4-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, es fehlt demnach noch ein Erzeuger für die Reskalierungen des Zeitparameters t, und natürlich ist dies gerade die "Hamiltonsche"-Zwangsbedingung $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$. Sie entspricht der "Klein-Gordon"-Zwangsbedingung für das Punktteilchen, denn diese erzeugte ja dort die Reskalierungen der Parameterzeit τ.

Die Wirkung von $\boldsymbol{H}[\xi]$ auf die kanonischen Variablen ist

$$\begin{aligned}\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{H}[\xi]\} &= -\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\mathcal{D}_n(\xi\tilde{e}_{pa}), \\ \{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{H}[\xi]\} &= \mathrm{i}\varepsilon_{abc}\xi\tilde{e}_b{}^n \mathcal{F}_{mnc} = 2\mathrm{i}\,\xi\,\mathcal{D}_{[n}\mathcal{D}_{m]}\tilde{e}_a{}^n,\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

und dies können wir auch hier wieder auf verschiedene Arten interpretieren. Wir können der Hamiltonschen Zwangsbedingung $\boldsymbol{H}$, die wir im Gegensatz zu den kinematischen Bedingungen $\boldsymbol{G}_a$ und $\boldsymbol{D}_m$ als "dynamische" Bedingung bezeichnen, eine "aktive" Bedeutung geben, indem wir sagen, sie erzeugt die Zeitentwicklung der raumartigen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$.

Die Vorstellung ist dann etwa die folgende: Auf einer 3-Mannigfaltigkeit werden die Anfangswerte $(\tilde{e}_a{}^m(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x}))$ vorgegeben, die die Zwangsbedingungen $\boldsymbol{G}_a$, $\boldsymbol{D}_m$ und $\boldsymbol{H}$ erfüllen. Dann wählen wir ein Parameterfeld $n(\boldsymbol{x}, \mathrm{t})$ (und n^m, $\mathcal{A}_a$, aber diese erzeugen nur zusätzliche Eichtransformationen auf der 3-Mannigfaltigkeit selbst). Dieses Feld bestimmt dann, wie sich die 3-Mannigfaltigkeit in der Zeit t entwickelt und so eine 4-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathcal{N} \times \mathbb{R}$ entsteht.

Mit (2.3.9) können wir dann aus den Feldern $\tilde{e}_a{}^m(\boldsymbol{x}, \mathrm{t})$ wieder ein Vierbein und damit eine Metrik auf $\mathcal{M}$ rekonstruieren. Wie für unser Punktteilchen ergibt sich aber ein Problem:[10] Für verschiedene Werte von $n(\boldsymbol{x}, \mathrm{t})$ werden wir mit dieser Methode im allgemeinen auch verschiedene Bereiche der 4-Mannigfaltigkeit übersteichen, genau wie die Weltlinie des Punktteilchens für "ungeschickte" Werte des Einbeins zum Beispiel eine endlich lange Strecke wurde.

Nun gibt es für eine vorgegebene Anfangsbedingung so etwas wie eine "maximale 4-Mannigfaltigkeit" $\mathcal{M}$ mit einer Metrik, die die Einstein-Gleichungen löst und die auf einer raumartigen Hyperfläche durch die Anfangswerte gegeben ist. Es stellt sich dann die Frage, ob es überhaupt eine Wahl für $n(\boldsymbol{x}, \mathrm{t})$ so gibt, daß $\mathcal{N} \times \mathbb{R}$ ganz $\mathcal{M}$ abdeckt, vorausgesetzt, daß $\mathcal{M}$ überhaupt diffeomorph zu $\mathcal{N} \times \mathbb{R}$ ist. Diese Frage ist natürlich verwandt mit dem Problem, auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ein globales Koordinatensystem zu definieren bzw. die maximale Raumzeit zu finden, die dieses $\mathcal{M}$ als Teilmenge enthält.

Beim Punktteilchen hatten wir gesehen, daß wir zumindest einen Teil dieser Probleme dadurch lösen können, daß wir die Diracsche kanonische Formulierung sehr ernst nehmen und $\boldsymbol{H}$ wirklich nur als Erzeuger einer Eichsymmetrie betrachten. Die Zeitentwicklung der Feldkonfiguration $\tilde{e}_a{}^m(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x})$ ist dann völlig uninteressant, da sie nur noch eine Eichtransformation ist.

Beziehen wir also $\boldsymbol{H}$ mit in unsere Algebra von Zwangsbedingungen ein. Dann bekommen wir eine etwas vergrößerte Algebra, die immer noch die Unteralgebra der kinematischen

[10] Siehe [5], Kapitel 21.8 für eine Diskussion dieser "Zeitentwicklung". Auch die kanonische Behandlung einer Feldtheorie im flachen Minkowski-Raum mit krummlinigen Koordinaten, wie sie im letzten Kapitel von [2] durchgeführt wird, stößt auf die gleichen Probleme.

Zwangsbedingungen (2.3.27) enthält. Zusätzlich gilt

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{H}[\xi], \boldsymbol{G}[\omega_a]\} &= 0, \\
\{\boldsymbol{H}[\xi], \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= \boldsymbol{H}[\xi^m \partial_m \xi - \xi \partial_m \xi^m], \\
\{\boldsymbol{H}[\xi], \boldsymbol{H}[\xi']\} &= \boldsymbol{K}[\tilde{g}^{mn}(\xi' \partial_n \xi - \xi \partial_n \xi')].
\end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Die ersten beiden Klammern drücken die Tatsache aus, daß der Parameter ξ invariant unter SO(3)-Rotationen ist und ein Skalar vom Gewicht -1 unter Diffeomorphismen.

Die letzte Klammer bedeutet anschaulich folgendes: Wenn wir zwei Transformationen mit unterschiedlichen Parameters ξ und ξ' nacheinander durchführen, also die Hyperfläche $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ "verschieben", hängt zwar die so erhaltene neue Hyperfläche nicht von der Reihenfolge der Verschiebungen ab, aber die Felder auf der neuen Hyperfläche unterscheiden sich um eine durch $\boldsymbol{K}$ erzeugte Translation und SO(3)-Rotation.

Der Parameter von $\boldsymbol{K}$ hängt auch noch von den Feldern selbst ab, das heißt die Strukturkonstanten der Algebra sind selbst feldabhängig. Dies wird ein kritischer Punkt bei der Darstellung der Zwangsbedingungen durch Quantenoperatoren sein, denn dann sollten die Strukturkonstanten links von den Zwangsbedingungen stehen, damit die Algebra konsistent ist.

Im Rahmen der klassischen Theorie haben wir dieses Problem aber nicht. Aus (2.3.29) entnehmen wir, daß die Poisson-Klammern der Zwangsbedingungen selbst wieder schwach verschwinden und haben damit gezeigt, daß durch die Bewegungsgleichungen keine neuen Zwangsbedingungen mehr erzeugt werden und diese ein System von Bedingungen erster Klasse bilden.

Es stellt sich nun die Frage, ob man analog zu den Observablen für das Punktteilchen auch hier Funktionen von $\tilde{e}_a{}^m$ und $\mathcal{A}_{ma}$ angeben kann, die mit allen Zwangsbedingungen vertauschen. Aus diesen sollten wir dann die physikalischen Aussagen ableiten können. Formal können wir auch hier einen Zeitentwicklungoperator einführen, indem wir (1.1.16) übernehmen:

$$\mathcal{E}(F, H, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n \{\ldots\{\{F, \underbrace{H\}, H\}, \ldots, H\}}_{n}. \tag{2.3.30}$$

Eine alternative Definition ist wieder die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{E}(F, H, u) = \{\mathcal{E}(F, H, u), H\}, \quad \mathcal{E}(F, H, 0) = F. \tag{2.3.31}$$

Nun können wir eine Eichung fixieren, also n, n^m und $\mathcal{A}_a$ als Funktion der kanonischen Variablen festlegen. Eine beliebige Phasenraumfunktion F definiert dann

$$\mathcal{O} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\, \mathcal{E}(F, H, u). \tag{2.3.32}$$

Nun ist dies aber im allgemeinen keine Observable, denn um das zu zeigen, hatten wir explizit benutzt, daß es für das Punktteilchen überhaupt nur eine Zwangsbedingung gab und H dazu proportional ist. Es ist also hier sehr viel schwieriger, auf diese Art eine Observable zu konstruieren. Ein Ansatz ist, die Funktion F bereits so zu wählen, daß sie mit allen bis auf eine Zwangsbedingung vertauscht, dann können wir für die letzte verbleibende, nennen wir sie $\boldsymbol{H}_0$, wieder benutzen, daß

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{O}, \boldsymbol{H}_0\} &= \int \mathrm{d}u\, \{\mathcal{E}(F, H, u), \boldsymbol{H}_0\} \\
&\approx n_0^{-1} \int \mathrm{d}u\, \{\mathcal{E}(F, H, u), H\} = n_0^{-1} \int \mathrm{d}u\, \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{E}(F, H, u) = 0,
\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

wobei n_0 der Vorfaktor von $\boldsymbol{H}_0$ in H ist. Damit ist aber das Problem noch nicht gelöst: Um die Observable d^i_t für das Teilchen explizit anzugeben, haben wir auch noch eine Art "Referenzvariable", nämlich x^0, benutzen müssen: Diese haben wir dann als physikalische Zeit benutzt und alle Observablen bezogen sich auf diese Referenzvariable: d^i_t war der Wert von x^i zu der Parameterzeit, zu der x^0 den Wert t hat.

Gerade das ist ein großes Problem in der kanonischen Formulierung der Gravitation, denn es gibt keine derartige Referenzvariable. Ein Ansatz zur Lösung dieses Problems besteht darin, zusätzliche Materiefelder einzuführen, die in wohldefinierter Weise an das Gravitationsfeld koppeln und dann als Referenzsystem dienen. So kann man zum Beispiel ein "Uhrenfeld" einführen, im wesentlichen ein skalares Feld, dessen Bewegung darin besteht, linear in der physikalischen Zeit anzusteigen.[11] Dieses Feld dient dann ganz ananlog zu x^0 dazu, eine Eichung zu fixieren und Observable zu definieren, etwa "Das Volumen des Universums zur Zeit t", also das der Hyperfläche, die durch Uhrenfeld $= t$ definiert ist.

Realitätsbedingungen

Bisher haben wir nur die holomorphen Zwangsbedingungen für die Wirkung (2.3.1) diskutiert und die Realitätsbedingungen $E_M{}^A \in \mathbb{R}$ vernachlässigt. Wir wollen nun die dadurch erzeugten sekundären Realitätsbedingungen bestimmen und werden zeigen, daß sie alle Forderungen erfüllen, die wir in Kapitel I stellen mußten, damit die Dirac-Klammern mit den holomorphen Klammern, die wir ja schon die ganze Zeit benutzen, übereinstimmen. Wir werden auch sehen, daß wir auf diese Weise die bekannten Realitätsbedingungen für Ashtekars Variable wiederbekommen, nämlich daß der Realteil von $\mathcal{A}_{ma}$ durch den dreidimensionalen Spinzusammenhang gegeben ist.

Um die sekundären Realitätsbedingungen zu ermitteln, benutzen wir die Hamilton-Funktion in der Form

$$H = \boldsymbol{G}[\mathcal{A}_a] + \boldsymbol{K}[n^m] + \boldsymbol{H}[n]. \tag{2.3.34}$$

[11] Natürlich muß man auch noch die Bewegung der Uhren im Raum noch irgendwie beschreiben, um für jede Uhr ein wohldefiniertes lokales Ruhesystem zu bekommen. Einige Ansätze dazu gibt es in [37, 38]. Sehr ausführliche Diskussionen über das Problem der Zeitdefinition in der Quantengravitation findet man in [39, 40, 41].

Wir haben die primären Realitätsbedingungen

$$\tilde{e}_a{}^m \in \mathbb{R}, \quad n, n^m \in \mathbb{R}, \tag{2.3.35}$$

wobei die ersten Funktionen der kanonischen Variablen sind, sie sind also die R_α aus Kapitel I, während die restlichen die Multiplikatoren einschränken und den S_μ entsprechen. Wir müssen fordern, daß die Klammer von $\tilde{e}_a{}^m$ mit H selbst wieder reell ist:

$$\{\tilde{e}_a{}^m, H\} = \varepsilon_{abc}\mathcal{A}_b\tilde{e}_c{}^m + \mathcal{D}_n(n^m\tilde{e}_a{}^n - n^n\tilde{e}_a{}^m) - \mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\mathcal{D}_n(n\tilde{e}_{pa}) \in \mathbb{R}. \tag{2.3.36}$$

Hier sind einige Terme selbst schon reell oder proportional zu $\boldsymbol{G}_a$. Wenn wir dann noch die kovariante Ableitung $\mathcal{D}_n\tilde{e}_a{}^m$ explizit ausschreiben als $\partial_n\tilde{e}_a{}^m + \varepsilon_{abc}\mathcal{A}_{nb}\tilde{e}_c{}^m$ und verwenden, daß die normale Ableitung von $\tilde{e}_a{}^m$ reell ist, bleibt schließlich übrig

$$\varepsilon_{abc}\tilde{e}_c{}^m\left(\mathcal{A}_b - n^n\mathcal{A}_{nb} + \mathrm{i}\tilde{e}_b{}^n\partial_n n\right) - \mathrm{i}\varepsilon^{mnp}n\mathcal{D}_n\tilde{e}_{pa} \in \mathbb{R}. \tag{2.3.37}$$

Nun müssen wir hieraus neue Bedingungen an die kanonischen Variablen und an die Multiplikatoren ableiten. Wir erhalten eine Bedingung an die Multiplikatoren $\mathcal{A}_a$, wenn wir den Ausdruck mit $\tilde{e}_{md}$ multiplizieren und in a, d antisymmetrisieren. Da der letzte Term dann symmetrisch unter Vertauschung von a, p mit d, m ist, bekommen wir

$$\varepsilon_{abd}\tilde{e}\left(\mathcal{A}_b - n^n\mathcal{A}_{nb} + \mathrm{i}\tilde{e}_b{}^n\partial_n n\right) - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{mnp}n\mathcal{D}_n(\tilde{e}_{pa}\tilde{e}_{md}) \in \mathbb{R}. \tag{2.3.38}$$

Ein paar weitere Umformungen und nochmaliges Verwenden der Gauß-Bedingung im letzten Term führt schließlich zu

$$\mathcal{A}_b - n^m\mathcal{A}_{mb} + \mathrm{i}e_b{}^n\partial_n(ne) \in \mathbb{R}, \tag{2.3.39}$$

wobei wir wieder benutzt haben, daß die Metrik invertierbar ist, also $\tilde{e} \neq 0$ Dies ist offenbar eine Einschränkung an den Imaginärteil des Multiplikators $\mathcal{A}_b$, wir haben also ein neues "S_ν", eine Realitätsbedingung für die Multiplikatoren gefunden. Bilden wir die in a, d symmetrische Form statt der antisymmetrischen, so fallen die Terme heraus, die explizit $\mathcal{A}$ und Ableitungen von n enthalten, und wir erhalten eine Realitätsbedingung an die kanonischen Variablen

$$\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\tilde{e}_{m(a}\mathcal{D}_n\tilde{e}_{pb)} \in \mathbb{R}. \tag{2.3.40}$$

Es ist nicht sofort offensichtlich, daß diese Bedingung äquivalent zu der bekannteren Version

$$\operatorname{Re}\mathcal{A}_{ma} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\omega_{mbc} \tag{2.3.41}$$

ist, wobei ω_{mab} der dreidimensionale Spinzusammenhang ist, der wie in (2.1.11) eine kovariante Ableitung definiert und als Funktion des Dreibeins durch die Forderung nach verschwindender Torsion gegeben ist:

$$D_m V_a = \partial_m V_a + \omega_{mab}V_b, \quad D_{[m}e_{n]a} = 0 \tag{2.3.42}$$

Als Folge der polynomialen Formulierung der Zwangsbedingungen erhalten wir auch die Realitätsbedingungen als ein Polynom in den kanonischen Variablen. Allerdings sind sie solche vierten Grades in $\tilde{e}_a{}^m$. Ob sie in dieser Form einfacher zu handhaben sind als die Gleichungen (2.3.41), ist nicht klar, denn wie wir aus Kapitel I wissen, kommen sie erst bei der Konstruktion eines Skalarproduktes auf dem physikalischen Zustandsraum wieder zum Tragen, und dort ist weder (2.3.40) noch die Form (2.3.41) eine "Hermitizitätsbedingung", denn weder $\mathcal{A}_{ma}$ noch $\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\tilde{e}_{m(a}\mathcal{D}_n\tilde{e}_{pb)}$ sind Observable, also als Operatoren auf dem physikalischen Zustandsraum realisiert.

Um zu zeigen, daß die beiden Formen der Realitätsbedingungen äquivalent sind, eliminieren wir die Multiplikatoren aus (2.3.37), indem wir (2.3.39) benutzen und wieder einsetzen. Dann fallen die $\mathcal{A}$-Terme weg und wir bekommen

$$\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\,\mathcal{D}_n\tilde{e}_{pa} - \mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\,e_{pa}\partial_n e \in \mathbb{R}. \tag{2.3.43}$$

Offenbar bewirkt der zweite Term gerade, daß wir einen Faktor e aus der Ableitung $\mathcal{D}_n\tilde{e}_{pa}$ herausziehen können. Wir bekommen dann die Bedingung

$$p_a{}^m = \mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\mathcal{D}_n e_{pa} \in \mathbb{R}. \tag{2.3.44}$$

Sie ist allerdings im Gegensatz zu (2.3.40) kein Polynom in den kanonischen Variablen. Aber wir können jetzt sofort ablesen, daß die Realitätsbedingungen die bekannte Form haben, denn der Imaginärteil von $p_a{}^m$ ist explizit

$$\operatorname{Im}p_a{}^m = \varepsilon^{mnp}\partial_n e_{pa} + \varepsilon^{mnp}\varepsilon_{abc}\operatorname{Re}\mathcal{A}_{nb}\,e_{pc} = 0, \tag{2.3.45}$$

und das ist äquivalent zu (2.3.41).

Wir können also die Realitätsbedingungen entweder in der gewohnten Form (2.3.44) angeben, oder in einer polynomialen Form (2.3.40), die sich durch den holomorphen Formalismus und da die Hamilton-Funktion selbst ein Polynom ist, ganz automatisch ergibt. Beim Übergang von den polynomialen Bedingungen zu $p_a{}^m \in \mathbb{R}$ ist aber noch etwas ungewöhnliches passiert: Statt sechs Bedingungen haben wir plötzlich neun. Der Grund dafür ist, daß wir "unterwegs" die Gauß-Bedingung $\boldsymbol{G}_a \approx 0$ benutzt haben. Der vollständige Satz von polynomialen Realitätsbedingungen ist daher

$$\tilde{e}_a{}^m \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\tilde{e}_{m(a}\mathcal{D}_n\tilde{e}_{pb)} \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}\mathcal{D}_m\tilde{e}_a{}^m \in \mathbb{R}. \tag{2.3.46}$$

Tatsächlich ist der Imaginärteil der Gauß-Bedingung eine Zwangsbedingung zweiter Klasse. Er vertauscht nicht mit den Realitätsbedingungen $\operatorname{Im}\tilde{e}_a{}^m = 0$ und der zugehörige Multiplikator (der Imaginärteil von $\mathcal{A}_b$) ist durch (2.3.39) fixiert.

Damit haben wir insgesamt genausoviele Realitätsbedingungen wie kanonische Variable. Wenn wir jetzt noch zeigen, daß die Poisson-Klammern dieser Bedingungen reell sind, können wir aus den allgemeinen Betrachtungen aus Kapitel I schließen, daß wir alle Zwangsbedingungen gefunden haben, und daß die Dirac-Klammern tatsächlich mit den bis jetzt verwendeten holomorphen Klammern übereinstimmen, so daß wir diese als Vertauschungsrelationen in die Quantentheorie übernehmen können.

Durch explizites Berechnen der Klammern kann man tatsächlich zeigen, daß sie reell werden. Es gibt aber einen einfacheren Weg. Die $p_a{}^m$ bilden nämlich zusammen mit den e_{ma} selbst wieder ein kanonisches Paar: Es gibt ein Funktional $F[e_{ma}, \mathcal{A}_{ma}]$, das die Transformation von dem Paar $(\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m, \mathcal{A}_{ma})$ auf $(p_a{}^m, e_{ma})$ erzeugt. Es ist gegeben durch[12]

$$F = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathrm{i}\varepsilon^{mnp} e_{ma} \mathcal{D}_n e_{pa}\,, \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta F}{\delta e_{ma}} = p_a{}^m, \quad \frac{\delta F}{\delta \mathcal{A}_{ma}} = \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m. \tag{2.3.47}$$

Die Poisson-Klammern der Realitätsbedingungen sind somit reell, denn wir können die Bedingung $\tilde{e}_a{}^m \in \mathbb{R}$ durch $e_{ma} \in \mathbb{R}$ ersetzen, und dann lauten die Klammern, wieder mit der Konvention, daß wir Ortsabhängigkeit und Delta-Funktionen weglassen, wenn keine Verwechsungen auftreten können,

$$\{e_{ma}, e_{nb}\} = 0, \quad \{p_a{}^m, e_{nb}\} = \eta_{ab}\delta^m_n, \quad \{p_a{}^m, p_b{}^n\} = 0. \tag{2.3.48}$$

Natürlich besagt dies nichts anderes, als daß die $p_a{}^m$ die Impulse des Dreibeins e_{ma} sind, wenn wir dies als "Ortsvariable" verwenden und nicht Ashtekars Zusammenhang $\mathcal{A}_{ma}$ einführen. Durch die Realitätsbedingungen bekommen wir also implizit die Rücktransformation auf den Dreibein-Formalismus geliefert. Der meist übliche Zugang zu Ashtekars Variablen führt dagegen über den umgekehrten Weg:[13] man formuliert zuerst die Vierbein-Wirkung kanonisch, indem man die Eichung wie in (2.3.9) einführt, dann bekommt man die Impulse $p_a{}^m$ als Ableitungen der Einstein-Hilbert-Wirkung nach den Geschwindigkeiten $\dot{e}_{ma}$, und schließlich führt man mit Hilfe des Funktionals F die (komplexe) kanonische Transformation zu Ashtekars Variablen durch. Man bekommt auf diese Weise zwar die Realitätsbedingungen gleich mitgeliefert, jedoch ist der Zusammenhang von $\mathcal{A}_{ma}$ auf der dreidimensionalen Hyperfläche mit dem vierdimensionalen selbstdualen Spinzusammenhang nicht mehr offensichtlich, sondern erscheint mehr als eine zufällige Übereinstimmmung.

Daß beim Einführen der Realitätsbedingungen in gewissem Sinne die Variablen des metrischen Formalismus wieder zum Vorschein kommen, deutet natürlich auf ein Problem hin: Möglicherweise werden dadurch in der Quantentheorie alle Schwierigkeiten der metrischen Formulierung wieder auftauchen, sobald man die Realitätsbedingungen lösen will. Wie wir aus Kapitel I wissen, benötigen wir diese erst "ganz am Schluß", also bei der Definition eines Skalarproduktes auf dem physikalischen Zustandsraum. Möglicherweise liegt es gerade daran, daß man mit Ashtekars Variablen beim Versuch, durch kanonische Quantisierung zu einer Quantengravitation zu gelangen, ein wenig weiter kommt als in anderen Darstellungen: Die schwierigeren Probleme treten einfach erst in den letzten Schritten auf.

[12] Daß man die neuen Variablen durch eine kanonische Transformation mit Hilfe eines solchen Funktionals durchführen kann, wird in [43] gezeigt.

[13] Die Einführung von Ashtekars Variablen nach der Aufspaltung dei Raumzeit durch eine kanonische Transformation ist, mit ansonsten gleichen Konventionen, in [27], Kapitel 3, beschrieben.

4. Quantisierung

Wir wollen nun versuchen, die Einsteinsche Gravitation, formuliert in Ashtekars Variablen, zu quantisieren. Im Prinzip haben wir die Wahl zwischen der $\tilde{e}$-Darstellung, in der die Operatoren durch

$$\widehat{\tilde{e}}_a{}^m = \tilde{e}_a{}^m, \quad \widehat{\mathcal{A}}_{ma} = -\frac{\delta}{\delta \tilde{e}_a{}^m} \tag{2.4.1}$$

definiert sind und der $\mathcal{A}$-Darstellung mit

$$\widehat{\mathcal{A}}_{ma} = \mathcal{A}_{ma}, \quad \widehat{\tilde{e}}_a{}^m = \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}}. \tag{2.4.2}$$

In beiden Fällen erfüllen die Operatoren die Vertauschungsrelation

$$[\widehat{\mathcal{A}}_{ma}(\boldsymbol{x}), \widehat{\tilde{e}}_b{}^n(\boldsymbol{y})] = -\eta_{ab}\delta^n_m \delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{2.4.3}$$

was genau dem $(-\mathrm{i})$-fachen der Poisson-Klammer (2.3.18) entspricht. Da dort ein Faktor i auftrat, fehlt dieser Faktor in den Differentialoperatoren. Die Operatoren wirken jeweils auf holomorphe Funktionen $\Psi[\tilde{e}]$ bzw. $\Psi[\mathcal{A}]$.

Wir wollen zuerst zeigen, daß die $\tilde{e}$-Darstellung nicht geeignet erscheint, die Vorteile von Ashtekars Variablen auszunutzen. Der Grund dafür ist die Struktur der Gauß-Bedingung. In der $\tilde{e}$-Darstellung ist der entsprechende Operator

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_a(\boldsymbol{x}) = -\partial_m \tilde{e}_a{}^m(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_{abc}\tilde{e}_b{}^m(\boldsymbol{x}) \frac{\delta}{\delta \tilde{e}_c{}^m(\boldsymbol{x})}. \tag{2.4.4}$$

Angewandt auf eine Wellenfunktion $\Psi[\tilde{e}]$ erzeugt dieser jedoch keine SO(3)-Transformationen, so daß $\widehat{\boldsymbol{G}}_a\Psi = 0$ nicht durch solche Ψ gelöst wird, die invariant unter der lokalen Gruppe SO(3) sind. Statt dessen lautet die allgemeine Lösung dieser Bedingung

$$\Psi[\tilde{e}] = \exp\left(\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{mnp} e_{ma} \partial_n e_{pb}\right) \Phi[\tilde{e}], \tag{2.4.5}$$

wobei Φ eine SO(3)-Invariante ist. Wenn wir nun die anderen Bedingungen lösen wollen, müssen wir die Wirkung von $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{D}_m$ auf Φ ermitteln, daß heißt, wir müssen sie durch den exp-Faktor hindurchziehen. Das Ergebnis ist, daß die Bedingungen für Φ wieder die Form annehmen, die sie auch in der metrischen Formulierung haben.[14]

Wir werden also zunächst die $\mathcal{A}$-Darstellung benutzen. Damit die Quantenoperatoren die gleichen Transformationen erzeugen wie die entsprechenden klassischen Größen, definieren

[14] Die Multiplikation der Wellenfunktion mit einem Exponenten $\exp F$ entspricht natürlich gerade einer kanonischen Transformation, und in diesem Fall bekommen wir wieder genau die in Abschnitt 3 diskutierte Transformation auf die reellen Variablen e_{ma} und $p_a{}^m$, also die übliche metrische Darstellung.

wir die Operatoren als das i-fache der klassichen Zwangsbedingungen. Beim Vergleich der klassischen mit der quantisierten Version der Algebra dieser Zwangsbedingungen müssen wir dann keine zusätzlichen Faktoren i berücksichtigen.

Die quantisierten Zwangsbedingungen sind dann

$$\widehat{\boldsymbol{G}}_a = -\mathcal{D}_m \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}},$$
$$\widehat{\boldsymbol{K}}_m = \mathcal{F}_{mna} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{na}},$$
$$\widehat{\boldsymbol{H}} = -\tfrac{i}{2}\varepsilon_{abc}\mathcal{F}_{mnc} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{nb}}. \tag{2.4.6}$$

Die ersten beiden verlangen nichts anderes, als daß die Wellenfunktion invariant ist unter SO(3)-Rotationen und Diffeomorphismen, die Gleichung $\widehat{\boldsymbol{H}}\Psi = 0$, häufig als Wheeler-DeWitt-Gleichung[15] bezeichnet, ist das Analogon zur Klein-Gordon-Gleichung für das Punktteilchen. Sie ist auch hier eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, im Gegensatz zur Wheeler-DeWitt-Gleichung in der metrischen Formulierung aber eine homogene Differentialgleichung.

Die Zwangsbedingungen nehmen also in Ashtekars Formulierung eine sehr einfache Form an. Natürlich sind sie in dieser Form noch nicht wohldefiniert, denn $\boldsymbol{H}$ enthält das Produkt zweier Ableitungen am selben Punkt, muß also regularisiert werden. Wir werden das Problem der Regularisierung hier nicht diskutieren. Es gibt ein paar Ansätze dafür, auf die wir später noch eingehen, eine brauchbare rigorose Definition der Quantenoperatoren, abgesehen von einem einfachen Auseinanderziehen der Punkte, ist jedoch noch nicht gefunden worden.

Ein weiteres Problem speziell der $\mathcal{A}$-Darstellung ist, daß wir eine der wesentlichen Voraussetzungen, die wir für die Ableitung der Zwangsbedingungen benötigt haben, nicht (oder jedenfalls nicht so leicht) in die Quantentheorie übernehmen können: Die Invertierbarkeit der Metrik. In der zuerst vorgeschlagenen Dreibein-Darstellung mit $\tilde{e}_a{}^m$ als Multiplikationsoperator wäre das kein Problem: Die Wellenfunktion wäre ein Funktional, dessen Definitionsbereich die *invertierbaren* Dreibeine sind. Da dies eine offene Teilmenge aller Dreibeine ist, gibt es keine Probleme, die Operatoren $\mathcal{A}_{ma}$ als Ableitungen zu definieren. Es existieren dann auch die "nichtpolynomialen" Operatoren wie etwa e_{ma}.

In der $\mathcal{A}$-Darstellung ist es jedoch nicht klar, wie man diese Bedingung in die Quantentheorie übernehmen kann. Natürlich kann man vorschlagen, einfach darauf zu verzichten und entartete Metriken zuzulassen. Wir haben ja alle wesentlichen Größen als Polynome in den kanonischen Variablen formuliert. Wir wollen das zunächst tun, werden aber am Schluß dieses Kapitels noch darauf zurückkommen.

[15] Die entsprechende Gleichung im metrischen Formalismus wurde wurde in [6, 7] als "Schrödinger"-Gleichung der kanonischen formulieren Gravitation eingeführt.

Die kinematischen Zwangsbedingungen

Wenn wir die Operator-Ordung so festgelegen, daß alle Ableitungen rechts stehen, können wir wieder $\boldsymbol{D}_m = \boldsymbol{K}_m + \mathcal{A}_{ma}\boldsymbol{G}_a$ benutzen statt $\boldsymbol{K}_m$, so daß $\boldsymbol{G}_a$ und $\boldsymbol{D}_m$ die richtigen Transformationen auf der Wellenfunktion erzeugen, also SO(3)-Transformationen und Diffeomorphismen. Das ist sofort klar, wenn man wieder die verschmierten Versionen aufschreibt:

$$\widehat{\boldsymbol{G}}[\omega_a] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{D}_m\omega_a \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}},$$
$$\widehat{\boldsymbol{D}}[\xi^m] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, (\xi^n\partial_n\mathcal{A}_{ma} + \partial_m\xi^n\mathcal{A}_{na}) \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}}. \tag{2.4.7}$$

Diese Operatoren sind wohldefiniert auf differenzierbaren Funktionalen $\Psi[\mathcal{A}]$ und ihre Algebra stimmt mit der klassischen Poisson-Algebra (2.3.27) überein.

Die Lösungen dieser Zwangsbedingungen sind also Wellenfunktionen, die invariant sind unter SO(3)-Rotationen und Diffeomorphismen. Die einfachste nichttriviale solche Funktion ist das Integral über die Chern-Simons-Form

$$C[\mathcal{A}] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{mnp} \big(\mathcal{A}_{ma}\partial_n\mathcal{A}_{pa} + \tfrac{1}{3}\varepsilon_{abc}\mathcal{A}_{ma}\mathcal{A}_{nb}\mathcal{A}_{pc}\big). \tag{2.4.8}$$

Diese wird bei der Suche nach Lösungen aller Zwangsbedingungen nochmal erscheinen, denn mit einer bestimmten Operatorordnung und einer zusätzlichen kosmologischen Konstante kann man daraus eine Lösung aller Zwangsbedingungen konstruieren.

Da die Gauß-Bedingung formal der Zwangsbedingung einer SO(3)-Eichteorie gleicht, kennen wir eine sehr große Menge von Lösungen von $\widehat{\boldsymbol{G}}_a\Psi = 0$. Es sind die aus dem Eichfeld $\mathcal{A}_{ma}$ gebildeten Wilson-Schleifen. Um diese zu bekommen, definieren wir zuerst für eine gegebene Kurve $\lambda : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ den "Paralleltransport"-Operator. Dazu benötigen wir eine Matrixdarstellung der Eichgruppe, in unserem Fall also drei Matrizen M_a, die eine $\mathfrak{so}(3)$ aufspannen:

$$M_aM_b - M_bM_a = \varepsilon_{abc}M_c. \tag{2.4.9}$$

Die einfachste Wahl ist $M_a = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}_a$ mit den Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma}_a$. Ihre Algebra ist

$$\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_b = \eta_{ab}\,\mathbf{1} + i\varepsilon_{abc}\,\boldsymbol{\sigma}_c. \tag{2.4.10}$$

Der Transportoperator $U_\lambda(a, b)$ ist definiert durch

$$U_\lambda(a, a) = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial}{\partial a}U_\lambda(a, b) = \tfrac{i}{2}\dot{\lambda}^m\mathcal{A}_{ma}\,\boldsymbol{\sigma}_a U_\lambda(a, b). \tag{2.4.11}$$

Dabei ist $\dot{\lambda}^m = \partial_t\lambda^m$ der Tangentialvektor an die Kurve und wir benutzen die Konvention, daß Felder, die links bzw. rechts von $U_\lambda(a, b)$ stehen, an der Stelle $\lambda(a)$ bzw. $\lambda(b)$ zu nehmen sind, hier also lautet der Faktor ausgeschrieben $\dot{\lambda}^m(a)\mathcal{A}_{ma}(\lambda(a))$.

Die Differentialgleichung wird durch das pfadgeordnete Integral

$$U_\lambda(a,b) = \mathcal{P}\exp\Big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\int_a^b \mathrm{d}t\,\dot\lambda^m \mathcal{A}_{ma}\boldsymbol{\sigma}_a\Big) \tag{2.4.12}$$

gelöst. Die Pfadordnung ist dabei so definiert, daß Faktoren für solche t, die näher an der unteren Grenze des Integrals liegen, weiter links stehen. Wenn wir den Ausdruck nach a ableiten, erhalten wir also den Integranden an der Stelle a als Faktor *vor* dem Integral, und zwar mit umgekehrtem Vorzeichen, denn wir leiten das Integral nach seiner unteren Grenze ab. Es folgt für die Ableitung von $U_\lambda(a,b)$ nach b

$$\frac{\partial}{\partial b}U_\lambda(a,b) = -U_\lambda(a,b)\boldsymbol{\sigma}_a\,\tfrac{\mathrm{i}}{2}\dot\lambda^m \mathcal{A}_{ma}. \tag{2.4.13}$$

Der Transportoperator hat die Eigenschaft, daß er unter einer lokalen Eichtransformation nur "an den Enden" transformiert. Wir zeigen das, indem wir den Operator $\boldsymbol{G}[\omega_a]$ auf das Funktional $U_\lambda(a,b)$ anwenden. Zunächst bekommen wir

$$\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x})}U_\lambda(a,b) = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\int_a^b \mathrm{d}t\,U_\lambda(a,t)(\dot\lambda^m\boldsymbol{\sigma}_a)U_\lambda(t,b)\,\delta(\boldsymbol{x},\lambda(t)). \tag{2.4.14}$$

Multiplizieren wir das mit $\mathcal{D}_m\omega_a(\boldsymbol{x})$ und integrieren über $\boldsymbol{x}$, so gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{G}}[\omega_a]\,U_\lambda(a,b) &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\int_a^b \mathrm{d}t\,U_\lambda(a,t)\big(\dot\lambda^m\boldsymbol{\sigma}_a\,\mathcal{D}_m\omega_a\big)U_\lambda(t,b)\\ &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\int_a^b \mathrm{d}t\,U_\lambda(a,t)\big(\partial_t\omega_a\boldsymbol{\sigma}_a + \mathrm{i}\dot\lambda^m\mathcal{A}_{mb}\omega_a\,\boldsymbol{\sigma}_{[a}\boldsymbol{\sigma}_{b]}\big)U_\lambda(t,b).\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Wenn wir nun das ∂_t partiell integrieren, heben sich die Terme, die durch Ableitung der U nach t entstehen, wegen der Differentialgleichung für U gerade weg, und es bleibt nur der Randterm übrig:

$$\widehat{\boldsymbol{G}}[\omega_a]U_\lambda(a,b) = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_a\,\boldsymbol{\sigma}_a U_\lambda(a,b) - U_\lambda(a,b)\boldsymbol{\sigma}_a\,\tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_a. \tag{2.4.16}$$

Wir bekommen eine eichinvariante Größe, wenn wir λ zu einer geschlossen Schleife machen und die Spur bilden. Sei also $\lambda(0) = \lambda(1)$, dann definieren wir

$$T_\lambda = \operatorname{Tr} U_\lambda(0,1). \tag{2.4.17}$$

Dies wird als Wilson-Schleife oder Holonomie des Eichfeldes $\mathcal{A}_{ma}$ entlang der Schleife λ bezeichnet und ist tatsächlich eine Lösung der Gauß-Bedingung, da sich die beiden Randterme gegenseitig wegheben.

Nun sind diese Wilson-Schleifen aber keine Invarianten unter Diffeomorphismen. Die Wirkung eines solchen auf T_λ besteht anschaulich darin, daß die Kurve selbst verschoben wird. Der Wert von T_λ ändert sich dabei um eine Betrag, der im wesentlichen durch die Feldstärke von $\mathcal{A}_{ma}$ auf der von der Kurve überstrichenen Fläche gegeben ist. Um das zu sehen, gehen wir wieder von (2.4.14) aus und berechnen daraus die Wirkung von $\boldsymbol{D}[\xi^m]$ auf T_λ:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{D}}[\xi^m]\,T_\lambda &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Tr}\int_0^1 \mathrm{d}t\,U_\lambda(0,t)\,\big(\dot\lambda^m\xi^n\partial_n\mathcal{A}_{ma} + \partial_t\xi^n\mathcal{A}_{na}\big)\,\boldsymbol{\sigma}_a\,U_\lambda(t,1)\\ &= \tfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Tr}\int_0^1 \mathrm{d}t\,U_\lambda(0,t)\,\big(\dot\lambda^m\xi^n\mathcal{F}_{mna}\,\boldsymbol{\sigma}_a\big)\,U_\lambda(t,1),\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

wobei wir wieder eine partielle Integration durchgeführt haben, bei der sich die Randterme wegen der Spurbildung gegenseitig aufheben. Für nicht verschwindende Feldstärke ist T_λ also keine Invariante unter Diffeomorphismen.

Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung

Wie bereits erwähnt ist der Operator $\boldsymbol{H}$, wie er in (2.4.6) angegeben ist, so nicht wohldefiniert. Wir benötigen eine Regularisierung für das Produkt zweier Differentialoperatoren, die am gleichen Punkt im Raum wirken. Die folgenden Ausführungen gelten in diesem Sinne nur formal.[16] Ein einfaches Auseinanderziehen der Punkte mit einer "Schmierfunktion" $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, die im Grenzwert gegen $\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ geht, genügt nicht, um die formalen Lösungen zu exakten Lösungen der regularisieren Gleichungen zu machen.

Betrachten wir zunächst $\boldsymbol{H}$ in der Ordnung wie in (2.4.6) angegeben. Um die zweite Ableitung der Wilson-Schleifen nach $\mathcal{A}$ zu bekommen, müssen wir (2.4.14) nochmal nach $\mathcal{A}_{nb}$ ableiten:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x})}\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{nb}(\boldsymbol{x})}T_\lambda\\ &= -\tfrac{1}{4}\operatorname{Tr}\int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}s\,U(0,s)\,(\dot\lambda^n\boldsymbol{\sigma}_b)\,U(s,t)\,(\dot\lambda^m\boldsymbol{\sigma}_a)\,U(t,1)\,\delta(\boldsymbol{x},\lambda(s))\delta(\boldsymbol{x},\lambda(t))\\ &\quad-\tfrac{1}{4}\operatorname{Tr}\int_0^1 \mathrm{d}t\int_t^1 \mathrm{d}s\,U(0,t)\,(\dot\lambda^m\boldsymbol{\sigma}_a)\,U(t,s)\,(\dot\lambda^n\boldsymbol{\sigma}_b)\,U(s,1)\,\delta(\boldsymbol{x},\lambda(t))\delta(\boldsymbol{x},\lambda(s)).\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Durch Vertauschen von s mit t in der zweiten Zeile können wir das in ein Integral zusammenfassen:

[16] Ein Ansatz für eine Regularisierung bietet die sogenannte Schleifendarstellung [16]. Sie liefert in natürlicher Weise eine (teilweise) Regularisierung für die Wheeler-DeWitt-Gleichung. Die hier beschriebenen in [15] gefundenen formalen Lösungen können in dieser Darstellung "exakter" formuliert werden, jedoch wurde noch keine vollständige regularisierte Version angegeben. Ein Nachteil der Schleifendarstellung ist, daß die verwendeten Phasenraumvariablen, im wesentlichen die Wilson-Schleifen und spezielle dazu konjugierte Variablen, die das Dreibein enthalten, ein überbestimmtes System von Variablen sind, die voneinander in nichttrivialer Weise abhängig sind.

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x})} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{nb}(\boldsymbol{x})} T_\lambda$$
$$= -\tfrac{1}{4}\mathrm{Tr} \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s \Big\{ U(0,s)\,(\dot\lambda^n \boldsymbol{\sigma}_b)\, U(s,t)\,(\dot\lambda^m \boldsymbol{\sigma}_a)\, U(t,1)$$
$$+ U(0,s)\,(\dot\lambda^m \boldsymbol{\sigma}_a)\, U(s,t)\,(\dot\lambda^n \boldsymbol{\sigma}_b)\, U(t,1)\Big\}\, \delta(\boldsymbol{x},\lambda(t))\delta(\boldsymbol{x},\lambda(s)). \quad (2.4.20)$$

Wenn wir nun annehmen, daß die Kurve λ sich selbst nicht schneidet, so ist der Integrand nur dann von Null verschieden, wenn $s = t$ ist. Der Ausdruck ist dann symmetrisch in m und n, wir können die Pauli-Matrizen durch $U_\lambda(s,t) = \mathbf{1}$ durchziehen und bekommen

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}(\boldsymbol{x})} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{nb}(\boldsymbol{x})} T_\lambda = -\tfrac{1}{4}\eta_{ab}\, T_\lambda \int_0^1 \mathrm{d}s\, \dot\lambda^m \delta(\lambda(s),\boldsymbol{x}) \int_0^1 \mathrm{d}t\, \dot\lambda^n \delta(\lambda(t),\boldsymbol{x}) \quad (2.4.21)$$

Das ist symmetrisch in m, n und verschwindet bei Multiplikation mit $\mathfrak{F}_{mna}$, also haben wir einen ganzen Satz von formalen Lösung von $\boldsymbol{H}$ gefunden: Für jede geschlossene Schleife λ, die sich selbst nicht schneidet, ist

$$\widehat{\boldsymbol{H}}\, T_\lambda = 0. \quad (2.4.22)$$

Die T_λ sind außerdem Lösungen von $\boldsymbol{G}_a$, aber keine Lösungen von $\boldsymbol{D}_m$. Statt dessen wird eine Wilson-Schleife T_λ unter einem Diffeomorphismus auf eine anderes T_κ abgebildet, wobei κ gerade das Bild von λ ist. Ein erster Ansatz, aus T_λ eine Lösung aller Zwangsbedingungen zu bekommen, besteht darin, über alle Schleifen λ zu "mitteln", die durch Diffeomorphismen aus λ hervorgehen. Dadurch werden die Lösungen natürlich noch ein wenig formaler, denn man braucht dazu ein Maß auf der Gruppe der Diffeomorphismen $\mathit{Diff}(\mathcal{N})$.

Der einzige Ausweg aus diesem Dilema scheint die Schleifendarstellung zu sein. Mit deren Hilfe lassen sich zwar Funktionale definieren, die tatsächlich invariant sind unter Diffeomorphismen, die also nur von einer (verallgemeinerten) Knotenklasse der Schleifen abhängen, jedoch gibt es auch in dieser Darstellung noch keine wohldefinierte, vollständig regularisierte Version der Zwangsbedingungen, so daß auch diese Ergebnisse mehr oder weniger formal sind.

Eine weitere Eigenschaft der "Lösungen" T_λ ist die, daß sie von dem Operator, der die Determinate der 3-Metrik $\det(g_{mn}) = \tilde e$ repräsentiert, annihiliert werden. Und zwar aufgrund der gleichen Eigenschaft, die auch zur Lösung der Wheeler-DeWitt-Gleichung führt: Die Wilson-Schleifen werden, wie wir gesehen haben, bereits durch den Operator

$$\widehat{\tilde e}_{ma} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{mnp} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{nb}} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{pc}} \quad (2.4.23)$$

annihiliert, denn die zweite Ableitung (2.4.21) ist symmetrisch in m und n. Daraus folgt nicht nur $\widehat{\boldsymbol{H}} T_\lambda = 0$, sondern auch

$$\widehat{\tilde e}\, T_\lambda = \tfrac{1}{3}\widehat{\tilde e}_a{}^m \widehat{\tilde e}_{ma} T_\lambda = 0 \quad (2.4.24)$$

Nun bedeutet das aber, daß eine wie auch immer konstruierte Überlagerung von Zuständen $\Psi = \sum a_\lambda T_\lambda$ eine singuläre 3-Metrik beschreibt. Diese Lösungen existieren also nur, wenn wir die Forderung nach einer invertierbaren Metrik aufgeben, von der wir ja gar nicht genau wissen, wie wir sie in der $\mathcal{A}$-Darstellung verwirklichen sollen, und die wir deshalb zunächst zurückgestellt hatten. Die Interpretation der Schleifen-Lösungen hängt also sehr eng mit der Frage der entarteten Metriken zusammen, die wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels aufgreifen werden.

Auch wenn wir zu der Einstein-Hilbert-Wirkung eine kosmologische Konstante

$$-\tfrac{1}{2}E\Lambda = -\tfrac{1}{2}n\tilde e\Lambda \quad (2.4.25)$$

hinzufügen, bleiben die T_λ unverändert Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung, denn dann ändert sich die Wheeler-DeWitt-Gleichung nur um einen Term proportional zu $\tilde e$.

Ein weiters Problem der Schleifen-Lösungen und sogar der Darstellung der Zwangsbedingungen in dieser Form ist, daß deren Algebra nicht schließt. Wir hatten die Ordnung so festgelegt, daß stets alle Differentialoperatoren rechts stehen, demzufolge bekommen wir für den Kommutator von $\boldsymbol{H}$ mit sich selbst, wenn wir einfach formal die Vertauschungrelationen anwenden,

$$[\widehat{\boldsymbol{H}}[\xi], \widehat{\boldsymbol{H}}[\xi']] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, (\xi'\partial_n\xi - \xi\partial_n\xi')\, \widehat{\boldsymbol{K}}_m \widehat{\tilde g}^{mn}, \quad (2.4.26)$$

was das Quanten-Analogon zu der Poisson-Klammer (2.3.29) ist. Als erstes sehen wir hier den Grund dafür, daß eine Lösung der Wheeler-DeWitt-Gleichung nicht gleichzeitig eine Lösung von $\boldsymbol{K}_m$ sein muß, obwohl man dies ja zunächst aus einer Vertauschungsrelation der Form $[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}] \sim \boldsymbol{K}_m$ schließen könnte. Da hier ein Operator, der nicht mit $\boldsymbol{K}_m$ kommutiert, rechts von $\boldsymbol{K}_m$ erscheint, können wir nicht aus $\widehat{\boldsymbol{H}}\Psi = 0$ auf $\widehat{\boldsymbol{K}}_m\Psi = 0$ schließen.

Es gibt eine andere Wahl der Ordnung für $\boldsymbol{H}$, in der diese Anomalie nicht auftritt, jedoch existieren in dieser Darstellung keine Schleifen-Lösung mehr. Sie ist gegeben durch

$$\widehat{\boldsymbol{H}} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{mnp}\, \widehat{\tilde e}_{ma} \mathfrak{F}_{npa} - \tfrac{1}{6}\Lambda\, \widehat{\tilde e}_{ma} \widehat{\tilde e}_a{}^m, \quad (2.4.27)$$

wobei wir gleich die kosmologische Konstante hinzugenommen haben. Hier stehen die Differentialoperatoren links und wir benötigen umso mehr eine Regularisierung.[17]

Eine Lösung für $\widehat{\boldsymbol{H}}\Psi = 0$ in dieser Darstellung ist

$$\Psi[\mathcal{A}] = \exp\big(-\tfrac{3}{\Lambda}C[\mathcal{A}]\big) \quad (2.4.28)$$

mit der in (2.4.8) definierten Chern-Simons-Form des Eichfeldes $\mathcal{A}_{ma}$ ist. Da die Ableitung der Chern-Simons-Form nach dem Eichfeld gerade die Feldstärke ergibt, also

$$\widehat{\tilde e}_a{}^m\, C[\mathcal{A}] = \varepsilon^{mnp}\mathfrak{F}_{npa}, \quad (2.4.29)$$

[17] Tatsächlich erhält man in dieser Darstellung eine (formal) geschlossene Algebra. Verschiedene Ordnungen und Ansätze zur Regularisierung werden in [17, 18] diskutiert.

folgt sofort, daß Ψ durch $\frac{1}{3}\Lambda\widehat{\tilde{e}}_a{}^m + \varepsilon^{mnp}\mathfrak{F}_{npa}$ annihiliert wird und somit eine Lösung der Wheeler-DeWitt-Gleichung ist, und zwar unabhängig von der Wahl der Regularisierung, solange die Kombination '$\mathfrak{F}+\Lambda\widehat{e}$' in dieser Form erhalten bleibt. Da Ψ invariant unter Diffeomorphismen und SO(3)-Rotationen ist, haben wir sogar eine Lösung aller Zwangsbedingungen.

Wir haben trotzdem nicht viel gewonnen, denn es handelt sich ja nur um genau eine Lösung, und in der anderen Darstellung haben wir auch eine exakte Lösung, die unabhängig von der Regularisierung existiert, nämlich $\Psi = 1$, welches nun keine Lösung mehr ist. In gewissem Sinne haben wir also nur die triviale Lösung wiedergefunden, die in der anderen Darstellung durch eine Konstante gegeben ist. Allerdings ist diese Lösung "weniger singulär" als $\Psi = 1$, denn es ist keine Eigenfunktion des Dreibeinoperators zum Eigenwert $\tilde{e}_a{}^m = 0$, und die Algebra der Zwangsbedingungen schließt in dieser Darstellung, zumindest formal und unregularisiert.

Zum Schluß dieses Abschnittes über die reine Gravitation wollen wir noch eine ganz andere Lösung der Zwangsbedingungen diskutieren, und zwar eine in der $\tilde{e}$-Darstellung, die wir ja am Anfang wegen der etwas ungünstigen Form der Gauß-Bedingung verworfen hatten. Wir beginnen daher auch mit einer Lösung von $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_m$. Bringen wir alle Differentialoperatoren nach rechts, so lauten sie

$$\widehat{\boldsymbol{K}}_m = \tilde{e}_a{}^n \widehat{\mathfrak{F}}_{mna}, \quad \widehat{\boldsymbol{H}} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{mnp}\tilde{e}_{pa}\widehat{\mathfrak{F}}_{mna} \tag{2.4.30}$$

mit

$$\widehat{\mathfrak{F}}_{mna} = -\partial_m \frac{\delta}{\delta\tilde{e}_a{}^n} + \partial_n \frac{\delta}{\delta\tilde{e}_a{}^m} - \varepsilon_{abc}\frac{\delta}{\delta\tilde{e}_b{}^m}\frac{\delta}{\delta\tilde{e}_c{}^n}. \tag{2.4.31}$$

Die Ordnung entspicht also derjenigen, in der auch die Chern-Simons-Lösung existiert, aber nun ist $\mathcal{A}_{ma}$ ein Differentialoperator. Obwohl wir auch diesen Operator regularisieren müßten, können wir trotzdem Lösungen beider Bedingungen angeben, die unabhängig von der Regularisierung existieren. Dazu definieren wir zunächst ein beliebiges Feld $\boldsymbol{g}_{ab}(\boldsymbol{x})$ auf der raumartigen Hyperfläche, das Werte in SO(3) annimmt, das heißt $\boldsymbol{g}_{ab}\boldsymbol{g}_{ac} = \eta_{bc}$. Dann wird das Funktional

$$\Psi_{\boldsymbol{g}}[\tilde{e}] = \exp\left(\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\varepsilon_{abc}\,\tilde{e}_a{}^m\,\boldsymbol{g}_{db}\partial_m\boldsymbol{g}_{dc}\right) \tag{2.4.32}$$

von $\mathfrak{F}_{mna}$ annihiliert, wie man durch explizites Nachrechnen bestätigen kann. Der Operator ist bereits ohne jegliche Regularisierung auf diesem Funktional wohldefiniert, die Lösung existiert also auch in jeder regularisierten Version. Das Funktional $\Psi_{\boldsymbol{g}}$ repräsentiert einen Zustand, in dem Ashtekars Zusammenhang flach ist und demzufolge die Metrik maximal unscharf. Nun ist aber $\Psi_{\boldsymbol{g}}$ keine Lösung der Gauß-Bedingung, so daß wir nicht zu voreilig von einem Zustand reden sollten.

Wie wirkt $\boldsymbol{G}_a$ auf dieses Funktional? Wir benutzen die Darstellung (2.4.4) und erhalten

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{G}}_a\,\Psi_{\boldsymbol{g}}[\tilde{e}] &= -\left(\partial_m\tilde{e}_a{}^m + \varepsilon_{abc}\tilde{e}_b{}^m\frac{\delta}{\delta\tilde{e}_c{}^m}\right)\Psi_{\boldsymbol{g}} \\ &= -\left(\partial_m\tilde{e}_a{}^m + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cde}\,\tilde{e}_b{}^m\,\boldsymbol{g}_{gd}\partial_m\boldsymbol{g}_{ge}\right)\Psi_{\boldsymbol{g}} \\ &= -\left(\partial_m\tilde{e}_b{}^m\,\boldsymbol{g}_{ca}\boldsymbol{g}_{cb} + \tilde{e}_b{}^m\,\boldsymbol{g}_{ca}\partial_m\boldsymbol{g}_{cb}\right)\Psi_{\boldsymbol{g}} \\ &= -\left(\boldsymbol{g}_{ca}\partial_m(\boldsymbol{g}_{cb}\tilde{e}_b{}^m)\right)\Psi_{\boldsymbol{g}} \\ &= -\left(\boldsymbol{g}_{db}\varepsilon_{bac}\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{g}_{dc}}\right)\Psi_{\boldsymbol{g}}.\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

Die Wirkung von $\boldsymbol{G}_a$ auf $\Psi_{\boldsymbol{g}}$ bewirkt also das gleiche wie eine Variation des Parameters $\boldsymbol{g}_{ab}$. Und diese Variation ist sogar von einem sehr einfachen Typ: Der Operator in der letzten Zeile hat genau die Form des Impulsoperators (1.3.28) aus unserer Formulierung des Sigmamodells auf einer Gruppen-Mannigfaltigkeit. Die Gruppe ist hier SO(3) und der Levi-Civita-Tensor übernimmt die Rolle der Basis der Algebra, wobei der mittlere Index die Matrizen durchnummeriert und die äußeren die Matrix-Indizes sind.

Wir sehen also, daß $\boldsymbol{G}_a$ eine Ableitung von $\Psi_{\boldsymbol{g}}$ entlang der Gruppe SO(3) bewirkt. Wir finden somit eine Lösung aller Zwangsbedingungen, wenn wir über die Gruppe integrieren:

$$\Psi[\tilde{e}] = \int \mathrm{d}\boldsymbol{g}\Psi_{\boldsymbol{g}}[\tilde{e}], \tag{2.4.34}$$

wobei $\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ ein rechtsinvariantes Maß auf $\mathrm{SO}(3)^{\mathcal{N}}$ sein muß. Natürlich handelt es sich um ein nicht wohldefiniertes Funktionalintegral und an dieser Stelle müssen wir schließlich doch eine Regularisierung durchführen, so daß die Lösung zunächst auch nur formal existiert. Trotzdem gibt es ein paar wesentliche Unterschiede zu den formalen Schleifen-Lösungen.

Selbst wenn wir diese als exakte Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung betrachten, hatten wir dort zunächst das Problem, die Lösungen invariant unter Diffeomorphismen zu machen. Hier ist das Problem ähnlich, aber es ist eine sehr viel einfachere Gruppe, über die wir integrieren müßen. Im Gegensatz zu $\mathit{Diff}(\mathcal{N})$ haben wir es hier mit dem Produkt von einfachen Gruppen $\mathrm{SO}(3)^{\mathcal{N}}$ zu tun. Dies erlaubt sehr viel einfachere Regularisierungen, in denen dieser Zustand als exakte Lösung auftritt. Betrachtet man etwa die Zwangsbedingungen auf einem Gitter, so ist das benötigte invariante Maß vorhanden und Ψ wohldefiniert.

Andererseits haben wir wieder nur genau eine Lösung. Es sei denn, die raumartige Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Dann können wir nämlich in das Integral über die Eichgruppe noch eine bestimmten Einschränkungen unterliegende Funktion von $\boldsymbol{g}$ hinzufügen, die die topologischen Freiheitsgrade oder Moduli beschreibt. Wir werden das im Rahmen eines dreidimensionalen Modells in Kapitel IV genauer untersuchen, denn dort sind diese topologischen Freiheitsgrade die einzigen Freiheitgrade und wir können die vollständige Lösung der Zwangsbedingungen in einer ähnlichen Form wie (2.4.34) angeben.

Wir können also die Lösung (2.4.34) als eine Art Grundzustand betrachten, in dem die Krümmung von $\mathcal{A}_{ma}$ verschwindet. Für topologisch nichttriviale $\mathcal{N}$ bekommen wir dann verschiedene solche "Vakua", die sich durch ihre globalen Freiheitsgrade unterscheiden, lokal aber gleich aussehen.

Abgesehen von den topologischen Freiheitsgraden spricht noch eine weitere Eigenschaft von Ψ für die Interpretation als Vakuumzustand, jedoch ist die folgende Argumentation ein wenig heuristisch: Wir wissen, daß $\mathcal{A}_{ma}$ mit den "normalen" reellen Variablen der kanonischen Gravitation, dem Dreibein $e_{m\tilde{a}}$ und dem konjugierten Impuls $p_a{}^m$ (siehe (2.3.44)) über eine Beziehung der Form $\mathcal{A} = \omega + \mathrm{i}p$ zusammenhängt, wobei ω der durch das Dreibein definierte Spinzusammenhang ist. $\mathcal{A}$ hat also die Form eines Vernichtungsoperators, wobei ω das "magnetische" und p das "elektrische" Feld des Eichfeldes e_{ma} der Translationen auf $\mathcal{N}$ repräsentiert.

Benutzen wir als Definition des Vakuums, daß es durch alle Vernichter annihiliert werden soll, so müssen wir hier beachten, daß $\mathcal{A}$ selbst wieder ein Eichfeld einer anderen lokalen Symmetrie ist, das heißt wir können nur verlangen, daß ein Grundzustand durch jede eichinvariante Funktion dieses Vernichters annihiliert wird und kommen so auf die Bedingung $\widehat{\mathcal{F}}\Psi = 0$.

Zuletzt sollten wir noch darauf hinweisen, daß wir hier überhaupt keine Probleme mit entarteten Metriken haben. Das Funktional $\Psi[\tilde{e}]$ fassen wir einfach als eines *auf invertierbaren Dreibeinen* auf. Die Matrix $\tilde{e}_a{}^m$ wirkt dann auf solche Wellenfunktionen als ein invertierbarer Operator und insbesondere ist auch der Operator für die Determinate der Metrik $\det(g_{mn}) = \tilde{e}$ invertierbar.

5. Materiefelder

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß Ashtekars Variablen auch bei Ankopplung von Materiefeldern an das Gravitationsfeld zu Zwangsbedingungen führen, die Polynome in den kanonischen Variablen sind, und daß sich die formalen Schleifen-Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung so erweitern lassen, daß sie auch Lösungen der Hamiltonschen Zwangsbedingung für die materiegekoppelte Theorie werden. Wir werden dabei auf eine weitere merkwürdige Eigenschaft dieser formalen Lösungen stoßen: sie spüren nichts von der Ruhemasse der Felder.

Skalare Felder

Als Beispiel wählen wir ein Modell mit N skalaren Feldern φ^α mit Masse m. Die Wirkung für ein solches System ist

$$I[E,\Omega,\varphi] = I[E,\Omega] - \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, E\big(G^{MN}\,\partial_M\varphi^\alpha\,\partial_N\varphi^\alpha + m^2\varphi^\alpha\varphi^\alpha\big), \qquad (2.5.1)$$

wobei $I[E,\Omega]$ die Einstein-Hilbert-Wirkung im Vierbein-Formalismus (2.1.21) ist. Da der Anteil der Materiefelder nicht an den Spinzusammenhang koppelt und eine reelle Funktion des Vierbeins ist, können wir den Übergang zu Ashtekars Variablen genau wie in Abschnitt 2 durchführen und $I[E,\Omega]$ durch $\widetilde{I}[E,\mathcal{A}]$ ersetzten.[18]

[18] Alternativ kann man auch hier die Zwangsbedingungen statt durch einen Übergang zu einer holomorphen Wirkung auch durch eine kanonischen Transformation aus der reellen Formulierung ableiten [19].

Anschließend spalten wir die Raumzeit wieder in Raum und Zeit auf und eichen das Vierbein wie in (2.3.9). Den Anteil der Einstein-Hilbert-Wirkung in der Lagrange-Funktion können wir dann direkt aus (2.3.15) übernehmen:

$$\mathcal{L}_{(1)} = \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m\dot{\mathcal{A}}_{ma} - \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m\mathcal{D}_m\mathcal{A}_a - \tfrac{1}{2}n\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\mathcal{F}_{mnc} - \mathrm{i}n^m\tilde{e}_a{}^n\mathcal{F}_{mna}. \qquad (2.5.2)$$

Für den Materie-Anteil bekommen wir

$$\mathcal{L}_{(2)} = -\tfrac{1}{2}EG^{tt}\dot{\varphi}^\alpha\dot{\varphi}^\alpha - EG^{tm}\dot{\varphi}^\alpha\partial_m\varphi^\alpha - \tfrac{1}{2}EG^{mn}\partial_m\varphi^\alpha\partial_n\varphi^\alpha - \tfrac{1}{2}Em^2\varphi^\alpha\varphi^\alpha \qquad (2.5.3)$$

Für die Komponenten der vierdimensionalen Metrik gilt

$$E = n\tilde{e}, \quad EG^{tt} = -n^{-1}, \quad EG^{tm} = n^{-1}n^m, \quad EG^{mn} = n\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_a{}^n - n^{-1}n^m n^n. \qquad (2.5.4)$$

Setzen wir das ein, so erhalten wir

$$\mathcal{L}_{(2)} = \tfrac{1}{2}n^{-1}\big(\dot{\varphi}^\alpha - n^m\partial_m\varphi^\alpha\big)\big(\dot{\varphi}^\alpha - n^n\partial_n\varphi^\alpha\big) - \tfrac{1}{2}n\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_a{}^n\,\partial_m\varphi^\alpha\partial_n\varphi^\alpha - \tfrac{1}{2}n\tilde{e}\,m^2\varphi^\alpha\varphi^\alpha. \qquad (2.5.5)$$

Der zu φ^α konjugierte Impuls ist

$$\pi^\alpha = \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}^\alpha} = n^{-1}\big(\dot{\varphi}^\alpha - n^n\partial_n\varphi^\alpha\big), \qquad (2.5.6)$$

und mit dessen Hilfe können wir aus $\mathcal{L}_{(2)}$ eine Wirkung erster Ordnung machen:

$$\mathcal{L}_{(2)} = \dot{\varphi}^\alpha\,\pi^\alpha - \tfrac{1}{2}n\,\big(\pi^\alpha\pi^\alpha + \tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_a{}^n\partial_m\varphi^\alpha\partial_n\varphi^\alpha + \tilde{e}\,m^2\,\varphi^\alpha\varphi^\alpha\big) - n^m\,\partial_m\varphi^\alpha\,\pi^\alpha. \qquad (2.5.7)$$

Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(1)} + \mathcal{L}_{(2)}$ hat jetzt wieder die Standardform und wir können direkt die Poisson-Klammern

$$\{\varphi^\alpha,\pi^\beta\} = \delta^{\alpha\beta}, \quad \{\tilde{e}_a{}^m,\mathcal{A}_{nb}\} = \mathrm{i}\delta^m_n\eta_{ab} \qquad (2.5.8)$$

und die Zwangsbedingungen ablesen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \frac{\delta L}{\delta n} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\mathcal{F}_{mnc} - \tfrac{1}{2}\pi^\alpha\pi^\alpha - \tfrac{1}{2}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_a{}^n\,\partial_m\varphi^\alpha\partial_n\varphi^\alpha - \tfrac{1}{2}\tilde{e}\,m^2\,\varphi^\alpha\varphi^\alpha, \\
\boldsymbol{K}_m &= \frac{\delta L}{\delta n^m} = -\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^n\mathcal{F}_{mna} - \partial_m\varphi^\alpha\pi^\alpha, \\
\boldsymbol{G}_a &= \frac{\delta L}{\delta\mathcal{A}_a} = \mathrm{i}\mathcal{D}_m\tilde{e}_a{}^m.
\end{aligned} \qquad (2.5.9)$$

Die Realitätsbedingungen sind die gleichen wie die für die reine Gravitation, denn der Materieteil vertauscht mit $\tilde{e}_a{}^m$ und erzeugt so keine Beiträge zu den sekundären Bedingungen. Da wir im Moment nur an Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung interessiert sind, können wir sie ohnehin ignorieren.

Quantisierung

Als Operatordarstellung wählen wir die $\mathcal{A}_{ma}$-φ^α-Darstellung, das heißt die Operatoren sind

$$\widehat{\mathcal{A}}_{ma} = \mathcal{A}_{ma}, \quad \widehat{e}_a{}^m = \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_{ma}}, \quad \widehat{\varphi}^\alpha = \varphi^\alpha, \quad \widehat{\pi}^\alpha = \mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\varphi^\alpha}. \tag{2.5.10}$$

Die Zwangsbedingungen $\boldsymbol{G}_a$ und $\boldsymbol{D}_m = \boldsymbol{K}_m + \mathcal{A}_{ma}\boldsymbol{G}_a$ erzeugen dann auf der Wellenfunktion $\Psi[\mathcal{A},\varphi]$ wieder die bekannten Transformationen, also $SO(3)$-Rotationen und Diffeomorphismen. Der Wheeler-DeWitt-Operator ist explizit gegeben durch (man beachte, daß wir wieder einen zusätzlichen Faktor i in die quantisierten Zwangsbedingungen einführen, um die klassische Algebra zu erhalten):

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{H}} = &-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\left(\varepsilon_{abc}\mathcal{F}_{mnc} + \eta_{ab}\partial_m\varphi^\alpha\partial_n\varphi^\alpha\right)\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ma}}\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{nb}} \\ &- \tfrac{\mathrm{i}}{12}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{mnp}\, m^2\,\varphi^\alpha\varphi^\alpha\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ma}}\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{nb}}\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{pc}} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\frac{\delta}{\delta\varphi^\alpha}\frac{\delta}{\delta\varphi^\alpha}.\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Auch hier werden wir die folgenden Rechnungen formal durchführen, denn auch dieser Operator müßte regularisiert werden. Wir wollen nur feststellen, daß es eine Modifikation der formalen Lösung T_λ der Hamiltonschen Zwangsbedingung der reinen Gravitation gibt, die von unserem erweiterten $\boldsymbol{H}$ annihiliert wird. Dazu bestimmen wir die Wirkung von $\boldsymbol{H}$ auf T_λ. Die zweite Ableitung von T_λ nach $\mathcal{A}_{ma}$ hatten wir schon ausgerechnet (siehe (2.4.21)). Da wir nun in $\boldsymbol{H}$ auch einen in m,n symmetrischen Teil haben, verschwindet $\widehat{\boldsymbol{H}}T_\lambda$ nicht. Statt dessen bekommen wir

$$\widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x})\,T_\lambda = \tfrac{3}{8}\mathrm{i}\,T_\lambda\int_0^1 \mathrm{d}t\,\partial_t\varphi^\alpha\,\delta(\lambda(t),\boldsymbol{x})\int_0^1 \mathrm{d}s\,\partial_s\varphi^\alpha\,\delta(\lambda(s),\boldsymbol{x}) \tag{2.5.12}$$

Die Frage ist nun, ob es eine Funktion von φ^α derart gibt, daß die zweite Ableitung nach φ^α in $\boldsymbol{H}$ genau diesen Ausdruck mit umgekehrtem Vorzeichen erzeugt, so daß das Produkt dieser Funktion mit T_λ eine Lösung von $\boldsymbol{H}$ ist. Tatsächlich gibt es eine solche Funktion. Dazu definieren wir zuerst für eine antisymmetrische Matrix $J^{\alpha\beta}$ die Funktion

$$C_\lambda^J = \frac{\sqrt{3}}{4}J^{\alpha\beta}\int_0^1 \mathrm{d}t\,\varphi^\alpha\partial_t\varphi^\beta \tag{2.5.13}$$

Die Ableitung nach φ^α ist

$$\frac{\delta}{\delta\varphi^\alpha(\boldsymbol{x})}\,C_\lambda^J = \frac{\sqrt{3}}{2}J^{\alpha\beta}\int_0^1 \mathrm{d}t\,\partial_t\varphi^\beta\,\delta(\gamma(t),\boldsymbol{x}) \tag{2.5.14}$$

Offensichtlich bekommen wir eine Lösung von $\boldsymbol{H}$, wenn wir die Wellenfunktion durch

$$\Psi_\lambda^J[\mathcal{A},\varphi] = T_\lambda\,\exp\left(\mathrm{i}C_\lambda^J\right) \tag{2.5.15}$$

definieren und wenn J eine imaginäre Einheit ist, also $J^{\alpha\beta}J^{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha\gamma}$, denn die Wirkung von $\boldsymbol{H}$ auf den Materie-Anteil von Ψ_λ^J ist

$$\widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x})\,\exp\left(\mathrm{i}C_\lambda^J\right) = -\tfrac{3}{8}\mathrm{i}\,\exp\left(\mathrm{i}C_\lambda^J\right)J^{\alpha\beta}J^{\alpha\gamma}\int_0^1 \mathrm{d}t\,\partial_t\varphi^\beta\,\delta(\lambda(t),\boldsymbol{x})\int_0^1 \mathrm{d}s\,\partial_s\varphi^\gamma\,\delta(\lambda(s),\boldsymbol{x}), \tag{2.5.16}$$

was sich dann gegen den Gravitations-Anteil von oben weghebt. Natürlich müssen wir für die Existenz dieser Lösungen voraussetzen, daß die Anzahl N der Materiefelder gerade ist, denn sonst existiert keine imaginäre Einheit J. Es gibt sogar noch mehr Lösungen als diese, wenn $N \geq 4$ ist, wie wir gleich sehen werden.

Observable

Im Gegensatz zur reinen Gravitation hat die Wirkung mit N skalaren Feldern eine globale Symmetrie, nämlich die auf den Vektor φ^α wirkende $\mathsf{SO}(N)$. Der zu dieser Symmetrie gehörende erhaltene Strom ist

$$\mathcal{J}^{M\alpha\beta} = EG^{MN}\varphi^{[\alpha}\partial_N\varphi^{\beta]}. \tag{2.5.17}$$

Bilden wir davon die t-Komponenten, also die Ladung, und integrieren sie über die raumartige Hyperfläche $\mathcal{N}$, so erhalten wir eine Observable

$$Q^{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{J}^{\mathrm{t}\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\varphi^{[\alpha}\pi^{\beta]}. \tag{2.5.18}$$

Tatsächlich vertauscht diese Größe mit allen Zwangsbedingungen. Mit einer antisymmetrischen Matrix $M^{\alpha\beta}$ definieren wir den zugehörigen Quantenoperator

$$\widehat{Q}(M) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\varphi^\alpha M^{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\varphi^\beta}. \tag{2.5.19}$$

Mit dessen Hilfe können wir nun aus bereits bekannten Lösungen neue erzeugen, denn eine Observable bildet ja physikalische Zustände wieder auf physikalische Zustände ab. So ist zum Beispiel

$$\widehat{Q}(M)\,\Psi_\lambda^J = T_\lambda\,\exp\left(\mathrm{i}C_\lambda^J\right)C_\lambda^{[J,M]} \tag{2.5.20}$$

eine neue Lösung von $\boldsymbol{H}$, wie man durch explizites Nachrechnen bestätigen kann. Da hier der Matrix-Kommutator $[J,M]$ auftritt, erhalten wir nur dann eine neue Lösung, wenn M nicht mit J vertauscht. Das gilt für die Erzeuger der Symmetriegruppe $\mathsf{SO}(N)$, die nicht in der durch die imaginäre Einheit J definierten Untergruppe $\mathsf{U}(1)\times\mathsf{SU}(N/2)$ liegen. Insbesondere können wir auf diese Weise nur neue Lösungen bekommen, wenn $N \geq 4$ ist. Für größere N gibt es entsprechend weitere Losungen mit mehreren zusätzlichen Faktoren $C_\lambda^{[\cdot\cdot[J,M]]}$ etc.

6. Diskussion

Die Schleifen-Lösungen scheinen sehr universell zu sein, denn sie existieren auch in der materiegekoppelten Gravitation. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß sie sogar formale Lösungen der Zwangsbedingungen der Supergravitation sind.

Allerdings haben sie ein paar Eigenschaften, die Zweifel aufkommen lassen, ob man sie wirklich als Zustandsfunktionale der Gravitation betrachten kann. Natürlich fehlen noch einige wichtige Bauteile für eine komplette Quantentheorie, so zum Beispiel ein Skalarprodukt auf dem physikalischen Zustandsraum, ohne das man die Frage nach der Normierbarkeit der Zustände noch nicht beantworten kann. Auch kennen wir noch keine konsistente Regularisierung der Zwangsbedingungen, so daß die Lösungen zunächst nur formal zu verstehen sind.

Einige Eigenschaften der Schleifen-Lösungen lassen sich aber auch ohne Kenntnis des kompletten Hilbertraumes diskutieren. So haben wir etwa gefunden, daß die Funktionen von der Determinante der Metrik annihiliert werden, also Eigenfunktionen zum Eigenwert Null sind. Das hatte zunächst ein paar unerfreuliche Konsequenzen: Die Lösungen waren unabhängig von sonst sehr wesentlichen Parametern wie der kosmologischen Konstante oder der Masse des Klein-Gordon-Feldes.[19] Ausserdem "sehen" sie gar nicht den Faktor $\mathcal{F}_{mna}$ in der Wheeler-DeWitt-Gleichung. Genau das wird der Grund dafür sein, daß sie auch die Zwangsbedingungen der Supergravitation lösen, denn dort wird dieser Faktor durch einen anderen ersetzt, ansonsten bleibt die Struktur weitgehend erhalten.

Ein anderer Grund, an den Lösungen zu zweifeln, ist folgender: Bis zur Einführung der $\mathcal{A}$-Darstellung in der Quantentheorie haben wir ja stets vorausgesetzt, daß die Metrik bzw. das Dreibein invertierbar sein soll. Wir hatten das notgedrungen aufgegeben, weil wir nicht wußten, wie wir diese Bedingung verwirklichen sollen. Aber nun haben wir einen Satz von Lösungen, die sogar Eigenfunktionen zum Eigenwert $e = 0$ sind.

Betrachten wir den üblichen Übergang vom metrischen zu Ashtekars Formalismus, so liegt natürlich der Verdacht nahe, daß diese Lösungen einfach dadurch neu hinzugekommen sind, daß wir die Wheeler-DeWitt-Gleichung mit e multipliziert haben und diesen Faktor auch noch *nach rechts* geordnet haben. Etwas ähnliches können wir mit unserem Punktteilchen aus Kapitel I tun: Wir können zunächst den Phasenraum durch $p_0 \neq 0$ einschränken, dann die Zwangsbedingung mit p_0 mutliplizieren und diesen Faktor nach rechts ordnen, was in diesem Fall natürlich unerheblich ist, da p_0 mit $\boldsymbol{H}$ vertauscht.

Wenn wir jetzt nur solche Wellenfunktionen betrachten, die keine Nullmoden in x^0 enthalten (d.h. die entsprechende Fourier-Komponente verschwindet), so werden sich unsere physikalischen Zustände zwar verändern, der Hilbertraum und die Observablen werden aber wieder genau die gleiche Struktur besitzen und die gleichen physikalischen Ergebnisse liefern. Wir können sogar leicht angeben, wie die beiden Zustandsräume miteinander verknüpft sind: Für jeden Zustand $|\,\Psi\,\rangle$, der die alte Zwangsbedingung erfüllt, ergibt sich ein Zustand $\widehat{p_0}^{-1}|\,\Psi\,\rangle$, der die mit p_0 multiplizierte Zwangsbedingung erfüllt. Die Abbildung ist bijektiv, da wir nur Zustandsfunktionen zulassen, die keine Nullmoden enthalten.

Ganz anders sieht das aus, wenn wir die Bedingung $p_0 \neq 0$ jetzt einfach aufgeben. Wir bekommen viele neue Zustände, die durch eine nur von den räumlichen Komponenten $\vec{x}$ abhängige Wellenfunktion beschrieben werden und nichts mehr mit dem relativistischen Punktteilchen zu tun haben. Offenbar wird dadurch auch die Invarianz unter Lorentz-Transformationen zerstört, denn wir zeichnen ja eine Zeitrichtung aus. Dasselbe passiert hier auch: Wenn wir singuläre Dreibeine zulassen, bedeutet das, von der Wirkung (2.3.15) zu starten und diese kanonisch zu quantisieren, wobei wir jedoch keine Einschränkungen an die Felder $\tilde{e}_a{}^m$ machen.

Auf den ersten Blick erscheint das legitim, denn es handelt sich um eine mögliche Wirkung für die Einsteinsche Gravitation. Allerdings hat diese gegenüber der manifest kovariant (unter den vollen vierdimensionalen Diffeomorphismen) formulierten Wirkung (2.3.1) einen kleinen Nachteil. Sie ist nicht nur nicht *manifest* invariant, eine Eigenschaft, auf die wir bei der kanonischen Formulierung ohnehin verzichten müssen, sie ist für entartete Dreibeine gar nicht invariant unter allen vierdimensionalen Diffeomorphismen. Das liegt daran, daß n eine Funktion vom Gewicht -1 ist (bezüglich der raumartigen Mannigfaltigkeit), und somit unter Diffeomorphismen, die die t-Koordinate mit den übrigen mischt, im Transformationsgesetz für n das Inverse der Determinate des Dreibeins auftritt.

Sammeln wir alle diese Argumente zusammen, so kommen wir zu einem Schluß, der für die Konstruktion einer kanonischen Quantengravitation mit Hilfe von Ashtekars Variablen von großer Bedeutung ist: Für die klassische kanonisch formulierte Gravitation gilt, daß wir von den folgenden drei Eigenschaften nur höchstens zwei gleichzeitig verwirklichen können:

- Invarianz der Wirkung unter allen Diffeomorphismen auf $\mathcal{M}$,
- Zulassen von entarteten Metriken,
- Zwangsbedingungen als Polynome in den kanonischen Variablen.

Wenn wir wollen, daß die ersten beiden Eigenschaften vorhanden sind, so müssen wir von der Wirkung (2.3.1) starten und $E_M{}^A$ und $\mathcal{A}_{Ma}$ als kanonische Variable betrachten. Dann dürfen wir aber eine Zwangsbedingung nicht mit e multiplizieren, denn das könnte Null sein, so daß wir keine Polynome bekommen.

Wenn wir dagegen, wie wir es zeitweise getan haben, die letzten beiden Eigenschaften benutzen, um die Schleifen-Lösungen zu bekommen, müssen wir auf die Invarianz unter den Diffeomorphismen auf $\mathcal{M}$ verzichten. Nun ist dies aber gerade die Kernaussage der allgemeinen Relativitätstheorie und es ist nicht klar, ob wir die Theorie dann noch so nennen können und wie die volle Invarianz im klassischen Limes wieder hergestellt werden soll.

Bleibt also der Verzicht auf die entarteten Metriken oder auf die polynomialen Zwangsbedingungen. Das erste führt zu dem Problem, daß wir nicht wissen, wie man diese Eigenschaft in der $\mathcal{A}$-Darstellung formulieren soll, das zweite bedeutet natürlich in dieser Darstellung ein noch größeres Problem.

[19] Wir können nicht argumentieren, daß die Schleifen-Lösungen von oben einen materiefreien Raum repräsentieren, denn sie haben eine nicht verschwindende Ladung Q.

Betrachten wir aber nochmal die beiden anderen Typen von Zustandsfunktionalen, das Chern-Simons-Funktional und die "flacher-Raum"-Lösung in der Dreibein-Darstellung. Interessanterweise existieren diese nämlich auch in einer Formulierung, in der die Zwangsbedingungen nicht Polynome sind. In beiden Fällen steht der "zusätzliche" Faktor in der Wheeler-DeWitt-Gleichung links und die Wellenfunktion wird bereits "vorher" annihiliert, also von $\mathcal{F}$ bzw. von der Kombination $\mathcal{F} + \Lambda\tilde{e}$.[20]

Die nicht-polynomialen Zwangsbedingungen, die man erhält, wenn man einfach die Zeitkomponenten E_t^A als Multiplikatoren benutzt statt die Lapse- und Shift-Funktionen n und n^m einzuführen, sind in Ashtekars Variablen immer noch einfacher als die entsprechenden Größen im metrischen Formalismus, der von der Einstein-Hilbert-Wirkung $\sqrt{G}R$ ausgeht: Im wesentlichen bekommt man sie, indem man von den in (2.4.30) gegebenen Bedingungen einfach die Tilde wegnimmt:

$$\boldsymbol{H} = e_{ma}\big(\varepsilon^{mnp}\mathcal{F}_{npa} + \tfrac{1}{2}\Lambda\tilde{e}_a{}^m\big), \quad \boldsymbol{K}_a = \varepsilon^{mnp}\varepsilon_{abc}e_{mb}\mathcal{F}_{npc}. \tag{2.6.1}$$

$\boldsymbol{K}$ trägt jetzt eine flachen Index und $\boldsymbol{H}$ ist einfach die 0- und nicht mehr die t-Komponente (mit zusätzlichem Gewichtsfaktor) davon. Sie sind linear in e_{ma} und $\mathcal{F}_{mna}$. Betrachtet man die Definition (2.3.11) für $\tilde{e}_a{}^m$, so stellt man fest, daß e_{ma} eine Art Wurzel von $\tilde{e}_a{}^m$ ist. Das heißt, in Ashtekars Variablen enthalten die nicht-polynomialen Zwangsbedingungen lediglich die Wurzel aus den kanonisch konjugierten Variablen, während die ursprüngliche Wheeler-DeWitt-Gleichung das Inverse der Metrik enthält.

Nun ist es in vielen Situationen einfacher, eine Wurzel aus einem Differentialoperator zu definieren als sein Inveres. Ashtekars Variable vereinfachen die Darstellung der Zwangsbedingungen also auch dann noch, wenn man auf die polynomiale Form verzichtet. Und sogar dann existieren noch die oben angegebenen Lösungen, die jeweils eine Art "Vakuumzustand" beschreiben könnten, und zwar unabhängig davon, wie man diese Wurzel definiert.

[20] Für die Chern-Simons-Lösung wird das in [20] etwas ausführlicher diskutiert. Eine Ableitung der "Vakuum"-Lösung (für die Supergravitation) mit Hilfe von Ashtekars Variablen aber ohne die polynonialen Zwangsbedingungen wird in [44] gezeigt.

KAPITEL III:

SUPERGRAVITATION

This chapter is entirely Track 2. Chapter II is needed as preparation for it, but this chapter is not needed as preparation for any later chapter.
[5]

Wie in der reinen Gravitation führt auch in ihrer supersymmetrischen Erweiterung[1] die Einführung von Ashtekars Variablen zu einer erheblichen Vereinfachung der kanonischen Struktur und damit des Zugangs zur kanonischen Quantisierung. Wir werden in diesem Kapitel ganz analog zur Ableitung der Zwangsbedingungen im letzten Kapitel vorgehen. Wir bekommen zwei zusätzliche Zwangsbedingungen, die die lokale Supersymmetrie erzeugen. Eine wesentliche Eigenschaft der globalen Supersymmetrie ist, daß der Kommutator zweier solcher Transformationen im flachen Raum eine Translation ergibt.

Für eine lokale Supersymmetrie bedeutet das, daß der Kommutator zweier lokaler Transformationen eine Koordinatentransformation ergibt, oder, in die kanonische Formulierung übersetzt, die Poisson-Klammern der Erzeuger der Supersymmetrie den Erzeuger der Diffeomorphismen und die Hamiltonsche Zwangsbedingung ergeben. Wenn die gleiche Relation in der Quantentheorie gilt, so sind physikalische Zustände bereits als Lösungen der Supersymmetrie-Bedingungen charakterisiert, denn jede Lösung davon ist automatisch eine der Wheeler-DeWitt-Gleichung.

Eine weitere Eigenschaft der globalen Supersymmetrie im flachen Raum ist die, daß sich gewisse Anomalien, die in nicht supersymemtrischen Modelle auftreten, in der supersymmetrischen Version aufheben. Es stellt sich also die Frage, ob auch in der Supergravitation derartige Effekte auftreten und die im letzten Kapitel diskutierten Anomalien in der Algebra der Zwangsbedingungen möglicherweise verschwinden. Auf diesen Aspekt werden wir bei der Betrachtung von dreidimensionalen Modellen in Kapitel V noch näher eingehen.

1. N=1 Supergravitation

Die N=1 Supergravition in vier Dimensionen ist die einfachste supersymmetrische Erweiterung der Einsteinschen Gravitation mit einem fermionischen Partner für das Vierbein. Wir konstruieren diese Theorie zunächst im Vierbein-Formalismus und werden dann wieder analog zu Kapitel II zu Ashtekars Variablen übergehen.

Pauli-Matrizen und Spinoren

Die supersymmetrischen Partner der Vierbeinfelder ${E_M}^A$ sind Graßmann-wertige Majorana-Spinoren ψ_M. Es wird sich für unsere Zwecke als nützlich herausstellen, diese als zweikomponentige komplexe Spinoren darzustellen, da dies sowohl die Notation als auch die Reduktion nach drei Dimensionen bzw. den kanonischen Formalismus vereinfachen wird. Darüber hinaus werden wir sehen, daß bei Verwendung dieser Darstellung ganz automatisch Ashtekars Variable auftreten.[2]

Die Pauli-Matrizen hatten wir schon in Kapitel II, Abschnitt 4 eingeführt, wir fügen nun noch eine Matrix $\sigma_0 = \mathbf{1}$ hinzu, d.h. wir haben vier hermitesche Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (3.1.1)$$

die wir mit σ_A bezeichnen. Weiterhin verwenden wir σ_a für die drei Pauli-Matizen. Aus der Algebra dieser Matrizen werden wir im wesentlichen nur die folgenden Formeln benötigen, die man leicht nachrechnen kann:

$$\sigma_A\sigma_a = 2\mathrm{i}J_{aAB}\sigma^B, \quad \sigma_a\sigma_A = -2\mathrm{i}J^*_{aAB}\sigma^B. \qquad (3.1.2)$$

Hier treten als Strukturkonstanten die in (2.2.11) eingeführten selbstdualen Tensoren auf, was nachher zu dem "natürlichen" Erscheinen von Ashtekars Variablen in der Supergravitation führen wird. Für die Pauli-Matrizen gilt außerdem

$$\begin{aligned} \sigma_a\sigma_b &= \eta_{ab}\mathbf{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{abc}\sigma_c, \\ \sigma_a\sigma_b\sigma_c &= \eta_{ab}\sigma_c + \eta_{bc}\sigma_a - \eta_{ac}\sigma_b + i\varepsilon_{abc}\mathbf{1}. \end{aligned} \qquad (3.1.3)$$

Da die Matrizen einen "flachen" Index A tragen, transformieren zweikomponentige komplexe Spinoren χ und konjungierte Spinoren $\bar{\lambda}$ unter lokalen Lorentz-Transformationen. Das Transformationsgesetz muß so lauten, daß die Kombination $V_A = \bar{\lambda}\sigma_A\chi$ wie ein Vektor transformiert. Bezeichnen wir wieder den Parameter der Lorentz-Transformation mit Λ_{AB}, so ergibt sich die verlangte Eigenschaft von V_A, wenn χ unter der selbstdualen und $\bar{\lambda}$ unter der antiselbstdualen Darstellung transformiert, also

$$\delta\chi = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\Lambda^{AB}J_{aAB}\sigma_a\chi, \quad \delta\bar{\lambda} = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\Lambda^{AB}J^*_{aAB}\bar{\lambda}\sigma_a \quad \Rightarrow \quad \delta V_A = -\Lambda_{AB}V^B \qquad (3.1.4)$$

[1] Die wesentlichen Ideen für eine supersymmetrische Erweiterung der Gravitation gehen auf [45, 46] zurück. Eine ausführliche Darstellung von Supergravitationstheorien findet man in [47].

[2] Tatsächlich treten Ashtekars Variable auch in der vierkomponentigen Darstellung der Spinoren auf, siehe zum Beipiel die Anmerkung in [27], Kapitel 3.1. Die zweikomponentige Darstellung ist aber nützlich, wenn wir den selbstdualen und antiselbstdualen Teil des Zusammenhanges trennen wollen, um schließlich wieder zu einer holomorphen Wirkung zu gelangen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzen wir auch Matrizen mit gekrümmten Indizes $\boldsymbol{\sigma}_M = E_M{}^A\boldsymbol{\sigma}_A$. Die Größe $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_M\boldsymbol{\chi}$ ist dann invariant unter lokalen Lorentz-Transformationen und verhält sich wie ein Kovektor unter Koordinatentransformationen.

Die Lorentz-kovarianten Ableitungen von Spinoren sind

$$D_M\boldsymbol{\chi} = \partial_M\boldsymbol{\chi} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\Omega_{MAB}J_a{}^{AB}\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\chi}, \quad D_M\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \partial_M\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\Omega_{MAB}J_a^{*AB}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_a. \tag{3.1.5}$$

Eine weitere wichtige Regel zum Rechnen mit Spinoren ist die Fierz-Identität, mit der sich Produkte von vier Fermionen umformen lassen. Für Graßmann-wertige Spinoren $\bar{\boldsymbol{\pi}}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ und $\boldsymbol{\chi}$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}_{(A}\boldsymbol{\psi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_{B)}\boldsymbol{\chi} &= -\,\bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}_{(A}\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_{B)}\boldsymbol{\psi} + \tfrac{1}{2}\eta_{AB}\,\bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}^C\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\psi}, \\ \bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}_{[A}\boldsymbol{\psi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_{B]}\boldsymbol{\chi} &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{AB}{}^{CD}\,\bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}_C\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_D\boldsymbol{\psi}. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Man beachte, daß, anders als bei der vierkomponentigen Darstellung von Spinoren, die Größe $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\chi}$ keine Lorentz-Invariante ist, sondern die 0-Komponente des Vektors $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\chi}$, die Fierz-Identitäten also auch keine solchen Terme enthalten. Als Spezialfälle ergeben sich nützliche Formeln durch Kontraktion mit η^{AB} bzw. $J_a{}^{AB}$:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\psi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\chi} &= \bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\psi}, \\ J_{aAB}\,\bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\psi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}^B\boldsymbol{\chi} &= J_{aAB}\,\bar{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}^B\boldsymbol{\psi}. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Der Dirac-konjugierte Spinor $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ von $\boldsymbol{\chi}$ ist definiert durch $\bar{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\chi}^\dagger(\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_0) = \mathrm{i}\boldsymbol{\chi}^\dagger$. Für die komplexe Konjugation gilt $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\chi})^* = -\bar{\boldsymbol{\chi}}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\lambda}$, und insbesondere ist $\bar{\boldsymbol{\chi}}\boldsymbol{\sigma}_A\boldsymbol{\chi}$ eine imaginäre Größe.

Gelegentlich werden wir die Spinor-Indizes explizit ausschreiben. Wir verwenden dann kleine griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots$, also ist zum Beispiel $\bar{\chi}_\alpha = \mathrm{i}\chi^*_{\dot\alpha}$. Eigentlich müßten wir die Indizes von Spinoren und konjugierten Spinoren unterscheiden, denn wie bereits erwähnt transformieren $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_\alpha$ und $\boldsymbol{\chi}_\alpha$ unter verschiedenen Darstellungen der Lorentz-Gruppe und die Kontraktion $\bar{\boldsymbol{\chi}}_\alpha\boldsymbol{\chi}_\alpha$ ist keine Lorentz-Invariante sondern eine Komponente eines Vektors. Wir werden die Indexnotation aber erst für den kanonischen Formalismus benötigen, wo eine teilweise Eichfixierung der Lorentz-Gruppe gerade solche Ausdrücke zu Invarianten unter der restlichen Eichgruppe werden läßt, so daß wir auf die Unterscheidung der Indizes verzichten.

Als Regel für die Bildung von Lorentz-kovarianten Produkten von Spinoren gilt, daß genau eine "vierdimensionale" $\boldsymbol{\sigma}_A$-Matrix und beliebig viele $\boldsymbol{\sigma}_a$-Matrizen zwischen den Spinoren stehen müssen, wobei wir letztere immer mittels (3.1.2) herausziehen können. $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_B\boldsymbol{\sigma}_c\boldsymbol{\chi}$ ist Lorentz-kovariant, der Index B transformiert als Vektor-Index, a in der antiselbstdualen und c in der selbstdualen Darstellung der Lorentz-Gruppe.

Die Wirkungsfunktion

Die Felder der Supergravitation sind das Vierbein $E_M{}^A$, sein Super-Partner, das Gravitino $\boldsymbol{\psi}_M$, und der Spinzusammenhang Ω_{MAB}. Es besteht wieder die Wahl, diesen als eigenständiges Feld zu betrachten oder aber als Funktion des Vierbeins, die durch (2.1.12) gegeben ist. Wenn wir ihn selbst als Feld betrachten, wird seine Bewegungsgleichung diesmal nicht die Definition des Spinzusammenhangs als Funktion das Vierbeins liefern, da er auch noch an das Gravitino koppelt. Betrachten wir zunächst die Wirkung als Funktion von Vierbein, Gravitino und Spinzusammenhang. Sie ist die Summe der Einstein-Hilbert-Wirkung (2.1.21) und der Rarita-Schwinger-Wirkung für das Gravitino:

$$\begin{aligned} I[E, \boldsymbol{\psi}, \Omega] &= \int \mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}), \\ \mathcal{L}_{\mathrm{EH}} &= -\tfrac{1}{8}\varepsilon^{MNPQ}\varepsilon_{AB}{}^{CD}E_M{}^AE_N{}^BR_{PQCD}[\Omega], \\ \mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= \mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\big(\bar{\boldsymbol{\psi}}_M\boldsymbol{\sigma}_ND_P\boldsymbol{\psi}_Q - D_M\bar{\boldsymbol{\psi}}_N\boldsymbol{\sigma}_P\boldsymbol{\psi}_Q\big). \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Den ersten Term haben wir noch ein wenig umgeformt, indem wir die Definition der Determinanten E benutzt haben.

Man kann zeigen,[3] daß $\mathcal{L}_{RS}$ die einzige mögliche Invariante unter Lorentz- und Koordinatentransformationen ist, die quadratisch in den Fermionen und erster Ordnung in den Ableitungen ist. Die Antisymmetrisierung der Raumzeit-Indizes bewirkt auch hier wieder, daß der Christoffel-Zusammenhang in den kovarianten Ableitungen nicht auftritt, die Lorentz-kovarianten Ableitungen also mit den vollen kovarianten Ableitungen übereinstimmen.

Wir werden gleich sehen, daß diese Wirkung invariant unter Supersymmetrie-Transformationen ist, die das Vierbein mit dem Gravitino mischen. Betrachten wir jedoch erst einmal die Wirkung selbst, die wir auf verschiedene Arten darstellen können. Definiert ist I als Funktion von $E_M{}^A$, $\boldsymbol{\psi}_M$ und Ω_{MAB} als eine Wirkung erster Ordnung in den Ableitungen. Wir können wieder zu einer äquivalenten Wirkung zweiter Ordnung $I[E, \boldsymbol{\psi}]$ übergehen, indem wir die Bewegungsgleichung für Ω lösen und die Lösung einsetzen. Variation von I nach Ω führt auf die Gleichung

$$D_{[M}E_{N]}{}^A + \bar{\boldsymbol{\psi}}_{[N}\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\psi}_{M]} = 0. \tag{3.1.9}$$

Wir bekommen wieder ein Gleichung vom Typ (2.1.14):

$$\Omega_{[MAB}E_{N]}{}^B + \Sigma_{[MN]A} = 0. \tag{3.1.10}$$

Allerdings ist die Anholonomie jetzt durch ihre supersymmetrische Erweiterung

$$\Sigma_{[MN]}{}^A = \partial_{[M}E_{N]}{}^A + \bar{\boldsymbol{\psi}}_{[N}\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\psi}_{M]} \tag{3.1.11}$$

ersetzt. Die Lösung lautet wieder

$$\Omega_{MAB}[E, \boldsymbol{\psi}] = \Sigma_{[MA]B} - \Sigma_{[MB]A} - \Sigma_{[AB]M}. \tag{3.1.12}$$

[3] Für einen Beweis siehe [47], Kapitel 1.13.

Die Wirkung als Funktion von Vierbein und Gravitino ergibt sich nun einfach durch Einsetzen in (3.1.8): $I[E,\psi] = I[E,\psi,\Omega[E,\psi]]$. Der Einstein-Hilbert-Teil von I enthält dann aber immer noch das Gravitino, ist also nicht durch die metrische, nur vom Vierbein abhängige Krümmung $ER[E]$ gegeben. Um das zu erreichen, müssen wir $\Omega[E,\psi]$ wieder durch das nur vom Vierbein abhängige $\Omega[E]$ ersetzen, das durch $D_{[M}E_{N]}{}^{A} = 0$ definiert war. Es gilt[4]

$$\Omega_{MAB}[E,\psi] = \Omega_{MAB}[E] + \Delta_{MAB}\,,$$
$$\Delta_{MAB} = \bar{\psi}_{[A}\sigma_B\psi_{M]} - \bar{\psi}_{[B}\sigma_A\psi_{M]} + \bar{\psi}_{[A}\sigma_M\psi_{B]}\,. \qquad (3.1.13)$$

Wenn wir dies direkt in (3.1.8) einsetzen würden, hätten wir sehr viel zu tun. Wir können auch hier wieder einen kleinen Trick verwenden: Die Funktion $I[E,\psi,\Omega]$ sei durch (3.1.8) definiert. Wir wollen $I[E,\psi] = I[E,\psi,\Omega[E,\psi]]$ bestimmen und möglichst in der Form $I[E,\psi,\Omega[E]] + \ldots$ schreiben, denn dann ist die Wirkung als Summe der gewöhnlichen nur vom Vierbein abhängigen Einstein-Hilbert-Wirkung, der Rarita-Schwinger-Wirkung mit Eichfeld $\Omega[E]$ und eventuell weiteren Termen gegeben. Da I ein Polynom zweiten Grades in Ω ist, können wir es um $\Omega = \Omega[E,\psi]$ in Ω entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} I[E,\psi] = I[E,\psi,\Omega]\Big|_{\Omega=\Omega[E,\psi]} &= I[E,\psi,\Omega]\Big|_{\Omega=\Omega[E]} \\ &\quad + \Delta\,\frac{\delta I[E,\psi,\Omega]}{\delta\Omega}\bigg|_{\Omega=\Omega[E,\psi]} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\Delta^2\,\frac{\delta^2 I[E,\psi,\Omega]}{\delta\Omega^2}\bigg|_{\Omega=\Omega[E,\psi]}\,, \end{aligned} \qquad (3.1.14)$$

wobei wir der Einfachheit halber die Integrationen und Indizes weggelassen und $\Omega[E] = \Omega[E,\psi] - \Delta$ benutzt haben. Der erste Term auf der rechten Seite ist genau das, was wir wollen, der zweite verschwindet, denn $\Omega[E,\psi]$ ist ja gerade so bestimmt worden, daß $\delta I/\delta\Omega = 0$ wird, und der letzte Term ist gegeben durch den in Ω quadratischen Anteil der Einstein-Hilbert-Wirkung, wobei Ω durch Δ ersetzt ist.

Wenn wir das eingesetzt haben, können wir auch noch die Ableitung im Rarita-Schwinger-Term partiell integrieren, ohne einen Beitrag von der Ableitung des Vierbeins zu bekommen, und die Wirkung lautet

$$\begin{aligned} I[E,\psi] = \int \mathrm{d}^4x\,\big(&\tfrac{1}{2}ER[E] + 2\mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,\bar{\psi}_M\sigma_N D_P\psi_Q \\ &- \tfrac{1}{4}E(\Delta_{ABC}\Delta^{BCA} + \Delta^{B}{}_{BA}\Delta_C{}^{CA})\big)\,, \end{aligned} \qquad (3.1.15)$$

wobei die Ableitung D mit dem Eichfeld $\Omega[E]$ gebildet ist.

[4] Man beachte, daß wir die Antisymmetrisierung $[\ldots]$ hier so definiert haben, daß sie stets nur auf die zwei unmittelbar hinter bzw. vor der Klammer stehenden Indizes wirkt.

Durch das Auftreten der Terme vierter Ordnung in den Fermionen wird die Wirkung wesentlich komplizierter. Daher werden wir nur mit der Wirkungsfunktion erster Ordnung $I[E,\psi,\Omega]$ arbeiten. Alle Ergebnisse gelten aber genauso auch für die hier gegebene Wirkung zweiter Ordnung, wenn wir $\Omega = \Omega[E,\psi]$ einsetzen.

Supersymmetrie-Transformationen

Betrachten wir nun die lokalen Eichsymmetrien der Wirkung (3.1.8). Sie ist zunächst natürlich invariant unter Diffeomorphismen auf der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ und unter Lorentz-Transformationen, was man sofort aus der richtigen Kontraktion aller Indizes ablesen kann. Die neue Eigenschaft dieser Wirkung ist nun die Invarianz unter lokalen Supersymmetrie-Transformationen. Der infinitesimale Parameter für eine solche Transformation ist ein Spinor ϵ. Da ψ_M das Eichfeld dieser Symmetrie ist, sollte es sich wie $\delta\psi_M = D_M\epsilon$ transformieren.

Setzen wir diesen Ansatz in die Wirkung ein, so erhalten wir als Variation der Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = \mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,\big(&\bar{\psi}_M\sigma_N D_P D_Q\epsilon - D_M\bar{\psi}_N\sigma_P D_Q\epsilon \\ &- D_M D_N\bar{\epsilon}\sigma_P\psi_Q + D_M\bar{\epsilon}\sigma_N D_P\psi_Q\big)\,. \end{aligned} \qquad (3.1.16)$$

Wir müssen nun die Variation der anderen Felder ermitteln, so daß die gesamte Variation wieder verschwindet. Da die Transformation von $E_M{}^A$ und Ω_{MAB} keine Ableitungen des Parameters ϵ enthalten soll, integrieren wir die auf ϵ wirkenden Ableitungen partiell bzw. benutzen die Formel für den Kommutator zweier kovarianter Ableitungen in der Spinordarstellung:

$$D_{[M}D_{N]}\epsilon = -\tfrac{\mathrm{i}}{4}R_{MNAB}J_a{}^{AB}\,\sigma_a\epsilon\,, \quad D_{[M}D_{N]}\bar{\epsilon} = \tfrac{\mathrm{i}}{4}R_{MNAB}J^{*AB}_a\,\bar{\epsilon}\sigma_a\,. \qquad (3.1.17)$$

Die Variation der Wirkung ist dann

$$\delta\psi_M = D_M\epsilon\,, \quad \delta\bar{\psi}_M = D_M\bar{\epsilon} \quad \Rightarrow$$
$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = &\tfrac{1}{4}\varepsilon^{MNPQ}\varepsilon_{AB}{}^{CD}E_M{}^A R_{PQCD}\,(\bar{\epsilon}\sigma^B\psi_N - \bar{\psi}_N\sigma^B\epsilon) \\ &+ \mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}D_Q E_P{}^A\,(D_M\bar{\psi}_N\sigma_A\epsilon + \bar{\epsilon}\sigma_A D_M\psi_N)\,. \end{aligned} \qquad (3.1.18)$$

Der erste Term wird offensichtlich durch eine Variation des Vierbeins in der Einstein-Hilbert-Wirkung aufgehoben. Mit $\delta E_M{}^A = \bar{\epsilon}\sigma^A\psi_M - \bar{\psi}_M\sigma^A\epsilon$ bekommen wir gerade wieder den ersten Term von (3.1.18) mit umgekehrtem Vorzeichen und einen zusätzlichen Term aus der Variation des Vierbeins im Rarita-Schwinger-Anteil der Wirkung:

$$\delta E_M{}^A = \bar{\epsilon}\sigma^A\psi_M - \bar{\psi}_M\sigma^A\epsilon \quad \Rightarrow$$
$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = &-\tfrac{1}{4}\varepsilon^{MNPQ}\varepsilon_{AB}{}^{CD}E_M{}^A R_{PQCD}\,(\bar{\epsilon}\sigma^B\psi_N - \bar{\psi}_N\sigma^B\epsilon) \\ &- \mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,(D_M\bar{\psi}_N\sigma_A\psi_Q + \bar{\psi}_Q\sigma_A D_M\psi_N)\,(\bar{\epsilon}\sigma^A\psi_P - \bar{\psi}_P\sigma^A\epsilon)\,. \end{aligned} \qquad (3.1.19)$$

Multiplizieren wir die letzte Zeile aus, so fallen die Produkte der jeweils ersten Terme bzw. der jeweils zweiten Terme weg, denn wegen der Fierz-Identität (3.1.7) ist ein Produkt der Form $\bar{\lambda}\sigma^A\psi_Q\,\bar{\chi}\sigma_A\psi_P$ in P und Q symmetrisch. Auf die anderen Terme wenden wir dann die Fierz-Identität so an, daß stets ϵ mit $D\psi$ kontrahiert wird. Die Variation der Wirkung ist dann

$$\delta\psi_M = D_M\epsilon, \quad \delta\bar{\psi}_M = D_M\bar{\epsilon},$$

$$\delta E_M{}^A = \bar{\epsilon}\sigma^A\psi_M - \bar{\psi}_M\sigma^A\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$\delta\mathcal{L} = \mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\big(D_M\bar{\psi}_N\sigma_A\epsilon + \bar{\epsilon}\sigma_A D_M\psi_N\big)\big(D_Q E_P{}^A + \bar{\psi}_P\sigma^A\psi_Q\big). \tag{3.1.20}$$

Die Variation ist proportional zu der Bewegungsgleichung (3.1.9) für den Spinzusammenhang Ω_{MAB}. Wir können demnach eine Variation $\delta\Omega_{MAB}$ angeben, so daß schließlich $\delta\mathcal{L}$ verschwindet. Diese ist implizit gegeben durch

$$\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ABCD}\,\delta\Omega_{[M}{}^{CD}E_{N]}{}^B = D_{[M}\bar{\psi}_{N]}\sigma_A\epsilon + \bar{\epsilon}\sigma_A D_{[M}\psi_{N]}. \tag{3.1.21}$$

Für den Fall, daß wir Ω als ein durch $\Omega[E,\psi]$ gegebenes zusammengesetztes Feld betrachten, würde die Variation (3.1.20) identisch verschwinden. Wir müßten aber dann noch die Variation von $\mathcal{L}$ unter $\delta\Omega[E,\psi]$ bestimmen. Nun ist diese aber wieder proportional zu der Bewegungsgleichung von Ω, also ist auch die Wirkung zweiter Ordnung invariant unter den lokalen Supersymmetrie-Transformationen (3.1.20).

2. Ashtekars Variable

Ganz analog zur Einführung von Ashtekars Variablen für die Gravitation in Kapitel II läßt sich die N=1 Supergravitation in diesen Variablen formulieren.[5] Die wesentliche Eigenschaft der Wirkung ist auch hier, daß sie der Realteil einer in $\mathcal{A}_{Ma}$ holomorphen Funktion ist. Aus der Definition der Lorentz-kovarianten Ableitung eines Spinors (3.1.5) konnten wir bereits ablesen, daß die kovariante Ableitung eines Spinors nur den selbstdualen Anteil des Spinzusammenhangs enthält, ein konjugierter Spinor dagegen nur den antiselbstdualen Anteil. Mit den Definitionen aus Kapitel II haben wir die Zerlegung des Spinzusammenhangs

$$\Omega_{MAB} = J_{aAB}\mathcal{A}_{Ma} + J^*_{aAB}\mathcal{A}^*_{Ma}, \tag{3.2.1}$$

und für die in der Wirkung auftretenden Ableitungen gilt

$$D_M\psi_N = \partial_M\psi_N - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{A}_{Ma}\,\sigma_a\psi_N, \quad D_N\bar{\psi}_N = \partial_M\bar{\psi}_N + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{A}^*_{Ma}\,\bar{\psi}_N\sigma_a. \tag{3.2.2}$$

[5] Die kanonische Formulierung der N=1 Supergravitation mit Ashtekars Variablen wurde von erstmals in [22] durchgeführt.

Wir sehen also, daß der Rarita-Schwinger-Term der Wirkung gerade in einen in $\mathcal{A}_{Ma}$ holomorphen Anteil und seinen komplex konjugierten Term zerfällt. Über den Krümmungstensor wissen wir bereits, daß die Krümmung des selbstdualen Anteils von Ω gleich dem selbstdualen Anteil der Krümmung ist, was eine Konsequenz der Zerlegung der komplexifizierten Lorentz-Algebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) = \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \times \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ war. Wir sollten allerdings hier besser $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ statt $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ schreiben, denn da die Fermionen in dieser Darstellung transformieren ist die Symmetrie-*Gruppe* der Theorie $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ und nicht $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$. Es folgt also aus (3.2.1), daß

$$R_{MNAB} = J_{aAB}\mathcal{F}_{MNa}[\mathcal{A}] + J^*_{aAB}\mathcal{F}^*_{aAB}[\mathcal{A}^*], \tag{3.2.3}$$

wobei $\mathcal{F}_{MNa}$ wieder durch

$$\mathcal{F}_{MNa} = \partial_M\mathcal{A}_{Na} - \partial_N\mathcal{A}_{Ma} + \varepsilon_{abc}\mathcal{A}_{Mb}\mathcal{A}_{Nc} \tag{3.2.4}$$

gegeben ist. Damit zerfällt auch die Einstein-Hilbert-Wirkung in eine holomorphe Funktion und deren konjugierte Größe. Die Wirkung der N=1 Supergravitation ist der Realteil der holomorphen Funktion

$$\tilde{I}[E,\psi,\mathcal{A}] = \int \mathrm{d}^4x\,\Big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{MNPQ}E_M{}^A E_N{}^B J_{aAB}\mathcal{F}_{PQa} + 2\mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,\bar{\psi}_M\sigma_N\mathcal{D}_P\psi_Q\Big), \tag{3.2.5}$$

wobei wir wieder $\mathcal{D}_M$ als Bezeichnung für die kovariante Ableitung mit Eichfeld $\mathcal{A}_{Ma}$ verwendet haben. Auf diese Wirkung wollen wir das Verfahren der holomorphen Quantisierung anwenden. Das heißt, wir betrachten $E_M{}^A$, ψ_M, $\bar{\psi}_M$ und $\mathcal{A}_{Ma}$ als unabhängige komplexe Felder und erhalten als Realitätsbedingungen

$$E_M{}^A \in \mathbb{R}, \quad \bar{\psi}_M - \mathrm{i}\psi_M^\top \in \mathbb{R}, \quad \psi_M^\top - \mathrm{i}\bar{\psi}_M \in \mathbb{R}. \tag{3.2.6}$$

Wir müssen nur noch zeigen, daß die holomorphe Wirkung $\tilde{I}$ wirklich die gleichen Bewegungsgleichungen liefert wie ihr Realteil. Im letzten Kapitel hatten wir gezeigt, daß es genügt, daß $\tilde{I}$ reell wird, wenn die Bewegungsgleichungen von $\mathcal{A}_{Ma}$ und die Realitätsbedingungen erfüllt sind. Auch hier kennen wir bereits die Bewegungsgleichungen, da sie mit denen von Ω_{MAB} in der reellen Wirkung übereinstimmen. Ihre Lösung ist

$$\mathcal{A}_{Ma} = \mathcal{A}_{Ma}[E,\psi] = J_a{}^{AB}\Omega_{MAB}[E,\psi]. \tag{3.2.7}$$

Wir setzen das in die Wirkung ein und berechnen (unter Verwendung der Realitätsbedingungen) explizit den Imaginärteil der Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\tilde{\mathcal{L}}[E,\psi,\mathcal{A}[E,\psi]] &= \varepsilon^{MNPQ}\Big(-\tfrac{1}{4}E_M{}^A E_N{}^B\big(J_{aAB}\mathcal{F}_{PQa} + J^*_{aAB}\mathcal{F}^*_{PQa}\big)\\ &\qquad + \bar{\psi}_M\sigma_N D_P\psi_Q + D_P\bar{\psi}_M\sigma_N\psi_Q\Big)\\ &= \varepsilon^{MNPQ}\big(-\tfrac{1}{4}E_M{}^A E_N{}^B R_{PQAB} - \bar{\psi}_M\sigma_A\psi_Q\,D_P E_N{}^A\big)\\ &= \varepsilon^{MNPQ}\big(-\tfrac{1}{2}E_M{}^A D_P D_Q E_N{}^B\eta_{AB} - \bar{\psi}_M\sigma_A\psi_Q\,D_P E_N{}^A\big)\\ &= \varepsilon^{MNPQ}\big(-\tfrac{1}{2}D_M E_N{}^A D_P E_Q{}^B\eta_{AB} + \bar{\psi}_M\sigma_A\psi_N\,D_P E_Q{}^A\big).\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Dabei haben wir die Zerlegung (3.2.3) benutzt und $\mathcal{D}_M\psi_N = D_M\psi_N$, und in der letzten Zeile haben wir einige Indizes umbenannt und partiell integriert. Der Integrand ist nun gerade das "Quadrat" der Bewegungsgleichung von Ω_{MAB} (3.1.9):

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\varepsilon^{MNPQ}\eta_{AB}\big(D_M E_N{}^A - \bar{\psi}_M\boldsymbol{\sigma}^A\psi_N\big)\big(D_P E_Q{}^B - \bar{\psi}_P\boldsymbol{\sigma}^B\psi_Q\big)\\ = \varepsilon^{MNPQ}\big(\tfrac{1}{2}D_M E_N{}^A D_P E_Q{}^B\eta_{AB} - \bar{\psi}_M\boldsymbol{\sigma}_A\psi_N\, D_P E_Q{}^A\big).\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Das Produkt der beiden Gravitinoterme verschwindet wieder aufgrund der Fierz-Identität. Der Imaginärteil der Wirkung ist also eine totale Divergenz und wir können $\tilde{I}$ als holomorphe Wirkung für die N=1 Supergravitation betrachten. Die Tilde lassen wir ab jetzt wieder weg.

Daß die Rarita-Schwinger-Wirkung hier ganz von selbst in einen in $\mathcal{A}$ holomorphen und einen antiholomorphen Teil aufspaltet, ergibt sich aus der speziellen Wahl der Spinordarstellung, also der Definition der $\boldsymbol{\sigma}$-Matrizen. Auch hier wird durch die neuen Variablen $\mathcal{A}$ und die holomorphe Darstellung der Zugang zur kanonischen Quantisierung erheblich erleichtert. Im Gegensatz zum Vierbein-Formalismus[6] mit der Wirkung (3.1.15), tritt hier keine Ableitung von $\bar{\psi}$ mehr auf und außerdem entkoppeln die Ableitungsterme von $\mathcal{A}$ und ψ. Daher können wir nachher aus der Wirkung direkt die kanonischen Orts- und Impulsvariablen ablesen, wie wir das auch für die Gravitation im Kapitel II konnten.

Allerdings müssen wir diese Vereinfachung mit einer gewissen Asymmetrie in der Darstellung der Supersymmetrie bezahlen, wie wir gleich sehen werden. Diese Asymmetrie taucht aber auch im metrischen Formalismus spätestens dann auf, wenn eine explizite Operatordarstellung gewählt wird, da dann entweder ψ oder $\bar{\psi}$ durch eine Ableitungsoperator dargestellt wird. Sie sollte sich also nicht störend bemerkbar machen.

Eichsymmetrien

Die Wirkung (3.2.5) ist natürlich weiterhin invariant unter lokalen Koordinaten- und Lorentz-Transformationen sowie unter Supersymmetrie-Transformationen. Unter Koordinatentransformationen oder Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, die durch einen Vektor V^M erzeugt werden, verhalten sich die Felder wieder wie ihre Lie-Ableitungen, also

$$\delta E_M{}^A = V^P\partial_P E_M{}^A + \partial_M V^P E_P{}^A \tag{3.2.10}$$

und entsprechend für die anderen Felder.

Die volle Lorentz-Symmetrie der komplexen Wirkung (3.2.5) ist genau wie für die Gravitation durch $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})\times\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ gegeben. Unter dem ersten Faktor ergeben sich die Transformationen

$$\delta E_M{}^A = -\omega_a J_a{}^A{}_B E_M{}^B, \quad \delta\psi_M = \tfrac{1}{2}\omega_a\,\boldsymbol{\sigma}_a\psi_M,$$

$$\delta\mathcal{A}_{Ma} = \partial_M\omega_A - \varepsilon_{abc}\omega_b\mathcal{A}_{Mc} = \mathcal{D}_M\omega_a. \tag{3.2.11}$$

Der Zusammenhang $\mathcal{A}_{Ma}$ ist wieder das Eichfeld für den ersten Faktor. Unter dem zweiten Faktor transformieren die Felder gemäß

$$\delta E_M{}^A = -v_a J^{*A}_a{}_B E_M{}^B, \quad \delta\bar{\psi}_M = -\tfrac{1}{2}v_a\,\bar{\psi}_M\boldsymbol{\sigma}_a. \tag{3.2.12}$$

Die Invarianz der Wirkung ergibt sich wieder aus der Tatsache, daß J_a mit J_b^* kommutiert, und weil die Wirkung keine Ableitung von $E_M{}^A$ oder $\bar{\psi}_M$ enthält, so daß auch kein Eichfeld für den zweiten $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$-Faktor auftritt. Lorentz-kovariante Ableitungen, die durch das Eichfeld $\mathcal{A}_{Ma}$ definiert sind, sind also nur kovariant unter dem ersten Faktor der vollen Lorentz-Gruppe und lauten für Vektoren V^A, selbstduale Tensoren $T_{AB} = T_a J_{aAB}$ und Spinoren $\boldsymbol{\chi}$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_M V^A &= \partial_M V^A + \mathcal{A}_{Ma}J_a{}^A{}_B V^B,\\ \mathcal{D}_M T_a &= \partial_M T_a + \varepsilon_{abc}\mathcal{A}_{Mb}T_c,\\ \mathcal{D}_M\boldsymbol{\chi} &= \partial_M\boldsymbol{\chi} - \tfrac{1}{2}\mathcal{A}_{Ma}\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\chi}.\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Konjugierte Spinoren $\boldsymbol{\lambda}$ sehen den selbstdualen Faktor der Lorentz-Gruppe nicht, wir definieren auch keine kovariante Ableitung. Sie wird erst später autreten, wenn wir für die kanonische Behandlung eine Eichfixierung durchführen, die, wie wir schon gesehen haben, die Lorentz-Symmetrie auf die diagonale Untergruppe der beiden Faktoren bricht, und somit auch die konjugierten Spinoren transformieren.

Ebenso wie die Lorentz-Symmetrie zerfällt auch die Supersymmetrie für die komplexifizierte Wirkung in zwei Faktoren. Unter dem ersten Faktor transformiert wieder nur ψ_M und nicht $\bar{\psi}_M$. Tatsächlich ist die Wirkung invariant unter

$$\delta\psi_M = \mathcal{D}_M\boldsymbol{\epsilon}, \quad \delta E_M{}^A = -\bar{\psi}_M\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\epsilon}. \tag{3.2.14}$$

Das Eichfeld $\mathcal{A}_{Ma}$ bleibt ebenfalls invariant. Durch Einsetzen erkennt man, daß die Variation des Rarita-Schwinger-Anteils unter $\delta\psi = D\epsilon$ durch die Variation des Einstein-Anteils unter $\delta E = \bar{\psi}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}$ annulliert wird. Die Variation des Rarita-Schinger-Anteils unter δE dagegen verschwindet aufgrund der Fierz-Identität.

Nun sind die Variationen der Felder $E_M{}^A$ und ψ_M in (3.2.14) gar nicht mehr von $E_M{}^A$ und ψ_M abhängig, sondern nur noch von $\mathcal{A}_{Ma}$ und $\bar{\psi}_M$, die wiederum selbst invariant unter dieser Supersymmetrie-Transformation sind. Das versetzt uns in die Lage, diese infinitesimale Transformation zu "exponentieren", also eine endliche Supersymmetrie-Transformation anzugeben. Sie lautet genau wie (3.2.14), nur daß wir $\boldsymbol{\epsilon}$ als endlich auffassen und quadratische Terme nicht mehr vernachlässigen können. Es treten zwei quadratische Terme auf, wenn man gleichzeitig beide Vierbeine in der Einstein-Hilbert-Wirkung bzw. das Vierbein und ψ in der Rarita-Schwinger-Wirkung variiert:

$$\begin{aligned}\delta^2\mathcal{L} = &-\tfrac{1}{2}\varepsilon^{MNPQ}\,\bar{\psi}_M\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\epsilon}\,\bar{\psi}_N\boldsymbol{\sigma}^B\boldsymbol{\epsilon}\,J_{aAB}\mathcal{F}_{PQa}\\ &-2\mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,\bar{\psi}_M\boldsymbol{\sigma}_A\mathcal{D}_P\mathcal{D}_Q\boldsymbol{\epsilon}\,\bar{\psi}_N\boldsymbol{\sigma}^A\boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

[6] Dort treten noch eine Reihe von Zwangsbedingungen zweiter Klasse auf, die zu nichttrivialen Vertauschungsrelationen der kanonischen Variablen führen und damit zu einer wesentlich komplizierteren Operatordarstellung [21].

Auswerten des Kommutators im zweiten Term ergibt, daß dieser bis auf einen Faktor 2 gleich dem ersten ist, der aber aufgrund der "selbstdualen Fierz-Identität" in (3.1.7) verschwindet. Die Wirkung ist demnach invariant auch unter der *endlichen* Transformation (3.2.14).

Ganz anders sieht es für den zweiten Faktor der Supersymmetrie aus, unter dem $\bar{\psi}_M$ transformiert. Wir werden hier nicht ohne eine Variation von $\mathcal{A}_{Ma}$ auskommen, so daß auch das Exponentieren nicht mehr möglich ist. Auch die Variation der anderen Felder wird ein wenig komplizierter werden. Machen wir aber zunächst den Ansatz

$$\delta\bar{\psi}_M = \partial_M \bar{\epsilon}, \quad \delta E_M{}^A = \bar{\epsilon}\sigma^A \psi_M. \tag{3.2.16}$$

Wegen der hier auftretenden Ableitung von $\bar{\epsilon}$ ist der Ansatz natürlich nicht kovariant unter dem zweiten Faktor der Lorentz-Gruppe, kann also nicht die volle Supersymmetrie-Transformation darstellen. Setzen wir ihn trotzdem in die Wirkung ein, so bekommen wir nach einigen Umformungen

$$\delta\bar{\psi}_M = \partial_M \bar{\epsilon}, \quad \delta E_M{}^A = \bar{\epsilon}\sigma^A \psi_M \quad \Rightarrow$$
$$\delta\mathcal{L} = -2\mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,\bar{\epsilon}\sigma_A \mathcal{D}_M \psi_N \left(\mathcal{D}_P E_Q{}^A + \bar{\psi}_Q \sigma^A \psi_P\right). \tag{3.2.17}$$

Da hier wieder die Bewegungsgleichung für den Spinzusammenhang aus (3.1.9) auftritt, sollte es möglich sein, eine Variation für $\mathcal{A}_{Ma}$ so anzugeben, daß sich die daraus resultierende Variation der Wirkung wieder gegen dieses $\delta\mathcal{L}$ weghebt. Für ein gegebenes $\delta\mathcal{A}_{Ma}$ gilt

$$\delta\mathcal{L} = -2\mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,\delta\mathcal{A}_{Ma}\, J_{aAB}\, E_N{}^B \left(\mathcal{D}_P E_Q{}^A + \bar{\psi}_Q \sigma^A \psi_P\right). \tag{3.2.18}$$

Sollen sich diese Beiträge gegenseitig aufheben, muß gelten

$$E_{[N}{}^B \delta\mathcal{A}_{M]a} J_{aAB} = -\bar{\epsilon}\sigma_A \mathcal{D}_{[M}\psi_{N]}. \tag{3.2.19}$$

Man überzeugt sich leicht, daß das nicht möglich ist: Man kann die Gleichung nach $\delta\mathcal{A}_{Ma}J_{aAB}$ auflösen, erhält aber einen Ausdruck, der nicht selbstdual ist. Da die Variation von $\bar{\psi}_M$ noch nicht vollständig Lorentz-kovariant war, sollten wir ohnehin noch einen Beitrag zur Variation des Gravitinos addieren, der von der Form

$$\delta'\psi_M = \tfrac{1}{2} B_{Ma}\, \epsilon\sigma_a \tag{3.2.20}$$

ist, wobei B eine Funktion der Felder E, $\mathcal{A}$, $\bar{\psi}$ und ψ ist und wie ein Eichfeld in der antiselbstdualen Darstellung der Lorentz-Gruppe transformieren muß. Die Variation der Wirkung unter $\delta'\psi_M$ ist

$$\delta\mathcal{L} = -2\mathrm{i}\varepsilon^{MNPQ}\,\bar{\epsilon}\sigma^B \mathcal{D}_N \psi_Q\, E_P{}^A J^*_{aAB} B_{Ma}. \tag{3.2.21}$$

Auch dies ist wieder "fast" proportional zu der zu annulierenden Variation (3.2.17). Tatsächlich kann man nun $\delta\mathcal{A}_{Ma}$ und B_{Ma} so finden, daß sich alle Beiträge wegheben und die Wirkung

schließlich invariant wird. Die Lösungen sind ein wenig unhandlich und lauten

$$\delta\mathcal{A}_{Ma} = J_a{}^{AB}\left(\tfrac{4}{3}Z_{A[BM]} - \tfrac{2}{3}Z_{M[AB]}\right),$$
$$B_{Ma} = J_a^{*AB}\left(\tfrac{4}{3}Y_{[MA]B} - \tfrac{2}{3}Y_{[AB]M}\right), \tag{3.2.22}$$

wobei die Y und Z durch geeignete Multiplikation mit Vierbeinen und inversen Vierbeinen aus

$$Y_{MN}{}^A = \mathcal{D}_M E_N{}^A + \bar{\psi}_N \sigma^A \psi_M,$$
$$Z_{AMN} = \bar{\epsilon}\sigma_A \mathcal{D}_M \psi_N \tag{3.2.23}$$

hervorgehen. Die vollen Transformationen für den zweiten Faktor der Supersymmetrie sind also gegeben durch

$$\delta E_M{}^A = \bar{\epsilon}\sigma^A \psi_M,$$
$$\delta\bar{\psi}_M = \partial_M \bar{\epsilon} + \mathrm{i}\left(\tfrac{2}{3}Y_{[MA]B} - \tfrac{1}{3}Y_{[AB]M}\right)\bar{\epsilon}\sigma_a J_a^{*AB}$$
$$\delta\mathcal{A}_{Ma} = \left(\tfrac{4}{3}Z_{A[BM]} - \tfrac{2}{3}Z_{M[AB]}\right)J_a{}^{AB} \tag{3.2.24}$$

Anders als bei der einfachen Symmetrie (3.2.14) tritt in diesen Variationen auch das Inverse von $E_M{}^A$ auf, die Supersymmetrie ist zunächst nur für solche Felder definiert, für die die Determinante E nicht verschwindet. Durch einen einfachen Trick können wir aber eine neue Transformation finden, die auch für singuläre Metriken definiert ist. Wir ersetzen den Parameter $\bar{\epsilon}$ durch einen neuen Parameter $\bar{\eta}$, der mit dem alten durch $\bar{\epsilon} = E\bar{\eta}$ verknüpft ist. Die rechten Seiten in den Transformationsregeln werden dann zu Polynomen in $E_M{}^A$, $\mathcal{A}_{Ma}$, $\bar{\psi}_M$, ψ_M und $\bar{\eta}$ und sind somit für jede Feldkonfiguration wohldefiniert.

Einen ähnlichen Trick haben wir schon bei der kanonischen Formulierung der Gravitation angewandt, und wir werden ihn auch wieder bei der Supergravitation benötigen: Wir müssen die Lagrange-Multiplikatoren (diese entsprechen im kanonischen Formalismus ja gerade den Parametern von Eichsymmetrien) mit zusätzlichen Faktoren e versehen, um zu polynomialen Zwangsbedingungen zu gelangen.

3. Kanonische Formulierung

Als Parameterzeit für die kanonische Formulierung der Supergravitation wählen wir wie in Kapitel II die Zeitkoordinate t. Die restlichen Komponenten x, y und z werden zu lokalen Koordinaten auf einer raumartigen Hyperfläche $\mathcal{N}$. Für das Vierbein wählen wir die gleiche Eichfixierung,[7] seine Komponenten sind gegeben durch

$$E_{\mathrm{t}}^{\,0} = ne, \quad E_{\mathrm{t}}^{\,a} = n^m e_{ma}, \quad E_m{}^0 = 0, \quad E_m{}^a = e_{ma}. \tag{3.3.1}$$

[7] Die kanonischen Formulierung der Supergravitation wird meist ohne diese Eichfixierung durchgeführt. In der metrischen Darstellung [21] führt das lediglich zu einer etwas aufwendigeren Rechnung. Siehe jedoch [20] für eine vereinfachte Ableitung der Zwangsbedingungen und Dirac-Klammern. In der Darstellung mit Ashtekars Zusammenhang [22] als kanonische Variable sind jedoch ohne die Eichfixierung die Voraussetzungen für die holomorphe Quantisierung nicht erfüllt.

Für die $\boldsymbol{\sigma}$-Matrizen mit gekrümmten Indizes ergibt sich entsprechend

$$\boldsymbol{\sigma}_m = e_{ma}\boldsymbol{\sigma}_a, \quad \boldsymbol{\sigma}_t = ne\mathbf{1} + n^m\boldsymbol{\sigma}_m \tag{3.3.2}$$

Hier läuft wieder a von 1 bis 3 und m nimmt die Werte x, y und z an. Die Aufspaltung der Einstein-Hilbert-Wirkung können wir direkt aus (2.3.15) übernehmen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = {} & \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m \dot{\mathcal{A}}_{ma} + \mathrm{i}\mathcal{A}_a \mathcal{D}_m \tilde{e}_a{}^m \\ & - \tfrac{1}{2} n\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\mathcal{F}_{mnc} - \mathrm{i}n^m\tilde{e}_a{}^n\mathcal{F}_{mna}.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Den entsprechenden Anteil aus der Rarita-Schwinger-Wirkung erhalten wir, indem wir auch dort die Summen über die vierdimensionalen Indizes aufspalten und die Eichung des Vierbeins einsetzen. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} = 2\mathrm{i}\varepsilon^{mnp} \big(& \bar{\psi}_t\boldsymbol{\sigma}_m\mathcal{D}_n\psi_p - \bar{\psi}_m\boldsymbol{\sigma}_n\mathcal{D}_p\psi_t \\ & + \bar{\psi}_m\boldsymbol{\sigma}_n\mathcal{D}_t\psi_p - en\,\bar{\psi}_m\mathcal{D}_n\psi_p - n^q\,\bar{\psi}_m\boldsymbol{\sigma}_q\mathcal{D}_n\psi_p\big).\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Wir können hier bereits ablesen, daß der zu ψ_p konjugierte Impuls $\bar{\boldsymbol{\pi}}^p$ durch

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}^p = \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}_p} = -2\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\bar{\psi}_m\boldsymbol{\sigma}_n \quad \Rightarrow \quad e\,\bar{\psi}_m = -\tfrac{1}{4}\bar{\boldsymbol{\pi}}^n\boldsymbol{\sigma}_m\boldsymbol{\sigma}_n \tag{3.3.5}$$

gegeben ist, wobei das zusätzliche $-$-Zeichen aus der Graßmann-Eigenschaft von $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ resultiert, da wir die Funktionalableitung erst "durchziehen" müssen. Der Impuls ist wieder eine Dichte mit Gewicht 1 und wird dadurch zum supersymmetrischen Partner des inversen Dreibein $\tilde{e}_a{}^m$ werden, das als kanonischer Impuls des Zusammenhangs $\mathcal{A}_{ma}$ auftritt. Wir werden jetzt versuchen, die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von ψ_p und $\bar{\boldsymbol{\pi}}^p$ anzugeben, und zwar möglichst so, daß die Zwangsbedingungen zu Polynomen in diesen Variablen werden. Um das zu erreichen, haben wir noch die Möglichkeit, die Multiplikatoren ψ_t und $\bar{\psi}_t$ umzudefinieren.

Schreiben wir die kovariante Zeitableitung explizit als $\mathcal{D}_t\psi_p = \dot{\psi}_p - \frac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{A}_a\boldsymbol{\sigma}_a\psi_p$, wobei wir wieder $\mathcal{A}_{ta} = \mathcal{A}_a$ setzen, so erhalten wir die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} = {} & -\bar{\boldsymbol{\pi}}^p\dot{\psi}_p + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{A}_a\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^p\boldsymbol{\sigma}_a\psi_p + \bar{\boldsymbol{\pi}}^p\mathcal{D}_p\psi_t \\ & + 2\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\big(\bar{\psi}_t\boldsymbol{\sigma}_m\mathcal{D}_n\psi_p - en\,\bar{\psi}_m\mathcal{D}_n\psi_p - n^q\,\bar{\psi}_m\boldsymbol{\sigma}_q\mathcal{D}_n\psi_p\big).\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Wir benutzen die obige Formel für $e\bar{\psi}_m$ für den zweitletzten Term und im letzten Term nutzen wir aus, daß die in den unteren Indizes total antisymmetrisierte Form verschwindet, da die vier Indizes nur drei Werte annehmen. Es gilt also

$$-2\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}n^q\,\bar{\psi}_m\boldsymbol{\sigma}_q\mathcal{D}_n\psi_p = -2\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}n^q\,\bar{\psi}_q\boldsymbol{\sigma}_m\mathcal{D}_n\psi_p - 4\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}n^q\,\bar{\psi}_m\boldsymbol{\sigma}_n\mathcal{D}_{[q}\psi_{p]}. \tag{3.3.7}$$

Den ersten Term können wir mit dem Term, der $\bar{\psi}_t$ enthält, zusammenfassen, der zweite enthält wieder den Impuls $\bar{\boldsymbol{\pi}}^p$. Wir sind damit fast am Ziel, denn die Lagrange-Funktion enthält jetzt nur noch einen Term mit $\bar{\psi}_q$ und lautet

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} = {} & -\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\dot{\psi}_m + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{A}_a\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{\sigma}_a\psi_m + \bar{\boldsymbol{\pi}}^m\mathcal{D}_m\psi_t - 2n^q\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^p\mathcal{D}_{[p}\psi_{q]} \\ & + 2\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\,(\bar{\psi}_t - n^q\bar{\psi}_q)\,\boldsymbol{\sigma}_m\mathcal{D}_n\psi_p + \tfrac{\mathrm{i}}{2}n\varepsilon^{mnp}\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^q\boldsymbol{\sigma}_m\boldsymbol{\sigma}_q\mathcal{D}_n\psi_p.\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Den letzten $\bar{\psi}_q$-Term können wir nun einfach dadurch eliminieren, daß wir den Multiplikator $\bar{\psi}_t$ umdefinieren. In $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ tritt über die $\boldsymbol{\sigma}$-Matrizen mit gekrümmten Indizes immer noch das Dreibein auf, das ja selbst nicht als kanonische Variable fungiert, sondern seine Dichte $\tilde{e}_a{}^m$. Wir müssen $\mathcal{L}$ als Funktion der Matrizen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^m = \tilde{e}_a{}^m\boldsymbol{\sigma}_a$ schreiben. Dazu benutzen wir die Formeln

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^m = e\boldsymbol{\sigma}^m = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{mnp}\boldsymbol{\sigma}_n\boldsymbol{\sigma}_p, \quad \boldsymbol{\sigma}_{[m}\boldsymbol{\sigma}_{n]} = \mathrm{i}\varepsilon_{mnp}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^p. \tag{3.3.9}$$

Für den letzten Term in (3.3.8) ergibt sich

$$\tfrac{\mathrm{i}}{2}n\varepsilon^{mnp}\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^q\boldsymbol{\sigma}_m\boldsymbol{\sigma}_q\mathcal{D}_n\psi_p = 2\mathrm{i}n\varepsilon^{mnp}\,\bar{\psi}_q\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^q\boldsymbol{\sigma}_m\mathcal{D}_n\psi_p - 2n\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^n D_{[m}\psi_{n]}. \tag{3.3.10}$$

Wieder können wir den ersten Term mit dem zweitletzten Term in der Lagrange-Funktion zusammenfassen, so daß nur noch in diesem ein $\boldsymbol{\sigma}_m$ auftritt. Um dieses auch noch zu beseitigen, wählen wie die Kombination

$$\bar{\zeta} = e^{-1}(\bar{\psi}_t - n^m\bar{\psi}_m + n\bar{\psi}_m\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^m) \tag{3.3.11}$$

als unseren Lagrange-Multiplikator. Dieses ist ein Spinorfeld mit Gewicht -1, genau wie die Lapse-Funktion n, und auch hier sind wir zu dieser Redefinition gezwungen, um zu polynomialen Zwangsbedingungen zu kommen. Setzen wir alles ein, nehmen die Einstein-Hilbert-Wirkung wieder hinzu, so hat unsere Lagrange-Funktion die Standardform

$$\begin{aligned}L = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,&(\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^m\dot{\mathcal{A}}_{ma} - \bar{\boldsymbol{\pi}}^m\dot{\psi}_m) \\ & + \boldsymbol{G}[\mathcal{A}_a] + \bar{\boldsymbol{S}}[\psi_t] + \boldsymbol{S}[\bar{\zeta}] + \boldsymbol{K}[n^m] + \boldsymbol{H}[n],\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

die Hamilton-Funktion ist wieder eine Linearkombination der Zwangsbedingungen, jeweils multipliziert mit den zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren. Die Zwangsbedingungen selbst sind Polynome in den kanonischen Variablen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\mathcal{F}_{mnc} - 2\tilde{e}_a{}^m\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^n\boldsymbol{\sigma}_a\mathcal{D}_{[m}\psi_{n]}, \\ \boldsymbol{K}_m &= -\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^n\mathcal{F}_{mna} + 2\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^n\mathcal{D}_{[m}\psi_{n]}, \\ \boldsymbol{G}_a &= \mathrm{i}\mathcal{D}_m\tilde{e}_a{}^m + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{\sigma}_a\psi_m, \\ \boldsymbol{S} &= 2\mathrm{i}\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m\tilde{e}_b{}^n\,\boldsymbol{\sigma}_c\mathcal{D}_m\psi_n, \\ \bar{\boldsymbol{S}} &= \mathcal{D}_m\bar{\boldsymbol{\pi}}^m.\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Die "verschmierten" Funktionen $\boldsymbol{H}[n]$ etc. sind wieder durch Integration über den Raum, gewichtet mit Argumenten in den eckigen Klammern, definiert. Für die neuen Graßmann-wertigen Funktion $\boldsymbol{S}$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$ gilt

$$\bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \bar{\boldsymbol{S}}\epsilon, \quad \boldsymbol{S}[\bar{\eta}] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \bar{\eta}\boldsymbol{S}, \tag{3.3.14}$$

wobei $\bar{\eta}$ eine Spinor-Dichte vom Gewicht -1 ist, ϵ dagegen hat Gewicht 0 unter Diffeomorphismen auf $\mathcal{N}$. Die bereits am Ende vom Abschnitt 2 diskutierte Asymmetrie zwischen den beiden Faktoren der Supersymmetrie wird hier durch die in ihrer Struktur völlig verschiedenen Zwangsbedingungen $\boldsymbol{S}$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$ ausgedrückt. Während $\bar{\boldsymbol{S}}$ linear in $\bar{\boldsymbol{\pi}}^m$ und $\mathcal{A}_{ma}$ ist, ist $\boldsymbol{S}$ quadratisch in $\tilde{e}_a{}^m$ und insgesamt vom Grad 4 in den kanonischen Variablen.

Die Poisson-Klammern sind

$$\{\tilde{e}_a{}^m, \mathcal{A}_{nb}\} = \mathrm{i}\eta_{ab}\delta^m_n, \quad \{\psi_{m\alpha}, \bar{\boldsymbol{\pi}}^n_\beta\} = -\delta_{\alpha\beta}\delta^n_m, \tag{3.3.15}$$

wobei wir wieder die räumlichen Delta-Funktionen weggelassen haben. Man beachte, daß die Poisson-Klammern für Graßmann-Variablen symmetrisch sind und das Vorzeichen dadurch fixiert ist, daß sich die Hamiltonsche Bewegungsgleichung für eine antivertauschende Variable aus der Variation der Lagrange-Funktion ergibt: Sei θ eine Graßmann-Variable und ϑ ihr konjugierter Impuls, so ist

$$\dot{\theta} = \{\theta, H(\theta,\vartheta)\} = \{\theta,\vartheta\}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,H(\theta,\vartheta) \tag{3.3.16}$$

genau dann äquivalent zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\dot{\theta}\vartheta - H(\theta,\vartheta)\Big) = -\dot{\theta} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}H(\theta,\vartheta), \tag{3.3.17}$$

wenn $\{\theta,\vartheta\} = -1$ ist, die Poisson-Klammer einer Variable mit ihrem konjugierten Impuls ist also -1.

Die kinematischen Zwangsbedingungen

Wir wollen auch hier wieder unterscheiden zwischen den kinematischen Zwangsbedingungen, die eine Unteralgebra bilden und einfache Eichtransformationen auf den Feldern erzeugen, und den dynamischen Zwangsbedingungen, die, wieder mit den gleichen Vorbehalten wie im letzten Kapitel, die "Zeitentwicklung" beschreiben. Da wir auch hier eine Wirkung mit Parameterzeit vorliegen haben, gelten in genau der gleichen Weise die Anmerkungen aus aus Kapitel I.

Betrachten wir also zuerst die Zwangsbedingungen, die höchstens bilineare Funktionen der kanonischen Variablen sind. Es sind dies wieder die Erzeuger der lokalen SU(2)-Symmetrie und der Translationen, und zusätzlich der des "einfachen" Faktors der Supersymmetrie. Wie bei der Gravitation erzeugt auch hier $\boldsymbol{K}_m$ keine reinen Translationen, sondern noch zusätzliche Rotationen und diesmal auch Supersymmetrie-Transformationen. Wir können aber wieder einen Erzeuger $\boldsymbol{D}_m$ definieren, indem wir Vielfache der anderen Zwangsbedingungen addieren. Diesmal liefert $\boldsymbol{D}_m = \boldsymbol{K}_m + \mathcal{A}_{ma}\boldsymbol{G}_a - \bar{\boldsymbol{S}}\psi_m$ die richtigen Transformationen. Die kinematischen Zwangsbedingungen sind also

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_a &= \mathrm{i}\mathcal{D}_m\tilde{e}_a{}^m + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{\sigma}_a\psi_m, \\
\boldsymbol{D}_m &= -\partial_n(\mathrm{i}\tilde{e}_a{}^n\mathcal{A}_{ma} + \bar{\boldsymbol{\pi}}^n\psi_m) - \mathrm{i}\tilde{e}_a{}^n\partial_m\mathcal{A}_{na} + \bar{\boldsymbol{\pi}}^n\partial_m\psi_n, \\
\bar{\boldsymbol{S}} &= \mathcal{D}_m\bar{\boldsymbol{\pi}}^m.
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Die von $\boldsymbol{G}[\omega_a]$ erzeugten Transformationen sind die SO(3)-Rotationen, wobei das Gravitino in der Spinordarstellung SU(2) transformiert:

$$\begin{aligned}
\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{G}[\omega_a]\} &= \varepsilon_{abc}\omega_b\tilde{e}_c{}^m, \\
\{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{G}[\omega_a]\} &= -\mathcal{D}_m\omega_a, \\
\{\psi_m, \boldsymbol{G}[\omega_a]\} &= -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_a\,\boldsymbol{\sigma}_a\psi_m, \\
\{\bar{\boldsymbol{\pi}}^m, \boldsymbol{G}[\omega_a]\} &= \bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{\sigma}_a\,\tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_a.
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Man bachte, daß auch $\bar{\boldsymbol{\pi}}^m$ unter der selbstdualen Darstellung der Lorentz-Gruppe transformiert, denn in der Definition von $\bar{\boldsymbol{\pi}}^m$ in (3.3.5) tritt eine Pauli-Matrix $\boldsymbol{\sigma}_n$ auf, die aus dem "anti-selbstdualen Index" von $\bar{\psi}_m$ einen "selbstdualen" macht. Auch in der kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_m\bar{\boldsymbol{\pi}}^m = \partial_m\bar{\boldsymbol{\pi}}^m + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathcal{A}_{ma}\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{\sigma}_a$ tritt somit $\mathcal{A}_{ma}$ auf und nicht das komplex konjugierte Feld. Den gleichen Effekt hatten wir in (2.3.11) für das Dreibein $\tilde{e}_a{}^m$ gesehen, dessen flacher Index ebenfalls "selbstdual" ist. Somit transformieren alle hier in der kanonischen Formulierung noch auftretenden flachen Indizes unter der selbstdualen Darstellung der Lorentz-Gruppe, also der SU$(2,\mathbb{C})$, deren Eichfeld $\mathcal{A}_{ma}$ ist.

Für $\boldsymbol{D}_m$ bekommen wir die Transformationen

$$\begin{aligned}
\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= -\mathcal{L}_{(\xi^m)}\tilde{e}_a{}^m = \tilde{e}_a{}^n\partial_n\xi^m - \partial_n(\xi^n\tilde{e}_a{}^m), \\
\{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= -\mathcal{L}_{(\xi^m)}\mathcal{A}_{ma} = -\xi^n\partial_n\mathcal{A}_{ma} - \partial_m\xi^n\mathcal{A}_{na}, \\
\{\bar{\boldsymbol{\pi}}^m, \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= -\mathcal{L}_{(\xi^m)}\bar{\boldsymbol{\pi}}^m = \bar{\boldsymbol{\pi}}^n\partial_n\xi^m - \partial_n(\xi^n\bar{\boldsymbol{\pi}}^m), \\
\{\psi_m, \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= -\mathcal{L}_{(\xi^m)}\psi_m = -\xi^n\partial_n\psi_m - \partial_m\xi^n\psi_m.
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Soweit ergibt sich gegenüber der reinen Gravitation nichts neues, die von $\boldsymbol{D}_m$ und $\boldsymbol{G}_a$ erzeugte Algebra ist auch wieder dieselbe

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{G}[\omega_a], \boldsymbol{G}[\omega'_a]\} &= \boldsymbol{G}[\varepsilon_{abc}\omega'_b\omega_c], \\
\{\boldsymbol{D}[\xi^m], \boldsymbol{D}[\xi'^m]\} &= \boldsymbol{D}[\xi'^n\partial_n\xi^m - \xi^n\partial_n\xi'^m], \\
\{\boldsymbol{G}[\omega_a], \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= \boldsymbol{G}[\xi^m\partial_m\omega_a].
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Die Zwangsbedingung $\bar{\boldsymbol{S}}$ erzeugt einen Faktor der Supersymmetrie, und da sie nur die Felder $\mathcal{A}_{ma}$ und $\bar{\boldsymbol{\pi}}^m$ enthält, wirkt sie nur auf $\tilde{e}_a{}^m$ und ψ_m:

$$
\begin{aligned}
\{\tilde{e}_a{}^m, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\} &= -\tfrac{1}{2}\,\bar{\boldsymbol{\pi}}^m \boldsymbol{\sigma}_a \boldsymbol{\epsilon}, \\
\{\psi_m, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\} &= -\mathcal{D}_m \epsilon.
\end{aligned} \tag{3.3.22}
$$

Dies ist gerade der kanonisch formulierte "einfache Faktor" der Supersymmetrie (3.2.14). Insbesondere ist die Wirkung von $\bar{\boldsymbol{S}}$ auf ψ_m die gleiche wie die von $\boldsymbol{G}_a$ auf $\mathcal{A}_{ma}$. Wir können also das Gravitino als Eichfeld der Supersymmetrie betrachten.

Die Poisson-Klammern der anderen kinematischen Zwangsbedingungen mit $\bar{\boldsymbol{S}}$ bestehen wieder darin, daß der Parameter ϵ entsprechend transformiert wird:

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon], \boldsymbol{G}[\omega_a]\} &= \bar{\boldsymbol{S}}[\tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_a\, \boldsymbol{\sigma}_a \boldsymbol{\epsilon}], \\
\{\bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon], \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= \bar{\boldsymbol{S}}[\xi^m \partial_m \epsilon], \\
\{\bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon], \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon']\} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3.23}
$$

Die letzte Gleichung besagt nichts anderes, als daß die durch $\bar{\boldsymbol{S}}$ erzeugte Gruppe abelsch ist und wir, wie wir das ja bereits getan haben, die *endlichen* Supersymmetrie-Transformationen angeben können, einfach indem wir ϵ als endlichen Parameter auffassen statt als "infinitesimalen Erzeuger".

Die dynamischen Zwangsbedingungen

Die verbleibenden Zwangsbedingungen $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{S}$ sind nicht wie die übrigen Polynome zweiten Grades in den kanonischen Variablen, erzeugen also keine einfachen linearen Transformationen auf den Feldern. Wir bezeichnen sie daher wieder als dynamische Zwangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m \tilde{e}_b{}^n \mathcal{F}_{mnc} - 2\tilde{e}_a{}^m\, \bar{\boldsymbol{\pi}}^n \boldsymbol{\sigma}_a \mathcal{D}_{[m}\psi_{n]}, \\
\boldsymbol{S} &= 2\mathrm{i}\varepsilon_{abc}\tilde{e}_a{}^m \tilde{e}_b{}^n\, \boldsymbol{\sigma}_c \mathcal{D}_m \psi_n .
\end{aligned} \tag{3.3.24}
$$

Betrachten wir zuerst $\boldsymbol{S}$. Es erzeugt die folgenden Transformationen:

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{A}_{ma}, \boldsymbol{S}[\bar{\eta}]\} &= 4\varepsilon_{abc}\tilde{e}_b{}^n\, \bar{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\sigma}_c \mathcal{D}_{[m}\psi_{n]}, \\
\{\tilde{e}_a{}^m, \boldsymbol{S}[\bar{\eta}]\} &= \mathrm{i}\varepsilon_{bcd}\tilde{e}_b{}^m \tilde{e}_c{}^n\, \bar{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\sigma}_d \boldsymbol{\sigma}_a \psi_n, \\
\{\bar{\boldsymbol{\pi}}^m, \boldsymbol{S}[\bar{\eta}]\} &= -2\mathrm{i}\varepsilon^{mnp}\mathcal{D}_m\left(\tilde{e}_n{}^a\, \bar{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\sigma}_a\right), \\
\{\psi_m, \boldsymbol{S}[\bar{\eta}]\} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3.25}
$$

Dies entspricht gerade dem zweiten Faktor der Supersymmetrie von dem wir auch schon am Ende von Abschnitt 2 gesehen haben, daß er eine kompliziertere Form annimmt und sich nicht mehr so einfach die endlichen Transformationen angeben lassen. Wir hatten dort gesehen, daß wir den Parameter $\bar{\epsilon}$ durch einen mit Gewicht -1 unter Diffeomorphismen ersetzen müssen, um die Transformation auch für singuläre Metriken definieren zu können. In der kanonischen Formulierung mußten wir entsprechend der Lagrange-Multiplikator $\bar{\psi}_t$ durch einen vom Gewicht -1 ersetzen, um zu einer polynomialen Zwangsbedingung zu gelangen.

Bilden wir die Klammern von $\boldsymbol{S}$ mit den kinematischen Zwangsbedingungen, so bewirkt $\boldsymbol{D}_m$ und $\boldsymbol{G}_a$ gerade, daß der Parameter $\bar{\eta}$ transformiert wird

$$
\begin{aligned}
\{\boldsymbol{S}[\bar{\eta}], \boldsymbol{G}[\omega_a]\} &= \boldsymbol{S}[-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\omega_a\, \bar{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\sigma}_a], \\
\{\boldsymbol{S}[\bar{\eta}], \boldsymbol{D}[\xi^m]\} &= \boldsymbol{S}[\xi^m\partial_m\bar{\boldsymbol{\eta}} - \partial_m\xi^m\, \bar{\boldsymbol{\eta}}],
\end{aligned} \tag{3.3.26}
$$

und die Klammer von $\bar{\boldsymbol{S}}$ mit $\boldsymbol{S}$ ist

$$
\{\bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon], \boldsymbol{S}[\bar{\eta}]\} = \boldsymbol{H}[-\bar{\boldsymbol{\eta}}\epsilon] + \boldsymbol{K}[\tilde{e}_a{}^m \bar{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\epsilon}] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \bar{\boldsymbol{\eta}}\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.3.27}
$$

wobei wir $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_m$ zu einer matrixwertigen Zwangsbedingung

$$
\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{H}\,\mathbf{1} + \tilde{e}_a{}^m \boldsymbol{K}_m\, \boldsymbol{\sigma}_a = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{mnp}\tilde{e}_{ma}\mathcal{F}_{npb}\, \boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{\sigma}_b + 2\mathrm{i}\varepsilon_{abc}\, \boldsymbol{\sigma}_a \mathcal{D}_{[m}\psi_{n]}\, \tilde{e}_b{}^m\, \bar{\boldsymbol{\pi}}^n \boldsymbol{\sigma}_c \tag{3.3.28}
$$

zusammengefaßt haben.

Natürlich spiegelt die Klammer (3.3.27) die Tatsache wieder, daß der Kommutator zweier Supersymmetrie-Transformationen eine Translation ist, die hier in einen raumartigen und einen zeitartigen Teil aufspaltet. Für die Quantentheorie hat diese Gleichung zwei sehr bedeutende Konsequenzen. Erstens brauchen wir nur die kinematischen Bedingungen und $\boldsymbol{S}$ zu lösen, um einen physikalischen Zustand zu bekommen. Aus $\widehat{\boldsymbol{S}}\Psi = 0$ und $\widehat{\bar{\boldsymbol{S}}}\Psi = 0$ folgt dann $\widehat{\boldsymbol{H}}\Psi = 0$. Wir können sogar noch einen Schritt weitergehen und die Bedingungen $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_m$ durch $\boldsymbol{C}$ ersetzen, dann müssen wir nur $\boldsymbol{G}_a$, $\bar{\boldsymbol{S}}$ und $\boldsymbol{S}$ lösen und haben einen physikalischen Zustand gefunden. Allerdings müssen wir dann wieder voraussetzen, daß das Dreibein invertierbar ist, denn sonst ist $\boldsymbol{C} = 0$ nicht äquivalent zu $\boldsymbol{H} = 0$ und $\boldsymbol{K}_m = 0$.

Die zweite Folgerung aus der Vertauschungsrelation betrifft die Operatorordnung und die Regularisierung. In den kinematischen Zwangsbedingungen treten keine Ordnungsprobleme auf, in $\boldsymbol{S}$ steht jedoch ein Produkt von $\mathcal{A}_{bm}$ und $\tilde{e}_a{}^m$. Wir müssen uns also dort für eine bestimmte Ordnung entscheiden. Dann ist aber auch die Ordnung von $\boldsymbol{H}$ fixiert, wenn wir verlangen, daß (3.3.27) weiterhin gilt. Das gleiche gilt für die Regularisierung. Bei geschickter Wahl der Darstellung werden alle kinematischen Zwangsbedingungen zu Differentialoperatoren erster Ordnung und sind somit wohldefiniert, nur $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{H}$ müssen regularisiert werden. Es genügt aber, für $\boldsymbol{S}$ eine regularisierte Version anzugeben. Über die Vertauschungsrelation ergibt sich dann eine regularisierte Version für $\boldsymbol{H}$.

Eigentlich müssen wir jetzt noch prüfen, ob die komplette Algebra tatsächlich aus Zwangsbedingungen erster Klasse besteht, also auch die Poisson-Klammern mit $\boldsymbol{H}$ berechnen. Aber das wissen wir bereits, denn die Zwangsbedingungen erzeugen ja die bekannten Eichsymmetrien der Wirkung. Da wir nicht an der expliziten Form dieser Klammern interessiert sind, können wir diese Rechnungen also weglassen.

Wir werden hier auch die Realitätsbedingungen nicht weiter betrachten. Im wesentlichen bekommen wir gegenüber der reine Gravitation nichts neues, nur daß in den Gleichungen jeweils noch Gravitinoterme auftreten. Außerdem ergeben sich Beziehungen zwischen den Multiplikatoren ψ_t und dem in (3.3.11) eingeführten $\bar{\zeta}$, die aus der Bedingung $\bar{\psi}_t = \mathrm{i}\psi_t^\dagger$ resultieren. Alles in allem bekommen wir genausoviele Realitätsbedingungen wie kanonische Variable, und sie erfüllen auch wieder die gleiche Poisson-Algebra. Die Dirac-Klammern sind also mit den bereits benutzen holomorphen Poisson-Klammern identisch und wir können sie für die Quantendarstellung verwenden.

Eine sehr wesentliche Voraussetzung dafür ist die Lorentz-Eichung. Ohne sie hätten wir nämlich nicht genug primäre Realitätsbedingungen, um die Voraussetzungen für die holomorphe Quantisierung zu erfüllen, denn die $\tilde{e}_a{}^m$, also die zu $\mathcal{A}_{ma}$ konjugierten Impulse, würden dann nicht reell (siehe die Anmerkungen zu (2.3.11)). In der metrischen Darstellung ergeben sich daraus keine Probleme, denn dort werden die reellen $E_m{}^A$-Komponenten des Vierbeins zu den kanonischen Variablen und diese bilden einen vollständigen Satz von vertauschenden Realitätsbedingungen. Benutzt man jedoch $\mathcal{A}_{ma}$ als kanonische Variable, so haben wir kein vollständiges System von vertauschenden primären Realitätsbedingungen und können nicht einfach die Dirac-Klammern mit den holomorphen Poisson-Klammern gleichsetzen. Außerdem sind die $\mathcal{A}_{ma}$ nicht vollständig durch Realitätsbedingungen eingeschränkt, repräsentieren also mehr als 9 reelle Freiheitsgrade (pro Raum-Punkt).[8]

Es wäre demnach auch nicht klar, wie man die Felder durch Operatoren darstellen soll: Das Wellenfunktional ist nämlich nicht notwendig holomoporph in den komplexen Variablen, wenn diese mehr als je einen reellen Freiheitsgrad haben. Die Darstellung der Quantengravitation in Ashtekars Variablen ist also ohne die Lorentz-Eichung erheblich komplizierter.

4. Quantisierung

Zum Abschluß des Kapitels wollen wir ganz kurz die Quantisierung in der $\tilde{e}$-$\bar{\pi}$-Darstellung und in der dazu konjugierten $\mathcal{A}$-ψ-Darstellung ansprechen. In der ersten bekommen wir wieder eine Gauß-Bedingung, die auf dem Wellenfunktional keine $\mathfrak{su}(2)$-Rotationen erzeugt, da wie in (2.4.4) ein multiplikativer Term auftritt.

Wir konnten dort trotzdem eine Lösung angeben, die wir als eine Art Grundzustand interpretiert haben. Tatsächlich kann man genau die gleiche Konstruktion auch für die Supergravitation durchführen. Wir geben zunächts eine Wellenfunktion an, die einen Zustand mit verschwindender Feldstärke und Superfeldstärke beschreibt, das heißt wir haben dann eine Lösung von $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_m$. Die restlichen Bedingungen lösen wir dann wieder durch eine Integration über die Parameter der Zustandsfunktionale.

In Ashtekars Darstellung, in der $\tilde{e}_a{}^m$ zu einem Differentialoperator wird, werden wir wieder mit den gleichen Problemen konfrontiert, die wir schon aus der Gravitation kennen: Da wir nicht wissen, wie wir die Invertierbarkeit des Dreibeins in die Quantentheorie übertagen sollen, müssen wir sie zunächst aufgeben und erhalten so eine zu große Lösungsmenge. Wollen wir die Algebra der Zwangsbedingungen voll ausnutzen, also nur $\boldsymbol{G}_a$, $\boldsymbol{S}$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$ lösen, so müssen wir $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_m$ durch das oben eingeführte C ersetzen und erhalten dadurch nochmal eine größere Menge von Zuständen, die offenbar durch die zusätzlichen e-Faktoren erzeugt werden.

Die metrische Darstellung

In der metrischen oder Dreibein-Darstellung sind die Operatoren

$$\widehat{\tilde{e}}_a{}^m = \tilde{e}_a{}^m, \quad \widehat{\mathcal{A}}_{ma} = -\frac{\delta}{\delta\tilde{e}_a{}^m}, \quad \widehat{\bar{\boldsymbol{\pi}}}^m = \bar{\boldsymbol{\pi}}^m, \quad \widehat{\boldsymbol{\psi}}_m = \mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\boldsymbol{\pi}}^m}, \tag{3.4.1}$$

und die zu lösenden Zwangsbedingungen lauten (wieder mit einem zusätzlichen Faltor i)

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{G}}_a &= -\partial_m\tilde{e}_a{}^m - \varepsilon_{abc}\widehat{\mathcal{A}}_{mb}\tilde{e}_c{}^m - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{\sigma}_a\,\widehat{\boldsymbol{\psi}}_m, \\
\widehat{\bar{\boldsymbol{S}}} &= \mathrm{i}\partial_m\bar{\boldsymbol{\pi}}^m - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{\sigma}_a\,\widehat{\mathcal{A}}_{ma}, \\
\widehat{\boldsymbol{S}} &= -2\varepsilon^{mnp}\tilde{e}_{ma}\,\boldsymbol{\sigma}_a\widehat{\mathfrak{D}}_n\psi_p
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Betrachten wir wieder das Wellenfunktional als eine Funktion nur auf den invertierbaren Dreibeinen, so ist jede Lösung dieser Zwangsbedingungen auch eine Lösung von $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_m$, denn im Kommutator von $\boldsymbol{S}$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$ erscheinen alle $\tilde{e}_a{}^m$-Faktoren links, und da sie invertierbar sind, können wir aus $[\widehat{\boldsymbol{S}}, \widehat{\bar{\boldsymbol{S}}}]\Psi = 0$ auch auf $\widehat{\boldsymbol{K}_m}\Psi = 0$ schließen.

Um das supersymmetrische Analogon zu (2.4.32) zu finden, müssen wir zunächst statt einer SO(3)-Matrix $\boldsymbol{g}_{ab}$ eine SU(2)-Matrix $\boldsymbol{g}$ verwenden, um eine Ankopplung an die Gravitinos zu ermöglichen. Als weiteren Parameter verwenden wir ein Spinorfeld $\boldsymbol{\phi}$ und definieren

$$\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[\tilde{e},\bar{\boldsymbol{\pi}}] = \exp\Big(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_m\boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_a)\tilde{e}_a{}^m + \bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{g}^{-1}\partial_m\boldsymbol{\phi}\Big), \tag{3.4.3}$$

Dies ist eine Lösung von $\bar{\boldsymbol{S}}$ und sogar von $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_a$, denn wir bekommen

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\psi}}_m\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= \boldsymbol{g}^{-1}\partial_m\boldsymbol{\phi}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}, \\
\widehat{\mathcal{A}}_{ma}\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= \mathrm{i}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_m\boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_a)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}},
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

[8] Dieses Problem wird in [22] völlig ignoriert. Dort wird stillschweigend angenommen, daß die Wellenfunktion in $\mathcal{A}_{ma}$ holomorph ist und die komplexen Dreibeine als Ableitungs-Operator auf diese Funktionale wirken.

und damit wird

$$\widehat{\mathcal{D}}_{[m}\psi_{n]}\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \Big(\partial_{[m}\widehat{\psi}_{n]} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\widehat{\mathcal{A}}_{[ma}\,\boldsymbol{\sigma}_a\widehat{\psi}_{n]}\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$$
$$= \Big(\partial_{[m}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_{n]}\boldsymbol{\phi}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_{[m}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_a)\,\boldsymbol{\sigma}_a\boldsymbol{g}^{-1}\partial_{n]}\boldsymbol{\phi}\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$$
$$= \Big(\partial_{[m}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_{n]}\boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{g}^{-1}\partial_{[m}\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{g}^{-1}\partial_{n]}\boldsymbol{\phi}\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = 0, \qquad (3.4.5)$$

denn für eine $su(2)$-Matrix X gilt $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X\boldsymbol{\sigma}_a)\boldsymbol{\sigma}_a = X$. Genauso bekommt man $\widehat{\mathcal{F}}_{mna}\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = 0$.

Bleibt also $\bar{\boldsymbol{S}}$ und $\boldsymbol{G}_a$ zu lösen. Durch explizites Ausrechnen kann zeigen, daß eine Supersymmetrie-Transformation das gleiche bewirkt wie eine Variation des Parameters $\boldsymbol{\phi}$ und eine Rotation das gleiche wie eine Variation von $\boldsymbol{g}$:

$$\widehat{\bar{\boldsymbol{S}}}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = -\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\phi}}\,\boldsymbol{g}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}, \quad \widehat{\boldsymbol{G}}_a\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_a\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{g}}\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}. \qquad (3.4.6)$$

Der matrixwertige Ableitungsoperator ist hier wieder wie der Impulsoperator für das Sigmamodell (1.3.28) definiert.

Wir bekommen eine Lösung aller Zwangsbedingungen, indem wir über $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{\phi}$ integrieren:

$$\Psi[\tilde{e},\bar{\boldsymbol{\pi}}] = \int \mathrm{d}\boldsymbol{g} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\phi}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[\tilde{e},\bar{\boldsymbol{\pi}}], \qquad (3.4.7)$$

wobei $\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ ein invariantes Maß auf den $SU(2)$ Feldern auf $\mathcal{N}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}$ invariant unter $SU(2)$-Rotationen sein soll.

Wieder existiert dieser Ausdruck nur formal, bietet aber einen einfachen Zugang zur Regularisierung. Insbesondere wird die Integration über die Graßmann-wertigen Felder $\boldsymbol{\phi}$ auf einem Gitter trivial und ergibt das Produkt von Termen der Form $\partial_m(\bar{\boldsymbol{\pi}}^m\boldsymbol{g}^{-1})$ über alle Gitterpunkte.

Wir können auch hier den Zustand als ein "Vakuum" interpretieren, denn es ist ein Zustand mit verschwindender Feldstärke und er trägt wieder topologische Freiheitsgrade, deren Zahl von der globalen Struktur von $\mathcal{N}$ abhängt.

Die Zusammenhang-Darstellung

Wählen wir nun die umgekehrte Darstellung der Operatoren

$$\widehat{\mathcal{A}}_{ma} = \mathcal{A}_{ma}, \quad \widehat{\tilde{e}}_a{}^m = \frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ma}}, \quad \widehat{\psi}_m = \psi_m, \quad \widehat{\bar{\boldsymbol{\pi}}}^m = \mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\psi_m}, \qquad (3.4.8)$$

und schreiben wir zunächst die verschmierten Versionen der kinematischen Zwangsbedingungen aus:

$$\widehat{\boldsymbol{G}}[\omega_a] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{D}_m\omega_a\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ma}} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{\sigma}_a\psi_m\,\frac{\delta}{\delta\psi_m}\Big),$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}[\xi^m] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{L}_{(\xi^m)}\mathcal{A}_{ma}\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ma}} + \mathrm{Tr}\Big(\mathcal{L}_{(\xi^m)}\psi_m\,\frac{\delta}{\delta\psi_m}\Big),$$
$$\widehat{\bar{\boldsymbol{S}}}[\epsilon] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathrm{Tr}\Big(\mathcal{D}_m\bar{\epsilon}\,\frac{\delta}{\delta\psi_m}\Big). \qquad (3.4.9)$$

Mit dem zusätzlichen Faktor i erzeugen sie auf den Wellenfunktional die gleichen Transformationen wie die entsprechenden klassischen Zwangsbedingungen über die Poisson-Klammer.

Die quantisierten kinematischen Zwangsbedingungen verlangen also, daß das Wellenfunktional $\Psi[\mathcal{A},\psi]$ invariant unter $SU(2)$-Rotationen und Diffeomorphismen ist sowie unter Supersymmetrie-Transformationen $\delta\psi_m = \mathcal{D}_m\bar{\epsilon}$.

Die dynamische Zwangsbedingung $\boldsymbol{S}$ wird zu einem Differentialoperator zweiter Ordung

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = -2\mathrm{i}\varepsilon_{abc}\,\boldsymbol{\sigma}_a\mathcal{D}_{[m}\psi_{n]}\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{mb}}\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{nc}}. \qquad (3.4.10)$$

Diese hat genau die gleiche Form wie der Wheeler-DeWitt-Operator für die reine Gravitation (2.4.6), nur daß statt der Feldstärke $\mathcal{F}_{mna}$ die "Superfeldstärke" $\boldsymbol{\sigma}_a\mathcal{D}_{[m}\psi_{n]}$ erscheint.

Betrachten wir diesen Ausdruck wieder nur formal und verzichten auf eine Regularisierung, so finden wir sogar die gleichen Lösungen wieder. Die Wilson-Schleifen T_λ aus (2.4.17) werden auch von diesem Operator annihiliert, denn wir hatten gesehen, daß bereits $\widehat{\tilde{e}}_{ma}T_\lambda = 0$ ist, und auch in $\boldsymbol{S}$ tritt dieser Faktor auf. Wir können also wieder (2.4.21) verwenden, um zu zeigen, daß $\widehat{S}T_\lambda = 0$ ist für eine sich selbst nicht schneidende glatte Schleife λ.

Natürlich ist T_λ auch eine Lösung von $\boldsymbol{G}_a$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$, letzteres weil es gar nicht von ψ_m abhängt. Als einzige weitere Zwangsbedingung bleibt dann die aus der Wheeler-DeWitt-Gleichung und dem Erzeuger der Diffeomorophismen gebiltete Operator $\boldsymbol{C}$. Da das genau der Kommutator von $\boldsymbol{S}$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$ ist, annihiliert auch er den Zustand T_λ, was man natürlich auch explizit nachprüfen kann.

Ist also T_λ ein physikalischer Zustand? Es ist nicht nur das gleiche Funktional wie das in der reinen Gravitation, es ist sogar eine Lösung *aller* Zwangsbedingungen, während es dort nur eine Lösung von $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{G}_a$ war. Offenbar haben wir hier eine viel größere Menge von Zuständen gefunden, denn wir brauchen keine Knotenklassen von Schleifen mehr zu betrachten, die invariant unter Diffeomorphismen sind.

Daß der Zustand T_λ alle Zwangsbedingungen löst, obwohl er ganz offensichtlich nicht invariant unter Diffeomorphismen ist, deutet natürlich darauf hin, daß wir durch die Multiplikation von $\boldsymbol{K}_m$ mit $\tilde{e}_a{}^m$ in (3.3.28) neue Lösungen produziert haben, die nicht mehr invariant unter räumlichen Translationen sind. Der Übergang von $\boldsymbol{K}_m$ zu $\boldsymbol{K}_m\tilde{e}_a{}^m$ entspricht einer Redefinition des zugehörigen Multiplikators $n^m \mapsto n_a\tilde{e}_a{}^m$ in der Parametrisierung des Vierbeins (3.3.1). Das würde nichts anderes bedeuten als daß wir nicht nur für 0-Komponente des Vierbeins $E_t^0 = en$, sondern auch für die räumlichen Komponenten $E_t^a = en_a$ einen zusätzlichen Dichte-Faktor einführen.

Wir können daraus schließen, daß dieser zusätzliche Faktor in beiden Fällen zu ähnlichen Resultaten führt. Da der Faktor in $\boldsymbol{K}_m$ Lösungen produziert, die nicht mehr invariant unter raumartigen

Diffeomorphismen sind, hieße das, daß der Faktor e in der Wheeler-DeWitt-Gleichung, bzw. hier in $\boldsymbol{S}$, Lösungen produziert, die nicht mehr invariant unter zeitartigen Diffeomorphismen sind.

Da im kanonischen Formalismus diese Reskalierungen der Zeit in einer ganz anderen Weise realisiert sind als die raumartigen Translationen, können wir die Brechung dieser Invarianz nicht sofort sehen. Aber die Schlußfolgerung ist in voller Übereinstimmung mit den Überlegungen am Ende von Kapitel II, wo wir gesehen haben, daß die *klassische* Theorie, die von der Wirkung (3.3.3) beschrieben wird, nicht invariant unter der vollen Algebra der vierdimensionalen Diffeomorphismen ist, wenn wir singuläre Dreibeine zulassen.

If you're confused by all this, try typing 'I}' now.
[48]

KAPITEL IV:

DREIDIMENSIONALE GRAVITATION

Die dreidimensionale Einsteinsche Gravitation ist eine topologische Feldtheorie, das heißt sie hat selbst keine lokalen Freiheitsgrade. Eine Lösung der Feldgleichung ist (bis auf Eichtransformationen) durch endlich viele Parameter, sogenannte Moduli, bestimmt, deren Anzahl durch die topologische Struktur der 3-Mannigfaltigkeit gegeben ist. Es gibt somit keine Gravitationswellen und sie bewirkt keine Wechselwirkung zwischen räumlich getrennten Massen. Die Krümmung der Raumzeit ist insbesondere nur dort von Null verschieden, wo sich Materie befindet.

Daher ist die dreidimensionale Gravitation ein ideales "Spielzeugmodell" zur Untersuchung von Effekten, die bei Kopplung von Materie an das Gravitationsfeld entstehen, deren Ursache aber nicht die Kraftwirkung der Gravitation ist, sondern die von anderen Feldtheorien abweichenden Eigenschaften wie etwa die allgemeine Koordinateninvarianz. In diesem Kapitel werden wir die kanonische Beschreibung und Quantisierung der N=2 Supergravitation in drei Dimensionen durchführen und explizit sehen, daß sie nur endlich viele Freiheitsgrade besitzt, die von der Topologie der zweidimensionalen Raum-Mannigfaltigkeit abhängen.

1. N=2 Supergravitation

Die Konstruktion der Einstein-Hilbert-Wirkung als Funktion des Vierbeins und des Spinzusammenhangs in Kapitel II war bis zur Einführung des selbstdualen Zusammenhangs von der Dimension der Raumzeit unabhängig. Wir können daher die Vierbein-Wirkung (2.1.21) direkt nach drei Dimensionen übertragen.

Wir haben also eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit lokalen Koordinaten t, x und y, die wir mit kleinen griechischen Buchstaben $\mu, \nu, \rho \ldots$ indizieren. Die Dreibein-Vektoren nummerieren wir von 0 bis 2, wobei e_0 wieder der zeitartige Einheitsvektor sein soll. Als flache Indizes verwenden wir auch hier kleine lateinische Buchstaben $a, b, c \ldots$, bei denen wir jetzt aber obere und untere Indizes unterscheiden müssen, denn $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1)$ ist nicht mehr gleich δ_{ab}. Das Dreibein $e_a{}^\mu$ und sein Inverses $e_\mu{}^a$ erzeugen dann die Metrik $g_{\mu\nu} = e_\mu{}^a e_\nu{}^b \eta_{ab}$.

Da wir wieder mit einer Wirkung erster Ordnung arbeiten wollen, bekommen wir als weitere Felder die Komponenten des Spinzusammenhangs $\Omega_\mu{}^a{}_b$, die den vierdimensionalen Größen $\Omega_M{}^A{}_B$ entsprechen. $\Omega_{\mu ab}$ hat pro Raumzeit-Koordinate μ nur drei unabhängige Komponenten und wir können den dualisierten Spinzusammenhang

$$\omega_{\mu a} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\Omega_\mu{}^{bc}, \quad \Omega_{\mu ab} = \varepsilon_{abc}\omega_\mu{}^c \tag{4.1.1}$$

einführen. ε^{abc} ist der durch $\varepsilon^{012} = -\varepsilon_{012} = 1$ definierte Levi-Civita-Tensor.[1]

Die kovariante Ableitung eines Vektors mit flachem Index ist

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \Omega_\mu{}^a{}_c V^c = \partial_\mu V^a - \varepsilon^a{}_{bc}\omega_\mu{}^b V^c. \tag{4.1.2}$$

Entsprechend können wir auch die Feldstärke dualisieren und erhalten

$$R_{\mu\nu a} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}R_{\mu\nu}{}^{bc} = \partial_\mu\omega_{\nu a} - \partial_\nu\omega_{\nu a} - \varepsilon_{abc}\omega_\mu{}^b\omega_\nu{}^c. \tag{4.1.3}$$

Analog zu (2.1.21) lautet die Einstein-Wirkung

$$I[e,\omega] = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, e e_a{}^\mu e_b{}^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab} = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \varepsilon^{\mu\nu\rho} e_\rho{}^c R_{\mu\nu c}. \tag{4.1.4}$$

Hier haben wir benutzt, daß $\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a e_\nu{}^b e_\rho{}^c = e\varepsilon^{abc}$ mit der Determinanten $e = \det(e_\mu{}^a)$. Die Bewegungsgleichungen für diese Wirkung sind

$$R_{\mu\nu c} = 0, \quad D_{[\mu}e_{\nu]}{}^a = 0. \tag{4.1.5}$$

Die zweite Gleichung definiert wieder $\omega_{\mu a}$ als Funktion des Dreibeins. Die erste ist jetzt aber nur noch von $\omega_{\mu a}$ abhängig und verlangt, daß die Feldstärke verschwindet, also die Raumzeit flach ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen läßt sich leicht angeben. Wir wollen jedoch gleich zur Supergravitation übergehen, denn auch dort sind die Bewegungsgleichungen (und ebenso die Quantentheorie) vollständig lösbar.

Wie für die vierdimensionale Theorie bekommen wir auch hier eine supersymmetrische Erweiterung, indem wir Graßmann-wertige Gravitinofelder ψ_μ als supersymmetrische Partner des Dreibeins einführen. Da die Lorentz-Gruppe $SO(2,1)$ eine reelle Spinordarstellung $SL(2,\mathbb{R})$ besitzt, können wir reelle Gamma-Matrizen verwenden. Definieren wir

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.1.6}$$

[1] Man beachte den Unterschied zu dem in (2.2.12) eingeführten: Die Indizes nehmen hier die Werte 0, 1, 2 an statt 1, 2, 3 und werden mit der Lorentz-Metrik kontrahiert, daher das Vorzeichen in (4.1.1).

so gilt

$$\gamma_a \gamma_b = \eta_{ab} \mathbf{1} - \varepsilon_{abc} \gamma^c . \tag{4.1.7}$$

Die einfachste supersymmetrische Erweiterung von (4.1.4) ist die N=1 Theorie, die zusätzlich einen Majorana-Spinor ψ_μ enthält.[2] Wir wollen uns hier jedoch der N=2 Theorie zuwenden. Zum einen vereinfacht sich dadurch die kanonische Behandlung ein wenig, denn statt eines Majorana-Spinors bekommen wir einen komplexen Spinor, dessen Impuls durch den Dirac-konjugierten Spinor gegeben ist, zum anderen entspricht die N=2 reine Supergravitation genau dem materiefreien Anteil der dimensional reduzierten Theorie, die wir in Kapitel V beschreiben werden. Tatsächlich existiert in drei Dimensionen für jedes beliebige N eine "reine Supergravitation". Da die Modelle keine Gravitationswellen enthalten, gleichen sich die Anzahl der bosonischen und fermionischen lokalen Freiheitsgrade stets aus: es sind nämlich gar keine vorhanden. Anders sieht es für materiegekoppelte Theorien aus: Dort werden die Modelle wieder durch bestimmte Bedingungen eingeschränkt.[3]

Die Felder der reinen N=2 Supergravitation in drei Dimensionen sind also das Dreibein $e_\mu{}^a$, der Spinzusammenhang $\omega_{\mu a}$ und das Gravitino ψ_μ, dessen Dirac-konjugiertes Feld durch $\bar\psi_\mu = \psi_\mu^\dagger (i\gamma_0)$ gegeben ist. Übertragen wir auch die Rarita-Schwinger-Wirkung nach drei Dimensionen, so erhalten wir als Ausgangspunkt die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho}\, e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} + 2\varepsilon^{\mu\nu\rho}\, \bar\psi_\mu D_\nu \psi_\rho , \tag{4.1.8}$$

wobei die kovariante Ableitung eines Spinors durch

$$D_\mu \psi_\nu = \partial_\mu \psi_\nu + \tfrac{1}{2} \omega_{\mu a}\, \gamma^a \psi_\nu = \partial_\mu \psi_\nu + \boldsymbol{\omega}_\mu \psi_\nu \tag{4.1.9}$$

gegeben ist und $\boldsymbol{\omega}_\mu = \frac{1}{2}\omega_{\mu a}\gamma^a$ die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-Darstellung des Spinzusammenhangs ist. Auch hier können wir aufgrund der Antisymmetrisierung in der Wirkung den Christoffel-Zusammenhang weglassen. Die dreidimensionale Rarita-Schwinger-Wirkung ist also unabhängig vom Dreibein, was dazu führt, daß das dreidimensionale Modell erheblich einfacher zu behandeln ist als die vierdimensionale Theorie.

Symmetrien und Bewegungsgleichungen

Betrachten wir zuerst die klassischen Symmetrien der Wirkung $\mathcal{L}$. Unter lokalen Lorentz-Transformationen mit Parameter ω_a verhalten sich die Felder wie

$$\delta\omega_{\mu a} = -D_\mu \omega_a , \quad \delta e_\mu{}^a = -\varepsilon^{abc} \omega_b e_{\mu c} , \quad \delta\psi_\mu = \tfrac{1}{2}\omega_a\, \gamma^a \psi_\mu , \quad \delta\bar\psi_\mu = -\tfrac{1}{2}\bar\psi_\mu \gamma^a\, \omega_a . \tag{4.1.10}$$

Die Wirkung ist natürlich auch wieder invariant unter Diffeomorphismen, unter denen die Variationen der Felder durch ihre Lie-Ableitungen gegeben sind. Die dreidimensionale Theorie enthält aber eine einfachere Symmetrie, aus der sich die Invarianz unter Diffeomorphismen durch Wahl eines feldabhängigen Parameters ableiten läßt. Unter Verwendung der Bianchi-Identität für die Feldstärke in (4.1.8) erkennt man sofort, daß die Wirkung unter

$$\delta e_\mu{}^a = -D_\mu n^a \tag{4.1.11}$$

invariant bleibt. Aus diesem Transformationsgesetz wird deutlich, daß es sich genau um diejenige lokale Symmetrie handelt, deren Eichfeld das Dreibein ist. Wir werden sie im folgenden einfach "Translation" nennen. Um zu sehen, was die Translationen mit den durch einen Vektor ξ^μ erzeugten Diffeomorphismen zu tun haben, benötigen wir zuerst die Supersymmerie-Transformationen.

Auch sie sind im dreidimensionalen Fall sehr viel einfacher als in vier Dimensionen. Tatsächlich bleibt der Spinzusammenhang invariant und für Dreibein und Gravitino gilt

$$\delta\psi_\mu = -D_\mu \boldsymbol{\epsilon}, \quad \delta\bar\psi_\mu = -D_\mu \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \delta e_\mu{}^a = \bar\psi_\mu \boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\gamma}^a \psi_\mu . \tag{4.1.12}$$

Die Invarianz der Wirkung zeigt man, indem man die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-Darstellung der Kommutatoren von kovarianten Ableitungen benutzt:

$$D_{[\mu} D_{\nu]} \boldsymbol{\epsilon} = \tfrac{1}{4} R_{\mu\nu a}\, \boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\epsilon}, \quad D_{[\mu} D_{\nu]} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = -\tfrac{1}{4} R_{\mu\nu a}\, \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\gamma}^a , \tag{4.1.13}$$

Wie man nun leicht nachprüfen kann, bekommt man eine durch die Lie-Ableitungen $\mathcal{L}_{(\xi^\mu)}$ gegebene Transformation aller Felder, wenn man eine Translation mit Parameter $n^a = e_\mu{}^a \xi^\mu$, eine Supersymmetrie-Transformation mit $\boldsymbol{\epsilon} = \psi_\mu\, \xi^\mu$ und eine Lorentz-Rotation mit $\omega_a = \omega_{\mu a}\xi^\mu$ durchführt.

Eine weitere Eigenschaft der Translationen ist, daß sie sich gerade als Kommutator zweier Supersymmetrie-Transformationen ergeben. Führen wir zuerst eine mit Parameter $\boldsymbol{\epsilon}$, dann eine mit $\boldsymbol{\epsilon}'$ durch, so bekommen wir bis auf Terme, die in den Parametern symmetrisch sind,

$$\delta'\delta\psi_\mu = 0, \quad \delta'\delta\bar\psi_\mu = 0, \quad \delta'\delta e_\mu{}^a = D_\mu \bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\gamma}^a D_\mu \boldsymbol{\epsilon}' . \tag{4.1.14}$$

Bilden wir den in $\boldsymbol{\epsilon}$ und $\boldsymbol{\epsilon}'$ antisymmetrischen Teil, so bekommen wir eine Transformation des Dreibeins, die von der Form (4.1.11) ist:

$$[\delta', \delta]\, e_\mu{}^a = -D_\mu \big(\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\epsilon}' - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\epsilon} \big) . \tag{4.1.15}$$

Um zu zeigen, daß die Supergravitation in drei Dimensionen eine topologische Feldtheorie ist, werden wir auch die *endlichen* Eichtransformationen benötigen. Benutzen wir als Parameter eine $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Matrix $\boldsymbol{h}$, so ist eine Lorentz-Rotation gegeben durch

$$\boldsymbol{\omega}_\mu \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}(\partial_\mu + \boldsymbol{\omega}_\mu)\boldsymbol{h}, \quad \gamma_\mu \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}\gamma_\mu \boldsymbol{h},$$

$$\psi_\mu \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}\psi_\mu , \quad \bar\psi_\mu \mapsto \bar\psi_\mu \boldsymbol{h} . \tag{4.1.16}$$

[2] Eine Bescheibung dieses Modells in der hier verwendeten Darstellung findet man in [27].

[3] Siehe [36] für eine explizite Darstellung.

Die endlichen Translationen sind noch einfacher, da nur das Dreibein transformiert, aber die rechte Seite von (4.1.11) nicht mehr davon abhängt. Wir können also einfach n^a als endlichen Parameter auffassen (das gleiche hatten wir auch für die "halbe" Supersymmetrie in vier Dimensionen getan, siehe (3.2.14)). Unter endlichen Translationen gilt also

$$e_\mu{}^a \mapsto e_\mu{}^a - D_\mu n^a. \tag{4.1.17}$$

Auch die Supersymmetrie-Transformationen können wir für endliche Parameter ϵ angeben. Wir müssen dazu nur die Exponentialreihe aufsummieren, die bereits in zweiter Ordnung abbricht. Wir erhalten

$$\psi_\mu \mapsto \psi_\mu - D_\mu \epsilon, \quad \bar{\psi}_\mu \mapsto \bar{\psi}_\mu - D_\mu \bar{\epsilon},$$

$$e_\mu{}^a \mapsto e_\mu{}^a + \bar{\psi}_\mu \gamma^a \epsilon - \bar{\epsilon}\gamma^a \psi_\mu - \tfrac{1}{2} D_\mu \bar{\epsilon}\gamma^a \epsilon + \tfrac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^a D_\mu \epsilon. \tag{4.1.18}$$

Tatsächlich findet man durch Einsetzten, daß die Wirkung auch invariant unter diesen endlichen Transformationen ist. Daß wir hier im Gegensatz zur vierdimensionalen Theorie für die *volle* Supersymmetrie die endlichen Transformationen angeben können, liegt daran, daß der Spinzusammenhang nicht transformiert und somit die durch (4.1.12) erzeugte Algebra nilpotent ist.

Betrachten wir nun die klassischen Lösungen der Bewegungsgleichungen von (4.1.8):

$$R_{\mu\nu c} = 0, \quad D_{[\mu}\psi_{\nu]} = 0,$$

$$D_{[\mu} e_{\nu]}{}^a - \bar{\psi}_{[\mu}\gamma^a \psi_{\nu]} = 0. \tag{4.1.19}$$

Die ersten beiden Gleichungen enthalten nur den Spinzusammenhang und das Gravitino. Ihre allgemeine Lösung läßt sich leicht angeben. Die erste, nur von $\omega_{\mu a}$ abhängige Bewegungsgleichung besagt, daß dessen Feldstärke verschwinden soll, also $\omega_{\mu a}$ eine reine Eichung ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist lokal von der Form

$$\omega_{\mu a} = \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_\mu g \gamma_a) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_\mu = g^{-1}\partial_\mu g, \tag{4.1.20}$$

wobei g ein $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-wertiges Feld auf $\mathcal{M}$ ist.

Setzen wir dieses in die Gleichung für das Gravitino ein, so erhalten wir

$$\partial_{[\mu}\psi_{\nu]} + g^{-1}\partial_{[\mu} g\, \psi_{\nu]} = 0, \;\Rightarrow\; \partial_{[\mu}(g\psi_{\nu]}) = 0. \tag{4.1.21}$$

Die allgemeine Lösung davon ist lokal gegeben durch ein Spinorfeld ϕ:

$$\psi_\mu = g^{-1}\partial_\mu \phi. \tag{4.1.22}$$

Um noch die "Torsionsgleichung" zu lösen, die als einzige das Dreibein enthält, benötigen wir den konjugierten Spinor

$$\bar{\psi}_\mu = (g^{-1}\partial_\mu \phi)^\dagger (\mathrm{i}\gamma_0) = \partial_\mu \bar{\phi} g. \tag{4.1.23}$$

Hier haben wir vewendet, daß für $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Matrizen gilt $\gamma_0 g = (g^{-1})^\top \gamma_0$, was der Relation $\gamma_0\gamma_a = -\gamma_a^\top \gamma_0$ für die Algebra entspricht.

Multiplizieren wir die Torsionsgleichung mit γ_a, so lautet sie

$$D_{[\mu}\gamma_{\nu]} - (\bar{\psi}_{[\mu}\gamma^a \psi_{\nu]})\gamma_a = 0. \tag{4.1.24}$$

Durch Einsetzten der Lösungen für ψ_μ und $\omega_{\mu a}$ von oben wird daraus

$$\partial_{[\mu}\gamma_{\nu]} + g^{-1}\partial_{[\mu} g\, \gamma_{\nu]} - \gamma_{[\nu}\, g^{-1}\partial_{\mu]} g - (\partial_{[\mu}\bar{\phi}\, g\gamma^a g^{-1}\, \partial_{\nu]}\phi)\,\gamma_a = 0. \tag{4.1.25}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit g und von rechts mit g^{-1}, so ergibt sich

$$\partial_{[\mu}(g\gamma_{\nu]} g^{-1}) - (\partial_{[\mu}\bar{\phi}\gamma^a \partial_{\nu]}\phi)\,\gamma_a = 0, \tag{4.1.26}$$

wobei wir verwendet haben, daß für die Summe über die γ-Matrizen gilt

$$(g\gamma^a g^{-1}) \otimes (g\gamma_a g^{-1}) = \gamma^a \otimes \gamma_a. \tag{4.1.27}$$

Damit können wir auch die Torsionsgleichung als äußere Ableitung einer 1-Form schreiben:

$$\partial_{[\mu}\Big(g\gamma_{\nu]} g^{-1} + \tfrac{1}{2}(\partial_{\nu]}\bar{\phi}\gamma^a \phi - \bar{\phi}\gamma^a \partial_{\nu]}\phi)\,\gamma_a\Big) = 0. \tag{4.1.28}$$

Im Prinzip können wir die Ableitungen auf $\bar{\phi}$ und ϕ hier völlig willkürlich verteilen, jedoch wird der Ausdruck in der Klammer nur auf diese Weise reell.

Die allgemeine Lösung für das Dreibein findet man nun genau wie die der anderen Felder: Der Ausdruck, auf den die äußere Ableitung in (4.1.28) wirkt, muß selbst die Ableitung einer $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-wertigen Funktion $f^a\gamma_a$ sein. Die Lösung der Torsionsgleichung ist also

$$\gamma_\nu = \left(\partial_\nu f^a + \tfrac{1}{2}\bar{\phi}\gamma^a \partial_\nu \phi - \tfrac{1}{2}\partial_\nu \bar{\phi}\gamma^a \phi\right) g^{-1}\gamma_a g, \tag{4.1.29}$$

oder

$$e_\nu{}^a = \tfrac{1}{2}\left(\partial_\nu f^b + \tfrac{1}{2}\bar{\phi}\gamma^b \partial_\nu \phi - \tfrac{1}{2}\partial_\nu \bar{\phi}\gamma^b \phi\right) \mathrm{Tr}(g^{-1}\gamma_b g \gamma^a). \tag{4.1.30}$$

Die hier auftretende Spur

$$g_b^a = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(g^{-1}\gamma_b g\gamma^a) \tag{4.1.31}$$

ist nichts anderes als die Projektion der zweifachen Überlagerung $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auf $\mathrm{SO}(2,1)$: für beliebige Matrizen g, g' gilt

$$(gg')^a{}_b = g^a{}_c g'^c{}_b, \quad g^a{}_b g^c{}_d \eta_{ac} = \eta_{bd}, \tag{4.1.32}$$

wobei wir verwendet haben, wir jede 2×2 Matrix X nach der Basis $\mathbf{1}, \gamma_a$ entwickeln können:

$$X = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(X)\,\mathbf{1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^a X)\,\gamma_a. \tag{4.1.33}$$

Es handelt sich also um einen Gruppen-Homomorphismus von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auf $\mathrm{SO}(2,1)$, und für $\boldsymbol{g} = \pm 1$ gilt $\boldsymbol{g}^{ab} = \eta^{ab}$. Die allgemeine Lösung aller Bewegungsgleichungen ist somit lokal gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_\mu &= \boldsymbol{g}^{-1}\partial_\mu \boldsymbol{g}, \\ \boldsymbol{\psi}_\mu &= \boldsymbol{g}^{-1}\partial_\mu \boldsymbol{\phi}, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}}_\mu = \partial_\mu \bar{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{g}, \\ e_\mu{}^a &= \left(\partial_\mu f^b + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\gamma}^b \partial_\mu \boldsymbol{\phi} - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \bar{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\gamma}^b \boldsymbol{\phi}\right) \boldsymbol{g}_b{}^a . \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

Wir wollen nun zeigen, daß sich alle Lösungen (lokal) durch eine Eichtransformation ineinander überführen lassen. Dazu stellen wir fest, wie sich die Parameter $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\phi}$ und f^a unter Eichtransformationen verhalten, die eine Lösung natürlich wieder in eine Lösung überführen müssen. Eine Lorentz-Transformation wird offenbar durch

$$\boldsymbol{g} \mapsto \boldsymbol{g}\boldsymbol{h} \tag{4.1.35}$$

realisiert, wir erhalten genau die Transformationen (4.1.16) für die Felder.

Um eine endliche Translation mit Parameter n^a durchzuführen, müssen wir f^a ersetzen durch

$$f^a \mapsto f^a - \boldsymbol{g}^a{}_b n^b . \tag{4.1.36}$$

Dadurch ändert sich der Wert des Dreibeins um

$$e_\nu{}^a \mapsto e_\nu{}^a - \partial_\nu(\boldsymbol{g}^b{}_c n^c)\,\boldsymbol{g}_b{}^a = e_\nu{}^a - D_\nu n^a , \tag{4.1.37}$$

denn es ist $\boldsymbol{g}_b{}^a \partial_\nu \boldsymbol{g}^b{}_c = -\varepsilon^a{}_{bc}\omega_\nu{}^b$ die $\mathrm{SO}(2,1)$-Darstellung des Spinzusammenhangs.

Eine endliche Supersymmetrie-Transformation bekommen wir schließlich, indem wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &\mapsto \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon}, \quad \bar{\boldsymbol{\phi}} \mapsto \bar{\boldsymbol{\phi}} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}\boldsymbol{g}^{-1}, \\ f^a &\mapsto f^a + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon} - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\boldsymbol{g}^{-1}\gamma_a \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \tag{4.1.38}$$

einsetzen, das ergibt genau die Transformation (4.1.18).

Offenbar können wir nun alle Felder "wegeichen", indem wir zuerst eine Lorentz-Rotation mit $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}^{-1}$, dann eine Supersymmetrie-Transformation mit $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\phi}$ und schließlich eine Translation mit $n^a = f^a$ durchführen.

Wir sehen aber auch, daß dies nur lokal möglich ist, denn die Felder $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\phi}$ und f^a, die die jeweilige Lösung charakterisieren, sind nicht global definiert. Die Parameter der Eichsymmetrien sind jedoch Funktionen auf der Raumzeit $\mathcal{M}$ und demnach können sie nicht überall gleichzeitig die Felder zu Null eichen. Welche Freiheitgrade es genau sind, die sich nicht wegeichen lassen, werden wir im Rahmen der kanonischen Behandlung feststellen, wo diese Größen dann als Observable auftreten: Da wir es wieder mit einem Modell ohne physikalischen Zeitparameter zu tun haben, sind Observable auch hier identisch mit Eichinvarianten.

Kanonische Formulierung

Wir werden nun die durch die Wirkung (4.1.8) gegebene Theorie analog zu den vierdimensionalen Modellen kanonisch formulieren, das heißt wir spalten die Raumzeit $\mathcal{M}$ wieder in einen Raum $\mathcal{N}$ auf, der durch die (lokalen) Koordinaten x und y aufgespannt wird, und die reelle Zeitachse mit Koordinate t. Wir werden allerdings diesmal keine Eichfixierung durchführen. Außerdem nehmen wir an, daß die Raumzeit tatsächlich durch das direkte Produkt $\mathcal{M} = \mathcal{N} \times \mathbb{R}$ gegeben ist, t also eine globale Koordinate ist, und daß $\mathcal{N}$ eine orientierbare, kompakte 2-Mannigfaltigkeit ist.

Schreiben wir die Summen über die Raumzeit-Indizes μ als Summen über Raum-Indizes i und die Zeitkomponente t, so lautet die Lagrange-Funktion nach einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} L[e,\boldsymbol{\psi},\omega] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij} \big(& \tfrac{1}{2} e_{\mathrm{t}}{}^a R_{ija} + e_j{}^a \dot{\omega}_{ia} + D_i e_j{}^a \omega_{\mathrm{t}a} \\ & + 2\bar{\boldsymbol{\psi}}_{\mathrm{t}} D_i \boldsymbol{\psi}_j - 2\bar{\boldsymbol{\psi}}_i \dot{\boldsymbol{\psi}}_j - \bar{\boldsymbol{\psi}}_i \boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\psi}_j\, \omega_{\mathrm{t}a} + 2 D_i \bar{\boldsymbol{\psi}}_j \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{t}} \big), \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

wobei $\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{\mathrm{t}ij}$ durch $\varepsilon^{\mathrm{xy}} = \varepsilon_{\mathrm{xy}} = 1$ gegeben ist. Auch hier handelt es sich wieder um eine komplexe Wirkung, jedoch ist das einzige komplexe Feld das Gravitino und der Imaginärteil der Wirkung ist eine totale Divergenz, sobald die primären Realitätsbedingungen $\bar{\boldsymbol{\psi}}_\mu = \mathrm{i}\boldsymbol{\psi}_\mu^\dagger \gamma_0$ erfüllt sind, so daß wir hier nur die "einfache" Version der holomorphen Quantisierung durchführen müssen: Wir bekommen keine sekundären Realitätsbedingungen etc.

Wir können sofort die kanonischen Variablen und die Zwangsbedingungen ablesen. Der Impuls von ω_{ia} ist $\varepsilon^{ij} e_j{}^a$ und der von $\boldsymbol{\psi}_i$ ist $-2\varepsilon^{ij}\bar{\boldsymbol{\psi}}_j$. Wir bekommen die Poisson-Klammern

$$\left\{\omega_{ia}, e_j{}^b\right\} = \varepsilon_{ij}\delta_a^b, \quad \left\{\boldsymbol{\psi}_i, \bar{\boldsymbol{\psi}}_j\right\} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}\mathbf{1}. \tag{4.1.40}$$

Die Zeitkomponenten der Felder sind auch hier wieder Lagrange-Multiplikatoren und erzeugen die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_a &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ij} R_{ija}, \\ \boldsymbol{L}_a &= \varepsilon^{ij} D_i e_{ja} - \varepsilon^{ij}\, \bar{\boldsymbol{\psi}}_i \gamma_a \boldsymbol{\psi}_j, \\ \boldsymbol{S} &= 2\varepsilon^{ij} D_i \boldsymbol{\psi}_j, \\ \bar{\boldsymbol{S}} &= 2\varepsilon^{ij} D_i \bar{\boldsymbol{\psi}}_j . \end{aligned} \tag{4.1.41}$$

Bilden wir aus diesen wieder die verschmierten Zwangsbedingungen, indem wir über $\mathcal{N}$ mit einer Testfunktion integrieren

$$\boldsymbol{H}[n^a] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, n^a \boldsymbol{H}_a, \quad \boldsymbol{L}[\omega^a] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \omega^a \boldsymbol{L}_a, \quad \boldsymbol{S}[\bar{\epsilon}] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}\boldsymbol{S}, \quad \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \bar{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\epsilon}, \tag{4.1.42}$$

so erhalten wir die gewohnte Form der Hamilton-Funktion

$$H = \boldsymbol{H}[e_t{}^a] + \boldsymbol{L}[\omega_t{}^a] + \boldsymbol{S}[\bar{\psi}_t] + \bar{\boldsymbol{S}}[\psi_t]. \qquad (4.1.43)$$

Die von den Zwangsbedingungen erzeugten Transformationen sind natürlich genau die obigen Eichtransformationen. Wir finden die Translationen

$$\{e_i{}^a, \boldsymbol{H}[n^a]\} = -D_i n^a, \qquad (4.1.44)$$

die Supersymmetrie-Transformationen

$$\begin{aligned} \{e_i{}^a, \boldsymbol{S}[\bar{\epsilon}]\} &= -\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_i, \quad & \{e_i{}^a, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\} &= \bar{\psi}_i\gamma^a\epsilon, \\ \{\bar{\psi}_i, \boldsymbol{S}[\bar{\epsilon}]\} &= -D_i\bar{\epsilon}, & \{\psi_i, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\} &= -D_i\epsilon, \end{aligned} \qquad (4.1.45)$$

und $\boldsymbol{L}[\omega^a]$ erzeugt die Lorentz-Rotationen. Den Erzeuger der Diffeomorphismen mit Parameter ξ^i erhalten wir daraus, indem wir eine Kombination dieser Transformationen mit feldabhängigen Parametern einführen:

$$\boldsymbol{D}[\xi^i] = \boldsymbol{H}[\xi^i e_i{}^a] + \boldsymbol{L}[\xi^i\omega_i{}^a] + \boldsymbol{S}[\xi^i\bar{\psi}_i] + \bar{\boldsymbol{S}}[\xi^i\psi_i]. \qquad (4.1.46)$$

In dieser Form erkennt man sofort die Ähnlichkeit mit der Hamilton-Funktion, also dem Erzeuger der "Diffeomorphismen" in Zeitrichtung. Bilden wir die Poisson-Klammer eines Feldes mit $\boldsymbol{D}$, so erhalten wir nicht nur die Lie-Ableitung, sondern zusätzlich noch einen Term, der aus der Klammer des Feldes mit dem "Parameter" der einzelnen Zwangsbedingungen entsteht. Dieser ist jedoch proportional zu den Zwangsbedingungen selbst, verschwindet also schwach.

Auch die Algebra der Zwangsbedingungen ist für die dreidimensionale Theorie sehr viel einfacher als für die vierdimensionale. Die nicht verschwindenden Poisson-Klammern sind:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{L}[\omega^a], \boldsymbol{L}[\omega'^a]\} &= \boldsymbol{L}[\varepsilon^{abc}\omega_b\omega'_c], \\ \{\boldsymbol{L}[\omega^a], \boldsymbol{H}[n^a]\} &= \boldsymbol{H}[\varepsilon^{abc}\omega_b n_c], \\ \{\boldsymbol{L}[\omega^a], \boldsymbol{S}[\bar{\epsilon}]\} &= \boldsymbol{S}[\tfrac{1}{2}\omega^a\,\bar{\epsilon}\gamma_a], \\ \{\boldsymbol{L}[\omega^a], \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\} &= \bar{\boldsymbol{S}}[-\tfrac{1}{2}\omega^a\,\gamma_a\epsilon], \\ \{\boldsymbol{S}[\bar{\epsilon}], \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\} &= \boldsymbol{H}[-\bar{\epsilon}\gamma^a\epsilon]. \end{aligned} \qquad (4.1.47)$$

Man erkennt, daß durch $\boldsymbol{S}$, $\bar{\boldsymbol{S}}$ und $\boldsymbol{H}$ eine nilpotente Algebra aufgespannt wird, auf der die einfache Unteralgebra der Lorentz-Generatoren dargestellt ist. Außerdem sind, im Gegensatz zur vierdimensionalen Algebra (3.3.27), die Strukturkonstanten nicht feldabhängig, was ihre Darstellung durch Operatoren erheblich erleichten wird.

Wir wollen nun die allgemeine Lösung der Zwangsbedingungen finden, also den physikalischen Phasenraum bestimmen. Da die Zwangsbedingungen (4.1.41) nichts anderes sind als die räumlichen Komponenten der Bewegungsgleichungen, können wir sie in genau der gleichen Weise lösen. Die allgemeine Lösung ist wieder lokal durch drei Felder $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\phi}$ und f^a gegeben, diesmal jedoch auf einem zweidimensionalen Gebiet, und lautet

$$\begin{aligned} \omega_i &= \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i\boldsymbol{g}, \\ \psi_i &= \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i\boldsymbol{\phi}, \\ e_i{}^a &= \left(\partial_i f^b + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}\gamma^b\partial_i\boldsymbol{\phi} - \tfrac{1}{2}\partial_i\bar{\boldsymbol{\phi}}\gamma^b\boldsymbol{\phi}\right)\boldsymbol{g}_b{}^a. \end{aligned} \qquad (4.1.48)$$

Die "Potentiale" $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\phi}$ und f^a sind jedoch für eine gegebene Lösung nicht eindeutig. Unter

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} &\mapsto \boldsymbol{g}_0^{-1}\boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{\phi} &\mapsto \boldsymbol{g}_0^{-1}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0), \\ f^a &\mapsto \left(f^b - f_0^b + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}_0\gamma^b\boldsymbol{\phi} - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}\gamma^b\boldsymbol{\phi}_0\right)\boldsymbol{g}_0{}_b{}^a \end{aligned} \qquad (4.1.49)$$

bleiben die Eichfelder invariant. Die lokalen Potentiale sind also nur bis auf die Konstanten $\boldsymbol{g}_0$, $\boldsymbol{\phi}_0$ und f_0^a bestimmt. Man beachte, daß diese "Verschiebung" der Potentiale nichts mit den lokalen Eichfreiheitsgraden zu tun hat, unter denen etwa $\boldsymbol{g}$ durch Multiplikation von *rechts* transformiert. Tatsächlich vertauschen die Eichungen mit diesen "Verschiebungen", in gewissem Sinne wirken sie als "Multiplikation von links", während die Eichungen als solche von rechts wirken.

Die Eichgruppe

Wir können die letzte Aussage präzisieren, indem wir auf dem Raum der Tripel $\Sigma = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}, f^a)$ einen Multiplikation einführen: Bezeichnen wir die Menge solcher Σ mit $\mathcal{G} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{M}^3$, wobei $\mathbb{S}^2$ die Menge der zweikomponentigen Spinoren und $\mathbb{M}^3$ der dreidimensionale Minkowski-Raum ist. Wir definieren auf dieser Menge eine Multiplikation

$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}, f^a)\cdot(\boldsymbol{g}', \boldsymbol{\phi}', f'^a) = (\boldsymbol{g}'', \boldsymbol{\phi}'', f''^a), \qquad (4.1.50)$$

wobei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}'' &= \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}', \\ \boldsymbol{\phi}'' &= \boldsymbol{g}\boldsymbol{\phi}' + \boldsymbol{\phi}, \\ f''^a &= \boldsymbol{g}^a{}_b f'^b - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}\gamma^a\boldsymbol{g}\boldsymbol{\phi}' + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}'\boldsymbol{g}_\lambda^{-1}\gamma^a\boldsymbol{\phi} + f^a. \end{aligned} \qquad (4.1.51)$$

Es ist ein wenig mühsam aber nicht schwierig nachzuprüfen, daß dieses Produkt assoziativ ist und damit $\mathcal{G}$ zu einer Gruppe mit Einselement $(1,0,0)$ wird. Das Inverse ist

$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}, f^a)^{-1} = (\boldsymbol{g}^{-1}, -\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{\phi}, -f^b\boldsymbol{g}_b{}^a). \qquad (4.1.52)$$

Wir können auch die Eichfelder zu einem Tripel $(\boldsymbol{\omega}_i, \psi_i, e_i^a)$ zusammenfassen, das wir mit Σ_i bezeichnen. Es nimmt Werte in $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{M}^3$ an, liegt also in der Algebra von $\mathcal{G}$. Definieren wir das Produkt eines Tripels Σ mit einem Element des Tangentialraumes von $\mathcal{G}$ durch Weglassen der jeweils letzten Summanden ϕ bzw. f^a in (4.1.51), so können wir (4.1.48) zusammenfassen zu

$$\Sigma_i = (\boldsymbol{\omega}_i, \psi_i, e_i^a) = (\boldsymbol{g}, \phi, f^a)^{-1} \cdot \partial_i(\boldsymbol{g}, \phi, f^a) = \Sigma^{-1} \cdot \partial_i \Sigma. \tag{4.1.53}$$

Offenbar ist $\mathcal{G}$ nichts anderes als die volle Eichgruppe der N=2 Supergravitation und Σ_i das Eichfeld, das für die Lösungen der Zwangsbedingung die Form einer reinen Eichung annimmt, also eine verschwindende Feldstärke hat.

Aus (4.1.53) können wir sofort ablesen, daß die Eichfelder $(\boldsymbol{\omega}_i, \psi_i, e_i^a)$ unverändert bleiben, wenn wir Σ von links mit einem konstanten $\Sigma_0^{-1} = (\boldsymbol{g}_0, \phi_0, f_0^a)^{-1}$ multiplizieren. Tatsächlich wird

$$\Sigma \mapsto \Sigma_0^{-1} \Sigma, \tag{4.1.54}$$

in Komponenten ausgeschrieben, zu (4.1.49).

Die Eichtransformationen wirken auf Σ durch Multiplikation von rechts. Für die Lösungen der Bewegungsgleichungen weiter oben hatten wir bereits ausgerechnet, wie die lokalen Eichtransformationen auf $\boldsymbol{g}$, ϕ und f^a wirken. Wir finden, daß unter einer Lorentz-Transformation gilt

$$\Sigma \mapsto \Sigma \cdot (\boldsymbol{h}, 0, 0), \tag{4.1.55}$$

eine Translation ergibt sich aus

$$\Sigma \mapsto \Sigma \cdot (\mathbf{1}, 0, -n_a), \tag{4.1.56}$$

und eine Supersymmetrie-Transformation ist

$$\Sigma \mapsto \Sigma \cdot (1, -\epsilon, 0). \tag{4.1.57}$$

Man beachte, das dies alles *endliche* Transformationen sind, die wir zusammenfassen können zu

$$\Sigma \mapsto \Sigma \cdot \Gamma, \quad \Gamma = (\boldsymbol{h}, -\epsilon, -n^a) = (\mathbf{1}, 0, -n^a) \cdot (\mathbf{1}, -\epsilon, 0) \cdot (\boldsymbol{h}, 0, 0). \tag{4.1.58}$$

Eine Multiplikation mit Γ von links bewirkt also nacheinander eine Translation, eine Supersymmetrie- und eine Lorentz-Transformation. Es ist nun offensichtlich, daß diese Eichtransformationen mit der "Verschiebung" (4.1.54) vertauschen und daß *lokal* jedes Σ in jedes andere überführt werden kann durch eine Eichung (4.1.58).

Um die eichinvarianten Eigenschaften der Lösungen zu finden, müssen wir die globale Struktur analysieren, und insbesondere feststellen, was geschieht, wenn wir versuchen, die Felder Σ *global* zu definieren.

Um das tun zu können, benötigen wir noch etwas "mathematisches Handwerkszeug", das wir zunächst konstruieren werden. Mit dessen Hilfe können wir dann die Lösungen der Zwangsbedingungen klassifizieren.

2. Schleifengruppe und Modulraum

Als erstes benötigen wir die "Überlagerung" $\widetilde{\mathcal{N}}$ der Raum-Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Für unsere Zwecke erweist sich die strenge mathematische Definition einer Überlagerung auch als die am einfachsten zu handhabende. Dazu fixieren wir zuerst einen Punkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ auf $\mathcal{N}$. Wir nehmen an, daß $\mathcal{N}$ zusammenhängend ist, so daß die Überlagerung von diesem Punkt unabhängig sein wird. Als eine Kurve α in $\mathcal{N}$ bezeichnen wir eine Abbildung des Intervalls $[0,1]$ in $\mathcal{N}$. Wir setzen stets voraus, daß solche Abbildungen genügend glatt sind, damit die folgenden Konstruktionen existieren, zum Beispiel muß eine Kurve stückweise differenzierbar sein. Zwei Kurven heißen homotop, wenn sie gleichen Anfangs- und Endpunkt haben und ineinander durch stetige Verformung überführt werden können:

$$\begin{aligned} \alpha \simeq \beta \quad \Leftrightarrow \quad & \alpha(0) = \beta(0) = \boldsymbol{x}_0, \ \alpha(1) = \beta(1) = \boldsymbol{x}_1, \\ & \exists F : [0,1]^2 \to \mathcal{N}, \ F(0,s) = \alpha(s), \ F(t,0) = \boldsymbol{x}_0, \\ & F(1,s) = \beta(s), \ F(t,1) = \boldsymbol{x}_1. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Die Überlagerung von $\mathcal{N}$ ist definiert als

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \{\alpha \,|\, \alpha(0) = \bar{\boldsymbol{x}}\} \big/ \simeq, \tag{4.2.2}$$

sie ist also die Menge aller in $\bar{\boldsymbol{x}}$ beginnenden Kurven modulo deren Verformungen. Anschaulich bedeutet das, daß man die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ "abwickelt", so daß eine einfach zusammenhängende Fläche entsteht, die wir uns um $\mathcal{N}$ herumgewickelt vorstellen können. Für die nachfolgenden Überlegungen ist es aber sinnvoller, die Punkte in $\widetilde{\mathcal{N}}$ wirklich als Homotopieklassen von Kurven zu betrachten.

Die Überlagerung hat lokal die gleiche Gestalt wie $\mathcal{N}$: Es existiert eine Projektion

$$\pi : \widetilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}, \quad \pi(\alpha) = \alpha(1), \tag{4.2.3}$$

die ein (ausreichend kleines) Gebiet von $\widetilde{\mathcal{N}}$ bijektiv auf ein Gebiet in $\mathcal{N}$ abbildet. Dadurch erhält $\widetilde{\mathcal{N}}$ die gleichen Strukturen wie $\mathcal{N}$, insbesondere wird es (durch Verwendung der gleichen Karten) zu einer Mannigfaltigkeit.

Wir werden im folgenden mit α sowohl die Äquivalenzklasse von Kurven (einen Punkt in $\widetilde{\mathcal{N}}$) als auch einen beliebigen Repräsentanten (eine Kurve in $\mathcal{N}$) bezeichnen. Wir müssen uns nur jeweils überzeugen, daß der Ausdruck, in dem α eine bestimmte Kurve bezeichnet, innerhalb der Homotopieklasse konstant ist. Bei der Definition der Projektion ist das offenbar der Fall, denn der Endpunkt einer Kurve ist unabhängig vom Repräsentanten der Homotopieklasse.

Auf der Menge aller Kurven können wir als eine weitere Struktur die Verkettung einführen:

$$\alpha(1) = \beta(0) \quad \Rightarrow \quad (\alpha \bullet \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{für } 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2s-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Außerdem können wir für jede Kurve eine inverse Kurve

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s) \tag{4.2.5}$$

definieren. Offenbar übertragen sich die Definitionen auch auf die Homotopieklassen. Damit können wir zeigen, daß $\widetilde{\mathcal{N}}$ von $\bar{\boldsymbol{x}}$ unabhängig ist: Sei $\widetilde{\mathcal{N}}'$ die Überlagerung mit Basispunkt $\bar{\boldsymbol{x}}'$, und sei β eine Kurve mit Anfangspunkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ und Endpunkt $\bar{\boldsymbol{x}}'$, dann ist durch

$$\widetilde{\mathcal{N}}' \to \widetilde{\mathcal{N}} : \quad \alpha \mapsto \beta \bullet \alpha \tag{4.2.6}$$

eine bijektive Abbildung zwischen $\widetilde{\mathcal{N}}'$ und $\widetilde{\mathcal{N}}$ gegeben.

Eine Kurve, die von $\bar{\boldsymbol{x}}$ wieder nach $\bar{\boldsymbol{x}}$ führt, nennen wir "Schleife". Diese bilden unter der gerade definierten Verkettung eine Gruppe, und dasselbe gilt dann natürlich auch für Homotopieklassen. Wir definieren die Schleifengruppe (oder erste Fundamentalgruppe) Υ von $\mathcal{N}$ als die Menge aller Punkte $\lambda \in \widetilde{\mathcal{N}}$ mit $\pi(\lambda) = \bar{\boldsymbol{x}}$, also aller Punkte, die "über $\bar{\boldsymbol{x}}$" liegen, mit der Verkettung als Gruppenoperation. Man beachte, daß diese Definition der Schleifengruppe keiner neuen Struktur mehr bedarf: Υ ist einfach eine diskrete Teilmenge von $\widetilde{\mathcal{N}}$ und die Verknüpfung ist durch die Verkettung von Kurven in $\mathcal{N}$ definiert.

Daß Υ tatsächlich eine Gruppe ist, kann man leicht nachweisen. Das neutrale Element wird durch die "konstante Kurve" $\eta(s) = \bar{\boldsymbol{x}}$ repräsentiert oder durch irgendeine zusammenziehbare Schleife. Die Verkettung liefert aber noch eine weitere Struktur: eine Darstellung der Schleifengruppe durch Diffeomorphismen auf $\widetilde{\mathcal{N}}$. Zu einer Schleife λ definieren wir eine Abbildung

$$b_\lambda : \widetilde{\mathcal{N}} \to \widetilde{\mathcal{N}}, \quad \alpha \mapsto \lambda \bullet \alpha. \tag{4.2.7}$$

Das ist offenbar eine Darstellung von Υ, denn

$$b_{\lambda\bullet\kappa} = b_\lambda \circ b_\kappa, \quad b_\eta = \mathbf{id}_{\widetilde{\mathcal{N}}}, \tag{4.2.8}$$

wobei $\circ$ die Verkettung von Abbildungen und $\mathbf{id}$ die identische Abbildung bezeichnet. Die b_λ verschieben einen Punkt in $\widetilde{\mathcal{N}}$ auf einen mit dem gleichen Bild in $\mathcal{N}$, das heißt

$$\pi \circ b_\lambda = \pi, \tag{4.2.9}$$

und jede Abbildung mit dieser Eigenschaft ist von der Form b_λ für ein geeignetes λ.

Lösung der Zwangsbedingungen

Wir werden nun zeigen, daß sich die Menge der Lösungen der Zwangsbedingungen auf eine bestimmte, leicht zu definierende Menge von Funktionen auf der Überlagerung der Raum-Mannigfaltigkeit abbilden läßt.

Nehmen wir zunächts an, wir hätten eine Lösung der Zwangsbedingungen (4.1.41) gegeben. Wir konstruieren daraus zuerst Felder $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\phi}$ und f^a auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ wie folgt. Für eine Kurve α definieren wir

$$U_\alpha(a,b) = \mathcal{P}\exp\Big(\int_a^b \mathrm{d}s\, \dot{\alpha}^i \boldsymbol{\omega}_i\Big), \tag{4.2.10}$$

wobei $\dot{\alpha}^i = \partial\alpha^i/\partial s$ der Tangentialvektor an die Kurve in $\mathcal{N}$ bezeichnet. Analog zu (2.4.12) beschreibt dies den Paralleltransport entlang der Kurve α von $\alpha(a)$ nach $\alpha(b)$. Das pfadgeordnete Produkt ist wieder so definiert, daß Terme, die näher an der unteren Grenze des Integrals stehen, nach links zu ordnen sind. Es muß nicht notwendig $a \le b$ sein, es gilt aber $U_\alpha(a,b) = \big(U_\alpha(b,a)\big)^{-1}$.

Wir können den Transportoperator auch wieder durch eine Differentialgleichung mit Anfangsbedingung definieren

$$U_\alpha(a,a) = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial}{\partial a} U_\alpha(a,b) = -\dot{\alpha}^i\, \boldsymbol{\omega}_i U_\alpha(a,b), \qquad \frac{\partial}{\partial b} U_\alpha(a,b) = U_\alpha(a,b)\boldsymbol{\omega}_i\, \dot{\alpha}^i, \tag{4.2.11}$$

mit der Konvention, daß Felder, die links bzw. rechts von $U_\alpha(a,b)$ stehen, an der Stelle $\alpha(a)$ bzw. $\alpha(b)$ zu nehmen sind.

Unter einer Verformung der Kurve $\delta\alpha^i(s)$ verhält sich der Transportoperator wie folgt:

$$\begin{aligned}\delta U_\alpha(a,b) &= \int_a^b \mathrm{d}s\, U_\alpha(a,s)\, \delta\big(\dot{\alpha}^i \boldsymbol{\omega}_i\big)\, U_\alpha(s,b) \\ &= \int_a^b \mathrm{d}s\, U_\alpha(a,s)\, \big(\delta\dot{\alpha}^i \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\alpha}^i \delta\alpha^j \partial_j \boldsymbol{\omega}_i\big)\, U_\alpha(s,b) \\ &= \int_a^b \mathrm{d}s\, U_\alpha(a,s)\, \big(\tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^i \delta\alpha^j R_{jia}\boldsymbol{\gamma}^a\big)\, U_\alpha(s,b) \\ &\quad + U_\alpha(a,b)\boldsymbol{\omega}_i\, \delta\alpha^i - \delta\alpha^i\, \boldsymbol{\omega}_i U_\alpha(a,b).\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Hier haben wir einmal partiell integriert, um einen Term proportional zur Feldstärke zu bekommen. Das Ergebnis ist im wesentlichen dasselbe wie in (2.4.18), wo die Wirkung eines Diffeomorphismus auf eine Wilson-Schleife beschreiben wird. Allerdings verschwindet hier die Feldstärke, und es bleiben nur die Randterme übrig.

Daraus können wir sofort ablesen, daß $U_\alpha(0,1)$ nur von der Homotopieklasse von α abhängt, denn dann verschwinden die Variationen der Endpunkte. Wir können also ein $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-wertiges Feld auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ definieren durch

$$\boldsymbol{g}(\alpha) = U_\alpha(0,1). \tag{4.2.13}$$

Aus diesem Feld können wir den Spinzusammenhang rekonstruieren. Wählen wir dazu eine beliebige Kurve α mit Endpunkt $\boldsymbol{x}$ und setzen $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\alpha)$. Verformen wir die Kurve (mitsamt ihrem Endpunkt) so können wir damit lokal ein Feld $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ auf $\mathcal{N}$ erzeugen. Mit (4.2.12) bekommen wir durch Variation des Endpunktes

$$\partial_i \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x})\partial_i \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}). \tag{4.2.14}$$

Da das offenbar von der Wahl der (Homotopieklasse der) Kurve α, mit der wir begonnen haben, unabhängig ist, muß es einen Zusammenhang zwischen dem Wert von $\boldsymbol{g}$ an den Stellen α und β geben, wenn $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$ ist. Zwei solche Kurven unterscheiden sich immer genau um eine Schleife $\lambda = \beta \bullet \alpha^{-1}$. Aus der Definition von $\boldsymbol{g}$ können wir entnehmen, daß für eine Schleife λ gilt

$$\boldsymbol{g}(b_\lambda(\alpha)) = \boldsymbol{g}(\lambda \bullet \alpha) = U_{\lambda\bullet\alpha}(0,1) = U_\lambda(0,1)U_\alpha(0,1) = \boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{g}(\alpha). \tag{4.2.15}$$

Und eine weitere Eigenschaft von $\boldsymbol{g}$ ist, daß es am Ursprung von $\widetilde{\mathcal{N}}$ "normiert" ist, also $\boldsymbol{g}(\eta) = \boldsymbol{1}$ (Das folgt aus (4.2.15) mit $\lambda = \eta$).

Wenn wir das (lokale) Feld $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ mittels einer anderen Kurve konstruieren, bekommen wir ein Feld, daß sich nur durch eine konstante Multiplikation mit $\boldsymbol{g}(\lambda)$ von links unterscheidet, was auf ω_{ia} keinen Einfluß hat.

Eine Funktion auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{g} \circ b_\lambda = \boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{g} \tag{4.2.16}$$

werden wir als "quasiperiodisch" bezeichnen. Wir sehen also, daß zu jeder Lösung $\omega_{ia}(\boldsymbol{x})$ der Gleichung $R_{ija} = 0$ auf $\mathcal{N}$ eine quasiperiodische Funktion $\boldsymbol{g}(\alpha)$ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ existiert und daß diese Abbildung injektiv ist, da wir ω_{ia} aus $\boldsymbol{g}$ rekonstruieren können. Außerdem ist die Umkehrung injektiv, denn für zwei verschiedene Felder $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{g}'$ ergibt sich nur dann der gleiche Spinzusammenhang, wenn sie sich nur um eine Konstante $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g}_0^{-1}\boldsymbol{g}$ unterscheiden. Wegen der Normierung $\boldsymbol{g}(\eta) = \boldsymbol{1}$ folgt dann $\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{1}$. Die Menge aller Lösungen der Zwangsbedingung $R_{ija} = 0$ wird also bijektiv auf die Menge aller quasiperiodischen Funktionen auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ abgebildet.

Die gleiche Konstruktion können wir nun für den kompletten Satz von Zwangsbedingungen durchführen. Im Prinzip brauchen wir dazu nur $\boldsymbol{g}$ durch ein Tripel $\Sigma = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}, f^a)$ ersetzen und genau das gleiche für die volle Eichgruppe $\mathcal{G}$ durchzuführen, was wir eben für $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ getan haben. Die Auswertung des pfadgeordneten Integrals (4.2.10) für die volle Gruppe ist jedoch etwas umständlich, daher werden wir hier zunächst in der Komponenten-Schreibweise weitermachen.

Wir definieren also zusätzlich Funktionen $\boldsymbol{\phi}$ und f^a auf $\widetilde{\mathcal{N}}$, indem wir die lokalen Darstellungen (4.1.48) entlang der Kurve integrieren. Das Ergebnis ist eine Abbildung einer Lösung der Zwangbedingungen $(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\psi}_i, e_i^a)$ auf ein Tripel $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}, f^a)$ von Funktionen auf $\widetilde{\mathcal{N}}$, das gegeben ist durch

$$\boldsymbol{g}(\alpha) = U_\alpha(0,1),$$

$$\boldsymbol{\phi}(\alpha) = \int_0^1 \mathrm{d}s\, U_\alpha(0,s)\boldsymbol{\psi}_i\,\dot{\alpha}^i, \qquad \bar{\boldsymbol{\phi}}(\alpha) = \int_0^1 \mathrm{d}s\,\dot{\alpha}^i\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_i U_\alpha(s,0),$$

$$\begin{aligned} f^a(\alpha) = {} & \int_0^1 \mathrm{d}s\, U_\alpha{}^a{}_b(0,s)\, e_i^b\,\dot{\alpha}^i \\ & + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^1 \mathrm{d}s'\,\mathrm{sign}(s-s')\,\dot{\alpha}^i\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_i U_\alpha(s,0)\boldsymbol{\gamma}^a U_\alpha(0,s')\boldsymbol{\psi}_j\,\dot{\alpha}^j, \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

wobei $U_\alpha{}^a{}_b(0,s)$ wieder die $\mathrm{SO}(2,1)$-Darstellung des Transportoperators ist:

$$U_\alpha{}^a{}_b(a,b) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(U_\alpha(b,a)\gamma^a U_\alpha(a,b)\gamma_b\big). \tag{4.2.18}$$

Damit dieses auch wirklich Funktionen auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ sind, dürfen die Größen natürlich nur von den Homotopieklassen der Kurven abhängen. Nun sind aber die Zwangsbedingungen nichts anderes als die (lokalen) Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (4.1.48) für $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\phi}$ und f^a. Wenn wir richtig gerechnet haben, sollten die Ausdrücke in (4.2.17) also invariant unter Verformungen der Kurven sein.

Tatsächlich findet man auch durch explizites Nachrechnen, daß unter einer Verformung $\delta\alpha^i(s)$ bei festgehaltenem Anfangspunkt $\bar{\boldsymbol{x}}$, aber variablem Endpunkt $\boldsymbol{x}$ gilt

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{g}(\alpha) &= \boldsymbol{g}\boldsymbol{\omega}_i\,\delta\boldsymbol{x}^i, \\ \delta\boldsymbol{\phi}(\alpha) &= \boldsymbol{g}\boldsymbol{\psi}_i\,\delta\boldsymbol{x}^i, \\ \delta f^a(\alpha) &= \big(\boldsymbol{g}^a{}_b e_i^b + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\psi}}_i\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{\gamma}^a\boldsymbol{\phi} - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{\gamma}^a\boldsymbol{g}\boldsymbol{\psi}_i\big)\,\delta\boldsymbol{x}^i, \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

wobei alle Felder auf $\mathcal{N}$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = \pi(\alpha)$ und solche auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ an der Stelle α zu nehmen sind.

Für $\boldsymbol{g}$ hatten wir das bereits gezeigt. Um die zweite Gleichung herzuleiten, benutzen wir, daß

$$\delta\big(U_\alpha(0,s)\boldsymbol{\psi}_i\,\dot{\alpha}^i\big) = \frac{\partial}{\partial s}\big(U_\alpha(0,s)\boldsymbol{\psi}_i\,\delta\alpha^i\big), \tag{4.2.20}$$

was aufgrund der Zwangsbedingung $D_{[i}\boldsymbol{\psi}_{j]} = 0$ gilt. Durch Integrieren erhalten wir dann sofort die zweite Zeile in (4.2.19). Die dritte Zeile ist ein wenig komplizierter. Wir benötigen

$$\delta\big(U_\alpha{}^a{}_b(0,s)\,e_i^b\,\dot{\alpha}^i\big) = \frac{\partial}{\partial s}\big(U_\alpha{}^a{}_b(0,s)\,e_i^b\,\delta\alpha^i\big) + 2\,U_\alpha{}^a{}_b(0,s)\,D_{[i}e_{j]}{}^b\,\dot{\alpha}^i\delta\alpha^j \tag{4.2.21}$$

und die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{sign}(s-s') = 2\,\delta(s-s'). \tag{4.2.22}$$

Durch Einsetzen, mehrmaliges partielles Integrieren und unter Verwendung der Lorentz-Bedingung bekommt man dann (4.2.19).

Was wir nun haben, ist eine Abbildung einer Lösung der Zwangsbedingungen $\Sigma_i = (\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\psi}_i, e_i{}^a)$ auf ein Tripel von Funktionen $\Sigma = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}, f^a)$ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$.

Wenn wir diese Abbildung nicht in Komponenten schreiben wollen, können wir sie mit Hilfe eine Differentialgleichung analog zu (4.2.11) definieren. Wir starten mit einem Eichfeld Σ_i auf $\mathcal{N}$, das die Zwangsbedingungen erfüllt, also eine verschwindende Feldstärke $2\partial_{[i}\Sigma_{j]} + [\Sigma_i, \Sigma_j] = 0$ hat. Für eine Kurve α definieren wir $\Sigma(\alpha, s)$, $s \in [0,1]$, über die Differentialgleichung

$$\Sigma(\alpha, 0) = (\mathbf{1}, 0, 0), \quad \frac{\partial}{\partial s}\Sigma(\alpha, s) = \Sigma(\alpha, s) \cdot \Sigma_i(\alpha(s))\,\dot{\alpha}^i(s). \tag{4.2.23}$$

Dann ist $\Sigma(\alpha) = \Sigma(\alpha, 1)$ nur von der Homotopieklasse von α abhängig und definiert ein Feld auf $\widetilde{\mathcal{N}}$, das mit dem oben komponentenweise definierten Feld übereinstimmt. Unter Variation des Endpunktes $\boldsymbol{x}$ der Kurve finden wir

$$\delta\Sigma(\alpha) = \Sigma(\alpha) \cdot \Sigma_i(\boldsymbol{x})\,\delta\boldsymbol{x}^i, \tag{4.2.24}$$

was in Komponenten ausgeschrieben gerade (4.2.19) ergibt.

Genau wie das Feld $\boldsymbol{g}$ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ nicht völlig beliebige Werte annehmen konnte, erfüllt auch Σ wieder gewisse Eigenschaften, die die Werte an "übereinanderliegenden" Punkten in Beziehung setzen. Aus der expliziten Darstellung (4.2.17) bekommt man für die Komponenten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} \circ b_\lambda &= \boldsymbol{g}_\lambda \boldsymbol{g}, \\ \boldsymbol{\phi} \circ b_\lambda &= \boldsymbol{g}_\lambda \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}_\lambda, \\ f^a \circ b_\lambda &= \boldsymbol{g}_\lambda{}^a{}_b f^b + f_\lambda^a - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}}_\lambda \gamma^a \boldsymbol{g}_\lambda \boldsymbol{\phi} + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{g}_\lambda^{-1} \gamma^a \boldsymbol{\phi}_\lambda, \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

wobei

$$\boldsymbol{g}_\lambda = \boldsymbol{g}(\lambda), \quad \boldsymbol{\phi}_\lambda = \boldsymbol{\phi}(\lambda), \quad f_\lambda{}^a = f^a(\lambda), \quad \lambda \in \Upsilon. \tag{4.2.26}$$

Natürlich können wir auch diese Relation wieder sehr einfach in der $\mathcal{G}$-Schreibweise formulieren. Es gilt

$$\Sigma \circ b_\lambda = \Sigma_\lambda \cdot \Sigma, \quad \Sigma_\lambda = \Sigma(\lambda) = (\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{\phi}_\lambda, f_\lambda^a). \tag{4.2.27}$$

Ein solches quasiperiodisches Feld Σ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ ist normiert durch $\Sigma(\eta) = (\mathbf{1}, 0, 0)$.

Wir haben damit eine Abbildung des Raumes der Lösungen Σ_i der Zwangsbedingungen auf $\mathcal{N}$ auf den Raum der quasiperiodischen Felder Σ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$. Umgekehrt können wir aus jedem quasiperiodischen Feld Σ wieder die Lösung der Zwangsbedingungen Σ_i rekonstruieren, genau wie wir das für den Spinzusammenhang bereits getan haben. Dazu definieren wir zuerst ein lokales Felder $\Sigma(\boldsymbol{x})$ auf $\mathcal{N}$, indem wir irgendeine Kurve mit Endpunkt $\boldsymbol{x}$ wählen und diesen dann variieren. Die räumlichen Ableitungen dieses lokalen Feldes können wir aus (4.2.24) entnehmen, das heißt die Eichfelder sind gegeben durch

$$\Sigma_i(\boldsymbol{x}) = \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}) \cdot \partial_i \Sigma(\boldsymbol{x}). \tag{4.2.28}$$

Die Unabhängigkeit der Eichfelder von der speziellen Wahl der Homotopieklasse der "Startkurve" wird wieder dadurch gesichert, daß Σ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ quasiperiodisch ist: Mit einer anderen Startkurve bekämen wir die veränderten Potentiale (4.2.27). Diese unterscheiden sich aber nur um eine Multiplikation von links mit einer Konstanten und führen auf das gleiche $\Sigma_i(\boldsymbol{x})$. Die Abbildung $\Sigma_i \mapsto \Sigma$ ist also injektiv.

Wie für den Spinzusammenhang können wir auch hier zeigen, daß die Umkehrung, die jedem quasiperiodischen Potential Σ eine Lösung der Zwangsbedingungen Σ_i zuordnet, ebenfalls injektiv ist. Wir nehmen wieder an, daß zwei Potentiale die gleiche Lösung erzeugen. Dann unterscheiden sie sich nur durch eine Multiplikation von links mit einer Konstanten, sind also wegen $\Sigma(\eta) = (\mathbf{1}, 0, 0)$ identisch. Wir haben also eine Bijektion

$$\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma, \quad (\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\psi}_i, e_i^a) \leftrightarrow (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}, f^a) \tag{4.2.29}$$

zwischen den Lösungen der Zwangsbedingungen auf $\mathcal{N}$ und den quasiperiodischen Potentialen auf $\widetilde{\mathcal{N}}$.

Wir haben damit das Problem, alle Lösungen eines Satzes von Differentialgleichungen auf $\mathcal{N}$ zu klassifizieren, auf ein "einfacheres" Problem zurückgeführt, nämlich alle quasiperiodischen Funktionen auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ zu finden. Wir haben also nur noch "Differenzengleichungen" zu lösen, wobei Differenzen hier im Sinne von Quotienten in Gruppen zu verstehen sind. Im nächsten Schritt werden wir dieses immer noch "unendlich-dimensionale" Problem auf ein endlich-dimensionales reduzieren.

Der Modulraum

Das Ziel war nicht nur, alle Lösungen der Zwangsbedingungen zu finden, sondern die eichinvarianten Parameter dieser Lösungen, also letztlich die physikalischen Freiheitsgrade unseres Modells. Was wir suchen, ist die Menge aller Lösungen modulo den Eichtransformationen. Diesen Quotienten bezeichnen wir als "Modulraum" $\mathcal{M}$.

Wir müssen also die Äquivalenzklassen der quasiperiodischen Funktionen modulo den Eichtransformationen bestimmen. Dazu zeigen wir zuerst, daß zwei Potentiale Σ und Σ', die auf auf Υ übereinstimmen, eichäquivalent sind.

Um das zu sehen, müssen wir feststellen, wie die Eichtransformationen auf Σ wirken. Wir hatten bereits festgestellt, daß das hintereinander Ausführen einer Translation, einer Supersymmetrie- und einer Lorentz-Transformation auf den Potentialen dargestellt wird durch Multiplikation von Σ mit $\Gamma = (\boldsymbol{h}, -\boldsymbol{\epsilon}, -n^a)$ von rechts, wobei wir jetzt beachten müssen, daß Γ ein Feld auf $\mathcal{N}$ ist, während Σ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ definiert ist.

Durch $\Gamma \circ \pi$ wird aber ein entsprechendes Feld auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ definiert, das wir einfach auch Γ nennen und für das gilt $\Gamma \circ b_\lambda = \Gamma$, es ist also periodisch. Wir können jedoch nicht einfach $\Sigma \mapsto \Sigma \cdot \Gamma$ als Eichtransformation einführen, denn dieses Σ wäre nicht mehr quasiperiodisch. Wir müssen eine kompensierende Multiplikation von links durchführen, die diese Eigenschaft wieder herstellt und keinen Einfluß auf die Eichfelder auf $\mathcal{N}$ hat. Eine Eichtransformation ist also gegeben durch

$$\Sigma \mapsto \Gamma_0^{-1} \cdot \Sigma \cdot \Gamma, \quad \Gamma_0 = \Gamma(\eta) = \Gamma(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{4.2.30}$$

Nehmen wir nun an, zwei Potentiale Σ und Σ' sind auf $\Upsilon \subset \widetilde{\mathcal{N}}$ identisch, also $\Sigma_\lambda = \Sigma'_\lambda$ für $\lambda \in \Upsilon$. Dann definieren wir $\Gamma = \Sigma^{-1} \cdot \Sigma'$. Dies ist offenbar periodisch, denn für eine Schleife λ gilt

$$\Gamma \circ b_\lambda = (\Sigma \circ b_\lambda)^{-1} \cdot (\Sigma' \circ b_\lambda) = (\Sigma_\lambda \cdot \Sigma)^{-1} \cdot (\Sigma'_\lambda \cdot \Sigma') = \Gamma. \tag{4.2.31}$$

Damit ist Γ ein zulässiger Parameter für eine Eichtransformation. Da $\Gamma_0 = (\mathbf{1}, 0, 0)$ ist, bekommen wir

$$\Sigma \mapsto \Gamma_0^{-1} \cdot \Sigma \cdot \Gamma = \Sigma'. \tag{4.2.32}$$

Wir haben also gezeigt, daß sich zwei quasiperiodische Potentiale durch eine Eichtransformation ineinander überführen lassen, wenn sie auf $\Upsilon \subset \widetilde{\mathcal{N}}$ übereinstimmen. Eine Äqivalenzklasse von Lösungen der Zwangsbedingungen ist demnach bereits durch die Σ_λ gegeben, also durch Angabe einer Abbildung

$$\Sigma : \Upsilon \to \mathcal{G}, \quad \lambda \mapsto \Sigma_\lambda \tag{4.2.33}$$

vollständig charakterisiert. Diese Abbildung ist aber nicht völlig beliebig, denn sie ist die Einschränkung einer quasiperiodischen Funktion auf $\widetilde{\mathcal{N}} \supset \Upsilon$. Aus (4.2.27) entnehmen wir, daß

$$\Sigma_{\lambda \bullet \kappa} = \Sigma_\lambda \cdot \Sigma_\kappa. \tag{4.2.34}$$

Die Gleichung besagt, daß Σ ein Gruppen-Homomorphismus oder eine *Darstellung* der Schleifen Gruppe Υ in der Eichgruppe $\mathcal{G}$ ist.

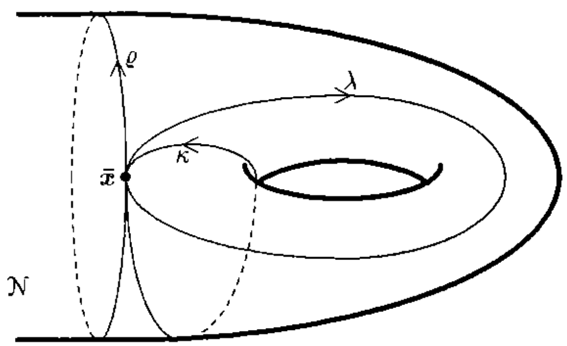
Umgekehrt können wir jede solche Darstellung $\Upsilon \to \mathcal{G}$ zu einem quasiperiodisches Feld $\Sigma : \widetilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{G}$ erweitern.[4] Dieses ist natürlich nicht eindeutig, aber verschiedene Fortsetzungen unterscheiden sich nur durch eine Eichtransformation.

Nun führen verschiedene Darstellungen $\Upsilon \to \mathcal{G}$ noch nicht notwendig zu nicht äquivalenten Potentialen Σ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ bzw. Eichfeldern Σ_i auf $\mathcal{N}$. Unter lokalen Eichtransformation "spüren" die Werte Σ_λ immer noch die Transformationen am Ursprung $\bar{\boldsymbol{x}}$. Aus (4.2.30) entnehmen wir, das die Σ_λ sich unter einer Eichtransformation wie folgt verhalten:

$$\Sigma_\lambda \mapsto \Gamma_0^{-1} \cdot \Sigma_\lambda \cdot \Gamma_0. \tag{4.2.35}$$

Zwei Darstellungen $\Sigma : \Upsilon \to \mathcal{G}$ und $\Sigma' : \Upsilon \to \mathcal{G}$ führen also zu eichäquivalenten Lösungen der Zwangsbedingungen und wir bezeichnen sie als äquivalent, $\Sigma \sim \Sigma'$, wenn sie sich nur durch einen *inneren Automorphismus* von $\mathcal{G}$ unterscheiden, der von einem Element Γ_0 erzeugt wird.

[4] Im Prinzip brauchen wir nur die auf $\Upsilon \subset \widetilde{\mathcal{N}}$ gegebene Funktion fortzusetzen. Man kann sich leicht überlegen, daß es immer möglich ist, sie zu einer quasiperiodischen Funktion fortzusetzen, wenn (4.2.34) erfüllt ist.



Figur 1: Für jeden Henkel von $\mathcal{N}$ gibt es zwei primitive Scheifen λ und κ. Die Kombination $\varrho = \lambda \bullet \kappa \bullet \lambda^{-1} \bullet \kappa^{-1}$ ergibt eine Schleife, die den Henkel von $\mathcal{N}$ abtrennt. Die Verkettung dieser Schleifen für alle Henkel ergibt eine zusammenziehbare Schleife.

Eine Äquivalenzklasse von krümmungsfreien Eichfeldern $\Sigma_i = (\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\psi}_i, e_i{}^a)$ wird also charkterisiert durch ein Element des Modulraums

$$\mathcal{M} = \left\{ \Sigma : \Upsilon \to \mathcal{G} \,\middle|\, \Sigma_{\lambda \bullet \kappa} = \Sigma_\lambda \cdot \Sigma_\kappa \right\} \Big/ \sim . \tag{4.2.36}$$

Der Modulraum einer Eichtheorie, der allgemein als die Menge aller krümmungsfreien Eichfelder auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ modulo den Eichtransformationen definiert ist, ist demnach gegeben durch die Menge der Darstellungen der Schleifengruppe Υ von $\mathcal{N}$ auf der Eichgruppe $\mathcal{G}$ modulo den inneren Automorphismen.

Damit haben wir aber immer noch nicht gezeigt, daß der Modulraum endlich-dimensional ist, denn Υ ist zwar eine diskrete, aber immer noch unendliche Gruppe. Für eine orientierbare 2-Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ können wir sie genauer bestimmen.

Nehmen wir an, $\mathcal{N}$ sei eine Fläche von Geschlecht g, also eine "Brezel mit g Löchern" oder g "Henkeln". Auf einer solchen Fläche können wir alle Schleifen durch Verkettung aus $2g$ "primitiven Schleifen" λ_n, κ_n, $n = 1, \ldots, g$, zusammensetzen, wobei λ_n einmal "um das Loch n herum" und κ_n einmal "durch das Loch n hindurch" läuft, wie in Figur 1 gezeigt. Die Menge dieser primitiven Schleifen nennen wir Υ_0.

Da jede Schleife aus diesen primitiven Schleifen zusammengesetzt werden kann, ist die Schleifengruppe gerade die von Υ_0 erzeugte freie Gruppe mit Einselement η und der Relation

$$\lambda_1 \bullet \kappa_1 \bullet \lambda_1^{-1} \bullet \kappa_1^{-1} \bullet \ldots \bullet \lambda_g \bullet \kappa_g \bullet \lambda_g^{-1} \bullet \kappa_g^{-1} = \eta \tag{4.2.37}$$

Eine Darstellung einer solchen Gruppe ist charakterisiert durch $2g$ Werte Σ_{λ_n} und Σ_{κ_n} für die primitiven Schleifen, da sich dann alle anderen Werte durch Multiplikation ergeben. Bezeichnen wir diesen Satz von Elementen von $\mathcal{G}$ als "die Moduli". Natürlich müssen sie eine zu (4.2.37) analoge Relation erfüllen, damit wir eine Darstellung bekommen.

Der Modulraum ist dann die Menge der Äquivalenzklassen solcher $2g$-Tupel,

$$\mathcal{M} = \left\{ \Sigma : \Upsilon_0 \to \mathcal{G} \,\Big|\, \prod_{n=1}^{g} \Sigma_{\lambda_n} \cdot \Sigma_{\kappa_n} \cdot \Sigma_{\lambda_n}^{-1} \cdot \Sigma_{\kappa_n}^{-1} = (\mathbf{1}, 0, 0) \right\} \Big/ \sim, \tag{4.2.38}$$

wobei zwei Sätze von Moduli dann äquivalent sind, wenn sie sich durch eine inneren Automorphismus der Form (4.2.35) unterscheiden.

Die dreidimensionale N=2 Supergravitation besitzt somit tatsächlich nur endlich viele Freiheitsgrade. Sehr viel expliziter lassen sich diese Freiheitsgrade aber im allgemeinen nicht mehr angeben. Es ist schon nicht leicht, die Gleichung in (4.2.38) allgemein zu lösen, und die Bestimmung der Äquivalenzklassen ist nochmal ein ähnliches schwieriges gruppentheoretisches Problem.

3. Quantisierung

Für den einfachsten nichttrivialen Fall wollen wir nun die quantisierte N=2 Supergravitation formulieren. Das Ziel wird sein, den physikalischen Zustandsraum der Theorie auf einem Torus als Raum-Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ zu finden. Es wird sich zeigen, daß diese Konstruktion sogar etwas einfacher ist als die des klassischen Modulraumes im letzten Abschnitt, denn wir brauchen hier nur die "halbe" Eichgruppe $\mathcal{G}$ zu betrachten: Die Zwangsbedingungen zerfallen in zwei Teile, von denen der eine den Bereich einschränkt, auf dem das Wellenfunktional von Null verschieden sein darf, während der andere Teil Eichtransformationen auf dem Funktional erzeugt; jedoch nur noch Lorentz-Rotationen und "chirale" Supersymmetrie-Transformationen, aber keine Translationen mehr, so daß die Eichgruppe sehr viel einfacher wird.

Obwohl wir für die klassische Theorie bereits gezeigt haben, daß sich die Zwangsbedingungen vollständig lösen lassen und wir endlich viele Freiheitsgrade bekommen, wollen wir trotzdem noch einmal von der kanonisch formulierten Feldtheorie starten und die Ergebnisse des letzten Abschnitts vorerst ignorieren. Im Prinzip könnten wir natürlich auch so vorgehen, daß wir zuerst die vollständige Menge der klassischen Observablen identifizieren und deren Poisson-Klammern bestimmen. Dann haben wir ein endlich-dimensionales klassisches System das wir in gewöhnlicher Weise quantisieren können.

Wir wollen aber zeigen, daß es auch möglich ist, durch die Diracsche Quantisierung des durch die Zwangsbedingungen (4.1.41) beschriebenen unendlich-dimensionalen Systems auf den richtigen Zustandsraum zu kommen. Zwar wird die Konstruktion stellenweise etwas formal werden, da gewisse nicht wohldefinierte Funktionalintegrale auftreten, trotzdem werden wir am Ende zu einem wohldefinierten Zustandsraum gelangen.

Die Zusammenhang-Darstellung

Die zu lösenden Zwangsbedingungen sind

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_a &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ij} R_{ij\,a}, \\ \boldsymbol{L}_a &= \varepsilon^{ij} D_i e_{j\,a} - \varepsilon^{ij}\, \bar{\boldsymbol{\psi}}_i \gamma_a \boldsymbol{\psi}_j, \\ \boldsymbol{S} &= 2\varepsilon^{ij}\, D_i \boldsymbol{\psi}_j, \\ \bar{\boldsymbol{S}} &= 2\varepsilon^{ij}\, D_i \bar{\boldsymbol{\psi}}_j. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Deren quantisierte Versionen sind wieder durch das i-fache dieser Ausdrücke definiert. Man beachte, daß sich hier keine Ordnungsprobleme ergeben und, wie wir gleich sehen werden, auch keine Regularisierung nötig ist. Die klassische Algebra (4.1.47) überträgt sich unverändert auf die quantisierten Zwangsbedingungen.

Wir beginnen zunächst mit der ω-ψ-Darstellung. Die Operatoren wirken also auf ein Wellenfunktional $\Psi[\omega, \psi]$ und lauten

$$\widehat{\omega}_{ia} = \omega_{ia}, \quad \widehat{e}_i^{\,a} = -\mathrm{i}\varepsilon_{ij}\frac{\delta}{\delta\omega_{j\,a}}, \quad \widehat{\boldsymbol{\psi}}_i = \boldsymbol{\psi}_i, \quad \widehat{\bar{\boldsymbol{\psi}}}_i = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ij}\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\psi}_i}. \tag{4.3.2}$$

Damit werden die Zwangsbedingungen $\boldsymbol{H}_a$ und $\boldsymbol{S}$ zu reinen Multiplikationsoperatoren, die wir leicht lösen können: Ψ darf nur dann von Null verschieden sein, wenn die Felder ω_{ia} und $\boldsymbol{\psi}_i$ die klassischen Zwangsbedingungen erfüllen, das heißt wenn es ein Paar von quasiperiodischen Feldern $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi})$ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ gibt mit

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i \boldsymbol{\phi}. \tag{4.3.3}$$

Quasiperiodisch heißt ein solches Paar, wenn

$$\boldsymbol{g} \circ b_\lambda = \boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{\phi} \circ b_\lambda = \boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}(\lambda) \tag{4.3.4}$$

gilt, so daß die rechten Seiten in (4.3.3) unabhängig davon werden, an welcher der übereinanderliegenden Stellen von $\widetilde{\mathcal{N}}$ wir sie auswerten, und daher ein Feld auf $\mathcal{N}$ definieren.

Setzen wir

$$\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[\omega, \psi] = \prod_{\boldsymbol{x}} \delta\Big(\omega_{ia} - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_i \boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_a)\Big)\, \delta\Big(\boldsymbol{\psi}_i - \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i\boldsymbol{\phi}\Big), \tag{4.3.5}$$

so können wir die allgemeine Lösung von $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{H}_a$ schreiben als

$$\Psi_F[\omega, \psi] = \int \mathrm{d}\boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}\, F[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}]\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[\omega, \psi], \tag{4.3.6}$$

wobei das Integral über alle quasiperiodischen Paare $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi})$ auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ laufen soll. Wir wollen wieder verlangen, daß das Maß invariant unter $\boldsymbol{g} \mapsto \boldsymbol{g}\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{\phi} \mapsto \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon}$ ist. Außerdem sollen die Delta-Funktionen bezüglich dieses Maßes definiert sein. Natürlich wird der Ausdruck dadurch formal. Wir werden aber gleich sehen, wie wir dennoch zu einer wohldefinierter Quantentheorie gelangen, indem wir (4.3.6) etwas anders interpretieren.

Die Dreibein-Darstellung

Bevor wir die restlichen Zwangsbedingungen lösen, wollen wir zeigen, daß die e-$\bar{\psi}$-Darstellung zu einer äquivalenten Quantentheorie führt. Wir können nämlich die Funktionale $\Psi_{g,\phi}$ Fouriertransformieren, indem wir die Delta-Funktionen durch entsprechende Exponentialfaktoren ersetzen:

$$\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[e,\bar{\psi}] = \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\left(\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_i \boldsymbol{g}\gamma_j) + 2\bar{\psi}_j \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i \boldsymbol{\phi}\right)\right). \tag{4.3.7}$$

Die Integration läuft hier über die Raum-Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ und für $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{\phi}$ sind wieder die Werte an einem beliebigen Punkt von $\widetilde{\mathcal{N}}$ einzusetzen, der auf $\boldsymbol{x}$ projeziert wird und von dessen Wahl der Wert des Integrals nicht abhängt, solange $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{\phi}$ quasiperiodisch sind.

Mit der Operatordarstellung

$$\widehat{e}_i^{\,a} = e_i^{\,a}, \quad \widehat{\omega}_{ia} = -\mathrm{i}\varepsilon_{ij}\frac{\delta}{\delta e_j^{\,a}}, \quad \widehat{\bar{\psi}}_i = \bar{\psi}_i, \quad \widehat{\psi}_i = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ij}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_i} \tag{4.3.8}$$

werden auch diese Funktionale wieder Eigenfunktionen zu ω_{ia} und ψ_i, also

$$\widehat{\omega}_i\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i \boldsymbol{g}\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}, \quad \widehat{\psi}_i\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{g}^{-1}\partial_i \boldsymbol{\phi}\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}, \tag{4.3.9}$$

und damit sind auch sie Lösungen der Zwangsbedingungen $\boldsymbol{H}_a$ und $\boldsymbol{S}$. Man beachte, daß hierzu keine Regularisierung der Operatoren nötig ist, obwohl in dieser Darstellung in den Zwangsbedingungen Produkte von Operatoren am gleichen Punkt auftreten. Solche Produkte sind genau dann wohldefiniert, wenn wir die Wellenfunktionale derart einschränken, daß sie keine Produkte von Feldern am gleichen Punkt enthalten sollen, was für die $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ der Fall ist. Das hat natürlich umgekehrt zur Folge, daß nun Produkte von Multiplikationsoperatoren am selben Punkt nicht mehr definiert sind. Solche treten aber in den Zwangsbedingungen nicht auf, so daß wir diese Einschränkung ohne weiteres machen können.

Die vollständige Lösung von $\boldsymbol{H}_a$ und $\boldsymbol{S}$ ist demnach auch in der Dreibein-Darstellung gegeben durch

$$\Psi_F[e,\bar{\psi}] = \int \mathrm{d}\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}\, F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}]\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[e,\bar{\psi}], \tag{4.3.10}$$

Wir werden von hier an diese Darstellung verwenden, da zumindest die $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ wohldefinierte differenzierbare Funktionale werden und die nachfolgenden Rechnungen dadurch etwas vereinfacht werden.

Obwohl das Funktionalintegral nur formal existiert, werden wir am Ende zu einem exakten Ergebnis kommen. Der Grund dafür ist, daß wir die "Wellenfunktion" $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ auch ganz anders interpretieren können, nämlich als Erzeuger einer kanonischen Transformation von Variablen (e,ψ) und dazu konjugierten Größen, die die Zwangsbedingungen $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{H}_a$ lösen, auf neue Variable $(\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi})$ und dazu konjugierte. Die Übersetzungsvorschrift für Operatoren von einer Darstellung zur anderen ist dann dadurch gegeben, daß wir den Operator in der einen Darstellung auf $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[e,\psi]$ anwenden und dann einen in der anderen Darstellung finden müssen, der die gleiche Wirkung hat.

In der $\boldsymbol{g}$-$\boldsymbol{\phi}$-Darstellung ist F die Wellenfunktion und die entsprechenden Operatoren wirken genau so auf dieses F, als hätten wir sie formal durch eine partielle Integration im Integral (4.3.10) ermittelt. Nur daß jetzt alle vorkommenden Größen wohldefiniert sind, denn für einen kompakten Raum ist das Integral in (4.3.7) stets endlich. Wir werden also im folgenden formal das Funktionalintegral für Ψ_F verwenden, um die Rechnungen durchzuführen, aber die Ergebnisse als wohldefinierte kanonische Transformation interpretieren.

Betrachen wir nun die restlichen Zwangsbedingungen. Sie stellen weitere Forderungen an die bis jetzt beliebige Funktion $F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}]$. Wie eben beschrieben ermitteln wir die Operatoren für $\bar{\boldsymbol{S}}$ und $\boldsymbol{L}_a$ in der $\boldsymbol{g}$-$\boldsymbol{\phi}$-Darstellung. Auf die Funktionale $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ wirkt $\bar{\boldsymbol{S}}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\widehat{\bar{\boldsymbol{S}}}[\boldsymbol{\epsilon}]\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= 2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\left(\bar{\psi}_i\,\partial_j\boldsymbol{\epsilon} + \bar{\psi}_i\widehat{\omega}_j\boldsymbol{\epsilon}\right)\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} \\ &= 2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\left(\bar{\psi}_i\boldsymbol{g}^{-1}\partial_j(\boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon})\right)\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} \\ &= 2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\left(\bar{\psi}_i\boldsymbol{g}^{-1}\partial_j(\boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_0)\right)\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

wobei $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\boldsymbol{x}})$ ist. Wir sehen, daß dies gerade der Variation von $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ unter $\delta\boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}_0$ entspricht (hier ist das Hinzufügen von $\boldsymbol{\epsilon}_0$ notwendig, damit $\boldsymbol{\phi}$ quasiperiodisch bleibt). Es folgt, daß F unter $\delta\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0$ invariant sein muß, wobei $\boldsymbol{\epsilon}$ ein Spinorfeld auf $\mathcal{N}$ ist. Das entspricht natürlich gerade der bereits für die klassischen Lösungen gefundenen Supersymmetrie-Transformation auf dem fermionischen Parameter $\boldsymbol{\phi}$.

Die Bedingung an F lautet also

$$F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}] = F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_0] \tag{4.3.12}$$

für alle Spinorfelder $\boldsymbol{\epsilon}$ auf $\mathcal{N}$, wobei wir hier $\boldsymbol{\epsilon}$ wieder als endlichen Parameter auffassen können, denn die Exponentialreihe für $\delta\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0$ bricht bereits nach dem ersten Glied ab.

Für die Lorentz-Bedingung ergibt sich ein analoges Resultat. Man beachte, daß $\boldsymbol{L}_a$ auf dem Wellenfunktional keine Lorentz-Transformationen erzeugt, also nicht verlangt wird, daß Ψ invariant unter diesen ist. Genau wie in $\bar{\boldsymbol{S}}$ tritt ein rein multiplikativer zusätzlicher Term auf. Berechnen wir also die Wirkung von $\boldsymbol{L}_a$ auf $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{L}}[\omega^a]\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\omega^a\left(\partial_i e_{ja} - \varepsilon^{abc}\widehat{\omega}_{ib}e_{jc} - \bar{\psi}_i\gamma_a\widehat{\bar{\psi}}_j\right)\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} \\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\omega^a\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial_i(\boldsymbol{g}\gamma_j\boldsymbol{g}^{-1})\boldsymbol{g}\gamma_a) - \bar{\psi}_i\gamma_a\boldsymbol{g}^{-1}\partial_j\boldsymbol{\phi}\right)\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Das ist wiederum nicht anderes als die Variation von $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ unter $\delta\boldsymbol{g} = \frac{1}{2}\omega^a\boldsymbol{g}\gamma_a$, also unter Multiplikation von $\boldsymbol{g}$ von rechts mit einer $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-Matrix. Auch hier können wir die entsprechende endliche Transformation angeben, die natürlich einfach durch die Multiplikation von rechts mit einem Gruppenelement $\boldsymbol{g} \mapsto \boldsymbol{gh}$ gegeben ist, wobei $\boldsymbol{h}$ ein $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Feld auf $\mathcal{N}$ ist.

Allerdings führt diese Transformation wieder aus dem Bereich der quasiperodischen Felder auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ heraus, wir müssen zusätzlich eine Multiplikation mit $\boldsymbol{h}_0^{-1} = \boldsymbol{h}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ von links durchführen, die auch auf $\boldsymbol{\phi}$ wirkt. Wir erhalten schließlich folgende Forderung an F:

$$F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}] = F[\boldsymbol{h}_0^{-1}\boldsymbol{g}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}_0^{-1}\boldsymbol{\phi}] \tag{4.3.14}$$

für alle $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Felder $\boldsymbol{h}$ auf $\mathcal{N}$.

Als nächstes können wir zeigen, daß F nur von den Werten der Felder $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{\phi}$ auf Υ abhängt, die wir mit $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{\phi}_\lambda$, $\lambda \in \Upsilon$ bezeichnen. Der Beweis ist völlig analog zum klassischen Fall. Wenn $\boldsymbol{g}(\lambda) = \boldsymbol{g}'(\lambda)$ und $\boldsymbol{\phi}(\lambda) = \boldsymbol{\phi}'(\lambda)$ ist für alle $\lambda \in \Upsilon$, so werden durch $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{g}'$ und $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}')$ Felder auf $\mathcal{N}$ definiert mit $\boldsymbol{h}_0 = \mathbf{1}$ und $\boldsymbol{\epsilon}_0 = 0$, und wir bekommen

$$F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}] = F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{g}\boldsymbol{\epsilon}] = F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}'] = F[\boldsymbol{gh},\boldsymbol{\phi}'] = F[\boldsymbol{g}',\boldsymbol{\phi}']. \tag{4.3.15}$$

Nun wissen wir außerdem, daß nicht alle $\boldsymbol{g}_\lambda$ und $\boldsymbol{\phi}_\lambda$ unabhängig sind, sondern nur die für die primitiven Schleifen, die wir in Figur 1 eingeführt haben. F ist also gegeben durch eine Funktion

$$F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}] = F(\{\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\phi}_\lambda\}_{\lambda\in\Upsilon_0}). \tag{4.3.16}$$

Diese $\boldsymbol{g}_\lambda$ und $\boldsymbol{\phi}_\lambda$ bezeichnen wir wieder als die Moduli. Sie sind nicht völlig unabhängig, da die primitiven Schleifen noch die Relation (4.2.37) erfüllen.

Außerdem haben wir die Zwangsbedingungen noch nicht voll ausgeschöpft, da wir bis jetzt nur die Invarianz unter solchen $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{\epsilon}$ haben, für die $\boldsymbol{h}_0 = \mathbf{1}$ und $\boldsymbol{\epsilon}_0 = 0$ ist. Wir müssen noch die zusätzliche Forderung stellen, daß F invariant ist unter

$$\boldsymbol{g}_\lambda \mapsto \boldsymbol{h}_0^{-1}\boldsymbol{g}_\lambda\boldsymbol{h}_0, \quad \boldsymbol{\phi}_\lambda \mapsto \boldsymbol{h}_0^{-1}\boldsymbol{\phi}_\lambda \tag{4.3.17}$$

sowie unter

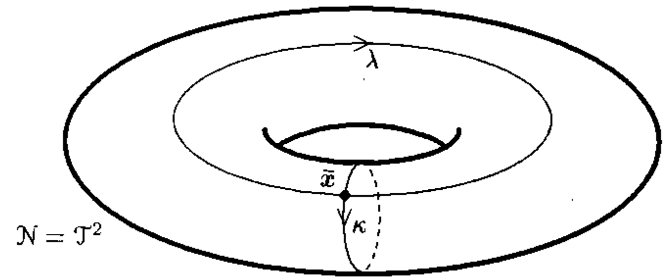
$$\boldsymbol{\phi}_\lambda \mapsto \boldsymbol{\phi}_\lambda + (\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1})\boldsymbol{\epsilon}_0. \tag{4.3.18}$$

Dies sind genau die Transformationen der Werte $\boldsymbol{g}(\lambda)$ bzw. $\boldsymbol{\phi}(\lambda)$, die sich aus (4.3.12) und (4.3.14) ergeben.

4. Der Torus

Wir wollen nun für der Torus $\mathcal{N} = \mathcal{T}^2$ die Funktionen F mit den oben angegebenen Bedingungen vollständig klassifizieren und auf diese Weise eine Basis für den physikalischen Zustandsraum erhalten. Wie in Figur 2 gezeigt gibt es nur zwei primitive Schleifen und F ist gegeben durch

$$F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}] = F(\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\kappa,\boldsymbol{\phi}_\lambda,\boldsymbol{\phi}_\kappa) \tag{4.4.1}$$



Figur 2: Der Torus besitzt zwei primitive Schleifen λ und κ mit $\lambda\bullet\kappa = \kappa\bullet\lambda$. Die Schleifengruppe ist die abelsche additive Gruppe $\mathbb{Z}^2$.

Die Schleifenrelation (4.2.37) wird hier sehr einfach und lautet

$$\lambda\bullet\kappa\bullet\lambda^{-1}\bullet\kappa^{-1} = \eta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\bullet\kappa = \kappa\bullet\lambda. \tag{4.4.2}$$

Damit können wir den Wertebereich der Moduli bestimmen. Es ist $\boldsymbol{g}(\lambda\bullet\kappa) = \boldsymbol{g}(\kappa\bullet\lambda)$ und $\boldsymbol{\phi}(\lambda\bullet\kappa) = \boldsymbol{\phi}(\kappa\bullet\lambda)$. Setzen wir das in die Gleichungen (4.3.4) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_\lambda\boldsymbol{g}_\kappa &= \boldsymbol{g}_\kappa\boldsymbol{g}_\lambda \\ (\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1})\boldsymbol{\phi}_\kappa &= (\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1})\boldsymbol{\phi}_\lambda. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Wir könnten natürlich auch hier wieder eine Mulitplikation auf den Paaren $(\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi})$ einführen, die im wesentlichen einfach durch Weglassen der dritten Komponente in (4.1.50) gegeben ist. Dann könnten wir die letzten Gleichungen wieder zu einer einzigen zusammenfassen, die besagt, daß $(\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{\phi}_\lambda)$ mit $(\boldsymbol{g}_\kappa,\boldsymbol{\phi}_\kappa)$ vertauschen muß. Wir müssen nun aber ohnehin eine Unterscheidung zwischen den bosonischen Moduli $\boldsymbol{g}$ und den fermionischen Moduli $\boldsymbol{\phi}$ machen. Wir bleiben daher besser bei der Komponenten-Schreibweise.

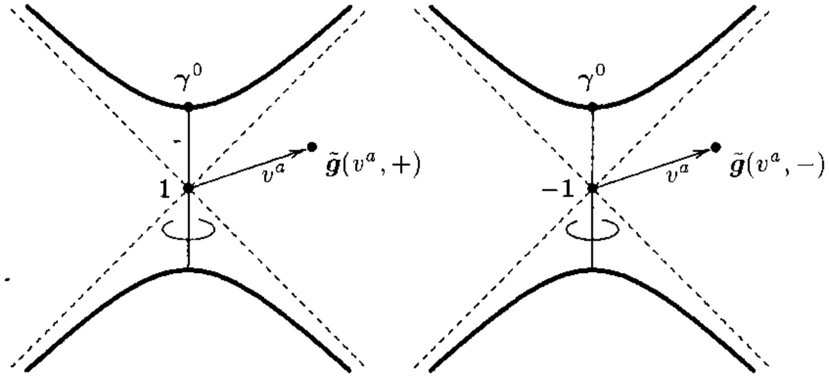
Neben der Einschränkung des Definitionsbereichs von F durch (4.4.3) muß F außerdem die Bedingungen

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\kappa,\boldsymbol{\phi}_\lambda,\boldsymbol{\phi}_\kappa) &= F(\boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{g}_\lambda\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{g}_\kappa\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{\phi}_\lambda, \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{\phi}_\kappa), \\ F(\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\kappa,\boldsymbol{\phi}_\lambda,\boldsymbol{\phi}_\kappa) &= F(\boldsymbol{g}_\lambda,\boldsymbol{g}_\kappa,\boldsymbol{\phi}_\lambda + (\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1})\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\phi}_\kappa + (\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1})\boldsymbol{\epsilon}) \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

erfüllen, wobei wir den Index 0 an $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{\epsilon}$ weggelassen haben. Diese sind also jetzt keine Felder mehr, sondern einfach beliebige $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Matrizen bzw. Spinoren.

Die bosonischen Moduli

Um die möglichen F vollständig zu klassifizieren, zerlegen wir sie zuerst nach "Eigenfunktionen" der bosonischen Moduli $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa$, das heißt nach solchen Funktionen, die nur auf einer einzigen



Figur 3: Die Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ besteht aus zwei Kopien des $\mathbb{M}^3$ zwischen den Hyperboloiden $v^a v_a = -1$, die entlang dieser Flächen zusammengeklebt sind. Ein Gruppenelement ist durch einen 3-Vektor v^a und ein Vorzeichen $z = \pm 1$ bestimmt, das für die linke "Hälfte" positiv und für die rechte negativ ist.

Klasse von Paaren von vertauschenden Matrizen von Null verschieden sind und dort invariant sind unter

$$\boldsymbol{g}_\lambda \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{g}_\lambda\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{g}_\kappa \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{g}_\kappa\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{\phi}_\lambda \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{\phi}_\lambda, \quad \boldsymbol{\phi}_\kappa \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{\phi}_\kappa. \tag{4.4.5}$$

Wir müssen also zunächst die Äquivalenzklassen von Paaren von vertauschenden $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa$ finden. Um diese zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ selbst. Wir können jede 2×2-Matrix als eine Linearkombination der drei $\boldsymbol{\gamma}$-Matrizen und der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ schreiben:

$$\boldsymbol{g} = v^a\boldsymbol{\gamma}_a + w\mathbf{1}. \tag{4.4.6}$$

Damit $\boldsymbol{g}$ in $SL(2,\mathbb{R})$ liegt, muß die Determinante gleich eins sein. Man findet

$$\det(\boldsymbol{g}) = w^2 - v_a v^a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w = \pm\sqrt{1 + v^a v_a}. \tag{4.4.7}$$

Eine $SL(2,\mathbb{R})$-Matrix wird also parametrisiert durch einen Vektor v^a im dreidimensionalen Minkowski-Raum $\mathbb{M}^3$, der zwischen den beiden Hyperboloiden mit $v^2 = v^a v_a = -1$ liegen muß, sowie einem Vorzeichen $z = \pm 1$. Es ergibt sich das Bild in Figur 3. Bezeichnen wir diese Parametrisierung mit

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(v^a, z) = v^a\boldsymbol{\gamma}_a + z\mathbf{1}\sqrt{1+v^2} \tag{4.4.8}$$

Die Fragen sind nun: Wann vertauschen zwei Matrizen $\boldsymbol{g}_\lambda$ und $\boldsymbol{g}_\kappa$ und wann sind zwei Paare $(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa)$ und $(\boldsymbol{g}'_\lambda, \boldsymbol{g}'_\kappa)$ äquivalent? Berechnen wir dazu das Produkt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_\lambda\boldsymbol{g}_\kappa &= (v^a_\lambda\boldsymbol{\gamma}_a + w_\lambda\mathbf{1})\,(v^b_\kappa\boldsymbol{\gamma}_b + w_\kappa\mathbf{1}) \\ &= -\varepsilon_{abc}v^a_\lambda v^b_\kappa\boldsymbol{\gamma}^c + \text{ Terme symmetrisch in } \lambda, \kappa.\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Offenbar kommutieren die beiden Matrizen genau dann, wenn v^a_λ und v^a_κ proportional zueinander sind. Das heißt sie müssen auf einer Geraden in Figur 3 liegen, aber nicht notwendigerweise in einer der beiden "Hälften" der Gruppe. Wir können also die vollständige Menge aller Paare von vertauschenden Matrizen durch

$$\boldsymbol{g}_\lambda = \tilde{\boldsymbol{g}}(u_\lambda v^a, z_\lambda), \quad \boldsymbol{g}_\kappa = \tilde{\boldsymbol{g}}(u_\kappa v^a, z_\kappa) \tag{4.4.10}$$

parametrisieren, wobei v^a ein beliebiger 3-Vektor, $z_\lambda, z_\kappa = \pm 1$ und die reellen Zahlen u_λ, u_κ die Relationen

$$u^2_\lambda v^2 \geq -1, \quad u^2_\kappa v^2 \geq -1 \tag{4.4.11}$$

erfüllen. Da die Ausdrücke für die $\boldsymbol{g}$'s nur Produkte uv^a enthalten, können wir die Parameter durch $u^2_\lambda + u^2_\kappa = 1$ normieren und durch einen Winkel θ ersetzen:

$$\boldsymbol{g}_\lambda = \tilde{\boldsymbol{g}}(v^a \sin\theta, z_\lambda), \quad \boldsymbol{g}_\kappa = \tilde{\boldsymbol{g}}(v^a\cos\theta, z_\kappa). \tag{4.4.12}$$

Der Wertebereich für v^a und θ ist dabei gegeben durch

$$v^2 \geq -1/\sin^2\theta \quad \text{und} \quad v^2 \geq -1/\cos^2\theta. \tag{4.4.13}$$

Es verbleibt dann immer noch ein freies Vorzeichen $v^a \mapsto -v^a$, $\theta \mapsto \theta + \pi$, das wir durch

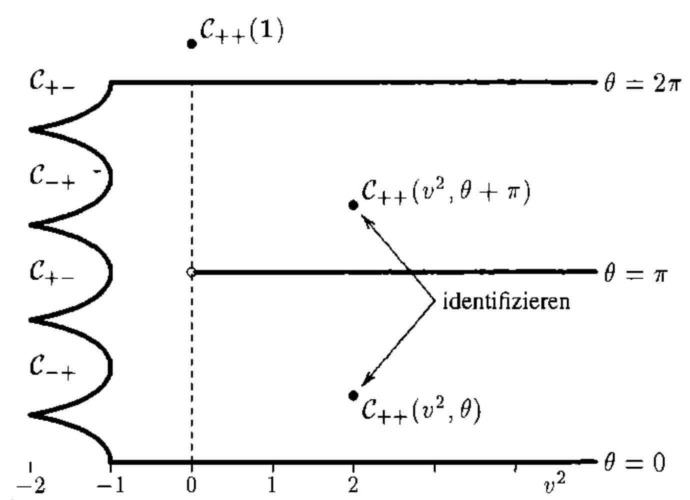
$$v_0 \geq 0, \quad v_0 = 0 \rightarrow v_1 \geq 0, \quad v_0 = v_1 = 0 \rightarrow v_2 > 0 \tag{4.4.14}$$

fixieren und die vier speziellen Fälle $(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa) = (z_\lambda\mathbf{1}, z_\kappa\mathbf{1})$ getrennt behandeln. Die Parameter $v^a, \theta, z_\lambda, z_\kappa$ sind dann für ein gegebenes Paar $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa$ eindeutig festgelegt.

Wie sehen nun die Äquivalenzklassen unter den "$\boldsymbol{h}$-Rotationen" $\boldsymbol{g} \mapsto \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{g}\boldsymbol{h}$ aus? Indem man auch $\boldsymbol{h}$ gemäß (4.4.6) darstellt und das Produkt ausrechnet, findet man, daß dies gerade einer Lorentz-Rotation in Figur 3 entspricht. Und zwar einer, die stetig mit der Identität verbunden ist, somit das Vorzeichen von v_0 erhalten bleibt, und die nur innerhalb der beiden Hälften wirkt, also auch z invariant läßt.

Damit bekommen wir folgende Äquivalenzklassen: Die speziellen Fälle $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa = \pm\mathbf{1}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{\pm\pm}(\mathbf{1})$. Die übrigen Klassen werden durch den Winkel θ und das Quadrat der Länge von v^a sowie die beiden Vorzeichen z_λ, z_κ eindeutig bestimmt. Zwei vorgegebene Vektoren mit dem gleichen v^2 können wir nämlich stets durch eine kontinuierliche Lorentz-Rotation ineinander überführen: Die einzigen nicht zusammenhängenden Mengen von konstantem v^2 sind die zeitartigen Hyperboloide und der Lichtkegel (der den Ursprung nicht enthält). Wegen der Normierung $v_0 \geq 0$ liegt der Vektor dann aber immer auf dem oberen Lichtkegel bzw. dem oberen Teil eines Hyperboloids.

Eine Äquivalenzklasse ist also vollständig fixiert durch Angabe von v^2, θ, z_λ und z_κ und wir bezeichnen sie mit $\mathcal{C}_{\pm\pm}(v^2, \theta)$. Der Wertebereich für v^2 und θ ist durch (4.4.13) gegeben und in Figur 4 abgebildet.



Figur 4: Wertebereich für v^2 und θ. Der obere wird mit dem unteren Rand identifiziert, so daß ein Zylinder entsteht. Im raumartigen Bereich $v^2 > 0$ werden außerdem die im Zylinder gegenüberliegende Punkte identifiziert, im licht- und zeitartigen Bereich jedoch nicht. Die gestrichelte lichtartige Linie umläuft den Rand des zeitartigen Bereichs einmal, den des raumartigen aber zweimal. Gezeigt ist der Bereich C_{++}, der an den Randkurven mit den anderen Bereichen zusammengeklebt ist.

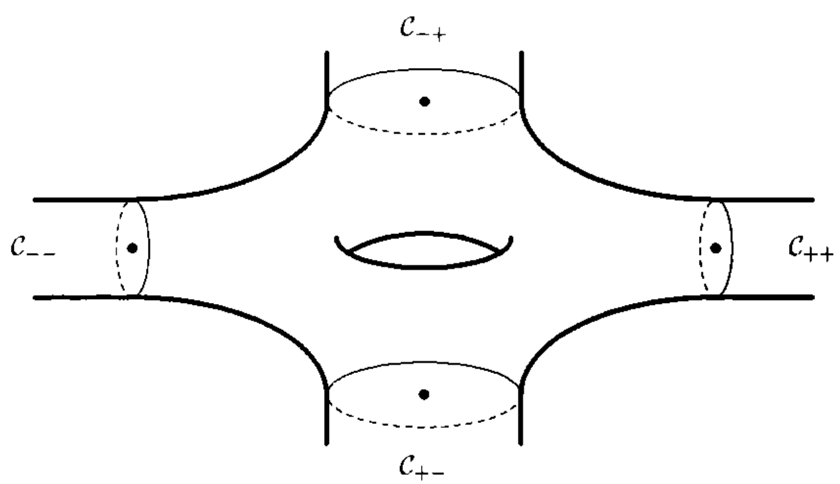
Umgekehrt sind die Parameter für eine gegebene Klasse noch nicht eindeutig. Betrachten wir den raumartigen Bereich: Durch eine Lorentz-Rotation können wir dort v^a in $-v^a$ überführen (für den licht- und zeitartigen Bereich ist das nicht möglich). Das bedeutet, daß zwei Paare, bei denen sich die Winkel θ um π unterscheiden, zur gleichen Klasse gehören, also $C_{++}(v^2, \theta) = C_{++}(v^2, \theta + \pi)$, falls $v^2 > 0$ ist.

Die gesamte Menge der Äquivalenzklassen besteht demnach aus vier Kopien $C_{++}, C_{+-}, C_{-+}, C_{--}$ des in Figur 4 dargestellten "Zylinders", die entlang der durch (4.4.13) gegebenen Ränder zusammengeklebt sind:

$$\begin{aligned} C_{++}(v^2, \theta) &= C_{-+}(v^2, \theta) \quad \text{für } v^2 \sin^2\theta = -1, \\ C_{++}(v^2, \theta) &= C_{+-}(v^2, \theta) \quad \text{für } v^2 \cos^2\theta = -1, \\ C_{--}(v^2, \theta) &= C_{+-}(v^2, \theta) \quad \text{für } v^2 \sin^2\theta = -1, \\ C_{--}(v^2, \theta) &= C_{-+}(v^2, \theta) \quad \text{für } v^2 \cos^2\theta = -1, \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

und bei denen in den raumartigen Bereichen gegenüberliegende Punkte identifiziert sind:

$$C_{\pm\pm}(v^2, \theta) = C_{\pm\pm}(v^2, \theta + \pi) \quad \text{für } v^2 > 0. \tag{4.4.16}$$



Figur 5: Die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren von vertauschenden $SL(2, \mathbb{R})$-Matrizen bildet einen Torus mit vier auslaufenden Zylindern. Die Zylinder repräsentieren raumartige, der Torus zeitartige und die vier Kreise die lichtartigen Matrizen. Auf den raumartigen Zylindern sind gegenüberliegende Punkte identifiziert. Die vier zusätzlichen Punkte sind die Klassen von $(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ etc., die jeweils nur aus diesem einen Paar bestehen.

Zusätzlich kommen noch die vier Klassen $C_{\pm\pm}(\mathbf{1})$ hinzu. Um eine Anschauung von dem kompletten Modulraum zu bekommen, müssen wir die vier Teile gemäß (4.4.15) zusammensetzen. Man findet, daß sich an der "Spitzen" in Figur 4 jeweils alle vier Teile treffen und die acht Kanten so verlaufen, daß sich ein Torus mit vier ins unendliche auslaufenden Zylindern bildet.

Figur 5 zeigt die Struktur dieses Raumes. Jeder Punkt auf der dort dargestellten Fläche entspricht einer Klasse von vertauschenden Matrizen $(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa)$. Die Topologie des Modulraumes ist ein wenig kompliziert. Insbesondere ist der Raum nicht Hausdorffsch, das heißt, es gibt Punkte, die sich nicht durch offene Umgebungen voneinander trennen lassen.

Das gilt zum Beispiel für zwei auf den lichtartigen Kreisen gegenüberliegenden Punkte $C_{++}(0, \theta)$ und $C_{++}(0, \theta + \pi)$. Jede offene Umgebung von dem ersten enthält alle raumartige Punkte $C_{++}(v^2, \theta)$ mit $0 < v^2 < \epsilon$, wenn nur ϵ genügend klein ist. Das gleiche gilt auch für den anderen Punkt. Es ist aber $C_{++}(v^2, \theta) = C_{++}(v^2, \theta + \pi)$ für $v^2 > 0$, das heißt die beiden Umgebungen können nicht disjunkt sein.

Auch die vier "Extrapunkte" $C_{\pm\pm}(\mathbf{1})$ hängen mit dem restlichen Raum zusammen. Und zwar enthält jede offene Umgebung von $C_{++}(\mathbf{1})$ den ganzen lichtartigen Kreis $C_{++}(0, \theta)$ und mit ihm natürlich auch noch eine offene Teilmenge des raumartigen und zeitartigen Bereichs. Das ergibt sich daraus, daß jede offene Umgebung von $\mathbf{1} \in SL(2, \mathbb{R})$, in der jede Äquivalenzklasse ganz oder gar nicht enthalten ist, stets den vollen Lichtkegel umfaßt.

Wir kennen also jetzt die bosonischen Moduli vollständig und können das Wellenfunktional nach deren Eigenfunktionen entwickeln. Da die Moduli reelle Größen sind, werden die entsprechenden Zustände orthogonal zueinander sein.

Für jede Klasse $\mathcal{C}$, also für jeden Punkt in Figur 5, bekommen wir einen orthogonalen Unterraum des Zustandsraumes. Ein Zustand in diesem Unterraum ist gegeben durch ein Wellenfunktional Ψ_F gemäß (4.3.10), wobei F nur für solche Werte von $(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa)$ von Null verschieden ist, die in $\mathcal{C}$ liegen.

Die fermionischen Moduli

Nachdem wir den Zustandsraum nach den bosonischen Moduli zerlegt haben, wollen wir jetzt für eine gegebene Klasse $\mathcal{C}$ jeweils alle möglichen Funktionen F bestimmen, die noch von den fermionischen Moduli $\phi_\lambda, \phi_\kappa$ abhängen können, die durch die Relation

$$(\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1})\boldsymbol{\phi}_\kappa = (\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1})\boldsymbol{\phi}_\lambda \tag{4.4.17}$$

verknüpft sind. Außerdem muß F noch die Bedingung (4.4.4) erfüllen, also invariant sein unter Lorentz-Rotationen und Supersymmetrie-Transformationen.

Da die fermionischen Moduli Graßmann-wertig sind, können wir F als ein Polynom höchstens vierten Grades in ihnen schreiben, denn $\boldsymbol{\phi}_\lambda$ und $\boldsymbol{\phi}_\kappa$ haben zusammen nur vier Komponenten. Betrachten wir also zuerst solche F, die nicht von den fermionischen Moduli abhängen sondern nur von $\boldsymbol{g}_\lambda$ und $\boldsymbol{g}_\kappa$. Da F nur auf der Klasse $\mathcal{C}$ nicht verschwinden soll und invariant unter Lorentz-Transformationen ist, muß es innerhalb der Klasse konstant sein, das heißt wir bekommen für jede Klasse $\mathcal{C}$ genau einen solchen Zustand.

Für die speziellen Klassen $\mathcal{C}_{\pm\pm}(\mathbf{1})$ definieren wir

$$\big|\, \mathbf{1}, z_\lambda, z_\kappa \big\rangle : \quad F = \Delta_{z_\lambda \mathbf{1}, z_\kappa \mathbf{1}}(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa), \tag{4.4.18}$$

wobei $\Delta_{\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda, \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa}(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa)$ eine nicht näher spezifizierte distributionswertige Funktion ist, die nur dann von Null verschieden ist, wenn $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa$ in der gleichen Äquivalenzklasse liegen wie $\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda, \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa$. Der genaue "Wert" dieser Funktion, der innerhalb der Klasse konstant sein soll, wird uns nicht weiter interessieren. Er wird sich im Prinzip später aus der Definition des Skalarproduktes ergeben und von dem gewählten Maß auf der Menge der Paare von vertauschenden Matrizen abhängen. Da wir das Produkt aber nicht durch ein Integral über die Matrizen $\boldsymbol{g}_\lambda$ und $\boldsymbol{g}_\kappa$ definieren werden, spielt die Funktion Δ weiter keine Rolle.

Die übrigen Klassen unterteilen wir in die verschiedenen Bereiche von Figur 5, also in raumartige, lichtartige und zeitartige Zustände. Beginnen wir mit den raumartigen. Es gibt vier solche Bereiche, die wir wieder durch die beiden Vorzeichen z_λ, z_κ unterscheiden. Um einen Standard-Repräsentanten für eine raumartige Klasse zu erhalten, drehen wir die Gerade in Figur 3, auf der die beiden Moduli liegen, in die γ_1-Richtung. Dann gibt es zwei reelle Zahlen a, b, die nicht beide Null sind (sonst sind wir nicht in der raumartigen Klasse), und die Matrizen sind gegeben durch

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda = z_\lambda \exp(a\gamma_1) = z_\lambda \begin{pmatrix} \cosh a & \sinh a \\ \sinh a & \cosh a \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa = z_\kappa \exp(b\gamma_1) = z_\kappa \begin{pmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{pmatrix}. \tag{4.4.19}$$

Den entsprechenden Zustand bekommen wir durch

$$\big|\, \mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b \big\rangle : \quad F = \Delta_{\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda, \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa}(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa). \tag{4.4.20}$$

Die Bezeichnung ist nicht eindeutig, denn die γ_1-Gerade ist schneidet jede Äquivalenzklasse zweimal, das heißt

$$\big|\, \mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b \big\rangle = \big|\, \mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, -a, -b \big\rangle. \tag{4.4.21}$$

Für den lichtartigen Bereich können wir den Standard-Repräsentanten immer auf die $\gamma_0 + \gamma_1$-Achse legen, also auf die in Figur 3 nach oben rechts laufende lichtartige Gerade. Außerdem können wir durch eine weitere Lorentz-Transformation, die auf der Lichtgeraden zu einer Streckung wird, den Vektor v^a gleich $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ setzen und erhalten als Repräsentanten für die Klasse $\mathcal{C}_{\pm\pm}(0, \theta)$ die Matrizen

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda = z_\lambda \begin{pmatrix} 1 & \sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa = z_\kappa \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4.22}$$

Ein lichtartiger Zustand ist also durch einen Winkel (der den Kreis in Figur 5 durchläuft) und zwei Vorzeichen gegeben:

$$\big|\, \mathcal{L}, z_\lambda, z_\kappa, \theta \big\rangle : \quad F = \Delta_{\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda, \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa}(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa). \tag{4.4.23}$$

Hier tritt keine Zweideutigkeit mehr auf, denn die Matrizen lassen sich nicht durch eine Lorentz-Rotation vom oberen auf den unteren Lichtkegel bringen.

Der zeitartige Bereich des Modulraumes hängt zusammen und wir sollten ihn möglichst durch ein einziges Koordinatenblatt abdecken. Dazu wählen wir diesmal die γ_0-Gerade in Figur 3 aus, in die wir jede zeitartige Gerade hineindrehen können. Standard-Repräsentanten liegen dann in SO(2). Sie sind durch zwei Winkel parametrisiert, die wir auch a, b nennen und die nicht die Werte $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$ oder (π,π) annehmen dürfen. Die zulässigen Werte bilden also einen Torus mit 4 Löchern, die genau den auslaufenden Zylindern in Figur 5 entsprechen. Die Standardmatrizen sind

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda = z_\lambda \exp(a\gamma_0) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa = z_\kappa \exp(b\gamma_0) = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}, \tag{4.4.24}$$

und der entsprechende Zustand ist

$$\big|\, \mathcal{Z}, a, b \big\rangle : \quad F = \Delta_{\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda, \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa}(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa). \tag{4.4.25}$$

Damit haben wir alle Zustände gefunden, für die F nicht von den fermionischen Moduli abhängt. Nebenbei haben außerdem einen Atlas für den Modulraum bekommen. Die Koordinaten a, b im zeitartigen Bereich sind nämlich an den Stellen regulär, an denen wir den Raum zunächst aus den vier Teilen aus Figur 4 zusammengesetzt haben. Dagegen sind die neuen Koordinaten an den lichtartigen Kreisen nicht mehr regulär und dort verbinden die Koordinaten v^2, θ nun die zeit- und raumartigen Bereiche miteinander.

Weitere Zustände bekommen wir, indem wir die F's mit einem Polynom in $\phi_\lambda, \phi_\kappa$ multiplizieren. Die möglichen Funktionen hängen von den Eigenschaften der Matrizen $\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1}$ und $\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1}$ in (4.4.17) ab.

Nehmen wir einmal an, mindestens eine davon ist invertierbar, und o.B.d.A. sei dies $\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1}$. Dann setzen wir in (4.4.4) $\epsilon = -(\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1})^{-1}\phi_\lambda$ und bekommen

$$F(\phi_\lambda, \phi_\kappa) = F(\phi_\lambda + (\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1})\epsilon, \phi_\kappa + (\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1})\epsilon) = F(0,0), \tag{4.4.26}$$

denn $(\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1})(\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1})^{-1}\phi_\lambda = \phi_\kappa$, weil $\boldsymbol{g}_\lambda$ und $\boldsymbol{g}_\kappa$ vertauschen und (4.4.17) gilt.

Es gibt demnach keine weiteren Zustände mehr, wenn $\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1}$ oder $\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1}$ invertierbar ist, sondern nur, wenn beide singulär sind:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1}) &= 2 - 2z_\lambda\sqrt{1 + v^2\sin^2\theta} = 0, \\ \det(\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1}) &= 2 - 2z_\kappa\sqrt{1 + v^2\cos^2\theta} = 0, \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

wobei wir die Formel für die Determinate aus (4.4.7) verwendet haben.

Diese Bedingungen sind nur erfüllt für $z_\lambda, z_\kappa = +1$ und $v^2 = 0$, also für die Klassen $\mathcal{C}_{++}(1)$ und $\mathcal{C}_{++}(0,\theta)$, das heißt auf dem lichtartigen Kreis und dem singulären Punkt im Bereich $\mathcal{C}_{++}$ von Figur 5.

Beginnen wir mit den Fall $\mathcal{C}_{++}(\mathbf{1})$. Die beiden Spinoren $\phi_\lambda, \phi_\kappa$ sind dann voneinander unabhängig, denn (4.4.17) verschwindet identisch. Sie transformieren auch nicht mehr unter Supersymmetrie-Transformationen. Damit ist die einzige Einschränkung an F die, daß es Lorentz-invariant sein muß. Es gibt genau fünf unabhängige solche Funktionen, nämlich

$$1, \quad \phi_\lambda^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\lambda, \quad \phi_\kappa^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\kappa, \quad \phi_\lambda^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\kappa, \quad \phi_\lambda^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\lambda\,\phi_\kappa^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\kappa. \tag{4.4.28}$$

Die entsprechenden Zustände bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} &\big|\mathbf{1},+,+\big\rangle &&: \quad F = \Delta_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(\boldsymbol{g}_\kappa, \boldsymbol{g}_\kappa), \\ &\big|\mathbf{1},+,+,\lambda\lambda\big\rangle &&: \quad F = \Delta_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(\boldsymbol{g}_\kappa, \boldsymbol{g}_\kappa)\,\phi_\lambda^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\lambda, \\ &\big|\mathbf{1},+,+,\kappa\kappa\big\rangle &&: \quad F = \Delta_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(\boldsymbol{g}_\kappa, \boldsymbol{g}_\kappa)\,\phi_\kappa^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\kappa, \\ &\big|\mathbf{1},+,+,\lambda\kappa\big\rangle &&: \quad F = \Delta_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(\boldsymbol{g}_\kappa, \boldsymbol{g}_\kappa)\,\phi_\lambda^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\kappa, \\ &\big|\mathbf{1},+,+,\lambda\lambda\kappa\kappa\big\rangle &&: \quad F = \Delta_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(\boldsymbol{g}_\kappa, \boldsymbol{g}_\kappa)\,\phi_\lambda^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\lambda\;\phi_\kappa^{\mathsf{T}}\gamma_0\phi_\kappa. \end{aligned} \tag{4.4.29}$$

Für die Klassen $\mathcal{C}_{++}(0,\theta)$ sind die Matrizen $\boldsymbol{g}_\lambda - \mathbf{1} = v^a\gamma_a\sin\theta$ und $\boldsymbol{g}_\kappa - \mathbf{1} = v^a\gamma_a\cos\theta$ zwar nicht gleich Null, aber sie sind Nilpotent. Die Größen

$$v^a\gamma_a\phi_\lambda, \quad v^a\gamma_a\phi_\kappa \tag{4.4.30}$$

sind also invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Sie sind nicht unabhängig, denn (4.4.17) lautet

$$v^a\gamma_a\phi_\lambda\,\cos\theta = v^a\gamma_a\phi_\kappa\,\sin\theta \tag{4.4.31}$$

Damit ist eine der vier Komponenten der beiden Moduli eine Funktion der anderen. Eine weitere können wir wieder wegeichen, so daß schließlich nur zwei übrigbleiben. Es gibt also nur einen weiteren Zustand, bei dem F durch das Produkt der beiden unabhängigen fermionischen Moduli gegeben ist, das wir in der Form

$$\big|\mathcal{L},+,+,\theta,\lambda\kappa\big\rangle: \quad F = \Delta_{\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda,\tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa}(\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa)\,v^a\,\left(\phi_\lambda^{\mathsf{T}}\gamma_0\gamma_a\phi_\lambda + \phi_\kappa^{\mathsf{T}}\gamma_0\gamma_a\phi_\kappa\right) \tag{4.4.32}$$

schreiben können. Die Funktion der Fermionen haben wir dabei so gewählt, daß sie für keinen Winkel θ identisch verschwindet. Für $\tilde{\boldsymbol{g}}_\lambda, \tilde{\boldsymbol{g}}_\kappa$ sind die Standard-Repräsentanten (4.4.22) einzusetzen.

Damit haben wir eine vollständige Basis des physikalischen Zustandsraumes bekommen. Zu jedem Punkt in Figur 5 gibt es einen Basiszustand, für jeden Punkt auf dem lichtartigen Kreis in $\mathcal{C}_{++}$ jedoch zwei und für den singulären Punkt $\mathcal{C}_{++}(\mathbf{1})$ sogar fünf. Nur in diesen zusätzlichen Zuständen weicht der Zustandsraum von dem der reine Gravitation ab, für den F nur eine Funktion von $\boldsymbol{g}$ ist und alle Gravitinoterme in der hier durchgeführten Herleitung einfach wegzulassen sind.

Man könnte zunächst vermuten, die Supersymmetrie sollte dazu führen, daß nun zu jedem "bosonischen" Zustand, der mit einem der reinen Gravitation korrespondiert, ein weiterer Zustand als "supersymmetrischer Partner" auftritt. Diese Argumentation gilt aber nur für eine *globale* Supersymmetrie, in der wir die Zustände nach der dieser Symmetrie zugeordneten Ladung klassifizieren können. In einer *lokal* supersymmetrischen Theorie verschwindet diese Ladung identisch, denn sie ist das räumliche Integral über $\boldsymbol{S}$. Die Einführung einer zusätzlichen Eichsymmetrie führt daher im allgemeinen nicht zu neuen Zuständen (man beachte, daß wir genau das explizit für die Beschreibung von Cosetraum-Sigmamodellen in Kapitel I benutzt haben). Es ist daher eher überraschend, daß sich doch neue Zusände ergeben, die immer dann auftreten, wenn die Raum-Mannigfaltigkeit eine "höhere Symmetrie" hat, also die Moduli $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa$ lichtartig oder $\mathbf{1}$ werden.

5. Observable

Die Wirkung (4.1.8) besitzt eine globale U(1)-Symmetrie, die wir bis jetzt noch nicht näher betrachtet haben. Sie ist invariant unter der Multipliktion des Gravitinos mit einer komplexen Einheit

$$\psi_\mu \mapsto \exp(-\mathrm{i}q)\,\psi_\mu, \quad \bar{\psi}_\mu \mapsto \exp(\mathrm{i}q)\,\bar{\psi}_\mu. \tag{4.5.1}$$

Wir können sofort einen erhaltenen Strom angeben:

$$\mathcal{J}^\mu = 2\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,\bar{\psi}_\nu \psi_\rho. \tag{4.5.2}$$

Offenbar gilt dann für Lösungen der Bewegungsgleichungen $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$. Indem wir die Zeitkomponente über den Raum integrieren, erhalten wir eine Ladung

$$\mathcal{Q} = 2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\varepsilon^{ij}\,\bar{\psi}_i\psi_j, \tag{4.5.3}$$

die über die Poisson-Klammern die $\mathrm{U}(1)$-Symmetrie erzeugt,

$$\{\psi_i, \mathcal{Q}\} = -\mathrm{i}\psi_i, \quad \{\bar{\psi}_i, \mathcal{Q}\} = \mathrm{i}\bar{\psi}_i. \tag{4.5.4}$$

Um festzustellen, ob $\mathcal{Q}$ tatsächlich eine Observable ist, müssen wir zeigen, daß die Klammern mit den Zwangsbedingungen schwach verschwinden. Die Klammern mit $\boldsymbol{H}_a$ und $\boldsymbol{L}_a$ sind gleich Null, und auf $\boldsymbol{S}$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$ erzeugt die Ladung die gleichen $\mathrm{U}(1)$-Rotationen wie auf dem Gravitino, das heißt die Klammern sind wieder proportional zu $\boldsymbol{S}$ bzw. $\bar{\boldsymbol{S}}$.

Die Ladung $\mathcal{Q}$ ist also eine Observable. Der entsprechende Operator sollte auf dem physikalischen Zustandsraum wirken. Betrachten wir zuerst $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ aus (4.3.7), das wir wieder als Wellenfunktion oder als Erzeuger einer kanonischen Transformation interpretieren können. Die Ladung wirkt darauf wie

$$\widehat{\mathcal{Q}}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = 2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\bar{\varepsilon}^{ij}\,\bar{\psi}_i\boldsymbol{g}^{-1}\partial_j\boldsymbol{\phi}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = -\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{\phi}\,\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\phi}}\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}. \tag{4.5.5}$$

Da $\boldsymbol{\phi}$ ein Feld auf $\widetilde{\mathcal{N}}$ ist, macht es zunächst keinen Sinn, die Wellenfunktion nach $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ abzuleiten. Wir sollten daher den letzten Operator besser als ein Integral in $\widetilde{\mathcal{N}}$ schreiben, also explizit

$$\widehat{\mathcal{Q}}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = -\int \mathrm{d}^2\alpha\,\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{\phi}(\alpha)\,\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\phi}(\alpha)}\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}, \tag{4.5.6}$$

wobei das Integral $\int \mathrm{d}^2\alpha$ über ganz $\widetilde{\mathcal{N}}$ laufen kann, denn außerhalb der "Plakette", also des Teils von $\widetilde{\mathcal{N}}$, den wir auswählen, um $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{\phi}$ in die Definition für $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ (siehe (4.3.7)) einzusetzen, hängt $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ nicht von $\boldsymbol{\phi}$ ab. Wir bekommen nicht verschwindende Beiträge zu dem Integral über $\widetilde{\mathcal{N}}$ also nur von einer Plakette, was genau dem Integral über $\mathcal{N}$ entpricht, das in (4.5.5) auftritt.

Wir können dies nun entweder (im Sinne einer kanonischen Transformation) als den Operator für $\mathcal{Q}$ auf der Wellenfunktion F auffassen, oder wir lassen $\mathcal{Q}$ auf einen durch (4.3.10) gegebenen physikalischen Zustand wirken und bekommen

$$\widehat{\mathcal{Q}}\,\Psi_F = -\int \mathrm{d}\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}\,F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}]\int \mathrm{d}^2\alpha\,\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{\phi}(\alpha)\,\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\phi}(\alpha)}\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}. \tag{4.5.7}$$

Wir können jetzt die Ableitung partiell integrieren, so daß sie auf das F wirkt. Allerdings bekommen wir dann zusätzlich einen divergenten Term, bei dem die Ableitung auf das $\boldsymbol{\phi}(\alpha)$ wirkt. Wir können dies entweder durch eine Renormierung von $\mathcal{Q}$ ausgleichen oder den Operator für $\mathcal{Q}$ von vornherein in der umgekehrten Ordnung definieren, also

$$\widehat{\mathcal{Q}} = -2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\varepsilon^{ij}\,\mathrm{Tr}\big(\widehat{\psi}_j\,\bar{\psi}_i\big). \tag{4.5.8}$$

Dann erscheint $\boldsymbol{\phi}(\alpha)$ in (4.5.7) bereits unter der Ableitung und wir bekommen keinen divergenten Term nach der partiellen Integration.

Natürlich können wir nur dann partiell integrieren, wenn der Operator $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\phi}\,\delta/\delta\boldsymbol{\phi})$ auch im Raum der quasiperiodischen Funktionen wirkt. Offensichtlich ist das der Fall, denn angewandt auf beide Seiten in (4.3.4) ergibt sich jeweils das gleiche, das heißt er leitet F in eine Richtung ab, die tangential zum Raum der quasiperiodischen Funktionen liegt, analog zu dem Impulsoperator (1.3.28), der tangential zur Gruppe wirkt. Übrigens ist das der Grund dafür, daß wir über ganz $\widetilde{\mathcal{N}}$ integrieren müssen und nicht nur über eine Plakette.

Die beiden Interpretationen der Funktion $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[e,\psi]$ führen also bis auf eine Renormierung zum selben Resultat. Im folgenden werden wir Operatoren stets nach der Vorschrift umrechnen, daß wir für eine gegebene Observable $\mathcal{O}$ in der e-ψ-Darstellung zuerst die Wirkung auf $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}[e,\psi]$ ermitteln und dann einen Operator in der $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}$ Darstellung bestimmen, der die gleiche Wirkung auf $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ erzeugt. Diesen werden wir dann in (4.3.10) formal partiell integrieren, wenn es ein Differentialoperator ist. Es gilt also

$$\widehat{\mathcal{Q}}\,\big|\,F\,\big\rangle = \Big|\int \mathrm{d}^2\alpha\,\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{\phi}\,\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{\phi}}\Big)\Big\rangle, \tag{4.5.9}$$

Da wir bereits gezeigt haben, daß F nur von den Moduli, also den Werten $\boldsymbol{g}_\lambda, \boldsymbol{g}_\kappa, \boldsymbol{\phi}_\lambda, \boldsymbol{\phi}_\kappa$ abhängt (wir beschränken uns hier wieder auf den Torus), können wir das Integral durch eine Summe über die primitiven Schleifen ersetzen

$$\widehat{\mathcal{Q}}\,\big|\,F\,\big\rangle = \Big|\,\mathrm{Tr}\Big(\boldsymbol{\phi}_\lambda\,\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\phi}_\lambda} + \boldsymbol{\phi}_\kappa\,\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\phi}_\kappa}\Big)\Big\rangle, \tag{4.5.10}$$

Daraus können wir sofort entnehmen, wie $\mathcal{Q}$ auf die Basis des Zustandsraumes des Torus wirkt. Es gibt einfach die Ordnung von F in den fermionischen Moduli an, es ist also eine Art "Fermionenzahl"-Operator, der die Eigenwerte 0, 2 und 4 annehmen kann.

Die Holonomien

Eine weiterer Satz von Observablen sind die auch in der reinen Gravitation vorhandenen Holonomien, womit wir die Spur des Transportoperators entlang einer Schleife bezeichnen. Wir hatten bereits gesehen, daß wegen der verschwindenden Krümmung der Wert des Transportoperators nur von der Homotopieklasse der Kurve abhängt und an der Enden unter Lorentz-Rotationen transformiert. Wenn wir für eine Schleife ϱ, die wir für den Torus immer in der Form $\varrho = \lambda^m \bullet \kappa^n$, $n, m \in \mathbb{Z}$, schreiben können, diese Spur bilden, erhalten wir einen Lorentz-invarianten Ausdruck

$$\mathcal{U}_\varrho = \mathcal{U}(m,n) = \mathrm{Tr}\big(U_\varrho(0,1)\big) = \mathrm{Tr}\big(U_\lambda(0,1)^m\, U_\kappa(0,1)^n\big). \qquad (4.5.11)$$

Die Größe hängt nur von $\boldsymbol{\omega}_i$ ab, vertauscht also auch mit den Erzeugern der Translationen und der Supersymmetrie.

Die $\mathcal{U}(m,n)$ bilden sogar eine Algebra, das heißt wir können jedes Produkt von ihnen als Summe schreiben:

$$\mathcal{U}(m,n)\,\mathcal{U}(p,q) = \mathcal{U}(n+p, m+q) + \mathcal{U}(n-p, m-q). \qquad (4.5.12)$$

Außerdem ist

$$\mathcal{U}(0,0) = 2, \quad \mathcal{U}(m,n) = \mathcal{U}(-m,-n). \qquad (4.5.13)$$

Diese Beziehungen folgen alle aus den Identitäten

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g})\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}') = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{g}'), \quad \boldsymbol{g}^{-1} + \boldsymbol{g} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g})\,\mathbf{1}, \quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}) \qquad (4.5.14)$$

für $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Matrizen.

Um die Quantendarstellung dieser Observablen auf dem physikalischen Zustandsraum zu ermitteln, sei wieder ein Zustand $|\,F\,\rangle$ gegeben. Wir betrachten jetzt die Darstellung (4.3.7) etwas genauer, da wir später noch ähnliche Berechnungen ausführen müssen. Untersuchen wir zuerst, wie ein Operator $U_\varrho(a,b)$ mit beliebigem Anfangs- und Endpunkt auf $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ wirkt. Es gilt

$$\widehat{U}_\varrho(a,b)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_a)\boldsymbol{g}(\varrho_b)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}, \qquad (4.5.15)$$

wobei ϱ_a die Kurve (bzw. deren Homotopieklasse) ist, die von $\bar{\boldsymbol{x}}$ entlang ϱ nach $\varrho(a)$ verläuft. Durch die Schleife ϱ in $\mathcal{N}$ wird also eine Kurve $s \longmapsto \varrho_s$ in $\widetilde{\mathcal{N}}$ definiert mit $\varrho_0 = \eta$, $\varrho_1 = \varrho$.

Man beachte, daß sich dieses Ergebnis eigentlich nicht direkt aus der Darstellung (4.3.7) ergibt, denn ϱ_a und ϱ_b müssen nicht in der gleichen Plakette in $\widetilde{\mathcal{N}}$ liegen; man muß die Schleife ϱ erst in Stücke zerlegen, die jeweils nur durch eine Plakette laufen, und kann dann die einzelnen Beiträge wieder zusammensetzen, indem man benutzt, daß $\boldsymbol{g}$ quasiperiodisch ist.

Für die Quantendarstellung der Holonomie bekommen wir also das erwartete Ergebnis

$$\widehat{\mathcal{U}}_\varrho\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \mathrm{Tr}\big(\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_0)\boldsymbol{g}(\varrho_1)\big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\varrho)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}. \qquad (4.5.16)$$

oder

$$\widehat{\mathcal{U}}(m,n)\,\Big|\,F\,\Big\rangle = \Big|\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\lambda{}^m\boldsymbol{g}_\kappa{}^n)\,F\,\Big\rangle \qquad (4.5.17)$$

Natürlich sind die Holonomien gerade die (hermiteschen) Operatoren, als deren Eigenvektoren wir die Basis im Abschnitt 3 definiert haben. Ihre Eigenwerte sind gebenen durch

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{U}}(m,n)\,|\,\mathbf{1}, z_\lambda, z_\kappa\,\rangle &= 2\,z_\lambda{}^m z_\kappa{}^n\,|\,\mathbf{1}, z_\lambda, z_\kappa\,\rangle,\\
\widehat{\mathcal{U}}(m,n)\,|\,\mathcal{L}, z_\lambda, z_\kappa, \theta\,\rangle &= 2\,z_\lambda{}^m z_\kappa{}^n\,|\,\mathcal{L}, z_\lambda, z_\kappa, \theta\,\rangle,\\
\widehat{\mathcal{U}}(m,n)\,|\,\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\,\rangle &= 2\,z_\lambda{}^m z_\kappa{}^n\,\cosh(ma+nb)\,|\,\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\,\rangle,\\
\widehat{\mathcal{U}}(m,n)\,|\,\mathcal{Z}, a, b\,\rangle &= 2\cos(ma+nb)\,|\,\mathcal{Z}, a, b\,\rangle.
\end{aligned} \qquad (4.5.18)$$

Wir erkennen daran, daß die Holonomien noch keine vollständige Menge von vertauschenden Observablen bilden, denn wir können nur den raumartigen Sektor vollständig bestimmen (da a, b und $-a, -b$ den gleichen Zustand repräsentieren), den zeitartigen Sektor aber nur bis auf ein Vorzeichen und zwischen den lichtartigen Zuständen und dem **1**-Zustand für gegebene z_λ, z_κ "sehen" die Holonomien gar keinen Unterschied.

Es muß also noch weitere Observable geben, die die Zustände unterscheiden können. Wir suchen dazu Observable, die den "alten" Koordinaten v^2, θ im Modulraum entsprechen. Es gilt zum Beipiel

$$v^2 = \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\lambda)^2 + \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\kappa)^2 - 2 = \tfrac{1}{4}\mathcal{U}(2,0) + \tfrac{1}{4}\mathcal{U}(0,2) - 1. \qquad (4.5.19)$$

Um zwei zeitartige Zustände mit umgekehrtem Vorzeichen zu unterscheiden, können wir die Observable

$$\mathcal{O} = \mathrm{sign}\Big(\mathrm{Tr}\big(U_\lambda(0,1)\gamma_0\big)\Big)\,\Theta(-v^2) \qquad (4.5.20)$$

einführen, wobei $\Theta(x) = 1$ ist für $x > 0$ und 0 sonst. Der Wert von $\mathcal{O}$ ist offenbar Null für raumartige und lichtartige Zustände und wird $+1$ für eine zeitartige Matrix $\boldsymbol{g}_\lambda = U_\lambda(0,1)$, die auf dem oberen Hyperboloid liegt und -1 für eine auf dem unteren. Ersetzen wir in $\mathcal{O}$ λ durch κ, so wissen wir auch, auf welchem Teil $\boldsymbol{g}_\kappa$ liegt und können aus den Holonomien a und b eindeutig bestimmen.

Natürlich sollten wir noch zeigen, daß $\mathcal{O}$ wirklich eine Observable ist, also invariant unter Lorentz-Rotationen. Das folgt aber sofort daraus, daß diese eine Matrix nicht von dem oberen auf den unteren Teil des zeitartigen Hyperboloids transportieren können. Für den lichtartigen Sektor müßten wir noch ähnliche Observable konstruieren, um den Winkel θ zu bestimmen, und schließlich noch eine Observable, die zwischen drei verschiedenen fermionischen "Anregungen" des $|\,\mathbf{1},+,+\,\rangle$-Zustandes unterscheidet, die alle drei die Ladung $Q = 2$ haben.

Die Holonomien selbst bilden also *kein* vollständiges System von kommutierenden Observablen, auch nicht, wenn wir die Fermionen weglassen. Daß heißt nicht jeder physikalischer Zustand kann durch eine Funktion F dargestellt werden, die nur von den $\mathcal{U}_\varrho$ abhängt. Dies wäre aber die Voraussetzung dafür, daß eine "Schleifendarstellung" existiert, in der die Zustände aus einem "Vakuum" $|\,0,0\,\rangle$ durch Multiplikation mit der Algebra der $\mathcal{U}(m,n)$ hervorgehen. Doch selbst wenn $|\, m,n \rangle = \widehat{\mathcal{U}}(m,n) |\, 0,0 \rangle$ eine vollständige Basis des physikalischen Zustandsraumes bilden würde, so wäre es doch eine sehr unhandliche, denn die $\mathcal{U}(m,n)$ sind unbeschränkte hermitesche Operatoren und es ist zunächst nicht klar, ob es einen Zustand $|\, 0,0 \rangle$ gibt, für den alle $|\, m,n \rangle$ normierbar werden. Wir werden darauf nach Konstruktion des Skalarproduktes noch einmal zurückkommen, denn dann wissen wir, welche Zustände normierbar sind und welche nicht.

Die konjugierten Observablen

Wir wollen nun die zu den $\mathcal{U}_\varrho$ konjugierten Variablen finden. In der reinen Gravitation sind sie gegeben durch

$$\mathcal{V}_\varrho^{(1)} = \int_0^1 \mathrm{d}s \, \mathrm{Tr}\big(U_\varrho(0,s)\,\gamma_s\, U_\varrho(s,1)\big), \tag{4.5.21}$$

wobei wir γ_s als Abkürzung für $\dot{\varrho}^i(s)\gamma_i(\varrho(s))$ verwendet haben. Später benutzen wir entsprechend die Abkürzungen ψ_s etc.

Die Funktion $\mathcal{V}_\varrho^{(1)}$ ist offenbar wieder Lorentz-invariant, vertauscht also mit $\boldsymbol{L}_a$. Sie ist auch invariant unter Translationen, denn es gilt

$$-\int_0^1 \mathrm{d}s \, D_s n^a \, \mathrm{Tr}\big(U_\varrho(0,s)\,\gamma_a\, U_\varrho(s,1)\big) = 0. \tag{4.5.22}$$

Hier wie im folgenden benutzen wir stets, daß die kovariante Ableitung D_s auf dem Transportoperator verschwindet, so daß nach einer partiellen Integration nur die Randterme übrig bleiben, die sich hier aber einfach gegenseitig wegheben.

Nun ist $\mathcal{V}_\varrho^{(1)}$ aber nicht invariant unter Supersymmetrie. Man findet

$$\begin{aligned}\big\{\mathcal{V}_\varrho^{(1)}, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\big\} &= \int_0^1 \mathrm{d}s \, \mathrm{Tr}\big(U_\varrho(0,s)\gamma_a U_\varrho(s,1)\big)\, \bar{\psi}_s \gamma^a \epsilon \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}s \, \mathrm{Tr}\big(U_\varrho(0,1)\big)\, \bar{\psi}_s \epsilon + 2\int_0^1 \mathrm{d}s \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,1) U_\varrho(0,s)\epsilon,\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

wobei wir die Vollständigkeitrelation der γ-Matrizen (4.1.33) benutzt haben. Wir verwenden auch wieder die Konvention, daß Felder, die mit den Transportoperatoren multipliziert werden, an dem jeweiligen Endpunkt zu nehmen sind, hier also jeweils $\epsilon(\varrho(s))$.

Um diesen Term zu kompensieren, müssen wir $\mathcal{V}_\varrho$ um einen Beitrag, den von den Gravitinos abhängt, erweitern. Der einfachste denkbare Funktion wäre

$$\mathcal{V}_\varrho^{(2)} = \int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^1 \mathrm{d}s' \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,s') \psi_{s'}. \tag{4.5.24}$$

Berechnen wir die Klammer mit $\bar{\boldsymbol{S}}$, so erhalten wir (indem wir wieder eine partielle Integration durchführen, bei der nur die Randterme übrig bleiben)

$$\begin{aligned}\big\{\mathcal{V}^{(2)}, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\big\} &= -\int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^1 \mathrm{d}s' \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,s') D_{s'} \bar{\epsilon} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}s \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,0)\bar{\epsilon} - \int_0^1 \mathrm{d}s \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,1)\bar{\epsilon}.\end{aligned} \tag{4.5.25}$$

Das ergibt leider keinen Term, der sich gegen (4.5.23) weghebt, denn dort tritt nicht nur ϵ an der Stelle $\varrho(0) = \varrho(1) = \bar{x}$ auf, sondern entlang der ganzen Kurve. Um einen solchen Term zu bekommen, brauchen wir ein Integral der Form

$$\mathcal{V}_\varrho^{(3)} = \int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^s \mathrm{d}s' \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,1) U_\varrho(0,s') \psi_{s'}. \tag{4.5.26}$$

Tatsächlich erhalten wir jetzt die Klammer

$$\begin{aligned}\big\{\mathcal{V}^{(3)}, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\big\} &= -\int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^s \mathrm{d}s' \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,1) U_\varrho(0,s') D_{s'} \bar{\epsilon} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}s \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,1)\bar{\epsilon} - \int_0^1 \mathrm{d}s \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,1) U_\varrho(0,s)\bar{\epsilon},\end{aligned} \tag{4.5.27}$$

und der zweite Term ist von der gleichen Form wie der Term in (4.5.23), jedoch um einen Faktor 2 zu klein. Der andere Term hebt sich genau gegen einen aus der Klammer von $\mathcal{V}^{(2)}$ weg.

Nun ist $\mathcal{V}^{(3)}$ nicht mehr reell, das heißt wir sollten noch den konjugierten Term

$$\mathcal{V}_\varrho^{(4)} = \int_0^1 \mathrm{d}s \int_s^1 \mathrm{d}s' \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,0) U_\varrho(1,s') \psi_{s'} \tag{4.5.28}$$

hinzunehmen. Dessen Klammer mit $\bar{\boldsymbol{S}}$ ist

$$\begin{aligned}\big\{\mathcal{V}^{(4)}, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\big\} &= -\int_0^1 \mathrm{d}s \int_s^1 \mathrm{d}s' \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,0) U_\varrho(1,s') D_{s'} \bar{\epsilon} \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}s \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,0)\bar{\epsilon} + \int_0^1 \mathrm{d}s \, \bar{\psi}_s U_\varrho(s,0) U_\varrho(1,s)\bar{\epsilon}.\end{aligned} \tag{4.5.29}$$

Der erste Term hebt sich wieder gegen den aus der Klammer von $\mathcal{V}^{(2)}$ weg.

Definieren wir nun die Funktion

$$\mathcal{V}_\varrho = \mathcal{V}_\varrho^{(1)} + \mathcal{V}_\varrho^{(2)} + \mathcal{V}_\varrho^{(3)} + \mathcal{V}_\varrho^{(4)}, \tag{4.5.30}$$

und sammeln wir alle noch verbleibenden Beiträge zusammen, so gilt

$$\{\mathcal{V}_\varrho, \bar{\boldsymbol{S}}[\epsilon]\} = \int_0^1 \mathrm{d}s \Big(-\operatorname{Tr}\big(U_\varrho(0,1)\big)\,\bar{\psi}_s\epsilon + \psi_s U_\varrho(s,1)U_\varrho(0,s)\epsilon + \psi_s U_\varrho(s,0)U_\varrho(1,s)\epsilon\Big) \tag{4.5.31}$$

Wenn wir die Identität $\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}^{-1} = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{g})\,\mathbf{1}$ benutzen, sehen wir, daß sich alle Terme gegenseitig wegheben. Da $\mathcal{V}_\varrho$ reell ist, verschwindet auch die Klammer mit $\boldsymbol{S}[\bar{\epsilon}]$, das heißt $\mathcal{V}_\varrho$ ist tatsächlich eine Observable. Bezeichnen wir sie für $\varrho = \lambda^m \bullet \kappa^n$ mit $\mathcal{V}(m,n)$.

Um die Klammern der $\mathcal{U}$'s mit den $\mathcal{V}$'s zu bestimmen, benötigen wir die Relation

$$\{U_\varrho(a,b), e_j{}^a(\boldsymbol{x})\} = \tfrac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}s\,\dot{\varrho}^i\varepsilon_{ij}\delta(\varrho(s),\boldsymbol{x})\,U_\varrho(a,s)\gamma^a U_\varrho(s,b). \tag{4.5.32}$$

Damit bekommen wir

$$\{\mathcal{U}_\varrho, \mathcal{V}_{\varrho'}\} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}s\,\dot{\varrho}^i \int_0^1 \mathrm{d}s'\,\dot{\varrho}'^j\,\varepsilon_{ij}\delta(\varrho(s),\varrho'(s')) \times \times\operatorname{Tr}\big(U_\varrho(0,s)\gamma_a U_\varrho(s,1)\big)\operatorname{Tr}\big(U_{\varrho'}(0,s')\gamma^a U_{\varrho'}(s',1)\big) \tag{4.5.33}$$

Benutzen wir hier wieder die Vollständigkeitsrelation für die γ-Matrizen in der Form $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{g}\gamma_a)\operatorname{Tr}(\boldsymbol{g}'\gamma^a) = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') - \operatorname{Tr}(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'^{-1})$, so können wir das Produkt der beiden Spuren schreiben als

$$\operatorname{Tr}\big(U_\varrho(s,1)U_\varrho(0,s)U_{\varrho'}(s',1)U_{\varrho'}(0,s')\big) - \operatorname{Tr}\big(U_\varrho(s,1)U_\varrho(0,s)U_{\varrho'}(s',0)U_{\varrho'}(1,s')\big) \tag{4.5.34}$$

In der ersten Spur bilden wir die Holonomie einer Kurve, die zuerst entlang ϱ bis zu einem Schnittpunkt mit ϱ' verläuft, dann entlang dieser bis zurück zu dem Schnittpunkt und anschließend wieder entlang ϱ. Für die zweite gilt das gleiche, nur daß die Schleife ϱ' in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

Da wir auf dem Torus die Reihenfolge dieser Schleifen beliebig verändern können, hängt der Term gar nicht von dem jeweiligen Schnittpunkt ab, an dem wir "abbiegen", wir bekommen einfach

$$\{\mathcal{U}_\varrho, \mathcal{V}_{\varrho'}\} = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}s\,\dot{\varrho}^i \int \mathrm{d}s'\,\dot{\varrho}'^j\,\varepsilon_{ij}\delta(\varrho(s),\varrho'(s'))\big(\mathcal{U}_{\varrho\bullet\varrho'} - \mathcal{U}_{\varrho\bullet\varrho'^{-1}}\big). \tag{4.5.35}$$

Das Integral

$$\cap(\alpha,\beta) = \int \mathrm{d}s\,\dot{\alpha}\int \mathrm{d}s'\,\dot{\beta}^j\,\varepsilon_{ij}\delta(\alpha(s),\beta(s')) \tag{4.5.36}$$

ist nichts anderes als die Anzahl der (orientierten) Schnittpunkte von zwei Kurven α, β. Man beachte, daß dies zunächst nicht nur von der Homotopieklasse abhängt. Wenn jedoch einer der Einträge eine Schleife ist, hängt der Wert nur noch von der Homotopieklasse des anderen Eintrags ab und für zwei Schleifen schließlich nur noch von deren Homotopieklasse. Außerdem ist das Integral im Gegensatz zu seinem Analogon in drei Raum-Dimensionen eine wohldefinierte Zahl, während es dort eine distributionswertige 1-Form ist: Es tritt dort nämlich die dreidimensionale Delta-Funktion auf und der ε-Tensor hat einen zusätzlichen Index.[5]

Die Schleifen-Observablen in zwei Raum-Dimensionen sind also nicht nur Observable im Sinne von Dirac, sondern sie haben auch wohldefinierte einfache Klammern. Wählen wir die Orientierung der Schleifen so, daß $\cap(\lambda,\kappa) = 1$ ist, so gilt

$$\cap(\lambda^m \bullet \kappa^n, \lambda^p \bullet \kappa^q) = mq - np, \tag{4.5.37}$$

und wir bekommen die folgenden Poisson-Klammer für die Observablen:

$$\{\mathcal{V}(m,n), \mathcal{U}(p,q)\} = \tfrac{1}{2}(mq - np)\big(\mathcal{U}(m+p, n+q) - \mathcal{U}(m-p, n-q)\big). \tag{4.5.38}$$

Um die Operatoren auf dem physikalischen Zustandsraum zu finden, bestimmen wir wieder die Wirkung der Operatoren für $\mathcal{V}_\varrho$ auf $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$. Wir finden unter Verwendung von (4.5.15) und einigen partiellen Integrationen, die wieder nur Randterme liefern,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{V}}_\varrho^{(1)}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= \int \mathrm{d}s\,\operatorname{Tr}\big(\boldsymbol{g}(\varrho_s)\gamma_s\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\boldsymbol{g}(\varrho)\big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}},\\
\widehat{\mathcal{V}}_\varrho^{(2)}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= \int \mathrm{d}s\,\bar{\psi}_s\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\boldsymbol{\phi}(\varrho)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}},\\
\widehat{\mathcal{V}}_\varrho^{(3)}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= \int \mathrm{d}s\,\bar{\psi}_s\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\boldsymbol{g}(\varrho)\boldsymbol{\phi}(\varrho_s)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}},\\
\widehat{\mathcal{V}}_\varrho^{(4)}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} &= \int \mathrm{d}s\,\bar{\psi}_s\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho)\big(\boldsymbol{\phi}(\varrho) - \boldsymbol{\phi}(\varrho_s)\big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}.
\end{aligned} \tag{4.5.39}$$

Wir haben außerdem noch benutzt, daß $\boldsymbol{\phi}(\varrho_0) = \boldsymbol{\phi}(\eta) = 0$ ist und $\boldsymbol{g}(\varrho_0) = \mathbf{1}$. Einige der Terme können wir noch zusammenfassen, indem wir (4.3.4) benutzen:

$$\widehat{\mathcal{V}}_\varrho\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \int \mathrm{d}s\,\operatorname{Tr}\big(\gamma_s\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\boldsymbol{g}(\varrho)\boldsymbol{g}(\varrho_s)\big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}, + \int \mathrm{d}s\,\bar{\psi}_s\boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\big(\boldsymbol{\phi}(\varrho\bullet\varrho_s) - \boldsymbol{\phi}(\varrho^{-1}\bullet\varrho_s)\big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}. \tag{4.5.40}$$

[5] Hier liegt der Grund dafür, daß die in [16] eingeführte Schleifendarstellung in drei Raum-Dimensionen keine vollständige Regularisierung der Zwangsbedingungen liefert, denn die Kommutatoren von Operatoren enthalten immer noch Distributionen, während wir hier die wohldefinierte diskrete Struktur (4.5.38) bekommen. Es ist also fraglich, ob sich die sehr nützlichen Eigenschaften der Schleifen-Variablen einfach von drei nach vier Raumzeit-Dimensionen übertragen.

Wir können die Spur noch in der gleichen Form wie den Gravitinoterm schreiben, indem wir $\boldsymbol{g}_\varrho$ ersetzen durch $\frac{1}{2}(\boldsymbol{g}_\varrho - \boldsymbol{g}_\varrho^{-1})$, was bis auf einen Term proportional zu $\mathbf{1}$ identisch ist. Dieser verschwindet aber, weil die Spur von $\boldsymbol{g}\gamma_s\boldsymbol{g}^{-1}$ gleich Null ist. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_\varrho\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}s\, \mathrm{Tr}\Big\{\gamma_s \boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\Big(\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\varrho_s) - \boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\varrho_s)\Big)\Big\}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}\,, \\ + \int \mathrm{d}s\, \bar{\psi}_s \boldsymbol{g}^{-1}(\varrho_s)\Big(\boldsymbol{\phi}(\varrho\bullet\varrho_s) - \boldsymbol{\phi}(\varrho^{-1}\bullet\varrho_s)\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \tag{4.5.41}$$

Wir müssen nun einen Operator bestimmen, der auf die Felder $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}$ wirkt und auf $\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}$ die gleiche Wirkung hat, und den wir dann wieder auf das F anwenden können. Man findet, daß

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_\varrho\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = -\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\alpha\, \cap(\alpha,\varrho)\, \mathrm{Tr}\Big\{\Big(\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\Big)\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{g}(\alpha)}\Big\}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} \\ - \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\alpha\, \cap(\alpha,\varrho)\, \mathrm{Tr}\Big\{\Big(\boldsymbol{\phi}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{\phi}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\Big)\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\phi}(\alpha)}\Big\}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \tag{4.5.42}$$

Bevor wir zeigen, daß das tatsächlich mit (4.5.41) übereinstimmt, müssen wir erst überprüfen, ob der Operator überhaupt wohldefiniert ist, daß er also auf dem Raum der quasiperiodischen Funktionen wirkt, und daß er überhaupt auf $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ wirkt, was aus der gegebenen Darstellung nicht offensichtlich ist.

Es muß also gelten

$$\widehat{\mathcal{V}}_\varrho \det(\boldsymbol{g}(\alpha)) = 0. \tag{4.5.43}$$

Wegen $\partial\det(\boldsymbol{g}) = \det(\boldsymbol{g})\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}^{-1}\partial\boldsymbol{g})$ für jede 2×2-Matrix bekommen wir

$$\widehat{\mathcal{V}}_\varrho \det(\boldsymbol{g}(\alpha)) = \mathrm{Tr}\Big\{\boldsymbol{g}^{-1}(\alpha)\Big(\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\Big)\Big\} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\varrho - \boldsymbol{g}_\varrho^{-1}) = 0. \tag{4.5.44}$$

Indem man $\mathcal{V}_\varrho$ auf die Definition (4.3.4) anwendet, bekommt man

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_\varrho\, \boldsymbol{g}(\lambda\bullet\alpha) &= \cap(\lambda\bullet\alpha,\varrho)\Big(\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\lambda\bullet\alpha) - \boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\lambda\bullet\alpha)\Big), \\ \widehat{\mathcal{V}}_\varrho\, \boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{g}(\alpha) &= \cap(\lambda,\varrho)\Big(\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\lambda)\boldsymbol{g}(\alpha) - \boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\lambda)\boldsymbol{g}(\alpha)\Big) \\ &\quad + \cap(\alpha,\varrho)\Big(\boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\Big). \end{aligned} \tag{4.5.45}$$

Benutzt man die Additivität von $\cap$, also $\cap(\lambda,\varrho)+\cap(\alpha,\varrho) = \cap(\lambda\bullet\alpha,\varrho)$ sowie die Tatsache, daß $\boldsymbol{g}(\lambda)$ und $\boldsymbol{g}(\varrho)$ vertauschen, so werden die beiden rechten Seiten gleich, $\mathcal{V}_\varrho$ wirkt also tangential zum Raum der quasiperiodischen Funktionen. Genauso kann man zeigen, daß die Relation $\boldsymbol{\phi}(\lambda\bullet\alpha) = \boldsymbol{g}(\lambda)\boldsymbol{\phi}(\alpha) + \boldsymbol{\phi}(\lambda)$ erhalten bleibt.

$\mathcal{V}_\varrho$ ist also ein wohldefinierter Operator auf dem Raum der quasiperiodischen Funktionen. Allerdings hängt er nicht nur von der Homotopieklasse von ϱ ab sondern von deren expliziten Repräsentanten, denn die Schnittzahl $\cap(\alpha,\varrho)$ ist nur dann invariant innerhalb der Homotopieklasse von ϱ, wenn α keine "Enden" hat, also auch eine Schleife ist. Nun wird der Operator aber auf ein Funktional $F[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}]$ wirken, von dem wir bereits gezeigt haben, daß es nur von den Feldern an den Stellen λ und κ, den primitiven Schleifen, abhängt, daß heißt die Ableitung $\delta/\delta\boldsymbol{g}(\alpha)$ liefert nur dann einen Beitrag, wenn α eine primitive Scheife ist und dann ist der Wert von $\cap(\alpha,\varrho)$ nicht mehr von der speziellen Wahl von ϱ abhängig.

Um die rechte Seite von (4.5.42) zu berechnen, müssen wir aber eine bestimmte Schleife ϱ festlegen, so daß $\cap(\alpha,\varrho)$ für $\alpha\in\widetilde{\mathcal{N}}$ eindeutig ist. Wir werten dann die rechte Seite aus und bekommen

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_\varrho\, \Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\partial_i\cap(\alpha,\varrho)\, \mathrm{Tr}\Big\{\boldsymbol{g}^{-1}(\alpha)\Big(\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\Big)\gamma_j\Big\}\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}} \\ + \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \varepsilon^{ij}\partial_i\cap(\alpha,\varrho)\, \bar{\psi}_j \boldsymbol{g}^{-1}(\alpha)\Big(\boldsymbol{\phi}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{\phi}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\Big)\,\Psi_{\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \tag{4.5.46}$$

Das Integral über $\int \mathrm{d}^2\alpha$ ist wieder auf eine Plakette $\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}$ reduziert worden, wobei $\boldsymbol{x}$ der Endpunkt von α ist. Die Gleichung hat bereits die gleiche Struktur wie (4.5.41), jedoch wird hier über ganz $\mathcal{N}$ integriert und nicht nur entlang der Schleife ϱ. Um das Integral weiter auszuwerten, müssen wir die Ableitung $\partial_i\cap(\alpha,\varrho)$ bestimmen.

Wir variieren also die Kurve α mitsamt ihrem Endpunkt $\boldsymbol{x} = \alpha(1)$ und bestimmen die Variation von $\cap(\alpha,\varrho)$. Es ist

$$\begin{aligned}\delta\cap(\alpha,\varrho) &= \delta\int_0^1 \mathrm{d}s\, \dot{\alpha}^i(s)\int_0^1 \mathrm{d}s'\, \dot{\varrho}^j(s')\,\varepsilon_{ij}\,\delta(\alpha(s),\varrho(s')) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}s\int_0^1 \mathrm{d}s'\,\Big(\delta\dot{\alpha}^i\,\dot{\varrho}^j\,\varepsilon_{ij}\delta(\alpha,\varrho) + \dot{\alpha}^i\,\dot{\varrho}^j\,\delta\alpha^k\,\varepsilon_{ij}\partial_k\delta(\alpha,\varrho)\Big), \end{aligned} \tag{4.5.47}$$

wobei ϱ immer an der Stelle s' und α an der Stelle s zu nehmen ist. Integrieren wir im ersten Term die Ableitung auf $\delta\alpha$ partiell, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta\cap(\alpha,\varrho) &= \int_0^1 \mathrm{d}s'\,\delta\boldsymbol{x}^i\,\dot{\varrho}^j\,\varepsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x},\varrho(s')) \\ &\quad + \int_0^1 \mathrm{d}s\int_0^1 \mathrm{d}s'\,\big(\dot{\alpha}^i\,\dot{\varrho}^j\,\delta\alpha^k - \dot{\alpha}^k\,\dot{\varrho}^j\,\delta\alpha^i\big)\,\varepsilon_{ij}\partial_k\delta(\alpha(s),\varrho(s')), \end{aligned} \tag{4.5.48}$$

wobei wir für den Endpunkt von α wieder $\boldsymbol{x}$ eingesetzt und den Anfangspunkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ festgehalten haben. Das zweite Integral verschwindet nun, denn wir können aus den drei zweidimensionalen Indizes die total antisymmetrische Form bilden, indem wir noch einen Term hinzunehmen, bei dem der Index k an $\dot{\varrho}^k$ sitzt. Dies ergibt dann die Ableitung der Delta-Funktion nach s', also eine totale Divergenz. Da ϱ eine geschlossene Schleife ist, verschwindet das Integral über s'.

Wir haben damit gezeigt, daß $\cap(\alpha,\varrho)$ für eine fest gegebene Schleife tatsächlich nur von der Homotopieklasse von α abhängt und daß

$$\partial_i \cap(\alpha,\varrho) = \int_0^1 \mathrm{d}s\, \dot{\varrho}^j\, \varepsilon_{ij}\, \delta(\boldsymbol{x}, \varrho(s)) \tag{4.5.49}$$

ist, wobei sich die Ableitung ∂_i auf den Endpunkt $\boldsymbol{x}$ von α bezieht. Wenn wir das mit irgendeiner Funktion von $\boldsymbol{x}$ multiplizieren und über $\mathcal{N}$ integrieren, sammeln wir also gerade die Beiträge entlang der Schleife ϱ auf. Da wir in (4.5.46) genau über eine Plakette integrieren, wird dabei auch die Schleife ϱ genau einmal durchlaufen und wir bekommen (4.5.41) zurück.

Wir können den Operator in (4.5.46) jetzt wieder im bekannten Sinne "partiell integrieren", so daß er (mit umgekehrtem Vorzeichen) auf F wirkt:

$$\widehat{\mathcal{V}}_\varrho \,|\, F\,\rangle = |\, \widetilde{F}\,\rangle, \tag{4.5.50}$$

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{F} = \tfrac{1}{2} &\int \mathrm{d}^2\alpha \cap(\alpha,\varrho)\, \mathrm{Tr}\Big\{\big(\boldsymbol{g}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{g}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\big)\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{g}(\alpha)}\Big\} \\ + \tfrac{1}{2} &\int \mathrm{d}^2\alpha \cap(\alpha,\varrho)\, \mathrm{Tr}\Big\{\big(\boldsymbol{\phi}(\varrho\bullet\alpha) - \boldsymbol{\phi}(\varrho^{-1}\bullet\alpha)\big)\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{\phi}(\alpha)}\Big\}\end{aligned} \tag{4.5.51}$$

Da F nur von den Werten $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}$ an den primitiven Schleifen λ, κ abhängt, bleibt von dem Integral nur eine Summe über diese Schleifen übrig. Setzen wir $\varrho = \lambda^m \bullet \kappa^n$, dann ist $\cap(\lambda,\varrho) = n$, $\cap(\kappa,\varrho) = -m$ und

$$\begin{aligned}\widetilde{F} = \tfrac{1}{2} n\, \mathrm{Tr}\Big\{(\boldsymbol{g}_{\varrho\bullet\lambda} - \boldsymbol{g}_{\varrho^{-1}\bullet\lambda})\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{g}_\lambda} + (\boldsymbol{\phi}_{\varrho\bullet\lambda} - \boldsymbol{\phi}_{\varrho^{-1}\bullet\lambda})\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\phi}_\lambda}\Big\} \\ -\tfrac{1}{2} m\, \mathrm{Tr}\Big\{(\boldsymbol{g}_{\varrho\bullet\kappa} - \boldsymbol{g}_{\varrho^{-1}\bullet\kappa})\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{g}_\kappa} + (\boldsymbol{\phi}_{\varrho\bullet\kappa} - \boldsymbol{\phi}_{\varrho^{-1}\bullet\kappa})\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\phi}_\kappa}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.5.52}$$

Wenn wir richtig gerechnet haben, sollten wir nun die Poisson-Klammer (4.5.38) als Kommutator wiederfinden. Der Kommutator ist

$$\big[\widehat{\mathcal{V}}(m,n), \widehat{\mathcal{U}}(p,q)\big] \,|\, F\,\rangle = |\, \widetilde{F}\, F\,\rangle, \tag{4.5.53}$$

wobei $\widetilde{F}$ aus (4.5.52) bestimmt ist, wenn wir dort F durch $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\lambda{}^p \boldsymbol{g}_\kappa{}^q)$ ersetzen. Man findet (mit $\varrho = \lambda^m \bullet \kappa^n$)

$$\begin{aligned}\widetilde{F} &= \tfrac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\Big\{n(\boldsymbol{g}_{\varrho\bullet\lambda} - \boldsymbol{g}_{\varrho^{-1}\bullet\lambda})\frac{\partial \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\lambda{}^p \boldsymbol{g}_\kappa{}^q)}{\partial \boldsymbol{g}_\lambda} - m(\boldsymbol{g}_{\varrho\bullet\kappa} - \boldsymbol{g}_{\varrho^{-1}\bullet\kappa})\frac{\partial \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\lambda{}^p \boldsymbol{g}_\kappa{}^q)}{\partial \boldsymbol{g}_\kappa}\Big\} \\ &= \tfrac{1}{2}(np - mq)\, \mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\lambda{}^{p+m} \boldsymbol{g}_\kappa{}^{q+n} - \boldsymbol{g}_\lambda{}^{p-m} \boldsymbol{g}_\kappa{}^{q-n}) \\ &= \tfrac{1}{2}(np - mq)\,\big(\mathcal{U}(m+p, n+q) - \mathcal{U}(m-p, n-q)\big),\end{aligned} \tag{4.5.54}$$

was tatsächlich dem $-\mathrm{i}$-fachen der Klammer (4.5.38) entspricht. Die Observablen bilden damit eine Algebra von wohldefinierten Operatoren auf dem physikalischen Zustandsraum, obwohl die Ableitung stellenweise etwas formal war. Das Ergebnis ist das gleiche, das wir auch bekommen hätten, wenn wir die klassischen Zwangsbedingungen vollständig gelöst und dann die verbleibenden Freiheitsgrade als endlich-dimensionales System quantisiert hätten.

Der Vorteil des hier durchgeführten Verfahrens ist jedoch, daß wir zur Konstruktion des Zustandsraumes die klassischen Zwangsbedingungen gar nicht *vollständig* lösen mußten, sondern in gewissem Sinne nur zur Hälfte. Wir haben zwar jetzt noch kein vollständiges System von Observablen (das entspräche ja genau der vollen Lösung der klassischen Zwangsbedingungen), aber wir kennen den ganzen Zustandsraum und können daher auch einen Teil der Observablen als Operatoren darstellen, ohne den vollen Satz kennen zu müssen.

6. Das Skalarprodukt

Zum Abschluß der Beschreibung der dreidimensionalen reinen Supergravitation wollen wir zeigen, wie man auf dem physikalischen Zustandsraum ein Skalarprodukt einführen kann, so daß dieser zu einem Hilbertraum wird. Wir betrachten dazu nur die reine Gravitation. Die Produkte von Zuständen mit nicht verschwindender Ladung $\mathcal{Q}$ kann man dann im Prinzip durch Ausnutzen der Vertauschungsrelationen von ϕ und $\bar{\phi}$ bestimmen.

Die Basis des Zustandsraumes ist also durch die Zustände

$$|\,\mathbf{1}, z_\lambda, z_\kappa\,\rangle, \quad |\,\mathcal{L}, z_\lambda, z_\kappa, \theta\,\rangle, \quad |\,\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\,\rangle, \quad |\,\mathcal{Z}, a, b\,\rangle. \tag{4.6.1}$$

gegeben. Das Skalarprodukt muß so beschaffen sein, daß die Observablen aus dem letzten Abschnitt, die alle reelle Größen repräsentieren, zu hermiteschen Operatoren werden. Wir kennen bereits die Wirkung der $\mathcal{U}$'s auf diese Zustände, denn sie waren als Eigenzustände definiert (siehe (4.5.18).)

Da wir nicht genug Observable eingeführt haben, um alle Zustände nach den Eigenwerten von kommutierenden hermiteschen Operatoren zu klassifizieren, haben wir noch nicht genug Information, um das Skalarprodukt zu fixieren. Wir hatten aber die Basis so gewählt, daß die einzelnen Zustände jeweils durch reelle Parameter charakterisiert wurden. Wir gehen also davon aus, daß es im Prinzip möglich ist, ein vollständiges System von vertauschenden reellen Observablen anzugeben, die als Eigenvektoren gerade die Basiszustände haben.

Wenn wir das Produkt durch

$$\langle\,\mathbf{1}, z_\lambda, z_\kappa \,|\, \mathbf{1}, z_\lambda, z_\kappa\,\rangle = 1 \tag{4.6.2}$$

normieren, können also nur noch folgende von Null verschiedene Produkte auftreten:

$$\begin{aligned}\langle\,\mathcal{L}, z_\lambda, z_\kappa, \theta \,|\, \mathcal{L}, z_\lambda, z_\kappa, \theta'\,\rangle &= \delta(\theta - \theta')\, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\theta), \\ \langle\,\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b \,|\, \mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, c, d\,\rangle &= \big(\delta(a-c)\,\delta(b-d) + \delta(a+c)\,\delta(b+d)\big)\, \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(a,b), \\ \langle\,\mathcal{Z}, a, b \,|\, \mathcal{Z}, c, d\,\rangle &= \delta(a-c)\,\delta(b-d)\, \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(a,b).\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Hier mußten wir berücksichtigen, daß die Parametrisierung für die raumartigen Zustände zweideutig ist. Um die reellen Funktionen $\mathcal{F}_\mathcal{L}, \mathcal{F}_\mathcal{R}, \mathcal{F}_\mathcal{Z}$ zu bestimmen, müssen wir nun verlangen, daß auch die Operatoren $\mathcal{V}(m,n)$ hermitesch werden. Wir betrachten dazu nur den raumartigen Bereich. Für den zeitartigen Bereich ist die Rechnung völlig analog, nur daß wir überall cosh und sinh durch cos und sin ersetzen müssen. Über die Funktion $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ können wir keine weiteren Aussagen machen, denn dazu kennen wir nicht genug Observable.

Um festzustellen, wie die Operatoren $\mathcal{V}(m,n)$ auf einen Zustand $\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle$ wirken, gehen wir am einfachsten von der Vertauschungsrelation (4.5.54) aus. Wir verwenden dazu

$$\widehat{\mathcal{U}}(p,q)\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle = 2{z_\lambda}^m {z_\kappa}^n \cosh(pa+qb)\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle, \tag{4.6.4}$$

und daß wir wissen, wie der Kommutator von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{U}$ wirkt:

$$\begin{aligned}&\left[\widehat{\mathcal{V}}(m,n),\widehat{\mathcal{U}}(p,q)\right]\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle\\ &\qquad= \tfrac{\mathrm{i}}{2}(np-mq)\big(\widehat{\mathcal{U}}(m+p,n+q)-\widehat{\mathcal{U}}(m-p,n-q)\big)\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle\\ &\qquad= \mathrm{i}{z_\lambda}^{m+p}{z_\kappa}^{n+q}(np-mq)\Big(\cosh(ma+nb+pa+qb)\\ &\qquad\qquad\qquad -\cosh(ma+nb-pa-qb)\Big)\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

Benutzen wir die Formel

$$\cosh(x+y)-\cosh(x-y) = 2\sinh x \sinh y, \tag{4.6.6}$$

so können wir das umschreiben zu

$$\begin{aligned}&\left[\widehat{\mathcal{V}}(m,n),\widehat{\mathcal{U}}(p,q)\right]\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle\\ &= 2\mathrm{i}{z_\lambda}^{m+p}{z_\kappa}^{n+q}(np-mq)\sinh(ma+nb)\sinh(pa+qb)\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle\\ &= \mathrm{i}{z_\lambda}^m{z_\kappa}^n\sinh(ma+nb)\left\{\Big(n\frac{\partial}{\partial a}-m\frac{\partial}{\partial b}\Big)\big(2{z_\lambda}^p{z_\kappa}^q\cosh(pa+qb)\big)\right\}\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

In der letzen Klammer steht wieder die Wirkung von $\mathcal{U}(p,q)$ auf den Zustand, so daß wir direkt den Operator für $\mathcal{V}(m,n)$ ablesen können:

$$\widehat{\mathcal{V}}(m,n)\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle = \mathrm{i}{z_\lambda}^m{z_\kappa}^n\sinh(ma+nb)\Big(n\frac{\partial}{\partial a}-m\frac{\partial}{\partial b}\Big)\left|\mathcal{R}, z_\lambda, z_\kappa, a, b\right\rangle. \tag{4.6.8}$$

Genauso findet man die Darstellung auf den zeitartigen Zuständen

$$\widehat{\mathcal{V}}(m,n)\left|\mathcal{Z}, a, b\right\rangle = \mathrm{i}\sin(ma+nb)\Big(n\frac{\partial}{\partial a}-m\frac{\partial}{\partial b}\Big)\left|\mathcal{Z}, a, b\right\rangle. \tag{4.6.9}$$

Die Bestimmung von $\mathcal{F}$ führen wir nun anhand der zeitartigen Zustände durch, auch hier ist die Rechnung für die raumartigen völlig analog. Die Bedingung lautet

$$\left\langle \mathcal{Z}, a, b\,\middle|\,\mathcal{V}(m,n)\,\middle|\,\mathcal{Z}, c, d\right\rangle = \left\langle \mathcal{Z}, c, d\,\middle|\,\mathcal{V}(m,n)\,\middle|\,\mathcal{Z}, a, b\right\rangle^*. \tag{4.6.10}$$

Auf der linken Seite bekommen wir

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathcal{Z}, a, b\,\middle|\,\mathcal{V}(m,n)\,\middle|\,\mathcal{Z}, c, d\right\rangle\\ &\qquad= \mathrm{i}\sin(mc+nd)\Big(n\frac{\partial}{\partial c}-m\frac{\partial}{\partial d}\Big)\left\langle \mathcal{Z}, a, b\,\middle|\,\mathcal{Z}, c, d\right\rangle\\ &\qquad= \mathrm{i}\sin(mc+nd)\Big(n\frac{\partial}{\partial c}-m\frac{\partial}{\partial d}\Big)\Big(\delta(a-c)\,\delta(b-d)\,\mathcal{F}_\mathcal{Z}(a,b)\Big)\\ &\qquad= -\mathrm{i}\mathcal{F}_\mathcal{Z}(a,b)\Big(n\frac{\partial}{\partial a}-m\frac{\partial}{\partial b}\Big)\Big(\delta(a-c)\,\delta(b-d)\,\sin(ma+nb)\Big).\end{aligned} \tag{4.6.11}$$

Um den letzten Ausdruck zu erhalten, sind folgende Umformungen nötig: Man zieht die Funktion $\mathcal{F}_\mathcal{Z}$ aus der Ableitung heraus, ersetzt $\partial/\partial c$ durch $-\partial/\partial a$ und $\partial/\partial d$ durch $-\partial/\partial b$, schreibt den Sinus unter die Ableitung und ersetzt im Argument a durch c und b durch d, was im Produkt mit den Delta-Funktionen erlaubt ist. Für die rechte Seite von (4.6.10) bekommt man

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathcal{Z}, c, d\,\middle|\,\mathcal{V}(m,n)\,\middle|\,\mathcal{Z}, a, b\right\rangle^*\\ &\qquad= -\mathrm{i}\sin(ma+nb)\Big(n\frac{\partial}{\partial a}-m\frac{\partial}{\partial b}\Big)\left\langle \mathcal{Z}, c, d\,\middle|\,\mathcal{Z}, a, b\right\rangle^*\\ &\qquad= -\mathrm{i}\sin(ma+nb)\Big(n\frac{\partial}{\partial a}-m\frac{\partial}{\partial b}\Big)\Big(\delta(a-c)\,\delta(b-d)\,\mathcal{F}_\mathcal{Z}(a,b)\Big)\\ &\qquad= -\mathrm{i}\Big(n\frac{\partial}{\partial a}-m\frac{\partial}{\partial b}\Big)\Big(\delta(a-c)\,\delta(b-d)\,\mathcal{F}_\mathcal{Z}(a,b)\,\sin(ma+nb)\Big)\end{aligned} \tag{4.6.12}$$

Hier haben wir verwendet, daß der Ableitungsoperator, angewandt auf den Sinus, verschwindet. Das kann nur dann mit dem Ausdruck von oben übereinstimmen, wenn $\mathcal{F}_\mathcal{Z}$ eine Konstante ist. Das gleiche Ergebnis bekommen wir auch für den raumartigen Sektor, daß heißt bis auf die noch unbekannte Funktion $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ und zwei (eigentlich fünf, da die Konstante im Prinzip noch in jedem raumartigen Sektor verschieden sein kann) Konstanten $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ und $\mathcal{F}_\mathcal{Z}$ ist das Skalarprodukt damit fixiert.

Um die Funktion $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ zu bestimmen, benötigt man eine Observable, die in der Form $\partial/\partial\theta$ auf die zeitartigen Zustände wirkt. Wir nehmen hier einfach an, daß es so eine gibt und dadurch auch $\mathcal{F}_\mathcal{L}$ bis auf eine Konstante bestimmt ist. Eine interessantere Frage ist, ob es eine Relation zwischen diesen Konstanten für die verschiedenen Sektoren des Zustandsraumes gibt.

Betrachten wir das Vektorfeld in der a,b-Ebene, das durch den Operator $\mathcal{V}(m,n)$ in (4.6.8) oder (4.6.9) dargestellt wird. Es hat einen Fixpunkt für $a,b \to 0$, also an der Stelle, an der die

Sektoren miteinander verbunden sind. Das heißt wir können den jeweiligen Sektor durch eine "Translation" in Richtung von $\mathcal{V}(m,n)$ nicht verlassen. Die Zustände

$$\exp\left(\mathrm{i}q\widehat{\mathcal{V}}(m,n)\right)\big|\,\mathcal{R},+,+,a,b\,\big\rangle \tag{4.6.13}$$

für beliebige Werte von q bleiben stets im raumartigen Sektor $\mathcal{C}_{++}$ von Figur 5.

Falls das für alle Observablen gilt, bekommen wir dadurch Superauswahlsektoren, das heißt der Zustandsraum zerfällt in in ein Produkt von neun unabhängigen Räumen, die jeweils eine Darstellung der gesamten Observablen-Algebra tragen. In diesem Fall wäre das Skalarprodukt nur bis auf neun unabhängige Konstanten bestimmt.

Zum Schluß wenden wir uns noch einmal der Frage nach den Schleifenzuständen zu. Da wir nun ein Skalarprodukt haben, das durch die Forderung fixiert ist, daß die Observablen hermitesch sein sollen, können wir die Frage beantworten, ob die Schleifenzustände normierbar sind.[6] Einen Schleifenzustand können wir uns durch eine Wellenfunktion $F_\varrho = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\varrho)$ vorgeben, was hier jedoch etwas unhandlich ist, denn wir müßten ihn erst nach der Basis entwickeln.

Wir können den Zustand statt dessen durch seine Eigenschaften festlegen. Bezeichnen wir den zur Schleife $\lambda^m \bullet \kappa^n$ gehörenden Zustand mit $|\,m,n\,\rangle$, so gehen alle diese Zustände durch

$$|\,m,n\,\rangle = \tfrac{1}{2}\widehat{\mathcal{U}}(m,n)\,|\,0,0\,\rangle \tag{4.6.14}$$

aus einem "Vakuumzustand" hervor. Dieser ist durch die Wellenfunktion $F=1$ charakterisiert, das heißt es gilt

$$\widehat{\mathcal{V}}(m,n)\,|\,0,0\,\rangle = 0, \tag{4.6.15}$$

denn in der F-Darstellung werden die $\mathcal{V}(m,n)$ durch Ableitungsoperatoren dargestellt. Da die $\mathcal{V}(m,n)$ beliebige Transformationen innerhalb der Sektoren erzeugen, heißt das, daß zum Beispiel

$$\langle\,\mathcal{R},+,+,a,b\,|\,0,0\,\rangle \tag{4.6.16}$$

nicht von a,b abhängen kann: man fuge einfach ein $\mathcal{V}(m,n)$ in dieses Produkt ein und lasse es dann nach rechts bzw. links wirken. Nun bekommen wir aber von diesem Sektor den folgenden Beitrag zur Norm vom $|\,0,0\,\rangle$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\langle\,0,0\,|\,\mathcal{R},+,+,a,b\,\rangle\langle\,\mathcal{R},+,+,a,b\,|\,0,0\,\rangle \tag{4.6.17}$$

Das kann natürlich nicht endlich sein. Ein Schleifenzustand kann also nur dann normierbar sein, wenn er eine Linearkombination von licht- und zeitartigen Basiszuständen ist. Auf dem lichtartigen Sektor wirken die $\mathcal{U}(m,n)$ aber nur durch Multiplikation mit ± 2, so daß es keine nichttrivialen solchen Zustände gibt.

Es gibt also nur eine Möglichkeit, einen Satz von normierbaren Zuständen mit der Eigenschaft (4.6.14) zu bekommen, nämlich durch

$$|\,0,0\,\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,|\,\mathcal{Z},a,b\,\rangle. \tag{4.6.18}$$

Daraus bekommen wir die Zustände

$$|\,m,n\,\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\cos(ma+nb)|\,\mathcal{Z},a,b\,\rangle, \tag{4.6.19}$$

die sogar orthonormal sind:

$$\langle\,m,n\,|\,p,q\,\rangle = 2\pi^2\,\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}\left(\delta_{m,p}\delta_{n,q} + \delta_{m,-p}\delta_{n,-q}\right) \tag{4.6.20}$$

Es gibt also normierbare Schleifenzustände, wenn wir sie auf den zeitartigen (kompakten) Bereich beschränken. Aber diese sind nicht durch eine Wellenfunktion $F = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{g}_\varrho)$ gegeben, welches auch im raumartigen Bereich von Null verschieden wäre.

Die Probleme mit der Schleifendarstellung sind offenbar sehr eng mit der nicht-kompakten Struktur der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ verbunden. Es ist also keineswegs klar, was die Nicht-Existenz der Schleifendarstellung in der dreidimensionalen Theorie über eine mögliche Schleifendarstellung in vier Dimensionen aussagt, denn mit der üblicherweise durchgeführten Lorentz-Eichung (die wir auch in (2.3.9) eingeführt haben) wird die Eichgruppe zu $\mathrm{SO}(3)$. Diese ist kompakt und zerfällt nicht in verschiedene Sektoren.

Ergebnisse, die in Zusammenhang mit der Schleifendarstellung stehen, lassen sich also nicht so leicht von drei nach vier Dimensionen übertragen. Es gibt sogar noch einen ganz anderen wesentlichen Unterschied zwischen den hier auftretenden Schleifen und denen, die die formalen Lösungen in Kapitel II repräsentieren. Dort handelte es sich durchweg (jedenfalls hatten wir das stillschweigend angenommen) um zusammenziehbare Schleifen. Die Diffeomorphismus-invarianten formalen Lösungen waren durch Knotenklassen gegeben, also durch völlig andere Objekte als die hier auftretenden Homotopieklassen.[7] Daß die Schleifen in drei Dimensionen so gute Eigenschaften haben, liegt natürlich im wesentlichen an der verschwindenden Krümmung, so daß die Holonomien zu Observablen werden. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß diese Eigenschaften sofort verschwinden, wenn wir die reine Gravitation verlassen und Materie ankoppeln. Dann ist genau wie in vier Dimensionen die Krümmung von Null verschieden und es gibt keine Schleifen-Observable mehr.

[6] Siehe zum Beispiel [49] für eine Definition von Schleifenzuständen. Dort wird ein "regularisiertes" Skalarprodukt angegeben, für das die Schleifenzustände normierbar werden. Es ist aber keineswegs klar, daß für dieses Produkt die Observablen hermitesch werden.

[7] Siehe [20] für eine Analogie dieser "Knoten"-Zustände in drei Dimensionen.

Kapitel V:

Dimensional reduzierte Modelle

In Kaluza's theory the fifth dimension
is represented by a circle attached
to each point in space time.
[50]

Im diesem Kapitel werden wir eine materiegekoppelte Theorie in drei Dimensionen betrachten. Die physikalischen Freiheitsgrade werden nur von der Materie selbst getragen, denn die Raumzeit-Mannigfaltigkeit soll von nun an einfach zusammenhängend sein, so daß keine topologischen Freiheitsgrade auftreten. Man hat somit durch Wahl einer "passenden" Materie die Möglichkeit, die Anzahl der Freiheitsgrade und die Art der Wechselwirkungen der Materie untereinander zu bestimmen.

Eine besondere Klasse solcher Theorien bilden die Kaluza-Klein-Theorien oder dimensional reduzierten Gravitationstheorien: man startet mit einer höherdimensionalen reinen Gravitation ohne Materie und betrachtet nur solche Konfigurationen, die eine durch eine feste Menge von Killing-Vektoren gegebene Symmetrie haben. Ist D die Dimension der reinen Gravitation und sind k kommutierende Killing-Vektoren gegeben, so bedeutet das, daß man nur solche Raumzeit-Metriken zuläßt, die nur noch von $D - k$ Koordinaten abhängen.[1]

Eine solche Theorie kann also effektiv durch eine $d = D - k$ dimensionale Feldtheorie beschrieben werden. Es treten dann zusätzlich zu den metrischen Feldern in d Dimensionen die restlichen Komponenten der D-dimensionalen Metrik als Materiefelder auf, deren Wirkung durch die Einstein-Hilbert-Wirkung in D Dimensionen bestimmt ist.

Eine Lösung der Feldgleichungen einer dimensional reduzierten Theorie hat zwei mögliche Interpretationen: Wir können sie entweder als eine Lösung einer d-dimensionalen materiegekoppelten Theorie auffassen oder als eine der D-dimensionalen reinen Gravitation.[2]

Wie wir bereits im Kapitel II, Abschnitt 5 gesehen haben, bewirkt die Ankopplung von Materie außerdem, daß wir wohldefinierte Observable im Sinne von Dirac bekommen.

1. Von vier nach drei Dimensionen

Um zu einer materiegekoppelte Theorie in drei Dimensionen zu gelangen, führen wir nun die Reduktion der vierdimensionalen Wirkung in Ashtekars Variablen (2.2.24) nach drei Dimensionen durch. Die klassische Wirkung betrachten wir als eine Funktion des *reellen* Vierbeinfeldes und des *komplexen* Zusammenhangs. Wir werden schließlich feststellen, daß alle komplexen Felder durch geeignete Redefinitionen eliminiert werden können.

Die Berechnung der reduzierten Wirkung hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Herleitung der Lagrange-Funktion für den kanonischen Formalismus. Dort hatte die Zeitkoordinate $\mathtt{t}$ eine besondere Rolle übernommen: wir haben die Integration über die Raumzeit in eine Integration über den Raum und eine über $\mathtt{t}$ aufgespalten und ebenso die Indexkontraktionen gemäß $X^M Y_M = X^{\mathtt{t}} Y_{\mathtt{t}} + X^m Y_m$. Wir werden jetzt genauso vorgehen, nur daß statt der $\mathtt{t}$-Koordinate die $\mathtt{z}$-Koordinate abgespaltet wird. Wir zerlegen also Vektoren V^M in V^μ, $\mu = \mathtt{t}, \mathtt{x}, \mathtt{y}$ und $V^{\mathtt{z}}$.

Als Basis für die Komponenten des selbstdualen Zusammenhangs $\mathcal{A}_{MAB}$ wählen wir allerdings eine hier besser geeignete Darstellung der $\mathfrak{so}(2,1)$ statt der in (2.2.11) eingeführten Darstellung der $\mathfrak{so}(3)$. Dazu ersetzen wir einfach die 0 in der Definition von J_{aAB} durch eine 3 und bekommen

$$\tilde{J}_{aAB} = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\eta_{Aa}\delta^3_B - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\eta_{Ba}\delta^3_A + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{aAB3}. \tag{5.1.1}$$

Wie man leicht nachrechnet, sind diese wieder selbstdual und man kann Ashtekars Zusammenhang durch drei unabhängige Größen $\mathcal{A}_{Ma}$ darstellen, wobei a hier von 0 bis 2 läuft:

$$\mathcal{A}_{MAB} = \mathcal{A}_{Ma}\tilde{J}^a{}_{AB}, \quad \tilde{J}_{aAB} = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ABCD}\tilde{J}_a{}^{CD}. \tag{5.1.2}$$

Die $\tilde{J}_{aAB}$ bilden eine Darstellung der $\mathfrak{so}(2,1)$,

$$\tilde{J}_{aA}{}^B\tilde{J}_{bB}{}^C = \tfrac{1}{4}\eta_{ab}\delta^C_A - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ab}{}^c\tilde{J}_{cA}{}^C. \tag{5.1.3}$$

Man beachte, daß sich einige Vorzeichen gegenüber (2.2.12) verändert haben. Aus den $\tilde{J}$'s können wir wieder den Projektor auf den selbstdualen Anteil bilden. Es gilt

$$\tilde{J}_{aAB}\tilde{J}^{bAB} = -\delta^b_a, \quad \tilde{J}_{aAB}\tilde{J}^{aCD} = -\tfrac{1}{2}\delta^{[C}_{[A}\delta^{D]}_{B]} + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon_{AB}{}^{CD}. \tag{5.1.4}$$

Für die Feldstärke erhalten wie einen ähnlichen Ausdruck wie (2.2.19), allerdings taucht auch hier wieder ein neues Vorzeichen auf. Es ist

$$\mathcal{F}_{MNa} = \tilde{J}_a{}^{AB}\mathcal{F}_{MNAB} = \partial_M\mathcal{A}_{Na} - \partial_N\mathcal{A}_{Ma} - \varepsilon_a{}^{bc}\mathcal{A}_{Mb}\mathcal{A}_{Nc}, \tag{5.1.5}$$

[1] Für kommutierende Killing-Vektoren kann man immer Koordinaten finden, in denen sie entlang jeweils einer Koordinate zeigen. Die Situation für nicht kommutierende Killing-Vektoren ist ein wenig komplizierter, ein bekanntes Beispiel ist etwa die sphärische Symmetrie, bei der die drei Killing-Vektoren eine SO(3) erzeugen [51].

[2] Wählt man $D = 4$, so gelangt man durch Reduktion nach zwei Dimensionen zu einer vollständig lösbaren Theorie und bekommt so auch alle Lösungen der vierdimensionalen reinen Gravitation mit zwei kommutierenden Killing-Vektoren. Eine Darstellung dieses Verfahrens, und auch der hier durchgeführten Reduktion nach drei Dimension findet man in [25].

und eingesetzt in die Wirkung erhalten wir formal den gleichen Ausdruck wie vor der Abspaltung der zeitartigen Komponenten:

$$I[E,\mathcal{A}] = -\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\varepsilon^{MNPQ}E_M{}^A E_N{}^B \tilde{J}^a{}_{AB}\mathcal{F}_{PQa}[\mathcal{A}]. \tag{5.1.6}$$

Wir können jetzt die Summen über die Raumzeit-Indizes in der Wirkung in $M \mapsto \mu, z$ aufspalten. Außerdem wollen wir ja annehmen, daß die Felder nicht von z abhängen. Dann ist auch der Integrand von z unabhängig und wir können die Integration über z einfach weglassen. Wir nehmen also an, daß die Integration über z eine (möglicherweise unendliche) Konstante liefert und der Integrationsbereich für z unabhängig von den übrigen Koordinaten ist.

Für das Vierbein führen wir wieder eine teilweise Eichfixierung durch: Wir verlangen hier, daß der Vektor E_3 in Richtung der z-Achse zeigt, also $E_3{}^\mu = 0$ ist. Man beachte, daß das gerade die zu der für die kanonische Formulierung verwendetete Eichung "duale" Bedingung ist, denn dort hatten wir verlangt, daß der *Kovektor* E^0 in Richtung der t-Achse zeigt. Das Vierbein wird jetzt durch ein Dreibein $e_\mu{}^a$, einen Skalar c und einen Kovektor b_μ parametrisiert:

$$E_M{}^A = \left(\begin{array}{c|c} E_\mu{}^a & E_\mu{}^3 \\ \hline E_z{}^a & E_z{}^3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} c^{-1}e_\mu{}^a & cb_\mu \\ \hline 0 & c \end{array}\right) \tag{5.1.7}$$

Die etwas unmotivierte Wahl dieser Parametrisierung wird gerade bewirken, daß sich als Wirkung für das Dreibeinfeld wieder die dreidimensionale Einstein-Hilbert-Wirkung ergibt. Wir wollen zusätzlich annehmen, daß $E_z^3 = c > 0$ ist, was natürlich auch durch eine $\mathrm{SO}(3,1)$-Rotation erreicht werden kann.

Analog zu (2.3.8) lautet die dreidimensionale Wirkung dann

$$I[E,\mathcal{A}] = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}\big(E_\mu{}^A E_\nu{}^B \tilde{J}_{aAB}\mathcal{F}_{\rho z}{}^a + E_\mu{}^A E_z{}^B \tilde{J}_{aAB}\mathcal{F}_{\nu\rho}{}^a\big) \tag{5.1.8}$$

In der gegebenen Eichung sind die auftretenden Kombinationen der Vierbeine

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\rho}E_\mu{}^A E_\nu{}^B \tilde{J}_{aAB} &= \mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_{\mu a}b_\nu - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{abc}e_\mu{}^b e_\nu{}^c c^{-2},\\ \varepsilon^{\mu\nu\rho}E_\mu{}^A E_z{}^B \tilde{J}_{aAB} &= \tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_{\mu a},\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

und die z-Komponenten der Feldstärke sind

$$\mathcal{F}_{\rho z a} = \partial_\rho \mathcal{A}_{za} - \varepsilon_a{}^{bc}\mathcal{A}_{\rho b}\mathcal{A}_{zc} = \mathcal{D}_\rho \mathcal{A}_a, \tag{5.1.10}$$

wobei wir die z-Komponente von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{za} = \mathcal{A}_a$ bezeichnen und benutzen, daß alle Ableitungen von Feldern in z-Richtung verschwinden. Alles eingesetzt, ergibt sich die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a\mathcal{F}_{\nu\rho a} + \varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_\rho\mathcal{A}_a\big(e_\mu{}^a b_\nu - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{abc}e_{\mu b}e_{\nu c}c^{-2}\big). \tag{5.1.11}$$

Tatsächlich ist der erste Term gerade die dreidimensionale Einstein-Hilbert-Wirkung (4.1.4), wobei $\mathcal{A}_{\mu a}$ die Rolle des dualisierten dreidimensionalen Spinzusammenhangs übernimmt. Allerdings koppelt dieses $\mathcal{A}_{\mu a}$ immer noch über den zweiten Term in der Wirkung an die Materiefelder b_μ und c. Durch eine Redefinition läßt sich diese Kopplung aber beseitigen. Dazu integrieren wie zunächts die Ableitung auf $\mathcal{A}_a$ partiell. Die Wirkung wird dann zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {}&\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a\mathcal{F}_{\nu\rho a} - \varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_\rho e_\mu{}^a\Delta_{\nu a}\\ &- \varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a\mathcal{A}_a\partial_\rho b_\nu - \mathrm{i}ee_a{}^\mu\mathcal{A}^a\partial_\mu c^{-2},\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

wobei $\Delta_{\mu a} = b_\mu\mathcal{A}_a - \mathrm{i}\varepsilon_{abc}e_\mu{}^b\mathcal{A}^c c^{-2}$ ist. Ein Term von der Form "$\mathcal{D}e\Delta$" läßt sich stets durch eine Verschiebung des Zusammenhangs $\mathcal{A}_{\mu a}$ um $\Delta_{\mu a}$ eliminieren. Setzen wir $\omega_{\mu a} = \mathcal{A}_{\mu a} - \Delta_{\mu a}$, so gilt für die Feldstärke des neuen Zusammenhangs

$$R_{\mu\nu a} = \mathcal{F}_{\mu\nu a} - 2\mathcal{D}_{[\mu}\Delta_{\nu]a} - \varepsilon_a{}^{bc}\Delta_{\mu b}\Delta_{\nu c}, \tag{5.1.13}$$

Für den $\mathcal{F}$-Term in der Wirkung bekommen wir nach einer partiellen Integration

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon^{abc}e_{\mu a}\Delta_{\nu b}\Delta_{\rho c} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a\mathcal{F}_{\nu\rho a} - \varepsilon^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_\rho e_\mu{}^a\,\Delta_{\nu a}. \tag{5.1.14}$$

Die rechte Seite entspricht gerade der ersten Zeile der Wirkung (5.1.12), und die linke Seite enthält keine Kopplung zwischen den Materiefeldern und dem Zusammenhang mehr. Benutzen wir noch

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon^{abc}e_{\mu a}\Delta_{\nu b}\Delta_{\rho c} = -2e\,\mathcal{A}^a\mathcal{A}_a c^{-4}, \tag{5.1.15}$$

so gelangen wir zu einer dreidimensionalen Wirkung, die neben den Gravitationsfeldern $e_\mu{}^a$ und $\omega_{\mu a}$ die Materiefelder b_μ, c und $\mathcal{A}_a$ enthält:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} - \varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a\mathcal{A}_a\partial_\rho b_\nu + 2\mathrm{i}ee_a{}^\mu\,\mathcal{A}^a c^{-3}\partial_\mu c - e\,\mathcal{A}^a\mathcal{A}_a c^{-4}. \tag{5.1.16}$$

Durch die Entkopplung des Zusammenhangs von den Materiefeldern wird dieser identisch mit dem der reinen Gravitation, denn seine Bewegungsgleichung ist $D_{[\mu}e_{\nu]}{}^a = 0$, also $\omega = \omega[e]$, wobei $\omega[e]$ der analog zu (2.1.12) in vier Dimensionen gebildete Spinzusammenhang ist. Natürlich ist ω damit auch reell geworden und nur noch $\mathcal{A}_a$ ist ein komplexes Feld. Da es nur als Hilfsfeld, also ohne Ableitungsterme und mit einem quadratischen Term auftritt, könnten wir es sofort eliminieren, indem wir seine Bewegungsgleichung lösen. Wir werden aber weiter unten ein wenig anders vorgehen und sehen, daß dieses Feld noch von Nutzen sein wird. Wir können trotzdem durch eine Redefinition zu einem reellen Feld übergehen. Setzen wir

$$\mathcal{A}_a = e_a{}^\mu(a_\mu + \mathrm{i}c\,\partial_\mu c) \tag{5.1.17}$$

in die Lagrange-Funktion ein, so verschwinden alle expliziten Faktoren i und damit werden alle Felder reell:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} + \varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu b_\rho - eg^{\mu\nu}c^{-2}\,\partial_\mu c\,\partial_\nu c - eg^{\mu\nu}a_\mu a_\nu c^{-4}. \tag{5.1.18}$$

Löst man an dieser Stelle die Bewegungsgleichung für a_μ, so gelangt man zur bekannten Kaluza-Klein-Theorie mit b_μ als Vektorpotential und c als skalares Feld. Die Bewegungsgleichung ist

$$a_\mu = \tfrac{1}{2}e^{-1} g_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu\rho\sigma}\partial_\rho b_\sigma c^4 \tag{5.1.19}$$

Eingesetzt in $\mathcal{L}$ erhalten wir

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} - \tfrac{1}{8}eg^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}c^4 b_{\mu\nu}b_{\rho\sigma} - eg^{\mu\nu}c^{-2}\partial_\mu c\partial_\nu c \tag{5.1.20}$$

wobei $b_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$ die Feldstärke des Vektorpotentials b_μ ist.

Das Sigmamodell

Statt für die Wirkung (5.1.18) die Bewegungsgleichung von a_μ zu lösen, können wir auch die für b_ρ bestimmen. Sie lautet $\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu a_\nu = 0$. Da wir annehmen, daß die Raumzeit-Mannigfaltigkeit topologisch trivial ist, besagt diese Gleichung einfach, daß es ein Feld a gibt mit $a_\mu = \partial_\mu a$. Setzen wir dies in $\mathcal{L}$ ein, bekommen wir die Wirkung

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} - eg^{\mu\nu}c^{-2}\,\partial_\mu c\,\partial_\nu c - eg^{\mu\nu}c^{-4}\,\partial_\mu a\,\partial_\nu a. \tag{5.1.21}$$

Die Materiefelder c und a bilden jetzt ein nichtlineares Sigmamodell. Wir wollen zeigen, daß es sich um ein Cosetraum-Modell im Sinne von Kapitel I handelt, wobei die Gruppe $\mathcal{G} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und die Untergruppe $\mathcal{H} = \mathrm{SO}(2)$ ist.

Bezeichnen wir eine Matrix aus $\mathrm{SO}(2)$ mit

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{5.1.22}$$

so können wir jede $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Matrix durch Multiplikation von rechts mit einer solchen Drehmatrix auf Dreiecksform bringen: Sei

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{V}\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta \\ z\cos\theta - w\sin\theta & z\sin\theta + w\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{5.1.23}$$

dann kann man θ so wählen, daß $z\cos\theta = w\sin\theta$ wird. Da nicht $z = w = 0$ sein kann, ist θ dadurch bis auf $\theta \mapsto \theta + \pi$ festgelegt. Wir fixieren dieses "Vorzeichen", indem wir verlangen, daß die Einträge auf der Diagonalen positiv werden sollen (sie haben das gleiche Vorzeichen, da ihr Produkt wegen der Dreiecksform gleich eins ist).

Umgekehrt bedeutet das, daß wir eine Matrix aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ eindeutig durch eine Dreiecksmatrix mit positiven Diagonal-Elementen und einen Winkel parametrisieren können:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} c & 2c^{-1}a \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}\mathcal{R}(\theta). \tag{5.1.24}$$

Die Materiefelder c, a zusammen mit dem Winkel θ bilden also ein Koordinatensystem auf $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, das genau von der Form (1.3.30) ist, wobei θ die Koordinate auf $\mathrm{SO}(2)$ und c, a die auf dem Cosetraum $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ sind.

Um zu zeigen, daß die Wirkung tatsächlich die Standardform (1.3.43) hat, führen wir die folgende Basis der Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ein:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.1.25}$$

Natürlich sind das genau die γ-Matrizen, da sie hier aber nichts mit einer Spinordarstellung der Lorentz-Gruppe zu tun haben, benutzen wir eine andere Bezeichnung.

Die Lie-Algebra dieser Matrizen ist

$$[X, Y_1] = 2Y_2, \quad [X, Y_2] = -2Y_1, \quad [Y_1, Y_2] = -2X. \tag{5.1.26}$$

Wir können nun explizit die Größen P_μ^A bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{-1} &= \mathcal{R}(-\theta)\begin{pmatrix} c^{-1} & -2c^{-1}a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{R}(\theta) = \mathcal{R}(\theta + \tfrac{\pi}{2}), \\ \partial_\mu\mathcal{V} &= \begin{pmatrix} c & 2c^{-1}a \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}\mathcal{R}(\theta + \tfrac{\pi}{2})\,\partial_\mu\theta + \begin{pmatrix} \partial_\mu c & 2c^{-1}\partial_\mu a - 2c^{-2}a\,\partial_\mu c \\ 0 & -c^{-2}\partial_\mu c \end{pmatrix}\mathcal{R}(\theta) \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

und damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{-1}\partial_\mu\mathcal{V} &= \mathcal{R}(\tfrac{\pi}{2})\,\partial_\mu\theta + \mathcal{R}(-\theta)\begin{pmatrix} c^{-1}\partial_\mu c & 2c^{-2}\partial_\mu a \\ 0 & -c^{-1}\partial_\mu c \end{pmatrix}\mathcal{R}(\theta) \\ &= \partial_\mu\theta\,X + \mathcal{R}(-\theta)\Big(c^{-2}\partial_\mu a\,Y_1 + c^{-1}\partial_\mu c\,Y_2 + c^{-2}\partial_\mu a\,X\Big)\mathcal{R}(\theta) \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

Um das nach der Basis der Algebra zu entwickeln, benutzen wir die Formeln

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-\theta)Y_1\mathcal{R}(\theta) &= \cos(2\theta)Y_1 - \sin(2\theta)Y_2, \\ \mathcal{R}(-\theta)Y_2\mathcal{R}(\theta) &= \sin(2\theta)Y_1 + \cos(2\theta)Y_1, \\ \mathcal{R}(-\theta)X\mathcal{R}(\theta) &= X, \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

das heißt die $\mathcal{H}$-Rotationen werden auf dem Cosetraum durch gewöhnliche Rotationen in der Y_1-Y_2-Ebene dargestellt. Als Definition für die Größen P_μ und Q_μ verwenden wir (1.3.44), welches in unserem Fall lautet

$$\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu\mathcal{V} = P_\mu^1 Y_1 + P_\mu^2 Y_2 + Q_\mu X. \tag{5.1.30}$$

Einsetzen des Ausdrucks für $\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V}$ von oben ergibt dann

$$\begin{aligned} P_\mu^1 &= c^{-1}\partial_\mu c \sin(2\theta) + c^{-2}\partial_\mu a \cos(2\theta), \\ P_\mu^2 &= c^{-1}\partial_\mu c \cos(2\theta) - c^{-2}\partial_\mu a \sin(2\theta), \\ Q_\mu &= \partial_\mu \theta + c^{-2}\partial_\mu a. \end{aligned} \tag{5.1.31}$$

Offenbar bekommen wir den Materie-Anteil der Wirkung jetzt in der Form

$$-\tfrac{1}{2} e g^{\mu\nu} P_\mu^A P_\nu^B \eta_{AB} = -e g^{\mu\nu}\left(c^{-2}\partial_\mu c\, \partial_\mu c + c^{-4}\partial_\mu a\, \partial_\mu a\right), \tag{5.1.32}$$

wobei $A, B = 1, 2$ die internen Indizes auf dem Cosetraum $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ bezeichnen und für η_{AB} die Spur-Metrik $\eta_{AB} = \mathrm{Tr}(Y_A Y_B) = 2\delta_{AB}$ einzusetzen ist.

Durch Einführen einer $\mathcal{H}$-kovarianten Ableitung können wir die Wirkung auch wieder direkt als Funktion der Matrix $\mathcal{V}$ schreiben. Die kovariante Ableitung entnehmen wir aus (1.3.47):

$$D_\mu \mathcal{V} = \partial_\mu \mathcal{V} - Q_\mu \mathcal{V} X \tag{5.1.33}$$

Damit bekommen wir genau die aus Kapitel I bekannte Standard-Wirkung für ein Cosetraum-Sigmamodell, das jetzt an die dreidimensionale Gravitation gekoppelt ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} - \tfrac{1}{2} e g^{\mu\nu} P_\mu^A P_\nu^B \eta_{AB} \\ &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} - \tfrac{1}{2} e g^{\mu\nu} \mathrm{Tr}\left(\mathcal{V}^{-1} D_\mu \mathcal{V}\, \mathcal{V}^{-1} D_\nu \mathcal{V}\right). \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

Besonders für die im nächsten Abschnitt durchgeführte supersymmetrische Erweiterung dieses Modells ist es nützlich, für die zwei bosonischen Freiheitsgrade eine komplexe Notation einzuführen. Wir definieren zunächst eine komplex Basis von $\mathfrak{sl}(2)$ durch

$$Y = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(Y_2 + \mathrm{i}Y_1), \quad Y^* = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(Y_2 - \mathrm{i}Y_1). \tag{5.1.35}$$

Die Metrik ist dann geben durch

$$\mathrm{Tr}(YY^*) = 2, \quad \mathrm{Tr}(XX) = -2, \tag{5.1.36}$$

und alle anderen Komponenten verschwinden. Die Algebra dieser Matrizen ist

$$[X, Y] = 2\mathrm{i}Y, \quad [X, Y^*] = -2\mathrm{i}Y^*, \quad [Y, Y^*] = -2\mathrm{i}X. \tag{5.1.37}$$

Wir definieren nun die komplexen Größen P_μ, P_μ^*, indem wir die Ableitung von $\mathcal{V}$ nach der komplexen Basis entwickeln:

$$\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V} = P_\mu Y^* + P_\mu^* Y + Q_\mu X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} P_\mu &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V} Y), \\ P_\mu^* &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V} Y^*), \\ Q_\mu &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V} X). \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

Eingesetzt in die Wirkung ergibt sich

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} - 2 e g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu^*. \tag{5.1.39}$$

Die von vier nach drei Dimensionen reduzierte reine Gravitation ist also äquivalent zu einem $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ Sigmamodell, das an die Gravitation in drei Dimensionen koppelt.

Die Wirkung (5.1.39) besitzt neben der lokalen Lorentz- und $SO(2)$-Symmetrie auch noch eine globale Symmetrie, die wir ganz allgemein in Kapitel I für ein Sigmamodell gefunden hatten, dessen Lagrange-Funktion nur über die P_μ von $\mathcal{V}$ abhängt: Sie ist invariant unter Multiplikation von $\mathcal{V}$ mit einer konstanten Matrix $\mathcal{V}_0$, besitzt also eine globale $SL(2,\mathbb{R})$ Symmetrie, die uns in der Supergravitation genauso begegnen und eine Observable definieren wird.

2. Supergravitation

Durch die Reduktion der Dimensionen von vier nach drei haben wir aus der Einsteinschen Gravitation das materiegekoppelte Modell (5.1.39) konstruiert. Genauso kann man die N=1 Supergravitation aus Kapitel III nach drei Dimensionen reduzieren und gelangt auf diese Weise zu einer supersymmetrischen Erweiterung.

Der Gravitations-Anteil dieses Modells ist dann gegeben durch die Wirkung der N=2 reinen Supergravitation aus Kapitel IV. Die dreidimensionalen Gravitinofelder ψ_μ sind dabei im wesentlichen die $\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$-Komponenten des vierdimensionalen Gravitinos ψ_M, dessen vierte Komponente ψ_z zu einem Materiefeld χ wird, dem supersymmetrischen Partner der bosonischen Felder c, a bzw. $\mathcal{V}$.

Die direkte Ableitung der Wirkung aus der dimensionalen Reduktion ist jedoch sehr viel komplizierer als für den oben ausgeführten rein bosonischen Fall, und wir wollen hier nicht näher darauf eingehen. Wir bekommen natürlich wieder das $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ Sigmamodell, wobei die Eichgruppe $SO(2)$ jetzt aber auch auf die Fermionen wirkt. Das resultiert daraus, daß das Eichfeld Q_μ in (5.1.31) einen Anteil aus der z-Komponente des Spinzusammenhangs enthält (das Feld a hatten wir durch $\partial_\mu a = e_\mu{}^a \mathcal{A}_{za} - \mathrm{i}c\partial_\mu c$ definiert).

Ein anderer Weg zur Konstruktion der materiegekoppelten N=2 Supergravitation ist die supersymmetrische Erweiterung der Wirkung (5.1.39) mit Hilfe der Noether-Prozedur.[3] Man startet mit einer global supersymmetrischen Feldtheorie und gelangt durch Eichung zu einer lokalen Symmetrie und damit zur Supergravitation, indem man die Wirkung in eine Reihe nach Potenzen des Gravitinos entwickelt und dann Ordnung für Ordnung Invarianz unter lokaler Supersymmetrie verlangt.

Da wir eine N=2 Theorie haben wollen, daß heißt eine, deren materiefreier Anteil durch (4.1.8) gegeben ist, und da der bosonische Anteil der Materie bereits festgelegt ist, sind wir gezwungen, zwei fermionische Freiheitgrade in Form eines komplexen Spinors χ einzuführen.

[3] Eine ausführlichere Beschreibung dieser Konstruktion wird in [27] gegeben, eine allgemeine Beschreibung der Noether-Prozedur für eine supersymmetrische Theorie findet man in [47]. Für einen Vergleich mit der Methode der dimensionalen Reduktion siehe [25, 52].

Im Unterschied zur dimensionalen Reduktion der N=1 Theorie in vier Dimensionen haben wir dann aber eine größere Freiheit bei der Realisierung der SO(2) Eichsymmetrie.[4] Wir wollen aber auch dies nicht weiter diskutieren, sondern uns gleich auf das Modell festlegen, das sich aus der Reduktion der vierdimensionalen Theorie ergibt.

Wirkungsfunktion und Symmetrien

Die Gravitationsfelder des Modells sind die gleichen wie die der reinen Supergravitation. Der Gravitations-Anteil der Wirkung ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{(1)} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} + 2\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,\bar{\psi}_\mu D_\nu \psi_\rho. \tag{5.2.1}$$

Der Materie-Anteil besteht zunächst aus der Sigmamodell-Wirkung für $\mathcal{V}$ und der Dirac-Wirkung für das Fermion χ

$$\mathcal{L}_{(2)} = -2eg^{\mu\nu} P_\mu P^*_\nu - e\,\bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu \chi + e\, D_\mu\bar{\chi}\gamma^\mu\chi. \tag{5.2.2}$$

Die kovarianten Ableitungen sind dabei definiert bezüglich der internen lokalen Symmetrien, also der Lorentz-Gruppe und der SO(2):

$$\begin{aligned} D_\mu e_\nu{}^a &= \partial_\mu e_\nu{}^a - \varepsilon^{abc}\omega_{\mu b} e_{\nu c},\\ D_\mu \psi_\nu &= \partial_\mu \psi_\nu + \tfrac{1}{2}\omega_{\mu a}\gamma^a\psi_\nu + \tfrac{\mathrm{i}}{2}Q_\mu\,\psi_\nu,\\ D_\mu \chi &= \partial_\mu \chi + \tfrac{1}{2}\omega_{\mu a}\gamma^a\chi - \tfrac{3\mathrm{i}}{2}Q_\mu\,\chi,\\ \tilde{D}_\mu \mathcal{V} &= \partial_\mu \mathcal{V} - Q_\mu\,\mathcal{V}X. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Den Christoffel-Zusammenhang können wir wieder weglassen, da alle Ableitungen antisymmetrisiert sind.

Die SO(2)-Ladungen der Fermionen, die sich bei der dimensionalen Reduktion ergeben, entsprechen also gerade der Zerlegung des Spin-$\frac{3}{2}$-Feldes in vier Dimensionen nach dem Spin in z-Richtung, der die Werte $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ annimmt für die Felder $\bar{\chi}, \psi_\mu, \bar{\psi}_\mu, \chi$. Man beachte, daß wir Q_μ im Gegensatz zu $\omega_{\mu a}$ nicht als unabhängiges Feld betrachten sondern als eine durch (5.1.38) gegebe Funktion von $\mathcal{V}$.

Unter einer lokalen SO(2) Rotation mit Parameter $q(\boldsymbol{x})$ transformieren die Felder also wie

$$\begin{aligned} &\psi_\mu \mapsto \exp(\tfrac{\mathrm{i}}{2}q)\,\psi_\mu,\\ &\chi \mapsto \exp(-\tfrac{3\mathrm{i}}{2}q)\,\chi,\\ &\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}\mathcal{R}(-q), \quad\Rightarrow\quad P_\mu \mapsto \exp(-2\mathrm{i}q)\,P_\mu, \quad Q_\mu \mapsto Q_\mu - \partial_\mu q. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

[4] Der Grund dafür ist, daß es sich um eine abelsche Eichgruppe handelt, so daß es eine kontinuierliche Menge von Darstellungen gibt, die Felder also beliebige Ladungen annehmen können. So bekommt man eine andere Darstellung, wenn man die in [36] angegebene allgemeine Wirkung für ein Supergravitations-Modell in drei Dimensionen für diesen speziellen Fall auswertet.

Die volle Lagrange-Funktion bekommt man nun am einfachsten mit Hilfe der Noether-Prozedur, die folgendes Resultat liefert. Wir erhalten einen weiteren Beitrag, der das Produkt des Gravitinos mit dem Noether-Strom der globalen Supersymmetrie der Materie-Wirkung $\mathcal{L}_{(2)}$ ist,

$$\mathcal{L}_{(3)} = 2e\,\bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_\mu\,P_\nu + 2e\,\bar{\psi}_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\chi\,P^*_\nu, \tag{5.2.5}$$

und zuletzt müssen wir noch einige Terme addieren, die von vierter Ordnung in den Fermionen sind:

$$\mathcal{L}_{(4)} = -e\left(\bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_\mu\,\bar{\psi}_\nu\chi + \bar{\psi}_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\chi\,\bar{\chi}\psi_\nu + 3\,\bar{\chi}\chi\,\bar{\chi}\chi\right). \tag{5.2.6}$$

Neben den Lorentz-Rotationen und den in (5.2.4) angegebenen SO(2)-Transformationen ist die durch $\mathcal{L}_{(1)} + \mathcal{L}_{(2)} + \mathcal{L}_{(3)} + \mathcal{L}_{(4)}$ beschriebene Theorie invariant unter der folgenden Supersymmetrie, die ein wenig komplizierter ist als die für die reine Supergravitation:

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu &= -D_\mu\epsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\gamma^\nu\epsilon\,\bar{\chi}\gamma^\rho\chi,\\ \delta e_\mu{}^a &= \bar{\psi}_\mu\gamma^a\epsilon - \bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu,\\ \delta\chi &= -\gamma^\mu\epsilon\left(P_\mu - \bar{\psi}_\mu\chi\right),\\ \delta\mathcal{V} &= -\bar{\chi}\epsilon\,\mathcal{V}Y - \bar{\epsilon}\chi\,\mathcal{V}Y^*. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Die Supersymmetrie wirkt also auf das Feld $\mathcal{V}$ durch Multiplikation von rechts “in Richtung der physikalischen Freiheitsgrade”, während die SO(2)-Rotationen $\delta\mathcal{V} \propto \mathcal{V}X$ “in Richtung der Eichfreiheitsgrade” wirken.

Im Gegensatz zur reinen Supergravition transformiert hier auch der Zusammenhang $\omega_{\mu a}$: Wenn man (5.2.7) in die Wirkung einsetzt, findet man eine Variation, die proportional zur Torsionsgleichung, also zur Bewegungsgleichung von $\omega_{\mu a}$ ist:

$$\delta\mathcal{L} \propto D_{[\mu}e_{\nu]}{}^a - \bar{\psi}_{[\mu}\gamma^a\psi_{\nu]} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}e_{\mu a}e_{\nu c}\,\bar{\chi}\chi. \tag{5.2.8}$$

Wir haben wieder die Möglichkeit, $\omega_{\mu a}$ als eine durch diese Gleichung gegebene Funktion der anderen Felder zu betrachten, dann ist die Wirkung supersymmetrisch unter (5.2.7). Wir werden jedoch weiterhin $\omega_{\mu a}$ als unabhängiges Feld betrachten, dessen Verhalten unter Supersymmetrie durch den Proportionalitätsfaktor gegeben ist.

Feldredefinition

Durch eine geschickte Feldredefinition läßt sich die Wirkung erheblich vereinfachen. Sie hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Einführung von Ashtekars Variablen für die vierdimensionale Gravitation, denn wir werden auch hier zu einer holomorphen Wirkung mit einem komplexen Feld übergehen, das wir wieder $A_{\mu a}$ nennen.[5]

[5] Auch hier kann man die Redefinition wahlweise vor [28] oder nach [27] der kanonischen Behandlung durchführen, jedoch ist es sehr viel einfacher, sie vorher durchzuführen.

Allerdings werden alle Realitätsbedingungen bereits als primäre Zwangsbedingungen gegeben sein und der Imaginärteil der Wirkung eine totale Divergenz werden, so daß wir nicht das Programm aus Kapitel I durchlaufen müssen, um die zu zeigen, daß wir die Dirac-Klammern direkt aus der holomorphen Wirkung ablesen können.

Was die kanonische Behandlung der Wirkung in der Form, wie wir sie jetzt haben, erschwert, ist das Auftreten der Ableitung sowohl von χ als auch der von $\bar{\chi}$ in $\mathcal{L}_{(2)}$, das heißt wir würden nichttriviale Zwangsbedingungen zweiter Klasse bekommen, die χ und $\bar{\chi}$ mit ihren Impulsen verknüpfen. Da diese auch noch das Dreibein enthalten, ergeben sich daraus nicht verschwindende Dirac-Klammern von ω_{ia} mit dem Fermion und sogar von ω_{ia} mit sich selbst.

Um die Ableitung auf $\bar{\chi}$ zu eliminieren, führen wir ein neues Lorentz-Eichfeld

$$\mathcal{A}_{\mu a} = \omega_{\mu a} + \varepsilon_{abc} e_\mu{}^b\, \bar{\chi}\gamma^c\chi \tag{5.2.9}$$

ein. Der zusätzliche Term ist imaginär, was sich aus $\bar{\chi} = \mathrm{i}\chi^\dagger\gamma_0$ ergibt.

Dieses neue Eichfeld definiert eine neue Lorentz-kovariante Ableitung, die wir mit $\mathcal{D}_\mu$ bezeichnen und die sich aus (5.2.3) durch Ersetzen von ω durch $\mathcal{A}$ ergibt. Die Feldstärke von $\mathcal{A}_{\mu a}$ ist wieder

$$\mathcal{F}_{\mu\nu a} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu a} - \varepsilon_{abc}\mathcal{A}_\mu{}^b \mathcal{A}_\nu{}^c. \tag{5.2.10}$$

Wir können die Feldstärke von $\omega_{\mu a}$ durch diese ausdrücken und bekommen

$$R_{\mu\nu a} = \mathcal{F}_{\mu\nu a} - 2\varepsilon_{abc}\mathcal{D}_{[\mu}\big(e_{\nu]}{}^b\, \bar{\chi}\gamma^c\chi\big) - \varepsilon_{abc} e_\mu{}^b e_\nu{}^c\, \bar{\chi}\chi\,\bar{\chi}\chi. \tag{5.2.11}$$

Man beachte, daß auf der rechten Seite $\mathcal{A}_{\mu a}$ als Eichfeld auftritt. Da dieses komplex ist, ist $\mathcal{D}_\mu\bar{\chi}$ nicht mehr der zu $\mathcal{D}_\mu\chi$ konjugierte Spinor, das heißt wir definieren alle kovarianten Ableitungen mit $\mathcal{A}_{\mu a}$ als Eichfeld und nicht mit dem konjugierten Feld $\mathcal{A}^*_{\mu a}$.

Setzen wir dies in $\mathcal{L}_{(1)}$ ein. Es ist dann

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} e_\mu{}^a R_{\nu\rho a} &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} e_\mu{}^a \mathcal{F}_{\nu\rho a} - e e_a{}^\mu\, \mathcal{D}_\mu\big(\bar{\chi}\gamma^a\chi\big) + 3e\,\bar{\chi}\chi\,\bar{\chi}\chi,\\ 2\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,\bar{\psi}_\mu D_\nu \psi_\rho &= 2\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,\bar{\psi}_\mu \mathcal{D}_\nu\psi_\rho - \varepsilon^{\mu\nu\rho}\big(\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\chi\,\bar{\chi}\psi_\rho - \bar{\psi}_\mu\chi\,\bar{\chi}\gamma_\nu\psi_\rho\big),\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

wobei wir in der ersten Zeile einmal partiell integriert haben und für die Terme vierter Ordnung in den Fermionen die Fierz-Identität

$$-\,2\bar{\lambda}\chi\,\bar{\eta}\epsilon = \bar{\lambda}\epsilon\,\bar{\eta}\chi + \bar{\lambda}\gamma^a\epsilon\,\bar{\eta}\gamma_a\chi \tag{5.2.13}$$

verwendet haben, die für beliebige Graßmann-wertige Spinoren $\bar{\lambda}, \chi, \bar{\eta}, \epsilon$ gilt.

Wir sehen, daß sich dadurch einige der Terme vierter Ordnung in der Wirkung wegheben und außerdem die Ableitungen auf $\bar{\chi}$ verschwinden. Dazu müssen wir noch zeigen, daß wir in der Dirac-Wirkung für χ die Ableitung D_μ durch $\mathcal{D}_\mu$ ersetzen können. Die Differenz der beiden Ausdrücke ist

$$\begin{aligned}-\bar{\chi}\gamma^\mu\big(\mathcal{D}_\mu - D_\mu\big)\chi &= -\tfrac{1}{2}\bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^a\chi\,\varepsilon_{abc}e_\mu{}^b\,\bar{\chi}\gamma^c\chi\\ \big(\mathcal{D}_\mu - D_\mu\big)\bar{\chi}\gamma^\mu\chi &= -\tfrac{1}{2}\bar{\chi}\gamma^a\gamma^\mu\chi\,\varepsilon_{abc}e_\mu{}^b\,\bar{\chi}\gamma^c\chi.\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Die Summe dieser beiden Terme verschwindet, denn das symmetrisierte Produkt der γ-Matrizen ergibt $e^{\mu a}\mathbf{1}$.

Da wir partiell integriert haben, ist die Lagrange-Funktion komplex geworden. Wenn jedoch die Realitätsbedingungen

$$\operatorname{Im}\big(\mathcal{A}_{\mu a} - \varepsilon_{abc}e_\mu{}^b\,\bar{\chi}\gamma^c\chi\big) = 0 \tag{5.2.15}$$

erfüllt sind, wird der Imaginärteil eine totale Divergenz sein. Wir zerlegen die Wirkung jetzt nur noch in drei Teile, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_{(1)} &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^a\mathcal{F}_{\nu\rho a} + 2\varepsilon^{\mu\nu\rho}\,\bar{\psi}_\mu\mathcal{D}_\nu\psi_\rho,\\ \widetilde{\mathcal{L}}_{(2)} &= -2e\big(g^{\mu\nu}P_\mu P^*_\nu + \bar{\chi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\chi\big),\\ \widetilde{\mathcal{L}}_{(3)} &= 2e\,\bar{\psi}_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\chi\,P^*_\nu + 2e\,\bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_\mu\,\big(P_\nu - \bar{\psi}_\nu\chi\big).\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Es bleibt also nur ein einziger Term übrig, der von vierter Ordnung in den Fermionen ist.

3. Kanonische Formulierung

Für die kanonische Formulierung unseres Modells wählen wir wieder die Koordinate t als Parameterzeit aus. Die Felder spalten dann in einen raumartigen Anteil ψ_i etc. und eine Komponente ψ_t auf. Für das Dreibein wählen wir eine etwas andere Darstellung, das heißt wir verwenden nicht die Komponenten $e_t{}^a$ als Variable, sondern eine Lapse-Funktion n und einen Shift-Vektor n^i mit

$$n^{-1} = eg^{tt}, \quad n^i = g^{ti}/g^{tt} = eng^{ti}. \tag{5.3.1}$$

Für nicht entartete Metriken wird durch diese Größen zusammen mit den räumlichen Komponenten das Dreibein vollständig fixiert, denn es gilt $e_t{}^a = nee^{ta} - n^k e_k{}^a$ und ee^{ta} hängt nur von den räumlichen Komponenten $e_i{}^a$ ab. Man beachte, daß n eine Dichte vom Gewicht -1 unter Diffeomorphismen ist, was nachher wieder zu polynomialen Zwangsbedingungen führen wird.

Wir definieren außerdem eine räumliche Metrik h_{ij}, deren Inverses h^{ij} und die Determinante h durch

$$h_{ij} = g_{ij}, \quad h^{ij} = g^{ij} - (en)^{-1}n^i n^j, \quad h = \det(h_{ij}) = -en^{-1}. \tag{5.3.2}$$

Zu Polynomen in den kanonischen Variablen $e_i{}^a$ werden damit die Größen

$$\tilde{h}^{ij} = hh^{ij} = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{jl}g_{kl}, \quad ee^{ta} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ij}e_{ib}e_{jc}. \tag{5.3.3}$$

Eine nützliche Basis der γ-Matrizen mit gekrümmten Indizes ist

$$\gamma_i = e_i{}^a\gamma_a, \quad e\gamma^t = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ij}\gamma_i\gamma_j = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ij}e_{ia}e_{jb}\gamma_c, \tag{5.3.4}$$

welche ebenfalls Polynome in den kanonischen Variablen sind.

Um die Aufspaltung der Summationen über Raumzeit-Indizes durchzuführen, benutzten wir folgende Formeln, wobei für A, B wahlweise Vektoren oder Spinoren mit zusätzlichen Indizes einzusetzen sind:

$$\begin{aligned} e\,A^\mu B_\mu &= n^{-1}\,A_{\mathrm{n}} B_{\mathrm{n}} - n\tilde{h}^{ij}\,A_i B_j\,,\\ e\,A_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu B_\nu &= n^{-1}\,A_{\mathrm{n}} B_{\mathrm{n}} - n\tilde{h}^{ij}\,A_i B_j + n\varepsilon^{ij}\,A_i e\gamma^{\mathrm{t}} B_j - \varepsilon^{ij}\left(A_{\mathrm{n}}\gamma_i B_j + A_i\gamma_j B_{\mathrm{n}}\right),\\ e\,\gamma^\mu B_\mu &= e\gamma^{\mathrm{t}} B_{\mathrm{n}} + n\varepsilon^{ij}\,e\gamma^{\mathrm{t}}\gamma_i B_j\,. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Der spezielle Index n bezeichnet die Komponente $A_{\mathrm{n}} = A_{\mathrm{t}} + n^k A_k = neA^{\mathrm{t}}$.

Setzen wir das in die Wirkung ein, so bekommen wir für den Gravitations-Anteil den Ausdruck (4.1.39), jedoch müssen wir die Zeitkomponente des Dreibeins $e_{\mathrm{t}}{}^a = nee^{\mathrm{t}a} - n^k e_k{}^a$ einsetzen, und wir bekommen einen zusätzlichen Term von der SO(2)-kovarianten Ableitung des Gravitinos (wir lassen die Tilde für die komplexe Wirkung jetzt wieder weg):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(1)} = &- \varepsilon^{ij} e_i{}^a \dot{\mathcal{A}}_{ja} - 2\varepsilon^{ij}\bar{\psi}_i\dot{\psi}_j + \tfrac{1}{2}\left(nee^{\mathrm{t}a} - n^k e_k{}^a\right)\varepsilon^{ij}\mathcal{F}_{ij\,a}\\ &- \mathrm{i}\varepsilon^{ij}\,\bar{\psi}_i\psi_j\,Q_{\mathrm{t}} + \left(\varepsilon^{ij}\mathcal{D}_i e_j{}^a - \varepsilon^{ij}\,\bar{\psi}_i\gamma^a\psi_j\right)\mathcal{A}_{\mathrm{t}a}\\ &+ 2\varepsilon^{ij}\,\mathcal{D}_i\bar{\psi}_j\psi_{\mathrm{t}} + 2\varepsilon^{ij}\,\bar{\psi}_{\mathrm{t}}\mathcal{D}_i\psi_j\,. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Der Materie-Anteil wird zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(2)} = &- 2n^{-1}P_{\mathrm{n}}P_{\mathrm{n}}^* + 2n\tilde{h}^{ij}P_iP_j^* - 2\bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}\dot{\chi}\\ &- 2n\varepsilon^{ij}\,\bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}\gamma_i\mathcal{D}_j\chi - 2n^k\,\bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}\mathcal{D}_k\chi\\ &+ 3\mathrm{i}\,\bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}\chi\,Q_{\mathrm{t}} - \bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}\gamma_a\chi\,\mathcal{A}_{\mathrm{t}a}\,, \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

und für die gemischten Terme erhalten wir einen etwas komplizierteren Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(3)} = 2n^{-1}&\left(\bar{\psi}_{\mathrm{n}}\chi\,P_{\mathrm{n}}^* + \bar{\chi}\psi_{\mathrm{n}}\,P_{\mathrm{n}} - \bar{\psi}_{\mathrm{n}}\chi\,\bar{\chi}\psi_{\mathrm{n}}\right)\\ &- 2n\tilde{h}^{ij}\left(\bar{\psi}_i\chi\,P_j^* + \bar{\chi}\psi_i\,P_j - \bar{\psi}_i\chi\,\bar{\chi}\psi_j\right)\\ &+ 2n\varepsilon^{ij}\left(\bar{\psi}_i e\gamma^{\mathrm{t}}\chi\,P_j^* - \bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}\psi_i\left(P_j - \bar{\psi}_j\chi\right)\right)\\ &+ 2\varepsilon^{ij}\left(\bar{\psi}_{\mathrm{n}}\gamma_j\chi\,P_i^* - \bar{\psi}_i\gamma_j\chi\,P_{\mathrm{n}}^*\right.\\ &\qquad\left. + \bar{\chi}\gamma_i\psi_{\mathrm{n}}\left(P_j - \bar{\psi}_j\chi\right) - \bar{\chi}\gamma_i\psi_j\left(P_{\mathrm{n}} - \bar{\psi}_{\mathrm{n}}\chi\right)\right). \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Impulse und Zwangsbedingungen

Für das Dreibein, den Spinzusammenhang und die Fermionen ist die Wirkung von erster Ordnung in den Zeitableitungen, wir können also direkt die Impulse und Poisson-Klammern ablesen. Der zu $\mathcal{A}_{ia}$ konjugierte Impuls ist $\varepsilon^{ij} e_j{}^a$, die Klammern werden zu

$$\left\{\mathcal{A}_{ia}, e_j{}^b\right\} = \varepsilon_{ij}\delta_a^b\,, \tag{5.3.9}$$

wobei wir der Einfachheit halber die räumliche Delta-Funktion wieder nicht explizit ausschreiben.

Der zu ψ_i konjugierte Impuls ist $-2\varepsilon^{ij}\bar{\psi}_j$, die Klammer lautet

$$\left\{\psi_i, \bar{\psi}_j\right\} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}\,\mathbf{1}. \tag{5.3.10}$$

Ein wenig komplizierter sieht es für die Materie-Fermionen aus. Der konjugierte Impuls zu χ ist $\bar{\lambda} = 2\bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}$. Wir müssen uns also entscheiden, ob wir dieses als Variable verwenden oder das Feld $\bar{\chi}$. Im ersten Fall haben wir einfachere Klammern

$$\left\{\chi, \bar{\lambda}\right\} = -\mathbf{1}, \tag{5.3.11}$$

müssen aber $\mathcal{L}$ als Funktion von $\bar{\lambda}$ statt von $\bar{\chi}$ darstellen. Es zeigt sich, daß dies der einfachere Weg ist,[6] denn bis auf wenige Ausnahmen tritt in $\mathcal{L}$ bereits die Kombination $\bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}$ auf.

In den Zeitableitungen der bosonischen Felder ist die Wirkung von zweiter Ordnung. Wir führen Impulse genauso ein, wie wir das in Kapitel I für ein allgemeines Sigmamodell getan haben:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{P}_{\mathrm{t}}^*} = -2n^{-1}(P_{\mathrm{n}} - \bar{\psi}_{\mathrm{n}}\chi) - 2\varepsilon^{ij}\,\bar{\psi}_i\gamma_j\chi\,,\\ P^* &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{P}_{\mathrm{t}}} = -2n^{-1}(P_{\mathrm{n}}^* - \bar{\chi}\psi_{\mathrm{n}}) - 2\varepsilon^{ij}\,\bar{\chi}\gamma_i\psi_j\,,\\ Q &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta Q_{\mathrm{t}}} = -\mathrm{i}\varepsilon^{ij}\,\bar{\psi}_i\psi_j + 3\mathrm{i}\bar{\chi}e\gamma^{\mathrm{t}}\chi. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Die Klammern entnehmen wir aus (1.3.23). Sie lauten

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{V}, P\} = \mathcal{V}Y, \quad \{\mathcal{V}, P^*\} = \mathcal{V}Y^*, \quad \{\mathcal{V}, Q\} = \mathcal{V}X,\\ &\{P, Q\} = 2\mathrm{i}P, \quad \{P^*, Q\} = -2\mathrm{i}P^*, \quad \{P, P^*\} = 2\mathrm{i}Q. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Damit haben wir alle Phasenraum-Variablen gefunden, die restlichen Größen $\mathcal{A}_{\mathrm{t}a}, n, n^k, \psi_{\mathrm{t}}$ werden zu Lagrange-Multiplikatoren, die die Zwangsbedingungen erzeugen.

Eine Zwangsbedingung ergibt sich bereits aus (5.3.12), denn der Ausdruck für Q enthält keine Zeitableitung. Wir bekommen die primäre Zwangsbedingung

$$\boldsymbol{T} = -Q - \mathrm{i}\varepsilon^{ij}\,\bar{\psi}_i\psi_j + \tfrac{3\mathrm{i}}{2}\,\bar{\lambda}\chi. \tag{5.3.14}$$

Offenbar erzeugt diese gerade die SO(2)-Rotationen der Felder. Führen wir wieder die "verschmierte" Größe

$$\boldsymbol{T}[q] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\; q\boldsymbol{T} \tag{5.3.15}$$

[6] Zum Vergleich der verschiedenen Zugänge zu den Zwangsbedingungen, die schließlich zu Polynomen in solchen Variablen werden sollen, die zueinander konjugiert sind, siehe [27, 28].

ein (entsprechende Definitionen gelten später auch für die anderen Zwangsbedingungen), so erhalten wir die Klammern

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{V}, \boldsymbol{T}[q]\} = -q\,\mathcal{V}X, \quad \{P, \boldsymbol{T}[q]\} = -2\mathrm{i}qP, \quad \{P^*, \boldsymbol{T}[q]\} = 2\mathrm{i}qP^*,\\
&\{Q_i, \boldsymbol{T}[q]\} = -\partial_i q, \quad \{P_i, \boldsymbol{T}[q]\} = -2\mathrm{i}qP_i, \quad \{P_i^*, \boldsymbol{T}[q]\} = 2\mathrm{i}qP_i^*,\\
&\{\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{T}[q]\} = \tfrac{1}{2}q\,\boldsymbol{\psi}_i, \quad \{\bar{\boldsymbol{\psi}}_i, \boldsymbol{T}[q]\} = -\tfrac{1}{2}q\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_i,\\
&\{\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{T}[q]\} = \tfrac{3\mathrm{i}}{2}q\,\bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad \{\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{T}[q]\} = -\tfrac{3\mathrm{i}}{2}q\,\boldsymbol{\chi}.
\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Die anderen Zwangsbedingungen sind die Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den Zeitkomponenten der Eichfelder. Die Ableitung nach $\mathcal{A}_{ta}$ ergibt die Lorentz-Bedingung

$$\boldsymbol{L}_a = \varepsilon^{ij}\mathcal{D}_i e_{ja} - \varepsilon^{ij}\bar{\boldsymbol{\psi}}_i\gamma_a\boldsymbol{\psi}_j - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\lambda}}\gamma_a\boldsymbol{\chi}. \tag{5.3.17}$$

Die davon erzeugten Transformationen sind

$$\begin{aligned}
&\{e_{ia}, \boldsymbol{L}[\omega^a]\} = -\varepsilon_{abc}\omega^b e_i^{\,c}, \qquad \{\mathcal{A}_{ia}, \boldsymbol{L}[\omega^a]\} = -\mathcal{D}_i\omega_a,\\
&\{\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{L}[\omega^a]\} = \tfrac{1}{2}\omega^a\,\gamma_a\boldsymbol{\psi}_i, \qquad \{\bar{\boldsymbol{\psi}}_i, \boldsymbol{L}[\omega^a]\} = -\tfrac{1}{2}\omega^a\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_i\gamma_a,\\
&\{\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{L}[\omega^a]\} = \tfrac{1}{2}\omega^a\,\gamma_a\boldsymbol{\chi}, \qquad \{\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{L}[\omega^a]\} = -\tfrac{1}{2}\omega^a\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\gamma_a,
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Die Multiplikatoren $\boldsymbol{\psi}_t$ und $\bar{\boldsymbol{\psi}}_t$ liefern die Supersymmetrie-Bedingungen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= 2\varepsilon^{ij}\,\mathcal{D}_i\boldsymbol{\psi}_j^{*} - \boldsymbol{\chi}\,P^* - 2\varepsilon^{ij}\,\gamma_i\boldsymbol{\chi}\,P_j^*,\\
\bar{\boldsymbol{S}}' &= 2\varepsilon^{ij}\,\mathcal{D}_i\bar{\boldsymbol{\psi}}_j - P\,\bar{\boldsymbol{\chi}} - 2\varepsilon^{ij}P_i\,\bar{\boldsymbol{\chi}}\gamma_j + 2\varepsilon^{ij}(\bar{\boldsymbol{\psi}}_i\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\chi}}\gamma_j - \bar{\boldsymbol{\psi}}_i\gamma_j\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\chi}}).
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Die Asymmetrie in diesen beiden Ausdrücken ist liegt wieder daran, daß beide kovarianten Ableitungen mit dem komplexen Eichfeld $\mathcal{A}_{ia}$ gebildet werden. Setzt man dafür (5.2.9) ein, so kann man zeigen, daß die beiden Ausdrücke tatsächlich zueinander komplex konjugiert sind.

Nun tritt in $\bar{\boldsymbol{S}}'$ noch das Feld $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ auf, das wir durch $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ ersetzen wollen. Um das zu tun, müssen wir wieder mit einem Faktor multiplizieren, der die Determinante des Dreibeins enthält, nämlich mit $e\gamma^{\mathrm{t}}$. Wir bekommen dann eine Zwangsbedingung

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \bar{\boldsymbol{S}}'e\gamma^{\mathrm{t}} = 2\varepsilon^{ij}\,\mathcal{D}_i\bar{\boldsymbol{\psi}}_j e\gamma^{\mathrm{t}} - \tfrac{1}{2}P\,\bar{\boldsymbol{\pi}} + \varepsilon^{ij}P_i\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\gamma_j - \varepsilon^{ij}(\bar{\boldsymbol{\psi}}_i\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\gamma_j + \bar{\boldsymbol{\psi}}_i\gamma_j\boldsymbol{\chi}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}), \tag{5.3.20}$$

die wieder mit der gleichen Vorsicht zu behandeln ist wie die entsprechenden Zwangsbedingungen in der vierdimensionalen Theorie, die wir auch jeweils zu einer Dichte vom Gewicht 2 gemacht haben, damit sie zu Polynomen in den kanonischen Variablen werden. Die neue Bedingung $\bar{\boldsymbol{S}} \approx 0$ ist nur dann äquivalent zu der alten $\bar{\boldsymbol{S}}' \approx 0$, wenn $e\gamma^{\mathrm{t}}$ invertierbar ist. Das ist wegen $e\gamma^{\mathrm{t}}e\gamma^{\mathrm{t}} = -h\,\mathbf{1}$ gleichbedeutend damit, daß daß die räumliche Metrik nicht singulär werden darf.

Die verschmierten Supersymmetrie-Bedingungen definieren wir durch

$$\boldsymbol{S}[\bar{\epsilon}] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\bar{\epsilon}\boldsymbol{S}, \quad \bar{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{\eta}] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\bar{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\eta}. \tag{5.3.21}$$

Es verbleiben nun noch die Multiplikatoren n und n^k, die der Hamiltonsche Zwangsbedingung und dem Erzeuger der Diffeomorphismen zugeordnet sind. Die Ableitungen der Lagrange-Funktion ergeben zunächst wieder Bedingungen, die noch das Feld $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ enthalten.[7] Durch eine Addition von Termen, die proportional zu $\bar{\boldsymbol{S}}'$ sind, läßt es sich aber eliminieren, das heißt wir brauchen nicht zu Funktionen von noch höherem Gewicht als 2 überzugehen. Die polynomialen Ausdrücke werden zu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \tfrac{1}{2}ee^{\mathrm{t}a}\varepsilon^{ij}\mathcal{F}_{ija} - \varepsilon^{ij}\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\gamma_i\mathcal{D}_j\boldsymbol{\chi} + \tfrac{1}{2}P^*(P + 2\varepsilon^{ij}\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_i\gamma_j\boldsymbol{\chi}) + 2\tilde{h}^{ij}P_i^*(P_j - \bar{\boldsymbol{\psi}}_j\boldsymbol{\chi})\\
&\quad + 2\varepsilon^{ij}(P_i - \bar{\boldsymbol{\psi}}_i\boldsymbol{\chi})\,\bar{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\psi}_j - 2\varepsilon^{ij}P_i^*\bar{\boldsymbol{\psi}}_j e\gamma^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\chi} + 2\varepsilon^{ij}\varepsilon^{kl}D_i\bar{\boldsymbol{\psi}}_j\gamma_k\boldsymbol{\psi}_l,\\
\boldsymbol{K}_k &= -\tfrac{1}{2}e_k^{\,a}\varepsilon^{ij}\mathcal{F}_{ija} - 2\varepsilon^{ij}\,\mathcal{D}_i\bar{\boldsymbol{\psi}}_j\boldsymbol{\psi}_k - \bar{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{D}_k\boldsymbol{\chi}\\
&\quad + P_k^*(P + 2\varepsilon^{ij}\,\bar{\boldsymbol{\psi}}_i\gamma_j\boldsymbol{\chi}) + P^*(P_k - \bar{\boldsymbol{\psi}}_k\boldsymbol{\chi}) + \varepsilon^{ij}P_i^*\bar{\boldsymbol{\psi}}_j\gamma_k\boldsymbol{\chi}.
\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Neben den Diffeomorphismen erzeugt $\boldsymbol{K}_a$ wieder zusätzliche interne Transformationen. Den echten Erzeuger der Diffeomorphismen erhalten wir durch Abziehen der anderen "kinematischen" Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_k &= \boldsymbol{K}_k - Q_k\boldsymbol{T} - \mathcal{A}_k^{\,a}\boldsymbol{L}_a - \bar{\boldsymbol{\psi}}_k\boldsymbol{S}\\
&= -\varepsilon^{ij}(\partial_i\mathcal{A}_{ja}e_k^{\,a} + \mathcal{A}_{ka}\partial_i e_j^{\,a}) - 2\varepsilon^{ij}(\partial_i\bar{\boldsymbol{\psi}}_j\boldsymbol{\psi}_k + \bar{\boldsymbol{\psi}}_k\partial_i\boldsymbol{\psi}_j)\\
&\quad + P_k^*P + P^*P_k + QQ_k - \bar{\boldsymbol{\lambda}}\partial_k\boldsymbol{\chi}.
\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Die Poisson-Algebra

Wir können die Zwangsbedingungen wieder in zwei Gruppen aufteilen, die kinematischen Bedingungen, die eine Unteralgebra bilden, "einfache" Symmetrie-Transformationen auf den Feldern erzeugen und Funktionen vom Gewicht 1 unter räumlichen Diffeomorphismen sind, und die dynamischen Zwangsbedingungen, die wieder in gewissem Sinne die Zeitentwicklung beschreiben. Letztere sind Funktionen vom Gewicht 2 und werden in der quantisierten Theorie zu Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Die kinematischen Bedingungen sind also $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{L}_a$, $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{S}$. Ihre Algebra ist wie üblich gegeben durch die jeweilige Wirkung einer der Eichtransformationen auf den Parameter des

[7] Siehe [28] für eine explizite Berechnung dieser Zwangsbedingungen. Man beachte, daß die dortige Lagrange-Funktion um einen Faktor 2 von der hier verwendeten abweicht, so daß auch die Impulse und die Klammern verschieden sind, sich aber die gleiche Algebra für die Zwangsbedingungen ergibt.

anderen Erzeugers. Für die Diffeomorphismen finden wir

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{D}[\xi'^k], \boldsymbol{D}[\xi^k]\} &= \boldsymbol{D}[\xi^l\partial_l\xi'^k - \xi'^l\partial_l\xi^k], \\ \{\boldsymbol{T}[q], \boldsymbol{D}[\xi^k]\} &= \boldsymbol{T}[\xi^k\partial_k q], \\ \{\boldsymbol{L}[\omega^a], \boldsymbol{D}[\xi^k]\} &= \boldsymbol{L}[\xi^k\partial_k\omega^a], \\ \{\boldsymbol{S}[\bar\epsilon], \boldsymbol{D}[\xi^k]\} &= \boldsymbol{S}[\xi^k\partial_k\bar\epsilon], \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

und die einzigen weiteren nicht verschwindenden Klammern sind

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{L}[\omega'^a], \boldsymbol{L}[\omega^a]\} &= \boldsymbol{L}[\varepsilon^{abc}\omega_b\omega'_c], \\ \{\boldsymbol{S}[\bar\epsilon], \boldsymbol{L}[\omega^a]\} &= \boldsymbol{S}[\tfrac{1}{2}\omega^a\,\bar\epsilon\gamma_a], \\ \{\boldsymbol{S}[\bar\epsilon], \boldsymbol{T}[q]\} &= \boldsymbol{S}[\tfrac{\mathrm{i}}{2}q\,\bar\epsilon]. \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

Die kinematischen Bedingungen sind also dadurch ausgezeichnet, daß die Strukturfunktionen in ihrer Algebra feldunabhängig sind. Es wird daher kein Problem sein, diese zu quantisieren und eine Darstellung anzugeben, in der ihre Algebra erhalten bleibt.

Was die dynamischen Bedingungen betrifft, gilt natürlich auch hier, daß die Klammer von $\bar{\boldsymbol{S}}$ mit $\boldsymbol{S}$ unter anderem die Hamiltonsche Bedingung liefert. Die entsprechende Relation ist

$$\{\boldsymbol{S}[\bar\epsilon], \bar{\boldsymbol{S}}[\eta]\} = \boldsymbol{H}[-\bar\epsilon\eta] + \boldsymbol{K}[\varepsilon^{kl}\,\bar\epsilon\gamma_l\eta] + \boldsymbol{T}[2\mathrm{i}\,\bar\lambda\eta\,\bar\epsilon\chi] + \boldsymbol{L}[2\,\bar\lambda\eta\,\bar\epsilon\gamma^a\chi]. \tag{5.3.26}$$

Hier treten neben $\boldsymbol{H}$ noch andere Zwangsbedingungen mit feldabhängigen Strukturfunktionen auf, das heißt bei der Quantisierung wird sich das Problem ergeben, die Operatoren so zu ordnen, daß alle diese Strukturfunktionen links von den Zwangsbedingungen zu stehen kommen.

Der komplette Satz von Zwangsbedingungen wird also erzeugt durch die kinematischen Bedingungen und $\bar{\boldsymbol{S}}$. Wir können sogar den Erzeuger der Diffeomorphismen weglassen, denn auch dieser ergibt sich aus (5.3.26). Genaugenommen bekommen wir aber nur die matrixwertige Funktion $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}\mathbf{1} - \varepsilon^{kl}\boldsymbol{K}_k\gamma_l$, und nur wenn das Dreibein invertierbar ist, können wir aus $\boldsymbol{C} \approx 0$ auf $\boldsymbol{K}_k \approx 0$ schließen. Oder wir ersetzen die Bedingungen $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}_k$ durch $\boldsymbol{C}$, bekommen dann aber wieder die bereits in Kapitel III diskutierten Probleme (siehe (3.3.27)).

Als einzige weitere Relation geben wir noch die Klammer von $\bar{\boldsymbol{S}}$ mit sich selbst an. Es ist

$$\{\bar{\boldsymbol{S}}[\eta], \bar{\boldsymbol{S}}[\eta']\} = \bar{\boldsymbol{S}}[2\varepsilon^{ij}\gamma_i\eta'\,\bar\psi_j\eta + 2\varepsilon^{ij}\eta'\,\bar\psi_j\gamma_i\eta]. \tag{5.3.27}$$

Auf den ersten Blick erscheint der Ausdruck nicht antisymmetrisch in η und η', man kann dies aber durch Verwenden der Fierz-Identität zeigen.

Die restlichen Klammern sollten natürlich auch schwach verschwinden, also Linearkombinationen der Zwangsbedingungen selbst sein. Wir rechnen sie hier nicht explizit aus, sondern folgern das aus der Tatsache, daß die Theorie in der Euler-Lagrange-Formulierung konsistent ist und die durch die Zwangsbedingungen erzeugten lokalen Symmetrien besitzt.

Bevor wir zum Abschluß ein paar Ansätze zur Quantisierung dieses Modells betrachten, erinnern wir uns noch einmal an das Ergebnis der Diskussion über Sigmamodelle in Kapitel I, wo wir festgestellt hatten, daß die Wirkung eine globale Symmetrie besitzt, wenn sie nur über die P_μ von $\mathcal{V}$ abhängt. Das ist natürlich hier immer noch der Fall, und wir können direkt aus (1.3.62) die erhaltene Ladung entnehmen. In Matrix-Schreibweise lautet sie

$$\mathcal{Q} = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\mathcal{V}(PY^* + P^*Y - QX)\mathcal{V}^{-1} \tag{5.3.28}$$

Um nachzuweisen, daß diese Größe mit allen Zwangsbedingungen vertauscht, müssen wir nur benutzen, daß die Klammern von $\mathcal{Q}$ sowohl mit den "Ableitungen" P_i, P_i^* und Q_i von $\mathcal{V}$ (in diesem Sinne ist die von $\mathcal{Q}$ erzeugte Symmetrie tatsächlich so etwas wie eine Verschiebung um eine Konstante) als auch mit den Impulsen P, P^* und Q verschwinden, was wir bereits aus Kapitel I wissen.

Damit ist $\mathcal{Q}$ eine Observable im Sinne von Dirac, die für einen gegebenen Zustand die Ladung bezüglich der globalen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Symmetrie mißt. Wir können mit ihrer Hilfe wie für das Klein-Gordon-Feld in vier Dimensionen aus einem physikalischen Zustand einen neuen erzeugen, indem wir den entsprechenden Operator darauf anwenden; jedoch nur wenn der Zustand kein Eigenvektor zu $\mathcal{Q}$ ist.

4. Quantisierung

Wir definieren die Operatoren wieder so, daß ihre Kommutatoren das $-\mathrm{i}$-fache der Poisson-Klammern sind und die quantisierten Zwangsbedingungen als das i-fache der klassischen Bedingungen.

Für die bosonischen Materiefelder wählen wir die Darstellung (1.3.28) aus Kapitel I, also

$$\widehat{\mathcal{V}} = \mathcal{V}, \quad \widehat{P} = \mathrm{Tr}\Big(\mathcal{V}Y\frac{\delta}{\delta\mathcal{V}}\Big), \quad \widehat{P}^* = \mathrm{Tr}\Big(\mathcal{V}Y^*\frac{\delta}{\delta\mathcal{V}}\Big), \quad \widehat{Q} = \mathrm{Tr}\Big(\mathcal{V}X\frac{\delta}{\delta\mathcal{V}}\Big), \tag{5.4.1}$$

Für die anderen Felder haben wir jeweils die Wahl, welches der zueinander konjugierten Felder wir zu einem Multiplikationsoperator machen wollen. Es gibt aber eine ausgezeichnete Darstellung, in der alle Zwangsbedingungen zu homogenen Differentialoperatoren werden und die kinematischen Zwangsbedingungen auf dem Wellenfunktional genau die Transformationen erzeugen, die sie auch auf den klassischen Feldern erzeugen.

Wir setzen

$$\widehat{e}_i^{\,a} = -\mathrm{i}\varepsilon_{ij}\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ja}}, \quad \widehat{\bar\lambda} = \mathrm{i}\,\frac{\delta}{\delta\chi}, \quad \widehat{\psi}_i = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ij}\,\frac{\delta}{\delta\bar\psi_j}, \tag{5.4.2}$$

und das Wellenfunktional wird von den übrigen Feldern $\mathcal{A}_{ia}$, $\bar\psi_i$, $\mathcal{V}$ und χ abhängen.

Die kinematischen Zwangsbedingungen

Die kinematischen Bedingungen sind nun homogene Differentialoperatoren erster Ordnung und außer in $\boldsymbol{T}$ ergeben sich keine Ordnungsprobleme. Damit $\boldsymbol{T}$ ein wohldefinierter Operator wird und sich die gleiche Algebra (5.3.24) ergibt, müssen wir jedoch die Ordnung so wählen, daß alle Ableitungen rechts stehen. Die kinematischen Bedingungen verlangen somit, daß das Wellenfunktional invariant ist unter Diffeomorphismen, Lorentz- und SO(2)-Transformationen, sowie unter den durch

$$\widehat{\boldsymbol{S}}[\bar\epsilon] = \int d^2\boldsymbol{x} \left(\mathcal{D}_i \bar\epsilon \,\frac{\delta}{\delta\bar\psi_i} + \bar\epsilon\boldsymbol{\chi}\, \mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1} Y^* \frac{\delta}{\delta\mathcal{V}}) - 2\,\bar\epsilon\gamma_a\boldsymbol{\chi}\, P_i^* \frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ia}} \right) \tag{5.4.3}$$

erzeugten Supersymmetrie-Tranformationen. Aus dieser Darstellung können wir entnehmen, daß hier keine nicht kommutierenden Operatoren miteinander multipliziert werden.

Wir können sogar die endlichen Transformationen angeben, die dieser Operator erzeugt, denn er ist genau wie sein vierdimensionales Analogon in (3.4.9) nilpotent; jedoch erst in dritter Ordnung, denn der Faktor vor der Ableitung nach dem Gravitino enthält den Spinzusammenhang, auf den der letzte Ableitungsterm wirkt.

Durch Aufsummieren der Exponentialreihe bis zur zweiten Ordnung finden wir dann die endlichen Transformationen

$$\boldsymbol{\chi} \mapsto \boldsymbol{\chi}, \quad \bar\psi_i \mapsto \bar\psi_i + \mathcal{D}_i\bar\zeta - 2P_i^*\bar\zeta\boldsymbol{\chi}\,\bar\zeta \tag{5.4.4}$$

für die Fermionen und

$$\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V} + \bar\zeta\boldsymbol{\chi}\,\mathcal{V}Y^*, \quad \mathcal{A}_{ia} \mapsto \mathcal{A}_{ia} - 2P_i^*\bar\zeta\gamma_a\boldsymbol{\chi} \tag{5.4.5}$$

für die bosonischen Felder, wobei wir den endlichen Parameter mit $\bar\zeta$ bezeichnet haben. Daraus leitet man für die zusammengesetzten Felder ab:

$$P_i \mapsto P_i + \mathcal{D}_i(\bar\zeta\boldsymbol{\chi}) - 2P_i^*\bar\zeta\boldsymbol{\chi}\,\bar\zeta\boldsymbol{\chi}, \quad Q_i \mapsto Q_i - 2\mathrm{i}P_i^*\bar\zeta\boldsymbol{\chi}, \tag{5.4.6}$$

während P_i^* invariant bleibt. Natürlich müssen wir alle Felder komplexifizieren, um diese Transformationen definieren zu können.

Ein möglicher Lösungsansatz für $\boldsymbol{S}$ besteht nun darin, invariante Funktion so zu definieren, daß man auf einer "Hyperfläche" im Raum aller Felder, die von jeder "$\bar\zeta$-Trajektorie" genau einmal geschnitten wird, eine Funktion vorgibt und diese dann konstant entlang der Trajektorien fortsetzt.

Die Angabe einer solchen Hyperfläche ist natürlich nichts anderes als eine Eichfixierung für das Gravitino. Betrachten wir als Beispiel eine Eichung der Form $c^i\psi_i = 0$ für ein vorgegebenes Vektorfeld c^i. Um für eine Feldkonfiguration den Parameter $\bar\zeta$ zu finden, der die entsprechende Transformation erzeugt, müssen wir dann die Differentialgleichung

$$c^i\,(\bar\psi_i + \mathcal{D}_i\bar\zeta - 2P_i^*\bar\zeta\boldsymbol{\chi}\bar\zeta) = 0 \tag{5.4.7}$$

lösen. Es ist überhaupt nicht klar, daß diese eine Lösung besitzt, doch wollen wir dieses Problem im Moment einmal zurückstellen. Auch die Graßmann-Wertigkeit erschwert die Lösung dieser Gleichung ein wenig. Nehmen wir also an, wir könnten die Gleichung lösen. Dann bekommen wir zu jeder Feldkonfiguration ϕ eine "geeichte" Konfiguration ϕ', die wir durch Ausführen eine Supersymmetrie-Transformation mit dem aus der Gleichung gefundenen $\bar\zeta$ erhalten.

Wir definieren dann $\Psi[\phi] = \Psi'[\phi']$, wobei Ψ' eine Lorentz- und SO(2)-invariante Funktion ist und erhalten so eine Lösung von $\boldsymbol{S}$. Natürlich ist diese Konstruktion ein wenig formal und eine exakte Formulierung würde einige Schwierigkeiten bereiten. So müssen wir, um wirklich eine Lösung von $\boldsymbol{S}$ zu bekommen, die Eichung *vollständig* festlegen. Die Gleichung (5.4.7) reicht nicht aus, um $\bar\zeta$ eindeutig zu fixieren.

Da die anderen Eichfelder $\mathcal{A}_{ia}$ und Q_i ein relativ einfaches Transformationsverhalten zeigen, können wir aber versuchen, etwas ähnliches wie die Schleifen-Lösungen zu konstruieren, indem wir die Eichfelder durch die transformierten Eichfelder ersetzen und daraus einen Transportoperator analog zu (4.2.10) konstruieren.

Betrachten wir also eine Kurve α mit Parameter s. Dann definieren wir für ein gegebenes Spinorfeld $\bar\zeta(s)$ auf der Kurve einen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(2)$ Zusammenhang, und zwar nur entlang der Kurve, durch

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_i = \tfrac{1}{2}(\mathcal{A}_{ia} - 2P_i^*\bar\zeta\gamma_a\boldsymbol{\chi})\,\boldsymbol{\gamma}^a + \tfrac{\mathrm{i}}{2}(Q_i - 2\mathrm{i}P_i^*\bar\zeta\boldsymbol{\chi})\,\mathbf{1}. \tag{5.4.8}$$

Daraus können wir dann einen Transportoperator

$$U_\alpha(a,b) = \mathcal{P}\exp\int_a^b ds\,\dot\alpha^i\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_i \tag{5.4.9}$$

bilden. Wie verhält sich dieser nun unter lokalen Symmetrien? Damit wir das richtige Verhalten unter Lorentz- und SO(2)-Rotationen bekommen, muß $\bar\zeta$ eine Funktion der Felder werden, die wie ein Gravitino transformiert. Dann "spürt" der Transportoperator nur die internen Rotationen an den Enden.

Wir nehmen also an, $\bar\zeta$ sei als eine solche Funktion gegeben. Dann ergibt eine (infinitesimale) Supersymmetrie-Transformation

$$\widehat{\boldsymbol{S}}[\bar\epsilon]\,U_\alpha(a,b) = \int_a^b ds\,U_\alpha(a,s)\,\dot\alpha^i\delta\boldsymbol{\mathcal{A}}_i\,U_\alpha(s,b), \tag{5.4.10}$$

wobei

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{A}}_i = (P_i^*(\bar\epsilon + \delta\bar\zeta)\boldsymbol{\chi})\,\mathbf{1} - (P_i^*(\bar\epsilon + \delta\bar\zeta)\gamma_a\boldsymbol{\chi})\,\boldsymbol{\gamma}^a \tag{5.4.11}$$

Die Variation $\delta\bar\zeta(s) = \widehat{\boldsymbol{S}}[\bar\epsilon]\,\bar\zeta(s)$ hängt natürlich davon ab, wie es als Funktion von den anderen Feldern definiert ist. Nehmen wir an es ist an irgendeiner Stelle, sagen wir $s = 0$, durch ein $\bar\zeta_0$ gegeben, und ansonsten durch die Differentialgleichung (5.4.7) entlang der Kurve:

$$\mathcal{D}_s\bar\zeta - 2P_s^*\bar\zeta\boldsymbol{\chi}\bar\zeta - \bar\psi_s = 0, \tag{5.4.12}$$

wobei der Index s die Komponente tangential zur Kurve $\bar{\psi}_s = \dot{\alpha}^i \bar{\psi}_i$ etc. bezeichnet.

Wenden wir auf diese Gleichung $\boldsymbol{S}$ an, so erhalten wir eine Differentialgleichung für $\delta\bar{\zeta}$, die wir nach einigen Umformungen schreiben können als

$$\partial_s(\delta\bar{\zeta} + \bar{\epsilon}) - (\delta\bar{\zeta} + \bar{\epsilon})\mathcal{A}_s = 0. \tag{5.4.13}$$

Dies ist gerade die mit dem Zusammenhang (5.4.8) gebildete kovariante Ableitung und wir können die Lösung dafür durch der Transportoperator ausdrücken:

$$(\delta\bar{\zeta} + \bar{\epsilon})(s) = (\delta\bar{\zeta} + \bar{\epsilon})(0)U_\alpha(0, s). \tag{5.4.14}$$

Wenn wir das in (5.4.11) einsetzen, sehen wir, daß die Variation von U_α unter Supersymetrie-Transformationen nur noch von dem Parameter $\bar{\epsilon}$ an der Stelle $\alpha(0)$ abhängt und von der Variation von $\bar{\zeta}_0$. Wenn $\delta\bar{\zeta}_0 = 0$ ist, haben wir in gewissem Sinne alle Supersymmetrie-Bedingungen bis auf eine gelöst, nämlich die an der Stelle $\boldsymbol{x} = \alpha(0)$.

Eine andere Möglichkeit, eine Lösung von $\boldsymbol{S}$ zu erhalten, ist, eine Funktion $\bar{\zeta}_0$ zu finden, für die gilt

$$\widehat{\boldsymbol{S}}[\bar{\epsilon}]\,\bar{\zeta}_0 = -\bar{\epsilon}(\alpha(0)). \tag{5.4.15}$$

Dann gilt natürlich auf der ganzen Kurve $\delta\bar{\zeta} + \bar{\epsilon} = 0$ und jede Funktion von $\mathcal{A}$ ist invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Das ist aber nicht einfach, denn der einzige zur Verfügung stehende Spinor mit dem richtigen Verhalten unter Lorentz- und SO(2)-Rotationen ist $\bar{\psi}_i$, welches unter Supersymmetrie mit der Ableitung von $\bar{\epsilon}$ transformiert. Um daraus ein passendes $\bar{\zeta}_0$ zu konstruieren, müssen wir entlang einer Kurve integrieren, und dazu benötigen wir wieder den Transport-Operator von oben.

Unabhängig davon, ob sich eine solche Lösung tatsächlich konstruieren läßt, können wir daraus keine neuen Lösungen erzeugen, indem wir den Ladungsoperator darauf anwenden. Obwohl er immer noch mit allen Zwangsbedingungen vertauscht, wenn wir ihn gemäß

$$\widehat{Q} = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\, \mathcal{V} \frac{\delta}{\delta\mathcal{V}} \tag{5.4.16}$$

definieren, so repräsentieren Wellenfunktionale, die nur über P_i^* und P_i von $\mathcal{V}$ abhängen, Zustände mit Ladung $Q = 0$, denn es ist $\widehat{Q}\,P_i^* = 0$. Die aus obigem Ansatz resultierenden Zustände würden also von dem Ladungsoperator annihiliert, im Gegensatz zu den Zuständen, die wir in Kapitel II, Abschnitt 5 für die vierdimensionale Gravitation mit angekoppelten skalaren Feldern gefunden haben.

Die dynamischen Zwangsbedingungen

Zum Schluß betrachten wir noch die Struktur der dynamischen Zwangsbedingungen. Da wir $\boldsymbol{H}$ als Kommutator von $\bar{\boldsymbol{S}}$ mit $\boldsymbol{S}$ darstellen können, müssen wir nur $\bar{\boldsymbol{S}}$ und die kinematischen Zwangsbedingungen lösen, um eine Lösung aller Bedingungen zu bekommen.

Explizit hat $\bar{\boldsymbol{S}}$ die Form

$$\begin{aligned}\widehat{\bar{\boldsymbol{S}}}[\boldsymbol{\eta}] = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \Big(&2\mathrm{i}\varepsilon_{abc}\,\mathcal{D}_i\bar{\psi}_j\gamma^a\boldsymbol{\eta}\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ib}}\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{jc}} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{Tr}\big(\mathcal{V}Y\frac{\delta}{\delta\mathcal{V}}\big)\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\chi}}\boldsymbol{\eta} \\ &+\mathrm{i}(P_i - \bar{\psi}_i\boldsymbol{\chi})\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ia}}\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\chi}}\gamma_a\boldsymbol{\eta} - \mathrm{i}\,\bar{\psi}_i\gamma_a\boldsymbol{\chi}\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ia}}\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\chi}}\boldsymbol{\eta}\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Hier ist natürlich wieder eine Regularisierung notwendig. Die folgenden Betrachtungen sind also nur formal.

Außerdem treten hier erstmals Produkte von nicht vertauschenden Operatoren auf. Wir haben die Ordnung dadurch festgelegt, daß wir alle Differentialoperatoren nach rechts geschrieben haben. Die Ordnung des Wheeler-DeWitt-Operators definieren wir dann einfach durch die Vertauschungsrelation, so daß dies auch die einzige Stelle ist, an der wir uns für eine Ordnung entscheiden müssen.

Wie unterscheiden sich nun verschiedene Ordnungen? Als erstes stellen wir fest, daß wir bei jeder Vertauschung von nicht kommutierenden Operatoren stets den gleichen divergierenden Term

$$\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\,\bar{\psi}_i\gamma_a\boldsymbol{\eta}\,\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}_{ia}} \tag{5.4.18}$$

erzeugen, nur jeweils mit verschiedenen Vorfaktoren. Das gilt für das Vertauschen von $\mathcal{D}_i$ mit $\delta/\delta\mathcal{A}_{ia}$ im ersten Term von $\bar{\boldsymbol{S}}$ als auch für das Vertauschen von $\boldsymbol{\chi}$ und $\delta/\delta\boldsymbol{\chi}$ in den beiden letzten Termen.

Eine Eigenschaft von $\bar{\boldsymbol{S}}$ ist nun die, daß sich diese Beiträge gegenseitig genau wegheben, wenn wir alle Differential-Operatoren nach links bringen. Dies ist deswegen interessant, weil wir in der vierdimensionalen Theorie gefunden haben, daß die Algebra der Zwangsbedingungen nur schließt, wenn wir eine bestimmte Ordnung auswählen. Daß hier verschiedenen Ordnungen äquivalent sind, deutet darauf hin, daß die Supersymmetrie tatsächlich zu einer Aufhebung von Anomalien führen kann.

Ganz so einfach ist das aber auch nicht, denn wir haben noch nicht gezeigt, daß die Algebra wirklich schließt. Dazu müssen wir zunächst die quantisierten Versionen von (5.3.26) und (5.3.27) untersuchen. Für den Kommutator von $\bar{\boldsymbol{S}}$ mit sich selbst finden wir, daß die Relation (5.3.27) genau so erhalten bleibt, und zwar unabhängig von der Ordnung. Die dort auftretende Strukturfunktion steht allerdings auf der rechten Seite, wenn wir die Ordnung wie in (5.4.17) wählen. Tauschen wir jedoch das in der γ-Matrix stehende Dreibein durch $\bar{\boldsymbol{S}}$ hindurch, finden wir, daß sich alle divergenten Terme (zumindest formal) wegheben.

Es bleibt also die Relation (5.3.26). Berechnen wir den Kommutator von $\bar{\boldsymbol{S}}$ mit $\boldsymbol{S}$, mit allen Differentialoperatoren nach rechts, so bekommen wir die gleiche Relation, wobei die Strukturfunktionen von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{L}$ links, die von $\boldsymbol{K}$ aber rechts zu stehen kommen. Versuchen wir, den entsprechenden Term nach links zu bringen, so erhalten wir formal und bis auf Terme, die die Ableitung der Delta-Funktion enthalten

$$\varepsilon^{kl}\,\widehat{\boldsymbol{K}}_k(\boldsymbol{x})\,\widehat{e}_{la}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{kl}\,\widehat{e}_{la}(\boldsymbol{x})\,\widehat{\boldsymbol{K}}_k(\boldsymbol{x}) + \delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\big(\widehat{\overline{\lambda}}\gamma_a\widehat{\chi} - 2\widehat{\boldsymbol{L}}_a\big) \tag{5.4.19}$$

Man beachte, das die Rechnungen an dieser Stelle hochgradig formal sind und ohne eine Regularisierung eigentlich nicht definiert sind. Was können wir trotzdem aus dieser Darstellung entnehmen? Zum einen finden wir Terme, die wieder proportional zu anderen Zwangsbedingungen sind. Solche Terme verändern zwar die klassische Algebra, führen aber nicht zu Anomalien, denn die Zwangsbedingungen sind immer noch solche erster Klasse, lediglich die Strukturfunktionen (in einer regularisierten Version) divergieren.

Der Term proportional zu den Fermionen, der in der letzten Gleichung auftritt, ist jedoch ein wenig problematischer. Man kann zeigen, daß er sich (wieder nur formal) durch Änderung der Ordnung in $\boldsymbol{T}$ wegheben läßt, denn er ist proportional zur $\boldsymbol{T}$-Komponente der Strukturfunktion in (5.3.26). Dann aber erzeugt $\boldsymbol{T}$ nicht mehr die richtigen Transformationen auf dem Wellenfunktional und die Algebra der kinematischen Zwangsbedingungen schließt nicht mehr.

Ob irgendeine Operatorordnung zu einer geschlossenen Algebra führt, ist nicht bekannt, und selbst wenn wir eine solche finden würde, bliebe das Ergebnis zunächst formal, genau wie auch für die anderen untersuchten Modelle mit Ausnahme der materiefreien dreidimensionalen Theorie, die wir exakt lösen konnten. Da schon die formalen Rechnungen sehr aufwendig sind, scheint es fast unmöglich zu sein, in einer regularisierten Version eine sich schließende Algebra zu finden, denn man müßte auch noch nachweisen, daß die Kommutatoren von $\boldsymbol{S}$ und $\bar{\boldsymbol{S}}$ mit $\boldsymbol{H}$ wieder schwach verschwinden, die von $\boldsymbol{H}$ mit sich selbst ergeben sich dann aus der Jacobi-Identität.

HM

LITERATUR

Lies nicht so viel,
das verwirrt nur.
[26]

[1] E. Lönnrot. *Kalevala.* Suomalainen Kirjallisuuden Seura, Helsinki, 1835.

[2] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics.* Academic Press, New York, 1965.

[3] A.J. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim. *Constrained Hamiltonian Systems.* Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.

[4] R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner. The dynamics of general relativity. In L. Witten, editor, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, Wiley, New York, 1962.

[5] C.W. Misner, K.S. Thorn, and J.A. Wheeler. *Gravitation.* Freeman, New York, 1973.

[6] J.A. Wheeler. Geometrodynamics and the issue of the final state. In C. DeWitt and B. DeWitt, editors, *Relativity, Groups and Topology*, Gordon and Breach, New York, 1964.

[7] B. DeWitt. Quantum theory of gravity I, II. *Phys. Rev.*, 160:1113, 1967. *Phys. Rev.*, 162:1195, 1967.

[8] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2244, 1986.

[9] A. Ashtekar. New Hamiltonian formulation of general relativity. *Phys. Rev.*, D36:1587, 1987.

[10] T. Jacobson and L. Smolin. The left-handed spin connection as a variable for canonical gravity. *Phys. Lett.*, B196:39, 1987.

[11] T. Jacobson and L. Smolin. Covariant action for Ashtekar's form of canonical gravity. *Class. Quant. Grav.*, 5:583, 1988.

[12] R. Capovilla, J. Dell, and T. Jacobson. General relativity without a metric. *Phys. Rev. Lett.*, 63:2325, 1989.

[13] A. Ashtekar. *New Perspectives in Canonical Gravity.* Bibliopolis, Napoli, 1988.

[14] T. Fukuyama and K. Kamimura. Complex action and quantum gravity. *Phys. Rev.*, D41:1105, 1990.

[15] T. Jacobson and L. Smolin. Nonpertubative quantum geometries. *Nucl. Phys.*, B299:295, 1988.

[16] C. Rovelli and L. Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nucl. Phys.*, B331:80, 1990.

[17] B. Brügmann and J. Pullin. Intersecting N loop solutions of the Hamiltonian constraint of quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B363:221, 1991.

[18] B. Brügmann, R. Gambini, and J. Pullin. *Knot Invariants as Nondegenerate Quantum Geometries.* Preprint SU-GP-92/1-1, SU-GP-92/3-1, Syracuse University, 1992.

[19] H.-J. Matschull. Solutions to the Wheeler DeWitt constraint of canonical gravity coupled to scalar matter fields. *Class. Quant. Grav.*, 10:L149, 1993.

[20] H.-J. Matschull. *About Loop States in Supergravity.* Preprint DESY-94-037, DESY, 1994.

[21] P.D. D'Eath. Canonical quantization of supergravity. *Phys. Rev.*, D29:2199, 1984.

[22] T. Jacobson. New variables for canonical supergravity. *Class. Quant. Grav.*, 5:923, 1988.

[23] E. Witten. (2+1)-dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nucl. Phys.*, B311:46, 1988.

[24] B. de Wit, H.-J. Matschull, and H. Nicolai. Physical states in d=3, N=2 supergravity. *Phys. Lett.*, B318:115, 1993.

[25] H. Nicolai. Two-dimensional gravities and supergravities as integrable systems. In H. Mitter and H. Gausterer, editors, *Recent Aspects of Quantum Fields*, Schladming Proceedings, Springer Verlag, 1991.

[26] R.W. Gebert, H.-J. Matschull und J. Teschner. Graduiertenkolleg "Theoretische Elementarteilchenphysik" der Universität Hamburg, 1991-1994. Unveröffentlicht.

[27] H. Nicolai and H.-J. Matschull. Aspects of canonical gravity and supergravity. *Jour. Geom. Phys.*, 11:15, 1993.

[28] H. Nicolai and H.-J. Matschull. Canonical supergravity in three dimensions. *Nucl. Phys.*, B411:609, 1994.

[29] G. Chapman, J. Cleese, T. Gilliam, E. Idle, T. Jones, and M. Palin. *Monty Python's Flying Circus.* BBC, London, 1968.

[30] M. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring Theory I,II.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[31] V. Bargmann. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 14:187, 1961.

[32] J.M. Jauch. *Foundations of Quantum Mechanics.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

[33] M. Forger, J. Laartz, and U. Schaper. The algebra of the energy momentum tensor and the Noether currents in classical nonlinear sigma models. *Comm. Math. Phys.*, 146:397, 1992.

[34] H. Nicolai and H.-J. Matschull. Canonical treatment of coset space sigma-models. In *Journees Relativistes*, Proceedings, Bruxelles, 1993.

[35] H.-J. Matschull. *Dimensionale Regularisierung und Betafunktionen für das heterotische Sigma-Modell.* Diplomarbeit HD-THEP-90-5, Universität Heidelberg, 1990.

[36] B. de Wit, H. Nicolai, and A. Tollsten. Locally supersymmetric d=3 nonlinear sigma models. *Nucl. Phys.*, B392:3, 1993.

[37] L. Smolin. *Time, Measurement and Information Loss in Quantum Cosmology.* Preprint SU-GP-92-12-4-REV, Syracuse University, 1992.

[38] L. Smolin. *Finite Diffeomorphism Invariant Observables in Quantum Gravity.* Preprint SU-GP-93-1-1, Syracuse University, 1993.

[39] C.J. Isham. Conceptual and geometrical problems in quantum gravity. In H. Mitter and H. Gausterer, editors, *Recent Aspects of Quantum Fields*, Schladming Proceedings, Springer Verlag, 1991.

[40] K. Kuchar. Time and interpretations of quantum gravity. In G. Kustatter, D.E. Vincent, and J.G. Williams, editors, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Winnipeg Proceedings, World Scientific, Singapore, 1992.

[41] C.J. Isham. *Canonical Quantum Gravity and the Question of Time.* Preprint IMPERIAL-TP-93-94-2, Imperial College, London, 1993.

[42] D. Adams. *Das Leben, das Universum und der ganze Rest.* Zweitausendeins, Frankfurt am Main, 1983.

[43] M. Henneaux, C. Schomblond, and J.E. Nelson. Derivation of Ashtekar's variables from tetrad gravity. *Phys. Rev.*, D39:434, 1989.

Literatur

[44] H.-J. Matschull. *Einführung in die Supergravitation.* Vorträge im Zyklus "Gravitationstheorien", Universität Leipzig, 1994.

[45] S. Deser and B. Zumino. Consistent supergravity. *Phys. Lett.*, 62B:335, 1976.

[46] S. Ferrara, D.Z. Freedman, and P. van Nieuwenhuizen. Progress towards a theory of supergravity. *Phys. Rev.*, B13:3214, 1976.

[47] P. van Nieuwenhuizen. Supergravity. *Phys. Rep.*, 68:189, 1981.

[48] D.E. Knuth. TEX. A Typesetting System, Stanford University, 1978.

[49] A. Ashtekar and R. Loll. *New Loop Representation for 2+1 Gravity.* Preprint CGPG-94/5-1, Pennsylvania State University, 1994.

[50] London Transport. *Poems in the Underground.* Poster TUBE-94-0325, Victoria Line, 1994.

[51] H.A. Kastrup and T. Thiemann. Canonical quantization of spherical symmetric gravity in Ashtekar's selfdual representation. *Nucl. Phys.*, B399:211, 1993.

[52] B. Julia. Group disintegrations. In S.W. Hawking and M. Rozek, editors, *Superspace and Supergravity*, Cambridge University Press, 1980.