DESY DV-78/05
Oktober 1978

Ein Verfahren zur Verhinderung von Verklemmungen in Vermittlernetzen

von

Wolfgang Wimmer

Zusammenfassung:

In den meisten heutigen Vermittlernetzen werden keine Vorkehrungen zur Verhinderung von Verklemmungen getroffen, sondern versucht, die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens klein zu halten. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie durch feste Routingeinschränkungen nicht nur "Looping" und "Ping-pong"-Effekte, sondern auch Verklemmungen unmöglich gemacht werden können. Es wird weiter versucht, die Auswirkungen dieser Einschränkungen auf die Effektivität abzuschätzen, und Verfahren aufzuzeigen, um die "festen" Routing-Beschränkungen dynamisch Änderungen der Netztopologie anzupassen.

Abstract:

Today the majority of computer networks deal with deadlocks by keeping their probability low. In most cases this means that the traffic capacity of these networks is not fully used. This paper shows how fixed routing constraints to prevent looping and ping-pong effects in packet switching networks are sufficient to prevent deadlocks too. Some remarks are made about the influence of these constraints to the traffic capacity and about algorithms which may dynamically adapt the "fixed" routing constraints according to changing network topology.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

Der Mensch als soziales, Informationen verarbeitendes Wesen besitzt ein großes Bedürfnis nach Kommunikation. In der Vergangenheit reichte zur Befriedigung dieses Bedürfnisses der direkte Kontakt von Mensch zu Mensch aus. Doch mit der fortschreitenden Technik und dem Wachsen der Menschheit wurden neue Mittel zur rascheren Informationsverbreitung gefunden: das Telefon und der Telegraph. Recht schnell entwickelten sich Leitungsnetze, die heute Kommunikationsverbindungen über die ganze Erde ermöglichen.

Mit der Erfindung des Rechners erhielt der Mensch ein Werkzeug, welches es ihm erlaubte, Informationen in bedeutend größeren Mengen und mit bedeutend größerer Schnelligkeit als vorher zu verarbeiten. Es entwickelte sich das Bedürfnis, die Rechner ebenfalls über ein "Vermittlernetz" miteinander zu verbinden, um z.B.

- Informationen, die sich an einem Rechner (z.B. in Form von Datenbanken) befinden, möglichst überall zugänglich zu machen,
- Rechenleistung dorthin zu "befördern", wo sie benötigt wird,
- den Benutzern eines Rechners die Spezialbegabungen der anderen Rechner verfügbar zu machen,
- einen Lastausgleich zwischen den Rechnern durchzuführen.

Das erste große Rechnerverbundnetz, welches grundlegende Erkenntnisse für den Bau von Vermittlernetzen zwischen Rechnern und den Anschluß an solche Netze brachte, war das ARPA-Netz /9/. Dieses Netzprojekt wurde 1967 von der Advanced Research Project Agency (ARPA) gestartet. Dabei wurden nicht, wie in den Telefonnetzen, durchgeschaltete Leitungen zur Vermittlung von Nachrichten verwendet, sondern ein Netz von durch Leitungen verbundenen Vermittlungsrechnern, welche Nachrichten in Puffern zwischenspeichern und deren Vermittlung mit Hilfe von "Routing-Strategien" übernehmen. Um eine ökonomische Pufferverwaltung zu erreichen, werden die Nachrichten beim Eintritt in das Vermittlernetz in Pakete mit fester maximaler Länge zerlegt. Man spricht hier von Paket-vermittelnden (packet-switching)

Netzen im Gegensatz zum Telefonnetz, welches ein Leitungs-vermittelndes (line-switching) Netz ist. Innerhalb eines Paket-vermittelnden Netzes sind zwei Betriebsarten denkbar. Beim "Datagramm"-Betrieb wird jedes Paket unabhängig von den anderen Paketen durch das Vermittlernetz geschickt. Bei einem Netz mit "virtuellen Verbindungen" wird vor der Nachrichten-übertragung eine logische Verbindung zwischen Quell- und Ziel-rechner aufgebaut, über die anschließend Nachrichten geschickt werden.

Das ARPA-Netz arbeitet mit Datagrammen. Die meisten später ent-wickelten Netze arbeiten mit virtuellen Verbindungen, und eini-ge Netze, wie z.B. das französische TRANSPAC-Netz, sollen beide Möglichkeiten bieten. Die deutsche und die französische Post versuchen, einen Rechnerverbund aufgrund geschalteter Leitungen zu ermöglichen.

Beim Betrieb des ARPA-Netzes traten mit ansteigender Last zwei Probleme /9/ auf: Verstopfungen (congestion) und Verklemmungen (deadlocks, lockups). Verstopfungen treten auf, wenn mehr Nach-richten in ein Netz oder einen Netzteil gebracht werden, als wieder hinausbefördert werden können. Man versucht, dieses Problem durch globale, das gesamte Netz betreffende und lokale, nur für Netzteile definierte Flußkontrollen sowie entsprechende Wahl von Routing-Strategien in den Griff zu bekommen.

Insbesondere zwei lokale Phänomene verstärkten die Neigung zur Verstopfung bei ansteigender Last. Beim "Pingpong-Effekt" wan-dert ein Nachrichtenpaket längere Zeit zwischen zwei benachbar-ten Vermittlungsrechnern hin und her, und beim "Kreis-Effekt" (looping) läuft ein Paket längere Zeit im Kreise und verstärkt dadurch den Nachrichtenfluß, ohne zur Nachrichtenübertragung beizutragen. Der Pingpong-Effekt läßt sich einfach dadurch be-seitigen, daß eine Nachricht nicht über den Weg zurückgeschickt werden darf, über den sie gekommen ist. Der Kreis-Effekt läßt sich durch geeignete, komplizierte Routingstrategien weitgehend einschränken /18/.

Im ARPA-Netz wurden zwei Arten von Verklemmungen entdeckt. Die Nachrichten werden beim Eintritt in das Netz in Pakete zerlegt und müssen deshalb beim Verlassen des Netzes wieder zusammengesetzt werden. Es kann nun passieren, daß zwei Nachrichten halb zusammengesetzt sind und jede die entsprechenden Puffer belegt, aber keine Puffer mehr vorhanden sind, um eine der Nachrichten vollständig zusammenzusetzen und damit den gesamten Pufferplatz für diese Nachricht wieder freizumachen. Dieser "reassembly-lockup" kann umgangen werden, wenn das Zerlegen und Zusammensetzen von Nachrichten nicht im Vermittlernetz, sondern in den angeschlossenen Rechnern geschieht. Beim "store-and-forward lockup", im folgenden Pufferverklemmung genannt, werden durch verschiedene Nachrichtenströme Puffer in mehreren Vermittlungsrechnern so blockiert, daß keine mehr frei sind, um eine Nachrichtenübertragung zu ermöglichen.

Verklemmungen und Verstopfungen können in leitungsvermittelnden wie paketvermittelnden, auf Datagrammen wie auf virtuellen Verbindungen beruhenden Vermittlernetzen vorkommen. Wie Erfahrungen am ARPA-Netz /9/ und Simulationen /13/ zeigen, treten Verklemmungen bei mäßig belasteten Netzen selten auf. Andererseits erlauben Konzepte wie virtuelle Verbindungen und entsprechende Flußkontrollmechanismen eine relativ hohe Belastung des Netzes /13/. Voraussetzung für deren Einsatz ist deshalb die Verhinderung von Verklemmungen. Aus diesem Grund soll z.B. im GMD-Netz ein Verfahren zur Verhinderung von Pufferverklemmungen benutzt werden /1, 19/.

In dieser Arbeit soll, ausgehend von allgemeinen Ergebnissen über die Verhinderung von Verklemmungen nach Günther /11/, ein Verfahren zur Verhinderung von Pufferverklemmungen entwickelt werden, welches auf einer Einschränkung der Routing-Möglichkeiten beruht und sowohl Kreis- als auch Pingpongeffekte unmöglich macht. Dies ermöglicht den Einsatz einfacher Routingstrategien.

1. Über Verklemmungen im allgemeinen und Verhütung von Verklemmungen in Vermittlernetzen im besonderen.

Das Problem der Verklemmungen tritt in der Informatik überall auf, wo Prozesse miteinander wechselwirken, sei es, daß sie miteinander kommunizieren oder daß sie gemeinsame Hilfsmittel benutzen. In /4,12,14/ ist einiges darüber zu finden. Eine allgemeine Abhandlung über Verklemmungen, welche auch die in den obigen Arbeiten erzielten Ergebnisse mit enthält, ist die Arbeit von Günther /11/. Aus dieser Arbeit sollen jetzt Definitionen und Sätze zitiert werden, soweit sie für den Fall der Verklemmungen in Vermittlernetzen notwendig sind. Dabei wird die Formulierung eines Teils der Sätze auf diesen speziellen Fall zugeschnitten.

1.1 Allgemeines über Verklemmungen.

Es wird ein zeitlich veränderliches System von Prozessen betrachtet. Prozesse können Objekte anfordern, konsumieren und produzieren.

Um einerseits alle in /12,14/ beschriebenen Möglichkeiten für Verklemmungen zu berücksichtigen, andererseits jedoch sich auf den Fall des gegenseitigen Blockierens von Prozessen aus einem Prozeßsystem beschränken zu können, führt Günther den Begriff des regulären Prozeßsystems ein.

Definition 1.1 (Def. 1 in /11/):

Ein zeitlich veränderliches System von Prozessen und von Objekten, die von Prozessen produziert, konsumiert und angefordert werden können, heißt reguläres Prozeßsystem, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gibt eine zeitunabhängige Schranke für die Anzahl der jemals gleichzeitig existierenden Prozesse.
2. In jedem endlichen Zeitintervall ereignen sich nur endlich viele Produktionen, Konsumtionen und Anforderungen.

3. Werden zwei Grundoperationen vom gleichen Prozeß vorgenommen oder betreffen eine Konsumtion und eine Produktion das gleiche Objekt, so finden sie zu verschiedenen Zeitpunkten statt.

4. Jede Anforderung benennt endlich viele nicht leere, endliche Mengen von Objekten. Nur durch Konsum dieser Objekt-Mengen kann die Anforderung erfüllt werden. Eine Produktion erzeugt endlich viele Objekte.

5. Auf eine Anforderung kann als nächste Operation des Prozesses nur eine Konsumtion folgen, eine Konsumtion darf nur nach einer Anforderung erfolgen. Die Konsumtion vernichtet alle von der Anforderung benannten Objekte.

6. Es ist ausgeschlossen, daß ein Prozeß unbegrenzt auf die Befriedigung einer Anforderung wartet und zugleich eines der angeforderten Objekte von anderen Prozessen immer wieder konsumiert wird.

7. Es ist ausgeschlossen, daß eine Anforderung eines Prozesses nie erfüllt wird, obwohl sie von einem Zeitpunkt an ständig erfüllbar ist.

8. Es ist ausgeschlossen, daß nur ein einzelner Prozeß existiert, der auf ein nicht verfügbares Objekt unbegrenzt wartet, das von keinem der übrigen Prozesse jemals wieder produziert wird.

Die Bedingungen 1 bis 5 der Definition 1.1 legen die Beziehungen zwischen Prozessen und Objekten fest. Die darin enthaltenen Endlichkeitsbedingungen sind für reale Systeme keine Einschränkung. Die Bedingungen 6 bis 8 schließen die Verklemmungsmöglichkeiten aus, die nicht auf gegenseitigem Blockieren von Prozessen innerhalb des Prozeßsystems beruhen. Die folgenden Definitionen und Sätze aus /11/ verallgemeinern das in /4/ beschriebene Verfahren der hierarchischen Betriebsmittel-Zuteilung.

<u>Definition 1.2</u> (Def. 2 in /11/):

Ein Prozeß <u>wartet auf ein Objekt</u>, wenn seine Anforderung des Objektes nicht befriedigt werden kann.

Definition 1.3 (Def. 5 in /11/):

Ein Prozeß X wartet auf einen Prozeß Y, wenn gilt:

1. X ist ungleich Y.
2. X hat eine nicht erfüllbare Forderung gestellt.
3. Y hat eine Forderung gestellt, die nie erfüllt wird, oder Y produziert das von X angeforderte Objekt später einmal, aber früher als jeder andere Prozeß.

Satz 1.1 (Satz 2 in /11/):

Ein reguläres Prozeßsystem P ist genau dann verklemmungsfrei, wenn es auf P eine Typenfunktion t(x) gibt, welche jedem $X \in P$ eindeutig einen Typ t(X) aus einer teilweise oder linear geordneten Typenmenge zuordnet, so daß gilt: Zu jedem wartenden Element $X \in P$ gibt es ein $Z \in P$ von größerem Typ, auf das es wartet.

Aus diesem Satz leitet Günther den folgenden Satz ab:

Satz 1.2 (Satz 2a in /11/):

Ein reguläres Prozeßsystem ist verklemmungsfrei, wenn es keine geschlossenen Warteketten von Prozessen gibt.

Dabei ist eine geschlossene Wartekette eine Folge von Prozessen $X_1 \ldots X_n$, bei der X_i auf X_{i+1} wartet (i=1 bis n-1) und X_n auf X_1.

Der Satz 1.1 dient Günther als Grundlage für ein Objekt-Anforderungsverfahren, welches Verklemmungsfreiheit garantiert. Dies Verfahren ist hier, zugeschnitten auf unsere spätere Anwendung auf Vermittlernetze, im folgenden Satz wiedergegeben:

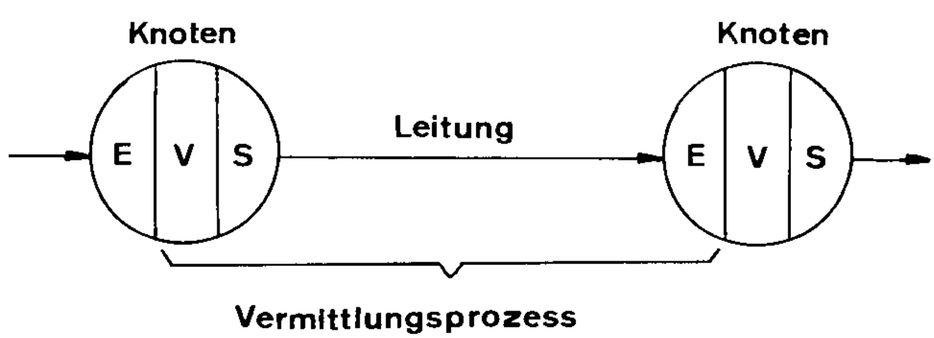
Satz 1.3: Jedem Prozeß X aus einem regulären Prozeßsystem P wird beim Stellen einer Anforderung ein Forderungstyp t(X) aus einer linear geordneten Menge von Typen zugeordnet. Jedes Objekt hat einen festen Typ.
Wird eine Anforderung befriedigt, so erhält der Prozeß den damit verbundenen Forderungstyp als aktuellen Typ.
Das Prozeßsystem P ist dann verklemmungsfrei, wenn gilt:

1. Der Forderungstyp eines Prozesses wird gegenüber dem aktuellen Typ stets erhöht.
2. Ein Objekt des Typs t darf nur von Prozessen mit Forderungstyp > = t konsumiert werden.
3. Zu einer Anforderung mit Forderungstyp t gibt es so viele Objekte des Typs t, daß sie, wären sie verfügbar, die Forderung befriedigen könnten.
4. Die Objekte sind wiederverwendbar, d.h. der Konsum des Objektes ist ein "Belegen" und irgendwann geschieht durch eine Produktion wieder eine "Freigabe" des Objektes.

1.2 Verklemmungsfreiheit in Vermittlernetzen

Ein Vermittlernetz ist ein aus Knoten und Leitungen zwischen den Knoten bestehendes Netz, in dem Nachrichten mit Hilfe von Vermittlungsprozessen in den Knoten von einem Quellknoten zu einem Zielknoten gesendet werden.

Innerhalb eines Knotens muß eine Nachricht empfangen (E) werden, anschließend durch Vermitteln (V) die Ausgangsleitung bestimmt werden und dann die Nachricht über die Ausgangsleitung weitergeschickt werden (S) (siehe Figur 1.1). Die Pfeile an den Leitungen der Figur 1.1 geben die Richtung an, welche die Nachricht nimmt. Jede Leitung besteht aus zwei Hälften, für jede Richtung des Nachrichtenflusses eine.



Figur 1.1

Ein Vermittlungsprozeß besteht aus der Vermittlungsaufgabe und der Weiterbeförderung der Nachricht über die ausgewählte Leitung zum Nachbarknoten. Dabei benötigt der Vermittlungsprozeß bei leitungsvermittelnden Netzen die Leitungshälfte als Objekt, mit der er die Nachricht zum Nachbarknoten senden kann; bei paketvermittelnden Netzen benötigt er als Objekt einen freien Puffer im Nachbarknoten.

Ein Übertragungsprozeß für eine Nachricht besteht aus einer Kette von Vermittlungsprozessen vom Quellknoten bis zum Zielknoten der Nachricht. Jeder Vermittlungsprozess darf zu jedem Zeitpunkt in höchstens einem Übertragungsprozeß enthalten sein.

Um Verfahren für die Verklemmungsfreiheit in Vermittlernetzen zu finden, betrachten wir jetzt das System der Übertragungsprozesse. Als Voraussetzung für die Anwendung der Sätze aus Abschnitt 1.1 müssen wir dafür sorgen, daß dieses System ein reguläres Prozeßsystem ist. Da es in jedem Knoten höchstens einen Vermittlungsprozeß für jede Leitung gibt, ist die Zahl der Vermittlungsprozesse in einem Vermittlernetz endlich. Deshalb gibt es zu jedem Zeitpunkt nur endlich viele Übertragungsprozesse. Diese Zahl ist durch die maximale Zahl der Vermittlerprozesse nach oben beschränkt, wodurch Bedingung 1 erfüllt ist.

Da realen Netzen nur eine endliche Zahl von Objekten zur Verfügung steht, sind Bedingung 2 und 4 erfüllt.

Bedingung 3 muß durch entsprechende Objektvergabeverfahren (z.B. Serialisierung der Prozeßoperationen über Prozeßwarteschlangen und/oder Durchführen der Operationen durch eine zentrale Stelle (Monitor))gewährleistet werden.

Bedingung 5 muß ebenfalls bei der Implementation von Anforderungs- und Konsum-Operationen berücksichtigt werden. Dies geschieht bei allen gebräuchlichen Vermittlernetzen.

Bedingung 6 ist in Vermittlernetzen immer erfüllt, da ein Vermittlungsprozeß und damit der Übertragungsprozeß bei jeder Anforderung nur ein Objekt auf einmal anfordert.

Bedingung 7 ist in einem einfachen System ohne Prioritäten und mit FIFO-Warteschlangen erfüllt. Bei komplizierteren Systemen ist darauf zu achten, daß sie erfüllt bleibt.

Die Bedingung 8 ist erfüllt, da Quell- und Zielknoten einer Nachricht im Vermittlernetz liegen sollen, die Verbindung zwischen Netz und angeschlossenen Benutzern hier also nicht berücksichtigt wird. In realen Netzen ist dafür zu sorgen, daß in paketvermittelnden Netzen kein "reassembly-lockup" auftreten kann, und daß für Benutzer des Vermittlungsnetzes bestimmte Nachrichten auch von den Benutzern abgenommen werden bzw. das Netz es merkt, wenn die Nachrichten nicht abgenommen werden können, und entsprechende Maßnahmen trifft, z.B. Freigabe der belegten Objekte.

Mit den heute bekannten Methoden für den Aufbau von Vermittlernetzen läßt sich problemlos dafür sorgen, daß in ihnen ablaufende Übertragungsprozesse ein reguläres Prozeßsystem bilden. Die meisten existierenden Netze erfüllen diese Bedingung.

Unter Berücksichtigung dieser Bemerkungen können wir davon ausgehen, daß die Übertragungsprozesse in Vermittlernetzen ein reguläres Prozeßsystem bilden.

Die Bedingung 4 des Satzes 1.3 ist in Vermittlernetzen immer erfüllt, da sowohl Puffer als auch Leitungen wiederverwendbar sind. Die Bedingung 2 ist eine Regelung für die Objektvergabe. Für Objektvergabeverfahren, die Verklemmungen nicht zulassen sollen, ist also nur zusätzlich Bedingung 1 und 3 zu erfüllen.

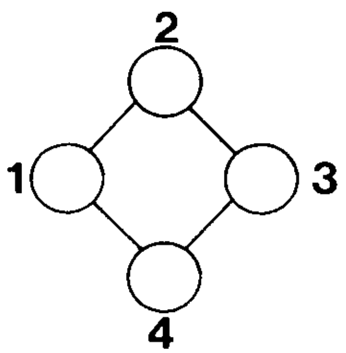
Eine mögliche Anwendung des Satzes 1.3 in Vermittlernetzen ist das bei der GMD entwickelte Pufferklassensystem /1, 19/. Dieses System ist speziell auf ein paketvermittelndes Netz mit virtuellen Verbindungen zugeschnitten. Beim Aufbau einer virtuellen Verbindung wird dem Durchschalteprozeß, ausgehend vom Forderungstyp 0, ein bei jedem durchlaufenen Knoten um eins erhöhter Forderungstyp zugeordnet (Bed. 1). Der Durchschalteprozeß sorgt dafür, daß in diesen Knoten eine Pufferklasse für diesen Forderungstyp mit mindestens einem Puffer angelegt wird, falls noch keine da ist (Bed. 3). Ist hierfür kein Puffer mehr verfügbar, wird der Durchschalteprozeß abgebrochen. Dies Verfahren sorgt dafür, daß bei allen durchgeschalteten Leitungen keine Pufferverklemmungen auftreten können. Mehrere Durchschalteprozesse können sich jedoch verklemmen, was durch spezielle Maßnahmen verhindert werden muß.

Ferner muß verhindert werden, daß ein Durchschalteprozeß eine Leitung mit Schleifen aufbaut. Hierdurch wird der Durchschalteprozeß recht kompliziert. Auch eine optimale Besetzungszahl der Pufferklassen mit Puffern ist schwer zu finden, da die Zahl der Pufferklassen in jedem Knoten sich dynamisch ändert und außerdem schwankende Lastverhältnisse im Netz berücksichtigt werden müßten.

Die Nachteile, die sich durch das dynamische Generieren von Forderungstypen ergeben, lassen sich vermeiden, wenn man den Forderungstyp über eine feste Numerierung der Knoten im Netz definiert. Dies führt zu den vertikal numerierten Netzen.

Ein <u>vertikal numeriertes Netz</u> ist ein aus n Knoten bestehendes Vermittlernetz, bei dem jedem Knoten eine der Zahlen 1 bis n fest zugeordnet ist, mit folgender Routing-Vorschrift: Knoten dürfen in absteigender, in aufsteigender und im Wechsel von absteigender zu aufsteigender Reihenfolge ihrer Nummern durchlaufen werden, aber ein Wechsel von aufsteigender zu absteigender Reihenfolge ist ausgeschlossen. Die Bezeichnung "vertikal" ist /11/ entnommen. Sie wird in Abschnitt 3.1 plausibel werden.

Sehen wir uns dazu Figur 1.2 an. Dort ist ein vertikal numeriertes Netz dargestellt. Nachrichten dürfen darin z.B. folgende Knotenreihenfolgen durchlaufen: 123, 321, 412, aber nicht 143.



Figur 1.2

Es sollen jetzt auf der Basis der Knotennumerierung zwei Arten zur Vergabe von Forderungstypen an die laut Routingvorschrift möglichen Übertragungsprozesse angegeben werden, die zu verschiedenen Objektvergabeverfahren führen. Dabei soll die Objektvergabe möglichst unabhängig von der Knotennumerierung werden.

Forderungstypzuordnung 1 : Wird eine Leitung in aufsteigender Reihenfolge der Knotennummern durchlaufen, so sei der Forderungstyp die Nummer des sendenden Knotens. Wird eine Leitung in absteigender Reihenfolge durchlaufen, so sei der Forderungstyp die negative Nummer des sendenden Knotens.

Beispiel: Wird in Figur 1.2 die Knotenreihenfolge 123 durchlaufen, so erhält der Übertragungsprozeß in Knoten 2 den Forderungstyp 1, in Knoten 3 den Forderungstyp 2. Wird die Reihe 321 durchlaufen, so sind die nacheinander vergebenen Forderungstypen -3 und -2, bei der Reihe 412 sind es -4 und 1. Dies ergibt jedesmal eine ansteigende Folge von Forderungstypen. Nur bei der durch die Routingvorschrift verbotenen Knotenreihenfolge 143 würde es zu einer sinkenden Folge von Forderungstypen (1, -4) kommen.

Die Forderungstypzuordnung 1 erfüllt Bedingung 1 von Satz 1.3. Um Bedingung 3 zu erfüllen, müssen in jedem Knoten so viel Objekttypen vorhanden sein, wie es Leitungen an diesem Knoten gibt. Dies führt zum Objektvergabeverfahren 1. Um den Typ der Objekte nicht wissen zu müssen, ordnen wir jeder Leitung ein Objekt fest zu. Da diese Objekte für Übertragungsprozesse, die über andere Leitungen kommen, nicht benutzbar sind, ist damit Bedingung 2 erfüllt. Eventuell übrigbleibende Objekte dürfen beliebig benutzt werden.

Das 1. Objektvergabeverfahren ist in leitungsvermittelnden Netzen immer erfüllt, da die Objekte die Leitungen sind und sich selbst sozusagen "per hardware" zugeordnet sind. In einem paketvermittelnden Netz würde es bedeuten, daß jeder Leitung ein Puffer fest zugeordnet ist und die restlichen Puffer von allen Leitungen beliebig benutzt werden können.

Forderungstypzucrdnung 2: Wird eine Leitung in aufsteigender Reihenfolge der Knotennummern durchlaufen, so sei der Forderungstyp gleich der Nummer des empfangenden Knotens. Wird eine Leitung in absteigender Reihenfolge durchlaufen, so sei der Forderungstyp die negative Nummer des empfangenden Knotens.

Beispiel: Wird in Figur 1.2 die Knotenreihenfolge 123 durchlaufen, so ergibt dies im Knoten 2 den Forderungstyp 2, in Knoten 3 den Forderungstyp 3. Bei der Knotenreihenfolge 321 ergibt sich die Forderungstypreihe (-2, -1) und bei der Knotenreihe 412 die Forderungstypreihe (-1, 2). Nur bei der durch die Routing-Vorschrift verbotenen Knotenreihenfolge 143 würde es eine sinkende Forderungstypreihe (4, -3) geben.

Auch hier ist Bedingung 1 von Satz 1.3 erfüllt. Im Gegensatz zur Forderungstypzuordnung 1 sind jedoch zur Erfüllung der Bedingung 3 nur zwei Objekttypen je Knoten nötig, nämlich einmal mit dem Typ der Knotennummer und einmal mit dem Typ der negativen Knotennummer. Dies führt zum Objektvergabeverfahren 2:

Ein Objekt ist reserviert für Übertragungsprozesse, welche Leitungen in aufsteigender Reihenfolge der Knotennummern (= höherer Forderungstyp) durchlaufen, alle anderen Objekte sind für alle Übertragungsprozesse verwendbar.

Dieses Vergabeverfahren erfüllt ebenfalls die Bedingung 2. Es ist allerdings für leitungsvermittelnde Netze nicht anwendbar, da die Leitungen nicht beliebig vergeben werden können, sondern fest Übertragungsprozessen zugeordnet sein müssen, welche von bestimmten Nachbarknoten kommen. Dafür ergibt sich in paketvermittelnden Netzen ein besonders einfaches Puffervergabeverfahren. Man reserviert einen einzigen Puffer, welcher in Notfällen, d.h. wenn alle anderen Puffer besetzt sind, nur von Übertragungsprozessen benutzt werden darf, welche Leitungen in aufsteigender Reihenfolge der Knotennummern durchlaufen. Alle anderen Puffer sind beliebig verwendbar.

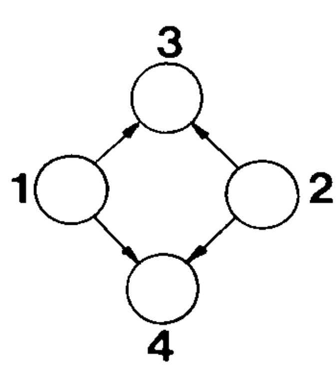
Das Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen wird im folgenden Satz zusammengefaßt:

Satz 1.4: Ein vertikal numeriertes Netz mit dem Objektvergabeverfahren 1 oder 2 ist verklemmungsfrei.

1.3 Übersicht über den nachfolgend dargestellten Stoff

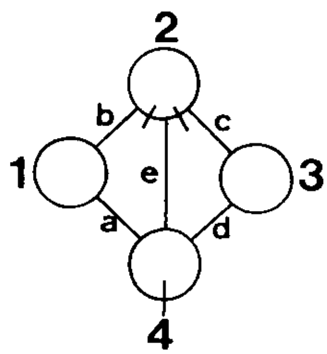
Wie aus den Objektvergabeverfahren 1 und 2 in Abschnitt 1.2 zu ersehen ist, spielen hierfür die Knotennummern des vertikal numerierten Netzes keine Rolle, sondern nur, ob eine Leitung in aufsteigender oder absteigender Reihenfolge der Knotennummern durchlaufen wird. Um dies festzuhalten, genügt es, den Leitungen eine Richtung vom niedrigeren zum höheren Knoten zu geben. Da jeder Knoten eine andere Nummer hat, kann jeder Leitung eindeutig eine Richtung gegeben werden. So wird aus dem vertikal numerierten Netz ein Digraph.

Im Kapitel 3.1 werden Zusammenhänge zwischen Digraphen und vertikal numerierten Netzen untersucht. Die dafür erforderlichen Begriffe aus der Graphentheorie sind im Kapitel 2 erläutert. Dies führt zum Begriff des Schrankengraphen, welcher (mit dem Objektvergabeverfahren 1 oder 2 und einer allgemeinen Routing-Vorschrift) einerseits Verklemmungsfreiheit in einem Vermittlernetz garantiert, andererseits aber auch die Erreichbarkeit jedes Knotens im Netz von jedem anderen. Dies ist in allgemeinen vertikal numerierten Netzen bzw. allgemeinen Digraphen nicht gesichert, wie Figur 1.3 zeigt. Dort ist wegen der Routing-Vorschrift Knoten 2 von Knoten 1 aus nicht erreichbar.



Figur 1.3

Ein allgemeiner Ansatz für durch Routingbeschränkungen erreichbare Verklemmungsfreiheit führt zum Begriff des Verkehrsnetzes in Kapitel 3.2. In einem Verkehrsnetz wird die Routingbeschränkung dadurch eingeführt, daß zwischen Leitungen in einem Knoten Schranken gesetzt werden, so daß keine Nachrichten von der einen Leitung zur anderen und umgekehrt fließen können.



Figur 1.4 Verkehrsnetz

Figur 1.4 stellt ein Verkehrsnetz dar. Die Striche zwischen jeweils zwei Leitungen stellen Schranken dar. So dürfen z.B. beim Knoten 4 keine Nachrichten von Leitung a zu Leitung d oder umgekehrt fließen, sondern nur über die Leitungsverbindungen a-e bzw. d-e. Da die Routingmöglichkeiten durch Schranken möglichst wenig eingeschränkt werden sollen, werden "minimale" Verkehrsnetze untersucht, d.h. Verkehrsnetze mit der kleinsten zur Verklemmungsfreiheit nötigen Schrankenzahl. Es ergibt sich, daß die transitiven minimalen Verkehrsnetze sowie alle minimalen Verkehrsnetze über Graphen mit bestimmter, in der Praxis häufig auftauchender Topologie durch Schrankengraphen darstellbar sind.
Aus diesem Grunde beschränken sich die nachfolgenden Kapitel auf die Untersuchung von Verkehrsnetzen, die durch Schrankengraphen darstellbar sind.

In Kapitel 4 wird ein anderer Ansatz gemacht, um trotz Routing-Einschränkungen einen möglichst großen Datenfluß im Netz zu gewährleisten, nämlich die Erhaltung der im Vermittlernetz ohne Routing-Vorschrift kürzesten Wege. Es werden Verfahren gezeigt, die es erlauben, ein Netz mit Schrankengraphen so aufzubauen, daß sowohl die Minimalität als auch die Erhaltung der kürzesten Wege gewährleistet ist. Um die Auswirkungen eines bestimmten

Schrankengraphen auf den Datenfluß in einem Netz mit vorgegebener Topologie abschätzen zu können, wird in Abschnitt 4.3 ein Verfahren zum Finden aller Wege in einem Verkehrsnetz angegeben.

Ein Nachteil eines allgemeinen Verkehrsnetzes besteht darin, daß beim Ausfall von Netzteilen einige Knoten nicht mehr erreichbar sind, obwohl physikalisch noch eine Verbindung existiert. Fällt z.B. in Figur 1.4 die Leitung c aus, so ist keine Verbindung zwischen den Knoten 1 und 3 möglich, obwohl physikalisch eine über den Knoten 4 existiert. In Kapitel 5 wird gefunden, daß die Wahrscheinlichkeit hierfür bei minimalen Verkehrsnetzen am geringsten ist, und es werden Grundlagen für Verfahren dargestellt, um einen existierenden Schrankengraphen an Netzänderungen anzupassen. In Kapitel 6 wird anhand eines einfachen Verfahrens zum automatischen Aufbau eines Schrankengraphen innerhalb eines Netzes auf Probleme hingewiesen, die solch ein automatischer Aufbau bieten kann.

2. Begriffe aus der Graphentheorie

In diesem Kapitel sollen häufig benutzte Begriffe, insbesondere aus der Graphentheorie, erklärt werden. Nur selten benötigte Begriffe werden dort erklärt, wo sie zuerst benutzt werden.

Es wird ausgegangen von dem in 1.2 definierten Vermittlernetz, das als Knoten (nodes) Vermittlungsrechner oder Knotenrechner hat, welche durch Leitungen (links, channels) miteinander verbunden sind. In graphentheoretischer Sicht ist ein Vermittlernetz ein endlicher, einfacher, zusammenhängender Graph. Dabei entsprechen die Vermittlungsrechner den Knoten (vertices) im Graphen und die Leitungen den Kanten (edges). Die graphentheoretischen Begriffe sind Deo /16/ entnommen, wobei soweit wie möglich eine deutsche Terminologie nach Noltemeyer /15/ gewählt wurde. In Deo /16/ und größtenteils auch in Noltemeyer /15/ sind formale Definitionen der benutzten Begriffe zu finden. Es soll jetzt ein informaler Überblick darüber gegeben werden.

Ein einfacher (simple) Graph ist ein Graph ohne Schlingen (self-loops), d.h. ohne Kanten, die mit beiden Enden am selben Knoten sitzen, und ohne parallele Kanten. In einem zusammenhängenden (connected) Graphen gibt es zu je zwei beliebigen Knoten mindestens einen Weg von einem zum anderen.
Dabei ist ein Weg (walk, chain) eine Aufeinanderfolge von Knoten, die durch Kanten direkt verbunden sind. Ein Graph heißt vollständig (complete), wenn bei allen möglichen Knotenpaaren beide Knoten durch eine Kante direkt verbunden sind.

Ein Zyklus (closed walk) ist ein Weg, in dem Anfangs- und End-Knoten identisch sind.
Ein Kreis (circuit, cycle) ist ein Zyklus, in dem außer dem Anfangs- und Endknoten kein Knoten mehr als einmal vorhanden ist.
Der Grad eines Knotens ist die Zahl der Kanten, deren Endpunkte an ihm liegen.
Die Länge eines Weges ist gleich der Zahl der enthaltenen Kanten.

Ein Graph, in dem alle Kanten eine Richtung haben, heißt Digraph.
Eine gerichtete Kante heißt Pfeil (arc).
Zeigt ein Pfeil auf einen Knoten, so ist die Kante auf ihn (hin) gerichtet (incident into).
Zeigt ein Pfeil vom Knoten weg, so ist die Kante von ihm weg gerichtet (incident out of).
Ein gerichteter Kreis (directed circuit) ist ein Kreis in einem Digraphen, den man in Richtung der Kanten durchlaufen kann, ohne auf eine entgegengesetzt gerichtete Kante zu stoßen.
Ein Digraph heißt azyklisch (acyclic), wenn er keine gerichteten Kreise enthält.
Ein gerichteter Weg (directed walk) ist ein Weg in einem Digraphen, den man in Richtung der Kanten durchlaufen kann, ohne auf eine entgegengesetzt gerichtete Kante zu stoßen.
Ein zu einem Digraphen gehörender Graph ist der ungerichtete Graph, den man erhält, wenn die Richtungen im Digraphen weggelassen werden.
Ein zusammenhängender Digraph ist ein Digraph, dessen zu ihm gehörender Graph zusammenhängend ist.

3. Schrankengraphen und Verkehrsnetze

3.1 Schrankengraphen

Wie in Abschnitt 1.3 angedeutet, gibt es Beziehungen zwischen vertikal numerierten Netzen und Digraphen. Diese Beziehungen sind im folgenden Satz präzisiert.

Satz 3.1: Ein vertikal numeriertes Netz ist einem azyklischen Digraphen mit folgender Routing-Vorschrift äquivalent: Nachrichten dürfen "in Pfeilrichtung", "gegen Pfeilrichtung" und im Wechsel von "gegen Pfeilrichtung" zu "in Pfeilrichtung" fließen, aber nicht im Wechsel von "in Pfeilrichtung" zu "gegen Pfeilrichtung".

Beweis: Der Beweis beruht auf dem Theorem 14.4 von Deo /16/, welches besagt, daß ein Digraph genau dann azyklisch ist, wenn es in ihm eine topologische Ordnung gibt, d.h. eine Numerierung der n Knoten mit den Zahlen 1 bis n, so daß Pfeile nur von einem Knoten niedriger zu einem Knoten mit höherer Nummer gerichtet sind. Bezüglich dieser Numerierung würde die im Satz beschriebene Flußordnung genau der in einem vertikal numerierten Netz entsprechen, d.h. ein azyklischer Digraph definiert ein vertikal numeriertes Netz. Umgekehrt definiert jedes vertikal numerierte Netz einen Digraphen, wenn man den Leitungen eine Richtung vom Knoten mit niedrigerer Nummer zum Knoten mit höherer Nummer gibt. Die Numerierung der Knoten bildet bei dem so konstruierten Digraph eine topologische Ordnung, so daß wiederum nach Theorem 14.4 aus /16/ dieser Digraph azyklisch ist. q.e.d.

In Abschnitt 1.3 ist an einem Beispiel gezeigt worden, daß in einem vertikal numerierten Netz i.a. nicht jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist. In einem Vermittlernetz möchte man jedoch jeden Knoten von jedem anderen aus erreichen. Dies leistet eine spezielle Struktur des äquivalenten azyklischen Digraphen, die Schrankengraph heißen soll.

Definition 3.1: Ein Knoten in einem Digraphen mit nur weggerichteten Pfeilen heißt Startknoten.

<u>Definition 3.2:</u> Ein azyklischer, endlicher, zusammenhängender Digraph mit genau einem Startknoten heißt <u>Schrankengraph</u>.

<u>Definition 3.3:</u> Ein Knoten in einem Vermittlernetz heißt <u>erreichbar</u>, wenn er von jedem anderen Knoten des Netzes eine Nachricht bekommen kann.

<u>Satz 3.2:</u> In einem vertikal numerierten Netz ist genau dann jeder Knoten erreichbar, wenn der äquivalente azyklische Digraph ein Schrankengraph ist.

<u>Beweis:</u> a) In einem Schrankengraph mit der Routingvorschrift von Satz 3.1 ist jeder Knoten erreichbar.

Man kann von jedem Knoten aus den Startknoten durch Nachrichten entgegen der Pfeilrichtung erreichen: Man nehme einen beliebigen Knoten. Ist es der Startknoten, so ist man fertig. Ansonsten gibt es mindestens einen auf den Knoten gerichteten Pfeil. Diesen verfolge man entgegen der Pfeilrichtung zum Nachbarknoten. Dies ist entweder der Startknoten, oder er hat wieder einen auf ihn gerichteten Pfeil, der entgegen der Pfeilrichtung weiterverfolgt wird. Da der Digraph azyklisch ist, kann bei der Wiederholung der obigen Schritte nie ein schon berührter Knoten erreicht werden. Wegen der endlichen Knotenzahl erreicht man irgendwann den Startknoten.
Da es stets einen Weg in Pfeilrichtung vom Startknoten zu jedem anderen Knoten gibt, ist die Erreichbarkeit jedes Knoten gesichert. Man kann nämlich erst einen Weg entgegen Pfeilrichtung laufen bis zu einem Knoten, von dem aus das gewünschte Ziel in Pfeilrichtung erreichbar ist. Solch einen Knoten gibt es, denn spätestens vom Startknoten aus ist jeder beliebige Knoten in Pfeilrichtung erreichbar.

Man beachte, daß keine Leitung erst entgegen und dann in Pfeilrichtung durchlaufen wird. Sonst würde der Knoten, auf den diese Leitung zeigt, schon den Forderungen genügen. Dies ist wichtig im Hinblick auf eine spätere Einbettung der Schrankengraphen in die Verkehrsnetze (Abschnitt 3.2 Satz 3.6).

b) Hat ein azyklischer Digraph mehr als einen Startknoten, so kann von keinem Startknoten einer der anderen Startknoten erreicht werden, denn jeder Startknoten hat nur weggerichtete Pfeile, und ein Richtungswechsel einer Nachricht von in Pfeilrichtung zu gegen Pfeilrichtung, wie er für eine Nachricht von einem Startknoten zum anderen erforderlich wäre, ist nach der Routing-Vorschrift nicht erlaubt. q.e.d.

Nach Satz 3.2 sind die für Vermittlernetze interessanten vertikal numerierten Netze nur diejenigen, die Schrankengraphen äquivalent sind. Da die Objektvergabeverfahren 1 und 2 in Abschnitt 1.2 nur von der Leitungsrichtung, aber nicht von der Knotennummer abhängig sind, ergibt sich aus Satz 1.4 und Satz 3.1.

<u>Satz 3.3:</u> Ein Schrankengraph mit Objektvergabeverfahren 1 oder 2 und folgender Routingvorschrift ist verklemmungsfrei: Leitungen dürfen von Nachrichten nur in Pfeilrichtung, gegen Pfeilrichtung und im Wechsel von "gegen Pfeilrichtung" zu "in Pfeilrichtung" durchlaufen werden, aber nicht im Wechsel von "in Pfeilrichtung" zu "gegen Pfeilrichtung".

Da die Schrankengraphen nur eine Teilmenge der vertikal numerierten Netze bilden, ist wesentlich, ob sich zu jedem Vermittlernetz ein Schrankengraph finden läßt.

<u>Satz 3.4:</u> Jeder endliche, zusammenhängende Graph läßt sich so orientieren, daß er einen Schrankengraphen bildet.

<u>Beweis:</u> Es ist zu zeigen, daß sich die Kanten eines zusammenhängenden endlichen Graphen so orientieren lassen, daß ein azyklischer Digraph mit genau einem Startknoten entsteht. Dieser läßt sich wie folgt konstruieren:

1) Wähle einen beliebigen Knoten als Startknoten, nenne ihn 1, setze i auf den Wert 2 und gebe allen Kanten an diesem Knoten eine Richtung von ihm weg.

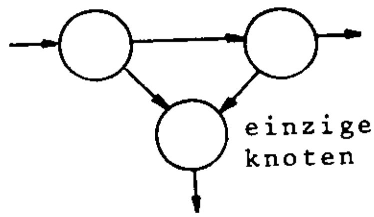
2) Suche einen Knoten, auf den mindestens eine schon gerichtete Kante zeigt und der noch keinen Namen hat. Findet man keinen, so ist die Konstruktion beendet.
3) Benenne den gefundenen Knoten mit dem momentanen Wert von i, erhöhe diesen Wert um eines, und gebe allen Kanten des Knotens, die noch keine Richtung haben, eine Richtung vom Knoten weg.
4) Gehe zu Schritt 2.

Da der Graph endlich ist, endet das Verfahren irgendwann, und da er zusammenhängend ist, werden alle Knoten berührt und alle Kanten bekommen eine Richtung. Es liegt also jetzt ein Digraph vor. Da Kanten nur auf noch nicht benannte Knoten gerichtet werden, welche später einen Namen mit höherem Wert bekommen, bilden die Namen der Knoten eine topologische Ordnung, so daß nach / 16/ Theorem 14-4 der Digraph azyklisch ist. Wegen Schritt 1 und 2 gibt es genau einen Startknoten. Es liegt also ein Schrankengraph vor. q.e.d.

Es sei jetzt eine Eigenschaft des Schrankengraphen gezeigt, welche im Zusammenhang mit den Verkehrsnetzen (Abschnitt 3.2) wichtig ist.

<u>Satz 3.5:</u> In einem Schrankengraphen mit der Routingvorschrift von Satz 3.3 kann eine Nachricht höchstens einen Kreis höchstens einmal durchlaufen, und ist ein Durchlaufen eines Kreises möglich, so kann er von genau einem Knoten aus vollständig durchlaufen werden. ("Kreis" bezieht sich auf den zum Schrankengraphen gehörenden ungerichteten Graphen.)

<u>Beweis:</u> Da der Schrankengraph azyklisch ist, gibt es keine gerichteten Kreise. Deshalb muß in jedem möglichen Kreis mindestens ein Richtungswechsel enthalten sein. Läuft eine Nachricht in Kantenrichtung, so kann sie nur in Kantenrichtung und damit nicht im Kreis weiterlaufen. Läuft eine Nachricht jetzt im Kreis, so betritt sie den Kreis entgegen der Kantenrichtung, muß jedoch wegen des Richtungswechsels den Eintrittsknoten in Kantenrichtung wieder betreten. Da sie keinen Wechsel von "in Kantenrichtung" zu "gegen Kantenrichtung" machen darf, kann sie diesen Kreis kein zweites Mal durchlaufen, und auch ein weiterer Kreis kann nicht durchlaufen werden. Jeder mögliche Kreis hat genau



einziger Eintritts- und Ausgangs-
knoten für den Kreis

einen Knoten, dessen zwei zum Kreis gehörigen Kanten auf ihn gerichtet sind. Der Eintrittsknoten hat genau diese Eigenschaft. Gäbe es einen weiteren Knoten mit dieser Eigenschaft, so könnte eine vom Eintrittsknoten kommende Nachricht diesen zweiten Knoten nicht auf dem Kreis verlassen, d.h. ein Kreis wäre unmöglich. Deshalb kann jeder mögliche Kreis nur von einem Knoten aus vollständig durchlaufen werden. q.e.d.

Wie die Sätze 3.3 und 3.4 zeigen, gewährleisten Schrankengraphen bei geeigneten, einfachen Objektvergabeverfahren und gewissen Einschränkungen der Routingmöglichkeiten einen verklemmungsfreien Nachrichtenverkehr in Vermittlernetzen, d.h. sowohl leitungsvermittelnden als auch paketvermittelnden Netzen. Außerdem kann wegen der Routingvorschrift eine Nachricht dieselbe Leitung höchstens zweimal durchlaufen, so daß der Pingpong-Effekt unmöglich ist. Satz 3.5 zeigt, daß ebenfalls der Kreiseffekt unmöglich ist. Dies erlaubt in einem Netz mit Schrankengraphen einfache Algorithmen für Routing und zum Aufbau von Routingtabellen.

3.2 Verkehrsnetze

Wie bis jetzt gezeigt wurde, können durch Einschränkung von Routingmöglichkeiten auf der Basis vertikal numerierter Netze Verklemmungen in Vermittlernetzen vermieden werden. Eine allgemeinere Darstellung zur Einschränkung von Routing-Möglichkeiten, die darauf beruht, daß Verbindungen zwischen Leitungen eines Knotens verboten werden, führt zum Begriff der Verkehrsnetze.

Definition 3.4: Zwei Leitungen an einem Knoten eines Vermittlernetzes sind voneinander getrennt, wenn durch eine Leitung einlaufende Nachrichten nicht über die andere Leitung weitergesendet werden dürfen. Wir sprechen dann von einer Schranke zwischen den beiden Leitungen.

Sind zwei Leitungen an einem Knoten voneinander getrennt, so sagen wir, zwischen ihnen bestehe die Schrankenbeziehung. Diese Beziehung ist symmetrisch, aber nicht transitiv, d.h. wenn Leitung A und Leitung B getrennt sind, ebenfalls Leitung B und Leitung C, so braucht zwischen Leitung A und Leitung C keine Schranke zu existieren.

Da es in der Regel nicht sinnvoll ist, über eine Leitung eingehende Nachrichten wieder durch sie zurückzuschicken, sei grundsätzlich jede Leitung von sich selbst getrennt. Dies führt zur Verhinderung des Pingpong-Effektes. Diese Trennung zählen wir jedoch nicht zu den Schranken eines Netzes.

Definition 3.5: Die Menge aller Schranken eines Netzes bezeichnen wir als dessen Schrankenmenge.
Ein Verkehrsnetz ist ein zusammenhängendes Vermittlernetz mit Schrankenmenge, welches folgende Eigenschaften hat:

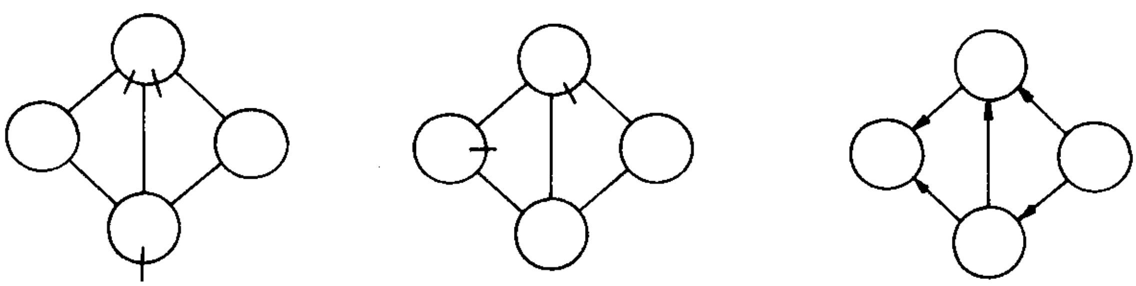
1. Eine Nachricht im Verkehrsnetz kann einen Kreis im Netz höchstens einmal durchlaufen.
2. Jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten aus erreichbar.

Definition 3.6: Ein Verkehrsnetz heißt transitiv, wenn die Schrankenbeziehung an jedem Knoten transitiv ist.

Satz 3.6: Jeder Schrankengraph definiert für den zu ihm gehörenden ungerichteten Graphen ein transitives Verkehrsnetz, wenn die Routing-Vorschrift des Schrankengraphen dahingehend verschärft wird, daß Nachrichten nicht über die Leitung zurückgesendet werden dürfen, über die sie gerade gekommen sind.

Beweis: Die Routing-Vorschrift in einem Schrankengraphen besagt, daß eine Nachricht beim Durchlaufen des Netzes nicht von "in Pfeilrichtung" zu "gegen Pfeilrichtung" wechseln darf. Dies bedeutet, daß alle Leitungen, die auf einen Knoten gerichtet sind, voneinander getrennt sind. Setzt man also an jedem Knoten zwischen je zwei auf ihn gerichtete Pfeile eine Schranke, so erhält man ein Netz mit Schrankenmenge, welches dieselben Routingmöglichkeiten zuläßt, wie ein Schrankengraph mit der verschärften Routing-Vorschrift. Nun gelten die Sätze 3.2 und 3.5 auch unter der verschärften Routing-Vorschrift (siehe Bemerkung nach dem Beweis von Satz 3.2). Damit erfüllt das Netz mit Schrankenmenge die beiden für Verkehrsnetze erforderlichen Bedingungen, ist also ein Verkehrsnetz. Aus der Konstruktion der Schranken je Knoten ist ersichtlich, daß dies Verkehrsnetz transitiv ist. q.e.d.

Das durch den Schrankengraph definierte Verkehrsnetz heißt zum Schrankengraphen gehörendes Verkehrsnetz. Nicht jedes Verkehrsnetz ist durch einen Schrankengraphen darstellbar, denn Schrankengraphen definieren nur transitive Verkehrsnetze, es gibt jedoch auch nicht transitive Verkehrsnetze (siehe Figur 3.1a). Es gibt sogar transitive Verkehrsnetze, welche nicht durch Schrankengraphen darstellbar sind (Figur 3.1e). Andererseits kann es mehrere Schrankengraphen geben, die dasselbe Verkehrsnetz definieren (Figur 3.1b,c,d).

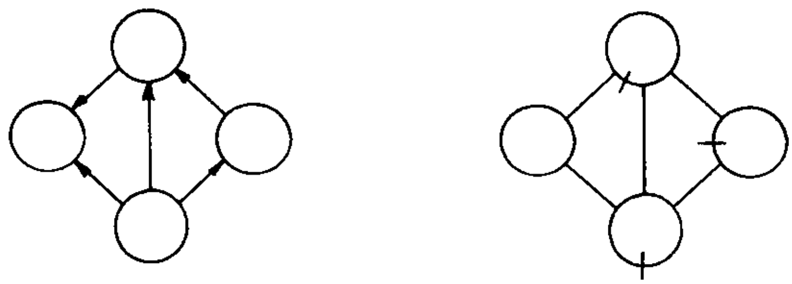


Figur 3.1

a) nicht durch Schrankengraphen darstellbares Verkehrsnetz

b) durch Schrankengraphen darstellbares Verkehrsnetz

c) zu b) gehör. Schrankengraph



Figur 3.1 (Fortsetzung)

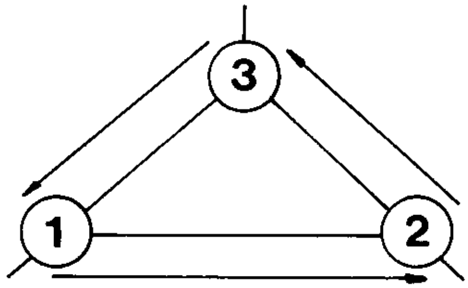
d) anderer Schrankengraph zu b)

e) nicht durch Schrankengraphen darstellbares transitives Verkehrsnetz

Die verschärfte Routing-Vorschrift hat keinen Einfluß auf die Verklemmungsfreiheit in Schrankengraphen. Deshalb sind nach Satz 3.5 durch Schrankengraphen darstellbare Verkehrsnetze verklemmungsfrei. Dies gilt mit dem Objektvergabeverfahren 1 sogar für allgemeine Verkehrsnetze, wie im folgenden gezeigt wird.

In Vermittlernetzen kann es zwei Arten von Verklemmungen geben. Bei der <u>direkten Verklemmung</u> blockieren sich zwei Vermittlerprozesse in Nachbarknoten dadurch, daß jeder die Objekte, die der andere braucht, erst wieder freigeben kann, wenn er selbst sein benötigtes Objekt bekommen hat. Dies ist in leitungsvermittelnden Netzen nicht möglich, da jeder Knoten eine Leitungshälfte fest zugeordnet hat, die vom anderen, der in der entgegengesetzten Richtung sendet, nicht benutzt werden kann. Bei einem paketvermittelnden Netz wird der selbe Effekt durch das Objektvergabeverfahren 1 erreicht, wenn keine Pingpong-Effekte im Netz auftreten können. Dies ist in Verkehrsnetzen der Fall.

Bei der <u>indirekten Verklemmung</u> blockieren sich mehr als zwei Vermittlerprozesse im Kreis, sie bilden also eine geschlossene Wartekette über einem Leitungskreis im Netz. Das einfachste denkbare Beispiel ist in Figur 3.2 dargestellt.



Figur 3.2

Dort sind drei Datenströme dargestellt. Die Pfeile geben die Flußrichtung der Nachrichten an. In Knoten 1 sind alle Objekte vergeben an den Datenstrom, der von Knoten 1 nach 2 fließt, in Knoten 2 an den Datenstrom, der von Knoten 2 nach 3 fließt und in Knoten 3 an den Strom, der von Knoten 3 nach Knoten 1 fließt. Deshalb kann kein Datenstrom im jeweiligen Nachbarknoten ein benötigtes freies Objekt bekommen, es gibt eine geschlossene Wartekette von Vermittlerprozessen.

Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir zu

Satz 3.7: In einem allgemeinen Verkehrsnetz mit Objektvergabeverfahren 1 gibt es keine Verklemmungen.

Beweis: Nach den Vorbemerkungen genügt es, zu zeigen, daß keine indirekten Verklemmungen auftreten können. Nach Satz 1.2 ist dies der Fall, wenn das System der Vermittlerprozesse regulär ist und es keine geschlossenen Wartketten von Vermittlerprozessen über Leitungskreisen gibt. Für die Regularität des Systems der Vermittlerprozesse gelten dieselben Überlegungen wie für Übertragungsprozesse (siehe Abschnitt 1.2).

Ein Vermittlerprozeß wartet nur dann auf einen Vermittlerprozeß in einem anderen Knoten, wenn kein zur Vermittlung einer Nachricht benötigtes Objekt für ihn da ist. Wegen des Objektvergabeverfahrens 1 heißt das im Falle von leitungsvermittelnden Netzen, daß die Ausgabeleitung von einem anderen Prozeß belegt ist. Bei paketvermittelnden Netzen ist der zur Eingabeleitung gehörende Puffer noch im Besitze eines Prozesses, welcher die darin befindliche Nachricht weiter vermitteln will.

Eine geschlossene Wartekette von Vermittlerprozessen liegt vor, wenn der Prozeß, auf den gewartet wird, wiederum auf einen weiteren Prozeß wartet usw., bis zu einem Vermittlerprozeß, der auf den zuerst betrachteten Prozeß wartet. Eine geschlossene Wartekette kann nur über einem Leitungskreis liegen. Das zugrunde liegende Vermittlernetz ist ein Verkehrsnetz, d.h. in jedem Leitungskreis befindet sich mindestens eine Schranke. Über diese Schranke hinweg können Vermittlerprozesse nicht aufeinander warten, denn im Falle von leitungsvermittelnden Netzen wird die Ausgangsleitung, zu der die Schranke besteht, nicht benötigt, da über sie nicht weitervermittelt werden darf. Aus dem selben Grunde kann bei paketvermittelnden Netzen der zur Eingabeleitung gehörende Puffer nicht im Besitze eines Vermittlerprozesses sein, welcher den Inhalt des Puffers über die abgetrennte Ausgangsleitung übertragen will. Damit sind geschlossene Warteketten von Vermittlerprozessen nicht möglich. q.e.d.

3.3 Minimale Verkehrsnetze und Schrankengraphen

Ein möglicher Nachteil von Verkehrsnetzen ist die Einschränkung der Routingmöglichkeiten durch Schranken. Je weniger Schranken ein Verkehrsnetz hat, desto kleiner sind diese Einschränkungen. Dies führt zur folgenden

Definition 3.7: Ein Verkehrsnetz über einem Vermittlernetz heißt minimal, wenn es über dem gleichen Vermittlernetz kein Verkehrsnetz mit kleinerer Schrankenzahl gibt.

Die Existenz eines minimalen Verkehrsnetzes ist für jedes Vermittlernetz gesichert, da die maximale Schrankenzahl in jedem Netz endlich ist und damit die Zahl möglicher Schrankenmengen endlich und ihre Mächtigkeit nach unten (und oben) begrenzt ist. Aber es kann mehrere minimale Verkehrsnetze zum selben Vermittlernetz geben.

Im folgenden soll untersucht werden, wann minimale Verkehrsnetze durch Schrankengraphen darstellbar sind.

Satz 3.10: Ein minimales und transitives Verkehrsnetz ist durch einen Schrankengraphen darstellbar.

Beweis: Es wird zu einem transitiven minimalen Verkehrsnetz ein Schrankengraph konstruiert, dessen zugehöriges Verkehrsnetz gleich dem Ausgangsnetz ist.

Konstruktionsverfahren:

(1) Bei allen Knoten mit Schranken gebe man den durch Schranken getrennten Kanten eine Richtung auf den Knoten, allen anderen eine Richtung vom Knoten weg.

(2) Man nehme einen Knoten, auf den schon eine Kante zeigt, aber noch nicht alle Kanten gerichtet sind, und gebe diesen eine Richtung vom Knoten weg.

(3) Schritt (2) wird solange wiederholt, wie ein Knoten vorhanden ist, der den Voraussetzungen genügt.

(4) Man nehme einen Knoten, auf den noch keine Kante zeigt, und gebe allen Kanten eine Richtung von ihm weg. Dies wird der Startknoten.

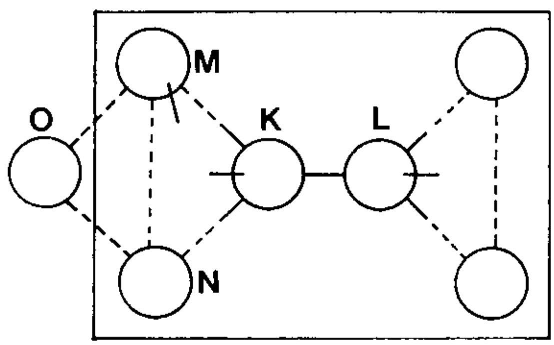
(5) Schritt (2) wird solange wiederholt, wie ein Knoten vorhanden ist, der den Voraussetzungen genügt.

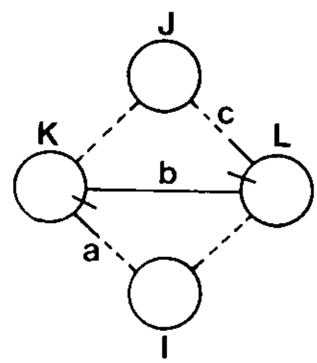
Für dieses Verfahren ist folgendes zu zeigen:

a) es ist durchführbar
b) es liefert einen Schrankengraphen
c) das zu diesem Schrankengraphen gehörende Verkehrsnetz ist das Ausgangsnetz.

Zu a): Es ist zu zeigen, daß Schritt (1) widerspruchsfrei durchführbar ist und es einen geeigneten Knoten für Schritt (4) gibt. Letzteres ist gesichert, denn würde nach Schritt (3) auf jeden Knoten eine Leitung zeigen, so könnte man entgegen der Richtung von einem beliebigen Knoten aus beliebig lange laufen. Da nur endlich viele Knoten da sind, würde man im Kreis laufen (s.a.Theorem 9-15 in /16/). Da an jeder Schranke des Ausgangsnetzes infolge von Schritt (1) ein Richtungswechsel stattfinden muß, läuft man im Ausgangsnetz im Kreise, ohne je einer Schranke zu begegnen. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß ein Verkehrsnetz vorliegt.

Schritt (1) führt nur in den unten aufgezeichneten Situationen zum Widerspruch an der Kante zwischen K und L.





Es soll gezeigt werden, daß in beiden Fällen Schranken "überflüssig" sind, d.h. das Netz nicht minimal ist.
In der linken Situation muß der eingezeichnete Kreis, z.B. bei M durch eine Schranke NMK, welche die Kanten NM und MK trennt, aufgetrennt sein. Dann wäre die Schranke MKN bei K überflüssig, es sei denn, sie trennt einen weiteren Kreis, z.B. KMONK.
Damit ergibt sich ein Kreis OMNO, der getrennt sein muß. Eine Schranke bei O macht wieder die Schranke MKN bei K überflüssig. Eine Schranke bei M oder N -wegen der Symmetrie wird im folgenden nur die Schranke bei M betrachtet- würde durch eine Schranke NOM bei O ersetzbar sein, es sei denn, sie trennt einen weiteren Kreis MOPNM. Damit ergibt sich ein neuer Kreis PONP. Eine Trennung bei P würde die Schranke OMN nach O versetzbar machen, so daß wieder MKN überflüssig wird. Eine Schranke PON bzw. ONP ergäbe jedoch ein nicht minimales Netz, es sei denn, sie schneidet einen weiteren Kreis.

Da jeder solcherart hinzukommende Kreis mindestens einen Knoten und eine noch nicht betrachtete Kante enthält, es jedoch nur endlich viele Kanten gibt, kommt man irgendwann zu einem Ende. Ein Netz, welches die linke Situation enthält, ist also nicht minimal.

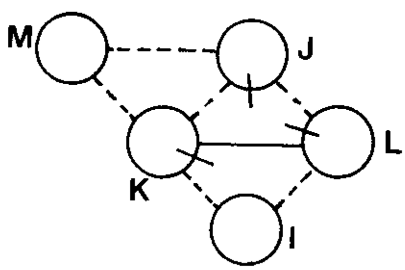
In der rechts aufgezeichneten Situation müssen wegen der Minimalität die gestrichelt gezeichneten Kreise vorhanden sein, da sonst die Schranken überflüssig wären. Dabei entsteht ein dritter Kreis K .. I .. L .. J .. K, der irgendwo aufgetrennt sein muß. (Die Punkte kennzeichnen, daß noch weitere Knoten dazwischen liegen können.) Dies könnte an folgenden Stellen sein:

- nur in L,
- nur in K,
- nur in I,
- nur in J,
- an mehreren der oben genannten Punkten.

Wegen der Symmetrie der Fälle und der Minimalität reicht es, folgende Fälle zu betrachten:

(1) Trennung bei I
(2) Trennung bei K

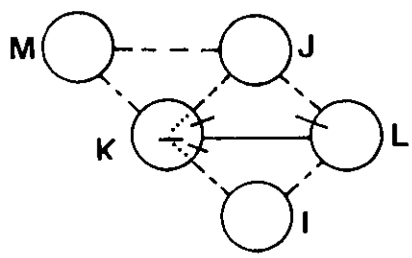
zu (1)



Die Schranke bei I macht die Schranke bei L überflüssig, es sei denn, sie trennt einen weiteren Kreis KLJMK. Dann existiert ein Kreis MKILJM.
Wäre er auf dem Weg KMJ, z.B. bei M, aufgetrennt, so wäre die Schranke KLJ überflüssig. Wäre er bei I aufgetrennt, so wäre die Schranke KJL bei J überflüssig.

Wäre er bei K aufgetrennt, so müßte wegen der Transitivität auch eine Schranke MKL existieren, d.h. die Schranke KLJ wäre überflüssig.
Wäre er bei J getrennt, wäre die Schranke KLJ überflüssig.
Wäre er bei L getrennt, so wäre die Schranke KJL überflüssig.
Somit liegt ein Widerspruch zur Minimalität vor.

zu (2)

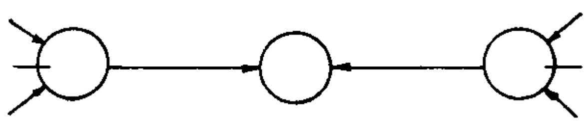


Wegen der Transitivität muß eine weitere Schranke JKL bei K existieren. Diese macht die Schranke KLJ überflüssig, es sei denn, sie trennt einen weiteren Kreis MKLJM.
Dann existiert ein Kreis MKILJM.
Wäre er bei M getrennt, wäre die Schranke KLJ überflüssig.
Wäre er bei I getrennt, wäre die Schranke IKJ überflüssig.
Eine Auftrennung bei K hätte wegen der Transitivität eine Schranke MKL zur Folge, welche die Schranke KLJ überflüssig macht.
Wäre er bei J getrennt, wäre die Schranke KLJ überflüssig.
Eine Trennung bei L macht die Schranke JKL bei K überflüssig.
Das "überflüssig" ist jeweils zu ergänzen durch "es sei denn, sie schneidet einen weiteren Kreis". Aus der Endlichkeit des Graphen folgt analog der linken Situation, daß sie trotzdem überflüssig ist. Damit ist in allen Fällen das betrachtete Verkehrsnetz nicht minimal.

Zu c): Es ist zu zeigen, daß durch das Richten der Kanten und die Bestimmung, daß zwischen zwei auf einen Knoten gerichtete Pfeile eine Schranke gesetzt wird, (s. Beweis von Satz 3.6), alle Schranken des Ausgangsnetzes entstehen, aber keine weiteren hinzukommen.

Bei Schritt (1) entstehen alle Schranken des Ausgangsnetzes. An einem Knoten, der im Ausgangsnetz Schranken hatte, können keine Schranken hinzukommen: Seien wegen einer Schranke zwischen Kante a und Kante b beide Kanten auf den Knoten gerichtet, und weiter wegen einer Schranke zwischen Kante b und Kante c auch Kante c auf den Knoten gerichtet, so würde bei der Schrankenkonstruktion auch zwischen a und c eine Schranke entstehen. Da jedoch nach Voraussetzung das Verkehrsnetz transitiv ist, war diese Schranke schon im Ausgangsnetz vorhanden.

Durch mehrfache Anwendung des Schrittes (1) können höchstens in der folgenden Situation Schranken an Knoten ohne Schranken entstehen:



Diese Situation ist der linken in a) ähnlich und kann deshalb, wie in a) gezeigt, in minimalen Verkehrsnetzen nicht auftreten, es sei denn, das Ausgangsnetz enthielte eine Schranke im mittleren Knoten.

Durch Schritt (4) können keine neuen Schranken entstehen, denn die durch Schritt (4) gerichteten Kanten können wegen Schritt (3) nur auf Knoten zeigen, auf die noch keine Kante gerichtet ist. Durch Schritt (2) können bei Schritt (3) bzw. (5) keine neuen Schranken entstehen, außer bei der Durchführung von Schritt (2) wird eine Kante auf einen Knoten gerichtet, auf den schon eine Kante zeigt. Nach vorigem kann diese Kante nur bei Durchführung von Schritt (1) oder (2) am anderen Anschlußknoten gerichtet worden sein. Wir verfolgen diese Kante entgegen der Kantenrichtung. Kommt man an einen Knoten, auf den keine Kante zeigt, so ist dies der Startknoten, oder aber es existiert eine ungerichtete Leitung. Wäre sie ungerichtet, so würde sie wegen der Erreichbarkeit in einem Verkehrsnetz durch die Schritte (4), (5) gerichtet, und man könnte sie weiter zurückverfolgen. Wäre es der Startknoten, so gäbe es der Erreichbarkeit wegen einen

Weg in Pfeilrichtung zu dem Knoten, an dem die Schranke entstanden ist. Das Ausgangsnetz wäre also nicht kreisfrei. Wir können demzufolge eine auf den Knoten gerichtete Leitung ebenso wie die zuerst betrachtete Kante weiter zurückverfolgen. Da ein Verkehrsnetz nur endlich viele Knoten hat, trifft man an irgend einer Stelle entgegen der Pfeilrichtung einen schon durchlaufenen Knoten. Innerhalb des so durchlaufenen Kreises liegt keine Schranke des Ausgangsnetzes vor, denn diese wäre infolge von Schritt (1) nur in Pfeilrichtung erreichbar. Damit aber wäre es möglich, im Ausgangsnetz einen Kreis zu laufen. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß das Ausgangsnetz ein Verkehrsnetz ist.

Zu b): Das Verfahren baut einen Schrankengraphen auf.
Laut Definition eines Verkehrsnetzes ist das zugrundeliegende Vermittlernetz zusammenhängend.

Schritt (4) ist nach a) durchführbar, d.h. es gibt mindestens einen Startknoten.

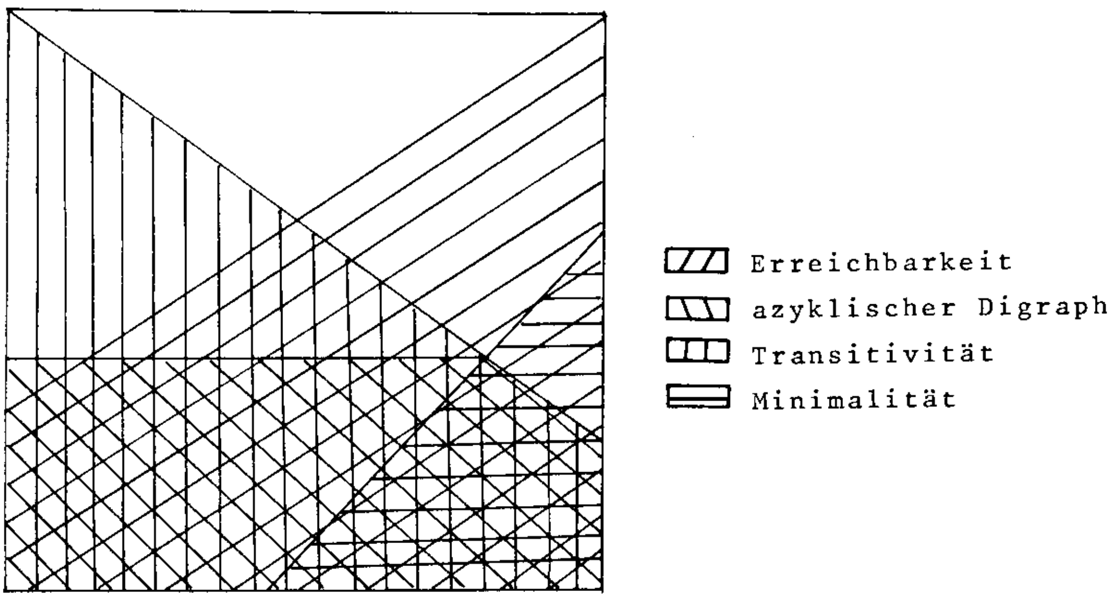
Das Verfahren richtet jede Kante: Im Ausgangsnetz ist jeder Knoten vom Startknoten aus erreichbar. Da von ihm aus aber nur weggerichtete Pfeile führen, muß auf jeden anderen Knoten mindestens eine Kante gerichtet sein. Wäre dies bei einem der Knoten nicht der Fall, so müßten alle Wege zwischen ihm und dem Startknoten durch Schranken getrennt sein. Da durch das Verfahren keine neuen Schranken hinzukommen können (siehe c)), widerspricht dies der Annahme, daß das Ausgangsnetz ein Verkehrsnetz ist. Da nun auf jeden Knoten eine Kante gerichtet ist, müssen in Schritt (3) und (5) ebenfalls alle Kanten gerichtet werden.

Der so entstandene Digraph ist ein Schrankengraph: Da der Digraph nach c) genau die Schranken des Ausgangsnetzes wiedergibt, und im Ausgangsnetz keine Kreise durchlaufen werden können, ist der Digraph azyklisch. Im Ausgangsnetz ist jeder Knoten erreichbar. Nach Satz 3.2 ist der Digraph ein Schrankengraph. q.e.d.

Innerhalb der Netze, welche Verklemmungsfreiheit durch Einschränkung von Routingmöglichkeiten mittels Schrankenmengen erzielen, haben wir bisher folgende Eigenschaften und ihre Zusammenhänge untersucht:

1. Vertikal numerierte Netze - diese sind den azyklischen Digraphen äquivalent
2. Erreichbarkeit - dies ergibt die Verkehrsnetze
3. Transitivität
4. Schrankengraphen - sie erfüllen 1., 2. und 3.
5. Minimalität

Die Zusammenhänge sind in Figur 3.3 dargestellt.



Da die Erreichbarkeit eine für Vermittlernetze wesentliche Eigenschaft ist, Digraphen sich mit Hilfe der Graphentheorie recht gut untersuchen lassen und die transitiven minimalen Verkehrsnetze durch Schrankengraphen darstellbar sind, wird im folgenden mit "Verkehrsnetz" immer ein durch Schrankengraphen darstellbares Verkehrsnetz gemeint sein. Sollen auch nicht durch Schrankengraphen darstellbare Verkehrsnetze betrachtet werden, so wird von <u>allgemeinen Verkehrsnetzen</u> gesprochen.

3.4 Schrankenzahl in minimalen Verkehrsnetzen

Um einerseits feststellen zu können, ob ein vorliegendes Verkehrsnetz minimal ist, und andererseits Abschätzungen über den Umfang der Routingeinschränkungen zu bekommen, sollen jetzt einige Abschätzungen über die Mächtigkeit der Schrankenmenge eines minimalen Verkehrsnetzes für ein vorgegebenes Vermittlernetz gemacht werden. Dazu werden jetzt die graphentheoretischen Konzepte eines spannenden Baumes und der fundamentalen Kreise eines Graphen benötigt. Sie werden hier informal eingeführt, soweit sie benötigt werden. Genaueres ist in Deo /16/ zu finden.

Das Gerüst /15/ oder spannender Baum (spanning tree) eines Graphen ist ein Teilgraph, welcher einen Baum bildet, aber immer noch alle Knoten des Graphen miteinander verbindet.

Wird zu einem spannenden Baum irgend eine Kante des Netzes, welche nicht zum Baum gehört, hinzugefügt, so ergibt sich ein fundamentaler Kreis (fundamental circuit).

Wir betrachten von jetzt an stets Graphen mit e Kanten und n Knoten. Nach /16/ Theorem 3-12 hat dann das Gerüst n-1 Kanten, und es gibt e-n+1 verschiedene fundamentale Kreise.

Da in einem Verkehrsnetz mindestens alle fundamentalen Kreise aufgetrennt sein müssen, liegt folgendes nahe:

Satz 3.11: Der Graph eines allgemeinen Verkehrsnetzes habe n Knoten und e Kanten. Dann ist die Schrankenzahl $m >= e-n+1$.

Beweis: Durch Induktion nach der Zahl $k = e-n+1$ der fundamentalen Kreise.

Induktionsanfang: $k = 0$ (Baum). Da es nicht weniger als Null Schranken geben kann, ist die Behauptung richtig.

Induktionsannahme: Die Behauptung ist richtig für k.
Es ist zu zeigen: Sie bleibt es für k+1 fundamentale Kreise.

Wir betrachten einen Graphen mit k + 1 fundamentalen Kreisen und ein beliebiges Gerüst zu diesem Graphen. Jetzt nehmen wir eine nicht zum Gerüst gehörende Kante a weg. Es bleibt ein Graph mit k fundamentalen Kreisen. Nach der Induktionsannahme hat jedes Verkehrsnetz zu diesem Graphen m'>=k Schranken. Wegen der Erreichbarkeit muß es in jedem dieser Verkehrsnetze einen unaufgetrennten Weg zwischen den Anschlußknoten von a geben. Damit kann keines dieser Verkehrsnetze Kreise über a auftrennen. Alle über dem Ausgangsgraphen möglichen Verkehrsnetze bestehen aus allen im Graphen ohne a möglichen Verkehrsnetzen und zusätzlichen Schranken, welche die über a noch möglichen Kreise auftrennen. Damit muß hier die Schrankenzahl m>m'>=k, also m>=k+1 sein. q.e.d.

Da die obige Abschätzung recht ungenau sein kann, wird jetzt ausgehend davon, daß transitive minimale Verkehrsnetze durch Schrankengraphen darstellbar sind, eine andere Abschätzung vorgenommen. Wir betrachten die Gesamtheit aller durch Schrankengraphen darstellbaren Verkehrsnetze mit ein und derselben, fest vorgegebenen Topologie.

Die Menge V der Knoten ist dann für alle diese Netze dieselbe, ebenso die Zahl e der Leitungen bzw. der Kanten des zugehörigen Schrankengraphen.

Wir wählen jetzt einen der zugehörigen Schrankengraphen. Die Zahl der auf den Knoten k aus V gerichteten Kanten in dem Schrankengraphen sei s_k.

Die durch den Schrankengraphen definierte Schrankenmenge enthält dann $\binom{s_k}{2}$ Schranken am Knoten k, da eine Schranke zwischen je zwei auf den Knoten gerichteten Kanten gesetzt wird. Die Schrankenzahl ist dann $\sum_{k \in V} \binom{s_k}{2}$.

Dabei sei $\binom{s_k}{2} = 0$ für $s_k < 2$. Ferner gilt $\sum_{k \in V} s_k = e$, da jede Kante auf genau einen Knoten zeigt, also in der Summe genau einmal gezählt wird.

Minimiert man jetzt die Summe $\sum_{k \in V} \binom{s_k}{2}$ durch Variation der s_k unter der Nebenbedingung $\sum_{k \in V} s_k = e$, so erhält man eine untere Schranke für die minimal mögliche Schrankenzahl. Da $\binom{s_k}{2}$ mit linear steigendem s_k sehr viel stärker als linear ansteigt, erhält man das Minimum der Summe, wenn alle s_k möglichst gleich groß sind. Genau gleich groß werden sie im allgemeinen nicht sein, da s_k eine ganze Zahl sein muß. Weitere Nebenbedingungen für die Wahl der s_k sind, daß auf den Startknoten keine Kante zeigt und es mindestens einen Knoten gibt, auf den genau eine Kante zeigt. Letzteres wird in Satz 4.3 mit rein graphentheoretischen Überlegungen bewiesen.

Wir verfeinern deshalb unsere Abschätzung, indem wir die (e-1) verbleibenden Kanten auf die (n-2) verbleibenden Knoten möglichst gleichmäßig verteilen. In erster Näherung ergeben sich so $\frac{e-1}{n-2}$ Kanten an den restlichen (n-2) Knoten. Dabei nehmen wir an, n sei größer als zwei. Bei weniger als drei Knoten sind keine Schranken nötig. Sei $\lfloor k \rfloor$ die größte ganze Zahl $<= k$, $\lceil k \rceil$ die kleinste ganze Zahl $>= k$.

Nehmen wir erst einmal $\lfloor \frac{e-1}{n-2} \rfloor$ Kanten für jeden der (n-2) Knoten, so bleiben $(e-1-(n-2) \lfloor \frac{e-1}{n-2} \rfloor)$ Kanten übrig. Auf diese Anzahl Knoten müssen demzufolge $\lfloor \frac{e-1}{n-2} \rfloor + 1$ Kanten zeigen, auf (n-2)-

$(e-1-(n-2)\lfloor \frac{e-1}{n-2} \rfloor) = (n-2) \lfloor \frac{e-1}{n-2} \rfloor - (e-n+1)$ Knoten dann $\lfloor \frac{e-1}{n-2} \rfloor$

Kanten. Daraus ergibt sich für die minimal mögliche Schrankenzahl min:

$$\min \geq (n-2) \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \binom{\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor}{2} + \left(e-1-(n-2)\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor\right) \binom{\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor + 1}{2} - (e-n+1) \binom{\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor}{2}.$$

Da bei einem zusammenhängenden Graphen $\frac{e-1}{n-2} \geq 1$ ist, können die Binomialkoeffizienten aufgelöst werden. Man erhält

$$\min \geq \frac{n-2}{2} \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor^2 \left(\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor - 1 \right) + \left(e-1-(n-2)\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \right) \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor + 1 \right) - \frac{e-n+1}{2} \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor - 1 \right).$$

Zieht man $\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor$ heraus, so bleibt

$$\min \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \left\{ (n-2) \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor - 1 \right) + (e-1) \left(\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor + 1 \right) - (n-2) \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor + 1 \right) - (e-n+1) \left(\left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor - 1 \right) \right\}.$$

Faßt man den ersten und dritten sowie den zweiten und vierten Summanden in der geschweiften Klammer zusammen, so erhält man

$$\min \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \left\{ -2(n-2) \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor + (e-1) \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor - (e-n+1) \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor + 2e - n \right\}.$$

Damit ergibt sich:

a) $\min \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \left\{ 2e-n-(n-2) \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor \right\}$

Ist im Verkehrsnetz an allen Knoten $s_k = \left\lfloor \frac{e-1}{n-2} \right\rfloor$ erreichbar, so gilt in Aussage a) sogar das Gleichheitszeichen. In diesem Fall kann man, da das Verkehrsnetz zusammenhängend ist und deshalb $\frac{e-1}{n-2} \geq 1$ sein muß, die nachfolgende Aussage b) ableiten.

b) $\min \leq \frac{1}{2} \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor (2e-n-(n-2)) = \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor (e-n+1)$

Wegen $\frac{e-1}{n-2} \geq \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor$ und min ganzzahlig folgt aus Aussage a) :

c) $\min \geq \left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor (2e-n-(e-1)) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor (e-n+1) \right\rceil$

Falls $\frac{e-1}{n-2}$ ganzzahlig und $s_k = \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor$ an allen Knoten erreichbar ist, gilt sogar

d) $\min = \frac{1}{2} \frac{e-1}{n-2} (e-n+1)$

Die Aussagen a). und c). sind in jedem Fall gültig. Die Aussagen b). und d). jedoch nur, wenn es einen Graphen gibt, der an allen Knoten ein $s_k \geq \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor$ erlaubt. Dies geht nur bei entsprechender Topologie des Netzes, insbesondere wenn die Grade der Knoten nicht zu unterschiedlich sind.

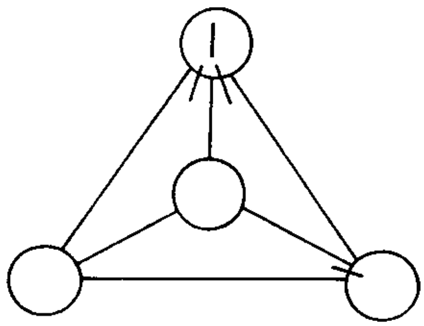
<u>Satz 3.12:</u> Ist $e > 2(n-2)$, so gilt für die Schrankenzahl m eines Verkehrsnetzes:

$$m \geq \left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor (e-n+1) \right\rceil$$

<u>Beweis:</u> Aussage c). q.e.d.

Satz 3.12 gilt auch ohne die Voraussetzung, nur liefert er dann schlechtere Resultate als Satz 3.11. Satz 3.12 liefert bessere Werte als Satz 3.11, falls $\left\lfloor\frac{e-1}{n-2}\right\rfloor \geq 3$ ist. Dies würde bedeuten, daß $\frac{e-1}{n-2} \geq 3$, also $e > 3(n-2)$ ist. Demnach liefert Satz 3.12 nur für nicht planare Graphen bessere Werte als Satz 3.11.
Es gibt allerdings auch planare Graphen, für die $m > e-n+1$ ist, z. B. der vollständige Graph mit vier Knoten (Figur 3.4). Hier ist $e-n+1 = 3$, aber nach Aussage a)

$$m \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \left(12-4-2 \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor\right), \text{ also } m \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (8-4) = 4$$



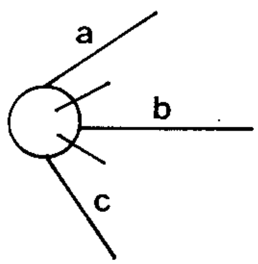
Figur 3.4

$n = 4$

$e = 6$

<u>Satz 3.13</u>: Gegeben sei ein minimales Verkehrsnetz mit $m = e - n + 1$ Schranken. Dann hat jeder Knoten höchstens eine Schranke, und an jeder Kante liegt höchstens eine Schranke.

<u>Beweis:</u> a). Jeder Knoten hat höchstens eine Schranke. Wir nehmen an, daß es einen Knoten mit mindestens zwei Schranken gibt. Es liegt folgende Situation vor:

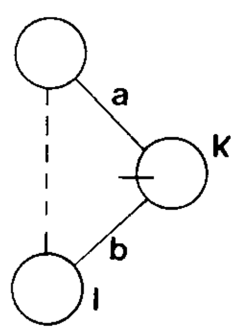


Nach Satz 3.11 ist das Verkehrsnetz minimal, also trennt jede der beiden Schranken einen Kreis. Entfernt man die Kante b, so erhält man einen zusammenhängenden Graphen mit $e'-n+1=e+n$ fundamentalen Kreisen, da $e'=e-1$ ist. Es sind jedoch zwei Schranken, die zwischen a und b und die zwischen b und c, überflüssig geworden, d.h. $m'=m-2$. Nach Satz 3.11 ist $m'>=e'-n+1$, also $m-2>=(e-1)-n+1$. Damit ist $m>e-n+1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

b). An jeder Kante liegt höchstens eine Schranke. Wir nehmen an, daß an einer Kante zwei Schranken liegen. Wegen a). muß die zweite Schranke am anderen Anschlußknoten der Kante liegen. Wir wählen jetzt ein Gerüst so, daß die betrachtete Kante einen fundamentalen Kreis definiert. Nehmen wir die Kante weg, so werden beide Schranken überflüssig. Wir erhalten also ein Verkehrsnetz mit m-1 fundamentalen Kreisen, aber nur m-2 Schranken. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 3.11. q.e.d

<u>Satz 3.14:</u> Jedes Verkehrsnetz mit Schrankenzahl m=e-n+1 läßt sich durch einen Schrankengraphen darstellen.

<u>Beweis:</u> Durch Induktion nach der Kantenzahl e.
e=1: Eine Kante läßt sich beliebig richten, um einen Schrankengraphen zu ergeben. Sei die Behauptung für e Kanten richtig. Es ist zu zeigen, daß sie auch für e+1 Kanten gilt. Gibt es keine Schranken, so liegt ein Baum vor, und die Behauptung gilt. Gibt es Schranken, so wähle man eine Kante a, die an einer Schranke liegt. Nimmt man diese Kante und die Schranke weg, so liegt ein Verkehrsnetz mit e Kanten und e-n+1 Schranken vor. Dies läßt sich nach Induktionsvoraussetzung als Schrankengraph darstellen. Jetzt betrachten wir die Kante b, die von der Kante a am Knoten K getrennt ist.

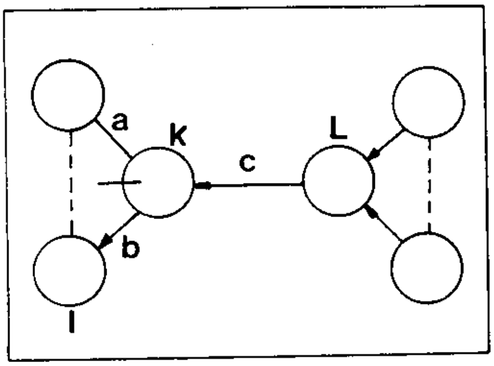


Da im Schrankengraphen zwei auf auf einen Knoten gerichtete Kanten eine Schranke definieren, müssen in dem gewünschten Schrankengraphen a und b auf K gerichtet sein.

Der Kante a gebe man eine Richtung auf K. Dies ist nach Satz 3.13 eindeutig möglich, da keine weitere Schranke an a liegt.
Ist b ebenfalls auf K gerichtet, so liegt der gewünschte Schrankengraph vor.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Kante b auf K gerichtet werden kann, falls sie noch nicht dorthin zeigt.

Wegen Satz 3.13 liegt am zweiten Anschlußknoten I von b keine Schranke an b. Ist b auf I gerichtet, so kann keine weitere Kante auf I gerichtet sein, da sonst eine im Ausgangsnetz nicht existierende Schranke entsteht. Durch Umdrehen von b wird I zum Startknoten. Nach Satz 3.13 existiert bei K nur die Schranke zwischen a und b. Damit zeigt höchstens eine Kante auf K. War K Startknoten, so ist man nach dem Ändern der Richtung von b fertig. Andernfalls muß die auf K gerichtete Kante c von K weggerichtet werden.
Auf den anderen Anschlußknoten L von c zeigt ebenfalls höchstens eine Kante, da sonst entweder die Erreichbarkeit nicht gewährleistet oder ein Kreis über die auf L gerichteten Kanten, c, a und b möglich wäre (siehe Zeichnung).



Dasselbe Argument gilt wieder für den zweiten Anschlußknoten L einer eventuell auf K zeigenden Kante. Da der so verfolgte Weg keinen Kreis enthalten kann, wird kein schon berührter Knoten noch einmal erfaßt. Wegen der Endlichkeit des Graphen endet das Verfahren am ehemaligen Startknoten. Durch eine Änderung der Richtung des verfolgten Weges entsteht also ein azyklischer Digraph mit einem Startknoten für das Netz mit e+1 Kanten, der genau die ursprünglichen Schranken definiert. q.e.d

Satz 3.15: Zu einem zusammenhängenden Graphen gibt es genau dann ein Verkehrsnetz mit m=e-n+1 Schranken, wenn sich der Graph nach folgendem Verfahren aufbauen läßt:

(1) Beginne mit einem Knoten.
(2) An den schon vorhandenen Graphen wird jeder weitere Knoten mit maximal zwei Kanten angeschlossen.

Ein minimales Verkehrsnetz für solch einen Graphen erhält man, wenn bei allen mit zwei Kanten angeschlossenen Knoten eine Schranke zwischen die Kanten gesetzt wird.

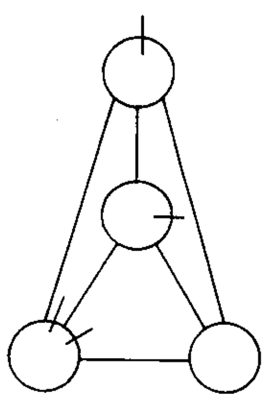
Beweis:
a). zu zeigen: Hat ein Verkehrsnetz m=e-n+1 Schranken, so läßt sich der zugehörige Graph nach obigem Algorithmus aufbauen.
Nach Satz 3.14 läßt sich das Verkehrsnetz durch einen Schrankengraphen darstellen. Wegen Satz 3.13 zeigen darin höchstens zwei Kanten auf jeden Knoten. Baut man den Graphen in der Reihenfolge der durch den Schrankengraphen definierten topologischen Ordnung auf, so genügt dies genau dem geforderten Algorithmus.
b). zu zeigen: Zu jedem dem Aufbaualgorithmus genügenden Graphen läßt sich ein Verkehrsnetz mit m=e-n+1 Schranken finden.
Man trenne bei jedem Knoten, der mit zwei Leitungen angeschlossen wird, diese durch eine Schranken.
ba). So ergibt sich ein Verkehrsnetz.
Beweis durch Induktion nach der Knotenzahl n.
n=1: Ein Knoten ist ein Verkehrsnetz. Sei die Behauptung richtig für n=m. Bei Anschluß eines weiteren Knotens mit einer Kante können keine weiteren Kreise hinzukommen. Wird der Knoten mit zwei Kanten angeschlossen, so werden alle über ihn möglichen neuen Kreise an ihn aufgetrennt. Andererseits sind beide Anschlußknoten von ihm aus erreichbar, und von denen aus nach Induktionsannahme alle anderen Knoten. Damit liegt ein Verkehrsnetz vor.

bb). Das sich ergebende Verkehrsnetz hat $m=e-n+1$ Schranken und ist damit minimal.
Sei nz die Zahl der Knoten, die mit zwei Leitungen angeschlossen werden.
Sei ne die Zahl der Knoten, die mit einer Leitung angeschlossen werden.
Dann ist die Schrankenzahl $m=nz$.
Nun ist
die Knotenzahl $n=1+nz+ne$,
die Kantenzahl $e=2nz+ne$,
also $e-n+1=2nz+ne-(1+nz+ne)+1=nz$,
d.h. $m=e-n+1$. q.e.d.

<u>Satz 3.16:</u> Gibt es in einem zusammenhängenden Graphen nach Entfernen aller Knoten vom Grad eins keinen Knoten vom Grad zwei, aber mehr als einen Knoten, so hat jedes Verkehrsnetz über diesem Graphen eine Schrankenzahl $m > e-n+1$.

<u>Beweis:</u> Nach Satz 3.11 ist $m>=e-n+1$.
Hat der Graph nach Entfernen aller Knoten vom Grad eins keinen Knoten vom Grad zwei, aber er enthält mehr als einen Knoten, so kann er nicht nach dem Algorithmus von Satz 3.15 aufgebaut sein, also ist $m \neq e-n+1$. Daher muß $m>e-n+1$ sein. q.e.d.

Nach Satz 3.10 lassen sich alle transitiven minimalen Verkehrsnetze durch Schrankengraphen darstellen. Es kann jedoch auch nichttransitive minimale Verkehrsnetze geben, wie das folgende Beispiel zeigt.



Satz 3.15 beschreibt die Topologie von Graphen, für die sich jedes minimale Verkehrsnetz als Schrankengraph darstellen läßt. Unter diese Topologie fallen Netze, die mit relativ geringem Leitungsaufwand ein vernünftiges Maß an Ausfallsicherheit bieten. Außerdem genügt bei Schrankengraphen in paketvermittelnden Netzen das einfach und mit wenig Aufwand an "Reserve"-Puffern zu implementierende Objektverfahren 2.
Deshalb beschränken wir uns in den folgenden Kapiteln auf durch Schrankengraphen darstellbare Verkehrsnetze.

4. Nachrichtenfluß in Verkehrsnetzen

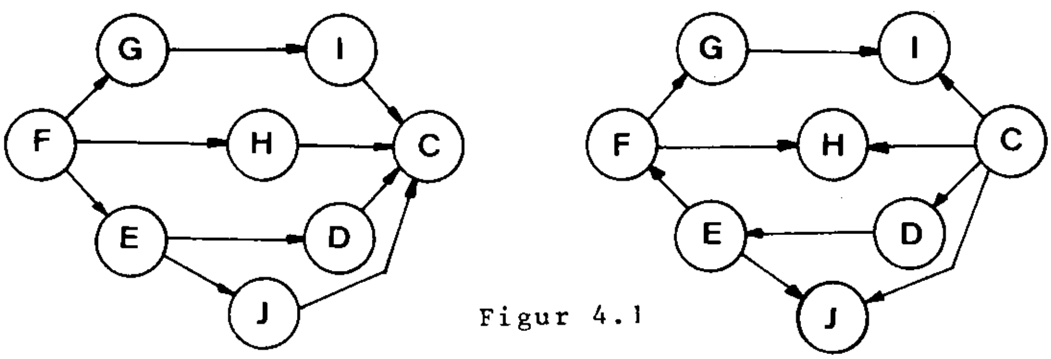
Grundlegendes über den Fluß in Netzen wie z.B. über den maximalen Fluß zwischen zwei Knoten ist in Ford-Fulkerson /6/ zu finden. Weiterführende Überlegungen enthält z.B. /7, 8/. In /15/ sind insbesondere Algorithmen zur Bestimmung des maximalen Flusses zu finden. Ein kurzer Überblick über den Fluß in Rechnernetzen ist in /5/ enthalten. Alle Ergebnisse über den Fluß in Netzen bleiben auch in einem Verkehrsnetz gültig, nur kann der Fluß durch Schranken weiter reduziert werden. Deshalb sollen in diesem Kapitel die Auswirkungen von Schranken auf den Fluß in einem vorgegebenen Netz untersucht werden, da bei einer speziell zum erwarteten Fluß gewählten Netztopologie die erhoffte Wirkung durch falsch angebrachte Schranken leicht verhindert werden kann.

4.1 Über optimalen Fluß in Verkehrsnetzen

Wie in Satz 4.6 gezeigt wird, gibt es mindestens einen Knoten, auf den genau eine Kante zeigt. Das bedeutet, daß zwischen diesem Knoten und dem Nachbarknoten, von dem die Leitung weggerichtet ist, nur diese Leitung als Verbindung existiert. Der gesamte Fluß zwischen diesen beiden Knoten ist also durch die Kapazität dieser Leitung beschränkt. Die Zahl solcher Knoten sollte also so weit wie möglich vermindert werden. Dies kann z. B. durch ein minimales Verkehrsnetz erreicht werden (Satz 5.1). Auch wenn über den aktuellen Fluß im Netz noch nichts bekannt ist, ist ein minimales Verkehrsnetz ein möglicher Ansatz für den Beginn, da in ihm am wenigsten Wege getrennt sind. Ein anderer Ansatz wäre ein Verkehrsnetz, welches alle im zugehörigen Vermittlernetz kürzesten Wege erhält. Darauf wird im Abschnitt 4.2 näher eingegangen.

Es gibt nun Fälle, in denen von vornherein Vorzugsrichtungen für den Fluß festliegen. Dies drückt sich in der Regel auch in der Netztopologie aus. Die Netze werden asymmetrisch, d.h. das Verhältnis zwischen dem größten maximalen Fluß zwischen zwei Knoten im Netz und dem kleinsten maximalen Fluß zwischen zwei (i.a.anderen) Knoten im Netz ist viel größer als 1. Eine genaue Definition dieser Asymmetrie und darauf basierende Routing-Verfahren sind in /17/

zu finden. Will man in solchen Netzen Schrankengraphen verwenden, so ist es plausibel, die Pfeile möglichst in Richtung des maximalen Flusses zu orientieren. Dabei muß man in der Regel eine höhere Schrankenzahl als die minimal mögliche in Kauf nehmen. Dies geht unter Umständen auf Kosten des Flusses zwischen nicht bevorzugten Knoten, was zusätzliche Asymmetrien hervorrufen kann. Ein Beispiel dafür ist das Netz, welches in Figur 4.1 mit zwei verschiedenen möglichen Schrankengraphen dargestellt ist. Die Zahl der Schranken in Figur 4.1b) ist nach Satz 3.11 minimal, aber da die Hauptflußrichtung von allen Knoten aus zum Knoten C führen soll, ist der Schrankengraph in Figur 4.1a) günstiger. Der angestrebte Fluß stellt einen Baum dar, welchem der Schrankengraph in Figur 4.1a) angepaßt ist.



Figur 4.1

a) $\binom{4}{2}$ = 6 Schranken bei C
alle möglichen Wege von C zu anderen Knoten sind frei, aber alle Knoten außer F und C können jeweils nur über genau einen Weg miteinander kommunizieren.

b) 3 Schranken, aber C ist von E, F und G aus jeweils nur noch über E und D erreichbar, was den Fluß von dort nach C vermindert.

Aus diesem Grunde sollte beim Entwurf der Topologie eines Vermittlernetzes die Auswirkungen eines Schrankengraphen auf den Nachrichtenfluß berücksichtigt werden. Weiter müßten Verfahren zum automatischen Aufbau von Schrankengraphen und zur automatischen Anpassung an Ausfälle (Kapitel 5 und 6) so konstruiert werden, daß sie gewünschte Vorzugsrichtungen für den Fluß ermöglichen. Einige Untersuchungen über die Zusammenhänge zwischen der Topologie eines Vermittlernetzes und dem Fluß in einem zugehörigen Schrankengraphen folgen in den Abschnitten 4.2 und 4.3 .

4.2 Kürzeste Wege in einem Verkehrsnetz

Algorithmen zum Finden kürzester Wege in einem Graphen sind u.a. in /15/ und /3/ zu finden. Sie lassen sich unter Berücksichtigung der speziellen Flußregelung leicht für einen Schrankengraphen modifizieren. Man möchte jedoch gerne, daß in einem Verkehrsnetz möglichst viele kürzeste Wege aus dem Netz ohne Schranken unaufgetrennt bleiben oder zumindest ein kürzester Weg zwischen jedem Knotenpaar übrigbleibt. Ob dies möglich ist, hängt außer von der Wahl des Schrankengraphen auch von der Topologie des Netzes ohne Schranken ab. So ist es z.B. in Figur 4.1 a) unmöglich, den im Netz ohne Schranken kürzesten Weg zwischen Knoten I und H zu nehmen. Dasselbe gilt in Figur 4.1 b) für die Knoten F und C, obwohl dies ein minimales Verkehrsnetz darstellt. Die Topologie des Netzes in Figur 4.1 läßt es nicht zu, daß in einem Verkehrsnetz für dieses Netz alle kürzesten Wege ungetrennt sind. Nehmen wir z.B. den Kreis F G I C H F in Figur 4.1. Dieser Kreis muß in einem Verkehrsnetz an irgendeiner Stelle getrennt werden. Damit ist für die beiden Nachbarknoten des Knotens, an dem die Schranke liegt, der kürzeste Weg der Länge 2 getrennt, denn auch alle evtl. über den Knoten E möglichen Umwege haben eine größere Länge.

Legt man allerdings, wie in Figur 4.1 a), nur Wert darauf, daß alle kürzesten Wege von einem bestimmten Knoten zu allen anderen Knoten existieren, so liefert der Beweis von Satz 3.4 ein Konstruktionsverfahren für so einen Schrankengraphen, wenn man in Schritt 1 und 2 die Auswahl der Knoten folgendermaßen vornimmt:

1. Startknoten ist der Knoten, zu dem alle kürzesten Wege ungetrennt sein sollen.
2. Wähle unter den in Schritt 2 zur Auswahl stehenden Knoten einen Knoten, zu dem ein schon erstellter, gerichteter Weg vom Startknoten aus am kürzesten ist.

Dieses Konstruktionsverfahren baut den Schrankengraphen auf und entspricht gleichzeitig dem in /15/ beschriebenen Dijkstra-

Algorithmus zum Finden aller kürzesten Wege zum Startknoten, denn da die Länge aller Kanten als 1 angenommen wird, kann jeder so festgelegte neue Weg zu noch nicht markierten Knoten nicht länger als irgend ein Weg über andere schon markierte Knoten werden.

In einem vollständigen Graphen sind immer alle kürzesten Wege ungetrennt, da alle Knoten über einen Weg der Länge 1 verbunden sind, welcher nicht getrennt werden kann.

Die folgenden Sätze zeigen, wie man eine Netztopologie und einen zugehörigen Schrankengraphen konstruieren kann, so daß mindestens ein kürzester Weg zwischen je zwei beliebigen Knoten ungetrennt bleibt. Dabei soll "kürzester Weg" den im Netz ohne Schranken kürzesten Weg bedeuten; der Deutlichkeit halber sagen wir dafür <u>topologisch kürzester Weg</u>.

<u>Satz 4.1:</u> Gegeben sei ein allgemeines Verkehrsnetz, in dem zwischen je zwei Knoten ein topologisch kürzester Weg ungetrennt ist. Wird ein neuer Knoten so an dieses Netz angeschlossen, daß für die ursprünglichen Knoten keine topologisch kürzeren Wege entstehen, welche über den neuen Knoten führen, so ist das neue Netz nach Trennen aller Verbindungen innerhalb des neuen Knotens ebenfalls ein Verkehrsnetz, in dem zwischen je zwei Knoten mindestens ein topologisch kürzester Weg ungetrennt ist.

<u>Beweis:</u> 1. Das konstruierte Verkehrsnetz ist wieder ein Verkehrsnetz, da alle über den neuen Knoten möglichen Kreise bei ihm aufgetrennt werden. Der neue Knoten ist auch über die Anschlußknoten von jedem Knoten im alten Verkehrsnetz erreichbar.

2. Nach Voraussetzung kommen für die ursprünglichen Knoten keine topologisch kürzeren Wege hinzu. Die kürzesten Wege zum neuen Knoten führen alle über einen der Anschlußknoten, von denen aus zu allen anderen Knoten alle topologisch kürzesten Wege existieren. Also sind auch alle topologisch kürzesten Wege vom bzw. zum neuen Knoten nicht getrennt. q.e.d.

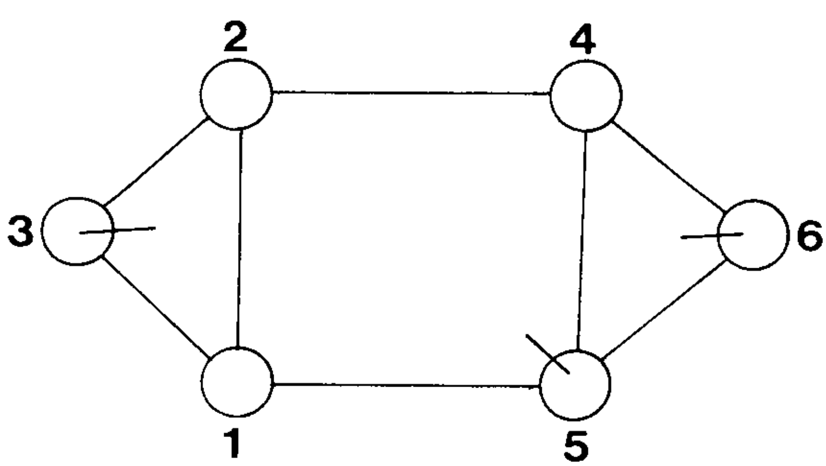
Die Voraussetzung von Satz 4.1, daß keine neuen kürzesten Wege zwischen im alten Netz befindlichen Knoten entstehen, ist z.B. immer dann erfüllt, wenn ein Knoten mit nur einer Leitung angeschlossen wird, oder wenn zwischen je zwei Anschlußknoten im alten Netz ein nicht getrennter Weg mit einer Länge < = 2 besteht.

Fängt man bei der Konstruktion mit einem Knoten an, so erhält man ein durch Schrankengraphen darstellbares Verkehrsnetz.

Satz 4.2: Fängt man beim Aufbau eines Netzes mit einem Knoten an und schließt jeden neuen Knoten mit maximal zwei Leitungen an das schon existierende Netz so an, daß bei jedem neuen Knoten mit zwei Leitungen eine Schranke zwischen beide Leitungen gesetzt wird und der ursprüngliche topologisch kürzeste Weg zwischen den Anschlußknoten eine Länge < = 2 hat, so ergibt sich ein minimales Verkehrsnetz, in dem zwischen je zwei beliebigen Knoten mindestens ein topologisch kürzester Weg unaufgetrennt ist, und der die Schrankenzahl $m = e-n+1$ hat.

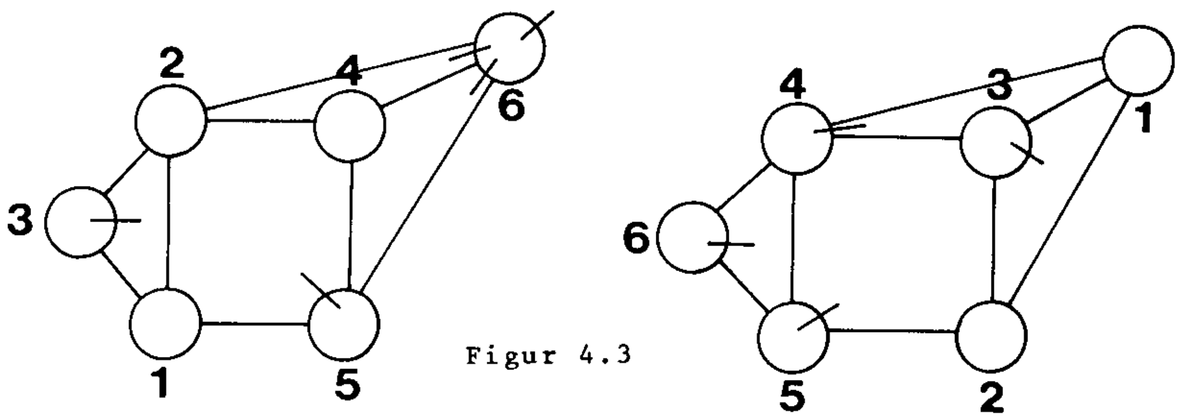
Beweis: Die Aussage, daß ein Verkehrsnetz mit kürzesten Wegen aufgebaut wird, folgt aus Satz 4.1 und den daran anschließenden Ausführungen. Der Rest ergibt sich aus Satz 3.15, da hier ein Spezialfall des dortigen Aufbauverfahrens vorliegt. q.e.d.

Figur 4.2 zeigt ein Beispiel für ein nach Satz 4.2 konstruiertes Verkehrsnetz. Die Zahlen an den Knoten geben die Reihenfolge des Zuschaltens an.



Figur 4.2

Werden Knoten mit mehr als zwei Leitungen an das schon existierende Netz angeschlossen, so ist das sich nach Satz 4.1 ergebende Verkehrsnetz im allgemeinen nicht minimal, wie Figur 4.3 a) zeigt. Trotzdem kann in diesem Fall ein minimales Verkehrsnetz nach Satz 4.2 konstruiert werden, wenn von einem anderen Anfangsknoten (der im zugehörigen Schrankengraphen den Startknoten bildet) ausgegangen wird (Figur 4.3b)).



Figur 4.3

a) 5 Schranken
nicht minimal

b) 4 Schranken
minimal

Die Zahlen an den Knoten geben die Reihenfolge des Netzaufbaus an.

Es gibt also sowohl minimale Verkehrsnetze, in denen zwischen mindestens einem Knotenpaar alle topologisch kürzesten Wege getrennt sind (Figur 4.1 b)), als auch nicht minimale Verkehrsnetze mit mindestens einem unaufgetrennten topologisch kürzesten Weg zwischen je zwei Knoten (Figur 4.3 a)). Satz 4.2 liefert ein Konstruktionsverfahren für Verkehrsnetze, die sowohl minimal sind als auch topologisch kürzeste Wege enthalten.

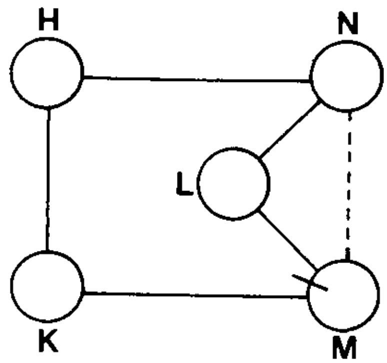
Satz 4.3: Ein minimales Verkehrsnetz mit Schrankenzahl $m=e-n+1$ hat genau dann mindestens einen topologisch kürzesten Weg zwischen je zwei Knoten unaufgetrennt, wenn es sich nach dem in Satz 4.2 angegebenen Verfahren aufbauen läßt.

Beweis: Nach Satz 4.2 bleibt zu zeigen, daß sich jedes solche Netz nach dem dortigen Verfahren konstruieren läßt.
Nach Satz 3.14 läßt es sich als Schrankengraph darstellen, nach Satz 3.13 gibt es an jedem Knoten höchstens eine Schranke. Damit zeigen im zugehörigen Schrankengraphen höchstens zwei Kanten auf jeden Knoten. Baut man das Netz also in der Reihenfolge der topologischen Ordnung der Knoten auf, so wird jeder Knoten mit höchstens zwei Leitungen angeschlossen und im Maximalfall kommt eine Schranke zwischen die Leitung. Nehmen wir an, die Länge des kürzesten Weges zwischen den Anschlußknoten ist größer als zwei. Dann entsteht durch den neuen Knoten ein topologisch kürzester Weg zwischen ihnen, welcher aufgetrennt ist.
Da weitere Wege der Länge 2 nur durch Anschluß weiterer Knoten mit zwei Leitungen entstehen können, dieser Weg aber jeweils getrennt wird, enthält das so aufgebaute Netz ein Knotenpaar, zwischen dem alle topologisch kürzesten Wege getrennt sind.
Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. q.e.d.

Satz 4.4: Sei V ein Vermittlernetz, für das ein Verkehrsnetz existiert, welches für je zwei Knoten mindestens einen topologisch kürzesten Weg ungetrennt enthält.
Dann besitzt jedes minimale Verkehrsnetz über V diese Eigenschaft.

Beweis: Wir zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes jedes Verkehrsnetz, bei dem zwischen mindestens einem Knotenpaar K, L alle topologisch kürzesten Wege getrennt sind, nicht minimal ist.

In einem solchen Verkehrsnetz muß der umseitig gezeigte Kreis mit mindestens fünf Knoten existieren.



Da die Schranke bei M alle topologisch kürzesten Wege zwischen K und L auftrennt, können zwischen K und L nur unaufgetrennte Wege mit einer Länge größer als zwei vorkommen. Wege der Länge 1 zwischen H und L bzw. K und N sind ebenfalls nicht vorhanden oder durch eine Schranke LHK bzw. HKL aufgetrennt. In diesem Falle wären sie überflüssig, d.h. das Netz nicht minimal, oder es existiert ein Kreis KMLN'H'K, mit den obigen Eigenschaften, den wir ab jetzt betrachten. Da es ein Verkehrsnetz gibt, welches für je zwei Knoten mindestens einen nicht aufgetrennten topologisch kürzesten Weg enthält, müssen Knoten des Kreises durch eine weitere Kante verbunden sein. Diese könnte sich nur zwischen M und N bzw. M und H befinden. Da beide Fälle symmetrisch zueinander stehen betrachten wir nur den zuerst genannten. In ihm entstehen zwei Kreise, die nur durch zwei weitere Schranken getrennt werden können.

Enthält der Kreis mehr als fünf Knoten, so ist ebenfalls leicht zu sehen, daß eine der Verbindungen M N oder M K existieren müßte und damit mindestens 3 Schranken nötig wären.

Nun existiert nach Voraussetzung ein Verkehrsnetz, bei dem ein topologisch kürzester Weg zwischen K und L (bzw. H und L) nicht aufgetrennt ist. In diesem Verkehrsnetz ist somit der Kreis MLNHKM nicht bei M oder N aufgetrennt. Jede Schranke an einem der Knoten H, K oder L trennt jedoch auch den Kreis MNHKM, so daß man mit nur zwei Schranken auskommt. Damit wäre das vorliegende Netz nicht minimal, es sei denn, die Schranke bei M führt zu Schrankenersparnissen bei Kreisen, welche durch außerhalb des betrachteten Graphen liegende Teile gehen.

Jeder solche Teil, der einen Kreis über M zur Folge hat, enthält mindestens einen Knoten O. Sonst würden neue Wege der Länge eins oder zwei zwischen K und L entstehen, die im Widerspruch zur Voraussetzung nicht getrennt sind, oder durch eine Schranke getrennt sein müßten, die wegen der Schranke bei M überflüssig wäre. Es entsteht also ein weiterer Kreis über O, die beiden Anschlußknoten und den Teil des Kreises MKHNLM, welcher M nicht enthält. Dieser Kreis muß durch mindestens eine weitere Schranke aufgetrennt sein, welche nicht in dem bisher betrachteten Netz liegt, da sonst die Schranke bei M überflüssig wäre. In dem Netz mit unaufgetrennten topologisch kürzesten Wegen würde eine weitere Schranke bei O ebenfalls ausreichen, um alle Kreise über den Netzteil HKMLN zu trennen. Damit führt die Schranke bei M nicht zu Schrankenersparnissen bei durch weitere Netzteile bedingten Kreisen. Sie ist also überflüssig und ein sie enthaltendes Verkehrsnetz nicht minimal. q.e.d.

Die Bedeutung der nach Satz 4.1 und Satz 4.2 bzw. 4.3 konstruierbaren Verkehrsnetze liegt darin, daß in solch einem Netz der minimale Gesamtfluß, der zur Befriedigung einer vorgegebenen Verkehrslast nötig ist, gleich dem minimalen Gesamtfluß im zugehörenden Netz ohne Schranken ist /8/. Dabei ist Gesamtfluß definiert als Summe des notwendigen Flusses pro Leitung, aufsummiert über alle Leitungen. Dieser Gesamtfluß wird größer, je mehr hintereinander liegende Leitungen zur Befriedigung einer vorgegebenen Verkehrslast zwischen zwei Knoten benutzt werden. Die Benutzung nur der kürzesten Wege zwischen je zwei Knoten bringt also den minimalen Gesamtfluß (s.a. Abschnitt 4.3).

Die Bedeutung des Satzes 4.4 liegt darin, daß bei minimalen Verkehrsnetzen die Kürzeste-Wege-Eigenschaften nur von der Topologie des Netzes und nicht von der Wahl eines speziellen minimalen Verkehrsnetzes abhängt. Satz 4.3 bzw. 4.2 beschreibt den Aufbau einer solchen, in der Praxis häufig auftauchenden Netztopologie.

4.3 Beispiel zur Berechnung maximal benötigter Leitungskapazität beim Entwurf eines Vermittlernetzes

Der Entwurf eines Vermittlernetzes für einen vorgegebenen Fluß zwischen den angeschlossenen Verbrauchern ist ein komplexer Prozeß /8, 9/. Um ein einfaches Beispiel zu bringen, beschränken wir uns hier auf das Netz in Figur 4.3 mit vorgegebener Topologie und sechs Knoten. Dabei soll die Verkehrslast von jedem Knoten zu jedem anderen gleich groß sein. Die Berechnung der Leitungskapazitäten soll nach dem in /8/ beschriebenen heuristischen Algorithmus vorgenommen werden. Wie in /8/ gezeigt wurde, liegen die so erreichbaren Werte dicht am theoretischen Optimum.

Das Verfahren beruht darauf, daß der Gesamtfluß im Netz am kleinsten gehalten werden kann, wenn für jede gewünschte Verbindung jeweils der Weg mit den wenigsten Zwischenknoten genommen wird, also der topologisch kürzeste Weg. Daraus ist ersichtlich, daß in allen Verkehrsnetzen, bei denen zwischen je zwei Knoten mindestens ein kürzester Weg unaufgetrennt ist, der minimale Gesamtfluß für eine vorgegebene Last gleich dem minimalen Gesamtfluß im zugehörenden Vermittlernetz ohne Schranken ist (siehe auch Abschnitt 4.2).

In Schritt 1 des Verfahrens werden für jeden Knoten alle kürzesten Wege zu jedem anderen Knoten bestimmt.

In Schritt 2 werden alle so erhaltenen Wege der Länge 1 als Verbindung gewählt und die dafür nötigen Kapazitäten den entsprechenden Leitungen zugewiesen.

In Schritt 3 werden nun, ausgehend von den Verbindungen kürzester Länge, alle Alternativmöglichkeiten für die Verbindung zwischen jeweils zwei Knoten untersucht und eine davon nach einem Optimalitätskriterium ausgesucht. Das für das Beispiel gewählte Kriterium ist, daß ein Weg gewählt wird, bei dem das Maximum der schon zugewiesenen Kapazitäten über alle von ihm benutzten Leitungen minimal ist. Dies führt zu einer Minimierung der maximal nötigen Leitungskapazität.

Untersucht werden soll das Netz von Figur 4.3 b). Da die Verkehrslast zwischen allen Knoten gleich groß sein soll und ein kürzester Weg von Knoten i zu Knoten j auch ein kürzester Weg von j nach i ist, wird der gewünschte Fluß zwischen je zwei Knoten in beiden Richtungen als eins angenommen. Ferner wird für Hin- und Rückrichtung der gleiche Weg genommen.

Die möglichen kürzesten Wege (in jeweils nur einer Richtung) in dem Netz nach Figur 4.3b) ohne Schranken sind nachfolgend aufgezählt. Die Zahlen bei Figur 4.3 b), die die Aufbaureihenfolge angeben, werden als Knotennummern genommen.

Kürzeste Wege

von/nach	2	3	4	5	6
1	12*	13*	14*	145*	146*
				125	
2		23*	234*	25*	256*
			254		
			214		
3			34*	345	346*
				325*	
4				45*	46*
5					56*

Daraus ergibt sich die folgende Kapazitätszuordnung zu den Leitungen. Die dazu ausgewählten Wege sind in der obigen Tabelle der kürzesten Wege durch einen Stern gekennzeichnet.

Einzel-Weg	benötigt für Wege der Länge 1	benötigt für Wege der Länge 2	Gesamtkapazität
12	1		1
13	1		1
14	1	1 1	3
23	1	1 1	3
25	1	1 1	3
34	1	1 1	3
45	1	1	2
46	1	1 1	3
56	1	1	2

Die maximal nötige Leitungskapazität ist also 3. Betrachten wir jetzt das in Figur 4.3 b) dargestellte Netz mit Schrankenmenge, welche einem minimalen Verkehrsnetz mit Erhaltung mindestens einer der kürzesten Wege zwischen je zwei Knoten entspricht. In diesem Netz ist gegenüber dem Netz ohne Schranken nur der Weg 254 nicht erlaubt. Dieser ist bei der Berechnung der Leitungskapazitäten nicht benutzt worden, so daß diese gegenüber dem Netz ohne Schranken unverändert bleiben. Die Schranken haben hier also keinen Einfluß auf die Auslegung des Netzes.

Betrachten wir noch einmal dasselbe Netz mit der Schrankenmenge nach Figur 4.3 a). Dieses erhält zwar auch mindestens einen der kürzesten Wege zwischen je zwei Knoten, ist aber nicht minimal. In ihm sind gegenüber dem Netz ohne Schranken folgende Wege nicht benutzbar: 214, 325. Damit ergeben sich folgende Leitungskapazitäten: (Knotennummern wie für Figur 4.3 b).)

Einzel-	benötigt für		
Weg	Wege der Länge 1	Wege der Länge 2	Gesamtkapazität
12	1	1	2
13	1		1
14	1	1	2
23	1	1	2
25	1	1	2
34	1	1 1 1	4
45	1	1 1	3
46	1	1 1	3
56	1	1	2

Hier beträgt die maximal nötige Leitungskapazität 4 statt 3, das Netz muß also für die geforderte Leistung höhere Leitungskapazitäten haben. Es gibt auch minimale Verkehrsnetze mit der Kürzesten-Wege-Eigenschaft, die eine höhere maximale Leitungskapazität erfordern als das Netz ohne Schranken. Dies muß aber nicht so sein, wie das obige Beispiel zeigt. Da jedoch im minimalen Verkehrsnetz am wenigsten Schranken sind, sollten auch am wenigsten kürzeste Wege aufgetrennt sein, so daß die größere Auswahl an Wegen gegenüber nichtminimalen Verkehrsnetzen besteht.

4.4 Finden aller Wege in einem Verkehrsnetz

Um, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, die maximale Leitungskapazität in einem Verkehrsnetz zu finden, benötigt man Verfahren zum Generieren aller kürzesten Wege in einem Verkehrsnetz. In /10, 15/ sind solche Verfahren für Graphen beschrieben, welche sich unter Berücksichtigung der allgemeinen Routing-Vorschrift für Verkehrsnetze benutzen lassen. Hier soll ein Verfahren geschildert werden, welches alle möglichen Wege in einem Verkehrsnetz aufzählt, also auch die kürzesten. Dies Verfahren bietet darüber hinaus Einblicke in das Flußverhalten von Verkehrsnetzen.

Für das Verfahren werden Adjazenzmatrizen von Graphen benutzt. Sei n die Zahl aller Knoten im Netz. Eine n x n-Matrix $A=(a_{ij})$ heißt <u>Adjazenz-Matrix</u> des Graphen, wenn $a_{ij} = 1$ ist, falls es eine Kante bzw. im Digraphen einen Pfeil von Knoten i zum Knoten j gibt; in allen anderen Fällen $a_{ij} = 0$. Da die hier betrachteten Graphen alle keine Schlingen besitzen, ist die Hauptdiagonale mit Nullen besetzt.

Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenz-Matrix symmetrisch zur Hauptdiagonalen. Für azyklische Digraphen wie den Schrankengraphen gilt nach Theorem 9-16 in Deo /16/, daß sich die Knoten so umbenennen lassen, daß die Adjazenz-Matrix eine obere (oder untere) Dreiecks-Matrix bildet. Für einen Digraphen gibt die Summe der Einsen in der i-ten Zeile die Zahl der vom i-ten Knoten weggerichteten Pfeile an, die Summe der Einsen in der j-ten Spalte die Zahl der auf den j-ten Knoten gerichteten Pfeile. Da in einem Schrankengraphen nur der Startknoten keine auf ihn gerichteten Pfeile hat, gibt es in der zugehörigen Adjazenz-Matrix genau eine Spalte, welche nur Nullen enthält. Im folgenden sei immer davon ausgegangen, daß die Knoten so benannt sind, daß die Adjazenz-Matrix des Schrankengraphen eine obere Dreiecks-Matrix bildet. Die erste Spalte der Matrix enthält dann nur Nullen. Da sie die einzige Spalte mit nur Nullen ist, muß die 2. Spalte genau eine 1 enthalten. Damit gilt:

<u>Satz 4.6:</u> In jedem Schrankengraphen mit mehr als einem Knoten gibt es mindestens einen Knoten, auf den genau eine Kante zeigt.

Nach /16/ Theorem 7-8 enthält die r-te Potenz der Adjazenz-Matrix $A^r = (a^r_{ij})$ an der Stelle (i,j) die Zahl der Wege vom Knoten i zum Knoten j der Länge r. Dies gibt ein allerdings nicht besonders effektives Verfahren zum Bestimmen der Zahl aller Wege zwischen zwei Knoten. Dabei werden aber nicht nur kreisfreie Wege gezählt.

Das Theorem 7-8 gilt auch für Digraphen, also insbesondere für den Schrankengraphen. Dabei werden alle Wege in Kantenrichtung gezählt. In einem Schrankengraphen sind jedoch auch Wege entgegen der Kantenrichtung möglich und Wege, welche erst entgegen der Kantenrichtung und dann in Kantenrichtung laufen. Das Theorem 7-8 gilt jedoch nur für den Fluß in Kantenrichtung.

Sei A die Adjazenz-Matrix eines Netzes, A_o die Adjazenz-Matrix eines zugehörigen Schrankengraphen (in Dreiecksform). Dann ist $A_u = A - A_o = A_o^T$ die Matrix des zum Schrankengraphen inversen Digraphen, d.h. des Digraphen, den man erhält, wenn die Richtung aller Pfeile umgedreht wird. A_u enthält also die Zahl der Wege der Länge 1 entgegen der Kantenrichtung. A_u^r enthält also nach Theorem 7-8 an der Stelle (i,j) die Zahl der Wege der Länge r im Schrankengraphen entgegen der Kantenrichtung. Die restlichen möglichen Wege setzen sich aus dem Weg entgegen der Kantenrichtung und Wegen in Kantenrichtung zusammen. So ergibt sich, falls $A^o = I$ die Einheits-Matrix ist:

<u>Satz 4.7:</u> Sei A_{sr} die n x n-Matrix, welche an der Stelle (i,j) die Zahl der Wege der Länge r im Schrankengraphen s von Knoten i zum Knoten j enthält. Dann

ist $A_{sr} = \sum_{K=0}^{r} A_u^K \; A_o^{r-K}$, wobei A_o die

Adjazenz-Matrix des Schrankengraphen (in Dreiecksform) ist und $A_u = A_o^T$ die transponierte Matrix.

Es gilt also insbesondere, daß die Wege der Länge 1 dieselben sind wie im Netz ohne Schranken: $A_{s1} = A_u + A_o = A$.
Da es bei Dreiecksmatrizen B ein endliches r mit $B^r = (0)$ gibt und A_{sr} Summe aus Produkten von Potenzen der Dreiecksmatrizen ist, muß es ein endliches r geben mit $A_{sr} = (0)$. Dies ist ein zusätzlicher Beweis für die Kreisfreiheit eines Schrankengraphen (Satz 3.5).

Als Beispiel soll die Zahl der Wege der Länge 2 für das Netz in Figur 4.4 und den dort gezeichneten Schrankengraphen berechnet werden. Es ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0111 \\ 1010 \\ 1101 \\ 1010 \end{pmatrix}, \quad A_o = \begin{pmatrix} 0111 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0000 \end{pmatrix}, \quad A_u = \begin{pmatrix} 0000 \\ 1000 \\ 1100 \\ 1010 \end{pmatrix}$$

Der in Figur 4.4 aufgezeichnete Schrankengraph ist minimal. Dies erkennt man an A_o daran, daß die Spaltensumme ab Spalte 3 konstant bleibt, was einer konstanten Zahl auf jeden Knoten gerichteter Pfeile entspricht (siehe Abschnitt 3.4).

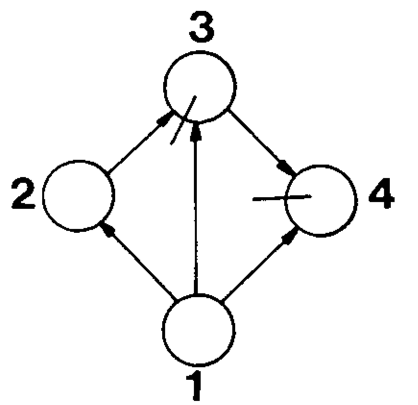
Nun ist:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3121 \\ 1212 \\ 2131 \\ 1212 \end{pmatrix}, \quad A_o^2 = \begin{pmatrix} 0011 \\ 0001 \\ 0000 \\ 0000 \end{pmatrix}, \quad A_u^2 = \begin{pmatrix} 0000 \\ 0000 \\ 1000 \\ 1100 \end{pmatrix}$$

und damit $A_{s2} = I\,A_o^2 + A_u\,A_o + A_u^2\,I =$

$$= \begin{pmatrix} 0011 \\ 0001 \\ 1000 \\ 1100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0000 \\ 0111 \\ 0121 \\ 0112 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0011 \\ 0112 \\ 1121 \\ 1212 \end{pmatrix}$$

Die Hauptdiagonalen in A^2 und A_{s2} geben die Möglichkeiten für einen Pingpong-Effekt der Länge 2 im Netz an. Diese sind in Schrankengraphen nur noch halb so groß, im Verkehrsnetz (Abschnitt 3.2) sogar Null. Die Zahl der Wege vom und zum Knoten eins ist im Verkehrsnetz auf die Hälfte gesunken, aber die Zahl der übrigen Wege ist erhalten geblieben, d.h. die Zahl der im Schrankengraphen verbotenen Wege der Länge 2 ist klein.



Figur 4.4

Die Matrix A_{s2} ist wieder symmetrisch, da jeder mögliche Weg sowohl von Knoten i zu Knoten j als auch umgekehrt durchlaufen werden kann. Wie ein Vergleich der Matrizen A und A^2 zeigt, sind die einzigen kürzesten Wege der Länge zwei die von Knoten 2 zu Knoten 4 ($a_{24} = a_{42} = 0$, ${a_{24}}^2 = {a_{42}}^2 = 2$)

Diese sind im Verkehrsnetz nicht aufgetrennt, wie die Matrix A_{s2} zeigt. Damit ist in diesem Verkehrsnetz die maximale Leitungskapazität gleich der im Netz ohne Schranken.

4.5 Routing und Verkehrsnetze

Großen Einfluß auf den Fluß in einem Rechnernetz haben Routingverfahren und Verfahren zur Flußkontrolle /1,2,3,5,9,18,19/. Alle diese Verfahren, egal ob für virtuelle Verbindungen oder Datagramme, können in einem Verkehrsnetz angewendet werden. Dabei bietet ein Verkehrsnetz die Vorteile, daß:

a) keine Verklemmungen auftreten können (Satz 3.7) ,

b) kein Kreis-Effekt (looping) auftreten kann (Satz 3.5 bzw. Def. des Verkehrsnetzes),

c) eine Nachricht nicht längere Zeit zwischen zwei Knoten hin- und herlaufen kann (Pingpong-Effekt) (Satz 3.5 bzw. Def. eines Verkehrsnetzes)

In /18/ werden spezielle Zusätze zu Routingverfahren beschrieben, die "looping"- und "Pingpong"-Effekte verhindern sollen, um einen größeren Nachrichtendurchsatz im Netz zu erzielen. Diese sind in Verkehrsnetzen nicht nötig. Auch das Aufbauverfahren für Routing-Tabellen kann wegen b) und c) vereinfacht werden.

5. Netzänderungen bei Verkehrsnetzen

Jedes geänderte Netz kann als neues Netz aufgefaßt werden, für das alle Überlegungen zur Wahl eines Schrankengraphen neu gemacht werden müssen. Bei großen Netzen erfordert dies einigen Aufwand, der den Betrieb im Netz sehr behindern kann. Deshalb werden in diesem Kapitel einige Überlegungen angestellt, wie bei Netzänderungen eine entsprechende Anpassung des Schrankengraphen vorgenommen werden kann, ohne ihn völlig neu zu erstellen. Wir bezeichnen eine solche Anpassung als Formierung des Netzes. Zwei Änderungsarten müssen berücksichtigt werden: Das Zuschalten neuer Netzteile und das gewollte oder durch Ausfall bewirkte Abschalten von Netzteilen. Dabei wird immer vorausgesetzt, daß ein Schrankengraph für das Verkehrsnetz existiert.

5.1 Zuschalten von Netzteilen

5.1.1 Zuschalten neuer Knoten über neue Leitungen

Sind Knoten neu zugeschaltet, so kann der existierende Schrankengraph von den Anschlußknoten am alten Netz nach dem im Beweis von Satz 3.4 beschriebenen Verfahren erweitert werden. Dazu gebe man erst allen neuen Kanten an den Anschlußknoten eine Richtung in den neuen Netzteil und fahre dann mit Schritt 2 des Verfahrens fort. Dadurch ist gewährleistet, daß der entstehende Digraph azyklisch bleibt. Auch der im alten Netz existierende Startknoten bleibt erhalten. Da auf jeden Anschlußknoten, wenn er nicht der alte Startknoten ist, schon mindestens ein Pfeil zeigt, kommt kein neuer Startknoten hinzu. Der entsprechende Digraph ist also ein Schrankengraph.

Wird nur ein Knoten neu zugeschaltet, so ist man fertig, wenn man den neuen Kanten an den Anschlußknoten eine Richtung gegeben hat. Dies entspricht dem in Satz 4.1 geschilderten Verfahren.

Ob Eigenschaften wie minimale Schrankenzahl und kürzeste Wege erhalten bleiben, hängt von der Lage der Anschlußknoten im alten Netz und der Topologie des neuen Netzteils ab. Hierzu liefern die Sätze 4.1 und 4.2 Beiträge.

5.1.2 Zuschalten neuer Leitungen zwischen alten Knoten

Wird eine neue Leitung parallel zu einer schon existierenden Leitung geschaltet, so hat das keinen Einfluß auf den Schrankengraphen, sondern erhöht die Kapazität der alten Leitung. Werden durch die neue Leitung zwei Knoten Nachbarn, die es vorher nicht waren, so muß dieser Leitung eine Richtung gegeben werden.

Ist einer der betroffenen Knoten der Startknoten, so muß die Leitung von ihm weggerichtet werden. Ist keiner der betroffenen Knoten Startknoten, so muß festgestellt werden, welche der möglichen Richtungen der Leitung nicht zu einem Kreis führt. Im alten Schrankengraphen können höchstens von einem der betroffenen Knoten aus Wege in Pfeilrichtung zum anderen Knoten existieren, da der Schrankengraph azyklisch ist. Wird die neue Leitung von diesem Knoten weggerichtet, so bleibt der Schrankengraph azyklisch. Sollte von keinem der beiden Knoten aus ein auf den anderen Knoten gerichteter Weg existieren, so ist die Richtung der neuen Leitung beliebig wählbar.

Damit bei einer automatischen Behandlung durch das Netz die betroffenen Knoten feststellen können, ob ein auf den anderen Knoten gerichteter Weg existiert, müssen sie Kenntnisse über ihre Umgebung haben. Stehen diese Kenntnisse in Form von Routingtabellen zur Verfügung, die für jede Leitung angeben, welche Knoten über sie erreichbar sind, so kann man mit Hilfe der Leitungsrichtung feststellen, ob es solch einen Weg gibt. Existieren keine Routingtabellen, so müssen die Knoten diese Kenntnisse z.B. durch Testsendungen entlang weggerichteter Kanten erst erwerben.

Soll mehr als eine Leitung gleichzeitig neu hinzugeschaltet werden, so ist bei Testsendungen darauf zu achten, daß die Tests für verschiedene Leitungen sich nicht gegenseitig beeinflussen können.
Im allgemeinen bleibt beim Hinzufügen von Leitungen die Minimalität eines Schrankengraphen nicht erhalten, da die Lage neuer Schranken durch die Lage der Leitungen vorgeschrieben ist und nicht optimal gewählt werden kann.

5.2. Ausfall von Netzteilen

Ein Rechnernetz sollte so aufgebaut sein, daß es gegen Ausfälle von Leitungen oder Knoten möglichst unempfindlich ist. Über die Zuverlässigkeit von Netzen ist in /19,5/ und der dort aufgeführten Literatur etwas zu finden. Ein Nachteil von Verkehrsnetzen ist, daß bei Ausfall von Teilstücken Knoten nicht mehr erreichbar sein können, obwohl sie es in einem Netz ohne Schranken wären. In diesem Kapitel sollen deshalb die Auswirkungen von Ausfällen auf ein Verkehrsnetz untersucht werden und die Möglichkeiten, einen Schrankengraphen in solch einem Netz wiederherzustellen, falls er zerstört worden ist.

5.2.1 Ausfall von Knoten

Ein Knotenausfall hat in der Regel größere Auswirkungen auf ein Netz als ein Leitungsausfall. Es ist meistens wirtschaftlicher, erhöhten Aufwand zur Fehlerverhinderung bei einem Rechner zu betreiben statt bei einer Leitung.
Leitungen sind auch gegen Störungen von außen schlechter zu schützen als Rechner /5/. Deshalb darf man in der Regel annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Rechners kleiner ist als für den Ausfall einer Leitung.

Ein Knotenausfall kann von den Nachbarknoten nur dadurch bemerkt werden, daß über eine Leitung zum ausgefallenen Knoten keine Antwort mehr kommt. Er ist also für das Netz nicht von einem Leitungsausfall zu unterscheiden. Er muß durch die Verfahren beim Leitungsausfall mitbehandelt werden.

5.2.2 Ausfall von Leitungen

Beim Ausfall von Leitungen muß untersucht werden, ob das Restnetz immer noch einen Schrankengraphen enthält. Existiert kein

Schrankengraph mehr, so muß er wiederhergestellt werden, da sonst Knoten im Verkehrsnetz nicht mehr erreichbar sind, obwohl sie es in einem Netz ohne Schranken unter Umständen noch wären. Dabei muß berücksichtigt werden, daß das Netz in mehrere Teile zerfallen sein kann.

Ein Test, ob ein Schrankengraph noch existiert, läßt sich von den vom Leitungsausfall betroffenen Knoten einfach durchführen. Da der Schrankengraph bei Ausfällen azyklisch bleibt, braucht nur getestet werden, ob keine neuen Startknoten hinzugekommen sind.

Führte die ausgefallene Leitung vom Knoten weg, so war er entweder der alte Startknoten oder es gibt immer noch eine heile, auf ihn gerichtete Leitung. Es braucht nichts getan werden.

Führte die ausgefallene Leitung auf den Knoten zu, so wird getestet, ob irgendeine der noch heilen Leitungen ebenfalls auf ihn zu führt. Ist dies der Fall, so existiert der Schrankengraph noch. Andernfalls ist ein zweiter Startknoten entstanden, und das bzw. die übrig gebliebenen Netzteile müssen neu formiert werden.

5.2.2.1 Wahrscheinlichkeit des Formierens

Es soll die Wahrscheinlichkeit für das Formieren bestimmt werden unter der Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeit p für den Ausfall einer Leitung so klein ist, daß höhere Potenzen von p vernachlässigbar sind.

Sei n die Zahl der Knoten im Netz,
  n_z die Zahl der Knoten, auf die genau eine Leitung gerichtet ist,
  e die Zahl der Leitungen im Netz.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit w einer Formierung nach Kapitel 5.2.2 $w = \frac{n_z \cdot p}{e}$. Das Minimum für w ist $w_{min} = \frac{p}{e}$, da nach Satz 4.6 $n_z >= 1$ ist.

Wird ein minimales Verkehrsnetz nach dem in Satz 4.2 erwähnten Verfahren aufgebaut unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß ab dem zweiten Knoten jeder Knoten mit genau zwei Leitungen an das schon existierende Netz angeschlossen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit einer Formierung gerade gleich dem Minimum $w_{min} = \frac{p}{e}$.

Da auf jeden Knoten, außer dem Startknoten, mindestens ein Pfeil zeigen muß, ist die maximale Wahrscheinlichkeit für eine Formierung $w_{max} = \frac{(n-1)\ p}{e}$. Diese tritt nur bei einem Baum auf. Um eine minimale Formierungswahrscheinlichkeit zu erreichen, müssen die Pfeilspitzen möglichst gleichmäßig auf die n-2 Knoten (ausgenommen den Startknoten und den Knoten, auf den genau eine Leitung zeigen muß) verteilt werden, damit so viele Knoten wie möglich über mehr als einen Pfeil erreichbar sind. Genau dies versucht man bei minimalen Verkehrsnetzen zu erreichen (Kapitel 3.4). Damit ergibt sich:

<u>Satz 5.1:</u> In einem minimalen Verkehrsnetz ist die Wahrscheinlichkeit des Formierens bei Ausfall einer Leitung minimal.

<u>Beweis:</u> Angenommen, die Wahrscheinlichkeit wäre nicht minimal, dann ließe sich der Schrankengraph so umformieren, daß es mindestens einen Knoten weniger gäbe als vorher, auf den nur ein Pfeil zeigt. Da die Summe der Pfeilspitzen konstant gleich der Kantenzahl ist, muß es jetzt mindestens einen Knoten geben, auf den weniger Pfeile als vorher, aber immer noch mindestens zwei Pfeile zeigen. Dadurch wird die Zahl der Schranken an diesem Knoten von 3 auf 1 erniedrigt, an dem andern Knoten jedoch nur um 1 erhöht. Das alte Verkehrsnetz war also nicht minimal.q.e.d.

5.2.2.2 Verfahren zum Formieren

Das Verfahren beruht darauf, daß die Reste des alten Schrankengraphen soweit abgebaut werden, bis der noch übrigbieibende Digraph einen Schrankengraphen innerhalb des Netzteils bildet, auf dem er existiert. Dieser Schrankengraph soll Restgraph heißen. Anschließend wird von hier aus ein neuer Schrankengraph wie in 5.1.1 beschrieben aufgebaut.

Abbauverfahren:

1) Ist ein Knoten nach einem Leitungsausfall im Verkehrsnetz nicht mehr erreichbar, d.h. war die ausgefallene Leitung auf ihn gerichtet und ist keine andere Leitung auf ihn gerichtet, so erhält er den Status "neu".

2) Bei jedem seiner Nachbarknoten wird die von ihm zu ihnen führende Leitung als "neu" und damit ungerichtet gekennzeichnet. Dann wird getestet, ob jeder dieser Knoten durch eine andere auf ihn gerichtete Leitung mit dem Restnetz verbunden ist. Ist dies der Fall, so ist man an diesem Knoten fertig. Andernfalls wird für diesen Knoten bei 2) fortgefahren.

Das Verfahren kommt zum Stillstand, wenn entweder alle so erreichten Randknoten des entstandenen Neugebiets mit dem restlichen Altgebiet verbunden sind, oder, bei Zerfall des Netzes in mehrere Teile, alle erreichbaren Knoten den Status "neu" haben. Im zweiten Fall wird der Schrankengraph neu erstellt, im ersten wie in 5.1.1 dargestellt, das Neugebiet formiert. Die Voraussetzung für die Anwendung einer Formierung nach 5.1.1 ist der folgende Satz.

<u>Satz 5.2:</u> Der nach Anwendung des Abbauverfahrens übrigbleibende Digraph ist ein Schrankengraph.

Beweis: Wegen der Schritte 1) und 2) des Abbauverfahrens kommen keine neuen Startknoten hinzu, und da nur Leitungen weggenommen werden, bleibt der Digraph azyklisch. Alle Leitungen ohne Richtung zeigen in das Neugebiet bzw. befinden sich in ihm, gehören also nicht zum Restgraphen. Deshalb bildet dieser einen Schrankengraphen auf dem Restnetz.

q.e.d.

Für minimale Verkehrsnetze ist folgendes Ergebnis interessant:

Satz 5.3: Fallen in einem (minimalen) Verkehrsnetz mit Schrankenzahl $m = e-n+1$ Netzteile aus, so bildet der durch das Abbauverfahren gewonnene Restgraph auf dem Restnetz ein (minimales) Verkehrsnetz mit der Schrankenzahl $\bar{e}-\bar{n}+1$. Dabei ist $\bar{e}$ die Zahl der Pfeile und $\bar{n}$ die Zahl der Knoten im Restgraphen.

Beweis: Da die Mächtigkeit der Schrankenmenge des Ausgangsverkehrsnetzes $e-n+1$ beträgt, ist es nach Satz 3.11 minimal; nach Satz 3.13 gibt es in jedem Knoten höchstens eine Schranke, also zeigen in dem nach Satz 3.14 existierenden Schrankengraphen höchstens zwei Pfeile auf jeden Knoten.

Fällt eine Leitung so aus, daß der Knoten, auf den sie gezeigt hat, keinen weiteren Pfeil auf sich gerichtet hat, so wird dieser Knoten sowie alle angeschlossenen Leitungen durch das Abbauverfahren abgebaut. Die Zahl der Knoten vermindert sich um 1, die Zahl der Leitungen um den Grad des Knotens g_k. Das Abbauverfahren wird an $g_k - 1$ Knoten fortgesetzt.

Wir können jetzt o.B.d.A. davon ausgehen, daß wir ein Netz mit $n-1$ Knoten und $e-1$ Leitungen haben, von denen $g_k - 1$ Leitungen ausgefallen sind, welche jede zu einem anderen Knoten führt. Die Zahl $m = e-n+1$ der Schranken bleibt dabei konstant. Dies läßt sich so lange fortsetzen, bis eine Lage entsteht, bei der an $\bar{g}$ Knoten je eine Leitung "ausgefallen" ist, jedoch auf jeden Knoten noch ein Pfeil zeigt. Da die "ausgefallene" Leitung jeweils auch auf den Knoten zeigte, fallen jetzt $\bar{g}$ Schranken weg, d.h. $\bar{m} = m - \bar{g}$. Andererseits sind $\bar{g}$ Leitungen ausgefallen, so daß $\bar{e} - \bar{n} + 1 = e - n + 1 - \bar{g}$ sind. Damit ist also $\bar{m} = \bar{e} - \bar{n} + 1$, da $m = e - n + 1$ war. q.e.d.

Satz 5.3 bildet die Grundlage dafür, nach Satz 4.2 bei der Formierung wieder ein neues minimales Netz aufbauen zu können, sofern die Topologie des nach dem Ausfall übrigbleibenden Netzes dies erlaubt.

5.2.3 Zusammenfassung

Die Wahrscheinlichkeit für eine Formierung in einem Verkehrsnetz nach Ausfall einer Leitung sinkt bei entsprechender Netztopologie in minimalen Verkehrsnetzen mit steigender Zahl der Leitungen im Netz (5.2.2.1). Ist das Netz so aufgebaut, daß es bei Ausfall einer Leitung zusammenhängend bleibt und die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls einer Leitung sehr klein ist, so muß bei einem Leitungsausfall, wenn überhaupt, nur in einer relativ kleinen Umgebung der betroffenen Knoten eine Formierung stattfinden. Werden im Netz virtuelle Verbindungen aufgebaut, so sind von dem Ausfall nur die Verbindungen betroffen, welche über die ausgefallenen Leitungen liefen. Da die Formierung lokal begrenzt ist, ist auch nur eine begrenzte Änderung von Routingtabellen erforderlich. Von zur Zeit der Formierung neu aufzubauenden Verbindungen werden deshalb nur diejenigen betroffen, welche aufgrund der alten Routingtabellen durch diese begrenzte Gegend führen. Ist der Formierungsvorgang genügend schnell, so kann z.B. durch Zeitschranken und Wiederholung des Verbindungsaufbaus gewährleistet werden, daß der Benutzer eines Verkehrsnetzes nur selten durch geringe Verzögerungen etwas von durch Ausfall erzwungenen Formierungen des Netzes wahrnimmt.

Dies wird noch dadurch begünstigt, daß an die Formierung anschließende Routing-Verfahren in Verkehrsnetzen einfacher sein können (Kapitel 4.4) als in Netzen ohne Schranken.

6. Algorithmen zum automatischen Aufbau von Verkehrsnetzen

Die vorigen Kapitel geben Hinweise auf Algorithmen zum Aufbau und Formieren eines Verkehrsnetzes aus graphentheoretischer zentraler Sicht. Viele von ihnen können jedoch lokal, d.h. ohne Kenntnis des gesamten Netzes, angewandt werden. Allerdings taucht dabei ein zusätzliches Problem auf. Die in verschiedenen Knotenrechnern gleichzeitig ablaufenden Algorithmen müssen miteinander synchronisiert werden. Dies geschieht auf der Kommunikationsebene durch entsprechende Nachrichtenübertragungsprotokolle. Übrig bleibt die problemspezifische Synchronisation, die am Beispiel eines Algorithmus zum automatischen Aufbau von Schrankengraphen in Rechnernetzen erläutert werden soll.

6.1 Automatischer Aufbau eines Schrankengraphen

Da das Aufbauen eines Schrankengraphen durch Senden von Nachrichten innerhalb des Netzes passiert, sind hierfür "Depth-first-Search"- oder "Backtracking"-Algorithmen /15, 16/ am besten geeignet, da sie jeden Knoten und jede Kante nur einmal verfolgen müssen. Dabei sollte die Fähigkeit der Knotenrechner, parallel arbeiten zu können, nach Möglichkeit ausgenutzt werden, um kurze Bearbeitungszeiten zu erreichen. Dies führt zu einer Art "Breadth-first-Search" /16/. Der hier beschriebene Algorithmus beruht auf dem beim Beweis von Satz 3.3 benutzten Verfahren. Benutzt man Depth- oder Breadth-first-Search-Algorithmen zum Aufbau des Schrankengraphen, so muß sichergestellt sein, daß sie an genau einem Knoten beginnen, damit es genau einen Startknoten für den Schrankengraphen gibt. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß das Verfahren per Operateur gestartet wird. Dies bietet den Vorteil, daß der Startknoten optimal gewählt werden kann (Kap. 4), aber den Nachteil, daß z.B. bei einem erforderlichen Aufbau des Verkehrsnetzes wegen Netzausfällen (Kap. 5) die Zeit bis zur Neuformierung recht lange dauert, da ein Mensch eingreifen muß. Dies kann durch eine automatische Reset-Phase zur Synchronisation aller Knoten vor dem eigentlichen Aufbau des Schrankengraphen verhindert werden.

Ein weiteres Synchronisations-Problem taucht auf, wenn ein "Breadth-first-Search"-Algorithmus angewendet wird, um die Parallelarbeit von Knotenrechnern auszunutzen. Zwei Nachbarknoten können gleichzeitig über die sie verbindende Leitung Nachrichten austauschen. Für eine Breadth-first-Search muß jedoch ein Knoten feststehen, welcher als "Erster" die Nachricht über die Leitung geschickt hat. Dies soll in dem folgenden Algorithmus aufgrund von Prioritäten festgelegt werden. Die Festsetzung dieser Prioritäten kann zur lokalen Optimierung des Schrankengraphen dienen.

Jeder Knoten im Netz ist durch eine Zahl eindeutig gekennzeichnet. Diese Zahl gibt die Priorität des Knotens gegenüber seinen Nachbarn an.

Sowohl Reset als auch Formierung sind eingebettet in ein globales Nachrichtenprotokoll, welches es erlaubt, Nachrichten an alle Knotenrechner mit einem Minimum an Aufwand und einer Rückmeldung zu schicken. Nachrichten, welche an alle erreichbaren Knoten des Netzes gehen und in der Regel Kontroll- und Aufräumfunktionen haben, heißen <u>globale Nachrichten.</u>

6.1.1 Behandlung globaler Nachrichten

Es sei angenommen, daß in jedem Knotenrechner empfangene globale Nachrichten seriell bearbeitet werden. Für jeden durch globale Nachrichten verlangten Auftrag wird ein Auftragskontrollblock angelegt.

Für jede ankommende globale Nachricht können zwei verschiedene Funktionen durchgeführt werden. Eine bei Ankunft der ersten Nachricht für einen Auftrag, welche zum Einrichten des Auftragskontrollblocks führt, und die andere bei jeder weiteren Nachricht.

Sei MSG die empfangene Nachricht,
CB (MSG) der zugehörige Auftragskontrollblock.

CB (MSG) enthält außer auftragsspezifischen Informationen für jeden Auftrag eine Liste von Flags für jede Leitung INFLAGS, OUTFLAGS, welche angibt, ob über die entsprechende Leitung

Nachrichten für diesen Auftrag ausgesandt oder empfangen worden sind, und die Nummer der Leitung, über welche die Nachricht kam, die zum Einrichten des Auftragskontrollblocks führte (FIRSTPORT).

```
/   Algorithmus zur Bearbeitung globaler Nachrichten  /
START:          /   Breadth-first-Search-Verfahren   /

   GET MSG;
   INPORT = GET INPORT(MSG);
   IF CB(MSG) there  THEN DO ;
      CALL Auftragsfkt. 2 ; /  2. auftragsspezifische Funktion /
      SET INFLAGS (INPORT) ;
   END ;
   ELSE DO ;   /   First Message   /
      CREATE  CB(MSG) ;
      CALL  Auftragsfkt. 1 ;  /  1. auftragsspezifische Funktion /
      FIRSTPORT = INPORT ;
      SET INFLAGS (FIRSTPORT) ;
      SET OUTFLAGS (FIRSTPORT) ;  /  obwohl noch keine MSG
                                     gesendet  /
      DO  I=1 TO PORTZAHL ;
         IF I ≠ FIRSTPORT THEN DO ;  / sende Auftrag weiter  /
            WRITE MSG TO PORT (I) ;
            SET OUTFLAGS (I) ;
         END ;
      END ;
   END ;
      IF INFLAGS & OUTFLAGS THEN DO ; /   Antwort von allen
                                          Leitungen da /
        WRITE MSG TO FIRSTPORT ;  /   gib  Antwort  /
        FREE CB(MSG) ;            /   terminiere Auftrag  /
      END ;
   GOTO START ;
```

Dieser Algorithmus arbeitet für jede Leitung INPORT. Dabei auftretende Synchronisationsprobleme z.B. beim Zugriff auf die Auftragswarteschlange (CB) sowie die oben geforderte Serialisierung aller globalen Nachrichten sind nicht berücksichtigt worden.

Gestartet wird der Verbreitungsprozeß durch eine Nachricht MSG von einer internen "Leitung" durch ein Knotenkontrollprogramm. Dieses erhält eine Rückmeldung nach Ausführung des Auftrags.

6.1.2 Auftragsfunktionen für den Reset

Der Reset-Algorithmus dient dazu, das gesamte Netz in einen definierten Anfangszustand zu bringen und einem Knoten die Kontrolle über das Netz zu geben.

Er wird als spezielle globale Nachricht verschickt und terminiert alle anderen Aufträge.

Die Auftragsfunktion 1 für den Reset sieht so aus:

```
RESET 1 :
  BEGIN ;
  DO WHILE (CB There) ;
     IF  Auftrag = Reset THEN DO ;
        IF PRTY (MSG) > PRTY (CB) THEN
           PRTY (CB) = PRTY (MSG) ;  /  Übernimm schon laufenden
                                        Reset  /
     END ;
     ELSE DELETE CB ;  / Terminiere Nicht-Reset-Auftrag /
     GET NEXT CB ;
  END ;
  Setze alle Leitungen auf "ungerichtet" ;
  Weitere Reset-Maßnahmen, falls erforderlich ;
  END RESET 1 ;
```

PRTY ( ) ist die Nummer des Knotens, der den Auftrag initiiert hat.

Die 2. Auftragsfunktion für den Reset ist leer. Falls z.B. nach Netzausfällen durch einen Reset und Neuaufbau des Schrankengraphen die Erreichbarkeit aller Knoten sichergestellt werden soll (5.2.2), kann es bei Ausfall mehrerer Leitungen bzw.

Knoten dazu kommen, daß der Reset mehrfach gestartet wird. Da nur ein Reset überleben darf, andererseits die schon geleistete Arbeit im Netz durch andere Resets nicht verloren gehen soll, wird in der Auftragsfunktion 1 die höhere Priorität als neue Kennzeichnung des Auftragskontrollblocks übernommen. In diesem Fall ist darauf zu achten, daß das globale Nachrichtenprotokoll nicht dadurch hängen bleibt, daß über defekte Leitungen keine Antwort kommt. Da die Resets mehrere Anfänge haben können, muß vom Knotenkontrollprogramm, welches die Quittung für beendeten Reset empfängt, darauf geachtet werden, ob die Priorität der Quittungsnachricht gleich der eigenen Knotennummer ist. Ist dies nicht der Fall, so darf das Knotenkontrollprogramm nichts unternehmen. Andernfalls hat es die Kontrolle über das Netz und kann z.B. beginnen, den Schrankengraphen neu aufzubauen.

6.1.3 Auftragsfunktionen für den Aufbau eines Schrankengraphen

Auftragsfunktion 1 :

```
SCH 1 :
   BEGIN ;
      RICHTUNG (INPORT) = HIN ; /  Leitung zeigt auf Knoten  /
      DO I = 1 TO PORTZAHL ;
         IF I ≠ INPORT THEN RICHTUNG (I) = WEG ;  / Leitung
                                  zeigt auf den Nachbarknoten  /
      END ;
      MSG. VAL = MSG. VAL + 1 ;
      CB. VAL = MSG. VAL ;
   END SCH 1 ;
```

Auftragsfunktion 2 :

```
SCH 2 :
   BEGIN ;
      IF CB. VAL > MSG. VAL THEN
         RICHTUNG (INPORT) = HIN ;  / Leitung zeigt auf den Knoten /
```

```
    ELSE IF CB. VAL = MSG. VAL & NEIGHBOUR (INPORT) < OWN
         THEN RICHTUNG (INPORT) = HIN ;
    ELSE RICHTUNG (INPORT) = WEG ;
END SCH 2 ;
```

Für diesen Algorithmus muß, z.B. durch einen RESET nach 6.1.2, sichergestellt werden, daß er nur an einem Knoten beginnt. Da der Start für den Aufbau des Schrankengraphen in diesem Knoten von einer internen "Leitung" aus geschieht und das Protokoll für globale Nachrichten (6.1.1) sicherstellt, daß jeder erreichbare Knoten im Netz berührt wird, gibt es wegen SCH 1 genau einen Startknoten in dem erstellten Digraphen. Der für den Aufbau eines Schrankengraphen spezifische Wert VAL, der in den Anfangskontrollblock übernommen wird, sichert die Kreisfreiheit des Digraphen. Die Nummern der Knoten sorgen für eindeutige Richtung einer Leitung zwischen Knoten mit gleichem VAL-Wert und ebenfalls für Kreisfreiheit.

Eine topologische Ordnung entsteht, wenn man jedem Knoten die Zahl VAL verkettet mit der Knotennummer zuordnet. Entsprechend dieser Ordnung wird durch SCH 2 der Digraph aufgebaut, er ist also azyklisch. Der Digraph ist damit ein Schrankengraph.

Bei diesem Verfahren ist sichergestellt, daß vom Startknoten aus in dem entstandenen Verkehrsnetz alle anderen Knoten unter den gegebenen Lastverhältnissen auf dem schnellsten (entspricht kürzesten) Weg erreichbar sind (siehe Abschnitt 4.2).

Der Aufbau des Schrankengraphen benötigt pro Leitung zwei Nachrichten für den Reset und zwei für den eigentlichen Aufbau, also vier Nachrichten pro Leitung. Da der Aufbau ausgehend von einem Knoten durch Parallelarbeit der neu erreichten Knoten geschieht, ist die benötigte Zeit T_{Aufbau} durch die maximale Entfernung L_{max} zweier Knoten im Netz beschränkt, d.h. $T_{Aufbau} <= 4(L_{max}+1)t_{Nachricht}$. Dabei ist $t_{Nachricht}$ die mittlere Bearbeitungszeit für eine Nachricht.

6.2 Allgemeiner Routingalgorithmus im Verkehrsnetz

Zusätzlich zu dem für ein Verkehrsnetz geplanten Routingverfahren ist die allgemeine Routingvorschrift für Schrankengraphen zu beachten. Soll ein Routingverfahren z.B. auf Routingtabellen beruhen, die in jedem Knotenrechner aufgebaut werden, so genügt es, die zum Aufbau der Routingtabellen erforderlichen Nachrichten im Sinne der allgemeinen Routingvorschrift zu lenken. Dann spiegeln die aufgebauten Routingtabellen den zulässigen Fluß wider, und beim Routing von Nachrichten braucht darauf keine Rücksicht genommen zu werden. Ein möglicher allgemeiner Routingalgorithmus für einen nach 6.1.3 aufgebauten Schrankengraphen ist der folgende:

```
/   Fluß im Schrankengraphen    /

  GET MSG;
  INPORT = GET INPORT(MSG);
  Aktion 1 ;
  IF RICHTUNG (INPORT) = HIN THEN DO ;
     /    Fluß nur in Weg-Richtung möglich    /
     DO I = 1 TO PORTZAHL ;
        IF RICHTUNG (I) = WEG THEN DO ;
           Aktion 2
        END ;
     END ;
  END ;
  ELSE DO ;    / Fluß beliebig, nur nicht zurück    /
     DO I = 1 TO PORTZAHL ;
        IF I ≠ INPORT THEN DO ;
           Aktion 2
        END ;
     END ;
  END ;
  Aktion 3 ;
```

Aktion 1, 2 und 3 hängen von der Art der Nachricht ab. Für einen Routingtabellen-Aufbau könnte z.B. Aktion 1 eine Änderung der Routingtabellen, Aktion 2 das Weitersenden der geänderten Routingtabellen und Aktion 3 leer sein. Für eine zu vermittelnde Nachricht könnte Aktion 1 leer, Aktion 2 Auswahl der Ausgangsleitung und Aktion 3 Weitersenden der Nachricht über die gefundene Ausgangsleitung bedeuten.

7. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, ein Verfahren zur Verhinderung von Verklemmungen in Vermittlernetzen darzustellen, welches auf festen allgemeinen Routingeinschränkungen innerhalb des Netzes beruht. Dazu wurden die Begriffe eines Schrankengraphen und eines Verkehrsnetzes definiert und gezeigt, daß in ihnen keine Verklemmungen auftreten können, wenn innerhalb jedes Knotens das Objektvergabeverfahren 1 (bzw. 2 bei paketvermittelnden Netzen mit Schrankengraphen) implementiert ist. Ebenfalls können Kreis- und Pingpong-Effekte in Verkehrsnetzen nicht mehr auftreten, was Routingverfahren für solche Netze vereinfacht und den erreichbaren Durchsatz erhöht /13, 18/. Dafür ist die Zahl der möglichen Wege zwischen zwei Knoten kleiner als in Netzen ohne Schrankengraphen. Die Bemühungen, diesen Nachteil möglichst klein zu halten, führten zur Definition minimaler Verkehrsnetze und ihrer Untersuchung sowie zu speziellen Konstruktionsverfahren von Verkehrsnetzen. Es stellte sich heraus, daß bei Netzen, deren Topologie zuläßt, daß im Verkehrsnetz mindestens ein kürzester Weg zwischen je zwei Knoten unaufgetrennt ist, der minimal mögliche Fluß des Netzes ohne Schranken erreichbar ist, wenn auch u. U. die maximale Leitungskapazität größer sein muß.

Ein Nachteil von Verkehrsnetzen ist, daß bei Ausfall von Netzteilen Knoten wegen der Flußregelung nicht mehr erreichbar sind, obwohl eine physikalische Verbindung noch besteht. Deshalb wurde die Wahrscheinlichkeit für solch ein Ereignis untersucht und gefunden, daß sie bei üblichen Netztopologien mit zunehmender Leitungszahl abnimmt, und Grundlagen für Verfahren zum schnellen und so weit wie möglich örtlich begrenzten Wiederaufbau (Formierung) des Verkehrsnetzes dargestellt. Die Entwicklung entsprechender Verfahren wäre für große Netze sinnvoll. Das Problem der Synchronisierung bei solchen Verfahren, wenn die Möglichkeit der Knotenrechner für Parallelarbeit ausgenutzt werden soll, wurde an einem einfachen Verfahren zum Aufbau eines Schrankengraphen aufgezeigt.

Literaturverzeichnis

/1/ I. Barth
Struktur der Kommunikationsprotokolle im GMD-Netz.
in: D. Haupt & H. Petersen, Rechnernetze und Datenverarbeitung, Fachtagung der GI und NTG.
Aachen, März / April 1976, Springer Verlag 1976
(Informatik-Fachberichte Bd 3)

/2/ T. Cegrell
A Routing Procedure for the TIDAS Message Switching Network.
IEEE Transactions on Communications, Vol 23, No. 6 1975, S. 575 - 585

/3/ P.H. Chung, S.M. Reddy
A Routing Algorithm for Computer Communications Networks.
IEEE Transactions on Communications, Vol 23, No. 11 1975, S. 1371-1372

/4/ E.G. Coffman, M.I. Elphick, A. Shoshani
System Deadlocks
ACM Computing Surveys 3, Juni 1971, S. 67 - 78

/5/ D.W. Davies, D.L.A. Barber
Communication Networks for Computers.
John Wiley 1973

/6/ L.R. Ford, D.R. Fulkerson
Flows in Networks.
Princeton 1962

/7/ H. Frank, I.T. Frisch
Communications, Transmission and Transportation Networks.
Adison-Wesley Publishing Company 1971

/8/ H. Frank, W. Chou
Routing in Computer Networks.
Networks Vol. 1, No. 2 1971, S. 99 - 112

/9/ H. Frank, R.E. Kahn, R. Kleinrock
Computer Communication Network Design:
Experience with Theory and Practice.
Networks Vol. 2, 1972, S. 135 - 166

/10/ L. Fratta, U. Montanari
A Vertex Elimination Algorithm for Enumerating
all simple Paths in a Graph.
Networks Vol. 5, No. 2 1975, S. 151 - 178

/11/ K. Günther
Vermeidung von Deadlocks im allgemeinen und von
Puffer-Deadlocks bei 'Store and forward' -
Kommunikation im besonderen.
GMD-Mitteilung No. 28, St. Augustin, Version vom 24.10.1975

/12/ A.N. Habermann
Prevention of System Deadlocks.
CACM 12 Juli 1969, S. 373 ff.

/13/ J. Hänle
Simulation of the Protocols of the GMD-Net.
in: Rechnernetze und Datenfernverarbeitung.

/14/ R.C. Holt
Comments on Prevention of System Deadlocks.
CACM 14 Januar 1971, S. 36 - 38

/15/ H. Noltemeier
Graphentheorie mit Algorithmen und Anwendungen.
de Gruyter 1975

/16/ Narsingh Deo
Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.
Prentice Hall 1974

/17/ I. Paz
On the traffic handling capability of Communications Networks homogeneously loaded.
Networks Vol 5, No. 2 1975, S. 109 - 128

/18/ R.L. Pickholtz, C. Mc Coy
Effects of a Priority Discipline in Routing for Packet Switched Networks.
IEEE Transactions on Communications, Vol. 24 No. 5 Mai 1976, S. 506 - 515

/19/ H. Rudin
On Routing and Delta Routing.
IEEE Transactions on Communications, Vol. 24, No. 1 Januar 1976, S. 43 - 58

/20/ B. Struif
Aufgaben und Funktionen des GMD-Netz-Steuersystems.
in: Rechnernetze und Datenfernverarbeitung.