

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON **DESY**

DESY 65/14
Oktober 1965
Theorie

STRAHLUNGSKORREKTUREN ZUR e - p -STREUUNG FÜR WINKEL-
UND ENERGIEKOINZIDENZ-EXPERIMENTE

von

R. D. Kohaupt

Physikalisches Staatsinstitut der

Universität Hamburg

STRAHLUNGSKORREKTUREN ZUR e-p-STREUUNG FÜR WINKEL-
UND ENERGIEKONZIDENZ-EXPERIMENTE

von

R. D. Kohaupt

Physikalisches Staatsinstitut der
Universität Hamburg



Abstract

Calculations of radiative corrections to e-p-scattering are performed for experiments in which the final particles are detected in coincidence and both the angles and energies of the outgoing particles are measured. The dependence of radiative corrections on angle and energy resolution parameters is discussed in detail.



I N H A L T

	Seite
<u>1. Einleitung</u>	2
<u>2. Theoretischer Teil</u>	5
§ 1 Y.F.S.-Theorie	5
§ 2 Approximationen zur e-p-Streuung	9
§ 3 Photonphasenraum für den Prozeß $e+p \rightarrow e+p+\gamma$ und qualitatives Verhalten von Strahlungskorrekturen bei Koinzidenz-Experimenten	12
<u>3. Numerischer Teil</u>	20
§ 4a Konstruktion der Phasenraumbegrenzung $K_1[\omega]$	20
§ 4b Numerische Verfahren zur Bestimmung der Größe $S[K_1[\omega]]$	24
§ 5 Numerische Ergebnisse	28
<u>4. Zusammenfassung</u>	30
<u>5. Notation</u>	32
<u>6. Literaturverzeichnis</u>	33

1. Einleitung

In niedrigster Ordnung der Quanten-Elektrodynamik wird die e-p-Streuung durch den Graphen in Fig. 1 gekennzeichnet, und der diesem Einphotonenaustauschgraphen entsprechende Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt ist unter dem Namen Rosenbluth-Formel bekannt.

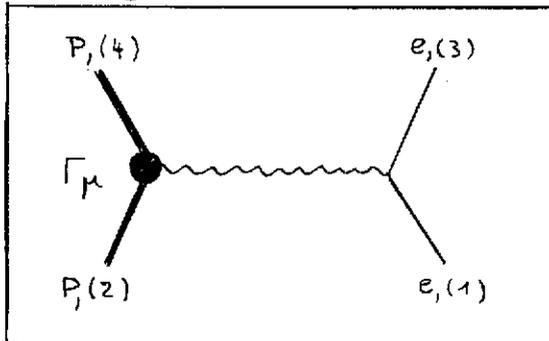


Fig. 1

Bei den heute erreichbaren Energien und Impulsübertragungen ist es jedoch mit der erzielten experimentellen Genauigkeit nicht zu vereinbaren, sich bei der theoretischen Analyse der Experimente auf die Rosenbluth-Formel zu beschränken. Den höheren Näherungen der Q.E.D., den "Strahlungskorrekturen", kommt daher in hohem Maße Bedeutung zu.

Für den Fall, daß bei e-p-Streuexperimenten das gestreute Elektron oder das Rückstoßproton allein registriert wird, sind Berechnungen von Strahlungskorrekturen bereits durchgeführt worden.^{(5,6,7)*} Die Korrekturen liegen in der Größenordnung von 15 % bis 20 % des Rosenbluth-Querschnitts.

Ein wesentliches Merkmal der Strahlungskorrekturen sind die sog. Infrarotsingularitäten, die in den höheren Näherungen der Q.E.D. auftreten, eine Folge davon, daß die Photonenmasse verschwindet. Fig. 2 zeigt die Graphen der auf die niedrigste Ordnung in Fig. 1 folgenden nächsthöheren Ordnung.

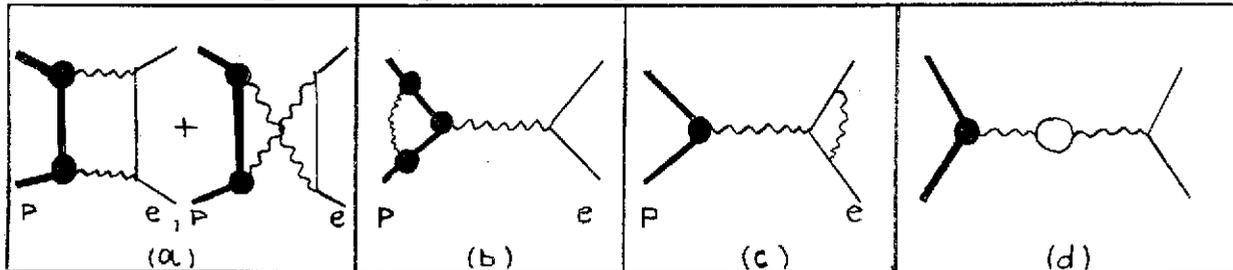


Fig. 2

nung in Fig. 1 folgenden nächsthöheren Ordnung.

Die hier aufgeführten Graphen sind unter folgenden Namen bekannt:

- a. Zweiphotonenaustausch
- b. (elektromagnetische) Vertexkorrektur am Proton

*Kürzlich ist eine Arbeit erschienen,⁽⁴³⁾ in der Strahlungskorrekturen berechnet werden für den Fall, daß nur die Energien der auslaufenden Teilchen nicht aber ihre Winkel gemessen werden.

- c. (elektromagnetische) Vertexkorrektur am Elektron
- d. Vakuum polarisation

Während das Matrixelement des Graphen d nach Beseitigung der Ultraviolettdivergenzen durch Ladungsrenormierung frei von Singularitäten ist, sind die Matrixelemente a, b, c nach Ausführung notwendiger Renormierungen divergent. Im Gegensatz zu den Ultraviolettdivergenzen rühren diese Singularitäten von der Integration in der Umgebung kleiner Photonenpropagatorimpulse her (Infrarotsingularität). Das Auftreten der Infrarotsingularität hängt damit zusammen, daß die durch die Feynmangraphen der Q.E.D. nahegelegte Einteilung in elastische und inelastische Prozesse bezüglich der Produktion von Photonen physikalisch nicht sinnvoll ist. So sind Reaktionen geladener Teilchen stets mit der Produktion von Photonen verbunden, deren Gesamtenergie durch die immer vorhandene Energieunschärfe bei der experimentellen Festlegung der Prozeßkinematik bestimmt ist.⁽¹⁴⁾ Strenggenommen sind reine Zustände geladener Teilchen dennoch keine vernünftigen Zustände in der Q.E.D.⁽¹⁵⁾

Neben dem Querschnitt für die "elastische" Streuung hat man stets den Querschnitt $\sigma_p(\Delta E)$ für die zusätzliche Erzeugung von Photonen bis zu einer Gesamtenergie ΔE zu berücksichtigen. Nur die Summe $\sigma_{\text{EXP}} = \sigma_s + \sigma_p(\Delta E)$ ist eine physikalisch sinnvolle Größe, und es zeigt sich, daß diese Größe frei ist von Divergenzen, allerdings abhängt von der Energie ΔE , die durch das Auflösungsvermögen der experimentellen Anordnung gegeben ist.

Für den Fall der e-p-Streuung ist der Querschnitt $\sigma_p(\Delta E)$ niedrigster Ordnung durch vier Graphen gekennzeichnet, die in Fig. 3 aufgeführt sind:

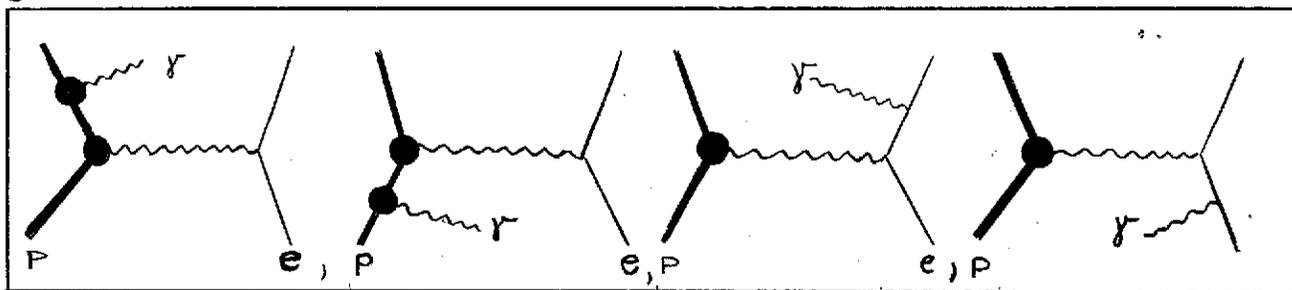


Fig.3

Da einerseits Strahlungskorrekturen von 15 % bis 20 % recht hoch sind, andererseits die Abhängigkeit von den experimentell gegebenen Auflösungsparametern beträchtlich ist, ist eine Beschränkung auf

die Graphen in Fig. 2 und Fig. 3 sowohl vom praktischen als auch vom theoretischen Standpunkt aus recht unbefriedigend. Von den Autoren D.K. Yennie, S.C. Frautschi, H. Suura und K.E. Eriksson⁽¹⁾ wurde daher eine neue Störungstheorie formuliert, in der die Infrarotanteile, die den Hauptbeitrag zur Strahlungskorrektur bilden, in geschlossener Form aufsummiert werden und für den "Rest" eine gewöhnliche Potenzreihe in der Kopplungskonstanten angesetzt wird, die man nach einer geeigneten Anzahl von Gliedern abbricht. Die Ergebnisse dieser Theorie, in der Folge Y.F.S.-Theorie genannt, werden in § 2 im Zusammenhang mit der e-p-Streuung erläutert.

Mit den immer höher werdenden Anforderungen an die Meßgenauigkeit ergibt sich für die e-p-Streuung zur Unterdrückung von Untergrundeffekten die Notwendigkeit, Elektron und Proton in Koinzidenz zu messen. Damit werden zwangsläufig Berechnungen von Strahlungskorrekturen für Koinzidenzexperimente erforderlich. Das Verhalten von Strahlungskorrekturen in Abhängigkeit von den Auflösungsparametern ist jedoch auch rein theoretisch von Bedeutung. Die Aussagen der Y.F.S.-Theorie über die Abhängigkeit der Strahlungskorrekturen von den Auflösungsparametern auf Grund der Infrarotstruktur der Q.E.D. gehen bis zu einem gewissen Grade über die Störungstheorie hinaus, und es sollte deshalb die Möglichkeit ins Auge gefaßt werden, die von der Theorie vorausgesagte Abhängigkeit experimentell zu prüfen. Es wird sich später zeigen, daß Koinzidenzexperimente hierzu besonders geeignet sind.

In der vorliegenden Arbeit sollen daher im Rahmen der Y.F.S.-Theorie Strahlungskorrekturen für Winkel- und Energiekoinzidenz-Experimente berechnet werden.

Die kinematischen Grundlagen und das qualitative Verhalten solcher Korrekturen werden in § 3 diskutiert, während in § 4 Verfahren zu ihrer numerischen Berechnung entwickelt werden. Die Ergebnisse einer numerischen Auswertung für charakteristische Auflösungsparameter, Energien und Streuwinkel sind in § 5 zusammengestellt.

2. Theoretischer Teil

1 Y.F.S.-Theorie

Die geschlossene Darstellung der Infrarotteile von Strahlenkorrekturen wird dadurch ermöglicht, daß sich die Matrixelemente für multiple Emission bzw. Absorption weicher Photonen faktorisieren lassen. Zur Erläuterung zeigt Fig. 4a einen Streuprozess mit einem einlaufenden Spin $-\frac{1}{2}$ -Fermion i mit dem Viererimpuls p_i . M_0 sei das entsprechende Matrixelement und Teine 4×4 -Matrix im Spinorraum der $U(p_i)$. In Fig. 4b ist in die äußere Fermionlinie ein F - γ - F -Vertex eingesetzt worden. Dabei ist offen gelassen, ob es sich bei

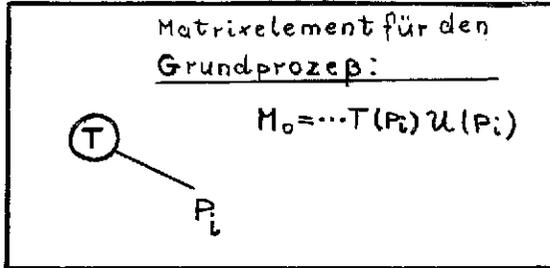


Fig. 4a

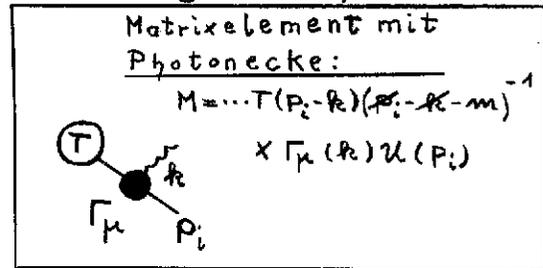


Fig. 4b

dem Photon um ein virtuelles oder reelles Teilchen handelt. Unterdrückt man die entsprechenden Photonfaktoren, so erhält man das Matrixelement M_0 . In der Näherung für "weiche" Photonen erhält man nach einigen Umformungen, die von den Vertauschungsrelationen der γ -Matrizen und der Dirac-Gleichung Gebrauch machen wegen

$$\Gamma_\mu(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \gamma_\mu \quad (1,1)$$

für den "Konvektionsbeitrag" den faktorisierten Ausdruck:

$$M^{(n)} \sim e \frac{P_i \cdot \mu}{P_i \cdot k} M_0 \quad \text{für } k \rightarrow 0 \quad (1,2)$$

Für n Photonen ergibt sich unter Berücksichtigung aller Permutationen

$$M^{(n)} \sim e^n \prod_{j=1}^n \left(\frac{P_i \cdot \mu_j}{P_i \cdot k_j} \right)_j M_0, \quad k \rightarrow 0 \quad (1,3)$$

A. Virtuelle Photonen

Beim Austausch virtueller Photonen treten für jedes ausgetauschte Quant zwei Photonvertizes und ein Photonpropagator auf. Die vierdimensionale Integration über den Propagatorimpuls erstreckt sich über den gesamten Impulsraum. Für einen Teil, d.h. in der Umgebung $k=0$, gilt die Beziehung (1,3), und dort erhält man für den Austausch von n (weichen) Photonen zwischen den Fermionen i, l mit den Vierimpulsen p_i, p_l unter Berücksichtigung eines kombinatorischen Faktors $\frac{1}{n!}$

$$M^{(n)} \sim \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \int \frac{d^4 k_j}{k_j^2} \left(\frac{P_i \cdot P_l}{P_i \cdot k_j P_l \cdot k_j} \right)_j M_0 \quad (1,4)$$

Nach Ausführung von Vertex- und Wellenfunktionsrenormierung⁽¹⁾ folgt

$$M^{(n)} = \text{sign}(i, e) \frac{\alpha^n}{n! 2^n} \int \prod_{j=1}^n \frac{d^4 k_j}{k_j^2} \left[\frac{P_i}{P_i k} - \frac{P_e}{P_e k} \right]^2 M_0, \quad k \approx 0 \quad (1,5)$$

Die Vorzeichenfunktion $\text{sign}(i, e)$ ist dabei definiert durch

$$\text{sign}(i, e) = Z_i \cdot Z_e \cdot \Theta_i \cdot \Theta_e \quad (1,6)$$

mit

$$Z_i = \begin{cases} +1, & \text{Ladung des } i\text{-ten Fermions } > 0 \\ -1, & \text{Ladung des } i\text{-ten Fermions } < 0 \end{cases}$$

$$\Theta_i = \begin{cases} +1, & i \text{ einlaufend} \\ -1, & i \text{ auslaufend} \end{cases}$$

Summation über n liefert mit der Abkürzung

$$B_0 = \text{sign}(i, e) \frac{i}{8\pi^3} \int \frac{d^4 k}{k^2} \left[\frac{P_i}{P_i k} - \frac{P_e}{P_e k} \right]^2, \quad k \approx 0 \quad (1,7)$$

die Abspaltung der Infrarotanteile beim Austausch weicher Photonen

$$M = \exp[\alpha B_0] M_0, \quad k \approx 0 \quad (1,8)$$

Man kann weiter zeigen,⁽²⁾ daß für ein beliebiges Matrixelement eine Aufspaltung der Form

$$M = \exp[\alpha B_0] \tilde{M} \quad (1,9)$$

existiert, bei der die durch Photonenaustausch bedingten Infrarotsingularitäten im Exponentfaktor enthalten sind, während \tilde{M} von diesen Divergenzen frei ist.

Die Beziehung (1,9) ist der Ausgangspunkt zur Formulierung einer modifizierten Störungstheorie in der Q.E.D.

Dem Matrixelement \tilde{M} wird durch

$$\bar{M} = \exp[\alpha(B_0 - B)] \tilde{M} \quad (1,10)$$

mit dem lorentz- und eichinvarianten Integral

$$B = B_{ie} = -\frac{i}{8\pi^3} \text{sign}(i, e) \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} \left[\frac{(2\Theta_i P_i - k)_\mu}{k^2 - 2\Theta_i P_i k} + \frac{(2\Theta_e P_e + k)_\mu}{k^2 + 2\Theta_e P_e k} \right]^2, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (1,11)$$

formal ein modifiziertes Matrixelement \bar{M} zugeordnet. Wegen

$$-\left[\frac{(2\Theta_i P_i - k)_\mu}{k^2 - 2\Theta_i P_i k} + \frac{(2\Theta_e P_e + k)_\mu}{k^2 + 2\Theta_e P_e k} \right] \xrightarrow{k \rightarrow 0} \left[\frac{P_i}{P_i k} - \frac{P_e}{P_e k} \right]^2 \quad (1,12)$$

ist \bar{M} ebenso wie \tilde{M} frei von Infrarotdivergenzen, die durch Photonenaustausch bedingt sind. Die eich- und lorentzinvariante Abtrennung dieser Divergenzen ergibt sich aus (1,9) und (1,10):

$$\exp[\alpha B] \bar{M} = \exp[\alpha B_0] \tilde{M} = M \quad (1,13)$$

Entwickelt man \bar{M} nach Potenzen der Kopplungskonstanten α

$$\bar{M} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{M}^{(m)} \quad (1,14)$$

so folgt aus der entsprechenden Entwicklung für M

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)} \quad (1,15)$$

zusammen mit (1,13) die Beziehung

$$\bar{M}^{(m)} = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} [\alpha B]^{m-n} M^{(n)} \quad (1,16)$$

Die Relation (1,16), deren Beweis hier im Gegensatz zu Ref. (1) unter Vermeidung von Komplikationen, die mit dem Auftreten von "Überlappungsdivergenzen" verknüpft sind, skizziert wurde, bildet zunächst nur die Grundlage einer formalen Störungstheorie mit infrarotregulären Matrixelementen \bar{M} . Wie aus (1,12) hervorgeht, führt jede Modifikation von B_0 von der Art

$$B' = \frac{i}{8\pi^3} \text{sign}(i, \epsilon) \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} S_{ie}(k_2)$$

mit der Eigenschaft

$$S_{ie}(k) \rightarrow \left[\frac{P_i}{P_i k} - \frac{P_e}{P_e k} \right]^2 \text{ für } k \rightarrow 0$$

zu einer formalen Störungstheorie mit infrarotregulären Matrixelementen \bar{M}' . Die Extraktion der Infrarotsingularitäten ist somit nicht eindeutig. Die Auszeichnung der Form (1,11) durch ihre Symmetrieeigenschaften hat in diesem Zusammenhang nur formale Bedeutung.

Eine Inspektion von (1,16) zeigt jedoch, daß die Glieder $\bar{M}^{(m)}$ rasch mit wachsenden m abnehmen; somit ist die Wahl von (1,11) im Sinne einer brauchbaren Störungstheorie vernünftig. Wir werden auf diesen Punkt in § 2 zurückkommen.

B. Reelle Photonen

Für die Emission reeller Photonen gelten ähnliche Überlegungen wie in Abschnitt A. Auch hier kann der Beitrag der Infrarotanteile in Form eines Exponentialfaktors abgespalten werden. Im Unterschied zum Austausch virtueller Photonen wird nicht das Matrixelement, sondern der Wirkungsquerschnitt faktorisiert, da erst hier über den Photonimpuls integriert wird. Eine Komplikation bringt die Berücksichtigung der Kinematik mit sich. Für den Fall der e-p-Streuung werden folgende kinematische Beziehungen eingeführt:

Gesamtviererimpuls der einlaufenden Teilchen $\rho = p_1 + p_2$

Viererimpuls des auslaufenden Elektrons resp. Protons p_3 resp. p_4

Gewichtsfunktion der experimentellen Anordnung $\Delta[e_3, p_4]$

Die Gewichtsfunktion $\Delta[e_3, p_4]$ projiziert aus der Phasenraumintegration über die Impulse der auslaufenden Teilchen e, p, γ zunächst den Teil des Phasenraumes von e und p heraus, der durch die Messung festgelegt wird und schließlich über die Kinematik auch den für die emittierten unbeobachteten Photonen zugänglichen Phasenraum. Der Wirkungsquerschnitt

$$\tilde{\sigma}_{e,p} = \sigma_{e,p}^S + \sigma_{e,p}^P(\Delta E)$$

für die e-p-Streuung läßt sich in folgender Form schreiben :

$$\tilde{\sigma}_{e,p} \sim \sum_{\text{spins}} \left(\frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) \exp[2\alpha \operatorname{Re} \tilde{B}] \right) \left(d^4 x e^{i(P-P_3-P_4)x} \exp[2\alpha \tilde{B}(x)] \overline{w}(x) \right) \quad (1,17)$$

mit folgenden Definitionen:

$$\overline{w}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{w}^{(m)}(x) ; \quad \tilde{B} = \sum_{\substack{i=1 \\ e=1 \\ i < l}}^4 \tilde{B}_{ie} ; \quad \tilde{B}(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ e=1 \\ i < l}}^4 \tilde{B}_{ie}(x) \quad (1,18)$$

$$\tilde{B}_{ie}(x) = \frac{\operatorname{sign}(i,e)}{8\pi^2} \int \frac{d^3 k}{(k^2 + \lambda^2)^{3/2}} \left[\frac{P_i \cdot k}{P_i \cdot k} - \frac{P_e \cdot k}{P_e \cdot k} \right]^2 e^{i k x} ; \quad \lambda \rightarrow 0 ; \quad |\vec{k}| \leq K_H[\Delta(e_3, P_4)] \quad (1,19)$$

wobei K_H die obere Grenze der Energie eines einzelnen Photons ist, die mit der Kinematik bei der durch $\Delta(e_3, P_4)$ gegebenen Anordnung verträglich ist. Die Größe $\overline{w}(x)^{(m)}$ ist gegeben durch

$$\overline{w}^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} [2\alpha \tilde{B}(x)] \int \frac{d^3 k}{|\vec{k}|^e} \frac{|\overline{M}_n|^2}{n!} e^{-i k x} ; \quad |\vec{k}| \leq K_H \quad (1,20)$$

mit

$$\overline{M}_n = \exp[-\alpha \tilde{B}] M_n, \quad (1,21)$$

wenn M_n das Matrixelement für e-p-Streuung unter zusätzlicher Produktion von n Photonen kennzeichnet.

Während der Faktor $\exp[2\alpha \operatorname{Re} \tilde{B}]$ die durch Photonenaustausch bedingten Infrarotsingularitäten enthält, sind im Faktor $\exp[2\alpha \tilde{B}(x)]$ die durch Emission von Bremsstrahlung bedingten Infrarotsingularitäten abgespalten. Die Kinematik wird hierbei implizite durch die vierdimensionale Integration über x berücksichtigt.

Das Integral (1,19) wird weiter zerlegt gemäß:

$$\tilde{B}(x) = \tilde{B}(K[\Omega]) + \mathcal{D}(x; K[\Omega], P_i) ; \quad K[\Omega] \leq K_H \quad (1,22)$$

$$\tilde{B}_{ie}(K[\Omega]) = \frac{\operatorname{sign}(i,e)}{8\pi^2} \int \frac{d^3 k}{(k^2 + \lambda^2)^{3/2}} \left[\frac{P_i \cdot k}{P_i \cdot k} - \frac{P_e \cdot k}{P_e \cdot k} \right]^2 ; \quad |\vec{k}| \leq K[\Omega] \quad (1,23)$$

$$(1,24)$$

wobei $K[\Omega]$ eine noch zweckmäßig einzurichtende Phasenraumbegrenzung ist. Der Ausdruck $\tilde{B}(K[\Omega])$, unabhängig von x , enthält keine Kinematik, wohl aber die Infrarotsingularitäten der reellen Photonen. Der Ausdruck $\mathcal{D}(x; K[\Omega], P_i)$ dagegen enthält Kinematik, ist aber wegen des Faktors $(e^{-i k x} - \Theta(K[\Omega] - |\vec{k}|))$, der für $\vec{k} \rightarrow 0$ verschwindet, nicht infrarotdivergent. Mit (1,21), (1,22), (1,23) läßt sich der Streuquerschnitt (1,17) wie folgt umformen:

$$\tilde{\sigma}_{e,p} \sim \sum_{\text{spins}} \left(\frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) \exp[2\alpha (\operatorname{Re} \tilde{B} + \tilde{B}(K[\Omega]))] \right) \left(d^4 x e^{i(P-P_3-P_4)x} \times \exp[2\alpha \mathcal{D}(x; K[\Omega])] \overline{w}(x) \right) \quad (1,25)$$

In (1,24) ist die Abtrennung der Infrarotsingularitäten vollständig durchgeführt. Obwohl $\text{Re} \mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}(K[\omega])$ im Limes $\lambda \rightarrow 0$ einzeln singular sind, ist ihre Summe für $K[\omega] > 0$ endlich, und es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Re} \mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}}[K[\omega]] &< 0 \\ \text{Re} \mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}}[K[\omega]] &\xrightarrow{\text{monoton}} -\infty, \text{ für } K[\omega] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1,26)$$

Für exaktelastische Streuung ist $K_H = 0$ und damit $K[\omega] = 0$; aus (1,24) folgt daher wegen (1,25) $\tilde{\mathcal{S}}_{e,p} = 0$, im Einklang mit den einleitend erwähnten Ergebnissen von Ref. (14) und Ref. (15). Ähnlich wie bei (1,16) zeigt eine Inspektion der Glieder $\overline{w}^{(m)}(x)$, daß durch (1,18), (1,19) und (1,20) eine brauchbare infrarotreguläre Störungstheorie formuliert wird, die von Anfang an die Infrarotstruktur der Q.E.D. berücksichtigt, und die Diskrepanzen der "alten" Version vermeidet.

§ 2 Approximationen zur e-p-Streuung

Das Ziel dieses Paragraphen soll sein, für die Größe $\overline{w}(x)$ aus (1,17) eine geeignete Näherung anzugeben.

Zunächst wollen wir uns darauf beschränken, bei der Emission von Bremsstrahlung nur "Konvektionsbeiträge" zu berücksichtigen. Dieser Vereinbarung gemäß schreiben wir

$$\overline{w}(x) \approx \overline{w}^{(0)} = |\overline{M}_0|^2 \quad (2,1)$$

aus (1,20) folgt nämlich

$$\overline{w}^{(1)} = \int \frac{d^3 k}{|k|} |\overline{M}_1|^2 e^{-i k x} - 2 \alpha \tilde{\mathcal{B}}(x) |\overline{M}_0|^2 \quad (2,2)$$

und somit enthält $\overline{w}^{(1)}(x)$ bereits Terme, die verschwinden, wenn der Photoneimpuls verschwindet. Da diese Terme keine wesentlichen Beiträge liefern ($\sim 1\%$) und durch geeignete e-p-Energie-Koinzidenzanordnungen weiter unterdrückt werden können, erscheint die Annahme (2,1) gerechtfertigt.

Für das Matrixelement \overline{M}_0 , das elastische Streuung ohne Photonenemission beschreibt, ist im Hinblick auf die Graphen a, b, c, d folgende Näherung angemessen:

$$\overline{M}_0 \approx \overline{M}_0^{(0)} + \overline{M}_0^{(1)} \quad (2,3)$$

wobei $\overline{M}_0^{(0)}$ das dem Graphen in Fig. 1 entsprechende Matrixelement

der Kernerfath-Linierung ist

$$\bar{M}_0^{(0)} = M_R$$

und $\bar{M}_0^{(1)}$ nach (1,16) gegeben ist durch

$$\bar{M}_0^{(1)} = M_0^{(1)} - \alpha \beta \bar{M}_0^{(0)} = M_0^{(1)} - \alpha \beta M_R ; \quad (2,4)$$

$\bar{M}_0^{(1)}$ enthält demnach die Vakuumpolarisation, die Beiträge des anomalen magnetischen Moments des Elektrons und nichtinfrarotdivergente Anteile der Graphen a, b. Die Berücksichtigung der letztgenannten Anteile ist ohne große Vereinfachung (Vernachlässigung der Pion-Nukleon-Resonanzen, Vernachlässigung der Struktur von Nukleon-Formfaktoren außerhalb der Massenschale usw.) kaum möglich. Die hierbei auftretenden Fehler erreichen vermutlich die Größe der zu berechnenden Beiträge. Es ist daher im Rahmen der G.E.D. konsequent in $\bar{M}_0^{(1)}$ nur Vakuumpolarisation und anomales magnetisches Moment des Elektrons zu berücksichtigen. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$\bar{M}_0 \approx M_0 + M_{POL} + M_{AN} ; M_{POL} \triangleq \text{Vakuum pol.}, M_{AN} \triangleq \text{mag. Mom.} \quad (2,5)$$

oder

$$\bar{w} \approx |M_R|^2 + 2 \operatorname{Re} M_R^* (M_{POL} + M_{AN}) \quad (2,6)$$

Für Mittelung und Spinsumation gestatten folgende Umformung

$$\sum_{\text{Spins}} \bar{w} \approx w = (1 + S_{POL}) \sum_{\text{Spins}} |M_R|^2 + \Delta_{AN} \quad (2,7)$$

Mit (1,21) und (2,7) wird aus (1,17)

$$\tilde{\sigma}_{e,p} \sim \int \frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) \exp[2\alpha(R\beta + \tilde{B}(K[\Omega]))] w \times \int d^4 x e^{i(P-P_3-P_4)x} \exp[2\alpha D(x; K[\Omega], P_i)] \quad (2,8)$$

Wählt man in dem Funktional

$$\sigma[w] = \int \frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) w(P_i) \int d^4 x e^{iP'x} \exp[2\alpha D(x; K[\Omega], P_i)] ; P_i' = P - P_3 - P_4 \quad (2,9)$$

mit

$$w'(P_i) = w(P_i) \exp[2\alpha(R\beta + \tilde{B}(K[\Omega]))]$$

für $K[\Omega]$ die Oberfläche $K_1[\Omega]$ desjenigen Phasenraumes, der mit der Kinematik für den Prozess $e + p \rightarrow e + p + \pi$ bei der durch $\Delta(e_3, P_4)$ gegebenen experimentellen Anordnung verträglich ist, so läßt (2,9) bei Beschränkung von $\exp[2\alpha D(x)]$ auf die erste Ordnung in α

$$\sigma[w] = \int \frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) w'(P_i) \int d^4 x e^{iP'x} (1 + 2\alpha D(x; K_1[\Omega], P_i)) + O(\alpha^2)$$

folgende Umformung zu:

$$\begin{aligned} \sigma[w'] &= \int \frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) W'(P_i) \left\{ \delta(P') + 2\alpha \sum_{i < l} \frac{\text{sign}(i, l)}{8\pi^2} \int \frac{d^3 k}{|k|} \left[\frac{P_i}{P_i k} - \frac{P_l}{P_l k} \right]^2 \left(\delta(P' - k) - \Theta(K_1[\Omega] - |k|) \right) \right\} + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &= \int \frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) W'(P_i) \left\{ \delta(P') + 2\alpha \sum_{i < l} \frac{\text{sign}(i, l)}{8\pi^2} \int \frac{d^3 k}{|k|} \left[\frac{P_i}{P_i k} - \frac{P_l}{P_l k} \right]^2 \left(\delta(P' - k) - \delta(P') \right) \right\} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$R(\alpha) = 2\alpha \sum_{i < l} \frac{\text{sign}(i, l)}{8\pi^2} \int \frac{d^3 k}{|k|} \left[\frac{P_i}{P_i k} - \frac{P_l}{P_l k} \right]^2 \left(\delta(P' - k) - \delta(P') \right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma[w'] &= \int \frac{d^3 P_3 d^3 P_4}{E_3 E_4} \Delta(e_3, P_4) \delta(P') \exp[2\alpha(\mathcal{R}\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}}[K_1[\Omega]])] W(P_i) \\ &\quad + R(\alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned} \quad (2,10)$$

Die Größe $\mathcal{R}(\alpha)$ beschreibt auf Grund des Faktors $(\delta(P' - k) - \delta(P'))$ Rückstoßeffekte bei der Emission von Bremsstrahlung und trägt selbst für "harte" Photonen ($E_\gamma^{L.S.} \approx 1 \text{ GeV}$) weniger als 1% zum Rosenbluth-Querschnitt bei. Eine entsprechende Aussage für $\mathcal{O}(\alpha^2)$ kann nicht allgemein bewiesen werden, da hier die Kinematik erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Die Inspektion der in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ auftretenden Terme gibt wegen der Kleinheit der Kopplungskonstanten α jedoch Anlaß zu der Annahme, daß der Beitrag $\mathcal{O}(\alpha^2)$ die Größenordnung von 1% bis 2% nicht wesentlich überschreitet, so daß die Abhängigkeit des Querschnitts $\sigma[w']$ von den Auflösungsparametern für $K_1[\Omega] \rightarrow 0$ durch den Exponentialfaktor

$$\exp[2\alpha(\mathcal{R}\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}}[K_1[\Omega]])]$$

beschrieben wird.

Unter Vernachlässigung der für wachsende Impulsübertragungen verschwindenden Korrektur Δ_{AM} läßt sich $\tilde{\sigma}_{e,p}$ schreiben in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{e,p} &= \int_{(\Delta\Omega_3)} d\Omega_3 \frac{d\tilde{\sigma}_{e,p}}{d\Omega_3} \quad , \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{e,p}}{d\Omega_3} &= \Delta(e_3, P_4) \Big|_{P'=0} (1 + \delta_{POL}) \frac{d\tilde{\sigma}_R}{d\Omega_3} \exp[\delta(K_1[\Omega])] \\ \delta(K_1[\Omega]) &= 2\alpha(\mathcal{R}\mathcal{B} + \tilde{\mathcal{B}}(K_1[\Omega])) \Big|_{P'=0} \end{aligned} \quad (2,11)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} Y &= \exp[\delta(K_1[\Omega])] \\ \delta_{EX} &= Y - 1 \end{aligned} \quad (2,12)$$

lassen sich die Formeln (2,11) auf die konventionelle Form

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{e,p}}{d\Omega_3} = (1 + \delta_{TOT}) \frac{d\sigma_R}{d\Omega_3} \Delta(e_3, p_4) \Big|_{p'=0} \quad (2,13)$$

bringen mit

$$\delta_{TOT} = 1 + \delta_{EX} + \gamma \cdot \delta_{POL} \quad (2,14)$$

§ 3 Photonphasenraum für den Prozeß $e+p \rightarrow e+p+\gamma$ und qualitatives Verhalten von Strahlungskorrekturen bei Koinzidenz-Experimenten

Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Berechnungen von $\delta(K, [\Omega])$ beziehen sich auf Winkel- und Energie-Koinzidenz-Experimente, bei denen im Labor-System folgende Größen gemessen werden:

Elektron:

1. Die Richtung des gestreuten Elektrons $\vec{p}_3 \hat{=} \Omega_3$ mit den Winkelauflösungen $\pm \Delta\theta_3$ in der Streuebene und $\pm \Delta\phi_3$ senkrecht zur Streuebene.

2. Die Energie des gestreuten Elektrons an der Stelle $E_3^{el.}(\vec{p}_3)$ mit einer relativen Auflösung $\pm \frac{\Delta E_3}{E_3}$

Proton:

3. Die Richtung des Rückstoßprotons $\vec{p}_4^{el.}(\vec{p}_3) \hat{=} \Omega_4$ in einem Öffnungskegel $\vec{p}_4^{el.} \cdot \vec{p}_4 \geq \cos \Delta\theta_4$

4. Der Impuls des Rückstoßprotons $|\vec{p}_4^{el.}(\vec{p}_3)|$ mit einer relativen Auflösung $\pm \frac{\Delta|\vec{p}_4|}{|\vec{p}_4|}$

Obwohl die Ansprechwahrscheinlichkeiten der für die Messung erforderlichen Zählapparaturen im Akzeptanzbereich im allgemeinen nicht konstant ist, läßt sich die Gewichtsfunktion $\Delta(e_3, p_4)$ für die unter 1. bis 4. beschriebene Anordnung wie folgt idealisieren:

$$\Delta(e_3, p_4) = \Delta(\Omega_3) \cdot \Delta(E_3) \cdot \Delta(\Omega_4) \cdot \Delta(|\vec{p}_4|) \quad (3,1)$$

mit den Definitionen

$$\Delta(\Omega_3) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \Omega_3 \in \Omega_{3\pi}(\Delta\theta_3, \Delta\phi_3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3,2)$$

$$\Delta(E_3) = \Theta(|E_3^{el.}(\Omega_3) - E_3| - \Delta E_3) \quad (3,3)$$

$$\Delta(\Omega_4) = \Theta(\vec{p}_4^{el.}(\Omega_3) \cdot \vec{p}_4 - \cos \Delta\theta_4) \quad (3,4)$$

$$\Delta(|\vec{P}_4|) = \Theta(|\vec{P}_4^{el.}(\Omega_3)| - |\vec{P}_4| - \Delta|\vec{P}_4|) \quad (3,5)$$

Die Berechnung von $\tilde{\sigma}_{e,p}$ für die durch (3,2) bis (3,5) definierte Anordnung kann gemäß (2,10) in zwei Schritten durchgeführt werden.

1. Unter den Bedingungen (3,3) bis (3,5) wird δ bei festem Ω_3 berechnet:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{e,p}}{d\Omega_3} = \frac{d\sigma_R}{d\Omega_3} \Delta(e_3, p_4)|_{P'=0} (1 + \delta_{TOT}(\Omega_3, \dots)) \quad (3,6)$$

2. Das Resultat (3,6) wird nach Maßgabe von $\Delta(\Omega_3)$ über Ω_3 integriert:

$$\tilde{\sigma}_{e,p} = \int d\Omega_3 \Delta(\Omega_3) \frac{d\tilde{\sigma}_{e,p}}{d\Omega_3} \quad (3,7)$$

Zur Berechnung von $\delta_{TOT}(\Omega_3, \dots)$ wenden wir uns zunächst dem Fall $\Omega_3 = \Omega_3^0$ zu.

Bei scharf definierter Primärenergie gilt wegen (3,3) und der Beziehung

$$E_3^{el.}(\Omega_3) = M_{\alpha} \times (E_3(\Omega_3))$$

die Relation

$$E_3^{el.}(\Omega_3^0) - E_3(\Omega_3^0) = \Delta E_3' \leq \Delta E_3 \quad (3,8)$$

Da das gestreute Elektron in den hier betrachteten Energiebereichen und Impulsübertragungen extremrelativistisch ist

$$E_3^{el.} \approx |\vec{P}_3^{el.}|; \quad E_3 \approx |\vec{P}_3|$$

folgt aus (3,8)

$$|\vec{P}_3^{el.}(\Omega_3^0)| - |\vec{P}_3(\Omega_3^0)| = \Delta|\vec{P}_3| \approx \Delta E_3' \quad (3,9)$$

Außer den Bedingungen (3,3) bis (3,5), (3,8) und (3,9) stehen uns zur Bestimmung von $K_1[\Omega]$ für jedes Ω_3 zwei weitere Gleichungen zur Verfügung, der Viererimpulssatz der elastischen e-p-Streuung und der Viererimpulssatz für die zusätzliche Produktion eines einzelnen Photons, speziell für $\Omega_3 = \Omega_3^0$

$$P_4^{el.} = P - P_3^{el.}(\Omega_3^0) \quad (3,10)$$

$$P_4 = P - P_3(\Omega_3^0) - \hbar \quad (3,11)$$

Im physikalischen Bereich, $E_i > 0$, sind die Gleichungen (3,10), (3,11) äquivalent mit

$$M^2 = (P - P_3^{el.})^2; \quad \vec{P}_4^{el.} = \vec{P} - \vec{P}_3^{el.} \quad (3,12)$$

$$M^2 = (P - P_3 - \hbar)^2; \quad \vec{P}_4 = \vec{P} - \vec{P}_3 - \vec{\hbar} \quad (3,13)$$

Subtraktion der ersten Gleichung (3,13) von der ersten Gleichung (3,12) ergibt

Durch die Gleichungen (3,22) bzw. (3,25) wird $K_1[\Omega]$ in einem

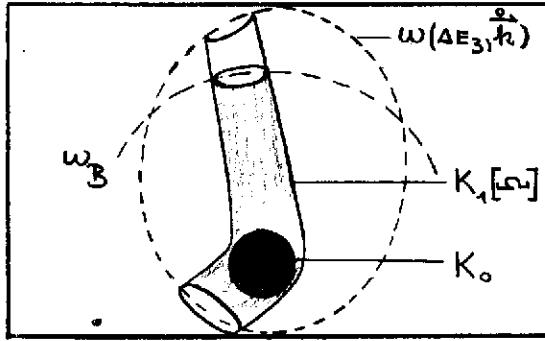


Fig. 8

Koordinatensystem definiert, in dem \vec{Q} Polarachse ist. Es ist aber im Prinzip möglich, $K_1[\Omega]$ in einem Koordinatensystem mit raumfester Polarachse, etwa mit $\vec{P}_4^{el.}$ als Polarachse anzugeben. Für jedes \vec{h} auf $K_1[\Omega]$ ist nämlich $\Delta E_3'(\vec{h})$ bekannt und damit die relative Lage von $\vec{P}_4^{el.}$ und \vec{Q} . Durch Koordinatentransformation erhält man die Richtung von \vec{h} bezüglich $\vec{P}_4^{el.}$ in der Form

$$\Omega' = f_{\vec{h}}(\Omega) \quad (3,26)$$

$$\Omega = \bar{f}_{\vec{h}}(\Omega')$$

oder
und damit

$$\vec{h}(\Omega) = \vec{h}(\bar{f}_{\vec{h}}(\Omega')) \text{ für } \vec{h} \in K_1[\Omega] \quad (3,27)$$

Wir werden bei der Konstruktion von $K_1[\Omega]$ in § 4 allerdings nicht von dem allgemeinen Verfahren (3,26), (3,27) Gebrauch machen, sondern die Gleichungen für $K_1[\Omega]$ von Anfang an bezüglich $\vec{P}_4^{el.}$ aufstellen.

Eine wesentliche Eigenschaft des von K_1 begrenzten Phasenraumes ist, daß er den Punkt $\vec{h} = 0$ im Innern enthält; für $\Delta \Theta_4 \neq 0$ liegt dieser Punkt von einem gewissen $\Delta E_3' \neq 0$ ab nämlich innerhalb aller Kegel der Schar $\mathcal{K}[\Omega, \Delta E_3']$ und wird somit von K_1 umhüllt. Wir können daher diesen Phasenraum zerlegen (Fig. 8) gemäß

$$\mathcal{P}_{K_1} = \mathcal{P}_{K_0} + \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \quad (3,28)$$

wobei $K_0[\Omega]$ die Oberfläche einer Kugel ist mit der Bedingung

$$K_0 \leq K_1[\Omega]$$

Der Zerlegung (3,26) für den Phasenraum \mathcal{P}_{K_1} entspricht eine Zerlegung von $\mathcal{S}[K_1(\Omega)]$ in der Form:

$$\mathcal{S}(K_1[\Omega]) = \mathcal{S}(K_0) + \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{R}[\Omega]) \quad (3,29)$$

Hierin ist sowohl $\mathcal{S}(K_0)$ als auch $\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{R}[\Omega])$ endlich. Darstellungen der Funktion $\mathcal{S}(K_0)$ findet man in der Literatur (1), so daß sich die Bestimmung von $\mathcal{S}(K_1[\Omega])$ auf die Berechnung von $\tilde{\mathcal{S}}(K_1[\Omega])$ reduziert.

Zunächst kann man anhand des durch (3,25) gegebenen Phasenraumes eine Übersicht über das qualitative Verhalten von $\mathcal{S}(K_1[\Omega])$ in Abhängigkeit von den Auflösungsparametern gewinnen.

Nach (3,25) wird der Phasenraum für fallende ΔE_3 und $\Delta |\vec{P}_4|$ kleiner. Da $|\mathcal{S}(K_1[\Omega])|$ mit abnehmendem Phasenraumvolumen anwächst, steigt

$|\delta(K_1(\Omega))|$ bei festem Streuwinkel auch für fallende ΔE_3 und $\Delta |\vec{P}_4|$

Eine Eigenart der Winkel-Koinzidenz-Anordnung ist der Anstieg von $|\delta|$ für abnehmende Winkelakzeptanzen $\Delta \Theta_4$; für $\Delta \Theta_4 \rightarrow 0$ reduziert sich nämlich der Phasenraum \mathcal{P}_K auf ein Kurvenstück, so daß sein Volumen verschwindet. Den qualitativen Verlauf von $|\delta|$ bzw. $|\delta_{Ex}|$ in Abhängigkeit von den Auflösungsparametern zeigen Fig. 9, Fig. 10 und Fig. 11.

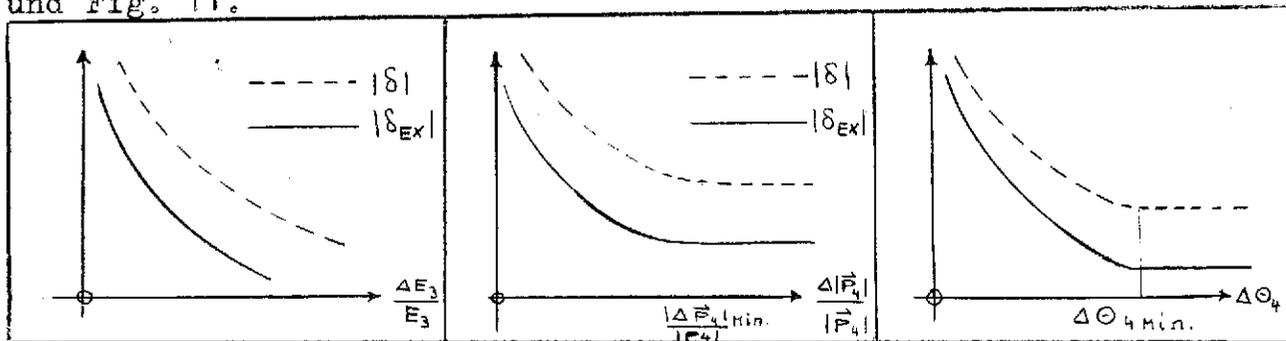


Fig. 9

Fig. 10

Fig. 11

In Fig. 10 zeigt δ für $\Delta |\vec{P}_4| > \Delta |\vec{P}_4|_{\min}$ einen konstanten Verlauf. Die Stelle $\Delta |\vec{P}_4|_{\min}$ ist durch

$$\Delta |\vec{P}_4|_{\min} = \text{Max.} [d(K_{10}(\Omega))] \quad (3,30)$$

gekennzeichnet, d.h. für $\Delta |\vec{P}_4| > \Delta |\vec{P}_4|_{\min}$ stellt (3,5) keine weitere Einschränkung des Phasenraumes dar, somit ist δ unabhängig von $\Delta |\vec{P}_4| > \Delta |\vec{P}_4|_{\min}$. Ähnlich liegen die Verhältnisse für $\Delta \Theta_4 > \Delta \Theta_{4 \min}$ in Fig. 11. Die Stelle $\Delta \Theta_{4 \min}$ ist dadurch charakterisiert, daß für alle \vec{k} auf $K_B(\Omega(-\frac{\vec{k}}{k}))$ in (3,23) die Relation $\Delta E_3' \geq \Delta E_3$ gilt, so daß aus (3,23) folgt $K_{10} = \omega(\Delta E_3)$,

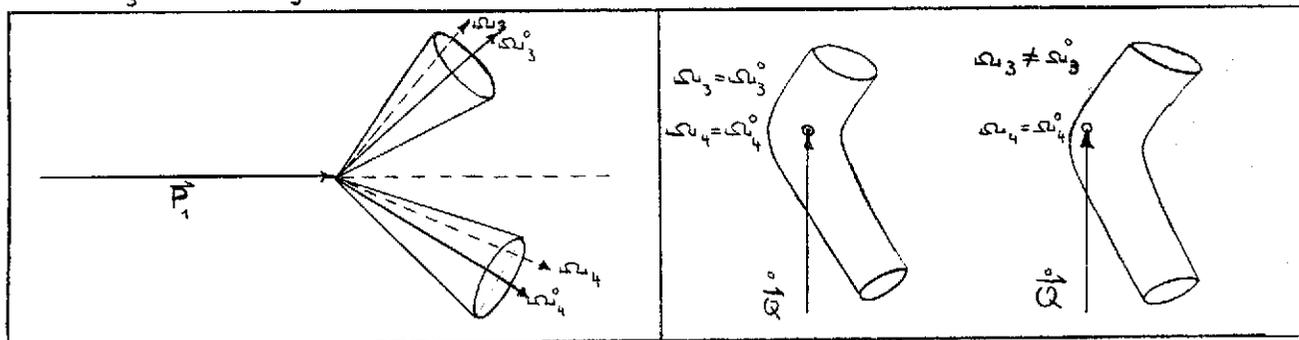


Fig. 12

Fig. 13

d.h. für $\Delta \Theta_4 > \Delta \Theta_{4 \min}$ stellt (3,4) keine Einschränkung des Phasenraumes dar, somit ist δ auch von $\Delta \Theta_4 > \Delta \Theta_{4 \min}$ unabhängig.

Wir wenden uns jetzt dem Fall $\Omega_{3H} \ni \Omega_3 \neq \Omega_3^0$ zu. Dabei ist zu be-

achten, daß dem Bereich Ω_{3M} ein Bereich Ω_{4M} auf der Protonenseite entspricht. Wir wollen uns hier auf solche Ω_{3M} beschränken, für die Ω_{4M} kleiner als der durch (3,4) definierte Bereich ist. Weiter können wir voraussetzen, daß die explizite Abhängigkeit der Korrektur δ von Ω_3 über die Impulse p_i im Bereich Ω_{3M} schwach ist, so daß die lokale Abhängigkeit implizite durch die Auflösungsbedingungen bewirkt wird. Zu dieser Abhängigkeit tragen drei Effekte bei:

1. Aus (3,3) folgt zunächst

$$E_3^{el.}(\Omega_3) - E_3(\Omega_3) = \Delta E_3'(\Omega_3) \leq \Delta E_3 + (E_3^{el.}(\Omega_3) - E_3^{el.}(\Omega_3^0)) \quad (3,31)$$

Für Elektronenstreuwinkel $\Theta_3 < \Theta_3^0$ gilt demnach

$$\text{Max}[\Delta E_3'(\Omega_3)] > \Delta E_3$$

und für Elektronenstreuwinkel $\Theta_3 > \Theta_3^0$

$$\text{Max}[\Delta E_3'(\Omega_3)] < \Delta E_3$$

d.h. für Ereignisse mit $\Theta_3 < \Theta_3^0$ ergibt sich eine Änderung von $|\delta|$:

$$|\delta(\Omega_3)| < |\delta(\Omega_3^0)| \quad (3,32)$$

für Ereignisse mit $\Theta_3 > \Theta_3^0$ dagegen:

$$|\delta(\Omega_3)| > |\delta(\Omega_3^0)| \quad (3,33)$$

2. Ähnliche Effekte, jedoch in entgegengesetzter Richtung und in den meisten Fällen schwächer als (3,32) und (3,33) ergeben sich aus (3,5)

$$\text{Max}[d(\Omega_3)] < \Delta |\vec{P}_4|, \text{ für } \Theta_3 < \Theta_3^0 \quad (3,34)$$

$$\text{Max}[d(\Omega_3)] > \Delta |\vec{P}_4|, \text{ für } \Theta_3 > \Theta_3^0 \quad (3,35)$$

3. Die Bedingung (3,4) liefert einen bezüglich der Richtung symmetrischen Akzeptanzkegel. Für $\Omega_3 + \Omega_3^0$, d.h. $\Omega_4 + \Omega_4^0$ ist dieser Kegel bezüglich Ω_4 allerdings nicht mehr symmetrisch (Fig. 12), so daß die durch (3,22) gegebene Mantelfläche modifiziert wird (Fig.

13). Die hierdurch bedingte Abänderung des Phasenraumes hat eine Vergrößerung von $|\delta|$ zur Folge. Den Verlauf von $|\delta|$ in Abhängigkeit vom Streuwinkel

$\Theta_3 = \Theta_3^0 + \Delta \Theta_3'$
im Bereich $|\Delta \Theta_3'| \leq \Delta \Theta_3$
zeigt Fig. 14

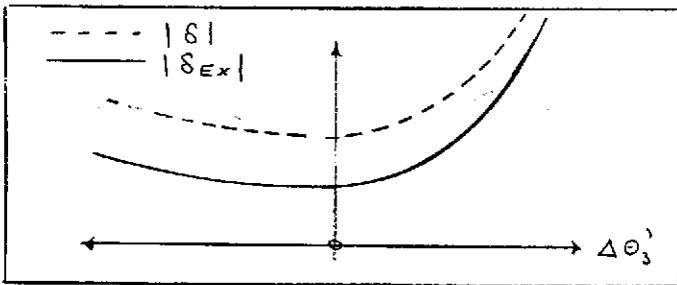


Fig. 14

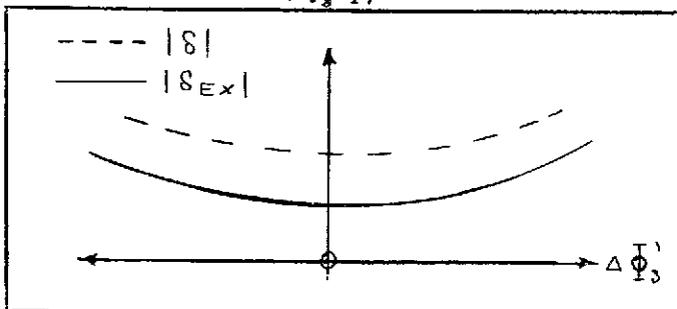


Fig. 15

Für $\Theta_3 > \Theta_3^0$ wirken die Effekte 1. und 3. in gleicher Richtung,
für $\Theta_3 < \Theta_3^0$ in entgegengesetzter Richtung.

Die Abhängigkeit vom Azimutalwinkel $\Phi_3 = \Phi_3^0 + \Delta \Phi_3$ im Bereich $|\Delta \Phi_3| \leq |\Delta \Phi_3|$ zeigt Fig. 15. Die Effekte 1. und 2. treten hierbei nicht auf, so daß wir einen bezüglich Φ_3^0 symmetrischen Verlauf erwarten.

3. Numerischer Teil

§ 4a Konstruktion der Phasenraumbegrenzung

Für die numerische Berechnung von $\tilde{\mathcal{Y}}[\mathcal{R}[\Omega]]$ ist es zur Vermeidung überlanger Rechenzeiten äußerst wichtig, die Phasenraumbegrenzung $\mathcal{K}_s[\Omega]$ in möglichst expliziter Form anzugeben.

Tatsächlich läßt sich das System (3,22) unter geeigneter Näherung explizite lösen. Zunächst kann man in den Gleichungen für die Ellipsoidschalen $\omega(\vec{r}, \Delta E_3)$ den Richtungskosinus $\vec{r} \cdot \vec{q}$ durch $\frac{r}{r_0} \cos \vartheta$ ersetzen; denn für $\Delta E_3 \ll |\vec{r}|$ ist der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{q} sehr klein. Außerdem sind die durch obige Ersetzung bedingten Abweichungen am größten in der Nähe des Aphels, das aber durch die Energie-Koinzidenz-Bedingungen (3,5) resp. (3,24) in den meisten Fällen weitgehend abgeschnitten wird.

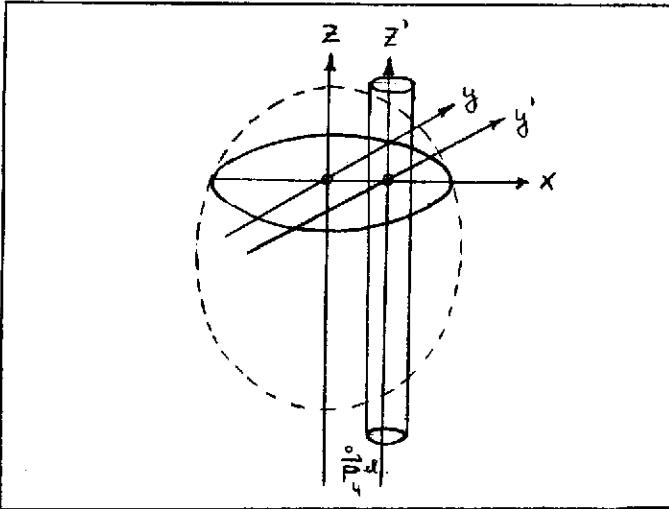


Fig. 19

variieren, Fig. 16. Die in § 3 Fig. 6 dargestellte Situation kann demnach näherungsweise durch die in Fig. 17 dargestellte Situation beschrieben werden.

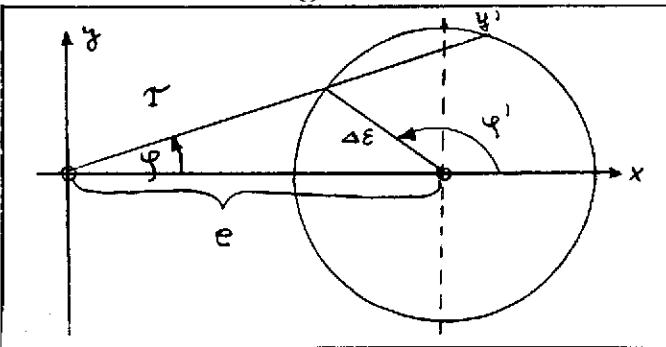


Fig. 20

Für die Schar $\mathcal{X}[\Delta E_3', \Omega(\vec{r})]$ läßt sich im Rahmen unserer Näherung schreiben

$$\mathcal{X}[\Delta E_3', \Omega(\vec{r})] = \frac{r(\Delta E_3', \vartheta)}{\sin \vartheta} \quad (4,2)$$

wobei die Bestimmung von $r(\Delta E_3', \vartheta)$ aus Fig. 20 zu entnehmen ist, element-

Weiterhin ist es im Bereich des durch $\omega(\vec{r}, \Delta E_3)$ charakterisierten Ellipsoides möglich, die Schar der Kegelabschnitte durch eine Schar von Zylinderabschnitten zu ersetzen, da in diesem Bereich der Kegelhöhe kaum

Einführung von Polarkoordinaten gemäß Fig. 19 ergibt für die Schar der Ellipsoidschalen

$$\omega(\Omega(\vec{r}), \Delta E_3') = \frac{\lambda \Delta E_3'}{1 + \beta_4^2 \cos \vartheta} \quad (4,1)$$

tere Geometrie liefert:

$$\Delta \varepsilon^2 = e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi \quad \text{oder} \quad (r - e \cos \varphi)^2 = e^2 \left[\frac{\Delta \varepsilon^2}{e^2} + (\cos^2 \varphi - 1) \right]$$

Mit der Abkürzung

$$S(r) = \begin{cases} +1 & \text{für } r - e \cos \varphi > 0 \\ -1 & \text{für } r - e \cos \varphi < 0 \end{cases}$$

folgt:

$$r = e \left\{ S(r) \left[\frac{\Delta \varepsilon^2}{e^2} + (\cos^2 \varphi - 1) \right]^{\frac{1}{2}} + \cos \varphi \right\} \quad (4,3)$$

Die Größe $\Delta \varepsilon$ in (4,3) ist mit dem Akzeptanzwinkel $\Delta \Theta_4$ durch

$$\Delta \varepsilon = | \vec{P}_4^{el.} | \sin \Theta_4 \quad (4,4)$$

verknüpft, während e sich in der Form

$$e = \alpha \Delta E_3' \quad (4,5)$$

schreiben läßt, wobei wir für α aus Fig. 6 die Beziehung

$$\alpha \approx \sin [\chi (\vec{P}_3^{el.}, \vec{P}_4^{el.})] \quad (4,6)$$

entnehmen können. Die erste Gleichung (3,22) nimmt somit die Form

$$\alpha \frac{ \left\{ S(r) \left[\frac{\Delta \varepsilon^2}{e^2} + (\cos^2 \varphi - 1) \right]^{\frac{1}{2}} + \cos \varphi \right\} }{\sin \vartheta} = \frac{\lambda}{1 + \beta_4^{el.} \cdot \cos \vartheta} \quad (4,7)$$

an. Elementare Umformung ergibt wegen $S^2(r) = 1$

$$\Delta E_3(\vartheta, \varphi) = \frac{\Delta \varepsilon}{\alpha} (1 + \beta_4^{el.} \cdot \cos \vartheta) \left\{ \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \sin^2 \vartheta - \frac{2\lambda}{\alpha} \sin \vartheta (1 + \beta_4^{el.} \cdot \cos \vartheta) \cos \varphi + (1 + \beta_4^{el.} \cdot \cos \vartheta)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (4,8)$$

Aus der zweiten Gleichung (3,22) folgt mit (4,1) und (4,8)

$$K_3(\vartheta, \varphi) = \frac{\lambda}{\alpha} \Delta \varepsilon \left\{ \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \sin^2 \vartheta - \frac{2\lambda}{\alpha} \sin \vartheta (1 + \beta_4^{el.} \cdot \cos \vartheta) \cos \varphi + (1 + \beta_4^{el.} \cdot \cos \vartheta)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (4,9)$$

Nach (3,23) erhält man aus (4,9) durch die Reflektion $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$, d.h. $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ für $K_{10}(\vartheta, \varphi)$ die Gleichungen:
 $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$

$$K_{10}(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} \frac{\lambda \Delta E}{\alpha} \left\{ \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \sin^2 \vartheta + \frac{2\lambda}{\alpha} \sin \vartheta (1 - \beta_4^{\text{el.}} \cos \vartheta) \cos \varphi \right. \\ \quad \left. + (1 - \beta_4^{\text{el.}} \cos \vartheta)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} & \text{für } \Delta E_3'(\vartheta, \varphi) \leq \Delta E_3 \\ \frac{\lambda \Delta E_3}{1 - \beta_4^{\text{el.}} \cos \vartheta} & \text{für } \Delta E_3'(\vartheta, \varphi) \geq \Delta E_3 \end{cases} \quad (4,10)$$

Für die Phasenraumbegrenzung $K_4[\Omega]$ bezogen auf die raumfeste Polarachse $\vec{P}_4^{\text{el.}}$; ergibt sich schließlich das Gleichungssystem:

$$K_4(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} K_{10}(\vartheta, \varphi) & \text{für } (|\vec{P}_4^{\text{el.}}| - [|\vec{P}_4^{\text{el.}}|^2 + K_{10}^2 - 2|\vec{P}_4^{\text{el.}}| K_{10} \cos \vartheta]^{1/2}) \\ & \leq \Delta |\vec{P}_4| \\ \omega_B(\vartheta, \varphi) & \text{für } (|\vec{P}_4^{\text{el.}}| - [|\vec{P}_4^{\text{el.}}|^2 + K_{10}^2 - 2|\vec{P}_4^{\text{el.}}| K_{10} \cos \vartheta]^{1/2}) \\ & \geq \Delta |\vec{P}_4| \\ \text{mit:} \\ (|\vec{P}_4^{\text{el.}}| - [|\vec{P}_4^{\text{el.}}|^2 + \omega_B^2 - 2|\vec{P}_4^{\text{el.}}| \omega_B \cos \vartheta]^{1/2}) = \Delta |\vec{P}_4| \end{cases} \quad (4,11)$$

Im Falle $\Omega_3 \neq \Omega_3'$, d.h. $\Delta \Phi_3 \neq 0, \Delta \Theta_3 \neq 0$ haben wir den Bemerkungen in § 3 gemäß die Gleichung (4,3) zu modifizieren, und zwar durch Ersetzung der Art

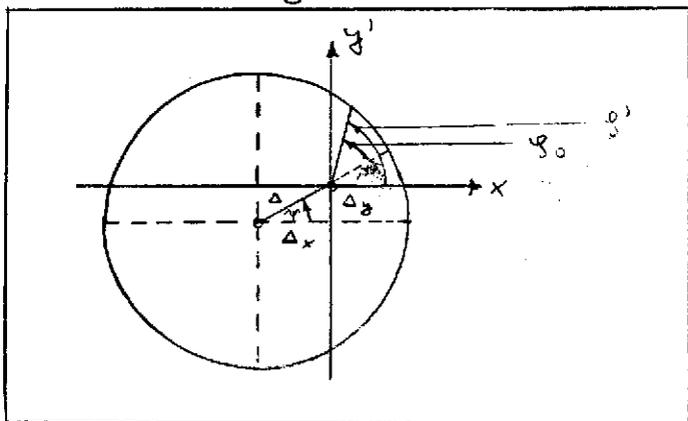


Fig. 21

$$\Delta \varepsilon \rightarrow \Delta \varepsilon(\varphi') \quad (4,12)$$

Mit den Bezeichnungen aus Fig. 21 gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon(\varphi') &= [\Delta \varepsilon^2 + (\cos^2 \varphi_0 - 1) \Delta^2]^{1/2} - \Delta \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 &= \cos \varphi' \cos \gamma + \sin \varphi' \sin \gamma \\ \Delta^2 &= \Delta_x^2 + \Delta_y^2, \quad \tan \gamma = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \end{aligned} \quad (4,13)$$

Die Größen Δ_x und Δ_y sind dabei mit den Parametern $\Delta \Theta_3'$ und $\Delta \Phi_3'$ verknüpft durch:

$$\Delta_x \approx |\vec{P}_4^{\text{el.}}| \sin [\Delta \Theta_4^{\text{el.}} (\Delta \Theta_3')]; \quad \Delta_y \approx |\vec{P}_4^{\text{el.}}| \frac{\sin \Delta \Phi_3'}{\sin \Theta_4^0} \quad (4,14)$$

Mit der Ersetzung (4,12) läßt sich Gleichung (4,7) nicht mehr explizite nach $\Delta E_3'(\vartheta, \varphi)$ auflösen; die Mantelfläche $K_B(\vartheta, \varphi)$ kann nicht in einfacher Weise angegeben werden.

Für diejenigen $\Delta E_3'$ jedoch, die der Relation $\alpha \Delta E_3' \ll \Delta \varepsilon$ genügen, fallen die Systeme (ϑ, φ, Z) , (x, y', Z') nahezu zusammen, und wir können schreiben

$$\Delta \varepsilon \rightarrow \Delta \varepsilon(\varphi'); \quad \varphi' \approx \varphi \quad (4,15)$$

Die Näherung (4,15) ist gut zumindest in der Umgebung $\vec{k} - 0$, in einem Teil des Phasenraumes also, von dem $\delta[K_1(\omega)]$ empfindlich abhängt.

Andererseits hat sich gezeigt, daß die Bedingung $\alpha \Delta E_3' \ll \Delta \varepsilon$ für die in dieser Arbeit berücksichtigten Energie-, Streuwinkel- und Parameterwerte in den meisten Fällen sogar für alle $\Delta E_3' \leq \Delta E_3$ erfüllt ist.

Die Näherung (4,15) erscheint daher angemessen zur Beschreibung von $\delta[K_1(\omega)]$ in Abhängigkeit von $\Delta \Phi_3'$ und $\Delta \Theta_3'$.

3. $i \neq l, i, l \neq 2$

Dieser Fall läßt sich durch Modifikation der in (1) und (2) verwandten Methode lösen.

a) Wir schreiben $S_{ie}(\vartheta, \varphi)$ aus (4,19) in der Form

$$S_{ie}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2 - (\beta_i \dot{P}_i + \beta_l \dot{P}_l) \frac{\vartheta}{k}} \left\{ \frac{1}{1 - \beta_i \dot{P}_i \frac{\vartheta}{k}} + \frac{1}{1 - \beta_l \dot{P}_l \frac{\vartheta}{k}} \right\} \quad (4,30)$$

Dabei ist die Funktion $\frac{1}{2 - (\beta_i \dot{P}_i + \beta_l \dot{P}_l) \frac{\vartheta}{k}}$ für nicht zu kleine Winkel Θ_{ie} (Fig. 22) hinreichend schwach variabel. Mit den Definitionen

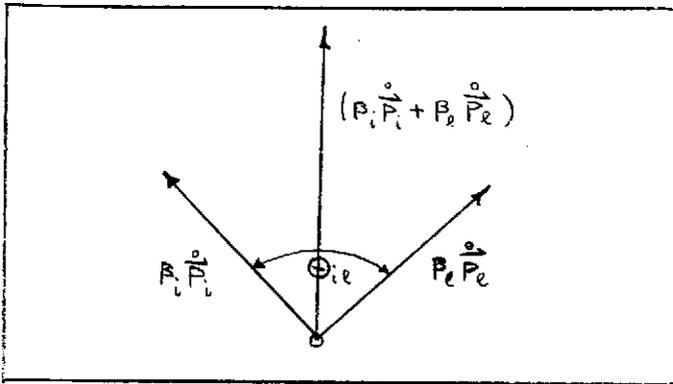


Fig. 22

$$d\mu_{ie}^{(1)} = \frac{\sin \vartheta}{(1 - \beta_i \dot{P}_i \frac{\vartheta}{k})} d\vartheta d\varphi \quad (4,31)$$

$$d\mu_{ie}^{(2)} = \frac{\sin \vartheta}{(1 - \beta_l \dot{P}_l \frac{\vartheta}{k})} d\vartheta d\varphi \quad (4,32)$$

verwenden wir deshalb die Darstellung

$$\bar{R}_{ie} = R_{ie}^{(1)} + R_{ie}^{(2)}$$

$$\bar{R}_{ie}^{(1)} \approx \sum_{vv'} \frac{\ln \frac{K_v(\vartheta_v, \varphi_v)}{K_0}}{2 - (\beta_i \dot{P}_i + \beta_l \dot{P}_l) \frac{\vartheta}{k} [\vartheta, \varphi]} \Delta_{vv'} \mu_{ie}^{(1)} \quad (4,33)$$

$$\bar{R}_{ie}^{(2)} \approx \sum_{vv'} \frac{\ln \frac{K_v(\vartheta_v, \varphi_v)}{K_0}}{2 - (\beta_i \dot{P}_i + \beta_l \dot{P}_l) \frac{\vartheta}{k} [\vartheta, \varphi]} \Delta_{vv'} \mu_{ie}^{(2)} \quad (4,34)$$

Zur Auswertung des Maßes $\Delta_{vv'} \mu_{ie}^{(1)}$ in (4,33) drehen wir die Polarachse in die Richtung von \dot{P}_i .

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_i^{(1)}(\vartheta', \varphi') \\ \varphi &= \varphi_i^{(1)}(\vartheta', \varphi') \end{aligned} \quad (4,35)$$

und erhalten

$$\Delta_{vv'} \mu_{ie}^{(1)} = \int_{\vartheta'}^{\vartheta'_{v+1}} \int_{\varphi'}^{\varphi'_{v+1}} d\varphi'' d\vartheta'' \frac{\sin \vartheta''}{1 - \beta_i \cos \vartheta''} \quad (4,36)$$

Drehung der Polarachse in die Richtung von \dot{P}_l in (4,34)

$$\vartheta = \vartheta_e^{(2)}(\vartheta', \varphi') ; \quad \varphi = \varphi_e^{(2)}(\vartheta', \varphi') \quad (4,37)$$

ergibt

$$\Delta_{v,v'} \mu_{ie}^{(2)} \int_{\vartheta'_v}^{\vartheta'_{v+1}} \int_{\varphi'_v}^{\varphi'_{v+1}} d\varphi'' d\vartheta'' \frac{\sin \vartheta''}{1 - \beta_e \cos \vartheta''} \quad (4,38)$$

b)

Für den Fall $l=4$ oder $\ell=4$ kann ein weiteres Verfahren angegeben werden, das für Primärenergien bis zu 6 GEV gewisse technische Vorteile bietet.

Zunächst transformieren wir ins Ruhensystem O_4 des elastisch gestreuten Protons; es sei etwa $\ell=4$, dann liefert diese spezielle Lorentz-Transformation in Richtung $\vec{p}_4^0 = \vec{p}_4$ folgende Formeln

$$\vec{p}_i^0 \longrightarrow \vec{p}_i' ; \quad \beta_i \rightarrow \beta_i' \quad (4,39)$$

$$\cos \varphi = \cos \varphi' ; \quad \cos \vartheta = \frac{\beta_4 + \cos \vartheta'}{\beta_4 \cos \vartheta' + 1} \quad (4,40)$$

$$K_1(\vartheta, \varphi) \longrightarrow K_1'(\vartheta', \varphi') = K_1(\vartheta, \varphi) \frac{\gamma}{1 + \beta_4 \cos \vartheta'} \quad (4,41)$$

$$K_0 \longrightarrow K_0'(\vartheta', \varphi') = K_0 \frac{\gamma}{1 + \beta_4 \cos \vartheta'} \quad (4,42)$$

mit der Abkürzung

$$\gamma = (1 - \beta_4^2)^{-1/2}$$

Bei der Bildung von $\ln \frac{K_1'}{K_0'}$ fällt der Faktor $\frac{\gamma}{1 + \beta_4 \cos \vartheta'}$ heraus, so daß die Transformation $\ln \frac{K_1'}{K_0'} \rightarrow \ln \frac{K_1'}{K_0'}$ allein durch (4,40) gegeben ist.

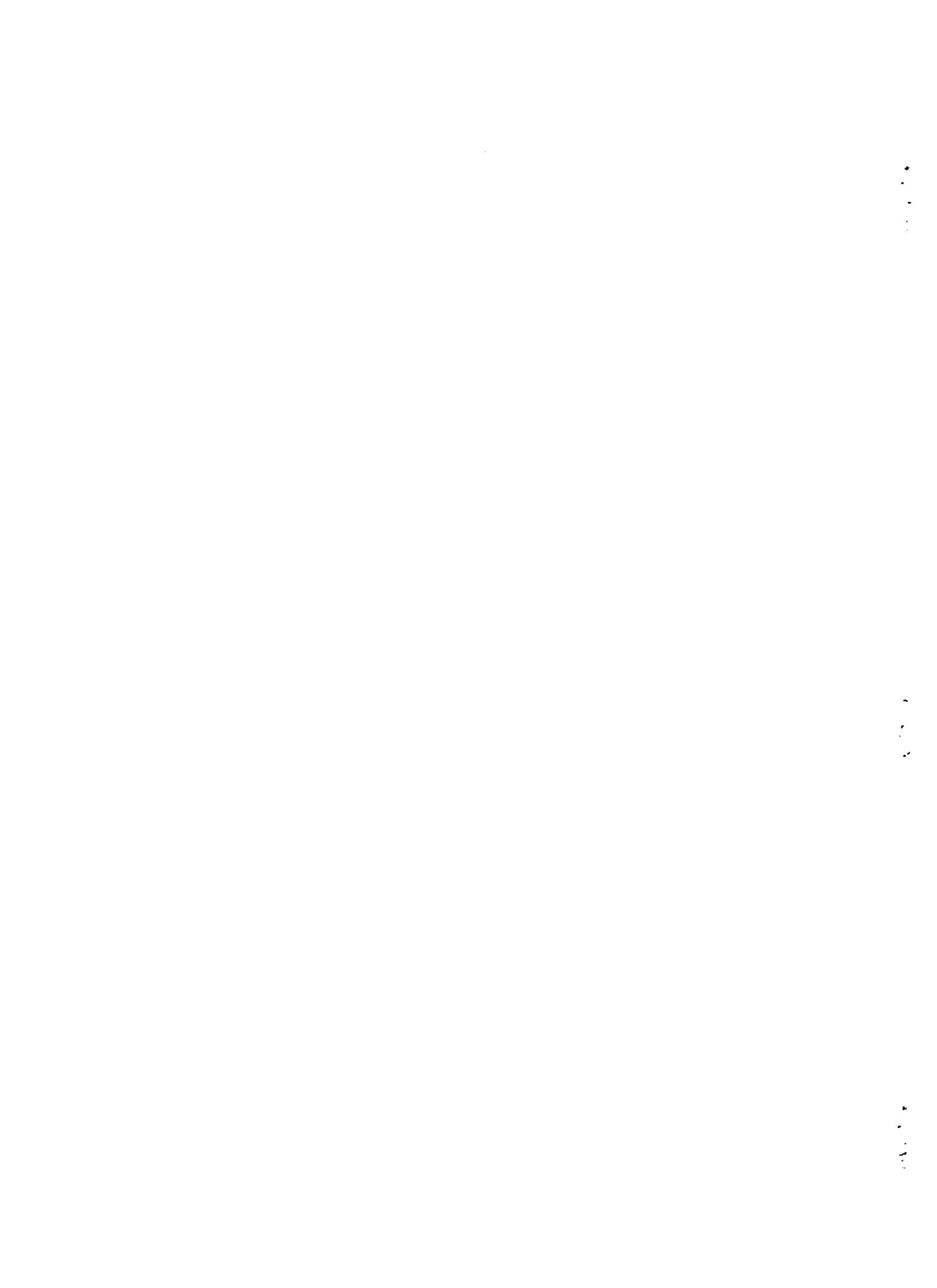
Da in dem angegebenen Energiebereich für das gestreute Proton $1 - \beta_4 \approx 10^{-2}$ gilt, sind die Funktionen (4,40) hinreichend glatt, so daß eine Summation der Art (4,22) angebracht ist. In O_4 ist der Ausdruck $(1 - \beta_e \frac{p_e}{\hbar})$ im Nenner von (4,19) winkelunabhängig. Eine Drehung der Polarachse in der Richtung von \vec{p}_i' :

$$\vartheta' = \vartheta'_i(\vartheta'', \varphi'') \quad (4,43)$$

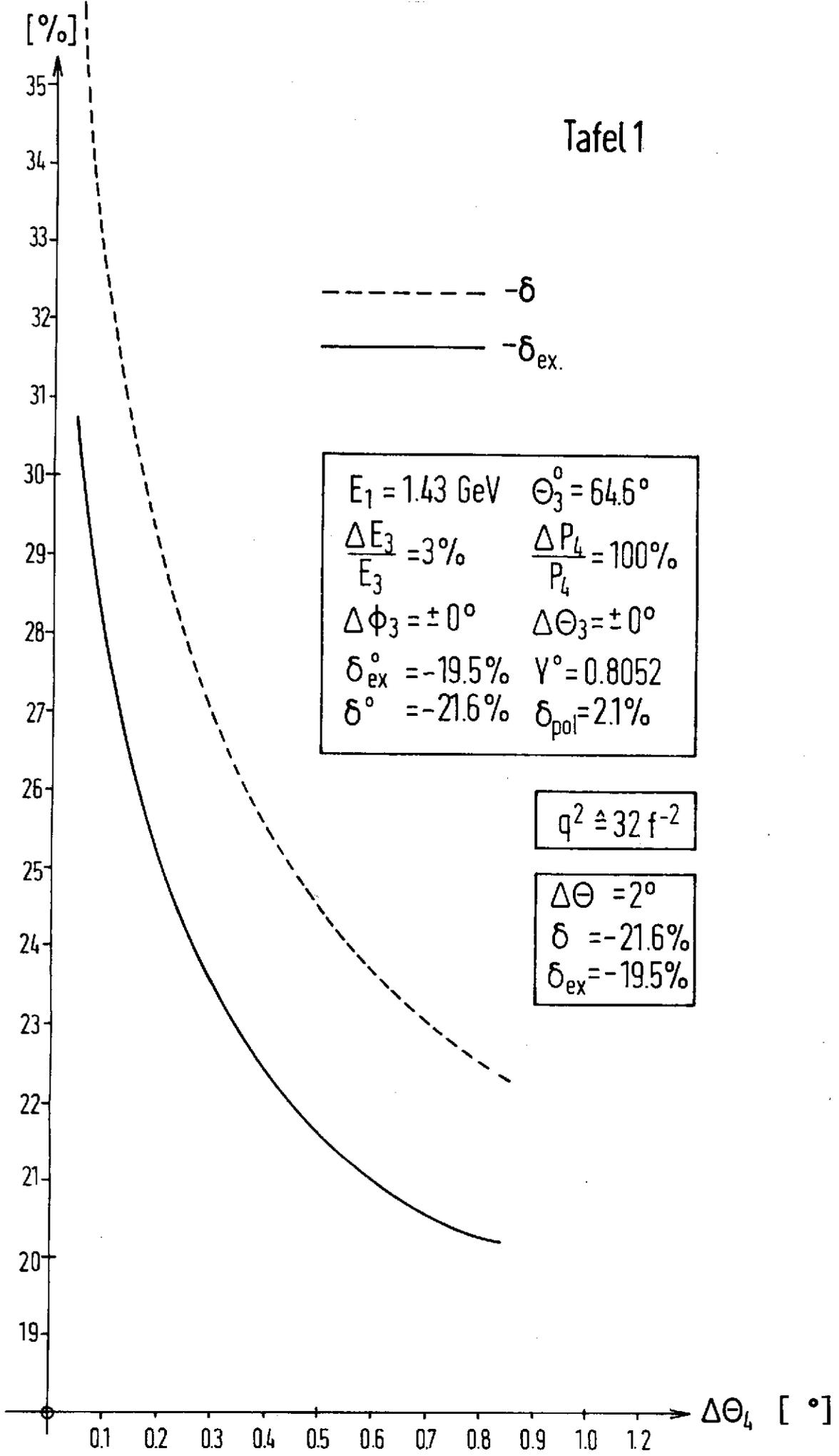
$$\varphi' = \varphi'_i(\vartheta'', \varphi'')$$

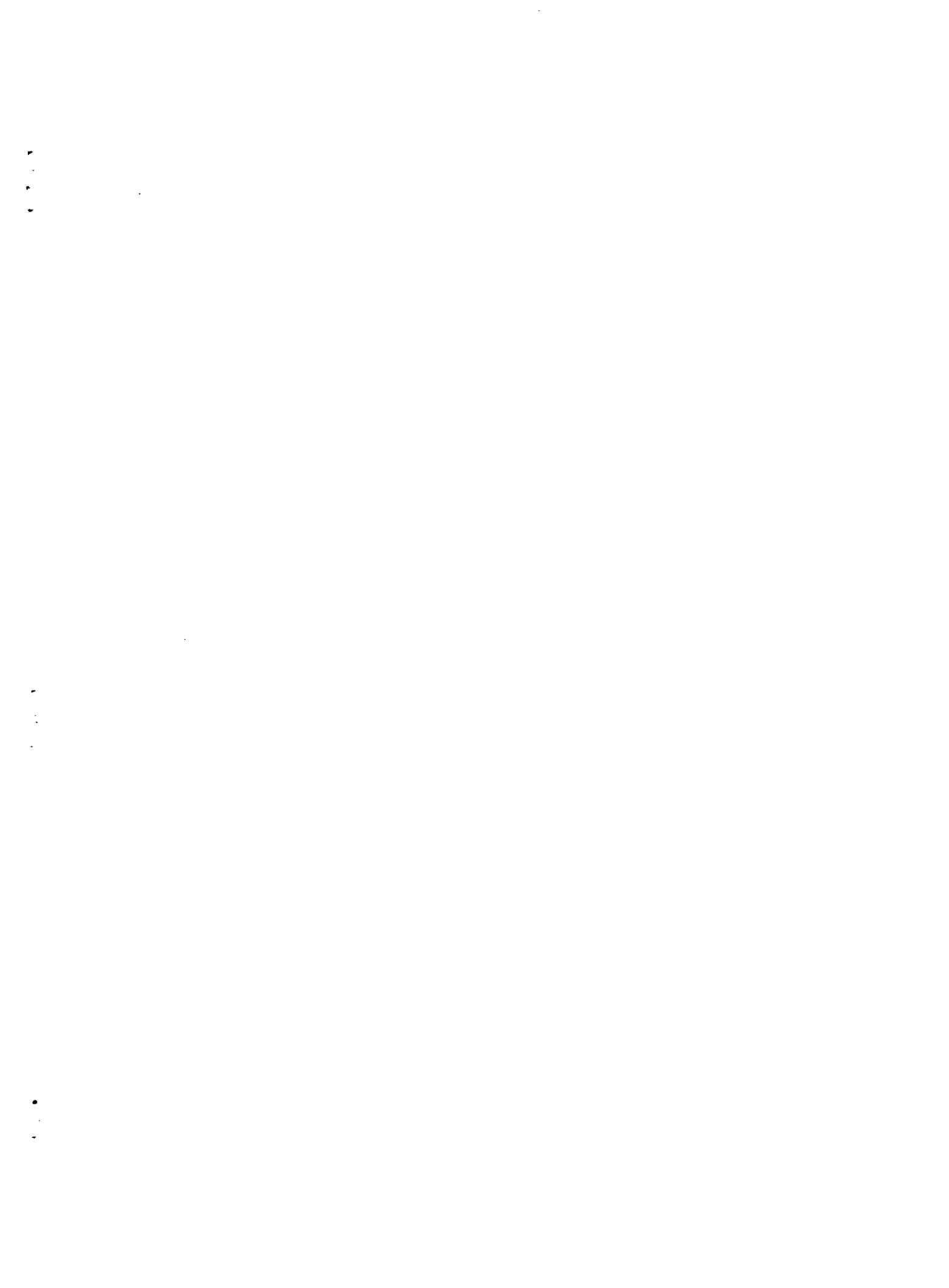
ergibt für das Stieltzsche Maß das elementare Integral:

$$\Delta_{v,v'} \mu_{ie} \int_{\vartheta''_v}^{\vartheta''_{v+1}} \int_{\varphi''_v}^{\varphi''_{v+1}} d\vartheta'' d\varphi'' \frac{\sin \vartheta''}{1 - \beta_e \cos \vartheta''} \quad (4,44)$$



Tafel 1



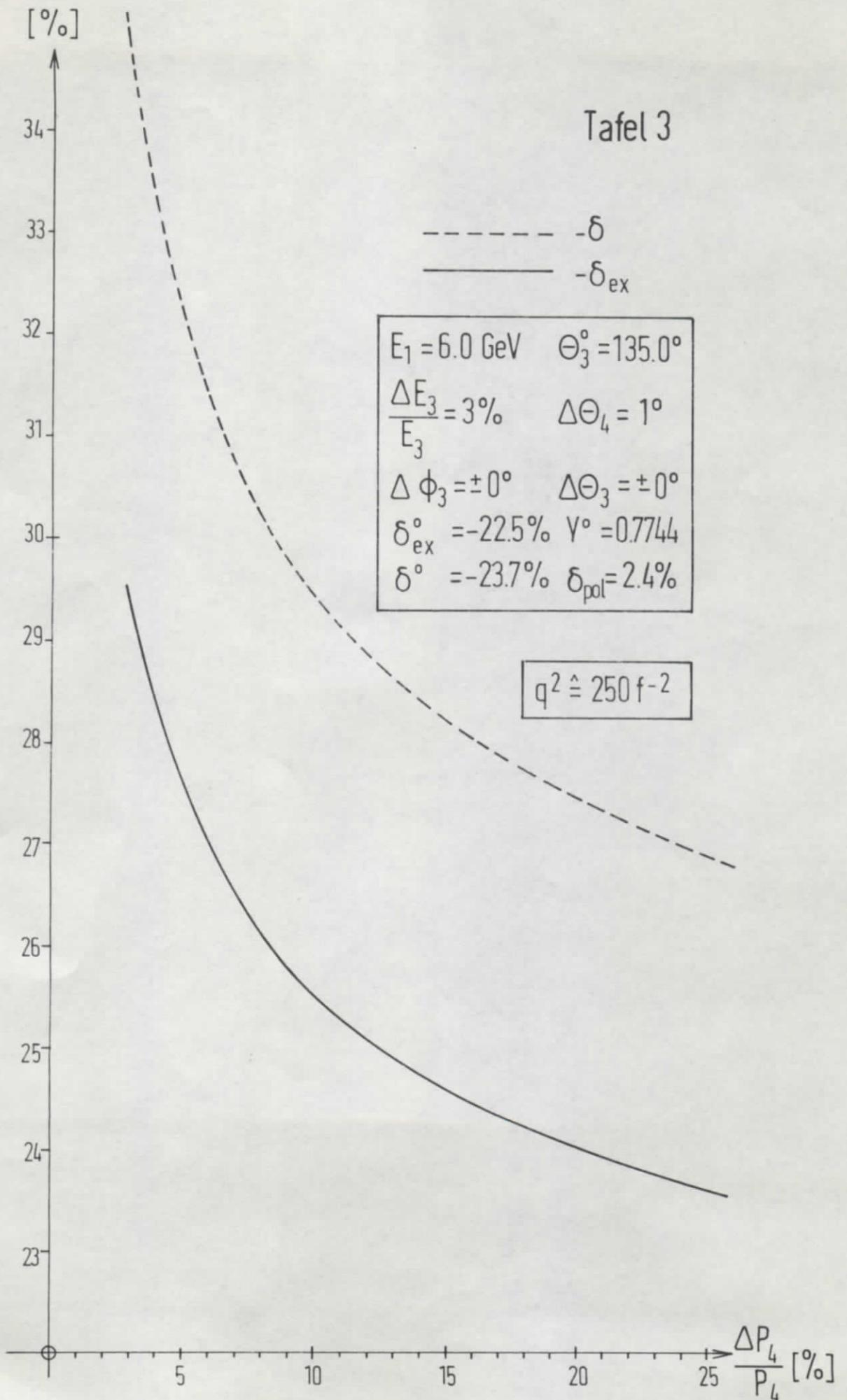


•
•
•
•

•
•
•

•
•
•
•

Tafel 3



2
3
4

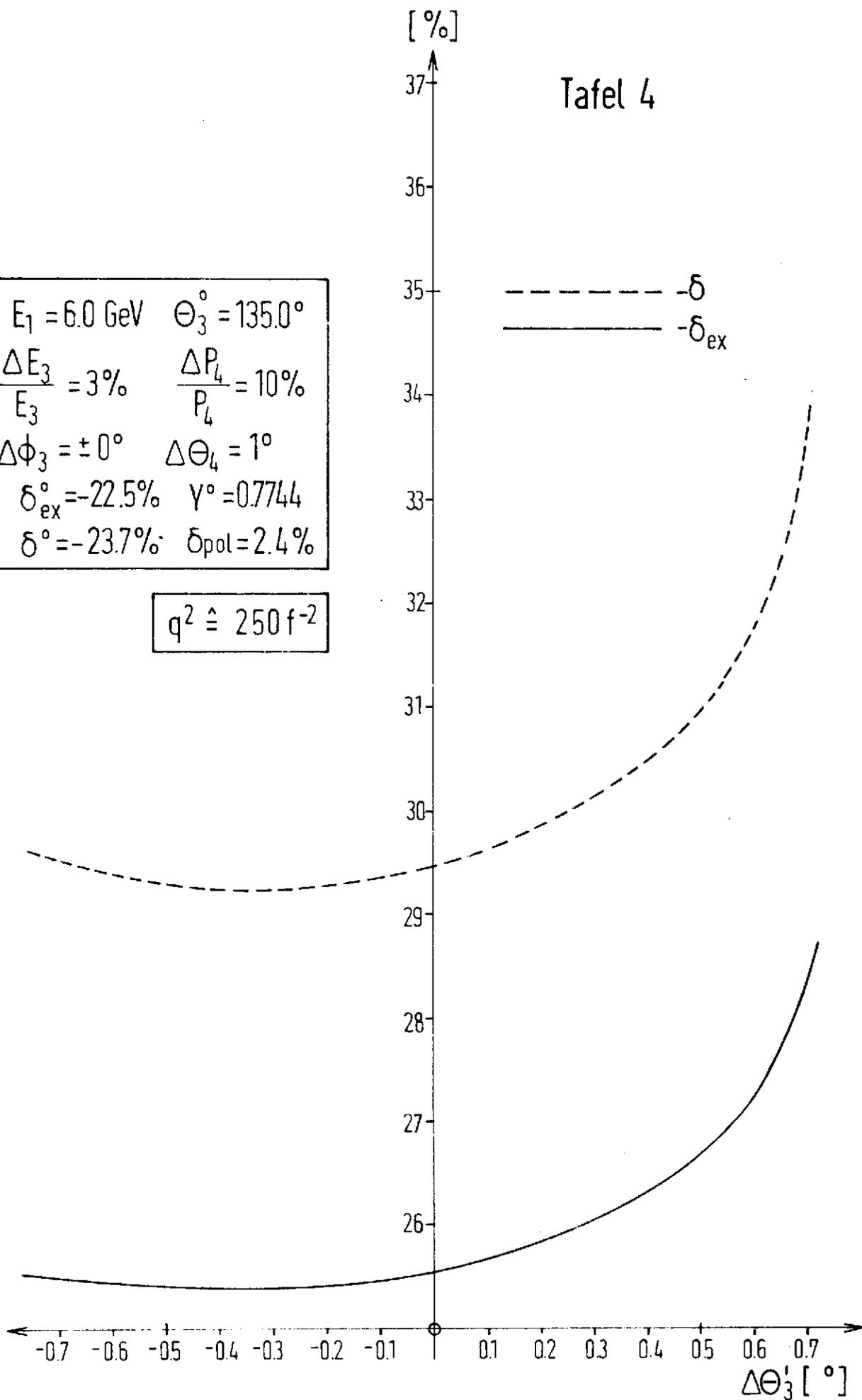
5
6
7

8
9
10

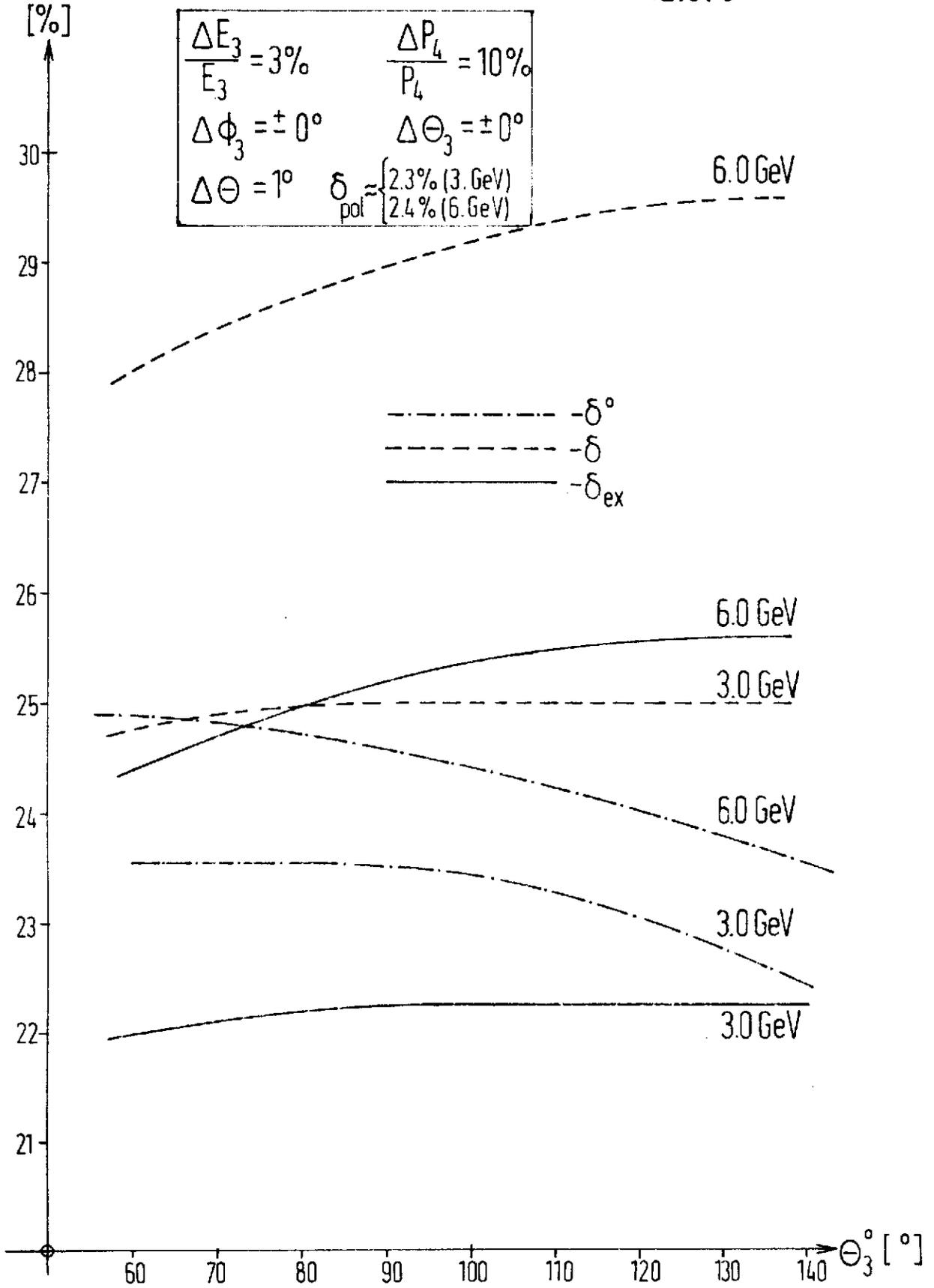
Tafel 4

$E_1 = 6.0 \text{ GeV}$	$\Theta_3^\circ = 135.0^\circ$
$\frac{\Delta E_3}{E_3} = 3\%$	$\frac{\Delta P_4}{P_4} = 10\%$
$\Delta\phi_3 = \pm 0^\circ$	$\Delta\Theta_4 = 1^\circ$
$\delta_{\text{ex}}^\circ = -22.5\%$	$\gamma^\circ = 0.7744$
$\delta^\circ = -23.7\%$	$\delta_{\text{pol}} = 2.4\%$

$q^2 \hat{=} 250 \text{ f}^{-2}$



Tafel 5

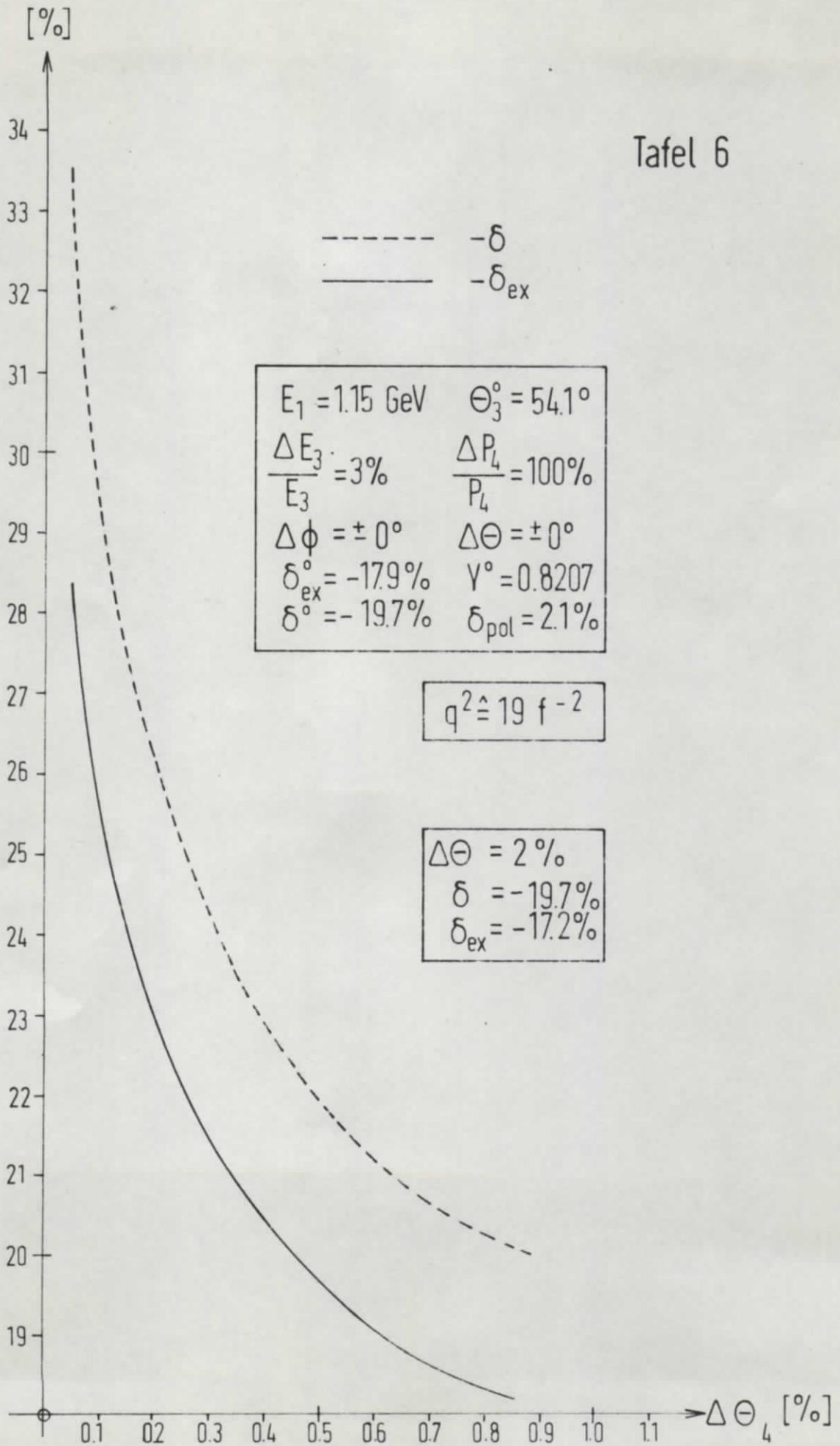


•
•
•

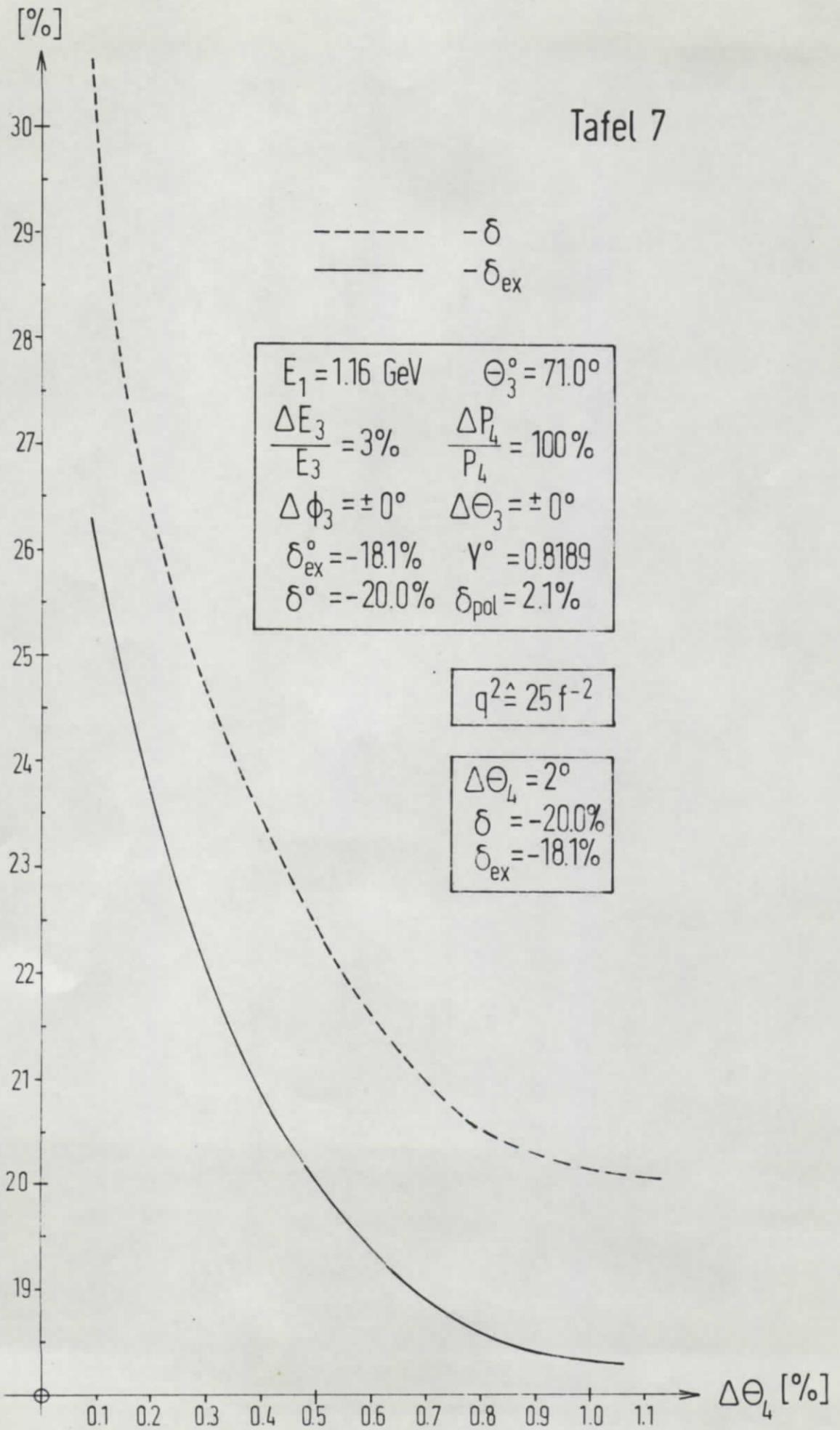
•
•
•

•
•
•

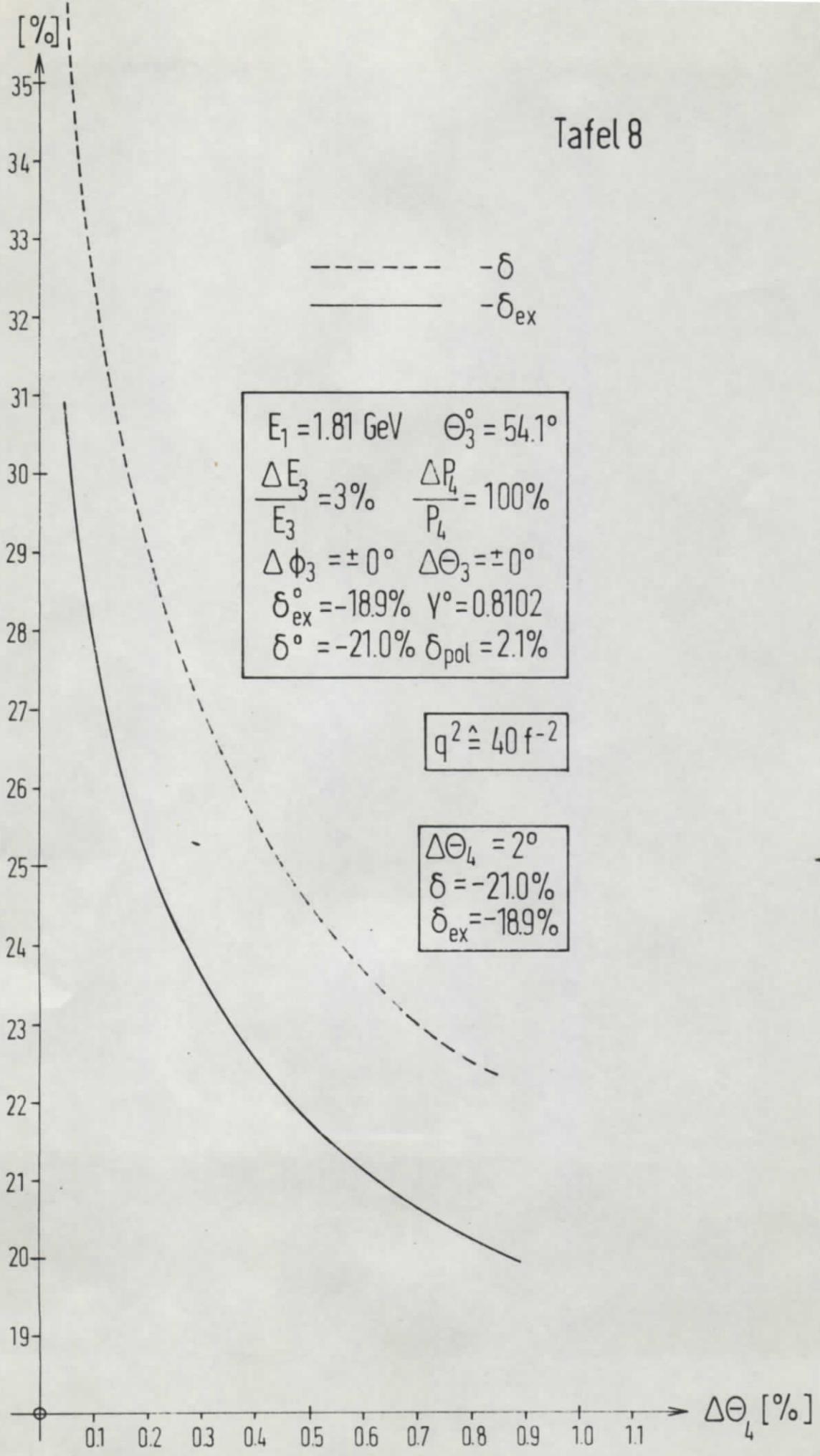
Tafel 6



Tafel 7



Tafel 8

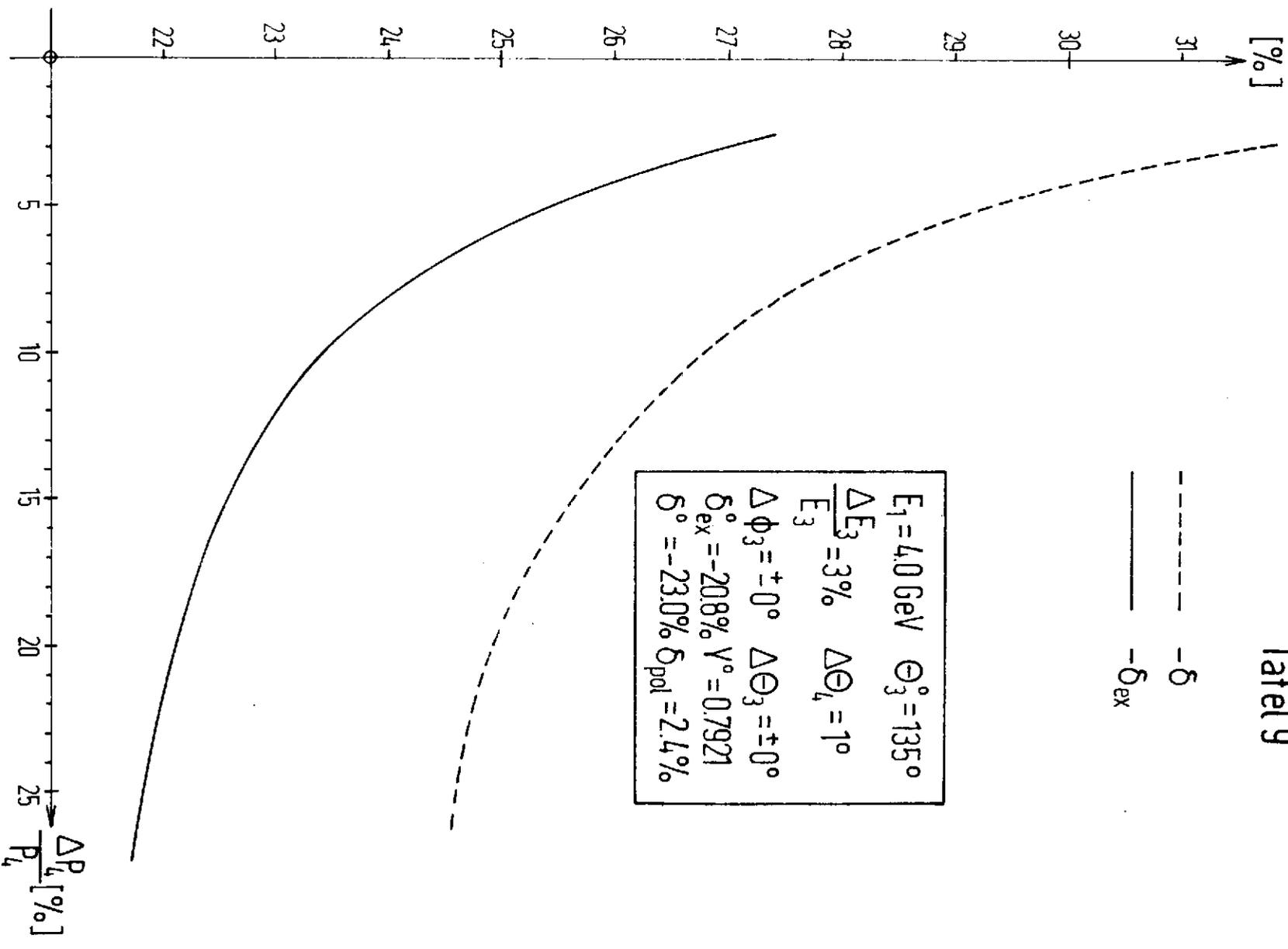


100

100

100

Tafel 9

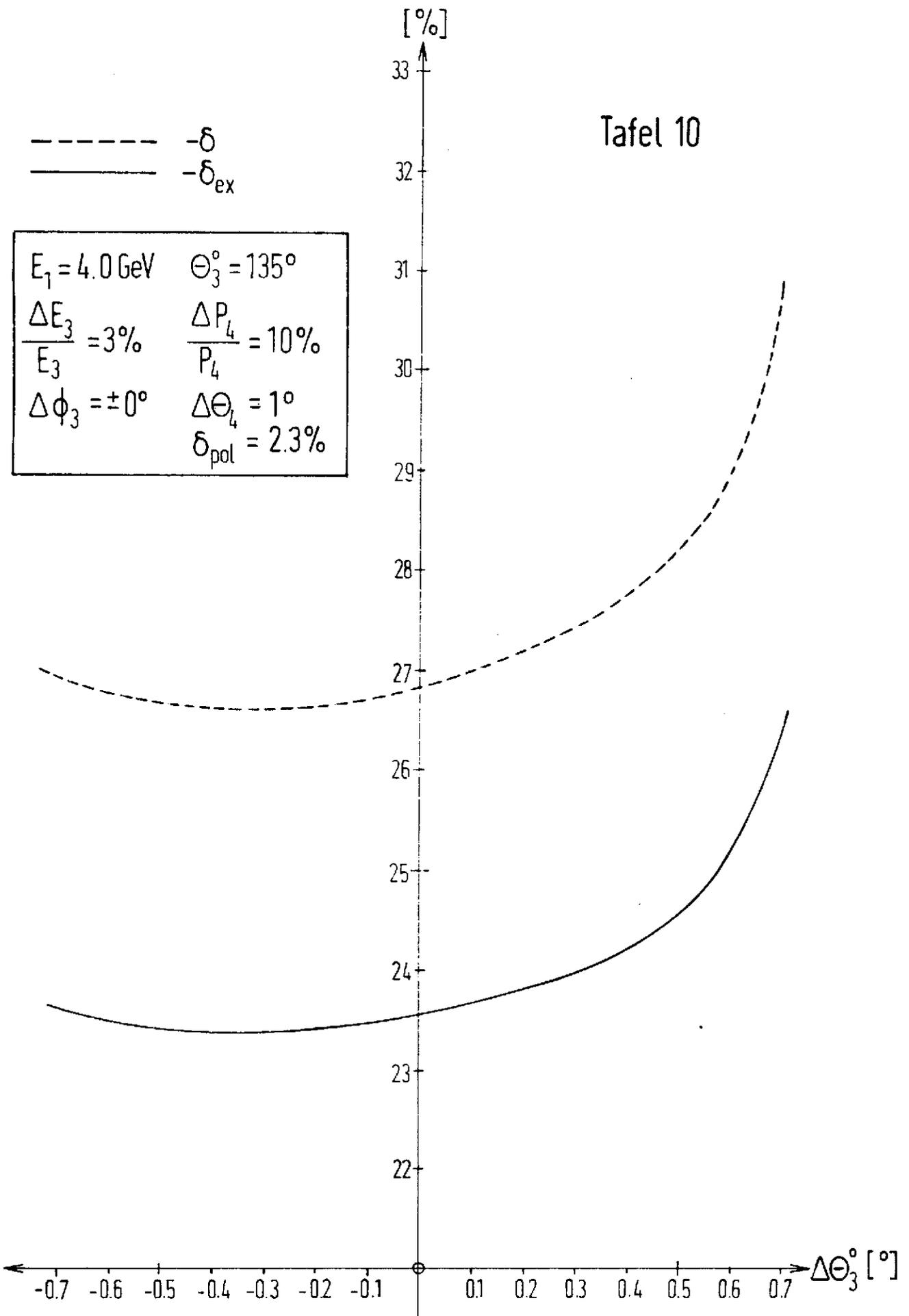


10

11

12

Tafel 10

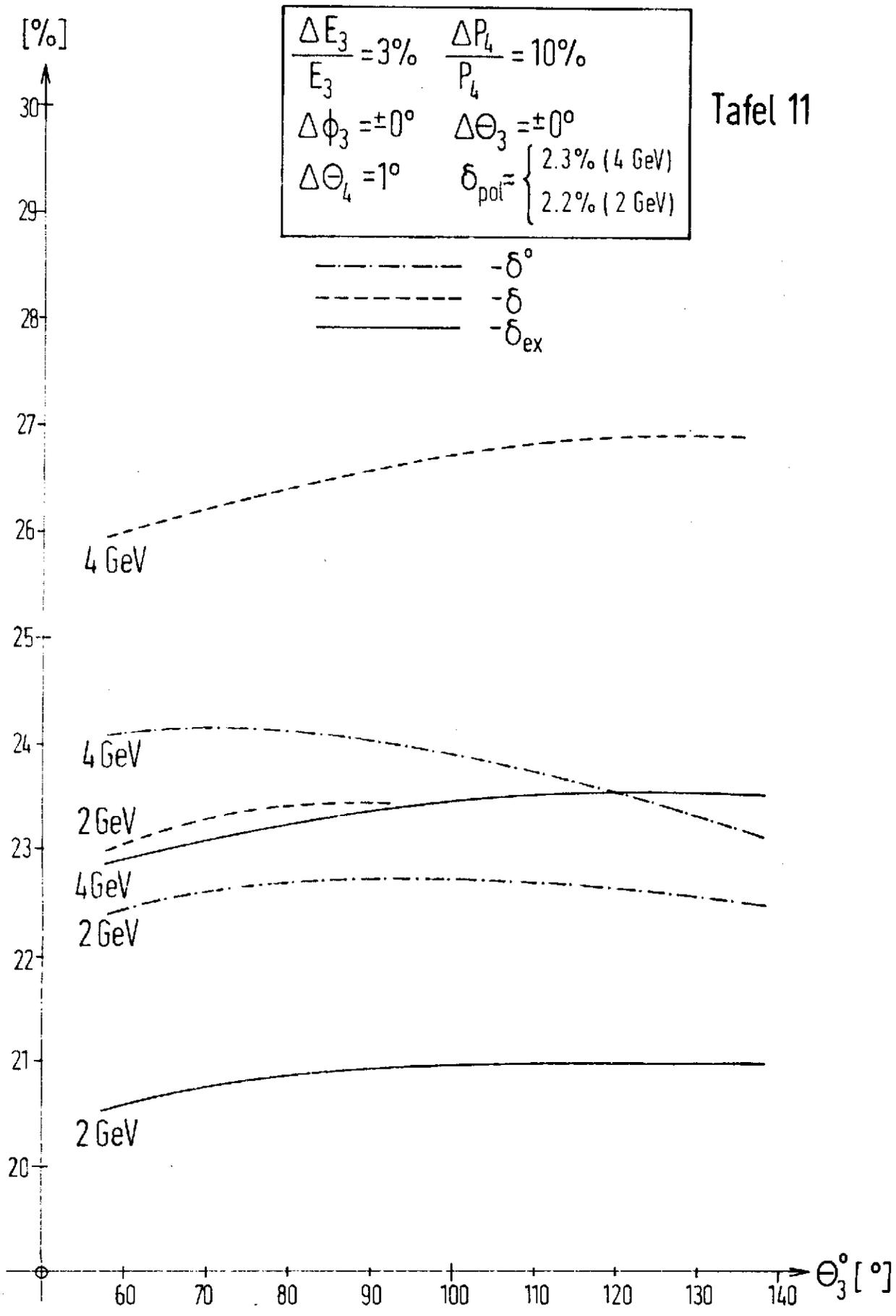


100

100

100

Tafel 11



11

12

13