

DESY-Bibliothek
24. FEB. 1966

DEUTSCHES ELEKTRONEN - SYNCHROTRON **DESY**

DESY 66/2
Februar 1966
Theorie

Photoerzeugung von π -Mesonen
II. Teil

Vorlesung, gehalten im Sommersemester 1964

von

P. Stichel

Physikalisches Staatsinstitut der
Universität Hamburg

Ausgearbeitet von

G. Köpp, R.D. Kohaupt, K. Schilling, M. Scholz, P. Söding, G. Wolf

2 HAMBURG 52 · NOTKESTIEG 1

Photoerzeugung von π -Mesonen

II. Teil

Vorlesung, gehalten im Sommersemester 1964

von

P. Stichel

Physikalisches Staatsinstitut der
Universität Hamburg

Ausgearbeitet von

G. Köpp, R.D. Kohaupt, K. Schilling, M. Scholz, P. Söding, G. Wolf

DESY 65/2

A b s t r a c t

This is the second part of a lecture course on "Photoproduction of π -Mesons", given summer 1964 at the University of Hamburg. This second part is concerned with photoproduction of π -mesons in the BeV-region. The main topics are the foundation of the peripheral model and a detailed discussion of its application to photoproduction processes.

Vorwort

Das vorliegende Manuskript ist die Ausarbeitung einer im Sommersemester 1964 an der Universität Hamburg gehaltenen zweistündigen Vorlesung über "Photoerzeugung von π -Mesonen II". Diese Ausarbeitung schliesst unmittelbar an die Ausarbeitung des 1. Teiles (DESY 64/5, April 1964, Theorie sowie Fortschritte der Physik 13, 73 (1965)) an. Aus diesem Grunde erfolgte auch eine durchlaufende Numerierung der Kapitel, sodass dieser Teil II mit der Kapitelnummer 3 beginnt. Alle Hinweise im Text auf Kap. 1 oder 2 beziehen sich also auf den 1. Teil.

Diese Vorlesung befasste sich mit den Grundlagen des peripheren Modells und seiner Anwendung auf die Photoerzeugung von π -Mesonen im BeV-Bereich. Die heute mit DWBA bezeichnete approximative Behandlung der "final state interaction" in peripheren Prozessen befand sich im Sommer 1964 gerade erst in ihren Anfängen. Deshalb sind in dieser Vorlesung nur die Grundgedanken der DWBA enthalten, nicht aber die inzwischen ausgearbeiteten numerischen Details. Den neueren Arbeiten wurde i.A. nur durch einige Zusatzbemerkungen und Literaturhinweise Rechnung getragen.

Herrn P. Söding schulde ich besonderen Dank dafür, dass er im Rahmen dieser Vorlesung einen Vortrag über den Vergleich zwischen der Theorie und dem experimentellen Material für periphere Prozesse gehalten hat. Dieser Vergleich wurde durch die Herren Söding und Wolf in der vorliegenden Ausarbeitung (vergl. Kap. 3.3) auf den Stand von etwa Herbst 1965 gebracht, wofür ich beiden Herren danke.

Mein besonderer Dank gilt auch Fräulein Köpp sowie den Herren Kohaupt, Schilling und Scholz, welche viel Arbeit und Mühe für die Ausarbeitung der übrigen Kapitel der Vorlesung aufwandten.

3.) Peripheres Modell - Grundlagen ^{1),2),3)}

Einleitung

Der Begriff des peripheren Stosses im Unterschied zum zentralen Stoss beruht auf einer halbklassischen Vorstellung und lässt sich am einfachsten an einem Beispiel erläutern. Man betrachte einen Pion-Nukleon-Stoss $\pi + N \rightarrow X$.

a) Bei niedrigen Energien ($E_{\text{Lab}}^{\pi} \lesssim 1 \text{ GeV}$) dominieren die bekannten Resonanzen, d.h. die Kräfte sind überwiegend anziehender Natur. Nach unserer klassischen Vorstellung bedeutet dies: das Pion dringt als Folge der anziehenden Natur der Wechselwirkung in das Innere des Nukleons ein. Die Zentrifugalbarriere, die ein solches Eindringen verhindern könnte, ist in diesem Energiebereich vernachlässigbar, denn der klassische Drehimpuls ist $L_{\text{klass}} \simeq 1$ ($L_{\text{klass}} = k R$, wobei k der Impuls des stossenden Teilchens im CMS ist und R der Nukleonradius. In einer weniger klassischen Beschreibung ist R als die Reichweite der Kräfte zwischen Pion und Nukleon anzusehen. Numerisches:

0,8 aus den elektromagnetischen Formfaktoren

0,63 aus der Diffraktionsstreuung bei hohen Energien

Also überwiegt bei niedrigen Energien der zentrale Stoss.

b) Bei hohen Energien (BeV-Bereich) ist $L_{\text{klass}} > 1$ bzw. $\gg 1$; die Zentrifugalbarriere verhindert ein wesentliches Eindringen des Pions in das Nukleon; der Stoss ist peripher. Natürlich treten nach den Gesetzen der Quantenmechanik in geringerem Masse auch zentrale Stösse d.h. Stösse mit kleinem Drehimpuls auf, die dann z.B. durch das statistische Modell zu behandeln

sind. Eine entsprechende Einteilung ist seit langem in der Kernphysik bekannt ("Compound-Kernreaktionen" und "Direkte Kernreaktionen").

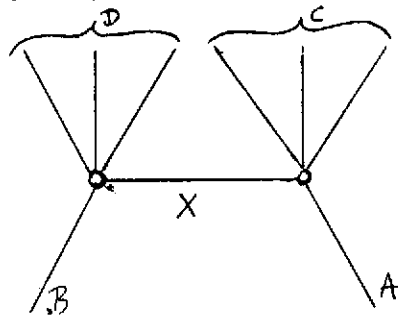
3.1 Definition des peripheren Modells

Im folgenden soll diese halbklassische Betrachtungsweise in die Sprache der Quantenmechanik bzw. der Feldtheorie übersetzt werden. In dem Prozess

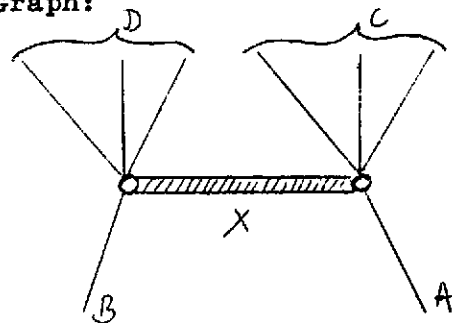


seien o.B.d.A. das Teilchen A das Projektil, B das Target und C und D jeweils ein Teilchen oder Teilchensystem. Die Übergangsamplitude der Reaktion sei $T = T(s, t)$.

Unter dem peripheren Modell versteht man nun die Approximation von T durch einen oder mehrere Einteilchen- Austausch-Beiträge, wobei die ausgetauschten Teilchen als "Elementar-Teilchen" oder als Regge-Pol auftreten können. Als Graph:



Elementarteilchen X



Reggepol X

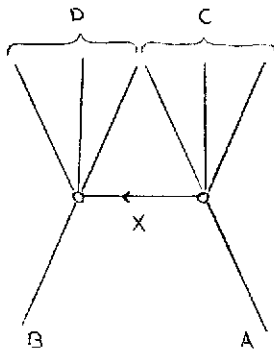
-Der Austausch des Teilchens X muss natürlich mit den Auswahlregeln (für Spin, Isospin, Strangeness usw.) im Einklang sein.

Früher war es üblich, nur dann vom peripheren Modell zu sprechen, wenn es sich dabei um das leichteste nach den Auswahlregeln überhaupt zugelassene Teilchen handelt.

Beispiel: $A = N, B = N; X = \pi, \rho, \omega, \dots$

Im folgenden Abschnitt 3.1.1 soll nun u.a. auf den Zusammenhang während dieser quantenmechanischen Definition des peripheren Modells und der Definition innerhalb einer halbklassischen Betrachtungsweise (s.o.) eingegangen werden.

3. 1. 1. Polapproximation



$$(3.1.11)$$

Es sei

$$S = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2$$

$$t = p_X^2 = (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2$$

An den beiden Vertizes des obigen Diagramms treten die beiden Amplituden $T_{B+X \rightarrow D}$ bzw. $T_{A+\bar{X} \rightarrow C}$ auf. Es handelt sich praktisch (bei skalarem Teilchen X genau) um die Übergangsamplituden der Prozesse $B + X \rightarrow D$ bzw. $A + X \rightarrow C$, wobei allerdings X nicht auf der Massenschale liegt: $p_X^2 \neq m_X^2$. Die Polapproximation * besteht nun darin, an beiden Vertizes p_X^2 auf die Massenschale zu nehmen:

$$T \sim T_{B + X \rightarrow D} \frac{1}{p_X^2 - m_X^2} T_{A + \bar{X} \rightarrow C} \quad (3.1.12)$$

Begründung für die Güte der Polapproximation

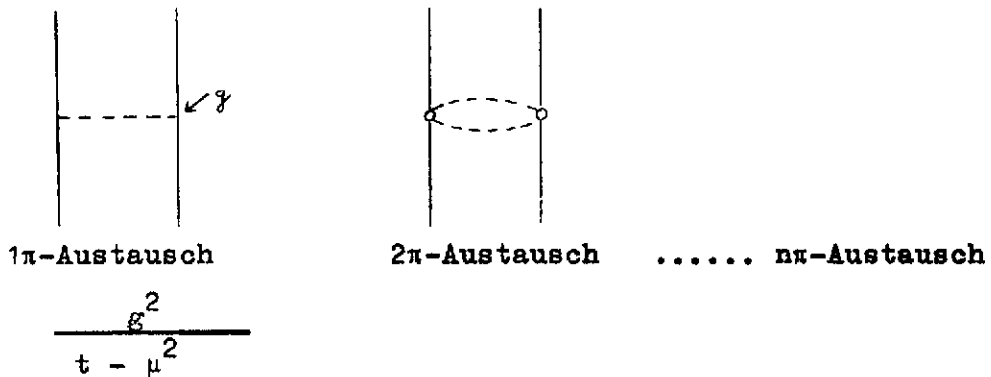
Der Einfachheit halber sollen im Folgenden sowohl A und B als auch C und D definierte skalare Teilchen sein.

* Es handelt sich um die später (S.13.) als Amplituden-Polapproximation bezeichnete Form der Polapproximation

1) Analytische Eigenschaften von $T(s,t)$ in t

Falls die Mandelstam-Darstellung richtig ist, gilt die Aussage: Alle Singularitäten in t von $T(s,t)$ liegen auf der positiven reellen Achse, wobei die $t_{\text{Sing.}}$ gleich der quadrierten Masse von ausgetauschten Teilchen (Pole) bzw. gleich der quadrierten Schwellenmasse von Teilchensystemen (Verzweigungspunkte) sind.

Beispiel: N - N - Streuung



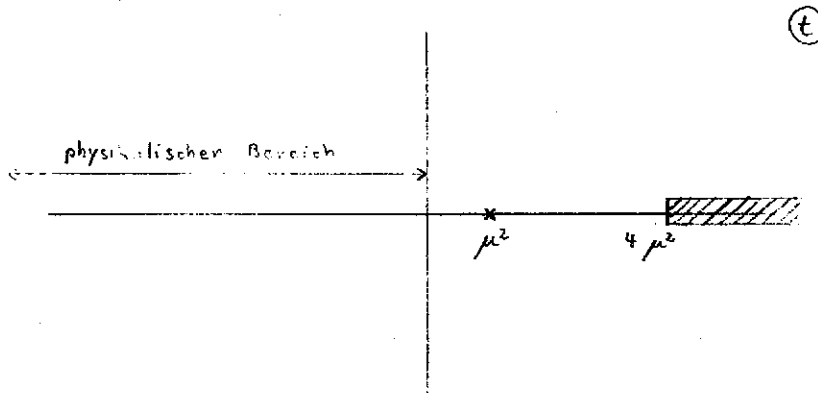
Beim 1π -Austausch liegt der Pol bei $t = \mu^2$. Das zugehörige Potential ist das Yukawa-Potential $V_{1\pi}(r) \frac{e^{-\mu r}}{r}$, denn dessen Fourier-Transformierte ist ja gerade $V(\underline{p}) \sim \frac{1}{p^2 - \mu^2} = \frac{1}{t - \mu^2}$. Man sieht dass der Stoss um so peripherer ist, je leichter das ausgetauschte Teilchen, je grösser also damit die Reichweite der Kräfte ist.

Beim 2π -Austausch ist der Verzweigungspunkt bei $t=4\mu^2$. Das Potential ist $V_{2\pi}(r) \sim \int_{2\mu}^{\infty} \rho(\sigma) \frac{e^{-\sigma r}}{r} d\sigma$; die Reichweite ist hier geringer (und sinkt mit der Anzahl der ausgetauschten π -Mesonen). Der Hauptbeitrag zu dieser Amplitude ist durch die ^{ρ} Resonanz der beiden Pionen zu erwarten.

2) Also gilt für $T(s, t)$ die folgende Darstellung

$$T(s, t) = \frac{\tilde{T}(s, t)}{t - \mu^2}, \quad (3.1.13)$$

wobei sich $\tilde{T}(s, t)$ in eine Potenzreihe um $t = \mu^2$ in einem Kreis mit dem mit dem Radius $3\mu^2$ entwickeln lässt; (das erste Glied dieser Entwicklung definiert dann die Polapproximation).



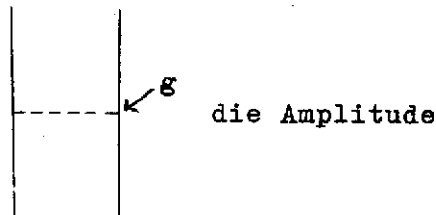
$$T(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) (t - \mu^2)^n \approx a_0(s) = a_0 \quad (3.1.14)$$

Das Abbrechen dieser Reihe nach dem 1. Glied ist natürlich nur dann möglich, wenn die höheren Koeffizienten $a_n(s)$ nicht zu gross werden und $-t_{\text{phys.}} \approx 0$ gilt.

Grundlage der Polapproximation sind also analytische Eigenschaften von T wie sie z.B. die Mandelstam-Darstellung liefert. Dass die Polapproximation nicht immer brauchbar ist, zeigt das Beispiel der elastischen Streuprozesse bei hohen Energien. Betrachten wir das Beispiel $N + N \rightarrow N + N$:

Einmal ist in der Polapproximation

$$T^{\text{Pol}} \sim g^2 \frac{1}{t - \mu^2} \quad \text{reell} \left(\frac{g^2}{4\pi} \approx 15 \right).$$



Zum anderen zeigt das Experiment, dass für $s \rightarrow \infty$ $T(s, t=0)$ fast rein imaginär wird: $\sigma_{tot}(N+N \rightarrow X)$ ist messbar; das optische Theorem besagt $\text{Im } T(s, t=0) = \frac{k\sqrt{s}}{4\pi} \sigma_{tot}(s)$ (mit der Normierung $T(s, t) = \frac{\sqrt{s}}{2ik} \sum_{\ell} (2\ell+1)(e^{2i\delta_{\ell}} - 1) P_{\ell}(\cos \theta)$, δ_{ℓ} komplex); der Vergleich der Messergebnisse von $\sigma_{el}(s, t=0) \sim |T(s, t=0)|^2$ mit σ_{tot} liefert dann die Phase von $T(s, t=0)$.

Nach einem einfachen optischen Modell ist $T(s, t)$ auch für $t \neq 0$ rein imaginär:

Man betrachtet als Wechselwirkungsvolumen eine Kugel vom Radius $R (\approx 0.63 \text{ fermi})$; wobei alle Partialwellen mit $L \leq L_{klass} = kR$ total absorbiert werden.

(Modell der schwarzen Kugel):

$$e^{2i\delta_{\ell}} = \begin{cases} 0 & \text{für } \ell \leq L_{klass.} \\ 1 & \text{für } \ell > L_{klass.} \end{cases}$$

also ist $T = -\frac{\sqrt{s}}{2ik} \sum_{\ell=0}^{L_{klass.}} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta)$ rein imaginär.

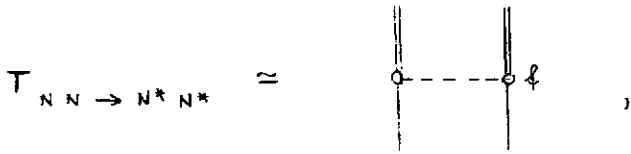
Dieses optische Modell ist das einfachste Modell für die bei hohen Energien und kleinen Streuwinkeln vorherrschende Schatten- oder Diffraktionsstreuung:

Die Absorption der Teilchen im Eingangskanal durch inelastische Prozesse ergibt via Unitarität den Hauptbeitrag zur elastischen Streuamplitude

$$-i T_{el} = \text{Im } T_{el} = T_{el} S_{el} T_{el}^* + \sum_{inel.} T_{inel.} S_{inel.} T_{inel.}^*$$

Betrachten wir z.B. für den N-NStoß den Energiebereich $p_{\text{lab}} \approx 2-3 \text{ GeV}/c$.

Der dominierende inelastische Prozess ist $N+N \rightarrow N^*+N^*$, den man recht gut im Rahmen des peripheren Modells beschreiben kann, d.h.



dabei sei g die Kopplungskonstante am πNN^* -Vertex, mit⁴⁾ $g^2 \approx 6\mu^{-2}$.

Nun zeigt eine kleine Rechnung, dass die πNN^* -Kopplung wesentlich stärker als die πNN -Kopplung ist (Kopplungskonstante g):

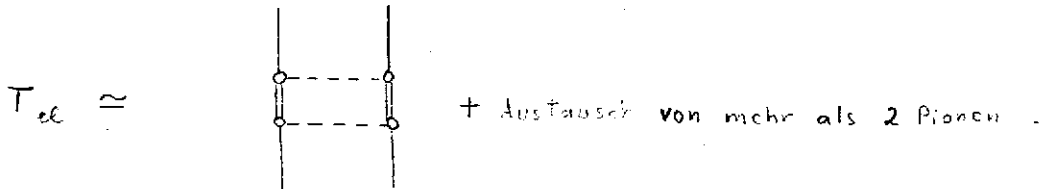
$$\frac{g^2 \sum_{\text{Spin}} |\bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1)|^2}{g^2 \sum_{\text{Spin}} |\bar{u}_\mu(p_2) (\not{p}_1 - \not{p}_2)^\mu u(p_1)|^2} \stackrel{t=0(\mu)}{\approx} \frac{-t}{6(-t + 4\mu^2)} \ll 1 \quad (3.1.15)$$

Dabei ist $u_\mu(p_2)$ die Wellenfunktion des Spin $3/2$ -Teilchens im Impulsraum im Rahmen des Rarita-Schwinger Formalismus⁴⁾:

$$(\not{p}_2 - M^*) u_\mu(p_2) = 0 \quad (3.1.16)$$

$$\gamma^\mu u_\mu(p_2) = 0$$

Also sind alle Feynman-Graphen, die die πNN -Kopplung enthalten, gegenüber solchen, in denen die πNN^* -Kopplung auftritt, vernachlässigbar, d.h. speziell der 1-Pionenaustausch ist gegenüber dem 2-Pionenaustauschbeitrag vernachlässigbar:



K i n e m a t i k

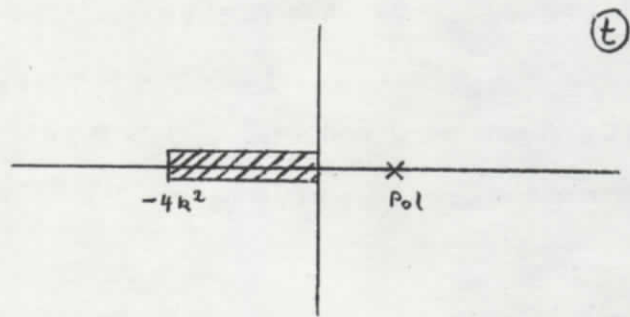
Für die Anwendung der Polapproximation bei einem beliebigen Prozess $A + B \rightarrow C + D$ (s.o.) interessieren Fragen wie die nach dem physikalischen Bereich von t , d.h. speziell, wie nahe t_{phys} an den Pol herankommt.

1) elastische Streuung

$A = C, B = D,$

$$t = (p_A - p_C)^2 \stackrel{\text{c.m.s.}}{=} (p_A - p_C)_0^2 - (p_A - p_C)^2 = -2k^2(1 - \cos \theta) \leq 0,$$

wobei $k = |p_A| = |p_C|$. Es ist $t(\theta=0) = 0$ und $t(\theta=\pi) = -4k^2$.



2) beliebiger Prozess

M_C und M_D sind formal als die Gesamtmasse der Systeme C bzw. D definiert, $t_{\min} |_{\theta=\pi} \leq t \leq t_{\max} |_{\theta=0}$

a) Es ist $\lim_{s \rightarrow \infty} t_{\max}(s) = 0$, denn

$$t = (p_A - p_C)^2 \stackrel{\text{c.m.s.}}{=} M_A^2 + M_C^2 - 2p_{A0} p_{C0} + 2|p_A||p_C| \cos \theta, \text{ d.h.}$$

$$t_{\max} \stackrel{\text{c.m.s.}}{=} t |_{\cos \theta = 1} = M_A^2 + M_C^2 - 2p_{A0} p_{C0} + 2|p_A||p_C|;$$

$$|p_A|^2 = \frac{(s - (M_A + M_B)^2)(s - (M_A - M_B)^2)}{4s}, \quad p_{A0} = \sqrt{M_A^2 - |p_A|^2};$$

$$t_{\max} = \frac{1}{2} \left[(M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2) - s - \frac{(M_A^2 - M_B^2)(M_C^2 - M_D^2)}{s} \right] + 2|p_A||p_C|.$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } 2|p_A||p_C| &= 2 \left\{ \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{s}} (M_A^2 + M_B^2) + O(s^{-3/2}) \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{s}} (M_C^2 + M_D^2) + O(s^{-3/2}) \right\} \\ &= \frac{s}{2} - (M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2) + O(s^{-1}) \end{aligned}$$

folgt $t_{\max} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} O(s^{-1})$ (3.1.17)

Ob nun $t \rightarrow +0$ oder $t \rightarrow -0$ richtig ist, hängt von den Massen der am Prozess beteiligten Teilchen ab.

b) Es gilt: $t > 0 \Rightarrow (M_A - M_C)(M_B - M_D) < 0$ ²⁾. Dies ist also eine notwendige Voraussetzung dafür, dass ein Teil des physikalischen t -Bereichs zeitartig ist. Zum Beweis unterscheidet man 2 Fälle.

Im ersten Fall sei $(p_A - p_C)_0 > 0$. Aus $p_A = (p_A - p_C) + p_C$ folgt

$$M_A^2 = M_C^2 + t + 2p_C(p_A - p_C), \text{ also } t = M_A^2 - M_C^2 - 2M_C(p_A - p_C)_0$$

im Ruhesystem von C. Wegen $t > 0$ und $(p_A - p_C)_0 > 0$ ist $M_A > M_C$.

Ebenso ergibt sich aus $p_D = (p_D - p_B) + p_B \Rightarrow M_D^2 = M_B^2 + t + 2p_B(p_A - p_C)$

$$\Rightarrow t = M_D^2 - M_B^2 - 2M_B(p_A - p_C)_0 \quad (\text{im Ruhesystem von B})$$

die Relation

$$M_D > M_B$$

Damit ist $(M_A - M_C)(M_B - M_D) < 0$ gezeigt.

Analog ist der Fall $(p_A - p_C)_0 < 0$ zu behandeln.

Als Beispiel betrachte man

$$\pi + N \rightarrow (\pi + N)_{M_D} > M_{\pi} + M_N$$

Es ist

$$t_{\max}(s) = \frac{1}{2} \left[(M^2 + M^2 + M_D^2) - s - \frac{(M^2 - M^2)M_D^2}{s} \right] + 2 \left[\frac{(s - (M - M^2)(s - (M + M^2)^2))}{4s} \right] \times \frac{s - M_D^2}{2\sqrt{s}}$$

a) weiche Photonen, $M_D^2 = s - \epsilon$ ($\epsilon > 0$, klein)

$$\begin{aligned} t_{\max}(s) &= \frac{1}{2} \left[(M^2 + M^2 + s - \epsilon) - s - \frac{(M^2 - M^2)(s - \epsilon)}{s} \right] + 2|p_A| \frac{\epsilon}{2\sqrt{s}} \\ &= M^2 - \epsilon \left[\frac{1}{2} - \frac{M^2 - M^2}{s} - 2|p_A| \frac{1}{2\sqrt{s}} \right] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} M^2 \end{aligned}$$

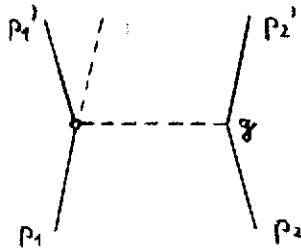
d.h. bei hohen Energien kommt man beliebig nahe an den Pol für den 1 Pion-Austausch heran. Allerdings ist dieser Fall experimentell kaum realisierbar.

B) harte Photonen

$$t_{max}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

Amplituden - und Wirkungsquerschnitt- Polapproximation

Wir haben oben die Amplituden - Polapproximation (APA) kennengelernt. Wir werden jetzt an Beispiel der Reaktion $N + N \rightarrow N + \frac{(N+\pi)}{N^*}$ eine andere Art der Polapproximation studieren, die bei mehr als zwei Teilchen im Endzustand andere Ergebnisse als die APA liefert und in der Literatur ^{2),3)}, vorwiegend benutzt wird. Beim Einteilchenaustauschgraphen



seien die Invarianten $s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_2 - p_2')^2, s' = (p_1 + q)^2, t' = (p_1 - p_1')^2$ definiert (die fünfte wird hier nicht benötigt). Man betrachte die APA

$$T_{2N \rightarrow 2N+\pi} \sim g \frac{1}{t - \mu^2} T_{\pi N}(s', t') \quad (3.1.19)$$

Es sei B das Gesamtschwerpunktsystem ($p_1 + p_2 = 0$)

B' das πN -Schwerpunktsystem ($p_1' + q = 0$)

Dann gilt für $d\sigma$ wenn nur p_2' im Experiment gemessen wird:

$$d^3\sigma_{2N \rightarrow 2N+\pi} \sim \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{p_2^B} \frac{d^3 p_2'}{p_{20}'} g^2 \frac{1}{(t - \mu^2)^2} \left(\frac{d^3 p_1' d^3 q}{p_{10}' q_0} |T_{\pi N}(s', t')|^2 \right) \times \delta(p_1' + q - (p_1 + p_2 - p_2')) \quad (3.1.20)$$

Bei der hier auszuführenden Integration hängen die Phasenraumgrenzen explizit von t ab. Und zwar ist

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}^{\text{RN}}(s') &\sim \lim_{t \rightarrow \mu^2} \frac{1}{\sqrt{s} p_1^{\text{B}}} \int \frac{d^3 p_1' d^3 q}{p_{10}' q_0} |T_{\text{RN}}(s', t')|^2 \delta(p_1' + q - (p_1 + p_2 - p_2')) = \\ &\lim_{t \rightarrow \mu^2} \frac{1}{\sqrt{s} p_1^{\text{B}}} \int \frac{d^3 p_1'}{\sqrt{M^2 + p_1'^2} \sqrt{\mu^2 + p_1'^2}} |T_{\text{RN}}(s', t')|^2 \delta(\sqrt{M^2 + p_1'^2} + \sqrt{\mu^2 + p_1'^2} - \sqrt{s'}) \Big|_{\text{B}'} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Mit $d^3 p_1' = d\phi d\cos\theta' |p_1^{\text{B}'}|^2 d|p_1^{\text{B}'}|$ (z-Achse in Richtung um $p_1^{\text{B}'}$),

$$t' = 2M^2 - 2p_{10}^{\text{B}'} p_{10}^{\text{B}'} + 2|p_1^{\text{B}'}| |p_2^{\text{B}'}| \cos\theta',$$

$$dt' = 2|p_2^{\text{B}'}| |p_1^{\text{B}'}| d\cos\theta',$$

$$t'_{\text{max}} = t'(\theta' = 0), \quad t'_{\text{min}} = t'(\theta' = \pi),$$

wird

$$\int_{-1}^1 d\cos\theta' |T_{\text{RN}}(s', t')|^2 = \frac{1}{2|p_1^{\text{B}'}| |p_2^{\text{B}'}|} \int_{t'_{\text{min}}}^{t'_{\text{max}}} dt' |T_{\text{RN}}(s', t')|^2 \quad (3.1.22)$$

Mit

$$|p_1^{\text{B}'}|^2 = \frac{(s' - (M + \sqrt{\epsilon})^2)(s' - (M - \sqrt{\epsilon})^2)}{4s'} \quad (3.1.23)$$

hängen aber die Grenzen $t'_{\text{max, min}}$ explizite von t ab. $d^3\sigma$ ist also nur dann proportional dem physikalischen $\sigma_{\text{tot}}(s')$, wenn man dieses t in den Phasenraumgrenzen gegen μ^2 gehen lässt. Man macht also neben der die APA definierende Näherung $T_{\text{RN}}(s', t', t) \rightarrow T_{\text{RN}}(s', t')$ eine weitere Näherung in den Phasenraum-grenzen und nennt diese Form der Polapproximation die

Wirkungsquerschnitt-Polapproximation (WPA):

$$\lim_{t \rightarrow \mu^2} \int_{-1}^1 d\cos\theta' |T_{\text{RN}}(s', t')|^2.$$

Dann wird

$$d^3\sigma_{\text{RN} \rightarrow \text{RN} + \sigma} \sim \frac{d^3 p_1'}{p_{10}'} g^2 \frac{1}{(t - \mu^2)^2} \frac{|p_1^{\text{B}'}| \sqrt{s'}}{\sqrt{s'} |p_2^{\text{B}'}|} \sigma_{\text{tot}}^{\text{RN}}(s') \quad (3.1.24)$$

Man beachte, dass APA und WPA im allgemeinen (natürlich nicht bei nur zwei Endteilchen) verschiedene numerische Ergebnisse liefern. Der numerische Unterschied ist feststellbar, wenn die t-Abhängig-

keit von $T_{\pi N}(s', t')$ explizite bekannt ist (experimentelle phase - shift-Analyse oder begründete Annahme nur einer Partialwelle).

Beispiel zum

numerischen Unterschied zwischen APA und WPA:

1) nur s-Wellen in $T_{\pi N}(s', t') \sim T_{\pi N}(s')$. Dann ist das Phasenraumintegral/proportional $\frac{t'_{max} - t'_{min}}{2 |\rho_1^{\alpha'}| |\rho_1^{\beta'}|}$, unabhängig von t (vgl. obige Formel für t').

2) nur p-Wellen in $T_{\pi N}(s', t') \sim t_1^{\pi N}(s') \cos \theta''$ (N*-Erzeugung), wobei $\cos \theta'' \equiv \left(1 + \frac{t^2}{2 |\rho_1^{\beta'}|^2}\right)_{t=\mu^2} = (\cos \theta')_{t=\mu^2}$. Weiter sei $\rho_{on} \equiv |\rho_1^{\beta'}|_{t=\mu^2}$ und $\rho_{off} \equiv |\rho_1^{\beta'}|$.

Dann ist
$$\cos \theta'' = \frac{2 \rho_{off} \rho_{on} \cos \theta' + 2 \rho_{on}^2 (\rho_{on}^{\alpha'} - \rho_{on}^{\beta'})}{2 \rho_{on}^2}$$

Dann ist $d^3\sigma$ in der APA proportional zu

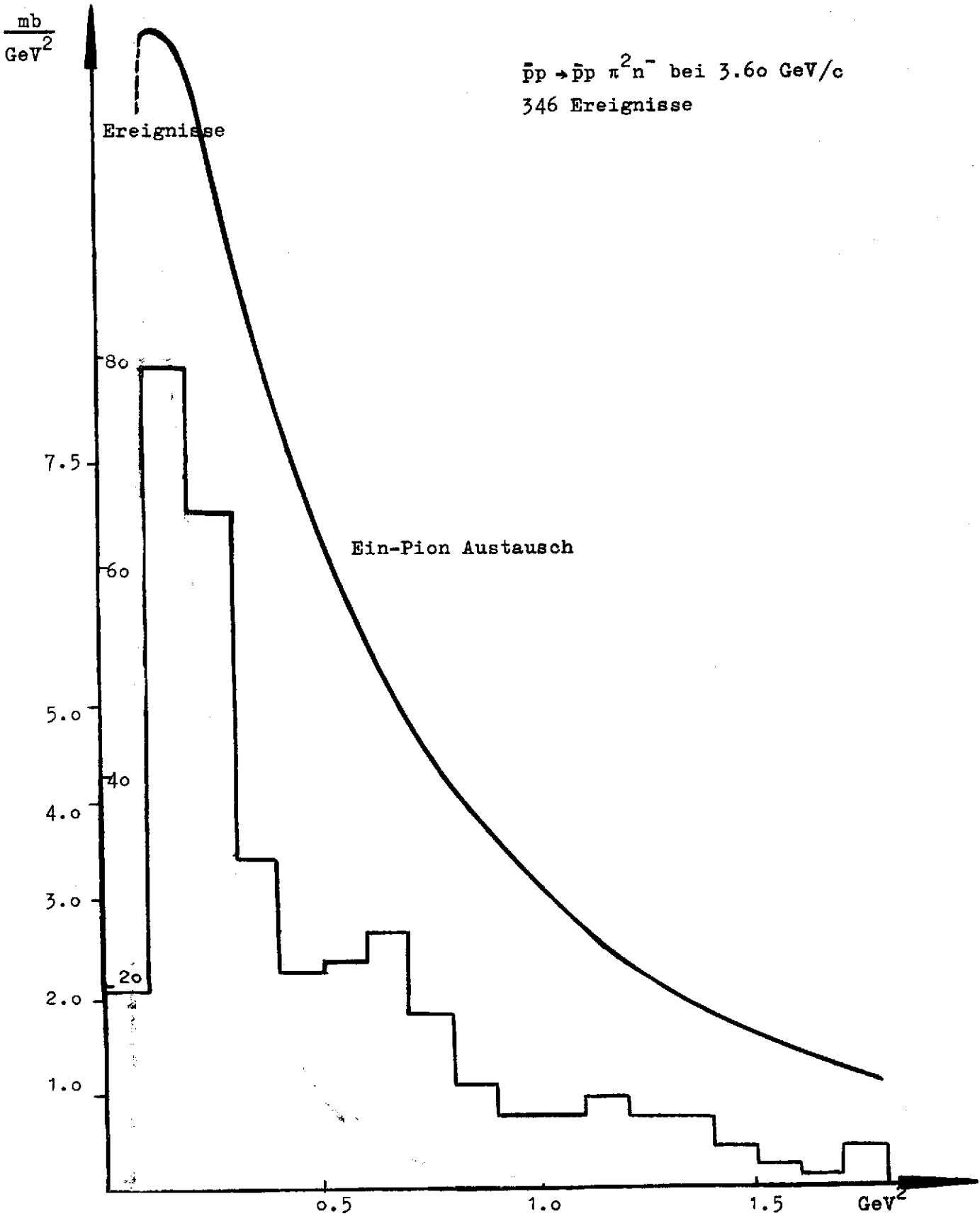
$$\int_{-1}^1 \cos^2 \theta'' d \cos \theta' = 2 \left(\frac{1}{3} \frac{\rho_{off}^2}{\rho_{on}^2} + \frac{(\rho_{on}^{\alpha'})^2 (\rho_{on}^{\alpha'} - \rho_{on}^{\beta'})^2}{\rho_{on}^4} \right) \quad (3.1.25)$$

Numerisches Beispiel: $\sqrt{s'} \approx M + 2\mu$, betrachte $t=0$ und $t=-\mu^2$.

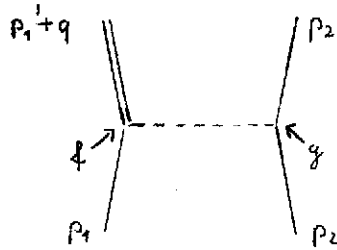
	$\frac{\rho_{off}^2}{\rho_{on}^2}$	$\frac{(\rho_{on}^{\alpha'})^2 (\rho_{on}^{\alpha'} - \rho_{on}^{\beta'})^2}{\rho_{on}^4}$
$t = 0$	$\approx \frac{4}{3}$	$\approx \frac{1}{64}$
$t = -\mu^2$	$\approx \frac{5}{3}$	$\approx \frac{1}{25}$

also $d^3\sigma_{2N \rightarrow N^* + N} (APA) \approx \frac{\rho_{off}^2}{\rho_{on}^2} d^3\sigma_{2N \rightarrow N^* + N} (WPA)$.

Das folgende Diagramm enthält den gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d|t|}$ und die WPA für die Reaktion $\bar{N} + N \rightarrow \bar{N}^* + N$ bei 3.6 GeV (aus H.C. Dehne, E. Lohrmann, E. Raubold, P. Söding, M.W. Teucher, G. Wolf, Proceedings of the Sienna International Conference on Elementary Particles, 1963).



Betrachtet man $2N \rightarrow N^* + N$ als einen $2 \rightarrow 2$ Teilchen-Prozess,



so kann man $d^3\sigma$ sofort mittels der Feynman-Regeln hinschreiben (wobei wir die Nukleonenspins vernachlässigen und das N^* als 1^- -Teilchen betrachten).

$$d^3\sigma \sim g^2 \sum_m |u_\mu(p_1' + q - p_1)|^2 \equiv g^2 (p_1' + q - p_1)^\mu \Lambda_{\mu\nu} (p_1' + q - p_1)^\nu =$$

$$g^2 \left(-(p_1' + q - p_1)^2 + \frac{((p_1' + q - p_1)_\mu (p_1' + q)_\mu)^2}{M^{*2}} \right) = \quad (3.1.26)$$

$$g^2 (p_2' + q - p_2)^2 \Big|_{B_1} = g^2 |p_1^{B_1}|^2 \equiv g^2 p_{0+}^2$$

Man erhält also das Ergebnis der APA. $u_\mu(m; p_1' + q)$ ist hier die Wellenfunktion des N^* , der Projektionsoperator $\Lambda_{\mu\nu}$ ist

$$\Lambda_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{(p_1' + q)_\mu (p_1' + q)_\nu}{M^{*2}} \quad (3.1.27)$$

(wir nehmen vereinfachend Spin 1 für das N^* an).

Eine etwas andere Möglichkeit, sich den Unterschied zwischen der APA und der WPA klarzumachen, besteht darin, sich einmal

$$T_{\pi N}(s', t', t) \longrightarrow T_{\pi N}(s', t', \mu^2) \quad (\text{APA!}) \quad (3.1.28)$$

hinzuschreiben und damit die Partialwellenentwicklung

$$T_{\pi N}(s', t', t) = \sum_\ell (2\ell + 1) t_\ell^{\pi N}(s', t) P_\ell(\cos\theta) \longrightarrow \sum_\ell (2\ell + 1) t_\ell^{\pi N}(s', \mu^2) P_\ell(\cos\theta) \quad (3.1.29)$$

(WPA!) zu vergleichen.

3.1.2 Formfaktoren⁵⁾

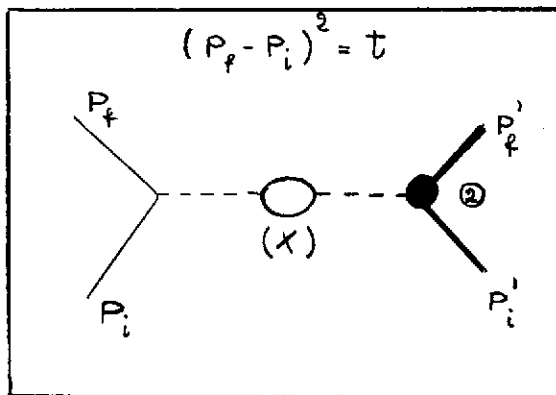
Beim Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d|t|}$ für den Prozess $N+N \rightarrow N+N^*$ hatte es sich gezeigt, dass experimentelle und theoretische Kurve zwar in der Nähe des Maximums gut übereinstimmen, der Abfall der theoretischen Kurve für wachsendes $|t|$ jedoch zu schwach ist.

Im Rahmen des O.P.E. gibt es nun zwei Möglichkeiten, diesen Abfall zu verbessern:

1. Durch Einführung von Vertexkorrekturen und Propagatorkorrekturen (Formfaktoren).
2. Durch Einführung der Regge-Pole.

Beide Methoden berücksichtigen den endlichen Abstand des physikalischen t -Bereichs vom Pol, d.h. man macht jeweils bestimmte Annahmen über die höheren Glieder in der Taylorentwicklung von $\tilde{T}(s,t)$ um $t = \mu^2$.

Wir wenden uns zunächst den Formfaktoren zu und betrachten das folgende O.P.E.-Diagramm für einen $2 \rightarrow 2$ Prozess mit skalaren Teilchen unter Be-



rücksichtigung der Vertex- und Propagatorkorrekturen. Das zu diesem Diagramm gehörende S -Matrixelement S_{fi} lässt sich folgendermassen schreiben (vgl. verallgemeinerte Feynman-Regeln im Ortsraum)

$$S_{fi} \sim \int d^4y d^4y' \langle P_f | j_X(y) | P_i \rangle \langle 0 | T[\Phi_X(y) \Phi_X(y')] | 0 \rangle \langle P_f' | j_X(y') | P_i' \rangle \quad (3.1.30)$$

Hierin ist $j_X(y)$ der Stromdichteoperator des Teilchens X , der allgemein definiert ist durch

$$j_X(y) = (\square_y - \mu_X^2) \phi_X(y) \quad (3.1.31)$$

wobei $\phi_X(y)$ der Feldoperator des zur Teilchenart X gehörenden Feldes ist. Der Zeitordnungsoperator T ist wie folgt definiert:

$$T(\phi(y) \phi(y')) = \begin{cases} \phi(y) \phi(y') & \text{für } y_0 - y'_0 > 0 \\ \phi(y') \phi(y) & \text{für } y'_0 - y_0 > 0 \end{cases}$$

Wir wollen nun (3.1.30) durch Übergang zum Impulsraum umformen und mit der Polapproximation vergleichen. Wegen der Translationsinvarianz gilt

$$j_X(y) = e^{iPy} j_X(0) e^{-iPy} \quad (3.1.32)$$

und

$$\langle 0 | T(\phi_X(y) \phi_X(x')) | 0 \rangle = \Delta'_F(y-y') \quad (3.1.33)$$

Mit Einführung der Fouriertransformierten von $\Delta'_F(q^2)$

$$\Delta'_F(y-y') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iq(y'-y)} \Delta'_F(q^2)$$

sowie (3.1.32) und (3.1.33) lassen sich die Ortsintegrationen in (3.1.30) ausführen:

$$S_{fi} \sim \delta(P_i + P'_i - P_f - P'_f) \Delta'_F((P_i - P_f)^2) \langle P_f | j_X(0) | P_i \rangle \langle P'_f | j_X(0) | P'_i \rangle \quad (3.1.34)$$

Da nach Voraussetzung $j_X(y)$ ein Skalar ist, ausserdem aus den beiden Vierervektoren P_i, P_f resp. P'_i, P'_f nur eine unabhängige invariante gebildet werden kann, gilt bis auf konstante Faktoren

$$\langle P_f | j_X(0) | P_i \rangle \sim \Gamma_1(t) \quad \text{resp.} \quad \langle P'_f | j_X(0) | P'_i \rangle \sim \Gamma_2(t) \quad (3.1.35)$$

und für die Übergangsamplitude ergibt sich

$$T \sim \Gamma_1(t) \Gamma_2(t) \Delta'_F(t) \quad (3.1.36)$$

im Unterschied zur Polapproximation, in der man

$$T \sim \frac{g_1 g_2}{t - \mu_x^2} \quad (3.1.37)$$

erhält. Berücksichtigt man die Nummerungsbedingungen

$$g_1 \equiv \Gamma_1(\mu_x^2)$$

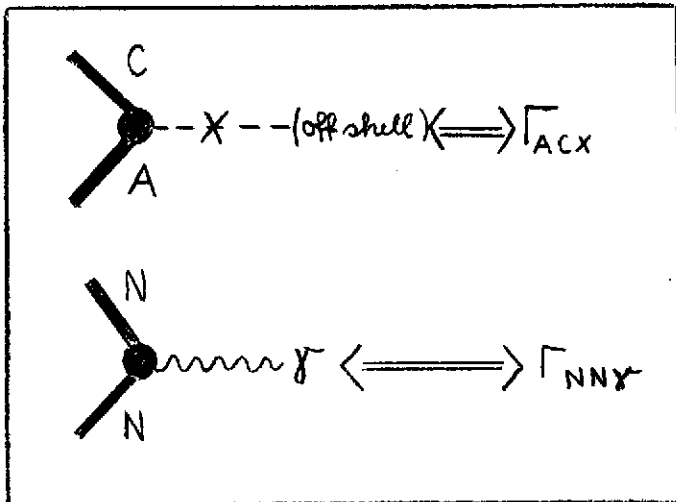
$$g_2 \equiv \Gamma_2(\mu_x^2)$$

sowie

$$\Delta_F^i(t) = i \frac{P(t)}{t - \mu_x^2} \quad \text{mit} \quad P(\mu_x^2) = 1 \quad (3.1.38)$$

so sieht man, dass die Näherung (3.1.37) nur in unmittelbarer Nähe des Poles gültig ist. Die Grössen $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$ und $P(t)$ sind die Formfaktoren der Vertizes 1, 2 bzw. des Propagators.

Die bisherigen Betrachtungen lassen sich für den Fall eines beliebigen Vertex verallgemeinern und man trifft eine Zuordnung gemäss nachstehendem Bild. Im folgenden soll die physikalische Bedeutung der Vertex-



funktionen an zwei bekannten Beispielen erläutert werden:

a) Die elektro-magnetischen Formfaktoren des Nukleons.

Unter Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften der elektro-magnetischen Wechselwirkung erhält man

$$\langle P' | j_\mu(x) | P \rangle = (\bar{u}(P')) [F_1(t) \gamma_\mu + i F_2(t) \sigma_{\mu\nu} q^\nu] u(P) \quad (3.1.39)$$

wobei jetzt $j_\mu(x)$ der Operator des elektromagnetischen Stromes

$j_\mu^{el.}(x)$ ist und die $\sigma_{\mu\nu}$ durch

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

definiert sind.

Für die Vertexfunktion $\Gamma_{NN\gamma}$ ergeben sich nach (3.1.39) skalare Funktionen $F_i(t)$ erst nach Abspaltung der Spinabhängigkeit

$$\Gamma_{NN\gamma} = F_1(t) \gamma_\mu + i F_2(t) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \quad (3.1.40)$$

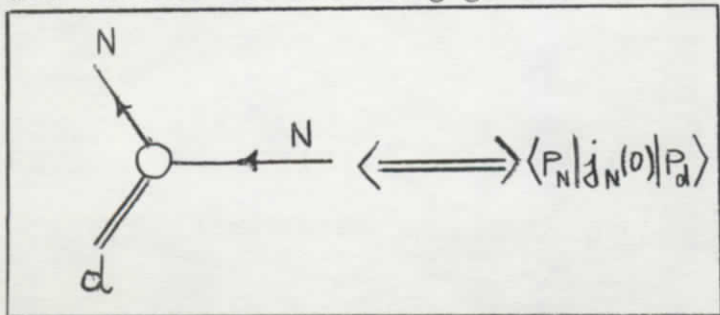
Die $F_i(t)$ sind dabei die bekannten elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons.

Den Relationen (3.1.38) entsprechend existieren die Beziehungen

$$\begin{aligned} F_1(0) &= e \\ F_2(0) &= \mu' \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

wenn e die elektrische Ladung und μ' das anomale magnetische Moment des Nukleons ist. Die Fouriertransformierte der $F_i(t)$ beschreiben (im nicht-relativistischen Grenzfall) die räumliche Verteilung von Ladung und magnetischem Moment des Nukleons⁷⁾. b) Der Deuteron-Nukleon-Vertex:

Wir treffen die Zuordnung gemäss nebenstehendem Bild, wobei der Opera-



tor $j_N(y)$ in Analogie zu (3.1.31) im nichtrelativistischen Grenzfall gegeben ist durch

$$j_N(y) = \left(i \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\Delta_y}{2M} \right) \psi_N(y) \quad (3.1.42)$$

Der Feldoperator $\psi_N(x)$ genügt der Schrödingergleichung der 2. Quantisierung

$$\left(i \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\Delta_y}{2M} \right) \psi_N(y) = \int d^3y' \psi_N^\dagger(y', y_0) \psi(y', y_0) V(|y' - y|) \psi_N(y) \quad (3.1.43)$$

mit dem Nukleon-Nukleon-Potential $V(|\underline{y}' - \underline{y}|)$

Das Feld $\Psi_N(\underline{y})$ erfüllt ausserdem folgende gleichzeitigen Vertauschungsrelationen

$$[\Psi_N^\dagger(\underline{y}, y_0), \Psi_N(\underline{y}', y_0)] = \delta(\underline{y} - \underline{y}') \quad (3.1.44)$$

Mit der Translationsinvarianz

$$\Psi_N(\underline{y}) = e^{i P \underline{y}} \Psi_N(0) e^{-i P \underline{y}} \quad (3.1.45)$$

und (3.1.42) ergibt sich für die Vertexfunktion

$$\langle P_N | \dot{\Psi}_N(0) | P_d \rangle = \left(i \frac{\partial}{\partial y_0} + \frac{\Delta \underline{y}}{2M} \right) e^{i(P_N - P_d) \underline{y}} \langle P_N | \Psi_N(0) | P_d \rangle \Big|_{\underline{y}=0} \quad (3.1.46)$$

Mit der Abkürzung

$$M_d = 2M - \varepsilon_d$$

wobei ε_d die Bindungsenergie des Deuterons ist, folgt aus (3.1.46)

$$\langle P_N | \dot{\Psi}_N(0) | P_d \rangle = - \left[\frac{(\underline{P}_N - \underline{P}_d)^2}{M} + \varepsilon_d \right] \langle P_N | \Psi_N(0) | P_d \rangle \quad (3.1.47)$$

Das Matrixelement des Feldoperators Ψ_N in (3.1.47) lässt sich umformen

$$\langle P_N | \Psi_N(0) | P_d \rangle = \int d^3 x_1 e^{-i P_N x_1} \langle 0 | \Psi_N(\underline{x}_1) \Psi_N(0) | P_d \rangle (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.1.48)$$

Andererseits ist $\langle 0 | \Psi_N(\underline{x}_1) \Psi_N(\underline{x}_2) | P_d \rangle$ die Wellenfunktion des Deuterons

$$\langle 0 | \Psi_N(\underline{x}_1) \Psi_N(\underline{x}_2) | P_d \rangle = f_d(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \quad (3.1.49)$$

Separiert man mit $\underline{X} = \frac{1}{2}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$ und $\underline{x} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$ Schwerpunkts- und Relativbewegung, so kann man für f_d schreiben:

$$P_d = e^{i P_d \tilde{x}} \varphi_d(\tilde{x}) \quad (3.1.50)$$

wobei $\varphi_d(\tilde{x})$ die Relativbewegung der beiden Nukleonen innerhalb des Deuterons gemäss der Schrödingergleichung beschreibt.

Daraus folgt

$$\langle P_N | \psi_N(0) | P_d \rangle = \int d^3 x_1 e^{-i(P_N - \frac{P_d}{2})x_1} \varphi_d(x_1) = \tilde{\varphi}_d(|P_N - \frac{P_d}{2}|) \quad (3.1.51)$$

wenn $\tilde{\varphi}_d$ die Fouriertransformierte der Wellenfunktion $\varphi_d(x)$ ist, die wegen der Drehinvarianz der Gleichung (3.1.43) nur vom Betrage des Impulses abhängt. Der Ausdruck (3.1.46) wird damit zu

$$\langle P_N | j_N(0) | P_d \rangle = - \left[\frac{(P_N - \frac{P_d}{2})^2}{M} + \epsilon_d \right] \tilde{\varphi}_d(|P_N - \frac{P_d}{2}|) \quad (3.1.52)$$

Die t-Abhängigkeit des Formfaktors in (3.1.52) erhalten wir sofort, wenn wir bemerken, dass im nichtrelativistischen Grenzfall gilt

$$t = (P_d - P_N)^2 = (2M - \epsilon_d + \frac{|P_d|^2}{4M} - M - \frac{|P_N|^2}{2M})^2 - (P_d - P_N)^2 \approx M^2 - 2M \left[\frac{(P_N - \frac{P_d}{2})^2}{M} + \epsilon_d \right] \quad (3.1.53)$$

Dann folgt nämlich

$$\Gamma_{NNd}(t) = \frac{t^2 - M^2}{2M} \tilde{\varphi} \left[i \sqrt{\frac{t - M^2}{2} + M \epsilon_d} \right] \quad (3.1.54)$$

Von Interesse ist die Bedeutung einer Ersetzung des Formfaktors durch eine Kopplungskonstante g_{NNd} in der Nähe von $t \approx M^2$

$$g_{NNd} \sim \lim_{\frac{(P_N - \frac{P_d}{2})^2}{M} \rightarrow -\epsilon_d} \left[\frac{(P_N - \frac{P_d}{2})^2}{M} + \epsilon_d \right] \tilde{\varphi}_d \left(|P_N - \frac{P_d}{2}| \right) \quad (3.1.55)$$

woraus folgt

$$\tilde{\varphi}_d(|P|) \sim \frac{g_{NNd}}{\frac{P^2}{M} + \epsilon_d} \quad (3.1.56)$$

oder

$$g_d(r) \sim \frac{e^{-\sqrt{\mu} r}}{r} \quad (3.1.57)$$

Ersetzt man also den Formfaktor durch eine Kopplungskonstante, so berücksichtigt man von der Wellenfunktion der Relativbewegung nur das asymptotische Verhalten im Ortsraum (d.h. den "am meisten peripheren Anteil"). Die innere Struktur des Deuterons kommt erst bei voller Berücksichtigung der Formfaktoren zur Geltung.

Die Eigenschaften der Formfaktoren, die wir an den Beispielen der elektromagnetischen Formfaktoren sowie der nichtrelativistischen Nukleon-Deuteron-Vertexfunktion kennengelernt haben, lassen sich auf den allgemeinen Fall übertragen in der Feststellung, dass Formfaktoren die innere Struktur von "Elementarteilchen" beschreiben.

Nach der Störungstheorie sind die Formfaktoren $\Gamma(t)$ analytische Funktionen in der längs der positiv reellen Achse aufgeschnittenen komplexen t -Ebene, woraus eine Dispersionsrelation (Spektraldarstellung) folgt. Die Spektralfunktion wird dann durch Beiträge von Mehrteilchenzwischenzuständen in ähnlicher Weise aufgebaut wie der Imaginärteil der Streuamplitude auf Grund der Unitarität.

$$\Gamma(t) = \int_{\mu_{\min.}}^{\infty} dt' \frac{g(t')}{t' - t} \quad , \quad g(t') \longleftrightarrow \sum_i \text{Diagramm } i \quad (3.1.58)$$

Hierbei sind die Zwischenzustände i eingeschränkt durch die an den Vertices geltenden Erhaltungssätze. So sind z.B. im Falle des π -NN-Formfaktors wegen Erhaltung der G-Parität nur Zwischenzustände mit einer ungeraden Anzahl von π -Mesonen zulässig.

In Analogie zum Deuteron lässt sich nun das Nukleon als π -N gebundener Zustand betrachten. Der Beitrag höherer Massen in den Zwischenzuständen zur Spektralfunktion des πNN - Formfaktors beschreibt dann die Struktur der π -N - Wellenfunktion im Inneren des Nukleons.

Da man bei raumartigen t wegen $\mu_{\text{min.}}^2 > 0$ im allgemeinen weit vom Schnitt entfernt ist, kann man den Schnitt näherungsweise durch einen Pol ersetzen in Analogie zur Elektrodynamik, wo eine ausgedehnte Ladung in grosser Entfernung wie eine Punktladung wirkt. Damit erhält man die Clementel-Villi-Darstellung⁽⁵⁾ der Formfaktoren

$$\Gamma(t) \sim \frac{A}{t - \alpha} ; \quad \alpha > \mu_{\text{min.}}^2 \quad (3.1.59)$$

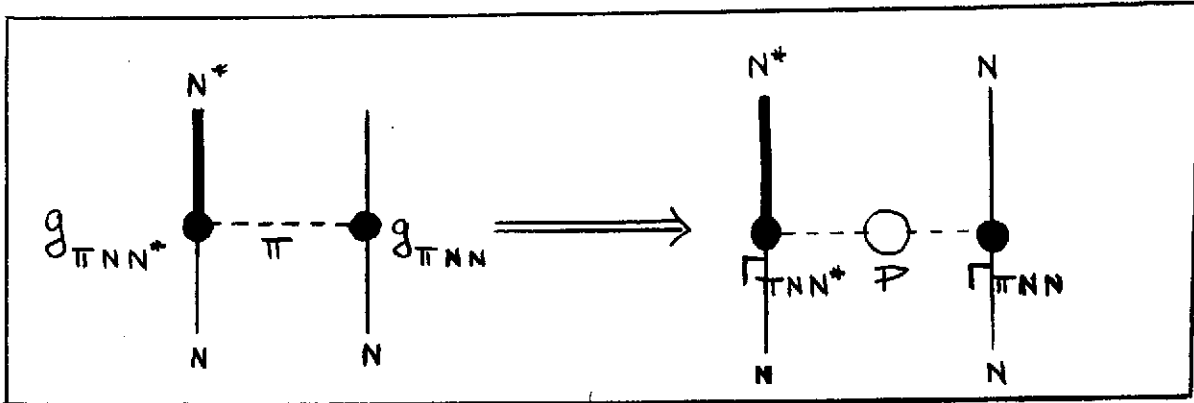
Analog lassen sich die mit den Propagatorkorrekturen verknüpften Formfaktoren diskutieren. Betrachten wir als Beispiel den Propagator $\Delta'_F(t)$ des Pions, so gilt auf Grund sehr allgemeiner feldtheoretischer Annahmen⁽⁶⁾ für $\Delta'_F(t)$ eine Spektral-Darstellung folgender Form

$$-i \Delta'_F(t) = \frac{1}{t - \mu^2} + \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{g(\sigma)}{t - \sigma^2} d\sigma^2 \quad (3.1.60)$$

bzw. eine entsprechende Spektraldarstellung für den Formfaktor $P(t)$ (vgl. 3.1.38).

Die durch Formfaktoren und Propagatorkorrekturen erreichbaren Korrekturen für z.B. die $N+N \rightarrow N+N^*$ - Übergangsamplitude lassen sich durch

eine Ersetzung gemäss folgendem Bild kennzeichnen.



Als Beziehung zwischen korrigiertem und unkorrigiertem Wirkungsquerschnitt erhalten wir

$$\frac{d\sigma}{d|t|}(s,t) = G^2(t) \frac{d\sigma_0(s,t)}{d|t|} \quad (3.1.61)$$

mit der Abkürzung

$$G(t) = \frac{\Gamma_{\pi NN^*}}{g_{\pi NN^*}} \frac{\Gamma_{\pi NN}}{g_{\pi NN}} P(t) ; G(\mu^2) = 1 \quad (3.1.62)$$

Die Clementel-Villi-Darstellung für den "Formfaktor" (3.1.62) lautet:

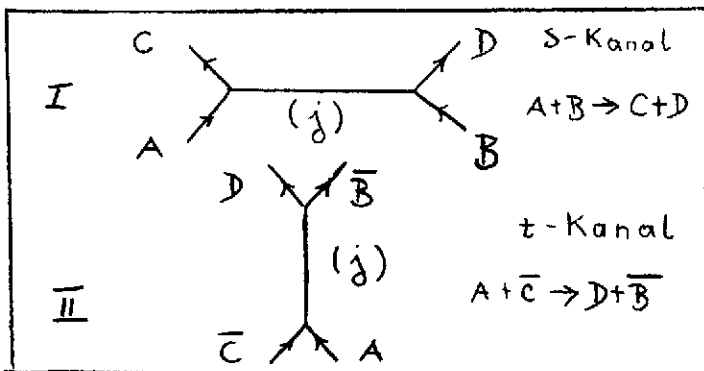
$$G(t) = A + \frac{1-A}{1 + \frac{(\mu^2 - t)}{\alpha}} ; \alpha > 8\mu^2 \quad (3.1.63)$$

Da $G(t)$ für $|t| \rightarrow \infty$ verschwindet, fällt der so korrigierte Wirkungsquerschnitt steiler ab als der unkorrigierte. Will man die Richtigkeit der Beziehung (3.1.61) experimentell untersuchen, so hat man nachzuprüfen, ob der bei einer Energie S_1 experimentell bestimmte Formfaktor $G(t)$ auch die Experimente bei einer anderen Energie S_2 richtig beschreibt.

Einen Vergleich des peripheren Modells mit Formfaktoren mit den Experimenten findet man in Kap. 3.3.

3.1.3 Regge-Pole

Um das Hochenergieverhalten der Streuamplituden im peripheren Modell bei Austausch von Teilchen mit Spin zu diskutieren, betrachten wir den inelastischen Zweiteilchenprozess $A+B \rightarrow C+D$, wobei A, B, C, D skalar sein sollen, für den Austausch eines Teilchens mit dem Spin j . Graph I zeigt den entsprechenden Feynman-Graphen. Die "gekreuzte" Prozessrichtung



$A+\bar{C} \rightarrow \bar{B}+D$ wird dann durch den Graphen II beschrieben.

Für die zu den Graphen I und II gehörenden Übergangsamplituden gilt die folgende

"Crossing-Relation":

$$T_{AB \rightarrow CD}(s, t) = T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}(t, s) \quad (3.1.64)$$

Diese Relation ist im Sinne der analytischen Fortsetzung zu verstehen, d.h. setzt man die Amplitude $T_{AB \rightarrow CD}$ aus dem physikalischen Bereich des S -kanals, $S > 0$, $t < 0$ in den Bereich $S < 0$, $t > 0$ fort, so gelangt man in den physikalischen Bereich der Übergangsamplitude $T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}$ im t -Kanal.

Im physikalischen Bereich des t -Kanals ergibt eine Partialwellenentwicklung der Amplitude $T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}(t, s)$ für den (j) -Austausch den

Anteil

$$T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}^{(j)}(t, s) = (2j+1) t_j(t) P_j(\cos \Theta_t) \quad (3.1.65)$$

und es ist

$$S = M_A^2 + M_B^2 - 2 P_{A_0} P_{B_0} + 2 |P_{A_0}| |P_{B_0}| \cos \Theta_t \quad (3.1.66)$$

Setzen wir (3.1.65) und (3.1.66) in den physikalischen Bereich des S -kanals fort, so liefert die Crossing-Relation

$$T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}^{(j)}(t, s) = T_{A\bar{B} \rightarrow CD}^{(j)}(s, t) = (2j+1) t_j(t) P_j(\cos \Theta_t) \quad (3.1.67)$$

Nun gilt nach (3.1.66) $\cos \Theta_t \rightarrow \infty$ wenn $S \rightarrow \infty$. Mit dem asymptotischen Verhalten der Legendre-Polynome

$$P_j(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} x^j \quad (3.1.68)$$

ergibt sich dann für das Hochenergieverhalten der Übergangsamplitude

$$T_{A\bar{B} \rightarrow CD} \sim S^j \quad (3.1.69)$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt erhalten wir dann

$$\frac{d\sigma}{d|t|}{}_{A\bar{B} \rightarrow CD} \sim S^{2(j-1)} \quad (3.1.70)$$

Dieses Verhalten steht im krassen Widerspruch zum experimentellen Befund. Den Experimenten zufolge gilt

$$\sigma_{TOT} \rightarrow \text{const für } S \rightarrow \infty \quad (3.1.71)$$

Nun öffnen sich im Limes $S \rightarrow \infty$ unendlich viele incl. Kanäle; daher muss für jeden einzelnen inelastischen Wirkungsquerschnitt im Gegen-

satz zu (3.1.70) die Beziehung gelten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} A_{B \rightarrow C} \rightarrow 0 \quad \text{für } S \rightarrow \infty \quad (3.1.72)$$

Wir werden sehen, dass sich diese Schwierigkeiten des peripheren Modells (Hochenergiekatastrophe) durch Modifizierung des Teilchenaustausches mittels der Regge-Pole beseitigen lassen.

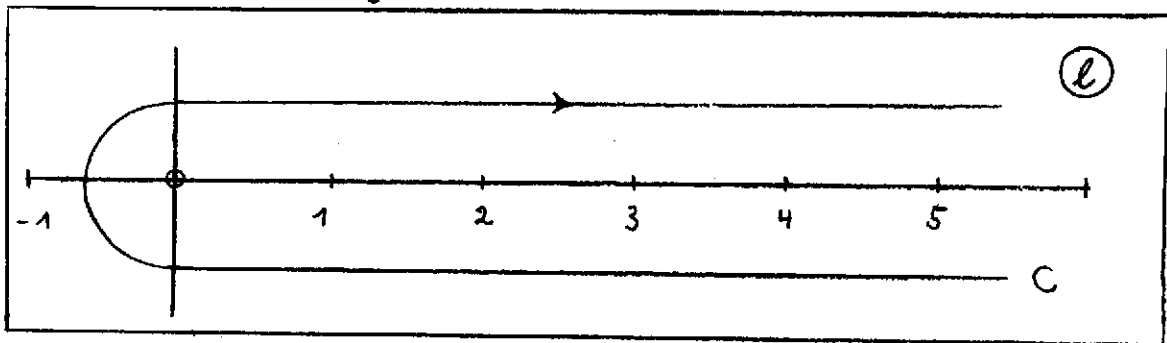
Regge-Pole in der nichtrelativistischen Potentialtheorie

Für die Streuamplitude gilt die Partialwellenentwicklung

$$T(E, \cos \Theta) = \sum_l^{\infty} (2l+1) t_l(E) P_l(\cos \Theta) \quad (3.1.73)$$

Nach analytischer Fortsetzung der $t_l(E)$ in die komplexe Drehimpulsebene kann man $T(E, \cos \Theta)$ in folgender Form (Sommerfeld-Watson-Transformation) schreiben

$$T(E, \cos \Theta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C dl (2l+1) t_l(E) \frac{P_l(-\cos \Theta)}{\sin \pi l} \quad (3.1.74)$$

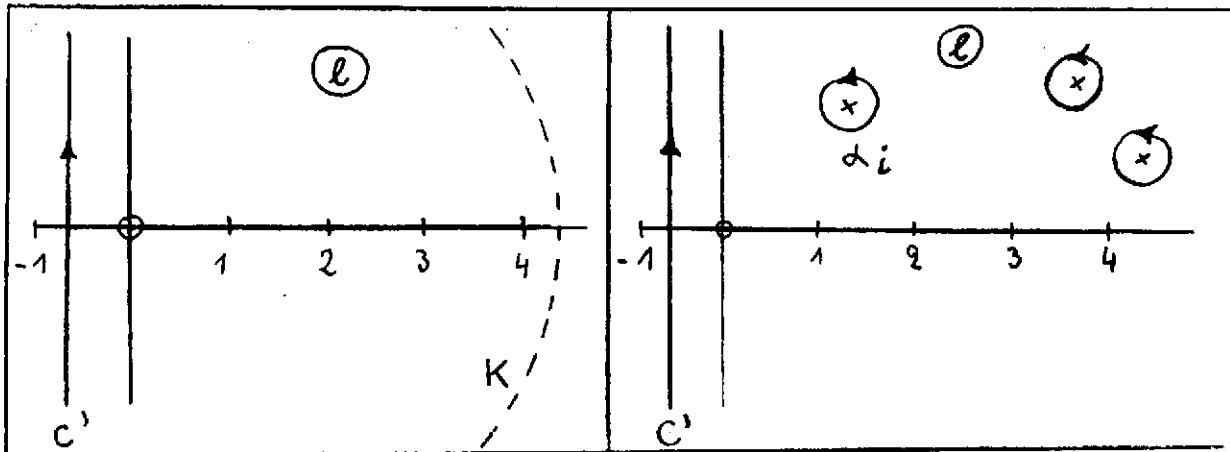


Auf Grund des Polverhaltens der Funktion $\frac{1}{\sin \pi l}$ liefert die Anwendung des Residuensatzes auf das Integral (3.1.74) die Summe (3.1.73).

Die analytische Fortsetzung der $t(l, E)$ in die komplexe Drehimpulsebene ist mehrdeutig, da die $t(l, E)$ zunächst nur für ganzzahliges l definiert sind. Nach dem Carlsson-Theorem ist sie jedoch eindeutig,

wenn man das Verhalten von $t(\ell, E)$ für grosse ℓ vorschreibt.

Nun verbiegen wir die Kurve C zur Kurve C' und ergänzen den so entstandenen Weg durch K zu einer geschlossenen Kurve



Das Verhalten der $t(\ell, E)$ im Unendlichen schreiben wir jetzt durch die Forderung vor, dass das Integral der Form (3.1.74) über K verschwindet. Unter dieser Voraussetzung lässt sich in der Potentialtheorie mit Potentialen vom Yukawa-Typ zeigen, dass $t(\ell, E)$ in der rechten oberen Halbebene keine anderen Singularitäten als Pole erster Ordnung die sog. "Regge-Pole" besitzt. Der Residuensatz lässt dann für die Amplitude $T(E, \cos \theta)$ folgende Umformung zu

$$T(E, \cos \theta) = -\frac{1}{2i} \int_{-i\infty - \frac{1}{2}}^{+i\infty - \frac{1}{2}} d\ell (2\ell + 1) t(\ell, E) \frac{P_\ell(-\cos \theta)}{\sin \pi \ell} + \sum_i \frac{\beta_i(E)}{\sin \pi \alpha_i(E)} P_{\alpha_i}(-\cos \theta) \quad (3.1.75)$$

wenn $\alpha_i(E)$ die Polstellen und $\beta_i(E)$ die entsprechenden Residuen sind. Der i -te Regge-Pol-Beitrag zur Partialwellenamplitude ergibt sich nach (3.1.73) aus (3.1.75) zu

$$t_{R_i}(\ell, E) = \frac{\beta_i(E)}{\sin \pi \alpha_i(E)} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_\ell(z) P_{\alpha_i}(-z)$$

Wegen

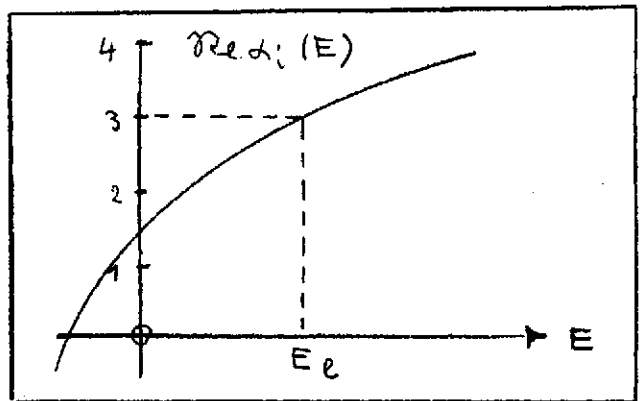
$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz P_\ell(z) P_{\alpha_i}(-z) = \frac{\sin \pi \alpha_i(E)}{(\alpha_i - \ell)(\alpha_i + \ell + 1)} \quad (3.1.76)$$

folgt

$$t_{R_i}(\ell, E) = \frac{\beta_i(E)}{(\alpha_i - \ell)(\alpha_i + \ell + 1)} \quad (3.1.77)$$

Wie in der Potentialtheorie gezeigt wird, erfüllen die Regge-Trajektorien $\alpha_i(E)$ folgende Bedingungen

1. $\text{Im } \alpha_i(E) = 0$ für $E < 0$
2. $\text{Im } \alpha_i(E) > 0$ für $E > 0$
3. $\frac{d \text{Re } \alpha_i(E)}{dE} > 0$



Wir können daher eine Energie E_e derart wählen, dass $\text{Re } \alpha_i(E)$ ganzzahlig wird und zwar $\text{Re } \alpha_i(E) = \ell$. An der Stelle E_e entwickeln wir $\alpha_i(E)$ in eine Taylor-Reihe. Da im allgemeinen $\text{Im } \alpha_i(E)$ klein und in E schwach veränderlich ist, können wir schreiben:

$$\alpha_i(E) = \ell + (E - E_e) \frac{d \text{Re } \alpha_i(E_e)}{dE} + i \text{Im } \alpha_i(E_e) \quad (3.1.78)$$

Einsetzen von (3.1.78) in (3.1.77) ergibt in der Nähe von

$$t_{R_i}(\ell, E) = \frac{\beta(E_e)}{\pi [\alpha_i(E) + \ell + 1]} \left\{ (E - E_e) \left[\frac{d \text{Re } \alpha_i(E_e)}{dE} \right] + i \text{Im } \alpha_i(E_e) \right\}$$

oder

$$t_{R_i}(\ell, E) = \frac{A}{(E - E_e) + i \frac{\Gamma}{2}} \quad (3.1.79)$$

mit

$$A = \frac{\beta_i(E_e)}{\pi (2\ell + 1) \left[\frac{d \text{Re } \alpha_i(E_e)}{dE} \right]} \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma}{2} = \frac{\text{Im } \alpha_i(E_e)}{\frac{d \text{Re } \alpha_i(E)}{dE}} > 0 \quad (3.1.80)$$

Die Amplitude $t_{R_i}(\ell, E)$ besitzt gemäss (3.1.79) eine typische Breit-Wigner-Resonanz. Ein Regge-Pol $\alpha(E)$ stellt also eine Zusammenfassung aller derjenigen Resonanzen und gebundenen Zustände ($E < 0$) dar, deren Resonanzenergien bzw. Bindungsenergien und Drehimpulse auf der Regge-Trajektorie $\alpha(E)$ liegen.

Für die nachfolgende Diskussion ist der zunächst unphysikalische Grenzwert von $T(E, \cos \theta)$ für $\cos \theta \rightarrow \infty$ von besonderem Interesse. Wegen

$$P_\alpha(z) \rightarrow z^\alpha \text{ für } z \rightarrow \infty$$

erhält man

$$T(E, \cos \theta) \sim \frac{\beta_0(E)}{\sin \pi \alpha_0(E)} [\cos \theta]^{\alpha_0(E)} \quad (3.1.81)$$

wobei $\alpha_0(E)$ definiert ist durch

$$\operatorname{Re} \alpha_0 = \operatorname{Max} [\operatorname{Re} \alpha_i] \quad (3.1.82)$$

Die Existenz der Regge-Pole und insbesondere die Eigenschaften der Regge-Trajektorien, deren Gültigkeit sich bisher nur in der Potentialtheorie bestätigen lässt, werden nun durch folgende "Regge-Pol-Hypothese" auf die Hochenergiephysik übertragen:

1. Alle stark wechselwirkenden "Elementarteilchen" sowie deren Resonanzen liegen auf Regge-Trajektorien.

2. Es gelten die Bedingungen

$$\operatorname{Im} \alpha(s) = 0 \text{ für } s < s_0$$

$$\operatorname{Im} \alpha(s) > 0 \text{ für } s > s_0$$

s_0 = Schwellenenergien

$$\frac{d \operatorname{Re} \alpha(s)}{d s} > 0$$

3. Das asymptotische Verhalten der S -Matrix wird durch die Regge-Pole bestimmt (d.h. es gibt keine Schnitte in der komplexen l -Ebene!).

Die Möglichkeit der Durchführung dieses Programms ist durch die Crossing-Symmetrie gegeben. Wir betrachten den Prozess $A+B \rightarrow C+D$ mit der Amplitude $T_{AB \rightarrow CD}(s, t)$. Die Crossing-Relation lieferte

$$T_{AB \rightarrow CD}(s, t) = T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}(t, s) = T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}(t, \cos \theta_t)$$

Der Einteilchenaustausch wird nun gegenüber dem Austausch eines "Elementarteilchens" in (3.1.67) dadurch modifiziert, dass wir die Amplitude $T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}(t, \cos \theta_t)$ "reggeieren":

$$T_{AB \rightarrow CD}(s, t) = T_{A\bar{C} \rightarrow \bar{B}D}(t, \cos \theta) \sim \sum_i \frac{\beta_i(t) [\cos \theta_t]^{\alpha_i(t)}}{\sin \pi \alpha_i(t)}$$

oder

$$T_{AB \rightarrow CD}(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\beta_0(t)}{\sin \pi \alpha_0(t)} s^{\alpha_0(t) - 1} \quad (3.1.83)$$

mit

$$\operatorname{Re} \alpha_0(t) = \operatorname{Max}(\operatorname{Re} \alpha_i(t)) \quad (3.1.84)$$

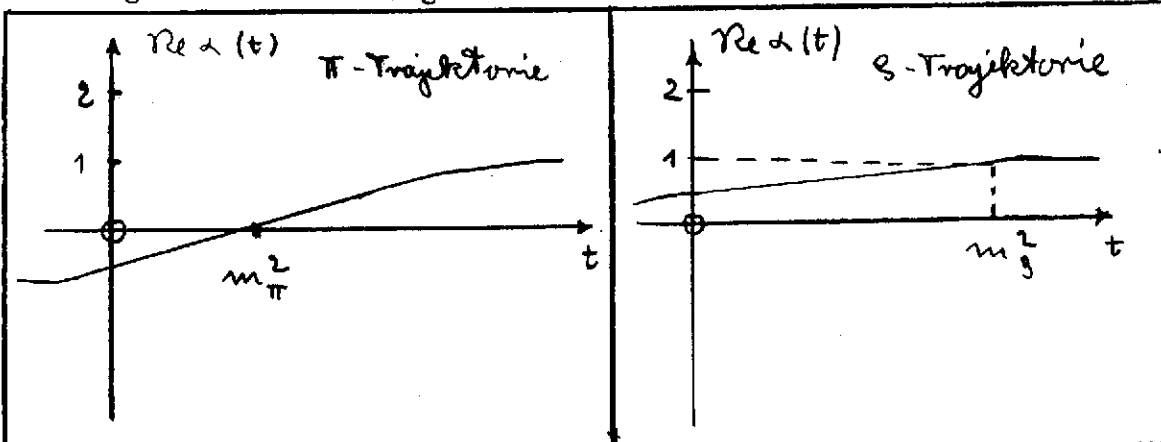
Der Wirkungsquerschnitt lautet dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} AB \rightarrow CD \sim \frac{\beta_0^2(t)}{\sin^2 \pi \alpha_0(t)} s^{2\alpha_0(t) - 1} \quad (3.1.85)$$

Da gemäss der Regge-Pol-Hypothese $\operatorname{Im} \alpha(t) = 0$ für $t < 0$ und $\frac{d \operatorname{Re} \alpha(t)}{dt} > 0$ ist, d.h. da wegen $\operatorname{Re} \alpha_0(m_x^2) = j_x$ die Relation $\alpha_0(t) < j_x$ für physikalische t -Werte gilt, wächst $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ schwächer mit der Energie an als im Fall des Austausches eines Elementarteilchens X mit Spin j_x

Die sogenannte Hochenergiekatastrophe ist somit beseitigt.

Der Verlauf der Trajektorien für den π - resp. ρ -Austausch ist in den folgenden Bildern angedeutet.



Ausser einem Abfall des Wirkungsquerschnittes für $S \rightarrow \infty$ bewirkt die Reggeierung für hohe Energie den zu Anfang erwähnten Abfall in $|t|$.
Mit der Entwicklung

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(0) + \alpha'_0(0) t \quad \text{für kleine } t$$

folgt aus (3.1.85) für $t < 0$

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim S^{2(\alpha_0(0)-1)} \frac{\beta^2(t)}{\sin^2 \pi \alpha_0(t)} e^{-2|t| \alpha'_0(0) \ln S} \quad (3.1.86)$$

Auswahlregeln: Für den Austausch von Regge-Polen gelten dieselben Auswahlregeln wie für den Austausch von Elementarteilchen.

Welcher Regge-Pol dominiert? Auf eine Diskussion der elastischen Streuung soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Betrachten wir als typischen inelastischen Prozess $N+N \rightarrow N+N^*$. Nach obigen Bildern gilt $\alpha_\pi(0) \approx 0$ und $\alpha_\rho(0) \approx \frac{1}{2}$, so dass der ρ -

Austausch für $S \rightarrow \infty$ dominiert (das Pomeranchon mit $\alpha(0) = 1$ kann wegen der Isospinauswahlregeln - das ausgetauschte X muss $I = 1$ haben - nicht beitragen).

Literatur zu Kapitel 3.1

- 1) S.D. Drell: Rev.Mod.Phys. 33, 458, (1961)
- 2) F. u. G. Salzman: Phys.Rev. 125, 1703 (1962)
- 3) E. Ferrari, F. Selleri: Suppl. Nuov.Cim. 24, 453 (1962)
- 4) A.W. Hendry: Nuc.Phys. 37, 283 (1962)
- 5) E. Ferrari u. F. Selleri: Nuov.Cim. 27, 1450 (1962)
- 6) H. Uhmann: Nuov.Cim.
- 7) Vergleiche:
S.D. Drell u. F. Zachariasen: "Electromagnetic Structure of Nucleons" (Oxford 1961).

Allgemeine Literatur über Regge-Pole:

- 8) F. Zachariasen: "The Theory and Application of Regge Poles" in Cargese Lectures in Theoretical Physics (1963)
- 9) Froissart u. Omnes: "Mandelstam-Theory and Regge-Poles"(1963)
(Besonders f. Experimentalphysiker zu empfehlen!)
- 10) S.C. Frautschi: "Regge-Poles and S -Matrix Theory" (1963)

Spezielle Literatur f. Regge-Pole und inelastische Prozesse:

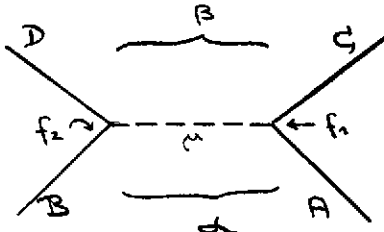
- 11) A.P. Cartogouris, S.C. Frautschi u. H.S. Wong: Phys.Rev. 129,
974 (1963)

3.2 Die Grenzen des peripheren Modells

In Kap. 3.1.2 hatten wir die einfachste Version des peripheren Modells durch Einführung von Formfaktoren verfeinert. Einen möglichen Weg zur Beseitigung der Hochenergiekatastrophe, d.h. des divergenten Verhaltens der Streuamplitude bei Austausch von Teilchen mit Spin ≥ 1 hatten wir in der "Reggeierung" (Kap.3.1.3) aufgewiesen. Wir wenden uns nun der Frage zu, inwieweit das periphere Modell der Forderung nach Unitarität der S-Matrix genügt.

3.2.1 Verletzung der Unitarität

Wir betrachten einen Prozess mit Eingangskanal α und Ausgangskanal β . Die ein- und auslaufenden Teilchen AB und CD seien skalar. Ebenso sei das ausgetauschte Teilchen skalar. Die Ein-



teilchen-Austausch-Amplitude (one-particle-exchange, abgekürzt OPE) lautet

$$T_{\alpha\beta}^{OPE} = \frac{f_1 \cdot f_2}{t - m^2} \quad (3.2.10)$$

wobei wir uns alle Zahlenfaktoren in die beiden Kopplungskonstanten f_1 und f_2 hineindefiniert denken.

Die Partialwellenentwicklung für $T_{\alpha\beta}^{OPE}$ ist dann wie üblich

$$T_{\alpha\beta}^{OPE} = \frac{1}{2i} \frac{\sqrt{s}}{(p_\alpha \cdot p_\beta)^{1/2}} \sum_l (2l+1) S_{\alpha\beta}^{OPE}(l,s) P_l(\cos \Theta)$$

wo p_α, p_β die Beträge der CMS-Impulse in Kanal α bzw. β sind. Für grosse Energien s besteht die Beziehung (denn für $s \rightarrow \infty$ sind die Ruhmassen gegenüber den kinetischen Energien vernachlässigbar, so dass die Kinematik für einen beliebigen $2 \rightarrow 2$ Prozess in

die der elastischen Streuung übergeht - vgl. Kap. 3.1.1).

$$\cos \Theta \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1 + \frac{2t}{s} \quad (3.2.11)$$

Ferner gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{s}}{(p_a \cdot p_p)^{1/2}} = 2$$

Die Partialwellenamplituden $S_{\lambda p}^{\text{OPE}}(l, s)$ erhalten wir durch die Projektion

$$S_{\lambda p}^{\text{OPE}}(l, s) = 2i \sqrt{\frac{P_{\lambda}^{\text{OPE}}(s)}{s}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_{\lambda}^{\text{OPE}}(z) dz \quad (3.2.12)$$

Hieraus folgt für grosse s

$$S_{\lambda p}^{\text{OPE}}(l, s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -2i f_1 \cdot f_2 \frac{1}{s} Q_e \left(1 + \frac{2t^2}{s} \right) \quad (3.2.13)$$

mit der Legendre-Funktion zweiter Art

$$Q_e(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_e(z)}{x-z} dz \quad (3.2.14)$$

Da

$$Q_e \left(1 + \frac{2t^2}{s} \right) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s}{t^2} \right) \quad (3.2.15)$$

erhalten wir im Hochenergielimes

$$S_{\lambda p}^{\text{OPE}} \underset{s \text{ groß}}{\sim} \frac{\ln s}{s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2.16)$$

Die für die Unitarität der S -Matrix notwendige Voraussetzung

$$|S_{\ell p}^{\text{OPE}}(\ell, s)| \leq 1 \quad (3.2.17)$$

ist also zumindest im Bereich sehr hoher Energien erfüllt.

(Bei genügend grossen Kopplungskonstanten könnte sie allerdings für endliche s verletzt sein).

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei äusseren Teilchen mit Spin. Dies wollen wir am Beispiel der N - N -Streuung im Singulett-Zustand diskutieren. Das ausgetauschte Teilchen sei ein \bar{N} -Meson. Dann gilt, wie weiter unten plausibel gemacht werden soll, die Beziehung ¹⁾

$$T_{\ell}^{\text{OPE}} = \frac{1}{2i} \left(e^{2i\delta_{\ell}} - 1 \right) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{g^2}{4\pi} - \frac{1}{4} \left[\frac{2k^2}{s} Q_{\ell} \left(1 + \frac{2k^2}{s} \right) - \delta_{\ell,0} \right] \quad (3.2.18)$$

d.h., die Partialwelle hat im Unterschied zum oben behandelten skalaren Fall noch einen s -unabhängigen Teil in der s -Wellenstreuung. Daher gilt hier

$$T_{\ell=0}^{\text{OPE}}(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} - \frac{g^2}{4\pi} - \frac{1}{4} \delta_{\ell=0} = -3,5$$

also

$$S_{\ell=0} = 1 + 2i T_{\ell=0} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} 1 - 7i$$

oder

$$|S_{\ell=0}|^2 = 50 > 1 \quad ! \quad (3.2.19)$$

Dieses Ergebnis stellt also eine extreme Verletzung der Unitarität dar. Wir wollen uns das Zustandekommen dieses unitaritätsverletzenden Anteils in der s -Welle plausibel machen:

Wir führen den Singulett-Anteil des Graphen I



auf den skalaren Fall II zurück, indem wir in I an beiden Vertices über die Polarisierung von ein- und auslaufendem Nukleon mitteln, d.h. wir setzen die Kopplungskonstante g'

$$g' = g \cdot \left(\sum_{\text{Spin's}} |\bar{u}(p') \gamma_5 u(p)|^2 \right)^{1/2} = g \left(\frac{-t}{2m^2} \right)^{1/2} \quad (3.2.20)$$

Damit erhalten wir für T (bis auf konstante Faktoren)

$$\begin{aligned} T^{\text{Singulett}} &\sim \frac{g'^2}{t-m^2} = g^2 \frac{-t}{2m^2} \cdot \frac{1}{t-m^2} \\ &= \frac{g^2}{2m^2} \left[\frac{-m^2}{t-m^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

bzw. für die zugehörige Partialwellenamplitude

$$\begin{aligned} T_e^{\text{Singulett}} &\equiv \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_e} - 1)^{\text{Singulett}} \\ &\sim \frac{g^2}{2m^2} \left[\frac{m^2}{s} Q_e \left(1 + \frac{2m^2}{s} \right) - \frac{1}{2} \delta_{e,0} \right] \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Dies ist aber (bis auf konst. Faktoren) obige Gleichung (3.2.18). Da die Verletzung der Unitarität einen schwerwiegenden Mangel des peripheren Modells ausmacht, müssen wir uns überlegen, welcher Art Korrekturen anzubringen sind, um das Modell zu retten. Wir lassen uns zu diesem Zweck von den halbklassischen Vorstellungen aus der Einleitung zu Kap. 3.1 inspirieren. Nach diesen Vorstellungen sollte der Hauptbeitrag zur Übergangsamplitude von den "am meisten peripheren Anteilen der Streuwelle", d.h. von den Partialwellen mit Drehimpuls $\ell \approx L_{\text{klass}}$ kommen, während der Anteil der zentralen Stöße ($\ell < L_{\text{klass}}$) stark absorbiert werden sollte.

Nun ergibt sich tatsächlich in dem nach Kap. 3.1.1 definierten peripheren Modell wegen

$$Q_2 \left(1 + \frac{2r^2}{s} \right) \sim e^{-r/L_{\text{klass.}}}$$

für $\frac{s}{r^2} \gg 1$ und $r \gg L_{\text{klass.}} = \frac{\sqrt{s}}{2} r$ (3.2.23)

ein exponentieller Abfall in für den Beitrag hoher Partialwellen. Für niedrige Partialwellen hingegen steht das periphere Modell im Widerspruch zum halbklassischen Bild: Denn wegen

$$Q_0(x) > Q_1(x) > Q_2(x) > \dots \quad (3.2.24)$$

für $x = 1 + \epsilon$, $\epsilon = \frac{2r^2}{s} \rightarrow 0$

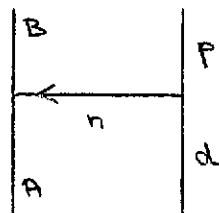
spielen bei hoher Energie die niedrigen Partialwellen die dominierende Rolle.

Wir werden uns also bei unseren Unitaritätskorrekturen auf eine Reduzierung der niedrigen Partialwellen an der Übergangsamplitude konzentrieren.

3.3.2 Unitaritätskorrekturen - DWBA

(DWBA = distorted wave Born approximation)

Im Falle der Unitaritätskorrekturen gingen die Hochenergiephysiker bei den Kernphysikern in die Lehre. Bei der Berechnung direkter Kernreaktion wie Stripping-Reaktionen $A(d,p)B$, die man mit dem Graphen



beschreibt, kommt man mit der Butler-Theorie bei Berücksichtigung ebener einlaufender und auslaufender Wellen zu Wirkungsquerschnitten, die um einen Faktor ~ 10 gegenüber den experimentellen Querschnitten zu gross sind. Erst wenn man statt ebener Wellen Streuwellen in einem komplexen optischen Potential ansetzt ("distorted waves"), dessen Imaginärteil die Absorption in andere Kanäle beschreibt, erhält man Übereinstimmung mit dem Experiment. Solche kernphysikalischen Gesichtspunkte wurden von Durand et al. ²⁾, Ross et al. ³⁾ u.a. in die Hochenergiephysik übertragen, indem sie gewisse Endformeln der Kernphysik, aus der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung abgeleitet, einfach in die Hochenergiephysik übernahmen. Offenbar war in diesem Falle eine Arbeit von Baker und Blankenbeller ⁴⁾ in Vergessenheit geraten, die die Probleme der Unitaritätskorrekturen ohne Rückgriff auf kernphysikalische Vorstellungen behandelt. Wir wollen im folgenden die Ergebnisse von Ross und Durand III im Rahmen einer reinen S-Matrix Theorie, allerdings unter gewissen, jedoch plausiblen Annahmen herleiten ⁵⁾.

Betrachten wir also die Zweiteilchenreaktion



Den Anfangs- bzw. Endkanal bezeichnen wir mit α bzw. β . Betrachten wir nun die Unitaritätsrelation der S-Matrix bei festem Drehimpuls l (den Index l werden wir im folgenden unterdrücken), soweit sie S-Matrixelemente mit α bzw. β als Anfangs- oder Endzustand enthalten:

$$\alpha \rightarrow \alpha: |S_{\alpha\alpha}|^2 + |S_{\alpha\beta}|^2 + \sum_{m \neq \alpha, \beta} |S_{\alpha m}|^2 = 1 \quad (3.2.24)$$

$$\alpha \rightarrow \beta: S_{\alpha\alpha}^* S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}^* S_{\beta\beta} + \sum_{n \neq \alpha, \beta} S_{\alpha n}^* S_{n\beta} = 0 \quad (3.2.25)$$

$$\beta \rightarrow \beta: |S_{\beta\beta}|^2 + |S_{\beta\alpha}|^2 + \sum_{n \neq \alpha, \beta} |S_{\beta n}|^2 = 1 \quad (3.2.26)$$

Hier soll n für alle anderen offenen Kanäle stehen (wir nehmen der Einfachheit halber an, dass dies ausschliesslich Mehrteilchenkanäle sind, d.h. neben α und β soll es hier keine weiteren Zweiteilchenkanäle geben). An dieser Stelle machen wir die folgenden Annahmen über die S-Matrixelemente:

(a) Die elastische Streuung sei reine Diffraktionsstreuung, d.h.

$T_{\alpha\alpha}$, $T_{\beta\beta}$ seien rein imaginär und daher $S_{\alpha\alpha}$, $S_{\beta\beta}$ reell.

(b) $S_{\alpha\alpha} = S_{\beta\beta}$

(c) $\sum_{n \neq \alpha, \beta} S_{\alpha n} S_{n\beta}^* = 0$

Die Annahme (c) bedeutet, dass die in Stössen aus verschiedenen Zweiteilchen-Kanälen erzeugten Mehrteilchenzustände aufeinander orthogonal stehen ⁵⁾.

Wir greifen nun die 2×2 Untermatrix S aus der vollen S-Matrix heraus:

$$S \equiv \begin{pmatrix} S_{\alpha\alpha} & S_{\alpha\beta} \\ S_{\beta\alpha} & S_{\beta\beta} \end{pmatrix}$$

die nach (3.2.24) - (3.2.26) sowie der Annahmen (b) und (c) der Gleichung

$$\begin{aligned} S S^\dagger &= \mathbb{1} \\ &\equiv \mathbb{1} - \sum_{n \neq \alpha, \beta} |S_{\alpha n}|^2 \\ &= \mathbb{1} - \sum_{n \neq \alpha, \beta} |S_{\beta n}|^2 \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

genügt.

Definieren wir nun eine Matrix \tilde{S} durch

$$S = \mathbb{1} \tilde{S} \quad (3.2.28)$$

so ist diese als Folge von (3.2.27) unitär, d.h.

$$\tilde{S} \tilde{S}^\dagger = \mathbb{1}$$

Wir haben also mit der Einführung von S unser Problem auf den in Kap.(2.4) behandelten Zweikanalfall reduziert. Nach Kap. 2.4.3.1 lässt sich die ~~unitäre~~ \tilde{S} -Matrix bzw. \tilde{T} durch eine reelle K -Matrix parametrisieren.

$$\tilde{T} = (1 - Kq)^{-1} K = \frac{1}{2i} (q^{-1/2} \tilde{S} q^{1/2} - q^{-1}), \quad (3.2.29)$$

wo q wieder die Diagonalmatrix der CMS-Impulse in α und β bedeutet. Unter Benutzung der Annahme (a) sowie der Analyticität der K -Matrix schliessen wir aus Gl. 2.4.14, dass die Diagonalelemente von K verschwinden

$$K_{\alpha\alpha} = K_{\beta\beta} = 0. \quad (3.2.30)$$

Damit hat nach (2.4.14) das nichtdiagonale Element der Übergangsamplitude die Form

$$T_{\alpha\beta} = x \tilde{T}_{\alpha\beta} = x \frac{k_{\alpha\beta}}{1 + q_{\alpha} q_{\beta} k_{\alpha\beta}^2}. \quad (3.2.31)$$

Nach (3.2.24) ist

$$x^2 = |S_{\alpha\alpha}|^2 + |S_{\beta\beta}|^2, \quad (3.2.32)$$

woraus mit

$$\eta^2 = |S_{\alpha\alpha}|^2 \quad (3.2.33)$$

und

$$|S_{\alpha\beta}|^2 = 4q_{\alpha} q_{\beta} T_{\alpha\beta}^2 \quad (3.2.34)$$

($T_{\alpha\beta}$ ist nach Annahme (a) reell)

das Ergebnis

$$T_{\alpha\beta} = \eta \frac{k_{\alpha\beta}}{1 - q_{\alpha} q_{\beta} k_{\alpha\beta}^2} \quad (3.2.35)$$

folgt. $\eta^2 = |S_{\alpha\alpha}|^2 < 1$ ist ein Maß für die Absorption im Kanal α . Die K-Matrix kann man sich in der relativistischen Theorie im Prinzip berechnen. Z.B. ist im Falle von $\alpha = N+N$, $\beta = N+N^*$ $K_{\alpha\beta}$ durch folgende Summe von Graphen gegeben

$$K_{N+N, N+N^*} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots$$

wobei die gestrichelten Linien andeuten, dass nur die Realteile der jeweiligen Propagatoren zu berücksichtigen sind entsprechend der Definition der K-Matrix mit Hauptwertintegralen in der Lippmann-Schwinger-Gleichung.

Im Grenzfall der schwachen Kopplung zwischen Kanal α und β können wir $K_{\alpha\beta}$ durch den ersten Term der Reihenentwicklung darstellen, d.h. aber

$$K_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{OPE} \quad \text{im Falle der schwachen Kopplung.} \quad (3.2.36)$$

Mit $K_{\alpha\beta}^2 \ll K_{\alpha\beta}$ erhalten wir damit aus Gl. (3.2.35) die Näherung

$$T_{\alpha\beta}^{DWBA}(\ell, s) = \eta(\ell, s) T_{\alpha\beta}^{OPE}(\ell, s) \quad (3.2.37)$$

Das ist aber die Formel von Durand III²⁾.

Nach den Betrachtungen aus Kap. 3.2.1 ergeben sich als notwendige Eigenschaften von η_ℓ :

$$\eta(\ell, s) = \begin{cases} 0 & \text{für } \ell \ll L_{\text{klass}} \\ 1 & \text{für } \ell \gg L_{\text{klass}} \end{cases}$$

Der Ansatz von Durand

$$\eta(\ell, s) = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{s}(\ell + \eta)\ell\right) \quad (3.2.38)$$

erfüllt diese Bedingung der Dämpfung niedriger Partialwellen.

Nach (3.2.13) haben wir also die Partialwellenentwicklung

$$T_{\pm p}^{\text{DWBA}} = -2 f_1 f_2 \sum_l (2l+1) \cdot \frac{1}{s} Q_l \left(1 + \frac{2t^2}{s} \right) \times \\ \times \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\kappa^2}{s} l(l+1)\right) \right\} P_l(\cos \Theta) \quad (3.2.39)$$

Wir wollen nun zeigen, dass ein solches $T_{\pm p}^{\text{DWBA}}$ in der Form

$$T_{\pm p}^{\text{DWBA}} = \frac{f_1 f_2}{t - \mu^2} \cdot G(t) = T_{\pm p}^{\text{OPE}} G(t) \quad (3.2.40)$$

mit

$$G(\mu^2) = 1$$

für grosse s und endliche t (also $\cos \Theta \approx 1$) geschrieben werden kann.

Für $\cos \Theta = 1$ gilt

$$P_l(\cos \Theta) \approx J_0 \left([2l(l+1)(1 - \cos \Theta)]^{1/2} \right) \quad (3.2.41)$$

Ausserdem gilt für grosse s

$$Q_l \left(1 + \frac{2t^2}{s} \right) \approx K_0 \left([4l(l+1) \frac{t^2}{s}]^{1/2} \right)$$

Wir verwandeln die l -Summation in (3.2.39) in eine Integration, indem wir als Integrationsvariablen

$$x = \frac{\kappa^2}{s} l(l+1) \quad (3.2.42)$$

einführen. Mit

$$dx = \frac{\kappa^2}{s} (2l+1) dl$$

und

$$2l(l+1)(1 - \cos \Theta) = \frac{2s}{\kappa^2} x (1 - \cos \Theta) = -\frac{4}{\kappa^2} tx$$

sowie

$$4l(l+1) \frac{t^2}{s} = \frac{4t^2}{\kappa^2} \cdot \frac{\kappa^2}{s} = 4 \frac{t^2}{\kappa^2} x$$

wird aus (3.2.39)

$$\mathbb{T}_{\beta}^{\text{DWBA}}(t) = \frac{-2f_1 f_2}{x} \int_0^{\infty} dx k_0 \left(\sqrt{\frac{4x^2}{x}} \right) (1 - e^{-x}) j_0 \left(\sqrt{\frac{-4tx}{x}} \right) \quad (3.2.43)$$

Als eine Folge der speziellen Wahl von β in (3.2.38) erweist sich $\mathbb{T}_{\beta}^{\text{DWBA}}$ also als β -unabhängig. (3.2.43) hat an der Stelle $t = \mu^2$ einen Pol, der durch die Beiträge der grossen x -Werte zum Integral zustande kommt. Der den Term $\exp(-x)$ enthaltende Teil des Integranden ist für $x \rightarrow \infty$ so stark gedämpft, dass dieser durch die Unitaritätskorrektur bedingte Term einen für $t \rightarrow \mu^2$ regulären Beitrag liefert. Daher hat $\mathbb{T}_{\beta}^{\text{DWBA}}$ bei $t = \mu^2$ ebenso wie

$$\mathbb{T}_{\beta}^{\text{OPE}}(t) = \frac{-2f_1 f_2}{x} \int_0^{\infty} dx k_0 \left(\sqrt{\frac{4x^2}{x}} \right) j_0 \left(\sqrt{\frac{-4tx}{x}} \right)$$

einen Pol, und zwar mit dem gleichen Residuum. Daher ist, wie in (3.2.40) behauptet, $G(\mu^2) = 1$.

Die Funktion $G(t)$ verhält sich also wie ein Formfaktor. Die Frage der Interpretation phänomenologisch gewonnener "Formfaktoren" (siehe Kap. 3.1.2.) ist somit völlig offen, da sie sowohl ihren Ursprung in Vertexkorrekturen als auch in den Wechselwirkungen in Anfangs- bzw. Endzustand haben können.

Diese "Nichtunterscheidbarkeit" vom peripheren Modell mit Formfaktoren einerseits und Absorptionskorrekturen andererseits wird weitgehend aufgehoben, wenn man Teilchen mit Spin betrachtet. In den Fällen, wo eines der erzeugten Teilchen C oder D eine Resonanz mit Spin $\neq 0$ ist, hängt deren Zerfallswinkelverteilung wesentlich von der benutzten Version des peripheren Modells ab ⁶⁾.

Im folgenden Kap. 3.3 wird ein Vergleich des experimentellen Materials mit der Theorie gegeben.

Literatur in Kap. 3.2

- 1) M.J. Moravcsik: "Modified phase shift analysis in N-N interaction"
in Sreatar "Dispersion Relations".
- 2) L. Durand III, Y.T.Chiu: Phys.Rev.Lett. 12, 399 (1964)
- 3) M.H.Ross, G.L.Shaw: Phys.Rev.Lett. 12, 627 (1964)
- 4) M.Baker, R.Blankenbecler: Phys.Rev. 128, 415 (1962)
- 5) Vergleiche z.B.:
A. Bialas and L. Van Hove: CERN-preprint TH.537
(15 March 1965)
sowie die dort zitierte Literatur.
- 6) Vergleiche z.B.:
K.Gottfried and J.P.Jackson: Nuovo Cim. 34, 735 (1964)
sowie die dort zitierte Literatur.

3.3 Vergleich des peripheren Modells mit Experimenten *)

(von P.Söding und G.Wolf)

Eine Übersicht über den Vergleich einiger typischer Reaktionen mit den Vorhersagen des peripheren Modells gibt Tabelle I für die Formfaktor-Version, und Tabelle II für das periphere Modell mit Absorptionskorrekturen. Die Resultate lassen sich etwa folgendermassen zusammenfassen:

a) Peripheres Modell mit Formfaktoren

Für Reaktionen, die über Ein-Pion-Austausch ablaufen können, kann durch Annahme einer allerdings relativ stark vom Impulsübertrag abhängigen Formfaktorfunktion Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt werden. Die Form dieser Funktion scheint unabhängig von der Art der jeweils gekoppelten Teilchen zu sein; mit praktisch derselben Formfaktorfunktion bekommt man eine befriedigende Beschreibung zum Beispiel für die Reaktionen $\pi^+ p \rightarrow \rho^+ p$, $K^+ p \rightarrow K^{*0} N^{*++}$, und $\bar{p} p \rightarrow N^{*++} \bar{N}^{*--}$. Das gilt für die Form und absolute Grösse des differentiellen Wirkungsquerschnitts dieser Quasi-Zweiteilchen-Reaktionen

*) Im Rahmen der Vorlesung wurde von P.Söding ein Vortrag über den Vergleich des experimentellen Materials mit der Theorie gegeben. Da in der Zwischenzeit nicht nur das experimentelle Material angewachsen ist, sondern auch die Details der Absorptionskorrekturen ausgearbeitet und viele Reaktionen numerisch durchgerechnet wurden, erklärten sich die Herren P.Söding und G.Wolf freundlicherweise bereit, den Vergleich zwischen Experiment und Theorie dem Stand vom Sommer 1965 anzupassen.

wie auch für die Energieabhängigkeit. Allerdings deuten die Experimente auf eine Abhängigkeit der Zerfallswinkelverteilungen der Resonanzen vom Impulsübertrag bei der Erzeugung hin, während das Modell vom Impulsübertrag unabhängige Zerfallswinkelverteilungen liefert. Für die Reaktion $K^+p \rightarrow K^{*+}p$ erhält man überhaupt keine Übereinstimmung für die Zerfallswinkelverteilung, wenn man sich auf Ein-Pion-Austausch beschränkt; durch Annahme von zusätzlichen Beiträgen von Vektormeson-Austausch lässt sich diese Diskrepanz beheben. Eine Anwendung auf Fälle, in denen Ein-Pion-Austausch nicht möglich ist, wie $\pi^+p \rightarrow \pi^0 N^{*++}$, $\pi^+p \rightarrow \omega N^{*++}$ oder $K^+p \rightarrow K^0 N^{*++}$, und für die Austausch eines Vektormesons (ρ, ω, K^*) angenommen wurde, lieferte keine befriedigenden Resultate. Die gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitte fallen mit zunehmendem Impulsübertrag so stark ab, dass sich ohne unrealistische Annahmen über das Verhalten des Formfaktors keine Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment ergibt. Ausserdem wird die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts in diesen Fällen nicht richtig beschrieben; das Verhältnis $\sigma_{\text{theo}} / \sigma_{\text{exp}}$ steigt mit der Energie.

b) Peripheres Modell mit Absorptionskorrekturen

Einer der Erfolge des Absorptionsmodells besteht darin, dass es die Zerfallswinkelverteilungen der in Quasi-Zweiteilchen-Reaktionen erzeugten Resonanzen in vielen Fällen richtig vorhersagt, sowohl der Form als auch der Abhängigkeit vom Impulsübertrag bei der Erzeugung nach. Eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment liegt bei der Reaktion $\pi^+p \rightarrow \rho^+p$ vor; oberhalb 2 GeV/c werden die Zerfallswinkelverteilungen und die Form und absolute Grösse des differentiellen Wirkungsquerschnitts als Funktion des Impulsübertrags und der Energie für diese Reaktion richtig geliefert, unter

Annahme von Ein-Pion-Austausch.

Für die Reaktionen $K^+p \rightarrow K^{*+}p$ muss dagegen zusätzlich zum Pion-austausch noch ein Beitrag vom Austausch eines Vektormesons angenommen werden.

Andere Reaktionen, in denen ebenfalls Ein-Pion-Austausch möglich ist, scheinen weniger gut durch das Modell beschrieben zu werden; für $p\bar{p} \rightarrow N^{*++}N^{*-}$ zum Beispiel liefert es einen viel zu grossen absoluten Wirkungsquerschnitt. Noch schlechter ist die Situation für einige Reaktionen, in denen Ein-Pion-Austausch verboten ist, wie zum Beispiel für $\pi^+p \rightarrow \pi^0 N^{*++}$. Hier versagt das Modell sowohl bezüglich der Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts als auch seiner Energieabhängigkeit. Dasselbe gilt für die "elastischen" Ladungsaustauschreaktionen $\pi^-p \rightarrow \pi^0 n$ und $K^-p \rightarrow \bar{K}^0 n$.

Literatur zu Kap. 3.3

- 1) V. Barger and M. Ebel; Phys.Rev. 138, B1148 (1965)
- 2) H. Högaasen and J. Högaasen:
 - a) Nuovo Cimento 39, 941 (1965)
 - b) CERN Vorabdruck 65/829/5 - TH 561
- 3) L. Durand III. and Y.T. Chiu; Phys.Rev. 137, B 1530 (1965)
- 4) J.D. Jackson, J.T. K. Gottfried, R. Keyser, B.E.Y. Svensson:
Phys.Rev. 139, B 428 (1965)
J.D. Jackson, Rev.Mod.Phys. im Druck
- 5) G. Kramer and K. Schilling:
Z.Physik im Druck
- 6) J.D. Jackson: private Mitteilung
- 7) B.E.Y. Svensson; Nuovo Cimento 37, 714 (1965)
- 8) B.E.Y. Svensson; Nuovo Cimento 39, 667 (1965)
- 9) die Referenz siehe bei
J.D. Jackson and H. Pilkuhn; Nuovo Cimento 33, 906 (1964);
Nuovo Cimento 34, 1841 (1964)
- 10) Deutsch-Englische Collaboration; Phys.Rev. 138, B 897 (1965)
- 11) N. Schmitz: Vorabdruck (1965)
- 12) E. Ferrari and F. Selleri; Nuovo Cimento 27, 1450 (1963)
- 13) T.C. Bacon et al.; Phys.Rev.139, B 1420 (1965)
- 14) K. Böckmann et al.; Phys.Lett. 15, 356 (1965)
- 15) C. Baltay et al.; Nucleon Structure, herausgegeben von R. Hofstadter und L.I. Schiff;
T. Ferbel et al.; Nuovo Cimento 38 12 (1965); 38, 19 (1965)

3.3 Tabelle I: Vergleich des peripheren Modells mit Formfaktoren mit den Experimenten *)

Reaktion	ausgetauschtes Teilchen	Laborimpulsbereich (GeV/c)	Form von $\frac{d\sigma}{dt}$ theoret.	Absolute Grösse von σ theoret.	Energieabhängigkeit von $\sigma_{\text{theor.}} / \sigma_{\text{exp.}}$	Referenz
$\pi^+ p \rightarrow \rho^+ p$	π	1.59 - 8	✓	✓	✓	Saclay-Bari-Bologna-Orsay Collab. ABBBHLM Collab, ABC Collab; 9)
$\pi^- p \rightarrow \rho^- p$	π	1.59 - 4	✓	✓	✓	} Saclay-Bari-Bologna-Orsay-Collab. ABBBHLM Collab; 9)
$\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$	π	1.59 - 4	✓	✓	✓	
$K^+ p \rightarrow K^{*+} p$	π +Vektor	2 - 3	✓	✓	✓	9)
$\pi^+ p \rightarrow \pi^0 N^{*++}$	ρ (M1)	1.59 - 8		Kopplungskonstante angepasst	wächst mit wachsender Energie	Daradzin et al., ABBBHLM Collab. ABC Collab. 9)
$K^+ p \rightarrow K^0 N^{*++}$	ρ (M1)	1.96-3			wächst mit wachsender Energie	9)

3.3 Tabelle I (Forts.)

$\pi^+ p \rightarrow \rho^0 N^{*++}$	π	4	✓	✓		ABBBHLM 10)
$\pi^+ p \rightarrow \omega N^{*++}$	ρ (M1)	2 - 4	✓	Kopplungskonstante angepasst		Xuong et al., ABBBHLM 11)
$K^+ p \rightarrow K^{0*} N^{*++}$	π + Vektor	1.96 - 3.5	✓	✓	✓	11)
$p p \rightarrow n N^{*++}$	π	1.6 - 3.7	✓	✓	✓	12)
$\bar{p} n \rightarrow \rho N^{*-}$	π	1.95	✓	Faktor ≈ 2 zu gross		T.C.Bacon et al. 13)
$\bar{p} p \rightarrow \bar{N}^* N^{*++}$	π	3.25 - 7	✓	bei 5.7 GeV/c $\approx 30\%$ zu gross	in etwa richtig	Baltay et al. 15) BHM Collab. 14)

*) Das Zeichen ✓ bedeutet Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

3.3 Tabelle II: Vergleich des peripheren Modells mit Absorptionskorrekturen mit den Experimenten *)

Reaktion	ausgetauschtes Teilchen	Laborimpulsbereich (GeV/c)	Form von $\frac{d\sigma}{dt}$ theoret.	Absolute Grösse von σ theoret.	Energieabhängigkeit von $\sigma_{\text{theor.}} / \sigma_{\text{exp.}}$	theoret. Zerfallswinkelverteilg.	Referenz
$\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n$	ρ	5.9 - 1.8	nicht peripher genug	Faktor ~ 5 zu gross	wächst mit wachsender Energie		1, 2a
$K^+ p \rightarrow K^0 n$	ρ	9.5	nicht peripher genug	Faktor ~ 5 zu gross			2a
$n p \rightarrow p n$	π (ρ)	2,85	✓	✓	✓		3
$p \bar{p} \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda}$	K^*	3 - 7	✓	Kopplungskonstante unbekannt	wächst mit wachsender Energie		2b, 3
$p \bar{p} \rightarrow \begin{cases} \Lambda \bar{\Sigma}^0 \\ \bar{\Lambda} \Sigma^0 \end{cases}$	K^*	3 - 7	✓	"	"		2b, 3
$p \bar{p} \rightarrow \Sigma^+ \bar{\Sigma}^+$	K^*	3 - 7	✓	"	konstant		2b
$\pi^+ p \rightarrow \rho^+ p$	π	2.1 - 8	✓	✓	✓	✓	3, 4
$\pi^- p \rightarrow \rho^- p$	π	1.6 - 4	✓	stimmt	stimmt	✓	3, 4
$K^+ p \rightarrow K^{*+} p$	π +Vektor	2 - 5	bei 5 GeV/c nicht peripher genug	bei 5 GeV/c zu gross	wächst mit wachsender Energie	✓	4
$K^+ p \rightarrow K^{*+} p$	π +Vektor	3	✓	✓		✓	4

Noch 3.3. Tabelle II

$K^+ n \rightarrow K^{*0} p$	π (+Vektor)	2.3	✓	✓		✓	4
$\gamma p \rightarrow \rho^0 p$	π	1 - 5	nicht peripher genug	Kopplungskonstante unbekannt	stimmt nicht	stimmt nicht	5, 6
$\pi^+ p \rightarrow \pi^0 N^{*++}$	ρ (M1)	2.75 - 4	viel zu schwacher Abfall von $\frac{d\sigma}{dt}$ zu grösseren t	bei 4 GeV/c zu gross	wächst mit wachsender Energie	✓	4
$K^+ p \rightarrow K^0 N^{*++}$	ρ (M1)	1.96 - 5	stimmt, mit zu- sätzlichem Formfaktor	Kopplungskonstante stimmt mit SU_3	wächst mit wachsender Energie	stimmt nur qualitativ	4
$K^- p \rightarrow \pi^- Y_{1385}^{*+}$	K^* (M1)	2.24	stimmt, mit zusätzlichem Formfaktor			✓	4
$\pi^+ n \rightarrow \omega p$	ρ	1.7 - 3.25	✓	Kopplungskonstante bei einer Energie angepasst	wächst mit wachsender Energie	✓	4
$\pi^+ p \rightarrow \rho^0 N^{*++}$	π	2.8 - 8	✓	Faktor ~ 2 zu gross	wächst mit wachsender Energie	✓	4
$K^+ p \rightarrow K^{*0} N^{*++}$	π (+ ρ)	3 - 3.5	✓			✓	4
$\pi^+ p \rightarrow \omega N^{*++}$	ρ	2.35 - 4	stimmt, mit zusätzlichem Formfaktor	✓	✓	✓	7

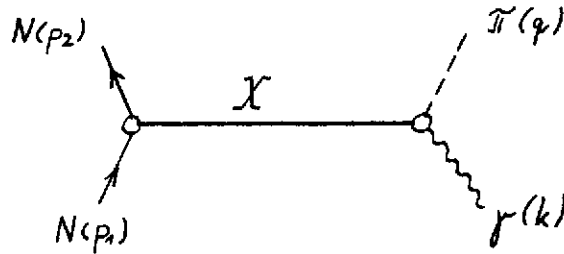
Noch 3.3 Tabelle II

$\bar{p}p \rightarrow \bar{N}^* N^*$	π	3.25 - 5.7	✓	Faktor ~ 5 zu gross	✓	✓	8
--------------------------------------	-------	------------	---	--------------------------	---	---	---

*) Das Zeichen ✓ bedeutet Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

4. Peripheres Modell für die Einfach-Pion-Photoerzeugung

Bei der Photo-Pionerzeugung im Rahmen des peripheren Modells



treten folgende Fragen auf:

- 1) Welche Teilchen X liefern den Hauptbeitrag zum Erzeugungsquerschnitt?
- 2) Von welcher Grössenordnung sind die Kopplungskonstanten an den Vertices $NX\bar{N}$ und $\gamma X\pi$?
- 3) Erfordern die experimentellen Daten die Einführung von Formfaktoren und Unitaritätskorrekturen?
- 4) Sind die ausgetauschten Teilchen X als "Elementarteilchen" oder als "Regge-Pole" zu behandeln?

Um eine Übersicht über die möglichen Feynmangraphen zu erhalten, die zum peripheren Photo-Pion-Erzeugungsprozess beitragen können, wollen wir zunächst die Auswahlregeln untersuchen, denen die Teilchen X genügen müssen.

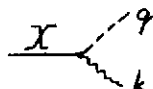
4.1 Auswahlregeln

Isotopen-Spin und G-Parität:

Die Auswahlregeln für I-Spin und G-Parität für das Matrixelement

$$\langle \pi | j_X^i(0) | \gamma \rangle$$

das dem Vertex



entspricht, haben wir in Teil I

dieser Vorlesung in Kap. 1.4 untersucht. Die Aufspaltung des elektromagnetischen Stromes (in 1. Ordnung der Störungsrechnung) in einen isoskalaren und einen isovektoriellen Anteil

$$j_{\mu}^d = j_{\mu}^{(s)} + j_{\mu}^{(v)}$$

führte zu den drei reduzierten Matrixelementen S_1, V_1, V_3 , aus denen sich die vier möglichen Amplituden der Einfach-Pion-Photoerzeugung linear kombinieren liessen.

Für den isoskalaren Anteil S_1 erhielten wir wegen

$$\begin{aligned} I_{\pi} &= 1 & G|\pi\rangle &= -|\pi\rangle \\ I_{\rho^{(s)}} &= 0 & G|\rho^{(s)}\rangle &= -|\rho^{(s)}\rangle \end{aligned}$$

die Auswahlregeln

$$\begin{aligned} I_x &= 1 \\ G_x &= 1 \end{aligned}$$

Für die isovektoriellen Anteile V_1, V_3 ergaben sich wegen

$$I_{\rho^{(v)}} = 1 \quad G|\rho^{(v)}\rangle = +|\rho^{(v)}\rangle$$

die Auswahlregeln

$$\begin{aligned} I_x &= 0, 1, 2 \\ G_x &= -1 \end{aligned}$$

Von den bekannten Mesonen $X(J^P; I^G)$:

$$\begin{array}{ccc} \pi(0^-; 1^-) & \rho(1^-; 1^+) & \omega(1^-; 0^-) \\ \eta(0^-; 0^+) & f(2^+; 0^+) & \varphi(1^-; 0^-) \end{array}$$

können also zum isoskalaren Anteil S_1 das ρ -Meson, zum isovektoriellen Anteil $V_{1,3}$ die Mesonen π, ω, φ beitragen.

Spin:

a) Der Austausch eines Teilchens X mit $J^P = 0^+$ ist verboten.

$j_X(0)$ transformiert sich in diesem Fall wie ein Skalar. Das

Matrixelement $\langle \pi | j_X(0) | \gamma \rangle$ transformiert sich also wie ein Pseudoskalar

$$\langle \pi | j_X(0) | k, \vec{\epsilon} \rangle = PS$$

Aus den 3 zur Verfügung stehenden Vierervektoren q, k, ϵ lässt sich jedoch kein PS bilden. Der Austausch eines skalaren Teilchens kann zur Einfach-Pion-Photoerzeugung nicht beitragen.

b) Der Austausch eines Teilchens X mit $J^P = 0^-$ ist nur dann erlaubt, wenn das ausgetauschte (pseudoskalare) Teilchen ein π -Meson ist.

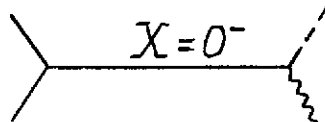
Diese Auswahlregel erklärt sich aus der Forderung der Eichinvarianz: In Kap. 1.2 hatten wir gesehen, dass Eichinvarianz für das reduzierte T-Matrix-Element T_{fi} zur Folge hat:

$$T_{fi}(\dots, \epsilon, \dots) / \epsilon = k = 0$$

Das Matrixelement für $X = 0^-$ transformiert sich wie ein Skalar:

$$\langle \pi | j_X(0) | k, \vec{\epsilon} \rangle = S$$

Die Eichinvarianz, die in jeder Ordnung der Störungstheorie gelten muss, ist durch den Beitrag des Feynmangraphen



allein nicht zu erfüllen. Bilden wir aus q, k, ϵ die (in ϵ linearen) möglichen Skalare, so erlaubt die Lorentzbedingung

$$k \cdot \epsilon = 0$$

nur die Bildung $(q \cdot \epsilon)$. Wir können als den Ansatz machen

$$\langle \pi | j_X(0) | k, \vec{\epsilon} \rangle = F_\pi(t) (q \cdot \epsilon) \quad (4.1.10)$$

da allgemein $(q \cdot k) \neq 0$, und es für $X \neq \pi$ keine anderen Graphen gibt, die zum Prozess $\gamma N \rightarrow \pi N$ beitragen und die Kopplungs-

konstanten f_{XNN}^- bzw. $f_{X\pi\pi}$ linear enthalten, verlangt die Eichinvarianz also $F_i(t) \equiv 0$ für $X \neq \pi$.

Handelt es sich bei $X = 0^-$ speziell um ein π -Meson, so lässt sich zeigen, dass ein anderer Feynmangraph gleicher Ordnung existiert, der zu einer eichinvarianten Erweiterung des OPE-Matrixelements führt. Den π -Meson-Austausch werden wir im Einzelnen in Kap. 4.2 behandeln.

C-Invarianz:

Bei der Photoerzeugung von neutralen π -Mesonen ist der Austausch von $X = \pi^0$ verboten.

Da die Eigenwerte des Operators der Ladungskonjugation

$$C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle; \quad C|\rho\rangle = -|\rho\rangle \quad \text{sind,}$$

muss für das ausgetauschte Teilchen

$$C_X|X\rangle = -|X\rangle$$

gelten. Bei der π^0 -Erzeugung können somit nur ausgetauscht werden

$$X = \rho, \omega, \varphi.$$

Für die 4 möglichen Amplituden der Photoerzeugungsprozesse von π -Mesonen

$$T^+ : \quad \gamma + p \rightarrow n + \pi^+$$

$$T^0 : \quad \gamma + p \rightarrow p + \pi^0$$

$$T^{n0} : \quad \gamma + n \rightarrow n + \pi^0$$

$$T^- : \quad \gamma + n \rightarrow p + \pi^-$$

(4.1.11)

hatten wir in Gleichung (1.49) Linearkombinationen der reduzierten Amplituden S_1, V_1, V_3 aufgeschrieben. Eine andere Darstellung ergibt sich, wenn man von der Zerlegung

$$T^{(s)} = \tau_{\beta} T^{(a)}$$

$$T^{(v)} = \delta_{\beta 3} T^{(+)} + \frac{1}{2} [\tau_{\beta}, \tau_3] T^{(-)}$$

des isoskalaren bzw. isovektoriellen Anteils der Amplitude ausgeht¹⁾. Berücksichtigt man, dass der Austausch eines π -Mesons ($I_{\pi} = 1$) nur zur Amplitude $T^{(-)}$ beitragen kann, der Austausch von ω und φ ($I_{\omega, \varphi} = 0$) dagegen in $T^{(+)}$ enthalten sein muss, so erhält man eine Gl. (1.49) entsprechende Entwicklung der Form

$$\begin{aligned} T^{+} &= -\sqrt{2} T_{\pi} - \sqrt{2} T_{\rho} \\ T^{0} &= T_{\omega} + T_{\varphi} + T_{\rho} \\ T^{n0} &= T_{\omega} + T_{\varphi} - T_{\rho} \\ T^{-} &= -\sqrt{2} T_{\pi} + \sqrt{2} T_{\rho} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Auch aus dieser Art der Entwicklung ist ersichtlich, dass für $\frac{5^{+}}{6^{-}} \neq 1$ eine Aussage über den relativen Beitrag des ρ -Austausches zur Einfach-Photo-Pionerzeugung möglich ist.

4.2 π -Austausch¹⁾

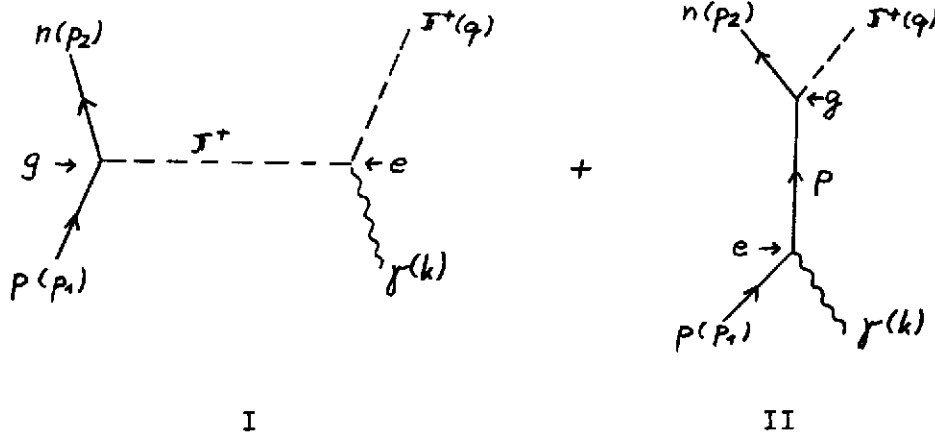
4.2.1 "Elementares" π -Meson

In Kap. 4.1 hatten wir gesehen, dass beim Austausch eines 0^{-} -Teilchens im t-Kanal eine eichinvariante Erweiterung (in gleicher Ordnung der Störungstheorie) des Matrix-Elementes notwendig ist.

Betrachten wir speziell den Photo-Erzeugungsprozess

$$T^{+}: \gamma + p \rightarrow n + \pi^{+}$$

so tragen in niedrigster Ordnung in e und g folgende Graphen zu diesem Prozess bei:



Die Feynmanregeln ergeben für die entsprechenden Matrix-Elemente

$$T_I = \frac{2eg(\varepsilon \cdot q)}{t - \mu^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \quad (4.2.10)$$

$$t = (p_2 - p_1)^2 = (k - q)^2$$

$$T_{II} = \frac{eg}{(p_1 + k)^2 - M^2} \bar{u}(p_2) \gamma_5 [(\not{p}_1 + \not{k}) + M] \varepsilon u(p_1) \quad (4.2.11)$$

wobei $\not{a} = a^\mu \gamma_\mu$ also $\not{a}\not{a} = a^2$.

Wenden wir in der Gleichung für T_{II} die Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - M)u(p) = 0$$

an und berücksichtigen die Vertauschungsrelationen der

γ -Matrizen, so erhalten wir mit $(p_1 + k)^2 - M^2 = 2(p_1 \cdot k)$

$$T_{II} = \tilde{T}_{II} + \hat{T}_{II}$$

mit

$$\tilde{T}_{II} = \frac{eg}{2(p_1 \cdot k)} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \not{k} \varepsilon u(p_1) \quad (4.2.12)$$

$$\hat{T}_{II} = \frac{eg}{(p_1 \cdot k)} (p_1 \cdot \varepsilon) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \quad (4.2.13)$$

Die Amplitude \tilde{T}_{II} ist wegen $k\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow k} k^2 = 0$ explizit eichinvariant.
Für \hat{T}_{II} erhalten wir

$$\hat{T}_{II} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow k} eg\bar{u}(p_2)\gamma_5\tilde{u}(p_1).$$

$\overline{T}_I + \hat{T}_{II}$ stellt somit die minimale eichinvariante Erweiterung von \overline{T}_I dar, denn mit $t - \not{u}^2 = -2(k \cdot q)$ wird

$$\overline{T}_I \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow k} -eg\bar{u}(p_2)\gamma_5\tilde{u}(p_1)$$

d.h.

$$(\overline{T}_I + \hat{T}_{II}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow k} 0$$

Die Aufspaltung des Matrixelementes \overline{T}_{II} in der Form $\tilde{\overline{T}}_{II} + \hat{T}_{II}$ entspricht der Zerlegung des Dirac-Stroms (nach Gordon) in einen Anteil vom magnetischen Moment ($\sim \tilde{\overline{T}}_{II}$) und in den "Bahnstrom" ($\sim \hat{T}_{II}$). Das Matrixelement \overline{T}_I des 1-Pion-Austausch enthält nur einen Beitrag zum Bahnstrom. Als eichinvarianten 1 π -Austausch bezeichnet man nun die sog. "minimale eichinvariante Erweiterung", in der man sich auf die Anteile zum Bahnstrom beschränkt. Man definiert also

$$T^\pi = \overline{T}_I + \hat{T}_{II} \quad \text{eichinvarianter 1}\pi\text{-Austausch (4.2.14)}$$

Das eichinvariante Matrix-Element T^π können wir nun speziell in der Coulombbeichung (CE) im Schwerpunktsystem betrachten. Dann gilt

$$\text{CE: } \varepsilon_0 = 0 \quad \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{Lorentz-Bedingung } ^{+)}$$

im System $\vec{p}_1 + \vec{k} = 0$

Damit verschwindet der Anteil \hat{T}_{II} zu T^π und wir erhalten

$$T^\pi = \overline{T}_I \Big|_{\substack{CE \\ CMS}} \quad (4.2.15)$$

Da wir uns im folgenden für das Hochenergieverhalten der Winkelverteilung für die Einfach-Photo-Pionerzeugung interessieren, müssen wir die Energieabhängigkeit von

^{+) bzw. in invarianter Schreibweise: $\varepsilon \cdot p_1 = 0$ mit $\varepsilon \cdot k = 0$}

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{S} \sum_{\text{spins}} |T^I|^2 = \frac{1}{S} \sum_{\text{spins}} |T_{I/CE}|^2 \quad (4.2.16)$$

untersuchen. Die Spinsummation ist über die Nukleonspins und den Photonspin durchzuführen. Dazu definiert man folgende Projektionsoperatoren

$$\Lambda(p) = \sum_{\text{spins}} \bar{u}(p) \langle \bar{u}(p) \rangle \quad (4.2.17)$$

$$P_{ij}(k) = \sum_{\vec{\epsilon}} \epsilon_i \epsilon_j^* \quad (4.2.18)$$

Mit diesen Projektionsoperatoren und der Identität

$$\sum_{\text{spins}} |\bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1)|^2 = \text{Spur} (\Lambda(p_2) \gamma_5 \Lambda(p_1) \gamma_5)$$

wird nach (4.2.10)

$$\sum_{\text{spins}} |T_{I/CE}|^2 = \frac{4e^2 g^2}{(t-\mu^2)^2} \sum_{i,j} q_i q_j P_{ij} \text{Sp} (\Lambda(p_1) \gamma_5 \Lambda(p_2) \gamma_5) \quad (4.2.19)$$

Auf die explizite Konstruktion der Projektionsoperatoren wollen wir hier nicht eingehen. Sie erfolgt für den Skalar $\Lambda(p)$ unter Berücksichtigung der Dirac-Gleichung und der Normierung der Spinoren $\bar{u}(p)$, für den Tensor P_{ij} unter Berücksichtigung der Lorentzbedingung und der Normierung des Polarisationsvektors $\vec{\epsilon}$. Das Ergebnis ist

$$\Lambda(p) = \frac{1}{2M} (\not{p} + M) \quad (4.2.20)$$

$$P_{ij}(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad \text{in CE} \quad (4.2.21)$$

Die Summation über den Photonspin liefert mit Gl. (4.2.21)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} q_i q_j P_{ij} &= \vec{q}^2 - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{k})^2}{k^2} \\ &= \vec{q}^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

mit

$$\theta = \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \stackrel{\text{CMS}}{=} \angle(\vec{q}, \vec{k})$$

Bei der Summation über die Spins der Nukleonen haben wir nach Gl. (4.2.19) zu bilden

$$Sp(\Lambda(p_1)\gamma_5\Lambda(p_2)\gamma_5) = \frac{1}{4M^2} Sp\left\{(\not{p}_1 + M)\gamma_5(\not{p}_2 + M)\gamma_5\right\}$$

Da die Spur über eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen verschwindet, wird mit $\gamma_5^2 = -1$

$$Sp(\Lambda(p_1)\gamma_5\Lambda(p_2)\gamma_5) = \frac{1}{4M^2} \left\{ Sp(\not{p}_1\not{p}_2) - 4M^2 \right\}$$

und mit

$$\begin{aligned} Sp(\not{p}_1\not{p}_2) &= 4(p_1 \cdot p_2) \\ &= -2t + 4M^2 \end{aligned}$$

erhalten wir schliesslich

$$Sp(\Lambda(p_1)\gamma_5\Lambda(p_2)\gamma_5) = \frac{-t}{2M^2} \quad (4.2.23)$$

Im Limes hoher Energien gilt

$$\begin{aligned} \cos \theta &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1 + \frac{2t}{s} \\ \sin^2 \theta &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\frac{4t}{s} + o\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ \bar{q}^2 &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{s}{4} \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Hierfür liefert die Spinsummation mit Gl. (4.2.22) und (4.2.23)

also

$$\sum_{\text{spins}} |T_{I/CMS}|^2 \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{4e^2g^2}{(t-\mu^2)^2} \cdot \frac{t^2}{2M^2}$$

Für endliche t haben wir in Gl. (4.2.16) für $d\Omega$ nach Gl. (4.2.24) einzuführen

$$d\Omega \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{s} d|t|$$

Somit ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d|t|} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{t^2}{(t-\mu^2)^2} \cdot e^2g^2 \quad (4.2.25)$$

Der Austausch eines "elementaren" \bar{K} -Mesons liefert für den Wirkungsquerschnitt der Einfach-Photo-Pionerzeugung also folgende charakteristischen Eigenschaften:

$$1) \frac{d\sigma}{d|t|} \sim \frac{1}{s^2} \quad \text{für } s \rightarrow \infty$$

$$2) \frac{d\sigma}{d|t|} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0 \quad (\text{Vorwärtsrichtung})$$

Allgemein ergibt sich für die t -Abhängigkeit des Erzeugungsquerschnittes von Prozessen, an denen Teilchen mit Spin beteiligt sind, dass das Quadrat des Propagators $\frac{1}{(t-\mu^2)^2}$ mit einem Polynom in t zu multiplizieren ist, dessen Grad durch den Spin der beteiligten Teilchen bestimmt ist.

4.2.2 "Regge"- \bar{K} -Meson

In Kap. 3.1.3 hatten wir gesehen, dass im Rahmen des Regge-Formalismus die Übergangsamplitude noch eine zusätzliche Energieabhängigkeit aufweist:

$$T_{\bar{K}} \sim s^{\alpha_{\bar{K}}(t)} \quad (4.2.26)$$

Speziell für das \bar{K} -Meson gilt

$$\alpha_{\bar{K}}(t=\mu^2) = J_{\bar{K}} = 0$$

Da allgemein $(\alpha(t))' > 0$, können wir annehmen, dass im physikalischen t -Bereich

$$\alpha_{\bar{K}}(t) < 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (4.2.27)$$

Mit (4.2.26) ergibt sich für das Hochenergieverhalten des differentiellen Wirkungsquerschnitts

$$\frac{d\sigma}{d|t|} \sim \frac{1}{s^2} |T_{\bar{K}}|^2 \sim G_{\bar{K}}(t) s^{2(\alpha_{\bar{K}}(t)-1)} \quad (4.2.28)$$

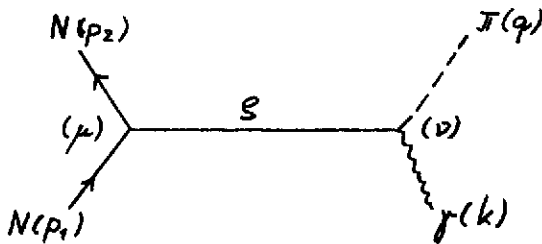
mit

$$G_{\pi}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \mu^2} \frac{1}{(t - \mu^2)^2}$$

Eine Aussage über das Verhalten von $G_{\pi}(t)$ für $t \rightarrow 0$ ist vom theoretischen Standpunkt aus nicht möglich ¹⁾.

4.3. ρ -Austausch

4.3.1 "Elementares" ρ -Meson



Das ρ -Meson ist ein Vektor-
teilchen mit den Quanten-
zahlen $J^P = 1^-$. In Kap.
2.3.4 hatten wir das
Matrix-Element für den
 ρ -Austausch bei der

Einfach-Photo-Pionerzeugung angegeben:

$$T_{\rho} = \bar{u}(p_2) T_{\mu}^{(\rho)} u(p_1) \frac{g^{\mu\nu} - \frac{(q-k)^{\mu}(q-k)^{\nu}}{m_{\rho}^2}}{t - m_{\rho}^2} T_{\nu}^{(\pi\rho\gamma)} \quad (4.3.10)$$

Wir wollen zunächst die Struktur der Vertexfunktionen $T_{\mu}^{(\rho)}$ unter-
suchen. Nach Kap. 3.1.2 gilt für den Vertex $(\pi\rho\gamma)$

$$T_{\nu}^{(\pi\rho\gamma)} = \langle \pi | j_{\nu}^{(\rho)}(0) | \gamma \rangle \quad (4.3.11)$$

Das Matrix-Element (4.3.11) hat die Transformationseigenschaften
eines Achsialvektors AV. Aus den Vektoren ϵ, k, q lässt sich
genau ein Achsialvektor konstruieren. Wir setzen deshalb

$$T_{\nu}^{(\pi\rho\gamma)} = \lambda \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} q^{\sigma} k^{\beta} \epsilon^{\alpha} \quad (4.3.12)$$

$\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}$ ist der total antisymmetrische Tensor mit $\epsilon_{0123} = 1$.
Die Definition von T_ν nach Gl. (4.3.12) ist somit eichinvariant.
Für die 0-Komponente von $T_\nu^{(\pi\mathcal{I}\mathcal{I})}$ erhalten wir wegen

$$\epsilon_{0123} = -\epsilon_{0213} = \epsilon_{0312} = \dots = -\epsilon_{0321} = 1$$

das Spatprodukt aus den Vektoren $\vec{q}, \vec{k}, \vec{\epsilon}$

$$T_0^{(\pi\mathcal{I}\mathcal{I})} = \lambda (\vec{q} \cdot [\vec{k} \times \vec{\epsilon}])$$

Die 0-Komponente verhält sich also offensichtlich wie ein PS gegenüber Raumspiegelung. Allgemein transformieren sich die Komponenten eines AV bei Raumspiegelung nach

$$AV = ((AV)_0, (\vec{AV})) \xrightarrow{\Pi} (-(AV)_0, (\vec{AV}))$$

Dass auch die "räumlichen" Komponenten von $T_\nu^{(\pi\mathcal{I}\mathcal{I})}$ das richtige Transformationsverhalten zeigen, ersieht man aus der leicht zu errechnenden expliziten Gestalt

$$T_\nu^{(\pi\mathcal{I}\mathcal{I})} = \lambda \left((\vec{q} \cdot [\vec{k} \times \vec{\epsilon}]), -q_0 [\vec{k} \times \vec{\epsilon}] + k_0 [\vec{q} \times \vec{\epsilon}] - \epsilon_0 [\vec{q} \times \vec{k}] \right) \quad (4.3.13)$$

Die Grösse λ ist die Kopplungskonstante am $(\pi\mathcal{I}\mathcal{I})$ -Vertex. Die den Vertex $(N\mathcal{E}\bar{N})$ charakterisierende Funktion $T_\mu^{(S)}$ besitzt die Transformationseigenschaften eines Vektors V. Diesen Vektor haben wir aus den Grössen $\delta_\mu, p_{1\mu}$ und $p_{2\mu}$ zu konstruieren. Der allgemeinste Ansatz ist

$$T_\mu^{(S)} = a\delta_\mu + b(p_1 + p_2)_\mu + c(p_1 - p_2)_\mu + d(p_1 + p_2)^\nu \bar{\sigma}_{\nu\mu} + e(p_1 - p_2)^\nu \bar{\sigma}_{\nu\mu} \quad (4.3.14)$$

mit

$$\bar{\sigma}_{\nu\mu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu)$$

Da $T_\mu^{(S)}$ im Matrixelement (4.3.10) zwischen Dirac-Spinoren steht, ist die Dirac-Gleichung als Nebenbedingung zu berücksich-

tigen.

$$(\not{p} - M)\bar{u}(p) = 0$$

bzw.

$$\bar{u}(p)(\not{p} - M) = 0$$

Damit tritt eine lineare Abhängigkeit zwischen einzelnen Entwicklungsgliedern in Gl. (4.3.14) auf. So ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2)\sigma_{\mu\nu}(p_1-p_2)^\nu\bar{u}(p_1) &\equiv \frac{1}{2i}\bar{u}_2\left\{\gamma_\mu(p_1-p_2) - (p_1-p_2)\gamma_\mu\right\}\bar{u}_1 \\ &= \frac{1}{2i}\bar{u}_2\left\{2M\gamma_\mu - \gamma_\mu\not{p}_2 - \not{p}_1\gamma_\mu\right\}\bar{u}_1 \end{aligned}$$

Da $\gamma_\mu\not{p} = -\not{p}\gamma_\mu + 2p_\mu$, erhält man

$$\bar{u}(p_2)\sigma_{\mu\nu}(p_1-p_2)^\nu\bar{u}(p_1) = \frac{1}{2i}\bar{u}_2\left\{4M\gamma_\mu - 2(p_1+p_2)_\mu\right\}\bar{u}_1$$

Die Vektoren $(p_1-p_2)^\nu\sigma_{\nu\mu}$, γ_μ , $(p_1+p_2)_\mu$ sind also zwischen Dirac-Spinoren linear abhängig. Entsprechendes lässt sich hinsichtlich der Vektoren $(p_1+p_2)^\nu\sigma_{\nu\mu}$ und $(p_1-p_2)_\mu$ zeigen. Der Ansatz (4.3.14) lässt sich somit reduzieren auf die Form

$$T_\mu^{(S)} = a\gamma_\mu + c(p_1-p_2)_\mu + e(p_1-p_2)^\nu\sigma_{\nu\mu} \quad (4.3.15)$$

Eine weitere Reduktion ergibt sich aus der Forderung der Invarianz der Wechselwirkung gegenüber Zeitumkehr und der Realitätseigenschaft des Stromes $j_\mu^{(S)}$. Um dies zu zeigen, wollen wir speziell den Austausch eines neutralen φ^0 betrachten, dessen Strom hermitesch sein muss

$$j_\mu^{(S^0)\dagger}(x) = j_\mu^{(S^0)}(x) \quad (4.3.16)$$

Beh.: Invarianz gegen Zeitumkehr verlangt für die Entwicklung (4.3.15) von $T_\mu^{(S)}$

$$c = 0$$

Bew.: Wir wollen Invarianz gegen Raumspiegelung P voraussetzen, so dass wir anstelle der Zeitspiegelung T die Operation der vollen Inversion \mathcal{F} untersuchen können. Der Operator \mathcal{F} ist mit T ein antiunitärer (unitär, antilinear) Operator. Für den Strom $j_\mu^{(S)}(x)$ gilt

$$\mathcal{F} j_\mu^{(S)}(x) \mathcal{F}^{-1} = j_\mu^{(S)}(-x) \quad (4.3.18)$$

Unter Berücksichtigung der Hermitezität von $j_\mu^{(S)}$ gilt (4.3.18) zunächst nur bis auf ein Vorzeichen. Die Existenz des Zerfalls $\mathcal{S} \rightarrow 2\mathcal{F}$ legt dann das Vorzeichen als +1 fest: Betrachten wir nämlich den effektiven \mathcal{F} -Anteil von $j_\mu^{(S^0)}(x)$

$$j_\mu^{(S^0)}(x) / \mathcal{F}\text{-Anteil} \sim i \varphi_{\mathcal{F}}^+(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi(x) \quad (4.3.19)$$

mit

$$\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu \quad (4.3.20)$$

so erkennt man, dass sich wegen der Antilinearität von \mathcal{F} und der Eigenschaft $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \xrightarrow{\mathcal{F}} -\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ der hermitesche Strom $j_\mu^{(S^0)}$ mit einem positiven Vorzeichen unter \mathcal{F} transformiert.

Die Hermitezität (4.3.16) verlangt für die Vertexfunktion (4.3.15)

$$\langle 2 | j_\mu^{(S^0)}(0) | 1 \rangle^* = \langle 1 | j_\mu^{(S^0)}(0) | 2 \rangle \quad (4.3.21)$$

Für den zweiten Summanden von $T_\mu^{(S)}$ bedeutet das

$$(c \bar{u}_2(p_1 - p_2)_\mu \tilde{u}_1)^* = c \bar{u}_1(p_2 - p_1)_\mu \tilde{u}_2$$

Diese Gleichung lässt sich wegen

$$(c \bar{u}_2(p_1 - p_2)_\mu \tilde{u}_1)^* = c^* \bar{u}_1(p_1 - p_2)_\mu \tilde{u}_2$$

nur erfüllen, wenn

$$c^* = -c \quad \text{gilt.} \quad (4.3.22)$$

+) $\mathcal{F} = PT$; $\mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger = 1$ (4.3.17)

Andererseits erhalten wir aus der Invarianz gegen volle Inversion die Bedingung

$$\begin{aligned} \langle 2 | j_{\mu}^{(s)}(0) | 1 \rangle &= \langle 2 | \mathcal{F}^{\dagger} j_{\mu}^{(s)}(0) \mathcal{F} | 1 \rangle \\ &= \langle 2 | \mathcal{F}^{-1} j_{\mu}^{(s)}(0) \mathcal{F} | 1 \rangle && (4.3.23) \\ &= \langle 2_i | j_{\mu}^{(s)}(0) | 1_i \rangle^* \end{aligned}$$

die für den zweiten Term von $T_{\mu}^{(s)}$ die Aussage liefert

$$c \bar{u}_2 (p_1 - p_2)_{\mu} \check{u}_1 = c^* \left\{ \bar{u}_{2_i} (p_1 - p_2)_{\mu} \check{u}_{1_i} \right\}^*$$

Der Index i kennzeichnet dabei den transformierten Spinor

$$\check{u}(p, s) \xrightarrow{\mathcal{F}} \check{u}_i(p, s)$$

Ohne auf das Transformationsverhalten der Diracspinoren bei voller Inversion im Einzelnen einzugehen, sei bemerkt, dass der Impuls-Vierer-Vektor unter \mathcal{F} in sich übergeht

$$p \xrightarrow{\mathcal{F}} p$$

während die Spinkomponente unter \mathcal{F} das Vorzeichen ändert.

Das Ergebnis ist

$$\check{u}_{p, m}^i = (-1)^{m - \frac{1}{2}} T_{\mathcal{F}}^* \check{u}_{p, -m}^*$$

mit

$$T_{\mathcal{F}}^{\dagger} T_{\mathcal{F}} = 1 \quad T_{\mathcal{F}}^{\dagger} \gamma_{\mu}^* T_{\mathcal{F}} = \gamma_{\mu}$$

Damit ergibt sich

$$(\bar{u}_2^i \check{u}_1^i)^* = \bar{u}_2 \check{u}_1$$

so dass wir zu fordern haben

$$c \bar{u}_2 (p_1 - p_2)_{\mu} \check{u}_1 = c^* \bar{u}_2 (p_1 - p_2)_{\mu} \check{u}_1$$

d.h.

$$c = c^*$$

Wir erhalten somit einen Widerspruch zur Bedingung (4.3.22) und folgern

$$c = 0$$

Für die Vertex-Funktion $T_\mu^{(g)}$ erhalten wir nun die mit der \mathcal{F} -Invarianz verträgliche Darstellung

$$T_\mu^{(g)} = f_1 \gamma_\mu + \frac{f_2}{2M} i \sigma_{\mu\nu} (p_2 - p_1)^\nu \quad (4.3.24)$$

mit f_1, f_2 reelle Funktionen.

Die durch (4.3.24) definierte Vertexfunktion genügt formal einer Kontinuitätsgleichung. Multiplizieren wir $T_\mu^{(g)}$ mit $(p_1 - p_2)^\mu$, so wird

$$(p_2 - p_1)^\mu T_\mu^{(g)} = f_1 (p_2 - p_1)$$

und damit als Folge der Diracgleichung

$$(p_2 - p_1)^\mu \langle 2 | j_\mu^{(g)} | 1 \rangle = 0 \quad (4.3.25)$$

Berücksichtigen wir Gl. (4.3.25) in der Gl. (4.3.10) für das Matrixelement T_S , so verschwindet der Beitrag des Terms $\frac{(q-k)^\mu (q-k)^\nu}{m_g^2}$ vom Propagator des g -Mesons. Wir erhalten schliesslich

$$T_S = \bar{u}(p_2) T_\mu^{(g)} u(p_1) \frac{g^{\mu\nu}}{t - m_g^2} T_\nu^{(\pi g)} \quad (4.3.26)$$

wobei $T_\mu^{(g)}$ und $T_\nu^{(\pi g)}$ durch (4.3.24) bzw. (4.3.12) gegeben sind.

Hochenergie-Verhalten $\frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{1}{s^2} \sum_{\text{spins}} |T_S|^2$

Die Summation über die Spins von Nukleonen und Photon ergibt ²⁾

$$\sum_{\text{spins}} |T_S|^2 \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \pi^2 s^2 (-t) \left(f_1^2 - t \left(\frac{f_2}{2M} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{(t - m_g^2)^2} \quad (4.3.27)$$

so dass im Limes grosser Energien

$$\frac{d\sigma}{d|t|} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^2 \left[f_1^2 - t \left(\frac{f_2}{2M} \right)^2 \right] \cdot \frac{-t}{(t - m_\rho^2)^2} \quad (4.3.28)$$

Im Gegensatz zum Hochenergieverhalten des differentiellen Wirkungsquerschnitts beim Austausch eines "elementaren" \bar{K} -Mesons, für das $\frac{d\sigma}{d|t|} \sim \frac{1}{s^2}$ für $s \rightarrow \infty$ galt, wird beim Austausch eines "elementaren" ρ -Mesons

$$\frac{d\sigma}{d|t|} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \text{energieunabhängig.}$$

In Kap. 3.1.3 hatten wir gezeigt, dass sich für den Austausch von Teilchen mit Gesamtdrehimpuls 1 das Matrixelement $T_{AB \rightarrow CD}$ verhält wie

$$T_{AB \rightarrow CD} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^l$$

was wegen $l_\rho = 1, l_K = 0$ das unterschiedliche Hochenergieverhalten der beiden Beiträge zur Einfach-Photo-Pionerzeugung erklärt.

Die Energieunabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts bei hohen Energien für den ρ -Austausch hat zur Folge, dass dieser Beitrag zum Photo-Pion-Erzeugungsprozess den des \bar{K} -Austauschs überwiegt, obschon der Pol des ρ -Propagators weiter vom physikalischen t -Bereich entfernt liegt als der des \bar{K} -Propagators.

Im Regge-Formalismus tritt auch für den ρ -Austausch eine s -Abhängigkeit im Wirkungsquerschnitt für $s \rightarrow \infty$ auf. Aber auch in diesem Fall sollte $\frac{d\sigma_\rho}{d|t|}$ für $s \rightarrow \infty$ weniger stark abfallen als $\frac{d\sigma_K}{d|t|}$.

4.3.2 "Regge"- ρ -Meson

Im Regge-Formalismus erhalten wir entsprechend der Gl. (4.2.26)

$$T_\rho \sim s^{\alpha_\rho(t)} \quad (4.3.29)$$

wobei für das ρ -Meson

$$\alpha_{\rho}(t=m_{\rho}^2) = \mathcal{F}_{\rho} = 1$$

Wegen $(\alpha(t))' > 0$ nehmen wir im physikalischen t -Bereich an

$$\alpha_{\rho}(t) < 1 \quad \text{für } t < 0 \quad (4.3.30)$$

Im Limes $s \rightarrow \infty$ erhält man für $\frac{d\sigma}{dt}$

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim G_{\rho}(t) s^{2(\alpha_{\rho}(t)-1)} \quad (4.3.31)$$

mit

$$G_{\rho}(t) \xrightarrow{t \rightarrow m_{\rho}^2} \frac{1}{(t-m_{\rho}^2)^2}$$

Auch für $G_{\rho}(t)$ lässt sich keine Aussage für $t \rightarrow 0$ machen. Für die

Regge-Trajektorien $\alpha_{\rho}(t)$, $\alpha_{\pi}(t)$ nimmt man an

$$\alpha_{\rho}(0) \simeq \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{\pi}(0) \simeq 0$$

Daraus folgert man, dass auch der Austausch des "Regge"- ρ -Mesons zu einem schwächeren Abfall in S im Wirkungsquerschnitt führt, als der Austausch eines "Regge"- π -Mesons.

Für die Diskussion der Einfach-Photo-Pionerzeugung mit ω - bzw. φ -Austausch ergeben sich im Rahmen des bisherigen Formalismus keine neuen Gesichtspunkte, da ω und φ ebenfalls $\mathcal{F}^P = 1$ haben. Nur im Isospin-Verhalten, also bei der Betrachtung verschiedener Ladungskonfigurationen treten Unterschiede gegenüber dem ρ -Meson auf.

4.4 Einfachpionerzeugung mit linear polarisierten δ 's

Aus der Azimutal-Asymmetrie des Wirkungsquerschnitts für Einfachpionproduktion mit linear polarisierten δ 's kann man Information über Spin und Parität der peripher ausgetauschten Teilchen gewinnen. Diese Information ist insofern wichtig, als die t-Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts wegen Formfaktor- und Unitaritätskorrekturen sowie Reggeierung keine eindeutige Auskunft über die Art des ausgetauschten Teilchens liefert.

Die Bedeutung von Experimenten mit linear polarisierten δ -Quanten ist auch in anderem Zusammenhang bekannt:

1. In der Kernphysik kann man aus Winkelkorrelationen nur die Multipolarität der δ -Strahlung festlegen. Zur Bestimmung der Parität der Strahlung muss man auch ihre lineare Polarisation messen.
2. In Kap. 2.3 hatten wir gesehen, dass die Festlegung der Parität von \bar{w} -N-Isobaren erst unter Zuhilfenahme von linear polarisierten δ 's möglich ist.

Das folgende Theorem schliesst sich in seiner Bedeutung in gewisser Weise an diese Reihe an:

Theorem⁽³⁾

Bei Austausch von Elementarteilchen oder Regge-Teilchen oder Systemen aus solchen mit Spin j und Parität \bar{w}_j



ist die Erzeugungsamplitude T für Einfachpionproduktion am Nukleon mit

linear polarisierten γ 's der Polarisation $\underline{\epsilon}$ im Grenzfall grosser Energie s bei festem t

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad T(\gamma) &\sim \sin \gamma & \text{falls} \quad \pi_{\hat{q}} &= (-)^{j+1} \\ \text{b)} \quad T(\gamma) &\sim \cos \gamma & \text{falls} \quad \pi_{\hat{q}} &= (-)^j \end{aligned}$$

Dabei ist (s. Kap. 2.3.3) γ definiert durch

$$\underline{\epsilon} = -\cos \gamma \hat{\underline{w}} + \sin \gamma (\hat{\underline{w}} \times \hat{\underline{k}})$$

wo

$$\hat{\underline{w}} = \frac{\hat{\underline{k}} \times \hat{\underline{q}}}{|\sin \Theta|}, \quad \Theta = \angle(\underline{k}, \underline{q})$$

die Normale zur Reaktionsebene im CMS.

Der Beweis des Theorems in dieser allgemeinen Form ist langwierig. Daher wollen wir seine Aussage nur anhand der beiden Spezialfälle des elementaren π - und π -Austauschs überprüfen.

π -Austausch

Nach Kap. 4.2.1 wird der eichinvariante Anteil des Eipionenaustauschs im CMS bei Coulombbeichung durch T_{π} beschrieben. Daher ist

$$T_{\pi} = T_{\pi} \sim (\underline{\epsilon} \underline{q}) \sim \sin \gamma$$

Der π -Austausch ordnet sich also unter den Fall a) des Theorems ein. Er erfüllt die Aussage des Theorems sogar bereits bei endlichen Energien.

ρ -Austausch

Wegen des Vektorcharakters des ausgetauschten Teilchens beeinflusst die Spinsummation und ρ -mittelung über die Nukleonen die γ -Abhängigkeit des

Wirkungsquerschnitts. Daher wollen wir diese Summation und Mittelung gleich durchführen. Um die Rechnung nicht übermässig aufzublähen, nehmen wir nur den Dirac-Anteil ($\sim f_1$) der Vertexfunktion (s. Kap.4.3.1) $\Gamma_r^{N\bar{N}_s}$ mit. Wir wollen zeigen, dass der Fall b) des Theorems nach Spin-mittelung und -summation erfüllt ist:

$$\sum_{\text{Spins}} |\Gamma_s(s)|^2 \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \cos^2 \vartheta.$$

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spins } N, \bar{N}_2} |\Gamma_s(s)|^2 &\sim \sum_{\text{Spins } N, \bar{N}_2} (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_2 \gamma_\nu u_1)^* \Gamma^\nu(\pi\delta_s) \Gamma^\mu(\pi\delta_s) \\ &= \frac{1}{4M^2} \text{Sp} [(p_2 + M) \gamma_\mu (p_1 + M) \gamma_\nu] \Gamma^\nu(\pi\delta_s) \Gamma^\mu(\pi\delta_s) \\ &= \frac{1}{4M^2} \text{Sp} [p_2 \gamma_\mu p_1 \gamma_\nu + M^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \Gamma^\nu(\pi\delta_s) \Gamma^\mu(\pi\delta_s) \\ &= \frac{1}{M^2} (2(p_1 \Gamma)(p_2 \Gamma) - p_1 p_2 \Gamma^2 + M^2 \Gamma^2) \end{aligned}$$

wegen

$$\text{Sp} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\sigma \gamma_\tau] = 4 (g_{\alpha\beta} g_{\sigma\tau} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\tau} + g_{\alpha\tau} g_{\beta\sigma})$$

$$\text{Sp} (\gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4 g_{\alpha\beta}.$$

Aus

$$\Gamma^\nu(\pi\delta_s) = \lambda e^{i\delta\sigma\lambda} q_\nu k_\sigma \epsilon_\lambda$$

und

$$p_1 = p_2 + q - k$$

folgt, dass

$$p_2 \Gamma = p_1 \Gamma$$

so dass unser Ausdruck schliesslich wird

$$\sum_{\text{Spins } N_1, N_2} |\overline{M}_S(s)|^2 \sim \frac{1}{2t^2} [4(p_1 \pi^2 + t \pi^2)] . \quad (4.4.1)$$

Wir betrachten nun beide Anteile dieses letzten Ausdrucks ein wenig genauer:

1)

$$\pi^2 = \lambda^2 \epsilon_{\nu\sigma\lambda\delta} q^\delta k^\lambda \epsilon^\sigma \epsilon^\nu \epsilon^{\lambda'\delta'} q_{\delta'} k_{\lambda'} \epsilon_{\sigma'} .$$

Im Ruhssystem des \bar{u} -Mesons ($q = 0$) und bei Coulombbeichung wird hieraus

$$\pi^2 = \lambda^2 m_{\bar{u}}^2 (\underline{k} \times \underline{\epsilon})^2 = \lambda^2 m_{\bar{u}}^2 k^2 .$$

Dies kann man kovariant schreiben

$$\pi^2 = \lambda^2 (qk)^2 = -\frac{\lambda^2}{2} (t - m_{\bar{u}}^2) .$$

Daraus folgt das Ergebnis, dass

$$t \pi^2 = \mathcal{O}(s) \quad \text{bezgl. } s$$

2)

$$p_1 \pi = \lambda \epsilon_{\lambda\beta\gamma\delta} p_1^\lambda q^\delta k^\beta \epsilon^\gamma .$$

Im CMS bei Coulombbeichung ist dies

$$\begin{aligned} p_1 \pi &= \lambda [p_{10} (\underline{q} \times \underline{k}) \underline{\epsilon} + k_0 (\underline{p}_1 \times \underline{q}) \underline{\epsilon}] \\ &= \lambda [p_{10} + k_0] |\underline{k}| |\underline{q}| \sin \theta (\underline{\epsilon}, \hat{\underline{z}}) . \end{aligned}$$

Da für grosse s

$$\begin{aligned} p_{10} + k_0 &= \mathcal{O}(s^{\frac{1}{2}}) , & |\underline{q}| &= \mathcal{O}(s^{\frac{1}{2}}) , \\ |\underline{k}| &= \mathcal{O}(s^{\frac{1}{2}}) , & |\sin \theta| &= \mathcal{O}(s^{-\frac{1}{2}}) , \end{aligned}$$

so ist

$$P_1 \Gamma \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \theta(s) \cos \varphi$$

D.h. der Anteil $4(p_1 \Gamma)^2$ dominiert bei grossen Energien über den Anteil $\epsilon \Gamma^2$ in (4.4.1) und wir erhalten

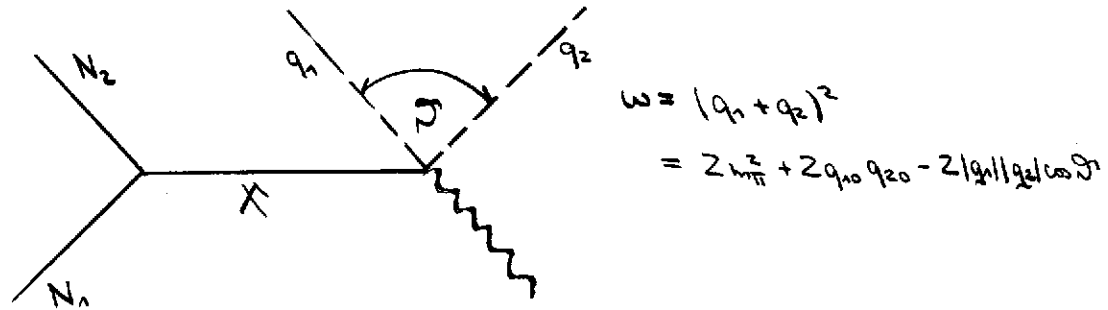
$$\sum_{\text{Spins}} |\Gamma(s)|^2 \underset{\substack{\text{tendl.} \\ s \rightarrow \infty}}{\sim} \cos^2 \varphi \quad \text{qed.} \quad (4.4.2)$$

Literatur zu Kapitel 4

- 1) G. Kramer, P. Stichel: Z. Physik, 178, 519 (1964)
- 2) B de Tollis, A Verganelakis: Phys. Rev. Lett. 6, 371 (1961)
- 3) P. Stichel: Z. Physik 180, 170 (1964)

5. Peripheres Modell zur Photoerzeugung von Pionpaaren

Wir wollen hier Prozesse studieren, bei denen zwei Pionen aus einem Vertex austreten. Wir haben dabei stets die Erzeugung von Pionresonanzen im Auge (ρ, f, ABC)⁽¹⁾. Daher soll die Gesamtenergie ω der π^- -Mesonen endlich (in der Nähe der Resonanzenergie) sein. Dies kann man bei grosser Energie der beiden π^+ s durch einen kleinen Öffnungswinkel ϑ erreichen



Im Sinne des peripheren Modells soll $s \rightarrow \infty$, t klein betrachtet werden.

5.1 Auswahlregeln

Wir wollen nun untersuchen, welche Teilchen X den Auswahlregeln über G-Parität und Isospin genügen. Isospin und G-Parität zweier π^- -Mesonen sind

$$I_{2\pi} = 0, 1, 2 \quad , \quad G_{2\pi} = +1. \quad (5.1.1)$$

Für die Ankopplung isoskalarer Photonen ($I_S = 0, G_S = -1$) sind die folgenden Quantenzahlen zugelassen:

$$S_A: \quad G_X = -1 \quad , \quad I_X = I_{2\pi} \quad (5.1.2)$$

Im Falle isovektorieller Photonen ($I_V = 1, G_V = +1$)

$$V_{1,3}: \quad G_X = +1 \quad , \quad I_X = 0, 1, 2, 3 \quad (5.1.3)$$

Die Auswahlregeln (5.1.2) und (5.1.3) für X sind sehr schwach. Wir werden sehen, dass die Erzeugung resonanter \bar{u} - \bar{d} -Zustände bestimmten Isospins wesentlich stärkere Auswahlregeln impliziert.

ξ -Erzeugung

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= 1, & G_{\xi} &= 1 \\ S_1: I_X &= 1, & G_X &= -1 \\ V_{1,3}: I_X &= 0, 1, 2, & G_X &= 1. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Aus (5.1.4) können wir $X = \omega, \eta$ ausschliessen (s. die Liste der Mesonen in Kap. 4.1). Im Falle der Erzeugung neutraler ξ -Mesonen kann man zusätzlich noch die Invarianz gegen Ladungskonjugation heranziehen. Aus $C_{\xi^0} = -1$ folgt dann $C_X = +1$, d.h. auch $X = \xi_0$ ist verboten.

f-, ABC-Erzeugung

In diesem Falle hat das 2^- -System die Quantenzahlen

$$I_{2\pi} = 0, \quad G_{2\pi} = 1 \quad (5.1.5)$$

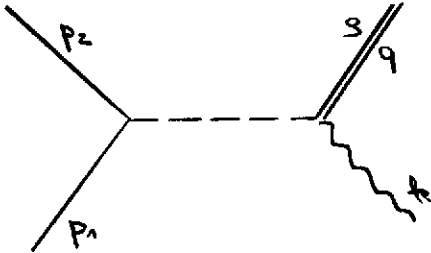
und damit gilt für X

$$\begin{aligned} S_1: I_X &= 0, & G_X &= -1 \\ V_{1,3}: I_X &= 1, & G_X &= +1 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Mit diesen Auswahlregeln können wir \bar{u}, η, f und ABC als Austauschteilchen ausschliessen. Im folgenden wollen wir in Anschluss an Joos und Kramer⁽¹⁾ statt ABC die Bezeichnung σ verwenden, wobei wir unter σ irgendein $(0^+; 0^+)$ -Teilchen verstehen, wie etwa das aus der Analyse der N-N-Streuung nahegelegte skalare Meson.

5.2 \mathcal{S} -Erzeugung durch $\bar{\nu}$ -Austausch

5.2.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt



ε = Photonpolarisation

η = \mathcal{S} -Mesonpolarisation

Mit der Kopplung (s. Gl. (4.3.12))

$$\Gamma_{\pi\pi\mathcal{S}} = \lambda \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} k^\mu q^\nu \varepsilon^\sigma \eta^\tau \equiv \lambda(k, q, \varepsilon, \eta) \quad (5.2.1)$$

am rechten Vertex des angegebenen Feynmangraphen lautet die Streuamplitude

$$T_{\pi\pi\mathcal{S}} = \lambda g_{\pi\mathcal{S}\pi} \frac{1}{t - m_\pi^2} (k, q, \varepsilon, \eta), \quad (5.2.2)$$

wo

$$q \cdot \eta = 0 \quad (5.2.3)$$

In Kap. 2.3.4 hatten wir gesehen, dass die Kopplungskonstante λ aus Einfachpionproduktionsexperimenten im Bereich niedriger Energien nicht zu bestimmen ist: die den Experimenten entnommenen λ -Werte sind stark modellabhängig. Erst bei sehr hohen Energien, wo, wie in Kap. 4.2 gezeigt, der \mathcal{S} -Austausch über den $\bar{\nu}$ -Austausch dominiert, kann man verlässliche Information über die Kopplungskonstante λ aus der Einfachpionproduktion gewinnen. So bieten \mathcal{S} -Erzeugungsexperimente die Möglichkeit, bei relativ niedrigen Energien im GeV-Bereich die Grösse zu bestimmen. Experimente in Cornell, bei \mathcal{S} -Einschussenergien von etwa 1,2 GeV durchgeführt, liefern eine Zerfallsbreite²⁾

$$\Gamma_{S \rightarrow \bar{p} + \gamma} = 0,5 \text{ MeV} ,$$

λ^2 stimmt bis auf kinematische Faktoren mit Γ überein¹⁾.

Wir wenden uns nun der Berechnung des Wirkungsquerschnittes aus der Streuamplitude (5.1.8) zu.

Dazu bedarf es zunächst noch einiger Hilfsbetrachtungen über die ϵ - und η -Spinsummation. Die Summation über die Nukleonenspins ist im Spezialfall des Austausches von Spin-0-Teilchen völlig unabhängig von der ϵ - und η -Spinsummation. Sie liefert für π -Austausch das bekannte Resultat (s. 4.2.18)

$$\sum_{\text{Nukleonenspins}} |\bar{u}_i \gamma_5 u_f|^2 = \frac{-t}{2M^2}$$

Zur ϵ -Summation

Wir beweisen zunächst das

Lemma:

In eichinvarianten Ausdrücken liefert die Summation über die Polarisation der Photonen bei beliebiger kovarianter Eichung effektiv den Ausdruck

$$T_{SS'}^T \equiv \sum_{\epsilon\text{-Pol.}} \epsilon_S \epsilon_{S'}^* = -g_{SS'} \quad (5.2.4)$$

Beweis:

Die Eichung sei kovariant durch den zeitartigen Vierervektor a in der folgenden Form charakterisiert (s. Kap. 1.2):

$$a\epsilon = 0 \quad , \quad a^2 = \Lambda \quad , \quad \epsilon^2 = -\Lambda \quad (5.2.5)$$

Dann können wir $T_{s's'}$ aus den drei Forderungen

1. $T_{s's'} = T_{s's}$
2. $k^s T_{s's'} = a^s T_{s's'} = 0$
3. $T_{s's'} g^{s's} = -2$

festlegen. $T_{s's'}$ ist nämlich eine Funktion nur von a und k . Wir schreiben den allgemeinsten symmetrischen Tensor, der sich aus $g_{\mu\nu}$ und direkten Produkten von a und k bilden lässt:

$$T_{s's'} = \alpha g_{s's'} + \beta a_s a_{s'} + \gamma (a_s k_{s'} + a_{s'} k_s) + \delta k_s k_{s'}$$

Aus 2. und 3. sind die Koeffizienten α bis δ bestimmt:

$$T_{s's'} = -g_{s's'} + \frac{1}{ka} \{ a_s k_{s'} + a_{s'} k_s \} - \frac{1}{(ak)^2} k_s k_{s'} \quad (5.2.6)$$

Gl. (5.2.6) ist die Verallgemeinerung von Gl. (4.2.16) von der Coulombbeichung ($a = (1, 0, 0, 0)$) auf kovariante Eichung. Die letzten beiden Terme von Gl. (5.2.6) enthalten entweder k_s oder $k_{s'}$ oder beide, verschwinden daher in eichinvarianten Ausdrücken. Damit ist das Lemma bewiesen.

Mit Hilfe von Gl. (5.2.4), der Formel

$$\begin{aligned} -\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \epsilon^{\mu'\nu's't'} &= g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\sigma\sigma'} - g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\sigma\sigma'} \\ &\quad - g_{\mu\nu'} g_{\mu'\nu} g_{\sigma\sigma'} + g_{\mu\nu'} g_{\mu'\nu} g_{\sigma\sigma'} \\ &\quad + g_{\mu\nu'} g_{\mu'\nu} g_{\sigma\sigma'} - g_{\mu\nu'} g_{\mu'\nu} g_{\sigma\sigma'} \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

und der Beziehung

$$k^2 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$$

sind wir in der Lage, die Summation über die Photonenpolarisation durch-

zuführen. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon=\text{Pol.}} |(k, q, \epsilon, \eta)|^2 &= \sum_{\epsilon=\text{Pol.}} (k, q, \eta, \epsilon) (k, q, \eta^*, \epsilon^*) \\ &= -(qk)^2 (\eta \eta^*) - m_S^2 (k \eta) (k \eta^*) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Die Mittelung über die η -Spins führen wir analog wie oben durch:

Sei

$$\Delta_{\mu\nu} = \sum_{\eta\text{-Spins}} \eta_\mu \eta_\nu^* \quad (5.2.9)$$

Dieser Ausdruck muss den Forderungen genügen

1. $q^\mu \Delta_{\mu\nu} = 0$
2. $\Delta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = -3$

Der allgemeine Ansatz für $\Delta_{\mu\nu}$ lautet

$$\Delta_{\mu\nu} = a g_{\mu\nu} + b q_\mu q_\nu$$

Aus 1. und 2. folgt

$$\Delta_{\mu\nu} = \sum_{\text{Spins}} \eta_\mu \eta_\nu^* = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_S^2} \quad (5.2.10)$$

oder

$$\Delta_\nu^\nu = \sum_{\text{spins}} \eta_\mu \eta^{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad (5.2.10a)$$

Durchführung der η -Spinsumme in (5.2.8) liefert mit (5.2.10a)

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon=\eta\text{-Spins}} |(k, q, \epsilon, \eta)|^2 &= -(qk)^2 \Delta_\nu^\nu - m_S^2 k^\mu k^\nu \Delta_{\mu\nu} \\ &= 4(qk)^2 - (qk)^2 - m_S^2 \frac{(kq)^2}{m_S^2} \\ &= \frac{1}{2} (t - m_S^2)^2 \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

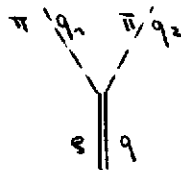
Somit führt (5.2.2) für hohe Energien auf den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d|t|} \sim \frac{1}{s^2} \frac{-t}{2M^2} \left(\frac{t - m_\pi^2}{t - m_\pi^2} \right)^2 \lambda^2 g^2. \quad (5.2.12)$$

Die s- und t-Abhängigkeit der ersten beiden Faktoren ist die gleiche wie in der Einfachpionerzeugung mit Pionenaustausch: sie ist charakteristisch für den Austausch von 0^- -Teilchen. Neu gegenüber der Einfach-erzeugung ist der Faktor $(t - m_\pi^2)^2$.

5.2.2 Die Winkelverteilung der Zerfallspionen

Wir betrachten nun den Zerfall eines freien ϱ -Mesons in zwei π -Mesonen.



η_m charakterisiere den Polarisationszustand des ϱ -Mesons. Aus den zur Verfügung stehenden Vektoren q_1 , q_2 , η_m lassen sich zwei in η_m lineare Invarianten bilden:

$$\eta_m (q_1 + q_2) \quad ; \quad \eta_m (q_1 - q_2).$$

Erstere verschwindet wegen Gl. (5.2.3). Wenn a_m die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Erzeugung des ϱ mit Spineinstellung m ist, so gilt für die Zerfallswahrscheinlichkeit

$$W \sim \sum_{\text{Spins}} \left| \sum_m a_m \eta_m^\dagger (q_1 - q_2)_\mu \right|^2. \quad (5.2.13)$$

a_m ist natürlich aus der "Entstehungsgeschichte" des ϱ zu berechnen,

d.h. in unserem Fall aus dem Vertex $\pi_{g\delta}$ (s. Gl. (5.2.1)). Dass a_m nur vom $\pi_{g\delta}$ - und nicht vom Vertex $N\bar{N}_g$ abhängt, ist die Aussage des Yang-Treiman-Tests: bei Austausch skalarer oder pseudoskalarer Teilchen ist die Winkelverteilung der π -Mesonen am rechten Vertex des Graphen von Kap. 5.2.1 unabhängig von den Spins und den Viererimpulsen am linken Vertex. Damit haben wir

$$a_m \sim (k, q, \epsilon, \eta_m^*) \quad (5.2.14)$$

Beachten wir ferner, dass

$$q(q_1 - q_2) = 0,$$

so folgt, dass der q - q -Term aus Gl. (5.2.10) zur m -Summe

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} k^\mu q^\nu \epsilon^\sigma \sum_m \eta_m^{\sigma\lambda} \eta_m^\lambda (q_1 - q_2)_\lambda$$

nicht beiträgt, so dass mit $q_1 - q_2 = 2q_1 - q$

$$\sum_m a_m \eta_m^\lambda (q_1 - q_2)_\lambda = -2(k, q, \epsilon, q_1). \quad (5.2.15)$$

Dies setzen wir in (5.2.13) ein und summieren über die Polarisation der Photonen. Unter Zuhilfenahme von Gl. (5.2.4) und Gl. (5.2.7) erhalten wir

$$W \sim \sum_{\epsilon-\text{Pol.}} |(k, q, \epsilon, q_1)|^2 = - [(kq)q_1 - (kq_1)q]^2. \quad (5.2.16)$$

Wenn man diesen Ausdruck im Ruhssystem des g -Mesons ($\underline{q} = 0$) ausrechnet, so folgt

$$W \sim m_g^2 k_0^2 |q_1|^2 \sin^2 \alpha, \quad \alpha = \angle(\underline{q}_1, \underline{k}),$$

wobei man die Tatsache verwendet, dass das g -Meson auf der Massenschale liegt.

Während der Yang-Treiman-Test in seiner allgemeinen Form lediglich besagt, dass W eine Funktion nur vom Winkel α ist, bekommen wir durch die Annahme eines freien S -Mesons als Zwischenzustand eine speziellere Aussage, nämlich dass

$$W(\alpha) \sim \sin^2 \alpha \quad (5.2.17)$$

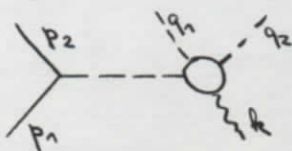
Wir werden in Kap. 5.3.3 sehen, dass sich im Falle des 0^+ -Austauschs die gleiche Winkelverteilung ergibt.

5.2.3 Pionpaarerzeugung mit linear polarisierten γ 's

In Kap. 4.4 hatten wir bereits die Bedeutung von Polarisationsexperimenten zur peripheren Einfachpionproduktion behandelt und dabei sehr allgemeine Aussagen über den Zusammenhang zwischen ausgetauschten Teilchen und Azimutal-Asymmetrie des Wirkungsquerschnitts bei hohen Energien machen können.

Wir wollen nun für den Fall der Pionpaarerzeugung die Azimutal-Asymmetrie bei linear polarisierten γ -Quanten unter der speziellen Annahme des \bar{V} -Meson-Austauschs untersuchen.

Wir betrachten das Diagramm



Dessen zugehörige Streuamplitude lautet

$$\mathbb{T} = g \bar{M}_2 \gamma_5 M_1 \frac{1}{t - m^2} \mathbb{T}_{\gamma + \bar{V} \rightarrow \pi + \pi}$$

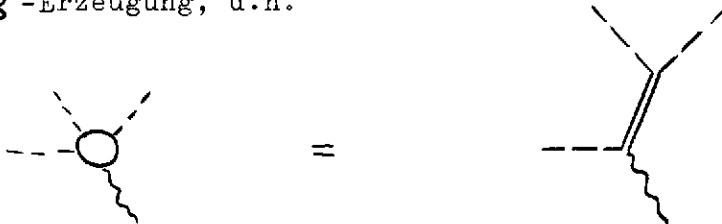
Dabei ist $\mathbb{T}_{\gamma + \bar{V} \rightarrow \pi + \pi}$ die Amplitude für Photoproduktion eines Pions an

einem virtuellen Pion der Masse t . Diese Amplitude hat die Gestalt

$$T_{\pi^+\pi^-\pi^0} = f(q^2, t, t') (q, k, q_1, \epsilon), \quad (5.2.18)$$

denn (k, q, q_1, ϵ) ist der einzige eichinvariante Pseudoskalar, der sich aus $q = q_1 + q_2$, k , q_1 , ϵ bilden lässt. $t' = (q_1 - k)^2$ ist der Impulsübertrag.

Dabei haben wir nichts über das Innere der Blase vorausgesetzt. Im Falle der \mathcal{S} -Erzeugung, d.h.



wäre f proportional zum Propagatornenner des \mathcal{S}

$$f(q, m_\pi^2, t') \sim \frac{1}{q - m_\pi^2}, \quad \text{unabhängig von } t'.$$

Im CMS der auslaufenden Pionen ($\underline{q} = 0$) folgt bei Coulombbeugung die $\underline{\epsilon}$ -Abhängigkeit von T mit

$$(q, k, q_1, \epsilon) = g_{\pi 0}(\underline{\epsilon}, \underline{k} \times \underline{q}_1)$$

und

$$\underline{\epsilon} = -\cos\gamma \hat{\underline{w}} + \sin\gamma (\hat{\underline{w}} \times \underline{k})$$

zu

$$T(\gamma) \sim \cos\gamma.$$

In Kap. 5.3.3 werden wir sehen, dass das entsprechende Diagramm mit

σ -Austausch bzgl. seiner Azimutal-Asymmetrie "orthogonal" zum $\bar{\pi}$ -Austausch ist.

5.3 σ -Erzeugung durch σ -Austausch

Wir untersuchen nun, wie sich die Ergebnisse von Kap. 5.2 modifizieren, wenn wir statt eines $\bar{\pi}$ -Mesons ein σ -Meson austauschen.

5.3.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt

Gegenüber dem Fall des $\bar{\pi}$ -Austauschs wird Gl. (5.2.1) ersetzt durch

$$\Gamma_{\sigma\sigma\pi} = \lambda_{\sigma\sigma\pi} [(k_0)(E_1^*) - (\eta^* k)(E_0)] \quad (5.3.1)$$

Die modifizierte Streuamplitude ist also

$$\Gamma_{\pi N \rightarrow \sigma N} = g_{\sigma NN} \bar{u}_2 u_1 \frac{1}{t - m_\sigma^2} \lambda_{\sigma\sigma\pi} [(k_0)(E_1^*) - (\eta^* k)(E_0)] \quad (5.3.2)$$

Die Spinmittelung von Γ vollzieht sich in der in Kap. 5.2.1 angegebenen Weise.

Das Resultat:

$$\sum_{\text{Spins von } \sigma, \pi} |\Gamma_{\sigma\sigma\pi}|^2 \sim (t - m_\sigma^2)^2 \quad (5.3.3)$$

wie in Kap. 5.2.1.

Die Nukleonenspinsummutation liefert

$$\sum_{\text{Spins}} |\bar{u}_2 u_1|^2 = \frac{1}{4M^2} \text{Sp} \left((\not{x}_2 + M)(\not{x}_1 + M) \right) = \frac{4M^2 - t}{2M^2} \quad (5.3.4)$$

Also ist der Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d|t|} \sim \frac{1}{s^2} g_{\sigma NN}^2 \lambda_{\sigma\sigma\pi}^2 \frac{-t + 4M^2}{2M^2} \left(\frac{t - m_\sigma^2}{t - m_\sigma^2} \right)^2 \quad (5.3.5)$$

Ein Vergleich mit Gl. (5.2.12) lehrt, dass der Wirkungsquerschnitt bei \bar{e} -Austausch nicht wie beim $\bar{\nu}$ -Austausch mit $t \rightarrow 0$ gegen Null geht. Die Kopplungskonstante $g_{\bar{e}NN}$ ist zwar nur wenig bekannt, doch deuten die s-Phasen in der N-N-Streuung darauf hin, dass

$$\frac{g_{\pi NN}^2}{g_{\bar{e}NN}^2} \sim 15. \quad (5.3.6)$$

Dieses Verhältnis ist für die genauere Bestimmung von $g_{\bar{e}NN}$ ungünstig. Man hofft jedoch, dass eine Messung von $g_{\bar{e}NN}$ aus \bar{e} -Erzeugungsexperimenten bei kleinen $|t|$ -Werten wegen der Unterdrückung des π -Austausches möglich ist.

5.3.2 Die Winkelverteilung der Zerfallspionen

Statt Gl. (5.2.14) haben wir

$$a_m \sim [(\bar{k}_q)(E\eta^*) - (\eta^*k_z)(Eg)]. \quad (5.3.7)$$

Dies ergibt, in Gl. (5.2.13) eingesetzt, nach m-Summation

$$W \sim \sum_{\epsilon\text{-Spin}} [-\bar{k}_q(Eq_1) + (kq_1)(Eq)]^2. \quad (5.3.8)$$

Dieser Ausdruck ist wieder eichinvariant, also folgt unter Anwendung von Gl. (5.2.4) bei der Mittelung über die Photonenpolarisation

$$W \sim -[(\bar{k}_q)q_1 - (kq_1)q]^2, \quad (5.3.9)$$

d.h. das gleiche Ergebnis wie Gl. (5.2.16) ! Also gilt auch hier, wie bereits vermerkt

$$W(\alpha) \sim \sin^2 \alpha \quad (5.3.10)$$

im Schwerpunktsystem des ϕ -Mesons.

5.3.3 Pionpaarerzeugung mit linear polarisierten ϕ 's

An die Stelle von Gl. (5.2.18) tritt

$$T_{\phi \rightarrow \pi^+ \pi^-} = \tilde{f}(q^2, t, t') [(k_2)_0 (\epsilon q_1) - (k_1)_0 (\epsilon q)] . \quad (5.3.11)$$

Im CMS der auslaufenden Pionen ist bei Coulombbeugung

$$T_{\phi \rightarrow \pi^+ \pi^-} = \tilde{f}(q^2, t, t') (k_2)_0 (\epsilon q_1) \sim \sin \varphi . \quad (5.3.12)$$

D.h. während die Winkelverteilung der Zerfallspionen nicht zwischen $\bar{\nu}$ - und ϕ -Austausch zu unterscheiden gestattet, ist die Azimutal-Asymmetrie bei $\bar{\nu}$ - und ϕ -Austausch verschieden (die beiden Fälle sind "orthogonal" zueinander).

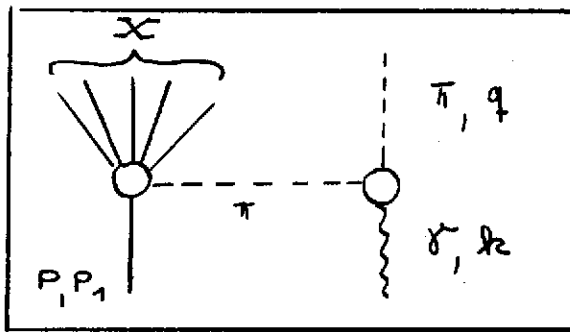
Literatur zu Kapitel 5

- 1) H. Joos und G. Kramer: Z. Physik 178, 542 (1964)
- 2) Berman: Cambridge Conference 1963

6. Der Drelleffekt

6.1 Die Drellformel

Nach S.D. Drell wird der Prozess $\gamma + P \rightarrow \pi^{\pm} + X$ (X = Teilchensystem) im peripheren Modell durch einen Ein-Pion-Austausch beschrieben¹⁾. Den entsprechenden Drell-Graphen zeigt nachstehendes Bild



In der Wirkungsquerschnittpolapproximation liefert die Drell-Formel im CMS folgenden Wirkungsquerschnitt (falls über die Freiheitsgrade des Systems X gemittelt wird)

$$d^3\sigma = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{|q|^3}{|k_2|^2} \frac{\sin^2 \Theta}{(t - \mu^2)} \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}} P_{\text{off}} \sigma_{\text{TOT}}^{\pi N}(s') d\varphi_0 d\Omega \quad (6.1.1)$$

Hierin ist Θ der Winkel zwischen der Richtung des auslaufenden Pions und der Richtung des einlaufenden Photons; S und S' sind gegeben durch $S = (P_1 + k_2)^2$ und $S' = (P_1 + k_2 - q)^2$. Bei der Berechnung der Polarisationssumme über die Photonspins wurde die Coulombbeziehung im CMS zugrunde gelegt, d.h.

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon q|^2 = |q|^2 \sin^2 \Theta \xrightarrow[S \rightarrow \infty]{} -t \quad (6.1.2)$$

6.2 Das Problem der Eichinvarianz

Nach Kap. 1.2 erfordert die Eichinvarianz für die Übergangsamplitude

$$T_{\sigma N \rightarrow \pi X}(p_1, k, q, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon = k} \equiv 0 \quad (6.2.1)$$

(6.2.1) ist für die Drell-Amplitude nicht erfüllt, denn

$$T_{\sigma N \rightarrow \pi X}^D \sim \varepsilon q \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow k} k q = \begin{cases} -\frac{1}{2}(t-\mu^2) \text{ für } t \neq \mu^2 \\ 0 \text{ für } t = \mu^2 \end{cases} \quad (6.2.2)$$

so dass die Eichinvarianz nur am Pol erfüllt ist und sich eine Abhängigkeit von der Eichung für $t \neq \mu^2$ ergibt. Wir bemerken, dass jede Eichung durch einen geeigneten Eichvektor a mit $a^2 > 0$ gemäss

$$a \varepsilon = 0 \quad (6.2.3)$$

festgelegt werden kann. Dann ergibt sich die Abhängigkeit der Polarisationssumme vom Eichvektor a zu

$$\sum_{\varepsilon} |\varepsilon q|^2 = -\mu^2 - (t-\mu^2) \frac{q \cdot a}{k \cdot a} - \frac{1}{4} (t-\mu^2) \frac{1}{(k \cdot a)^2} \quad (6.2.4)$$

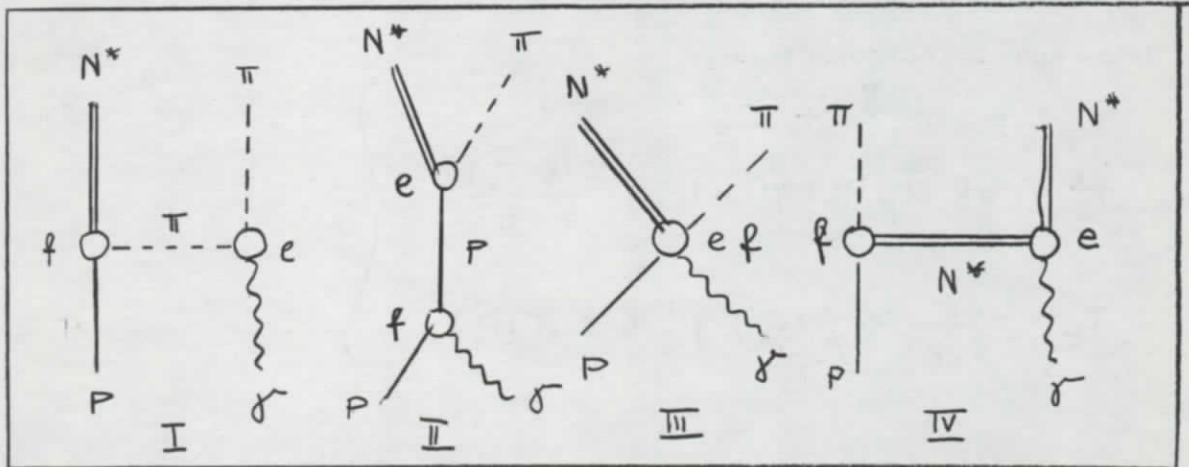
Der Ausdruck ist zwar am Pol im Einklang mit (6.2.2) eichinvariant, doch dieser Sachverhalt ist ohne physikalische Bedeutung, da der Wirkungsquerschnitt für $\sum |\varepsilon q|^2_{t=\mu^2} = -\mu^2$ negativ wird. Andererseits hängt der Wirkungsquerschnitt für $t \neq \mu^2$ empfindlich von der Eichung ab, denn $\sum |\varepsilon q|^2$ verschwindet sogar für die spezielle Eichung $a = \frac{q}{\mu^2}$. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Amplitude $T_{\sigma N \rightarrow \pi X}^D$ eichinvariant zu erweitern. Mathematisch ist dieses Problem nicht eindeutig zu lösen, denn durch $\varepsilon q = \frac{(\varepsilon \cdot b)(k \cdot q)}{k \cdot b}$ z.B. ist der Ausdruck εq für alle b mit $b \neq k$, $b \neq \varepsilon$ eichinvariant erweitert.

Für den Spezialfall $X \equiv N^*$ lässt sich eine eichinvariante Erweiterung durch die Forderung charakterisieren, dass die Zusatzterme die

gleichen physikalischen Eigenschaften besitzen wie der Drellterm³⁾:

1. Die Amplitude ist linear in e und f
2. Das Photon wechselwirkt mit dem Bahnstrom einer bewegten Ladung.
3. Es sei I der totale Isospin, I_3 der Isospin des Photons und die entsprechende Partialwellenamplitude im t -Kanal der Reaktion $\gamma + N \rightarrow \pi + N$, dann gibt nur die Amplitude $T_{1,1}$ einen Beitrag; denn aus der Isospinerhaltung folgt für den Eimpionenaustausch $I = 1$, aus der Erhaltung der G-Parität am $\delta_1 \pi_1 \pi$ -Vertex folgt $I_\gamma = 1$.

Es gilt nun den Drellgraphen eingeschlossen für die Reaktion $\gamma + N \rightarrow \pi + N^*$ genau vier in e und f lineare Graphen.



Die zugehörigen Feynmanamplituden lauten

$$T_I = ef \frac{2 \varepsilon q}{t - \mu^2} \bar{u}_\mu(p_2) (k - q)^\mu u(p_1) \quad (6.2.5)$$

$$T_{II} = ef \bar{u}_\mu(p_2) (-q)^\mu \frac{(p_1 + k) + m}{s - M^2} \varepsilon u(p_1) \quad (6.2.6)$$

$$T_{III} = ef \bar{u}_\mu(p_2) \varepsilon^\mu u(p_1) \quad (6.2.7)$$

$$T_{IV} = -f (2\pi)^3 \Gamma_\mu(p_2, k, \varepsilon) (-q)^\mu u(p_1) \quad (6.2.8)$$

mit

$$\Gamma_{\mu}(P_2, k, \varepsilon) = \langle N^*; P_2 | \bar{\Psi}_{\mu}(0) | \sigma, k, \varepsilon \rangle$$

wobei $\Psi_{\mu}(x)$ der Feldoperator des im Rarita-Schwinger-Formalismus beschriebenen N ist²⁾ und die Relation zwischen Formfaktor und Propagator

$$\langle N^* | \Psi_{\mu}(x) | \sigma \rangle = \frac{1}{-(k-P_2)^2 + m^2} \langle N^* | j_{\mu}^{N^*}(x) | \sigma \rangle \quad (6.2.9)$$

benutzt wurde.

Unter Anwendung der Dirac-Gleichung für $u(P_1)$ und der Vertauschungsrelationen der γ -Matrizen liefert die Gordon'sche Aufspaltung von in Bahn- und Spinstromanteil

$$\left. \begin{aligned} T_{\pi} &= T_{\pi}^B + T_{\pi}^S \\ T_{\pi}^B &= -ef \bar{u}_{\mu}(P_2) \gamma^{\mu} u(P_1) \frac{2(\varepsilon \cdot P_1)}{S - m^2} \\ T_{\pi}^S &= -\frac{ef}{S - m^2} \bar{u}_{\mu}(P_2) \gamma^{\mu} k \varepsilon u(P_1) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.10)$$

Zum Auftreten von T_{π}^S sei bemerkt, dass dieser Term bedingt ist durch die Ersetzung

$$\partial_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu} - ie A_{\mu}$$

in der Lagrange-Dichte der πNN^* -Wechselwirkung

$$H_{\pi}(N, N) = f \bar{\Psi}_{\mu}(x) [\partial^{\mu} \phi_{\pi}(x)] \Psi(x) + \dots$$

und folgt somit aus der Abhängigkeit des "kinetischen Impulses" vom

Potential. Der Term T_{III} gehört damit zum Bahnstromanteil.

Zur Aufspaltung von T_{IV} benutzen wir die verallgemeinerte Ward-Identität

$$\Gamma_{\mu}(P_2, k, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=k} = \frac{e}{(2\pi)^3} \bar{u}_{\mu}(P_2) \quad (6.2.11)$$

Beweis von (6.2.11):

Asymptotenbedingung für das Photonfeld $A_{\mu}(x)$ liefert mittels Reduktionsformalismus nach L.S.Z. zunächst die Relation

$$\Gamma_{\mu}(P_2, k, \varepsilon) = \varepsilon^{\nu} \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{-ikx} \langle N^*_{P_2} | T[\bar{\Psi}_{\mu}(0), j_{\nu}(x)] | 0 \rangle \quad (6.2.12)$$

Wir definieren nun einen Tensor $\Gamma_{\mu\nu}(y)$ wie folgt:

$$\Gamma_{\mu\nu}(y) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{-i(k-P_2)(x+y)} \langle N^* | T[\bar{\Psi}(-x), j_{\nu}(y)] | 0 \rangle \quad (6.2.13)$$

Auf Grund von Translationsinvarianz haben wir dann folgenden Zusammenhang mit (6.2.12)

$$\Gamma_{\mu} = \varepsilon^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}(0) \quad (6.2.14)$$

Differenzieren wir nun $\Gamma_{\mu\nu}(y)$ nach y , so erhalten wir auf Grund der Kontinuitätsgleichung

$$\partial^{\nu} j_{\nu} = 0$$

sowie der Definition des T -Produkts

$$\frac{\partial}{\partial y_{\nu}} \Gamma_{\mu\nu}(y) = -i(k-P_2)^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}(y) + \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{-i(k-P_2)(x+y)} \delta(x_0+y_0) \langle N^* | [j_0(y), \bar{\Psi}(-x)] | 0 \rangle \quad (6.2.15)$$

Andererseits gilt auf Grund der Translationsinvarianz

$$\Gamma_{\mu\nu}(y) = e^{i p_2 y} \Gamma_{\mu\nu}(0) \quad (6.2.16)$$

Einsatz von (6.2.16) in (6.2.15) ergibt dann an der Stelle $y = 0$ unter Benutzung von (6.2.14)

$$\Gamma_{\mu}(p_2, \hbar, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon = \hbar} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3x e^{i(\vec{k} - \vec{p}_2) \cdot \vec{x}} \times \quad (6.2.17)$$

$$\times \langle N^* | [j_0(-x_0, 0), \bar{\Psi}_{\mu}(x)] | 0 \rangle$$

Nun gilt in jeder Feldtheorie die Vertauschungsrelation

$$[Q, \bar{\Psi}_{\mu}(-x)] = e \bar{\Psi}_{\mu}(-x) \quad (6.2.18)$$

wobei Q der Operator der elektrischen Ladung

$$Q = \int_{y_0 = \text{const}} d^3y j_0(y) \quad (6.2.19)$$

ist. In jeder "vernünftigen Theorie" folgt aus (6.2.18) und (6.2.19)

$$[j_0(y), \bar{\Psi}_{\mu}(-x)]_{x_0 = -y_0} = e \delta(x + y) \bar{\Psi}_{\mu}(-x) \quad (6.2.20)$$

Einsatz von (6.2.20) in (6.2.17) sowie die Normierungsbedingung

$$\langle N^* | \bar{\Psi}_{\mu}(0) | 0 \rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \bar{u}_{\mu}(p_2) \quad (6.2.21)$$

ergeben dann unmittelbar die Behauptung (6.2.11).

Aus der Lorentz-Invarianz und der Ward-Identität (6.2.11) folgt der allgemeine Ansatz für $\Gamma_{\mu}(p_2, \hbar, \varepsilon)$

$$-(2\pi)^3 \Gamma_{\mu}(P_2, k, \varepsilon) = -\frac{e}{2P_2 k} \bar{u}^{\nu}(P_2) \left\{ 2(\varepsilon P_2) g_{\nu\mu} + \sum_i f_i C_{\nu\mu}^i(P_2, k, \varepsilon) \right\}$$

mit

$$C_{\nu\mu}^i(P_2, k, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=k} = 0 \quad (6.2.22)$$

Da die Tensoren $C_{\nu\mu}^i$ mit den elektromagnetischen Momenten des N verknüpft sind, ist der Bahnstromanteil von T_{IV} gegeben durch

$$T_{IV}^{\mathcal{B}} = e f \frac{\varepsilon P_2}{P_2 k} \bar{u}_{\mu}(P_2) \gamma^{\mu} u(P_1) \quad (6.2.23)$$

Die gemäss den Forderungen 1. bis 3. eichinvariante erweiterte Drell-Amplitude lässt sich mittels der Amplituden $T_I \dots T_{IV}$ nach Ausführung der Isospinprojektion im t-Kanal wie folgt ausdrücken

$$T^{O.P.E} = T_I - \frac{1}{4} T_I^{\mathcal{B}} + T_{II} - \frac{5}{4} T_{IV}^{\mathcal{B}} \quad (6.2.24)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{dq_0 d\Omega}$ errechnet sich aus Gl. (6.2.24) in üblicher Weise durch Summation bzw. Mittelung über die Spins der am Prozess beteiligten Teilchen. Wir erhalten im Limes hoher Energien³⁾

$$\frac{d^3\sigma}{dq_0 d\Omega} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{|\vec{p}| \sqrt{s'}}{\sqrt{s'}} \sigma_{33}(s') \cdot \left\{ \frac{-t}{(t-\mu^2)^2} + \frac{1}{2} |\vec{p}|^{-2} + \frac{5}{64} |\vec{p}|^{-2} \cdot \frac{3\mu^2 + 5t + 8s' - 8M^2}{s'} \cdot \frac{(-t)}{t-\mu^2} \right\} \quad (6.2.25)$$

mit

$$s' = (k+p-q)^2, \quad |\vec{p}|^2 = \frac{(s' - M^2 + \mu^2)^2}{4s'} - \mu^2$$

d.h. s' ist das Quadrat der totalen Energie im Ruhssystem des $\mathcal{N}N$ -Untersystems und $|\vec{p}|$ der entsprechende Impuls. $\sigma_{33}(s')$ beschreibt in der von uns betrachteten Näherung den totalen $\mathcal{N}-N(2\mathcal{F}, 2\mathcal{T}=3,3)$ -Streuquerschnitt.

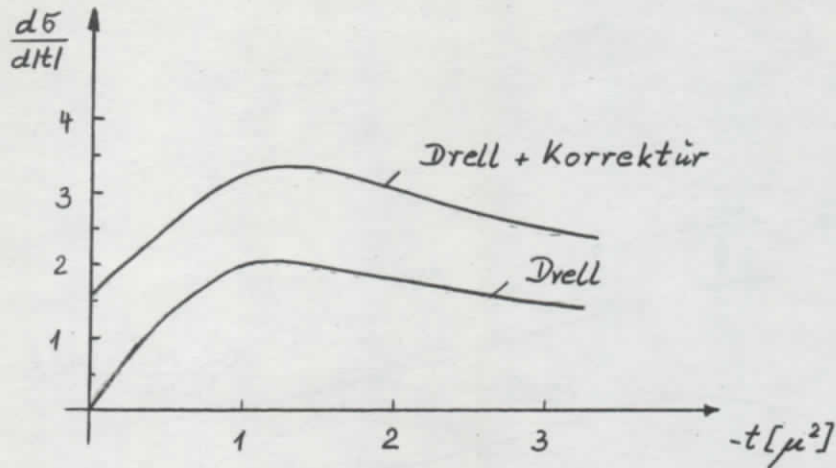
Die beiden ersten Summanden in (6.2.25) entsprechen in der Coulombgleichung im C.M.S. (wofür $T^{I,1} = 0$) den Beiträgen von T^I , T^{II} und dem Interferenzterm dieser Amplituden. Der letzte Summand enthält den Einfluss der Amplitude $T^{\text{II},1}$ und den Interferenzbeitrag von $T^{\text{II},1}$ mit $T^{I,\text{II}}$.

Vergleichen wir den Wirkungsquerschnitt nach (6.2.25) mit der Drellformel (6.1.1), so erkennen wir, dass allein durch den ersten Summanden* von (6.2.25) die Drellformel wiedergegeben wird. Der zweite Summand in (6.2.25) ist unabhängig vom Impulsübertrag t und stellt für $s' = M^{*2}$ einen konstanten Korrekturterm dar. Der dritte Summand liefert im Vergleich hierzu für $-t \lesssim \mu^2$ nur eine Korrektur von $\sim 20\%$.

Da die gesamte Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes durch den gemeinsamen Faktor $s^{-\frac{1}{2}}$ gegeben ist, liefern entgegen der ursprünglichen Annahme von Drell auch im Limes hoher Energien die Korrekturterme zur Drellformel nicht-verschwindende Beiträge.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dt$ ergibt sich nach (6.2.25) für $s' = M^{*2}$ bzw. nach der Drellformel (6.2.1) folgender Verlauf (in willkürlichen Einheiten):

*) In (6.2.25) wurde die für $s \rightarrow \infty$ gültige Beziehung $\bar{q}^2 \sin^2 \theta \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -t$ benutzt.



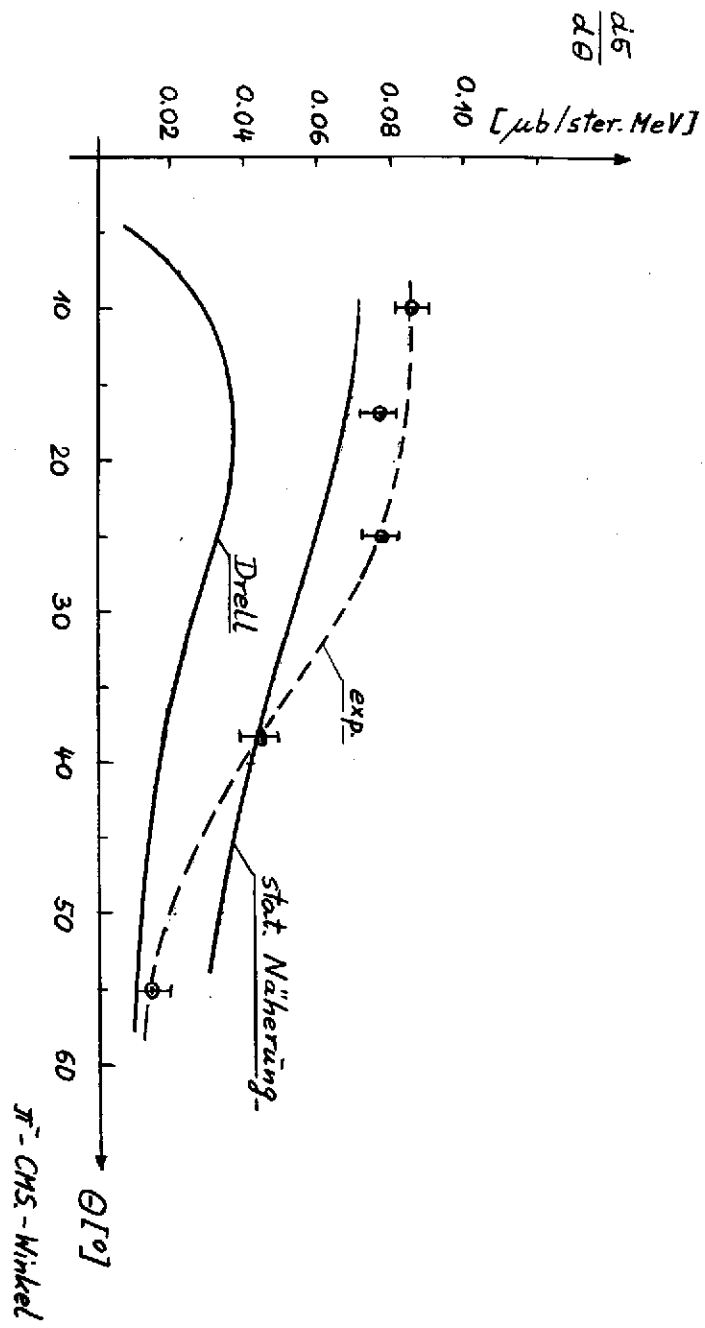
Bisherige Messungen^{4),5)} des Drell-Effekts im GeV-Bereich ergaben stets einen grösseren Wirkungsquerschnitt als von Drell vorhergesagt, d.h. die Hinzunahme von Eichinvarianzkorrekturen in der oben beschriebenen Art verbessert die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment⁹⁾.

In der statischen Näherung ($\lim M \rightarrow \infty$) geht $T^{II,1} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$, so dass im CMS bei Coulombeichung die eichinvariante Amplitude durch

$$T^{OPE} = T^I + T^{III}$$

gegeben ist. In dieser Näherung stimmen unsere Ergebnisse mit denen nach F. Hadjioannou⁶⁾ und K. Itabashi⁷⁾ überein, die aus der Behandlung der Photopion - Erzeugung im Rahmen des statischen Chew-Low-Modells resultieren. In der Form (6.2.25) haben wir eine Verallgemeinerung dieser statischen Näherung.

Die folgende Abbildung zeigt die Winkelverteilung für π^- -Erzeugung bei $E_J^{Lab} = 1,2$ GeV. Es werden experimentelle Daten nach J.R. Kilner et al.⁸⁾ mit der statischen Näherung⁷⁾ und den Aussagen der Drellformel verglichen.



Literatur zu Kapitel 6

- 1) S.D. Drell: Phys.Rev.Lett. 5, 278 (1961)
- 2) W. Rarita and J. Schwinger: Phys.Rev. 60, 61 (1941)
- 3) P. Stichel and M. Schulz: Nuovo Cim. 34, 1381 (1964)
- 4) F.M. Pipkin et al.: Phys.Rev.Lett. 11, 496 (1963)
- 5) Y. Eisenberg et al.: International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Hamburg, 8.-12. Juni 1965
- 6) F. Hadjioannou: CERN-Report (1962)
- 7) K. Itabashi: Phys.Rev. 123, 2157 (1961)
- 8) J.R. Kilner et al.: Phys.Rev.Lett. 5, 518 (1960)
- 9) Neuere Messungen an der DESY-Blasen-kammer stimmen gut mit (6.2.25) (ohne Hochenergienäherung) überein:
U. Brall et al.: DESY 65/5, Juni 1965.

