

Interner Bericht
DESY F1-73/7
Juni 1973

DESY-Bibliothek

17. JULI 1973

Elementarteilchenphysik II

Band I

Resonanzen und Teilchenklassifikation im Quarkmodell

von

P. Söding und H. Spitzer

Elementarteilchenphysik II

Band I

Resonanzen

und

Teilchenklassifikation im Quarkmodell

von

P. Söding und H. Spitzer

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Hamburg
und II. Institut für Experimentalphysik der
Universität Hamburg

Vorwort

Wir legen hier das Material einer Vorlesung über Elementarteilchenphysik II vor, die 1972 in Hamburg für Physikstudenten ab 7. Semester gehalten wurde. Die Vorlesung setzt elementare Kenntnisse der nichtrelativistischen Quantenmechanik und der Elementarteilchenphysik I (relativistische Teilchengleichungen, Quantenzahlen) voraus.

In dieser Vorlesung werden einige wichtige Konzepte der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung behandelt. In Kapitel I wird der Resonanzbegriff eingeführt im Rahmen des Partialwellenformalismus für Teilchenstreuung. Anschließend wird die Entdeckung von Nukleonresonanzen durch Phasenanalyse der πN -Streuung dargestellt. Kapitel II behandelt die Klassifikation von Teilchen im Quarkmodell. Kapitel III (s. Band II) gibt einen Überblick über elektromagnetische Wechselwirkungen von Elementarteilchen (ohne Photo- und Elektroproduktion). Hierbei beschränken wir uns auf eine kurze Beschreibung der Prozesse und eine handliche Sammlung der relevanten Formeln. In Kapitel IV werden die Feynmanregeln zur Berechnung von Matrixelementen für elektromagnetische Prozesse eingeführt. Wir verzichten auf die umfangreiche Herleitung mit Hilfe der Störungstheorie der Quantenelektrodynamik und geben stattdessen vereinfachte, plausible Herleitungen. Die Anwendung der Regeln wird - Schritt für Schritt - bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts für Elektron-Proton-Streuung demonstriert. Abschließend werden die Formfaktoren der Nukleonen eingeführt und diskutiert.

Das Material der Vorlesung ist so ausgearbeitet worden, daß es für das Selbststudium benutzt werden kann. Dabei haben wir jedoch nicht versucht, formal und inhaltlich den Ansprüchen gerecht zu werden, die man an ein Lehrbuch stellen muß. Teile von Kapitel I und Kapitel II sind der Vorlesung von P. Söding auf der Herbstschule für Hochenergiephysik in Maria Laach 1969 entnommen.

Beachte: Abbildungen und Gleichungen werden für jedes Kapitel unabhängig voneinander (von 1 beginnend) durchnummeriert.

I n h a l t

B A N D I

Seite

Kapitel I RESONANZEN UND PARTIALWELLENANALYSE

1. Einleitung

1.1	Was ist eine Resonanz	1
1.2	Rekapitulierung einiger Tatsachen über Quantenzahlen	2
1.2.1	Baryonenzahl	2
1.2.2	Hyperladung	3
1.2.3	Isospin	3
1.2.4	C-Parität	7
1.2.5	G-Parität	8
1.2.6	Spin und Parität	9
1.3	Erzeugung von Resonanzen in Formations- und Produktionsexperimenten	10

2. Partialwellenformalismus für Streuung von Teilchen mit Spin 0 und Resonanzbildung in Formationsexperimenten

2.1	Einleitung	13
2.2	Ungestörter Anfangszustand	13
2.3	"Einschaltung" des Streuzentrums und S-Matrixelement	15
2.4	Gestreute Welle und Wirkungsquerschnitt	17
2.5	Eigenschaften der elastischen Partialwellenamplitude $t_{\alpha\alpha}^l$ und optisches Theorem	18
2.6	Geometrische Interpretation des Partialwellenwirkungsquerschnitts	20
2.7	Eigenschaften der inelastischen Partialwellenamplitude $t_{\alpha\beta}^l$	20
2.8	Resonanzstreuung und Breit-Wigner-Formel	20
2.9	Die Wigner-Bedingung	24
2.10	Resonanz mit Untergrund	26

	<u>Seite</u>
2.11 Die Energieabhängigkeit von $\Gamma(E)$	28
2.12 Die "relativistische" Breit-Wigner-Formel	30
2.13 Resonanzen, virtuelle gebundene Zustände und anti- gebundene Zustände	31
<u>3. Phasenanalysen für Streuung von Teilchen mit Spin</u>	38
3.1 Phasenanalyse der πN -Streuung	38
3.1.1 Einleitung	38
3.1.2 Partialwellenformalismus für $\pi^+ p$ -Streuung	41
3.1.3 Mehrdeutigkeiten	49
3.1.4 Partialwellenentwicklung für endliche l_{\max}	52
3.1.5 Anwendung: Phasenanalyse	53
3.1.6 Verallgemeinerung auf andere πN -Reaktionen	54
3.1.7 Ergebnisse	54
3.2 Phasenanalysen in KN - und γN -Reaktionen	57
3.3 Platz der Phasenanalyse in der Elementarteilchenphysik	57
<u>4. Resonanzerzeugung in Produktionsexperimenten</u>	58
4.1 Einleitung und Begriff der effektiven Masse	58
4.2 Phasenraum, Matrixelement und Wirkungsquerschnitt	62
4.2.1 Herleitung des Zusammenhangs zwischen Reaktionsamplitude und Wirkungsquerschnitt	62
4.2.2 Erläuterungen zum Phasenraum	66
4.2.3 Wirkungsquerschnitt mit invariantem Phasenraum (Møllerformel)	67
4.2.4 Beispiel: Invarianter Zwei-Teilchen-Phasenraum	69
4.3 Resonanz in einem Dreiteilchenendzustand (Dalitz-Plot)	70
4.4 Was lernt man aus Resonanzerzeugung in Produktions- experimenten?	73
<u>Literatur</u>	75
<u>Anhang: Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelfunktionen</u>	76

Kapitel II TEILCHENKLASSIFIKATION NACH DEM QUARKMODELL

	<u>Seite</u>
1. Eigenschaften der Quarks	78
2. Die niedrigsten Baryonenzustände	80
3. Die niedrigsten Mesonenzustände	89
4. $\phi\omega$ -Mischung	94
5. Höhere (angeregte) qq -Zustände	96
5.1 Rotationsanregung	96
5.2 Vibrationsanregung	98
6. Höhere Baryonzustände	99
7. Exotische Teilchen	102
8. Existenz und Eigenschaften der Quarks	103
9. Übungsaufgaben	105

I. RESONANZEN UND PARTIALWELLENANALYSE

1. EINLEITUNG

1.1 Was ist eine Resonanz?

Gemäß der üblichen Definition der Theoretiker ist eine Resonanz ein Pol im 2. Riemannschen Blatt einer hadronischen Streuamplitude (s. Abschnitt 2). Leider kann man solche Pole nicht direkt messen. Daher pflegen Experimentalphysiker

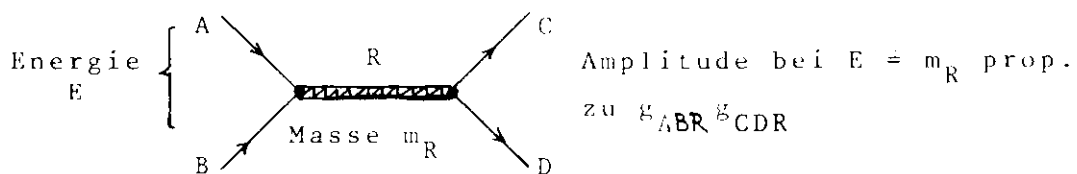
- (a) Kreise im Argand-Diagramm (siehe Abschnitt 2),
- (b) Maxima in hadronischen Wirkungsquerschnitten als Funktion der Energie, oder
- (c) Maxima in Verteilungen der effektiven Masse in Mehrteilchen-Endzuständen, als Resonanzen zu definieren.

Eine endgültige sinnvolle Definition ist vermutlich heute noch nicht möglich, da die starke Wechselwirkung bisher zu wenig verstanden ist. Dem Begriff der Resonanz liegt jedenfalls die phänomenologische Vorstellung zugrunde, daß es sich dabei um angeregte Zustände von Mesonen oder Baryonen handelt, deren Masse hinreichend groß ist, so daß sie (durch die starke Wechselwirkung) in leichtere Hadronen (Mesonen und Baryonen) zerfallen. Man erwartet, daß diese angeregten, inelastischen Zustände folgende Eigenschaften haben, in Analogie zu den angeregten Zuständen der Atome:

- (a) Sie sind durch definierte Werte der für die starke Wechselwirkung existierenden Quantenzahlen charakterisiert (Baryonenzahl B , Hyperladung Y , Isospin I , Spin und Parität J^P ; für nicht-seltene Mesonen ($B=Y=0$) außerdem die G -Parität, und für neutrale nicht-seltene Mesonen ($B=Y=I_2=0$) auch die C -Parität).
- (b) Die gleiche Resonanz kann im allgemeinen in verschiedenen "Kanälen" auftreten, das heißt sie kann in verschiedene Arten von Endzustandsteilchen zerfallen. Doch sind Masse

m_R und Breite Γ ($\frac{1}{\tau}$ = reziproke mittlere Lebensdauer*) für die Resonanz selbst charakteristisch, also unabhängig vom Zerfallskanal und vom Erzeugungsmechanismus.

- (c) Jede Resonanz hat bestimmte, feste Verzweigungsverhältnisse für den Zerfall in die verschiedenen möglichen Kanäle. Diese können für $E \hat{=} m_R$ durch Kopplungskonstanten g in der Amplitude beschrieben werden; die Amplitude soll proportional zu den jeweils auftretenden Kopplungskonstanten sein ("Faktorisierung der Kopplungen"):



Im nächsten Abschnitt wiederholen wir kurz einige Tatsachen über Quantenzahlen, die für das folgende wichtig sind.

1.2 Rekapitulierung einiger Tatsachen über Quantenzahlen

- 1.2.1 Baryonenzahl B $\left\{ \begin{array}{l} \hat{=} 0 \text{ für alle Mesonen} \\ \hat{=} 1 \text{ für Baryonen, } B \hat{=} -1 \text{ für Antibaryonen.} \end{array} \right.$

B ist offenbar in allen Wechselwirkungen streng erhalten (Lebensdauer des leichtesten Baryons, des Protons, ist $> 2 \times 10^{28}$ Jahre!)

* Wir verwenden die in der Hochenergiephysik üblichen Einheiten c (für Geschwindigkeit), \hbar (für Energie \times Zeit) und GeV oder MeV (für Energie). Um Schreibarbeit zu sparen, setzen wir ferner $\hbar=c=1$ in allen Formeln. Damit wird die Geschwindigkeit dimensionslos, gemessen in Bruchteilen von c ; der Drehimpuls J dimensionslos, gemessen in Vielfachen von \hbar ; Energie, Masse und Impuls haben alle die Dimension Energie und werden in GeV gemessen. Die Zeiteinheit wird $1 \text{ GeV}^{-1} = 6.5819 \times 10^{-25} \text{ sec}$, die Längeneinheit $1 \text{ GeV}^{-1} = 0.19732 \text{ F}$ ($1 \text{ F} = 10^{-13} \text{ cm}$).

1.2.2 Hyperladung $Y \equiv 2\langle Q \rangle$, wo $\langle Q \rangle$ = mittlere Ladung eines Ladungs(Isospin)-Multipletts.

Beispiele: $Y = 0$ für π^-, π^0, π^+

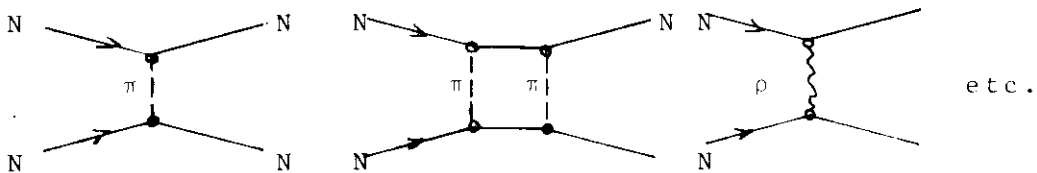
$Y = 1$ für n, p

$Y = -1$ für Σ^-, Σ^0

An Stelle von Y wird auch der (veraltete) Begriff der Seltsamkeit = $Y - B$ verwendet. Empirisch wurde gefunden, daß Y in starken (und elektromagnetischen) Wechselwirkungen erhalten ist.

1.2.3 Isospinquantenzahl I , und z-Komponente des Isospins I_z .

Die physikalische Grundlage der Isospin-Erhaltung ist die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte: p und n sind, sofern sie sich im gleichen räumlichen und gleichen Spinzustand befinden, äquivalent bezüglich der starken Wechselwirkung zwischen den Nukleonen. Da die anderen Hadronen an die Nukleonen gekoppelt sind, z.B. zu den Kernkräften beitragen:



müssen ihre starken Wechselwirkungen also so von ihrer Ladung abhängen, daß die empirisch gefundene Ladungsunabhängigkeit der Nukleon-Wechselwirkung gewahrt bleibt.

Die einfache Annahme, daß alle starken Wechselwirkungen ladungsunabhängig sind, führt allerdings zum Widerspruch: Zur pn -Streuung trägt neben Austausch von π^0 auch der von geladenen Pionen bei, so daß bei ladungsunabhängiger Pion-Nukleon-Kopplung die Beiträge zu pn - und pp -Streuung verschieden wären. Wenn man aber umgekehrt fragt, wie die Pion-Nukleon-Kopplung beschaffen sein muß, damit der Beitrag des obigen Ein-Pion-Austauschgraphen zu den Kernkräften ladungsunabhängig ist, erhält man: Pionen und Nukleonen sind an den Vertices genau so zu koppeln wie die Spins 1 und $1/2$ zum Gesamtspin $1/2$. Daher ordnet man ihnen einen Isospin 1 bzw. $1/2$ als neue Quantenzahl zu, die bei starken Wechselwirkungen ebenso erhalten bleibt wie der Drehimpuls. Die formale Analogie zum Spin ist so zu verstehen: Zusammenfassung von Proton und Neutron zum

Isospin 1/2-Multiplett bedeutet, daß beide als physikalisch äquivalent angesehen werden. Diejenigen Transformationen, die 2 fundamentale Objekte (p und n) ineinander überführen und alle anderen Eigenschaften eines Zustands ungeändert lassen, können als unitäre Matrizen U in einem 2-dimensionalen Raum, mit $\det U=1$, dargestellt werden. Die Gruppe dieser Transformationen heißt SU(2) und ist mit der Gruppe der räumlichen Drehungen eng verwandt. Insbesondere entspricht die mit der Ladung verknüpfte Komponente des Isospins dem Operator der Drehung um die Quantisierungsrichtung; daher die Bezeichnung I_z (üblich ist auch I_0, I_3).

Empirisch zeigt sich, daß der Isospin bei allen starken Wechselwirkungen eine gute Quantenzahl ist, d.h. daß alle Hadronen bestimmten Eigenwerten der erzeugenden Operatoren der Gruppe zugeordnet werden können und ihre starken Wechselwirkungen unter den Transformationen der Gruppe invariant sind. Eine denkbare Erklärung dafür wäre (war vor der Entdeckung der Hyperladung) die Annahme, daß alle stark-wechselwirkenden Teilchen aus den Nucleonen p und n (und ihren Antiteilchen \bar{p}, \bar{n}) aufgebaut sind (Fermi-Yang-Modell). Denn dann wären ja alle starken Wechselwirkungen direkt auf die Wechselwirkungen zwischen Nucleonen zurückführbar. Genau wie bei den Atomkernen würde man dann alle Zustände mit beliebigen Isospins erhalten, indem man die Isospins der fundamentalen Bestandteile nach den Regeln der Drehimpuls-Addition zusammensetzt. Aus der Isospinerhaltung für das fundamentale Dublett p, n folgte dann die Isospinerhaltung für alle so zusammengesetzten Zustände. (Eine analoge Argumentation wird uns beim Quark-Modell wieder begegnen.)

Wir erinnern an einige Folgerungen aus der Isospinerhaltung. Die Teilchen treten in Ladungsmultipletts auf; diese können durch die Isospinquantenzahl I charakterisiert werden. Sie enthalten $2I + 1$ Zustände verschiedener Ladung

$$|I, I_z\rangle \quad (\text{mit } I_z = -I, -(I-1), \dots, I-1, I).$$

Wegen $Y = 2\langle Q \rangle$ ist

$$\boxed{Q = I_z + \frac{Y}{2}} \quad (\text{Gell-Mann-Nishijima Formel})$$

Die Massen aller Zustände desselben Isospin-Multipletts sind gleich (abgesehen von elektromagnetischen Störungen). I kann die Werte $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ haben.

Addition von Isospins (wie bei Drehimpulsen):

$$\vec{I} = \vec{I}^{(1)} + \vec{I}^{(2)}$$

speziell $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}$

führt zu resultierender Isospinquantenzahl I, mit

$$\vec{I}^2 = I(I + 1),$$

die die Werte

$$I = I^{(1)} + I^{(2)}, \quad |I^{(1)} - I^{(2)}| - 1, \dots, |I^{(1)} - I^{(2)}|$$

annehmen kann.

Die Isospin-Zustandsfunktion für ein System aus zwei Teilchen mit den Isospinzuständen $|I^{(1)}, I_z^{(1)}\rangle$ und $|I^{(2)}, I_z^{(2)}\rangle$ ist das Produkt $|I^{(1)}, I_z^{(1)}\rangle \times |I^{(2)}, I_z^{(2)}\rangle$; dieser Zweiteilchenzustand mit definiertem $I_z^{(1)}$ und $I_z^{(2)}$ kann in eine Superposition von Zuständen mit definierter Gesamtisospinquantenzahl I zerlegt werden, wobei der jeweilige Anteil des Produktzustands an dem Gesamtisospinzustand (und umgekehrt) durch den Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} I^{(1)} & I^{(2)} & I \\ I_z^{(1)} & I_z^{(2)} & I_z \end{pmatrix}$$

gegeben ist (siehe Tabelle 1).

CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS AND SPHERICAL HARMONICS

Note: A $\frac{1}{2}$ is to be understood for every coefficient, e.g., for $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Tabelle 1. Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $j_1 \times j_2$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix}$$

Beispiel: System aus 2 Nukleonen ergibt (wie bei Addition der Elektronenspins im He-Atom)

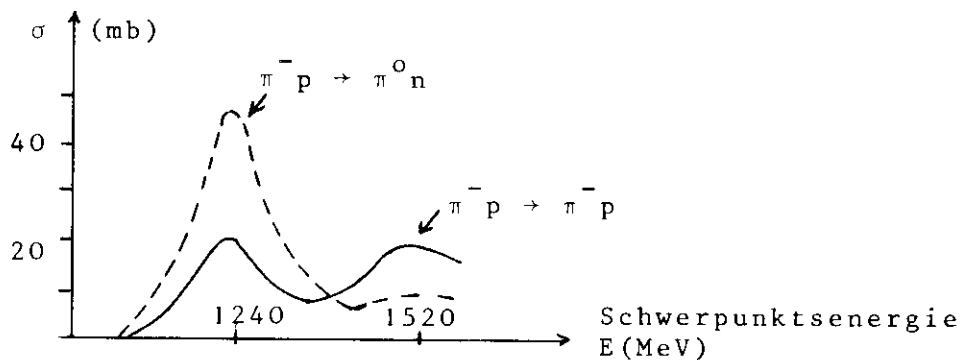
Singulett: $|I=0, I_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|pn\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|np\rangle$

Triplet: $\begin{cases} |I=1, I_z=+1\rangle = |pp\rangle \\ |I=1, I_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|pn\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|np\rangle \\ |I=1, I_z=-1\rangle = |nn\rangle \end{cases}$

Experimentell findet man den Isospin eines beobachteten Zustands

- (i) aus der Ladungsmultiplizität oder der Ladung selbst.
Z.B. $\Delta^{++}(1236) \rightarrow p\pi^+$ hat $I_z = 3/2$, daher $I = 3/2$.
- (ii) durch Anwendung von Auswahlregeln.
Z.B. wenn Zerfall eines Mesons in $\pi+\eta$ beobachtet wird, muß $I = 1$ sein (da $I_\pi = 1$ und $I_\eta = 0$).
Oder wenn Zerfall eines neutralen Mesons in $\pi^0+\pi^0$ beobachtet wird, ist $I = 0$ oder $I = 2$ (da der Clebsch-Gordan-Koeffizient für $I = 1$ "zufällig" Null ist).
- (iii) durch Betrachtung von Verzweigungsverhältnissen für den Übergang in Zustände, die sich nur durch die Ladung unterscheiden, und Vergleich mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Beispiel:



Ergebnis: $I = \uparrow 3/2$ $I = \uparrow 1/2$

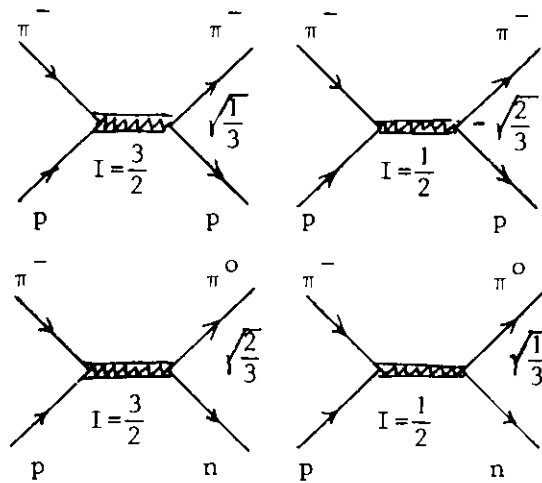
Beweis: Bei $I = 3/2$ ist

$$\frac{\langle \pi^- p | \Delta^0 \rangle}{\langle \pi^0 n | \Delta^0 \rangle} = \frac{\langle 1, -1; 1/2, 1/2 | 1, 1/2, 3/2, -1/2 \rangle}{\langle 1, 0; 1/2, -1/2 | 1, 1/2, 3/2, -1/2 \rangle} = \frac{\sqrt{1/3}}{\sqrt{2/3}}$$

$\begin{matrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \circ \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{matrix}$

d.h. die Wahrscheinlichkeit für Zerfall in $\pi^0 n$ ist doppelt so groß wie die für den Kanal $\pi^- p$. Übung: $I = 1/2$.

Die Situation kann so skizziert werden:



1.2.4 C-Parität (= Ladungsparität, Ladungskonjugationsquantenzahl)

Nur neutrale (stark oder elektromagnetisch wechselwirkende) Teilchen mit $B=Y=0$ (neutrale, nicht-seltene Mesonen) sind Eigenzustände des Ladungskonjugationsoperators \hat{C} (d.h. ihr eigenes Antiteilchen), da dieser das Vorzeichen aller ladungsartigen Quantenzahlen (Q, B, Y, I_z) ändert.

Beispiele: Photon $C = -1$? $B=0$ $Y=0$
 π^0 $C = +1$ $G=0$ $L_z=0$
 η $C = +1$

C ist eine multiplikative Quantenzahl; d.h. für einen Zustand aus n Teilchen, die alle Eigenzustände des Ladungskonjugationsoperators sind, ist $C = C_1 C_2 \dots C_n$. Für einen Zustand, der aus einem Teilchen und dem zugehörigen Antiteilchen besteht, ist

$$C(-1)^\ell \text{ {Symmetrie der Spinfunktion} } = \begin{cases} -1 & \text{(Fermion + Antifermion)} \\ +1 & \text{(Boson + Antiboson)} \end{cases} \quad (A)$$

wo ℓ = Bahndrehimpuls.

1.2.5 G-Parität

Der G-Paritäts-Operator G ist definiert durch

$$G = e^{-i\pi I_y} C,$$

d.h. Ladungskonjugation gefolgt von Rotation des Zustands (relativ zu den Achsen) im Isospinraum um den Winkel π um die y-Achse.

G ist daher erhalten, falls C und \vec{I} erhalten sind; also in der starken (nicht aber der elektromagnetischen oder schwachen) Wechselwirkung.

Während C nur Eigenwert ist falls $Q=B=Y=0$, ist G auch Eigenwert falls $Q \neq 0$; allerdings muß immer noch $B=Y=0$ sein (also für alle nicht-seltsamen Mesonen). Die G-Parität ist die gleiche für jedes Teilchen des gleichen Ladungs-(Isospin)-Multipletts.

Beispiele: Pion $G = -1$
 η $G = +1$

G ist multiplikativ (wie C), so daß insbesondere für einen Zustand aus n Pionen

$$G = (-1)^n \tag{B}$$

ist.

Für jeden Zustand, der sowohl Eigenzustand von C als auch von I ist, gilt

$$G = (-1)^{I_C} C. \tag{C}$$

Aus (C) und (A) folgen viele weitere in der Hadronenspektroskopie zur Bestimmung der Quantenzahlen nützliche Regeln, zum Beispiel:

Für jeden Nukleon + Antinukleon-Zustand (mit $Q=0$ oder ± 1)
ist $G = (-1)^{\ell+S+I}$

Für jeden Nukleon + Nukleon-Zustand dagegen ist $-1 = (-1)^{\ell+S+I}$

Für jeden neutralen $K\bar{K}$ -Zustand ist $C = (-1)^\ell = (-1)^J$

Für jeden $K\bar{K}$ -Zustand ($Q=0, \pm 1$) ist $G = (-1)^{\ell+I} = (-1)^{J+I}$

Für jeden $\pi\pi$ -Zustand ist $+1 = (-1)^{\ell+I}$

Für jeden neutralen $\pi\pi$ -Zustand ist $CP = +1$

Die isoskalare ($I=0$) Komponente des Photons hat $G=-1$, die isovektorielle $G=+1$.

1.2.6 Spin und Parität

Diese Quantenzahlen sind am schwierigsten experimentell zu bestimmen. Man muß die Winkelverteilung und (in vielen Fällen) die Polarisation der Teilchen messen, in die die Resonanz zerfällt. Näheres hierzu folgt im Abschnitt 2. An dieser Stelle erinnern wir nur an die folgenden Regeln:

- (a) Die gesamte Parität eines Zustandes aus 2 Teilchen ist das Produkt der inneren Paritäten der beiden Teilchen und der "Bahnparität" $(-1)^{\ell}$.
- (b) Man definiert die inneren Paritäten von p, n und Λ als +1 (und die des Photons als -1). Die inneren Paritäten aller anderen Hadronen sind dann im Prinzip meßbar.
- (c) Teilchen und Antiteilchen haben bei Fermionen entgegengesetzte, bei Bosonen gleiche innere Parität.
- (d) Eine in $\pi\pi$ oder $K\bar{K}$ zerfallende Resonanz muß zur "normalen J^P Serie"

$$J^P = 0^+, 1^-, 2^+, \dots$$

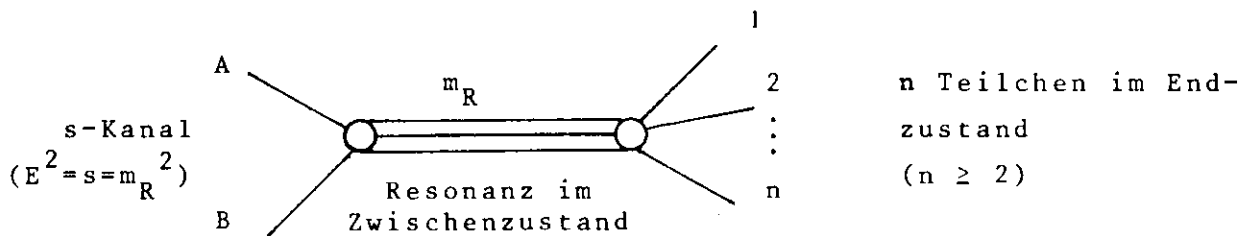
gehören. Werden diese Zerfälle nicht gefunden, obwohl sie nicht anderweitig verboten sind, so liegt der Schluß nahe, daß die Resonanz zur "abnormalen J^P Serie"

$$J^P = 0^-, 1^+, 2^-, \dots$$

gehört.

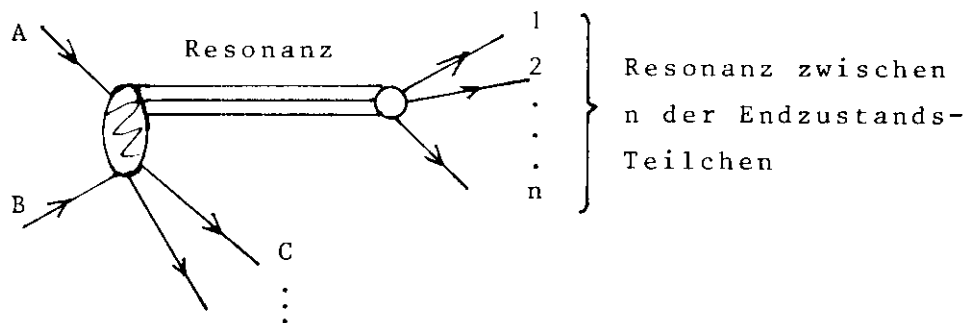
1.3 Erzeugung von Resonanzen in Formations- und Produktionsexperimenten

Die einfachste Möglichkeit der Erzeugung von Resonanzen besteht darin, resonante (d.h. relativ langlebige) Zwischenzustände des Systems Strahlteilchen plus Targetteilchen direkt anzuregen, indem man die Schwerpunktsenergie gleich der Resonanzmasse m_R wählt. Das Quadrat der Schwerpunktsenergie wird gewöhnlich mit s bezeichnet, und man spricht daher in diesem Falle auch von einer "Resonanz im s -Kanal".



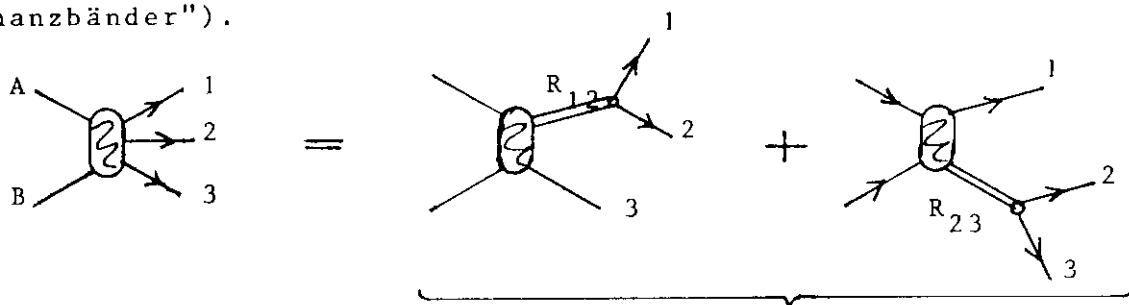
Nach der Bildung ("Formation") "vergißt" die Resonanz die Details ihrer Erzeugung und ist lediglich durch ihre Masse und ihre Quantenzahlen J, J_z, P, Y, I, I_z (und eventuell G, C) charakterisiert. Schließlich zerfällt sie in irgendeinen der möglichen an sie gekoppelten Kanäle mit durch die Kopplungskonstanten bestimmten relativen Verzweigungswahrscheinlichkeiten. Insbesondere kann sie wiederum in den Ausgangszustand $A + B$ zerfallen; in diesem Falle liegt elastische Resonanzstreuung vor.

Im Gegensatz zu dieser Resonanzformation liegt bei der "Produktion" von Resonanzen in keinem Augenblick ein Zustand vor, der nur die Resonanz selbst enthält. Vielmehr wird hier die Resonanz zusammen mit anderen Teilchen erzeugt. Man kann auch von einer "Resonanz zwischen einigen (n) der Endzustandsteilchen" (deren Anzahl $\geq n + 1$ ist) der Produktionsreaktion sprechen. Diese Produktionsreaktionen haben im Vergleich zu den Formationsreaktionen insbesondere 2 Komplikationen:



1. Diese Reaktionen sind nicht, wie die Formationsreaktionen, allein durch die Amplituden der Übergänge (Resonanz) \rightarrow (alle möglichen angekoppelten Kanäle) bestimmt, sondern auch durch die Details derjenigen Reaktion, in der die Resonanz erzeugt wird. Eigenschaften der Resonanz selber lassen sich oft nur schwer von den anderen Eigenschaften abseparieren, etwa was die "Form" (Energieabhängigkeit) der Resonanz angeht.

2. Es können "Endzustandwechselwirkungen" zwischen der Resonanz oder ihren Zerfallsprodukten einerseits, und den anderen Endzustandsteilchen C, ... andererseits auftreten, die das Erscheinungsbild möglicherweise sehr stark ändern. Insbesondere kann unbestimmt sein, welche der Teilchen im Endzustand Resonanzzerfallsprodukte sind und welche nicht (Interferenz verschiedener "Resonanzbänder").



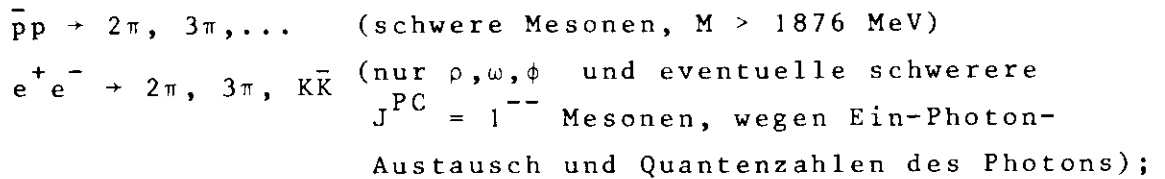
bei hinreichend breiten Resonanzen können diese beiden Amplituden interferieren

Beispiel für Interferenz von Endzustandsresonanzen

Unsere Mittel zur Beschreibung von Produktionsexperimenten sind recht grob, da meist weder der Produktionsmechanismus noch die Endzustandwechselwirkungen verstanden noch theoretisch beschreibbar sind. Man bedient sich fast immer stark vereinfachter Schemata (siehe J.D. Jackson, Nuovo Cimento 34, 735 (1964); ib. 1843 (1964)). Da es uns hier mehr auf die grundsätzlichen Eigenschaften der Resonanzen selber ankommt, wollen wir im folgenden

die durch die Produktionsreaktionen hereingebrachten Komplikationen ignorieren und uns zunächst mit der Formation beschäftigen. Was die grundsätzlichen Eigenschaften angeht, so ist dies eigentlich bereits der allgemeine Fall; denn die Produktionsreaktionen können wir im Prinzip als die Resonanz etwa aus dem Teilchen A plus einem ausgetauschten Teilchen (oder Teilchensystem) durch Formation gebildet betrachten.

Praktisch möglich sind gegenwärtig Formationsexperimente bei Baryonresonanzen für N und Δ Resonanzen (aus πp , γp Anfangszuständen) und für Λ und Σ Resonanzen ($\bar{K}N$ Anfangszustände), sofern sie über der $\bar{K}N$ Schwelle ($E = 1435$ MeV) liegen; nicht dagegen für Ξ und Ω Resonanzen. Für Mesonresonanzen gibt es die Formationsreaktionen



dagegen lassen sich die nicht-seltsamen Mesonen mit $M < 1876$ MeV (und $\neq \rho, \omega, \phi$), also z.B. das A_2 , und alle seltsamen Mesonen (K^*) mit unseren gegenwärtigen Methoden nicht durch Formation erzeugen.

2. PARTIALWELLENFORMALISMUS FÜR STREUUNG VON TEILCHEN MIT SPIN 0 UND RESONANZBILDUNG IN FORMATIONSEXPERIMENTEN

2.1 Einleitung

Wir behandeln zunächst die Resonanzbildung bei der Streuung von Teilchen mit Spin 0. Unser erstes Ziel ist es, den Eigendrehimpuls (Spin) der gebildeten Resonanzen anzugeben. Dazu beschreiben wir das streuende Teilchen als ebene oder Kugelwelle. Die Zustandswellenfunktion wird nach Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators zerlegt. Die Eigenfunktionen heißen Partialwellenamplituden. Dann führen wir die resonanten Partialwellenamplituden ein, die sogenannten Breit-Wigner-Amplituden, und untersuchen ihre Eigenschaften. Die Bestimmung von Parität und Isospin der Resonanzen in Formationsexperimenten wird in Abschnitt 3 diskutiert.

2.2 Ungestörter Anfangszustand

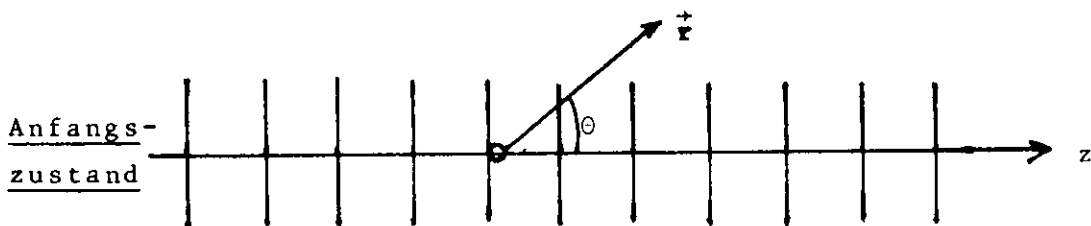
Wir betrachten Streuung und Reaktionen, die aus einem Anfangskanal α in Endkanäle α, β, \dots führen. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß alle betrachteten Kanäle α, β, \dots nur jeweils zwei Teilchen enthalten.

Beispiel:	Bezeichnung der Kanäle
$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$	$\alpha \rightarrow \alpha$
$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$	$\alpha \rightarrow \beta$
$\pi^- + p \rightarrow \gamma + n$	$\alpha \rightarrow \gamma$
$\pi^- + p \rightarrow \eta + n$	$\alpha \rightarrow \delta$

Wir berücksichtigen ferner nicht den Spin der Teilchen, d.h. behandeln nur einfache Fragen, die schon bei spinlosen Teilchen auftreten. Daher ist im folgenden der Bahndrehimpuls ℓ gleich dem Gesamtdrehimpuls J . (Zu den Problemen, die zusätzlich bei Teilchen mit Spin auftreten, siehe Jacob und Wick, General Theory of Collisions for Particles with Spin, Annals of Physics 7, 404 (1959)). Die Streuung von Teilchen mit Spin wird am Beispiel der πn -Streuung in Abschnitt 3 besprochen.

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow k = \frac{p}{h}$$

Den Anfangszustand denken wir uns quantenmechanisch als eine ebene Welle $e^{ik_\alpha z}$ mit der Wellenzahl k_α (=Impuls/ \hbar) beschrieben, die in +z-Richtung läuft (der hier nicht mitgeschriebene Zeitfaktor in der Wellenfunktion ist ja $e^{-i\omega t}$) und auf ein (zunächst nicht eingeschaltetes) Streuzentrum im Koordinatenursprung trifft.*



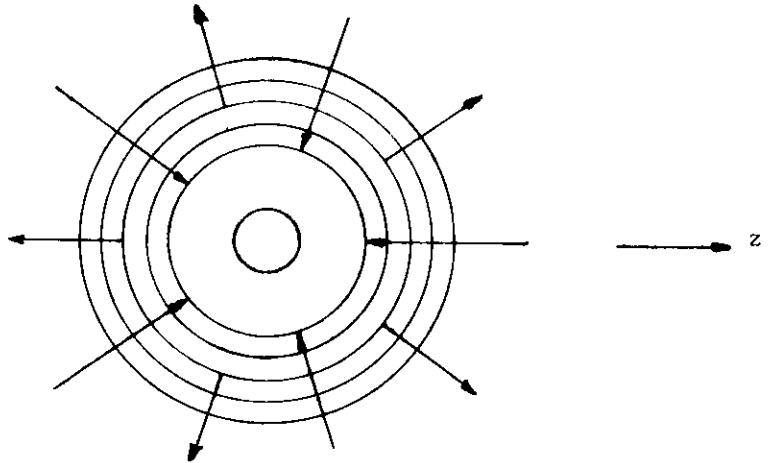
Asymptotisch, für große Abstände $r \rightarrow \infty$ vom Ursprung, gilt die (rein mathematische) Entwicklung (Herleitung im Anhang)

$$e^{ik_\alpha z} \equiv e^{ik_\alpha r \cos\theta} \sim \frac{1}{2ik_\alpha r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[e^{ik_\alpha r} - (-)^{\ell} e^{-ik_\alpha r} \right] P_{\ell}(\cos\theta) \quad (2)$$

Wir können dies anschaulich folgendermaßen deuten. Jedes Glied der Summe ist eine Kugelwelle (gleiche Phase für $r = \text{const}$) um den Ursprung, deren Amplitude wie $\frac{1}{r}$ abklingt und außerdem von θ abhängt. Wegen des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ ist die Welle $e^{ik_\alpha r}$ auslaufend und die Welle $e^{-ik_\alpha r}$ einlaufend. Diese Kugelwellen sind wegen des Faktors $P_{\ell}(\cos\theta)$ Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses mit Eigenwert ℓ . Der Anfangszustand des über ein Streuzentrum hinweglaufenden Teilchens kann also von einem vom Streuzentrum weit entfernten Beobachter ($r \rightarrow \infty$) auch als eine Überlagerung von ein- und auslaufenden Kugelwellen der Wellenzahl k_α und des Bahndrehimpulses ℓ ("Partialwellen") um das Streuzentrum beschrieben werden.

* Wir führen, wie in der (Quanten)mechanik üblich, das tatsächlich vorliegende 2-Körper-Problem auf ein 1-Körper-Problem zurück, indem wir das Streuzentrum als fest annehmen. Wie in der klassischen Mechanik bleibt die gesamte Kinematik dabei ungeändert; jedoch ist für $\hbar k_\alpha$ der Impuls eines der beiden Teilchen des Kanals α in ihrem gemeinsamen Schwerpunktsystem zu nehmen.

asymptotischer,
 ungestörter, Anfangs-
Zustand, (d.h. Wellen-
 funktion ohne
 Streuung)



Diese Beschreibung ist für das folgende besser geeignet, deshalb werden wie sie jetzt ausschließlich verwenden.

2.3 "Einschaltung" des Streuzentrums und S-Matrixelement

Wir denken uns nun das Streuzentrum eingeschaltet und konstruieren die Wellenfunktion mit Streuung. Zunächst betrachten wir die elastische Streuung. Darunter verstehen wir eine Streuung, bei der die gestreuten Wellen kohärent mit den Wellen des Ausgangszustands sind. Wir können die Streuung der einzelnen Partialwellen getrennt für sich betrachten, da sich der Drehimpuls ℓ bei der Streuung nicht ändert. Kohärenz zwischen Anfangs- und Endzustand der ℓ -ten Partialwelle heißt dann, daß alle Quantenzahlen (Art, Massen, Ladungen und Spinkomponenten der beiden Teilchen; ferner natürlich **Drehimpuls** ℓ und Gesamtenergie) des Anfangs- und Endzustandes gleich sind. Die einzige mögliche Wirkung des Streuzentrums kann dann nur darin bestehen, die auslaufende Kugelwelle zum Drehimpuls ℓ um einen (reellen) Faktor η_ℓ zu schwächen und ihre Phase (um einen reellen Winkel $2\delta_\ell$) zu verschieben (relativ zur ungestörten auslaufenden Welle in (2)). Die Wellenfunktion bei elastischer Streuung hat also die asymptotische Form

$$\sim \frac{1}{2ik_\alpha r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[S_{\alpha\alpha}^\ell e^{ik_\alpha r} - (-)^\ell e^{-ik_\alpha r} \right] P_\ell(\cos\theta) \quad (3)$$

mit
$$S_{\alpha\alpha}^\ell = \eta_\ell e^{2i\delta_\ell}, \quad 0 \leq \eta_\ell \leq 1. \quad (4)$$

δ_ℓ heißt auch "Streuphase" und η_ℓ "Elastizität" (oder Absorptionsparameter); η_ℓ und δ_ℓ hängen im allgemeinen von der Gesamtenergie E ab. Die Energieabhängigkeit wird im Augenblick vernachlässigt.

Jetzt schreiben wir die asymptotische Wellenfunktion für einen Endzustand im Kanal β , mit $\beta \neq \alpha$, hin.* Sie enthält nur auslaufende Kugelwellen, kann also analog zu (3) in der Form

$$\sim \frac{1}{2ik_{\alpha}r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) S_{\beta\alpha}^{\ell} e^{ik_{\beta}r} P_{\ell}(\cos\theta) \quad (5)$$

geschrieben werden. Man beachte, daß dies eigentlich nicht viel mehr als die Definition einer komplexen Amplitude $S_{\beta\alpha}^{\ell}$ für die ℓ -te auslaufende Partialwelle im Kanal β ($\neq \alpha$) ist. Es ist

$$S_{\beta\alpha}^{\ell} = \text{S-Matrix-Element};$$

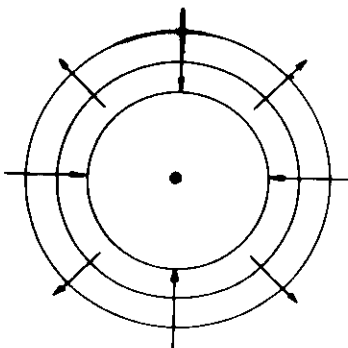
man multipliziert die Amplitude der auslaufenden Wellenfunktion des (ungestörten) Anfangszustandes im Kanal α (siehe (2)) mit $S_{\beta\alpha}^{\ell}$, um die Amplitude der im Kanal β auslaufenden Wellenfunktion zu erhalten.

Die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit für die ℓ -te Partialwelle gibt

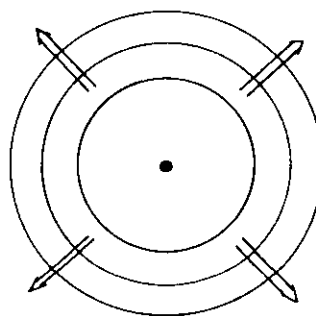
$$\left| S_{\alpha\alpha}^{\ell} \right|^2 + \sum_{\beta \neq \alpha} \left| S_{\beta\alpha}^{\ell} \right|^2 = 1 \quad (\text{für jedes } \alpha) \quad (6)$$

(Unitarität der S-Matrix $S_{\beta\alpha}^{\ell}$), da die Summe der Intensitäten der auslaufenden Kugelwellen aller Endzustände α, β, \dots gleich der Intensität 1 der auslaufenden Kugelwelle (siehe (2)) des ungestörten Ausgangszustands sein muß. Daraus folgt

$$\left| S_{\beta\alpha}^{\ell} \right| \leq 1 \quad (\text{alle } \alpha, \beta) \quad (7)$$



asymptotische Wellenfunktion des Kanals α mit Streuung (ein- und auslaufende Wellen)



asymptotische Wellenfunktion eines Kanals $\beta \neq \alpha$ (nur auslaufende Wellen)

* Obwohl wir hier die Spins der Teilchen nicht explizit berücksichtigen, merken wir an, daß bei Teilchen mit Spin auch die "elastische" Spinflip-Streuung im Sinne unserer Definition (elastisch = kohärent) eine inelastische Streuung darstellt und damit ebenfalls einen eigenen Kanal $\beta (\neq \alpha)$ bildet.

2.4 Gestreurte Welle und Wirkungsquerschnitt

Die gestreurte Welle im Kanal β (sowohl für elastische ($\beta = \alpha$) als auch inelastische ($\beta \neq \alpha$) Streuung) ist sinnvollerweise definiert als die Differenz zwischen der auslaufenden Welle mit Streuung (aus (3) bzw. (5)), und der ungestörten, ohne Streuung auslaufenden Welle (aus (2)); sie ist also asymptotisch ($r \rightarrow \infty$) gleich

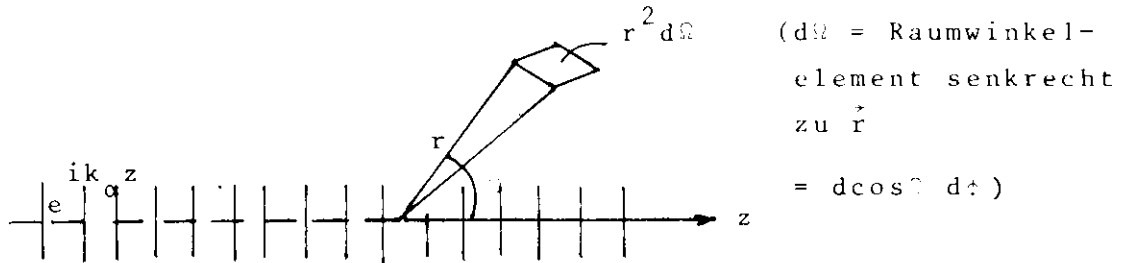
$$\frac{1}{k_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \underbrace{\frac{S_{\beta\alpha}^\ell - \delta_{\beta\alpha}}{2i}}_{t_{\beta\alpha}^\ell} P_\ell(\cos\theta) \frac{e^{ik_\beta r}}{r} \quad (8)$$

$\equiv f_{\alpha\beta}(\theta)$

$\delta_{\beta\alpha} = \delta\text{-Funktion}$

Die Funktion $f_{\alpha\beta}(\theta)$ enthält die Winkelabhängigkeit der gestreurten Welle, der Rest ist die Radialwellenfunktion. Die $t_{\beta\alpha}^\ell$ nennt man "T-Matrixelemente in der Drehimpulsbasis", oder auch "Partialwellenamplituden". Sie können natürlich noch von der Energie abhängen.

Wir berechnen nun den differentiellen Streuwirkungsquerschnitt. Es ist



$$d\sigma = \frac{\text{(Anzahl der gestreurten Teilchen, die durch das Flächenelement } r^2 d\Omega \text{ gehen)}}{\text{(Anzahl der einlaufenden Teilchen/Fläche)}} \frac{e^{ik_\beta r}}{r} r^2 d\Omega$$

$$= \frac{\text{(Anzahl der gestreurten Teilchen/Fläche)} \times r^2 d\Omega}{\text{Anzahl der einlaufenden Teilchen/Fläche}} \frac{|f_{\alpha\beta}(\theta)|^2}{|e^{ik_\alpha z}|^2} r^2 d\Omega$$

$$= |f_{\alpha\beta}(\theta)|^2 d\Omega,$$

also (sowohl für $\alpha = \beta$ als auch für $\alpha \neq \beta$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\alpha \neq \beta} = |f_{\alpha\beta}(\theta)|^2 \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{k_\alpha^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) t_{\beta\alpha}^\ell P_\ell(\cos\theta) \right|^2 \quad (9)$$

Wegen

$$\int_{-1}^1 P_\ell(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell m}$$

wird durch Integration über alle $\cos\theta$ und ϕ (Azimutwinkel) der gesamte Wirkungsquerschnitt für Streuung vom Kanal α in den Kanal β ($\alpha = \beta$, oder $\alpha \neq \beta$)

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{4\pi}{k_\alpha^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |t_{\beta\alpha}^\ell|^2 \quad (10)$$

Der gesamte inelastische Wirkungsquerschnitt σ_i ist

$$\sigma_i = \frac{4\pi}{k_\alpha^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sum_{\beta \neq \alpha} |t_{\beta\alpha}^\ell|^2,$$

und wegen

$$\sum_{\beta \neq \alpha} |t_{\beta\alpha}^\ell|^2 \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{4} \sum_{\beta \neq \alpha} |S_{\beta\alpha}^\ell|^2 \stackrel{(6)}{=} \frac{1 - |S_{\alpha\alpha}^\ell|^2}{4} \stackrel{(4)}{=} \frac{1 - \eta_\ell^2}{4}$$

folgt

$$\sigma_i = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (1 - \eta_\ell^2) \quad (11)$$

2.5 Eigenschaften der elastischen Partialwellenamplitude $t_{\alpha\alpha}^\ell$ und optisches Theorem

Nach (4) und (8) (wir lassen die Indizes $\alpha\alpha$ an $t_{\alpha\alpha}^\ell$ fort) ist

$$t^\ell = \frac{\eta_\ell e^{2i\delta_\ell} - 1}{2i} \quad (12)$$

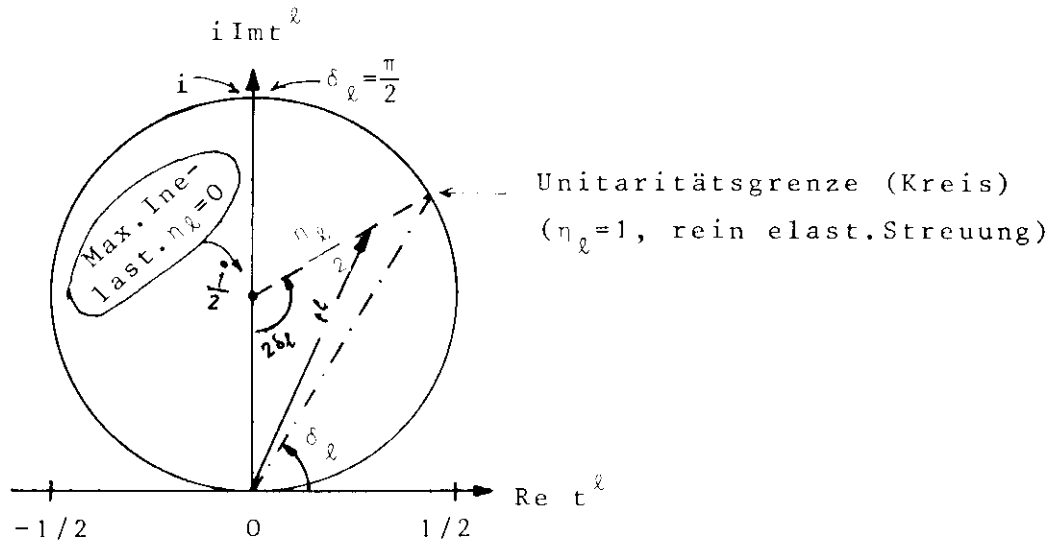
woraus

$$\left| t^\ell - \frac{i}{2} \right| = \frac{\eta_\ell}{2} \leq \frac{1}{2}$$

folgt. Diese Ungleichung beruht auf der Unitarität (6). Die elastische Partialwellenamplitude kann also nicht außerhalb eines Kreises vom Radius $1/2$ um $i/2$ in der komplexen t^ℓ -Ebene liegen. Für rein elastische Streuung (keine inelastischen Prozesse $\alpha \rightarrow \beta$)

ist nach (4) und (6) $\eta_\ell = 1$, und t^ℓ liegt auf dem Unitaritätskreis. In diesem Fall folgt aus (12)

$$t^\ell = \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_\ell} - 1) \equiv e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell = \frac{1}{\cot\delta_\ell - i} \quad (\text{für } \eta_\ell = 1) \quad (12')$$



Ferner folgt nun, wiederum für alle η_ℓ , aus (12)

$$\text{Re } t^\ell = \frac{\eta_\ell}{2} \sin 2\delta_\ell, \quad \text{Im } t^\ell = \frac{1}{2}(1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell)$$

und damit die Beziehung

$$\text{Im } t^\ell = |t^\ell|^2 + \frac{1 - \eta_\ell^2}{4} \quad (13)$$

Mit (10) und (11) erhält man hieraus den Ausdruck für den totalen Wirkungsquerschnitt (elastisch plus inelastisch, d.h. summiert über alle β) in der Form des optischen Theorems:

$$\sigma_t = \sigma_{\alpha \rightarrow \alpha} + \sigma_i = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \text{Im } t^\ell \quad (10, 11, 13) \quad (14)$$

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2} \text{Im } f_{\alpha\alpha}(0=0) \quad (8)$$

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$$

$$l = p a = k a$$

2.6 Geometrische Interpretation des Partialwellen-Wirkungsquerschnitts

Klassischer Bahndrehimpuls

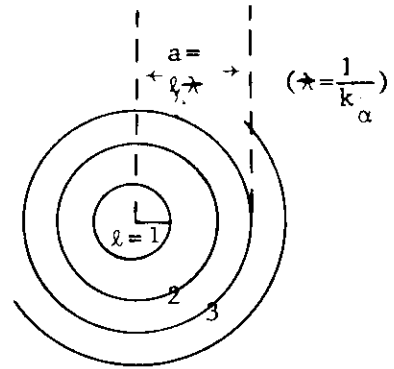
$$l = k_{\alpha} a = a/\lambda \quad (a = \text{Sto\ssparameter});$$

Die Fläche des l -ten Kreisringes

$$[(l+1)^2 - l^2] \lambda^2 \pi = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} (2l+1)$$

ist gleich dem maximalen Absorptionsquerschnitt (11):

$$\text{Max } \sigma_i^{(l)} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} (2l+1)$$



Der elastische Wirkungsquerschnitt kann 4 x so groß sein infolge Interferenz zwischen einlaufender und gestreuter Welle.

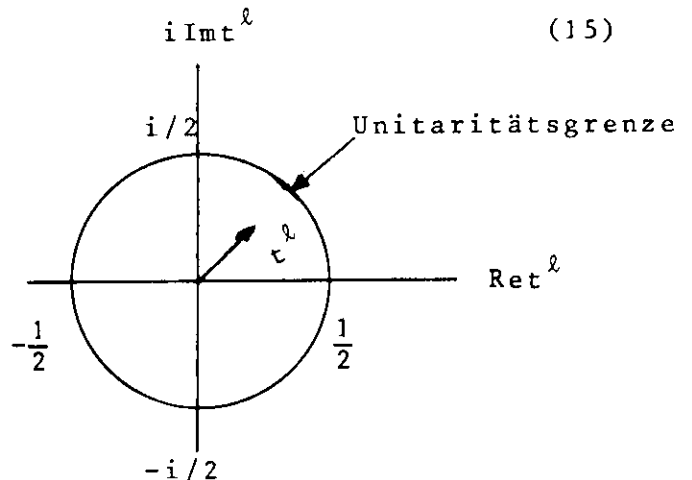
2.7 Eigenschaften der inelastischen Partialwellenamplituden $t_{\beta\alpha}^l (\alpha \neq \beta)$

Nach (8) ist

$$t_{\beta\alpha}^l = \frac{S_{\beta\alpha}^l}{2i}$$

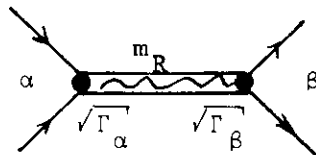
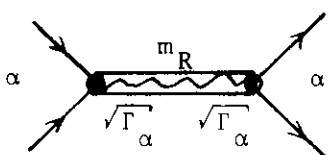
also auf Grund der Unitarität

$$|t_{\beta\alpha}^l| \leq \frac{1}{2}$$



2.8 Resonanzstreuung und Breit-Wigner Formel

Wir untersuchen jetzt die Energieabhängigkeit von t_l für den Fall eines resonanten Zwischenzustandes. Die Streuung der l -ten Partialwelle verlaufe vollständig über einen resonanten, instabilen Zwischenzustand der Masse m_R .



($E \approx m_R$ im Schwerpunktsystem)

Dieser Zwischenzustand zerfalle mit der mittleren Lebensdauer τ (in seinem Ruhesystem).

Die gestreute ℓ -te Partialwelle hat dann einen Zeitfaktor

$$\underbrace{e^{-im_R t}}_{\text{stets vorhandene Zeit-}} \quad \underbrace{e^{-\frac{t}{2\tau}}}_{\text{abhängigkeit } (\omega = m_R)}$$

$$\underbrace{e^{-\frac{t}{2\tau}}}_{\text{exponentielle Dämpfung der}} \quad \underbrace{e^{iEt}}_{\text{Wellenfunktion wegen Zerfall}}$$

der Wellenfunktion (bisher nicht explizit hingeschrieben). Der Abfall der Wellenfunktion mit der Zeit t führt zu einer Verbreiterung des (bisher diskreten) Frequenzspektrums (= Energiespektrums); es ergibt sich durch Fouriertransformation der Zeitabhängigkeit zu

$$\int_0^{\infty} e^{-im_R t} e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{iEt} dt = \frac{-i}{m_R - E - i\frac{\Gamma}{2}}$$

worin $\Gamma = \frac{1}{\tau}$ (16)

gesetzt wurde (vgl. Unschärferelation!). Die Energieabhängigkeit der resonanten Partialwellenamplitude $t_{\beta\alpha}^{\ell}$ ist also durch einen Faktor

$$\frac{1}{m_R - E - i\frac{\Gamma}{2}}$$

bestimmt.

Die Unitaritätsrelation (6) legt den restlichen, energieunabhängigen Faktor in $t_{\beta\alpha}^{\ell}$ fest. Es sei nämlich die Gesamtzerfallswahrscheinlichkeit (pro Zeit) Γ der Resonanz eine Summe

$$\Gamma = \Gamma_{\alpha} + \Gamma_{\beta} + \dots \quad (17)$$

wobei die $\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}, \dots$ die partiellen Zerfallswahrscheinlichkeiten sind. Dann ist

$t_{\beta\alpha}^{\ell}(E) = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\Gamma_{\beta}} \sqrt{\Gamma_{\alpha}}}{m_R - E - i\frac{\Gamma}{2}}$	<p style="text-align: center;"><u>Breit-Wigner Formel</u> für resonante Partial- wellenamplitude</p> (18)
--	--

denn gerade mit diesem Faktor im Zähler ist (6) bei $E = m_R$ erfüllt:

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\beta} |S_{\beta\alpha}^{\ell}|^2 &= |S_{\alpha\alpha}^{\ell}|^2 + \sum_{\beta \neq \alpha} |S_{\beta\alpha}^{\ell}|^2 \\
 &\stackrel{(8)}{=} |2it_{\alpha\alpha}^{\ell} + 1|^2 + 4 \sum_{\beta \neq \alpha} |t_{\beta\alpha}^{\ell}|^2 \\
 &\stackrel{(18)}{=} \left| 2i \left(\frac{\Gamma_{\alpha}}{-i\Gamma} \right) + 1 \right|^2 + 4 \frac{\Gamma_{\alpha}}{\Gamma^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\beta} \\
 &= \left(1 - 2 \frac{\Gamma_{\alpha}}{\Gamma} \right)^2 + 4 \frac{\Gamma_{\alpha}}{\Gamma^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\beta} \\
 &= 1 - 4 \frac{\Gamma_{\alpha}}{\Gamma} + 4 \frac{\Gamma_{\alpha}}{\Gamma^2} \underbrace{\left(\Gamma_{\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\beta} \right)}_{= \Gamma} = 1.
 \end{aligned}$$

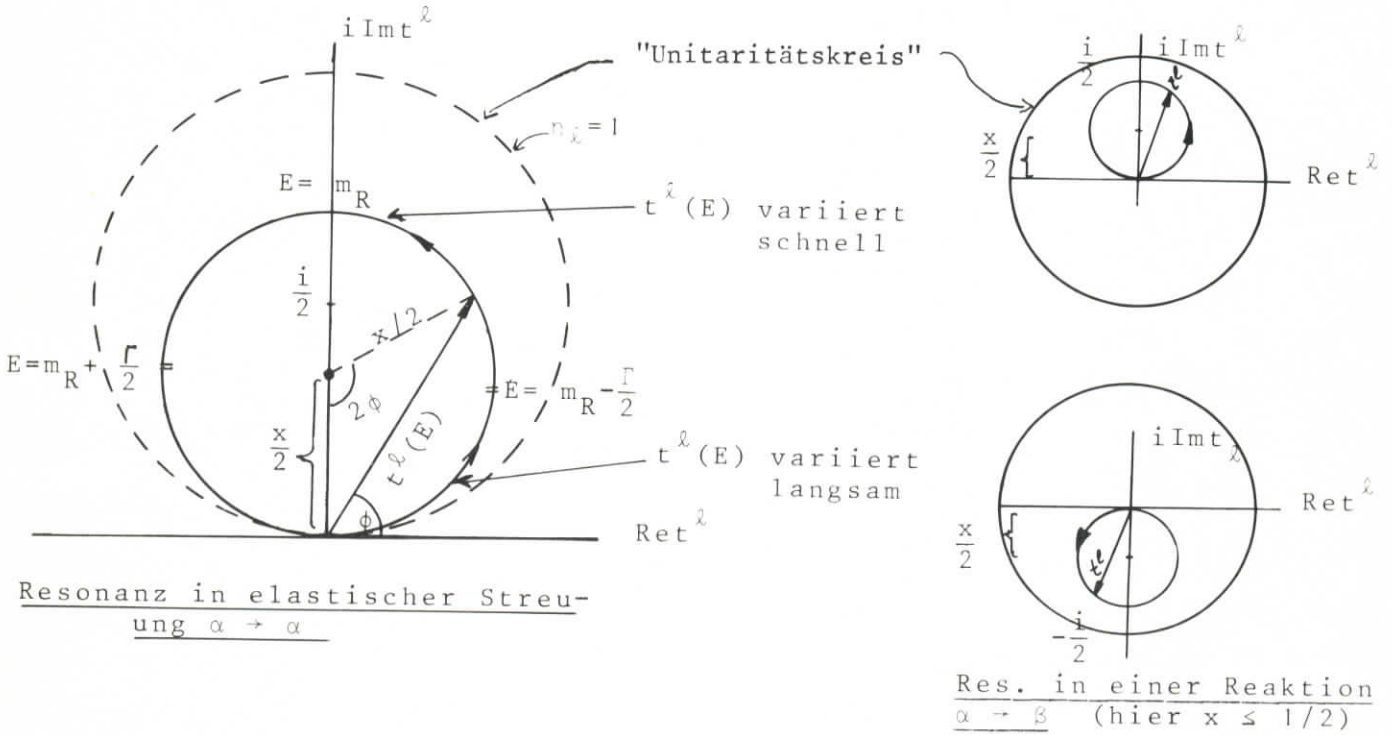
Man nennt (18) die Breit-Wigner-Formel, Γ die Breite der Resonanz. Sie gilt sowohl für elastische ($\beta = \alpha$) wie inelastische ($\beta \neq \alpha$) Resonanzstreuung. Man beachte, daß $\sqrt{\Gamma_{\alpha}}, \sqrt{\Gamma_{\beta}}$... beiderlei Vorzeichen haben können. Man bezeichnet diese reellen, nicht notwendig positiven Zahlen oft auch als die Kopplungskonstanten. Natürlich ist $(\sqrt{\Gamma_{\alpha}})^2 \geq 0$, d.h. das Residuum (der Zähler) des Breit-Wigner-Resonanz-Pols in der elastischen Streuung ist, als Quadrat einer Kopplungskonstante, stets ≥ 0 .

Um das Verhalten der resonanten Partialwellenamplitude (18) näher zu studieren, machen wir die identische Umformung

$$t_{\beta\alpha}^{\ell}(E) = \frac{i}{2} \underbrace{\frac{\sqrt{\Gamma_{\beta}\Gamma_{\alpha}}}{\Gamma}}_{= X} \left(1 - e^{2i\phi} \right) \quad \text{mit } \tan\phi = \frac{\Gamma/2}{m_R - E}.$$

Daraus sieht man, daß $t_{\beta\alpha}^{\ell}(E)$ in der komplexen Ebene einen Kreis um $\frac{iX}{2}$ vom Radius $\frac{X}{2}$ entgegen dem Uhrzeigersinn beschreibt. Man findet leicht, daß die Geschwindigkeit dieser Kreisbewegung ihr Maximum bei $E = m_R$ hat. Man nennt das Diagramm $\text{Re} t_{\beta\alpha}^{\ell}$ gegen $i\text{Im} t_{\beta\alpha}^{\ell}$ der Amplitude, als Funktion der Energie E , das "Argand-Diagramm".

Es sieht also für eine resonante Partialwellenamplitude folgendermaßen aus:

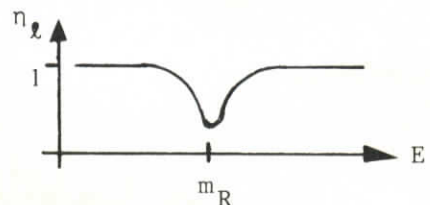


Wir unterscheiden 3 Fälle bei der elastischen Streuung ($\alpha \rightarrow \alpha$):

- (1) Rein elastische Resonanz im Kanal α ; $X = 1$ ($\Gamma_\alpha = \Gamma$).
 Dann ist also $\eta_\ell \equiv 1$. $t^\ell(E)$ bewegt sich auf dem Unitaritätskreis. An der Resonanzstelle $E = m_R$ ist $t^\ell(m_R) = i$ (rein imaginär); dort ist die Streuphase $\delta_\ell = \frac{\pi}{2}$. (Geometrisch ist für die rein elastische Resonanz der Winkel ϕ der vorigen Abbildung gleich der Streuphase δ_ℓ .)
- (2) Quasielastische Resonanz im Kanal α (d.h. die Resonanz tritt hauptsächlich im Kanal α auf), definiert durch $\frac{1}{2} \leq x < 1$, oder

$$\frac{\Gamma}{2} < \Gamma_\alpha < \Gamma$$

$t^\ell(E)$ geht im Arganddiagramm für $E = m_R$ oberhalb von $\frac{i}{2}$ durch die imaginäre Achse. An der Resonanzstelle ist deshalb $\delta_\ell = \frac{\pi}{2}$ wie unter (1); der Elastizitätsparameter η_ℓ hat ein Minimum an der Resonanzstelle.



(3) Inelastische Resonanz im Kanal α , definiert durch

$$\Gamma_{\alpha} < \frac{\Gamma}{2}$$

(oder $x < \frac{1}{2}$). $t^{\ell}(E)$ geht bei $E = m_R$ unterhalb von $\frac{i}{2}$ durch die imaginäre Achse. An der Resonanzstelle ist deshalb $\delta_{\ell} = 0$; jedoch hat η_{ℓ} dort noch immer ein Minimum. (Falls ein bestimmter anderer Kanal β unter den an die Resonanz gekoppelten Kanälen dominiert, so kann die Resonanz eine quasielastische Resonanz im Kanal β sein, nämlich falls $\Gamma_{\beta} > \frac{\Gamma}{2}$ ist.)

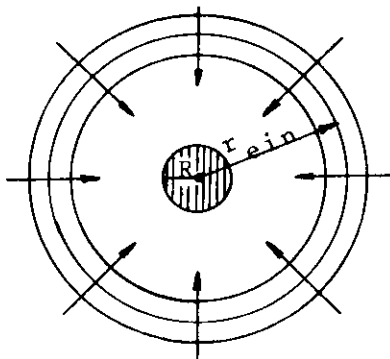
Beispiel: Die Nukleonresonanz $N'(1535)$ ist eine quasielastische Resonanz der elastischen ηN -Streuung $\eta N \rightarrow \eta N$. Dieser Streuprozess ist natürlich nicht beobachtet worden; man beobachtet die Resonanz als eine inelastische Resonanz in der elastischen πN -Streuung $\pi N \rightarrow \pi N$, sowie auch in dem inelastischen Prozess $\pi N \rightarrow \eta N$.

2.9 Die Wigner-Bedingung

Wir haben gesehen, daß die Resonanzamplitude als Funktion von E im Argand-Diagramm einen Kreis entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft. Bewegung im Uhrzeigersinn bei zunehmender Energie würde $\Gamma < 0$ und damit $\tau < 0$ bedeuten (beachte: $2 \tan \phi = \Gamma / (m_R - E)$); dies widerspräche der Kausalität, da dann die Resonanz im Mittel eine Zeit τ vor ihrer Entstehung zerfallen würde!

Eine mehr quantitative Auskunft über die Frage, in wie weit es überhaupt für eine Partialwellenamplitude erlaubt ist, sich im Uhrzeigersinn im Arganddiagramm zu bewegen, gibt die sogenannte Wignerbedingung, die wir nun herleiten wollen.

Wir betrachten dazu ein Wellenpaket, das wir uns im einfachsten Falle als Überlagerung von zwei sinusförmigen Wellen mit den Wellenzahlen $k \pm dk$ und Frequenzen $\omega \pm d\omega$ entstanden denken können. Dieses Wellenpaket falle als Kugelwelle auf ein Streuzentrum vom Radius R . Das einlaufende Wellenpaket ist dann, zum Zeitpunkt t , proportional zu



$$\begin{aligned}\phi_{\text{ein}} &= e^{i[-(k+dk)r - (\omega+d\omega)t]} + e^{i[-(k-dk)r - (\omega-d\omega)t]} \\ &= e^{i(-kr-\omega t)} 2\cos(rdk + td\omega)\end{aligned}$$

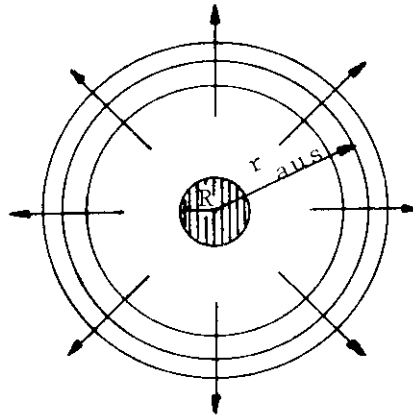
Das Wellenpaket hat sein Intensitätsmaximum da, wo das Argument des cos verschwindet; es befindet sich also, grob gesprochen, zur Zeit t im Abstand

$$r = r_{\text{ein}} = - \frac{d\omega}{dk} t$$

vom Nullpunkt. Nun konstruieren wir das auslaufende Wellenpaket. Jede der beiden Frequenzkomponenten wird im allgemeinen mit einer etwas verschiedenen Phasenverschiebung 2δ (vgl. 2.3) gestreut werden. Wir schreiben die beiden Phasenverschiebungen in der Form

$$2(\delta + d\delta) \quad \text{für die Welle mit } k + dk .$$

Dann ist das auslaufende Wellenpaket proportional zu



$$\begin{aligned}\phi_{\text{aus}} &= e^{i[(k+dk)r - (\omega+d\omega)t + 2(\delta+d\delta)]} + e^{i[(k-dk)r - (\omega-d\omega)t + 2(\delta-d\delta)]} \\ &= e^{i(kr-\omega t+2\delta)} 2\cos(rdk - td\omega + 2d\delta)\end{aligned}$$

Der durch das Intensitätsmaximum definierte "Ort des Wellenpakets"* zur Zeit t ist also

$$r = r_{\text{aus}} = + \frac{d\omega}{dk} t - 2 \frac{d\delta}{dk} .$$

Die Kausalitätsforderung lautet nun: Für

$$r_{\text{ein}} = R \quad (R = \text{Radius des Streukörpers})$$

muß

$$r_{\text{aus}} \leq R$$

* Eigentlich haben wir natürlich bei Überlagerung von zwei sinusförmigen Wellen, kein Wellenpaket, sondern ein cosinusförmig amplitudenmoduliertes Wellenfeld. Wir nehmen als "Ort des (ein- bzw. auslaufenden) Wellenpakets" zwei einander entsprechende Maxima; z.B. ohne Streuung ($\delta=0$ und $R=0$) wären mit unserer Wahl r_{aus} und r_{ein} gleichzeitig (nämlich für $t=0$) gleich Null, wie es sein muß.

sein; d.h. das gestreute auslaufende Wellenpaket kann nicht bereits außerhalb des Streukörpers erscheinen, bevor das einfallende Wellenpaket beim Streukörper eingetroffen ist. Es folgt

$$r_{\text{aus}} = \underbrace{\frac{d\omega}{dk} t}_{=-r_{\text{ein}}} - 2\frac{d\delta}{dk} \leq R$$

also

$$\boxed{\frac{d\delta}{dk} \geq -R.} \quad (19)$$

Dies ist die sogenannte Wignerbedingung. Sie besagt also, daß die Streuphase $\delta(k)$ mit zunehmendem Impuls k nicht beliebig schnell abnehmen, wohl aber beliebig schnell wachsen kann. Damit ist ein schnelles Variieren der Amplitude im Uhrzeigersinn ausgeschlossen (wenigstens bei endlicher Reichweite R der Wechselwirkung); es gibt also eine untere Grenze für Γ für eine "Anti-resonanz". (beachte: Schnelle Variation von t^{ℓ} bedeutet kleine Breite der Resonanz)

Dalitz hat gezeigt, daß dieses hier für die elastische Streuamplitude gewonnene Resultat auch für inelastische Partialwellenamplituden ($\alpha \neq \beta$) entsprechend gilt.

2.10 Resonanz mit Untergrund

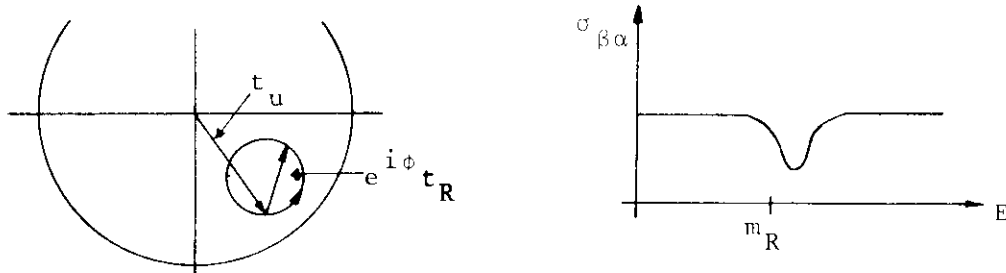
Meist ist eine Partialwellenamplitude $t^{\ell}(E)$ nicht rein resonant, sondern es gibt noch Untergrund-Anteile in der gleichen Amplitude. Diese können zum Beispiel vom Schwanz einer in der Energie weit entfernten Resonanz herrühren, aber auch völlig nicht-resonanten Charakter haben (wie etwa Bornsterme). Die verschiedenen Amplitudenanteile interferieren dann miteinander. Ferner kann die Phase des Breit-Wigner-Terms durch den Untergrund geändert, d.h. der Resonanzkreis gedreht werden:

$$t^{\ell}(E) = \underbrace{t_R^{\ell}(E)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Breit-Wigner} \\ \text{Resonanz}}} e^{i\phi} + \underbrace{t_u^{\ell}(E)}_{\uparrow \text{Untergrund}}$$

Der Phasenwinkel ϕ kann im Prinzip beliebig sein. (Es scheint aber bei elastischer Streuung meist $\phi = 0$ zu gelten.)

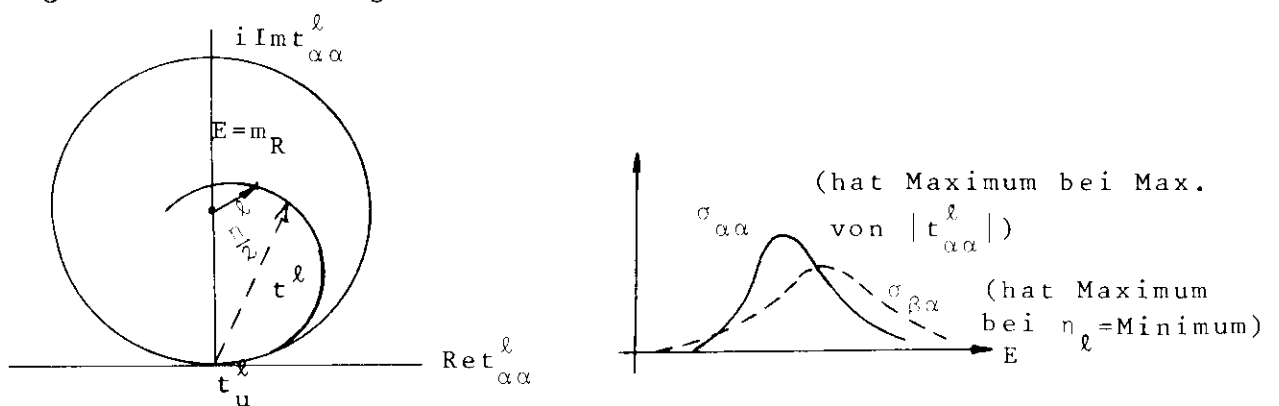
Man muß ferner beachten, daß durch die Addition von Resonanz- und Untergrundamplitude die Unitaritätsgrenze nicht überschritten werden darf. Weitere Aussagen über die resultierende Amplitude bei Überlagerung von Resonanz und Untergrund können nicht mehr allgemein, sondern nur noch im Rahmen bestimmter dynamischer Modelle gemacht werden.

Ist der Untergrund energieabhängig, so können sich nahezu beliebige Verzerrungen des Resonanzkreises ergeben. Die Resonanz kann dann bei beliebig stark von $\frac{\pi}{2}$ (oder 0) abweichenden δ liegen. Auch kann das Maximum des Wirkungsquerschnitts (oder Betrags der Amplitude) neben der Resonanzstelle liegen; bei inelastischen Reaktionen ($\alpha \neq \beta$) kann man sogar im Prinzip bei der Resonanz ein Minimum, nicht ein Maximum, des Wirkungsquerschnitts haben, wie das hier gezeichnete Beispiel zeigt:



Das einzige Kriterium für eine Resonanz, das dann bestehen bleibt, ist das einer relativ rasch (mit einem Maximum der Geschwindigkeit als Funktion der Energie) und gegen den Uhrzeigersinn mit E variierenden Amplitude. Genau dann sollte ja eine Art Compoundzustand, charakterisiert durch eine relativ lange Lebensdauer, existieren. (Dies ist aus der Argumentation von Abschnitt 2.9 leicht zu sehen: Bei $t = 0$ ist $r_{\text{ein}} = 0$; das auslaufende Paket erscheint aber erst bei $r_{\text{aus}} = 0$ zur Zeit $t = 2(d\delta/dk)/(d\omega/dk) = 2 \frac{d\delta}{d\omega} = 2 \frac{d\delta}{dE}$).

Schließlich sei noch bemerkt, daß bei einer in zwei (oder mehr) verschiedene Kanäle α, β zerfallenden Resonanz das Maximum des Wirkungsquerschnitts für die Reaktion $\alpha \rightarrow \alpha$ (elastisch) und $\alpha \rightarrow \beta$ (inelastisch) bei verschiedenen Energien liegen kann, wenn der Resonanzkreis durch den Untergrund deformiert ist. Die folgende Skizze zeigt eine solche mögliche Situation:



Die beiden Maxima im Wirkungsquerschnitt sind hier signifikant gegeneinander verschoben, obwohl es sich um die gleiche Resonanz handelt. Aufgabe: Man zeichne in dem vorstehenden Arganddiagramm die drei Stellen ein, an denen $\sigma_{\alpha\alpha}^{\ell}$ (vgl. Gl. 10), σ_i^{ℓ} (vgl. Gl. 11) und $\sigma_{\text{tot}}^{\ell}$ (vgl. Gl. (14)) ihr Maximum haben.

2.11 Die Energieabhängigkeit von $\Gamma(E)$

Wir betrachten die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit bei einem Zerfall einer Resonanz in den 2-Teilchen-Kanal α :

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi E} |M|^2 R_2(E)$$

wobei

$$R_2(E) = \frac{\pi k}{E}$$

der invariante 2-Teilchen-Phasenraum ist, und $|M|^2$ proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Endzustandsteilchen im Bereich der Wechselwirkung. Für kleine Endzustandsimpulse k ist die 2-Teilchen-Wellenfunktion (für Bahndrehimpuls ℓ)

$$\Psi(\vec{r}) \propto j_{\ell}(kr) \propto (kr)^{\ell} \quad (kr \ll \ell),$$

folglich

$$|M|^2 \propto k^{2\ell}$$

und damit

$$\Gamma \sim k^{2\ell+1} \quad (20)$$

(für $kR \ll 1$, R = Reichweite der Wechselwirkung).

Hieraus folgt mit (18)

$$t_{\beta\alpha}^{\ell}(E) \sim k_{\beta}^{\ell_{\beta} + \frac{1}{2}} k_{\alpha}^{\ell_{\alpha} + \frac{1}{2}} \quad (21)$$

Dies gibt die Energieabhängigkeit der Partialwellenamplitude in der Nähe der Schwelle entweder des Kanals α oder des Kanals β an. (Falls eines der beteiligten Teilchen ein Photon ist, so ist anstelle von ℓ die Multipolordnung zu nehmen.)

Quantitativ kann man $|m|^2$ nur unter bestimmten Modellannahmen ausrechnen; zum Beispiel für ein Kastenpotential der Reichweite R erhält man (siehe Blatt-Weisskopf, S. 361)

$$\Gamma(E) = \Gamma(m_R) \left(\frac{k}{k_R} \right)^{2l+1} \frac{D_l(k_R R)}{D_l(kR)} \quad (22)$$

k_R ist der Impuls an der Resonanzstelle $E = m_R$; der Durchdringungsfaktor für die Zentrifugalbarriere ist $(kR)^{2l}/D_l(kR)$ mit

$$D_l(x) = x^{2l+2} [j_l^2(x) + n_l^2(x)], \quad (23)$$

wo j_l, n_l die sphärische Bessel- bzw. Neumannfunktion ist. Für die niedrigsten l ist

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 & D_3 &= 225 + 45x^2 + 6x^4 + x^6 \\ D_1 &= 1 + x^2 & D_4 &= 11025 + 1575x^2 + 135x^4 + 10x^6 + x^8 \\ D_2 &= 9 + 3x^2 + x^4 & D_5 &= 893025 + 99225x^2 + 6300x^4 + 315x^6 + \\ & & & \quad + 15x^8 + x^{10} \\ D_6 &= 108056025 + 9823275x^2 + 496125x^4 + 18900x^6 + 630x^8 + \\ & & & \quad + 21x^{10} + x^{12} \end{aligned}$$

Die Formeln (22) und (23) werden häufig verwendet, wobei R durch Anpassung bestimmt wird und sich meist als $R \approx 1F$ ergibt.

In Fällen, wo man die Streuphase δ_l aus Streuphasenanalysen kennt, kann man über die Energieabhängigkeit der Streuphase eine empirische Form der Energieabhängigkeit der Breite gewinnen. Dies gilt z.B. für die πN -Resonanz $\Delta(1236)$.

Aus

$$t^l = \frac{1}{\cot \delta_l - i} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(E)}{m_R - E - i\Gamma(E)/2} \quad (12')$$

(Gleichsetzen von (12') und (18); beachte, daß hier die Streuung rein elastisch und daher $n_l = 1$ ist) folgt

$$\tan \delta_l = \frac{\Gamma(E)/2}{m_R - E}$$

oder besser, unter Benutzung der relativistischen Breit-Wigner-Amplitude,

$$\tan \delta_l = \frac{m_R \Gamma(E)}{m_R^2 - E^2}$$

Hieraus ergibt sich $\Gamma(E)$, wenn $\delta_l(E)$ und m_R bekannt sind.

2.12 Die "relativistische" Breit-Wigner-Formel

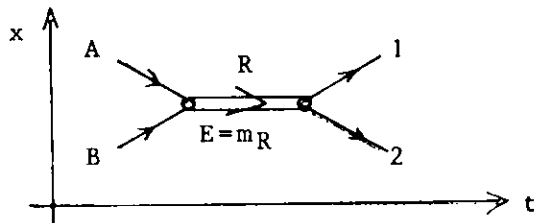
Man erhält die sogenannte "relativistische" Breit-Wigner-Formel, indem man in (18) die Ersetzung

$$\frac{1}{m_R - E - i\frac{\Gamma}{2}} \longrightarrow \frac{2m_R}{M_R^2 - E^2 - im_R\Gamma} \quad (24)$$

vornimmt. (Die "relativistische" Form entspricht dem relativistischen Propagator $\frac{1}{m^2 - E^2 - i\epsilon}$, mit Pol unterhalb der reellen Achse.)

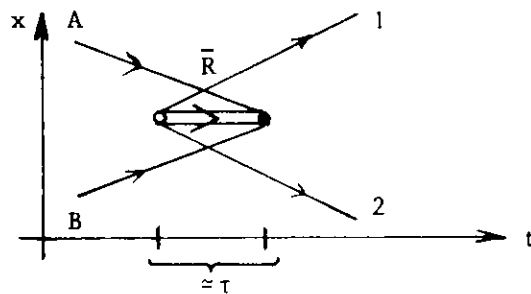
In der Nähe der Resonanzenergie ist $m_R + E \hat{=} 2m_R$, so daß dort die beiden Formeln näherungsweise identisch sind.

Man kann die relativistische Form folgendermaßen plausibel machen. Im Raum-Zeit-Diagramm sieht die Formation einer Resonanz so aus:



Die Energie im Zwischenzustand ist $E = m_R$.

Relativistisch haben wir auch den folgenden Prozeß:



Hierbei entstehen zunächst die Teilchen 1 und 2 zusammen mit dem Antiteilchen \bar{R} der Resonanz R; nach der mittleren Zeit τ (= Lebensdauer von R und \bar{R}) vernichtet sich \bar{R} mit den einlaufenden Teilchen A und B. Die Energie im Zwischenzustand ist hier $2E + m_R$, wobei E die Gesamtenergie der Teilchen A und B (oder 1 und 2) in ihrem Schwerpunktsystem ist. Wir haben also einen mit der mittleren Lebensdauer τ zeitlich abklingenden Zustand der Masse $2E + m_R$. Seine Fourierzerlegung gibt ein Energiespektrum (siehe 3.3) proportional zu

$$\frac{1}{(2E + m_R) - E - i\frac{\Gamma}{2}} = \frac{1}{m_R + E - i\frac{\Gamma}{2}} .$$

Insgesamt haben wir die Summe des ursprünglichen, nichtrelativistischen Breit-Wigner-Ausdrucks und dieses neuen Ausdrucks

(der sich nur durch das Vorzeichen von E unterscheidet) zu nehmen; das Resultat ist dann gerade (in niedrigster Ordnung von $\frac{\Gamma}{m_R}$) die relativistische Breit-Wigner-Formel (24).

2.13 Resonanzen, virtuelle gebundene Zustände und antigebundene Zustände

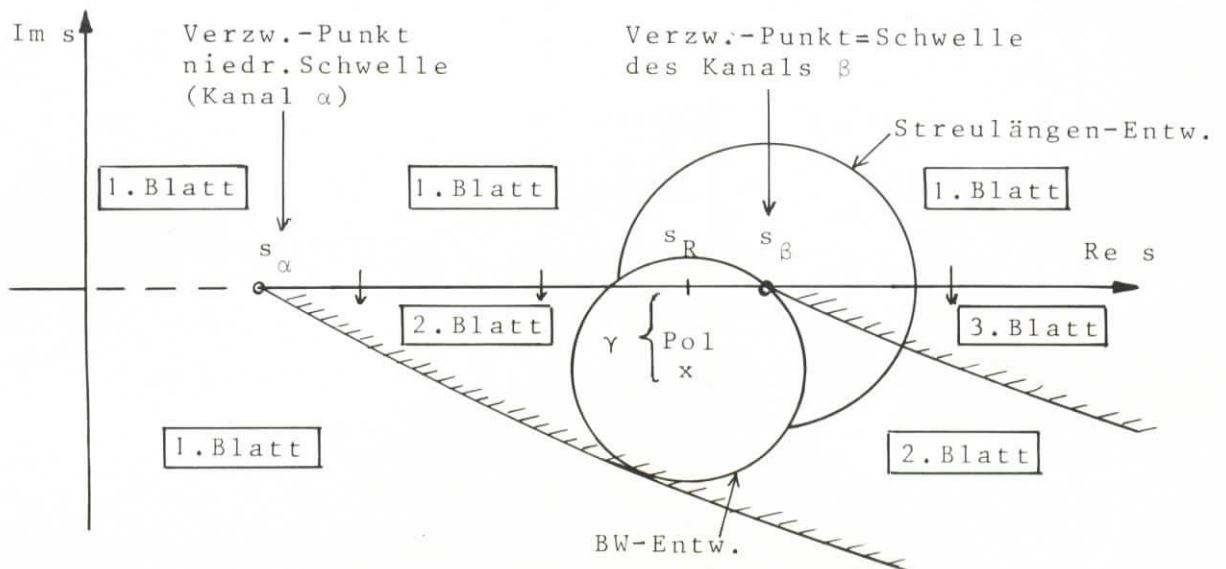
Um diese verschiedenen Phänomene zu vergleichen, betrachten wir sie von einem gemeinsamen Standpunkt aus, nämlich als Pole der Partialwellenamplitude in der komplexen $s = E^2$ Ebene. Zunächst wollen wir einen Breit-Wigner-Pol der elastischen ($\alpha \rightarrow \alpha$) Partialwellenamplitude ((18), mit der relativistischen Modifikation (24)) bei $s = s_R = m_R^2$ betrachten:

$$t_{\alpha\alpha}^l(s) = \frac{m_R \Gamma_\alpha}{s_R - s - i\gamma}$$

Zur Abkürzung schreiben wir $m_R \Gamma = \gamma$. Dieser Pol entspricht einer Resonanz im Kanal α . Sie liege oberhalb der Schwellenenergie $\sqrt{s_\alpha}$ für den Kanal α . Im allgemeinen werden wir außer dem Resonanzanteil auch noch irgendwelchen Untergrund in der betrachteten Partialwellenamplitude haben. Wir können jedoch in jedem Fall die Partialwellenamplitude in eine Laurent-Reihe um $s = s_R - i\gamma$ entwickeln:

$$t_{\alpha\alpha}^l(s) = \underbrace{\frac{a_{-1}}{s_R - s - i\gamma}}_{\substack{\text{Breit-Wigner-Pol, dominiert} \\ \text{bei } s \text{ nahe } s_R}} + \underbrace{a_0 + a_1 (s_R - s - i\gamma) + \dots}_{\text{"Untergrund"}} \quad (25)$$

Die folgende Skizze illustriert die Situation.



Wie wirkt sich diese Resonanz in einem anderen Kanal aus? Wenn die Schwelle dieses anderen Kanals ebenfalls unterhalb der Resonanzmasse $m_R = \sqrt{s_R}$ liegt, so haben wir gleichfalls einen Resonanzpol in der Amplitude für elastische Streuung im Kanal β ($\beta \rightarrow \beta$), sowie für die inelastischen Reaktionen $\alpha \leftrightarrow \beta$; vorausgesetzt natürlich, daß die Kopplungskonstante $\Gamma_\beta^{1/2} \neq 0$ ist.

Andersartige Verhältnisse ergeben sich jedoch, wenn die Schwelle $\sqrt{s_\beta} > \sqrt{s_R}$ ist, d.h. der Pol liegt unterhalb der physikalischen Schwellenenergie des Kanals β (siehe obige Skizze). Dann läßt sich natürlich keine Breit-Wigner-förmige Resonanzkurve in der elastischen $\beta \rightarrow \beta$ Streuung beobachten. Wir wollen für diesen Fall das Verhalten der elastischen Streuung ($\beta \rightarrow \beta$) im Kanal β näher untersuchen.

Wir betrachten dazu das Verhalten des Ausdrucks

$$k_\beta^{2\ell+1} \cot \Delta_\ell, \quad (26)$$

wo k_β der Schwerpunktsimpuls im Kanal β und Δ_ℓ die komplexe Streuphase für elastische Streuung $\beta \rightarrow \beta$ ist, definiert durch (vgl. (4))

$$S^\ell = \eta_\ell e^{2i\delta_\ell} \equiv e^{2i\Delta_\ell} \quad (\text{so daß } \delta_\ell = \text{Re } \Delta_\ell).$$

In der Nähe von s_β ist nach (21) das Schwellenverhalten

$$t_{\beta\beta}^\ell \sim k_\beta^{2\ell+1}. \quad (27)$$

Ferner ist nach (12)

$$t_{\beta\beta}^\ell \equiv \frac{1}{2i} \left(e^{2i\Delta_\ell} - 1 \right) \equiv e^{i\Delta_\ell} \sin \Delta_\ell \equiv \frac{1}{\cot \Delta_\ell - i} \quad (28)$$

und für $|\Delta_\ell|$ klein

$$t_{\beta\beta}^\ell \sim \sin \Delta_\ell \sim \tan \Delta_\ell.$$

Also folgt in der Nähe der Schwelle s_β (wo $t_{\beta\beta}^\ell$ und daher $|\Delta_\ell|$ klein sind), daß

$$\cot \Delta_\ell \sim \frac{1}{k_\beta^{2\ell+1}}.$$

Wir sehen also, daß im Gegensatz zu $t_{\beta\beta}^{\ell}(s)$, das ja nach (27) wegen der in k_{β} auftretenden Wurzeln einen Verzweigungspunkt bei $s = s_{\beta}$ hat, unser Ausdruck (26) von diesem Verzweigungspunkt frei ist. Auch der in $t_{\beta\beta}^{\ell}(s)$ auftretende Pol (unterhalb der physikalischen Schwelle) bei $s = s_R - i\gamma$ tritt in dem Ausdruck (26) nicht auf, da (wie aus (28) ersichtlich ist) am Pol von $t_{\beta\beta}^{\ell}(s)$ lediglich

$$\cot \Delta_{\ell} = i \quad (29)$$

wird. Unser Ausdruck (26) hat also im Gegensatz zur Partialwellenamplitude $t_{\beta\beta}^{\ell}(s)$ weder einen Verzweigungspunkt noch einen Pol; andererseits hängt er nach (28) in einfacher Weise mit der Partialwellenamplitude zusammen.

Es ist daher sehr bequem, anstelle von $t_{\beta\beta}^{\ell}(s)$ selbst lieber den Ausdruck (26) zu betrachten. Wir können ihn wegen der genannten Eigenschaften um s_{β} in eine Potenzreihe in s entwickeln und erhalten eine Entwicklung der Form

$$k_{\beta}^{2\ell+1} \cot \Delta_{\ell} = \frac{1}{A} + \frac{r_{\text{eff}}}{2} k_{\beta}^2 + \dots \quad (30)$$

(beachte, daß k_{β}^2 proportional zu $s - s_{\beta}$ ist). Diese Entwicklung ist also über den Bereich der Polstelle $s = s_R - i\gamma$ hinaus gültig (siehe obige Skizze) sofern nicht direkt oberhalb von s_{β} eine neue Singularität liegt. Man nennt r_{eff} die effektive Reichweite und A die (komplexe) Streulänge. (30) gibt also, wenigstens in Schwellennähe, die Energieabhängigkeit der (komplexen) Streuphase (und damit der Streuamplitude) an, wenn (oder auch ohne daß) ein Pol unterhalb der Schwelle liegt.

Um die Begriffe "virtueller gebundener Zustand" und "anti-gebundener Zustand" zu erklären, machen wir nun zwei Vereinfachungen. Wir nehmen $\ell = 0$ an und vernachlässigen den r_{eff} -Term in (30). Dann haben wir

$$k_{\beta} \cot \Delta_0 = \frac{1}{A} \quad (31)$$

und die Partialwellenamplitude

$$t_{\beta\beta}^0(s) = \frac{1}{\cot \Delta_0 - i} = \frac{k_{\beta} A}{1 - i k_{\beta} A} \quad (32)$$

Am Pol $s = s_R - i\gamma$ ist $\cot \Delta_0 = i$, also

$$ik_p = \frac{1}{A} \quad (33)$$

am Pol. Mit (33) folgt also aus der Streulänge (die ja meßbar ist, z.B. durch elastische Streuung im Kanal β nach (30) oder (31)) die Lage des Pols. k_p ist der Schwerpunktsimpuls im Kanal β am Pol; er ist imaginär, da der Pol unterhalb der Schwelle des Kanals β liegt. Oberhalb der Schwelle, im physikalischen Gebiet, ist ja

$$k_\beta \propto + \sqrt{s - s_\beta} \quad (s > s_\beta) ;$$

folglich für $s < s_\beta$, unterhalb der Schwelle,

$$k_\beta \propto + \sqrt{s - s_\beta} = + i \underbrace{\sqrt{s_\beta - s}}_{\text{reell auf der reellen Achse}}$$

also ist $\text{Im } k_\beta > 0$ unterhalb der Schwelle, und damit

$$\text{Im } k_p > 0.$$

Hieraus folgt mit (33)

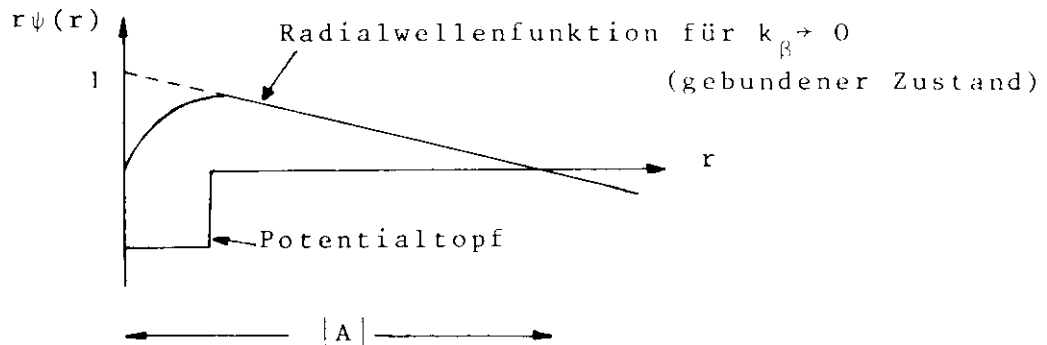
$$\text{Re } A < 0 . \quad (34)$$

Wir haben damit das wichtige Resultat, daß in dem hier diskutierten Fall (Breit-Wigner-Resonanz im Kanal α , unterhalb der Schwelle des Kanals β) der Realteil der Streulänge im Kanal β negativ ist.

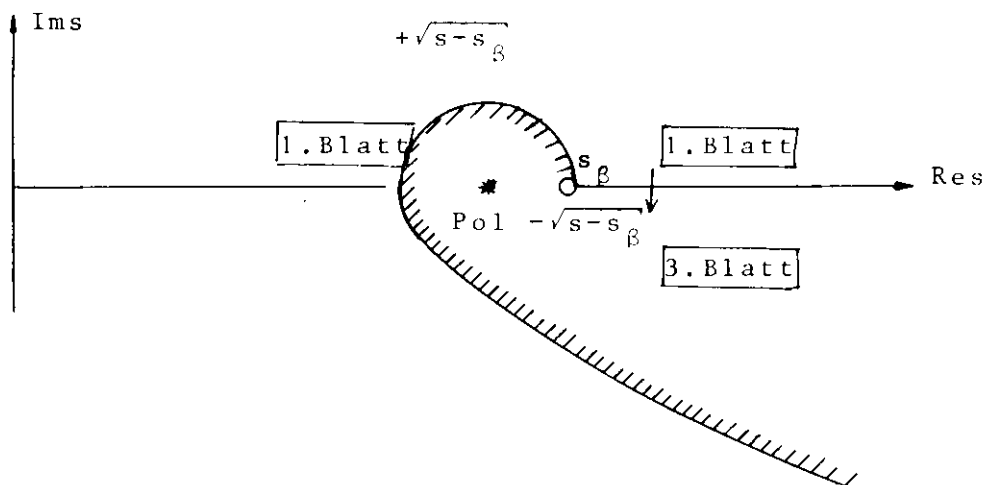
Einen solchen Zustand nennt man einen (virtuellen) gebundenen Zustand im Kanal β . Er kann also gleichzeitig als Resonanz in einem anderen Kanal α auftreten, dessen Schwelle hinreichend niedrig liegt. Wenn seine Energie $\sqrt{s} = \sqrt{s_R - i\gamma}$ nahe (aber unterhalb) der Schwelle des Kanals β liegt, so erzeugt er dort (nach (33), da $|k_p|$ klein) eine große negative Streulänge. Ein Beispiel ist der Zustand $\Lambda(1405)$ (siehe Tabelle S.33). Er entsteht durch stark anziehende $\bar{K}N$ Wechselwirkung als gebundener Zustand (unter $\bar{K}N$ -Schwelle), kann aber durch Kopplung an den $\pi\Sigma$ -Kanal, dessen Schwelle niedriger liegt, zerfallen. Er würde als Resonanz der $\pi\Sigma$ -Streuung erscheinen, wenn dies beobachtbar wäre. Ein solcher Pol der

Partialwellenamplitude kann auch auf der reellen s -Achse liegen ($\gamma = 0$). In diesem Falle liegt er aber unter der niedrigsten Schwelle aller angekoppelten Kanäle, da andernfalls $\gamma = m_R$ an der Resonanzstelle nicht verschwindet. Ein wohlbekanntes Beispiel hierfür ist das Deuteron. Es ist ein gebundener Zustand mit $\gamma = 0$, dicht unterhalb der pn -Schwelle, der eine große (rein reelle) negative Streulänge für die Spin-Triplett- pn -Streuung zur Folge hat. Gäbe es einen Kanal mit niedrigerer Schwelle, in den das Deuteron zerfallen könnte, so wäre es ein "virtueller gebundener pn -Zustand" (dh. ein gebundener Zustand des pn -Systems, der aber vermöge seiner Kopplung an einen anderen Kanal nicht stabil ist, sondern mit endlicher Lebensdauer in diesen anderen Kanal zerfällt), und würde zu $\gamma \neq 0$ und einer komplexen Streulänge (nach (33)) führen.

Wir erinnern noch an die geometrische Interpretation der Streulänge aus der Potentialtheorie:



Schließlich kommen wir zum antigebundenen Zustand. Hierbei handelt es sich um einen Pol der Partialwellenamplitude in dem zu s_β gehörigen unphysikalischen Blatt unterhalb der Schwelle des Kanals β . Die folgende Skizze illustriert die Lage des Pols (ver-



gleiche dies mit der Skizze für den Resonanzpol!).

Es gilt die gleiche Effektive-Reichweite-Entwicklung (30) wie vorher; nur haben wir jetzt unterhalb der Schwelle $\sqrt{s_\beta}$

$$k_\beta \propto -\sqrt{s-s_\beta} = -i \underbrace{\sqrt{s_\beta-s}}_{\text{reell}}$$

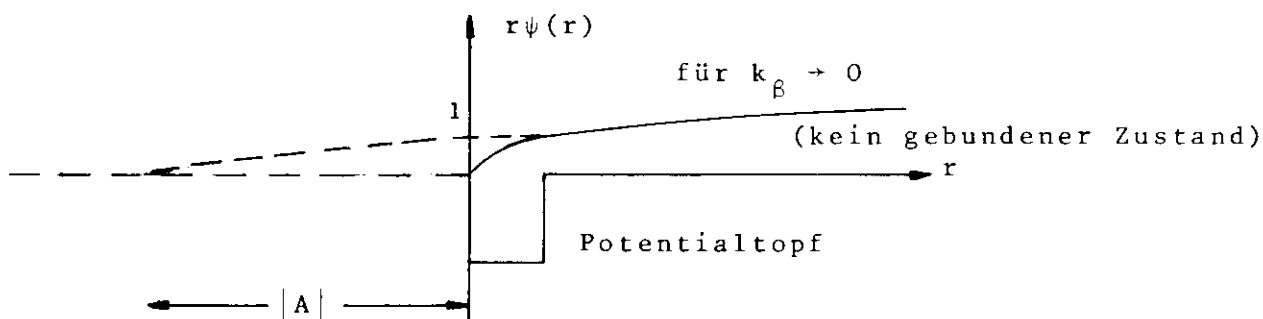
(die beiden am Verzweigungspunkt s_β sich verzweigenden Blätter unterscheiden sich natürlich durch das Vorzeichen der Wurzel!), und folglich am Pol

$$\text{Im } k_p < 0$$

und mit (33)

$$\text{Re } A > 0 . \quad (35)$$

Die geometrische Interpretation ist in der folgenden Zeichnung veranschaulicht:



Dieser Pol kann sich infolge seiner Lage im unphysikalischen 3. Blatt, die ihn von der reellen s -Achse im Bereich $s_\alpha < s < s_\beta$ für Streuung im Kanal α völlig isoliert, nicht als Resonanz im Kanal α oder irgendeinem anderen Kanal äußern. Er verursacht keinerlei besondere Effekte bei $s = s_R$ in irgendeinem Kanal, sondern äußert sich lediglich durch eine große Streulänge von positivem Realteil im Kanal β , sofern er genügend dicht unter der Schwelle des Kanals β liegt (vgl. (33)).

Ein bekanntes Beispiel für einen antgebundenen Zustand ist der sogenannte "virtuelle Zustand des 1S pn-Systems"; im 1S pn-System gibt es kein gebundenes Deuteron-System, wohl aber eine große positive Streulänge, da der Pol sehr nahe an der pn-Schwelle liegt. Bei etwas stärkeren pn-Kräften im 1S -Zustand würde der Pol mehr in die Nähe der Schwelle rücken und in dem Augenblick mit ihr

koinzidieren, wo die Kräfte stark genug wären, um einen gebundenen Zustand an der Schwelle zu erzeugen. Für noch stärkere Kräfte würde die Energie des gebundenen Zustandes sodann unter die Schwelle rücken (positive Bindungsenergie), und entsprechend würde der Pol vom Verzweigungspunkt aus entlang der reellen Achse im 2-ten Blatt zu kleineren s zurückwandern.

Abschließend sei gesagt, daß während (virtuelle) gebundene Zustände natürlich als "Teilchen" aufzufassen sind, es nicht völlig klar scheint, ob man auch antigebundene Zustände, wie andere Pole, als "Teilchen" etwa im Sinne des Quarkmodells aufzufassen hat. Bisher sind zwar bei den Mesonen und Baryonen verschiedene Fälle großer Streulängen gefunden worden, die vermutlich auf einen Pol in Schwellennähe zurückzuführen sind. Jedoch ist bisher in keinem dieser Fälle (im Gegensatz zum Proton-Neutron-System) ein positives Vorzeichen der Streulänge definitiv festgestellt worden.

3. Phasenanalyse für Streuung von Teilchen mit Spin

3.1 Phasenanalyse der π N-Streuung

3.1.1 Einleitung

Im vorigen Abschnitt ist der Partialwellenformalismus für Streuung von Teilchen mit Spin = 0 entwickelt worden. Im folgenden soll die Erweiterung der Partialwellenanalyse auf π N-Streuung angegeben und die experimentelle Anwendung diskutiert werden.

Nach (18) kann man eine resonante Partialwellenamplitude durch die Breit-Wigner-Amplitude

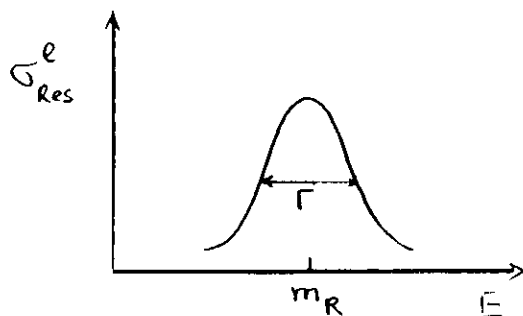
$$t_{\beta\alpha}^{\ell}(E) = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\Gamma_{\beta} \Gamma_{\alpha}}}{m_R - E - i \frac{\Gamma}{2}} \quad (18)$$

beschreiben. Durch Einsetzen in (10) erhält man den Partialwellenwirkungsquerschnitt für Resonanzstreuung

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \alpha}^{\ell} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_{\alpha}^2}{(m_R - E)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}^{\ell} = \frac{\pi}{k_{\alpha}^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}}{(m_R - E)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Diese Ausdrücke werden auch Breit-Wignerformeln für den Wirkungsquerschnitt genannt (sie gelten in dieser Form nur für Streuung von Spin 0-Teilchen). Wenn man $\sigma_{\alpha \rightarrow \alpha}^{\ell}$ als Funktion der Energie aufträgt, findet man eine "resonanzartige" Verteilung mit Maximum bei $E = m_R$ und Halbwertsbreite Γ (= volle Breite auf halber Höhe)



In der Praxis tritt Resonanzformation selten in "reiner Form" auf. Meist gibt es neben der Resonanzformation noch einen irgendwie von der Energie abhängigen Untergrund. Im allgemeinen ändert sich der Untergrund schwächer mit der Energie als der Resonanzwirkungsquerschnitt. Man erwartet dann z.B., daß im totalen Wirkungsquerschnitt für πp -Streuung resonanzartige Maxima über einem Untergrund beobachtet werden. Abb. 1 zeigt den totalen $\pi^+ p$ -Wirkungsquerschnitt als Funktion der Masse E des πp -Systems. Man findet Maxima bei Massen von 1236 und 1922 MeV. Ähnlich hat der totale $\pi^- p$ -Wirkungsquerschnitt Maxima bei 1236, 1518 und 1688 MeV. Bis 1964 waren Messungen des totalen Wirkungsquerschnitts die wichtigste Informationsquelle über Bildung von Nukleonresonanzen. Der Vergleich der Maxima im $\pi^+ p$ und $\pi^- p$ -Wirkungsquerschnitt erlaubte Rückschlüsse auf den Isospin der Resonanzen.

Der Spin und die Parität wurden (z.T. mit Unsicherheiten) aus Messungen der Zerfallswinkelverteilung abgeleitet. Die vier in der πp -Streuung beobachteten Resonanzen wurden früher 1. bis 4. Resonanz genannt. Man glaubte, damit alle Resonanzen mit Massen unterhalb 2 GeV gefunden zu haben.

Dieses einfache Bild geriet Mitte der 60er Jahre in Bewegung. Einmal gab es innerhalb der gerade entwickelten Teilchenklassifikationen nach dem Quarkmodell und dem Reggepolmodell wesentlich mehr "freie Plätze" für Nukleonresonanzen als wirkliche Kandidaten. Zum anderen erlaubten genauere Meßdaten der differentiellen $\pi^\pm p$ -Wirkungsquerschnitte und vor allem der Polarisierung die Durchführung von (mehr oder weniger) vollständigen Partialwellenanalysen.*

* Die Daten stammten im wesentlichen von Experimenten an den Protonenbeschleunigern in Berkeley, am Argonne National Laboratory (USA) und im Rutherford Laboratory (England). Phasenanalysen wurden gemacht von Roper u.M.; Lovelace u. M. (CERN); Bareyre u.M. (Saclay, Frankreich); Steiner u.M. (Berkeley)

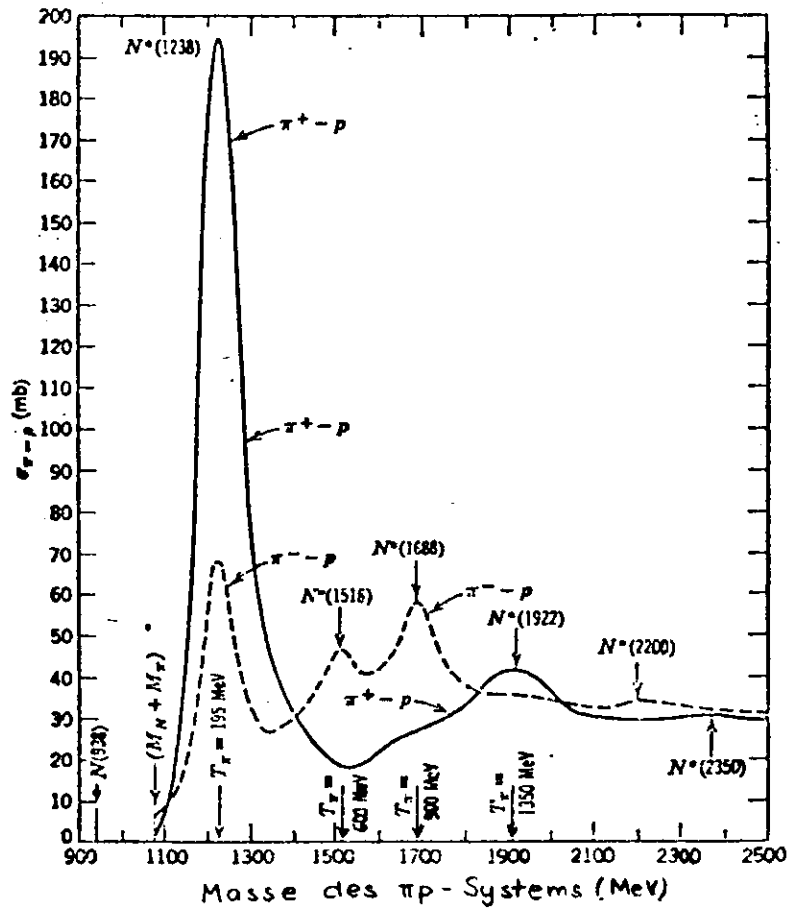


Abb. 1 Totale Wirkungsquerschnitte für π^+p und π^-p -Streuung

Diese Analysen führten zu einem Durchbruch in der Kenntnis der Nukleonresonanzen. Man fand z.B., daß sich unter dem Maximum im totalen π^-p -Wirkungsquerschnitt bei 1688 MeV 5 Nukleonresonanzen mit verschiedenen Quantenzahlen J^P verbergen. Tabelle 2 zeigt die Zahl der bekannten Nukleonresonanzen als Funktion der Zeit.

Im folgenden wird nun die Anwendung der Partialwellenanalyse auf die πN -Streuung beschrieben.

3.1.2 Partialwellenformalismus für π^+p -Streuung

Zunächst soll die Streuamplitude für $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ hergeleitet und in Partialwellen zerlegt werden. Wir müssen den Spin des Protons ($J_z = \frac{1}{2}$) berücksichtigen. Zu jedem Bahndrehimpuls ℓ des π^+p -Systems gibt es zwei mögliche Gesamtdrehimpulse

$$J = \ell \pm \frac{1}{2} \quad (36)$$

Andererseits gibt es zu jedem festen Wert von J zwei mögliche Werte von ℓ , die sich um 1 unterscheiden. Diese haben verschiedene Parität (die Parität eines Zustandes mit Bahndrehimpuls ℓ ist $P = (-1)^\ell$.)

Die Formeln für die Wirkungsquerschnitte $\sigma_{\alpha \rightarrow \alpha}$, σ_i , σ_{tot} lassen sich aus den bisherigen Formeln leicht gewinnen, indem man gemäß (36) einführt

$$\eta_\ell \rightarrow \eta_\ell^\pm, \quad \delta_\ell \rightarrow \delta_\ell^\pm \quad (37)$$

$$2\ell + 1 \rightarrow \frac{2J+1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} = J + \frac{1}{2} \quad (38)$$

Der Index \pm kennzeichnet die beiden zu einem Wert von ℓ gehörigen Werte von J . Der allgemein gültige Faktor (38) wird im Fall der π^+p -Streuung (Spin (π^+) = $s_1 = 0$, Spin (p) = $s_2 = \frac{1}{2}$) zu $J + \frac{1}{2}$. Die Begründung dieser Faktoren wird sich aus dem folgenden ergeben.

Tabelle 2

Tabelle der "gesicherten" Nukleonresonanzen

(Mit Masse unter 2 GeV)

Schreibweise :	ℓ_{2I2J} (Masse)	ℓ = Bahndrehimpuls I = Isospin J = Gesamtdrehimpuls	Masse in MeV
1964 ¹⁾	1967 ²⁾	1971 ³⁾	
Isospin 1/2			
	P_{11} (1470)	P_{11} (1470)	
"2.Res." = D_{13} (1520)	D_{13} (1520)	D_{13} (1520)	
	S_{11} (1535)	S_{11} (1535)	
	D_{15} (1670)	D_{15} (1670)	
"3.Res." = F_{15} (1688)	F_{15} (1688)	F_{15} (1688)	
	S_{11} (1700)	S_{11} (1700)	
		P_{11} (1780)	
		P_{13} (1860)	
Isospin 3/2			
"1.Res." = P_{33} (1236)	P_{33} (1236)	P_{33} (1236)	
	S_{31} (1650)	S_{31} (1650)	
		D_{33} (1670)	
		F_{35} (1890)	
		P_{31} (1910)	
"4.Res." = F_{37} (1950)	F_{37} (1950)	F_{37} (1950)	

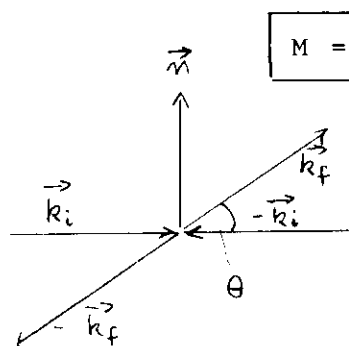
- 1) Nach Ch. Peyrou, Proceedings of the Oxford Intern.Conference on Elementary Particles, 1965
 2) Nach P. Bareyre et al., Physical Review 165, 1730 (1968)
 3) Nach Particle Data Group, Review of Modern Physics 43, No 2, Part II, April 1971

Zur Gewinnung von differentiellen Winkelverteilungen und Polarisationsverteilungen muß man eine weitergehende Herleitung machen.

Man beschreibt die Spinzustände des Protons im Anfangs- und Endzustand durch χ_i bzw. ψ_f . M sei die Übergangsmatrix, die den Anfangszustand in den Endzustand überführt.

$$\psi_f = M \chi_i \quad (39)$$

Sind die inneren Paritäten der Teilchen vor und nach der Streuung dieselben, so muß M ein Skalar sein. Bei Paritätsänderung wäre M ein Pseudoskalar. Die allgemeinste Form eines Skalars, den man aus den zur Verfügung stehenden Vektoren \vec{k}_i , \vec{k}_f und dem Axialvektor $\vec{\sigma}$ konstruieren kann, ist*



$$M = f(\theta) + g(\theta) \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (40)$$

Hier sind \vec{k}_i und \vec{k}_f die Impulse der einlaufenden bzw. auslaufenden Teilchen im π^+p -Schwerpunktsystem. \vec{n} ist die Normale auf der Streuebene

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}_i \times \vec{k}_f}{|\vec{k}_i \times \vec{k}_f|}$$

θ ist der Streuwinkel mit

$$\cos \theta = \frac{\vec{k}_i \cdot \vec{k}_f}{|\vec{k}_i| \cdot |\vec{k}_f|} ;$$

$\vec{\sigma}$ ist der Vektor des Paulischen Spinoperators $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$f(\theta)$ und $g(\theta)$ heißen spin non flip bzw. spin flip Amplitude (deutsch: spinbeibehaltende bzw. spinumklappende Amplitude).

*) Terme wie $\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_i$ oder $\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_f$ können nicht beitragen, da sie unter der Paritätsoperation ihr Vorzeichen ändern

Diese Bezeichnung stammt von der Wirkung des Operators $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ auf den Anfangsspinzustand des Protons. Wenn man die Strahlrichtung (\vec{k}_i) als Quantisierungsachse wählt (z-Achse), dann liegt der Vektor \vec{n} in der xy-Ebene. Das Skalarprodukt $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ enthält dann nur x und y-Komponenten: $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y$. Die darin enthaltenen Komponenten σ_x und σ_y klappen beide den Protonspin um

$$\text{z.B. } \sigma_x \chi_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_f$$

Der Term $f(\theta)$ dagegen beeinflusst den Nukleonspin nicht.

Aus M erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt und die Polarisationsverteilung für unpolarisierte Primärteilchen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv I(\theta) = (\psi_f, \psi_k) = \frac{1}{2} \text{Sp } M^+ M = |f|^2 + |g|^2 \quad (41)$$

$$\vec{P}(\theta) \cdot I(\theta) = (\psi_f, \vec{\sigma} \psi_k) = \frac{1}{2} \text{Sp } M^+ \sigma M = 2 \text{Re}(f^* g) \vec{n} \quad (42)$$

\vec{P} ist der Polarisationsvektor des auslaufenden Protons.

(\vec{P} ist gegeben durch $\vec{P} = \frac{1}{j} \langle \vec{J} \rangle$, wobei $\langle \vec{J} \rangle$ der Erwartungswert des Protonenspinoperators \vec{J} ist und j die Spinquantenzahl).

Die Partialwellenzerlegung von f und g ist mühsam.*) Hier wird nur das Ergebnis angegeben

$$f(\theta) = \frac{1}{k_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} [(\ell+1)t_\ell^+ + \ell t_\ell^-] P_\ell(\cos\theta) \quad (43)$$

$$g(\theta) = \frac{i}{k_\alpha} \sum_{\ell=1}^{\infty} [(t_\ell^+ - t_\ell^-)] P_\ell^1(\cos\theta) \quad (44)$$

Hierin ist t_ℓ^\pm die Partialwellenamplitude für $J = \ell + \frac{1}{2}$ **

*) vgl. J.V. Lepore, Phys. Rev. 79, 137 (1950)

J. Ashkin, Nuovo Cimento Suppl. 10, 14, 221 (1959)

**) Die t_ℓ^\pm erfüllen dieselben aus der Unitarität folgenden Bedingungen wie bisher: $|t_\ell^\pm| \leq 1$ für elast. Streuung, $|t_\ell^\pm| \leq \frac{1}{2}$ für inelastische Streuung.

Für elastische Streuung ist

$$t_{\ell}^{\pm} = \frac{\eta_{\ell}^{\pm} e^{2i\delta_{\ell}^{\pm}} - 1}{2i}$$

$P_{\ell}^1(\cos\theta)$ sind die 1. zugeordneten Legendre Polynome :

$$P_{\ell}^1(\cos\theta) = \sin\theta \frac{dP_{\ell}(\cos\theta)}{d\cos\theta}$$

Für Streuung von Spin0-Teilchen (oder auch, wenn keine spinabhängigen Kräfte wirken) wird $t_{\ell}^{+} = t_{\ell}^{-} = t_{\ell}$. Daraus folgt $g(\theta) = 0$ und $f(\theta)$ nimmt dieselbe Form wie in (8) an.

Setzt man (43) und (44) in (41) und (42) ein und drückt die Produkte $P_{\ell} \cdot P_{\ell'}$, wieder durch Legendrepolynome P_m (mit $m = \ell + \ell'$) aus, so erhält man die Form

$$I(\theta) - \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(\cos\theta) \quad (45)$$

$$P(\theta) \cdot I(\theta) = n \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m P_m^1(\cos\theta) \quad (46)$$

mit $\lambda = \frac{1}{k_{\alpha}}$. Beachte, daß $P_0^1 = 0$.

Die Koeffizienten A_m bzw. B_m sind bilineare Ausdrücke in den t_{ℓ}^{\pm} . Sie sind in Tabelle 3 und 4 zusammengestellt.

Dabei benutzt man folgende Schreibweise:

Statt der t_{ℓ}^{\pm} schreibt man L_{2J}

mit $L = S, P, D, F, \dots$

für $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$

($J =$ Gesamtdrehimpuls des πN -Systems.) Die Partialwellenamplituden L_{2J} legen Gesamtdrehimpuls, Bahndrehimpuls und Parität des πN -Systems eindeutig fest.

Tabelle 3 Koeffizienten A_m aus: R.D. Tripp, Baryon Resonances

$$I = \lambda^2 \sum_m A_m P_m(\cos \vartheta) \quad \text{CERN Report 65-7 rev. (1965)}$$

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
$S_1 S_1 + P_1 P_1$	1									
$S_1 P_1$		2								
$S_1 P_3 + P_1 D_3$		4								
$S_1 D_3 + P_1 P_3$	0		4							
$S_1 D_5 + P_1 F_5$	0		6							
$S_1 F_5 + P_1 D_5$		0		6						
$S_1 F_7 + P_1 G_7$		0		8						
$S_1 G_7 + P_1 F_7$	0		0		8					
$S_1 G_9 + P_1 H_9$	0		0		10					
$S_1 H_9 + P_1 G_9$		0		0		10				
$P_3 P_3 + D_3 D_3$	2		2							
$P_3 D_3$		4/5		36/5						
$P_3 D_5 + D_3 F_5$		36/5		24/5						
$P_3 F_5 + D_3 D_5$	0		12/7		72/7					
$P_3 F_7 + D_3 G_7$	0		72/7		40/7					
$P_3 G_7 + D_3 F_7$		0		8/3		40/3				
$P_3 G_9 + D_3 H_9$		0		40/3		20/3				
$P_3 H_9 + D_3 G_9$	0		0		40/11		180/11			
$D_3 D_5 + F_5 F_5$	3		24/7		18/7					
$D_5 F_5$		18/35		16/5		100/7				
$D_5 F_7 + F_5 G_7$		72/7		8		40/7				
$D_5 G_7 + F_5 F_7$	0		8/7		360/77		200/11			
$D_5 G_9 + F_5 H_9$	0		100/7		720/77		70/11			
$D_5 H_9 + F_5 G_9$		0		20/11		80/13		3150/143		
$F_7 F_7 + G_7 G_7$	4		100/21		324/77		100/33			
$F_7 G_7$		8/21		24/11		600/91		9800/429		
$F_7 G_9 + G_7 H_9$		40/3		120/11		120/13		2800/429		
$F_7 H_9 + G_7 G_9$	0		200/231		3240/1001		280/33		3920/143	
$G_9 G_9 + H_9 H_9$	5		200/33		810/143		160/33		490/143	
$G_9 H_9$		10/33		240/143		60/13		78400/7293		79380/2431

Tabelle 4 Koeffizienten B_m

$$|P| = \hat{n} \lambda^2 \sum_m B_m \rho_m^1(\cos \theta)$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
$S_1 P_1$	2								
$S_1 P_3 - P_1 D_3$	-2								
$S_1 D_3 - P_1 P_3$		2							
$S_1 D_5 - P_1 F_5$		-2							
$S_1 F_5 - P_1 D_5$	0		2						
$S_1 F_7 - P_1 G_7$	0		-2						
$S_1 G_7 - P_1 F_7$		0		2					
$S_1 G_9 - P_1 H_9$		0		-2					
$S_1 H_9 - P_1 G_9$	0		0		2				
$P_3 D_3$	8/5		12/5						
$P_3 D_5 - D_3 F_5$	-18/5		-2/5						
$P_3 F_5 - D_3 D_5$		10/7		18/7					
$P_3 F_7 - D_3 G_7$		-24/7		-4/7					
$P_3 G_7 - D_3 F_7$	0		4/3		8/3				
$P_3 G_9 - D_3 H_9$	0		-10/3		-2/3				
$P_3 H_9 - D_3 G_9$		0		14/11		30/11			
$D_5 F_5$	54/55		8/5		20/7				
$D_5 F_7 - F_5 G_7$	-56/7		-2/3		-4/21				
$D_5 G_7 - F_5 F_7$		4/3		18/11		100/33			
$D_5 G_9 - F_5 H_9$		-100/21		-72/77		-10/33			
$D_5 H_9 - F_5 G_9$	0		40/33		64/39		450/143		
$F_7 G_7$	32/21		16/11		160/91		1400/429		
$F_7 G_9 - G_7 H_9$	-20/3		-10/11		-12/39		-50/429		
$F_7 H_9 - G_7 G_9$		100/77		1458/1001		20/11		490/143	
$G_9 H_9$	50/33		200/143		20/13		14000/7293		8820/2431

Beispiel:

$t_0^+ \rightarrow S_1$	$t_1^- \rightarrow P_1$	
$t_0^- \rightarrow S_1$	$t_2^+ \rightarrow D_5$	
$t_1^+ \rightarrow P_3$	$t_2^- \rightarrow D_3$	usw.

In Tabelle 3 und 4 werden außerdem die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$\text{für } I(\theta) : S_1 P_3 + P_1 D_3 \equiv \text{Re}(S_1^* P_3 + P_1^* D_3) \quad (47)$$

$$\text{für } \vec{P}(\theta) \cdot I(\theta) : S_1 P_3 - P_1 D_3 \equiv \text{Im}(S_1^* P_3 - P_1^* D_3) \quad (48)$$

Wenn man diese Ausdrücke für die Partialwellenamplituden mit den Zahlenfaktoren der Tabelle multipliziert und aufsummiert, erhält man die Entwicklungskoeffizienten A_m bzw. B_m .

Beispielsweise ergibt sich, wenn man nur S- und P-Wellen berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
 I(\theta) = \lambda^2 \{ & (|S_1|^2 + |P_1|^2 + 2|P_3|^2) \cdot \overbrace{P_0(\cos\theta)}^{\equiv 1} \\
 & + (2\text{Re } S_1^* P_1 + 4\text{Re } S_1^* P_3) \cdot P_1(\cos\theta) \\
 & + (4\text{Re } P_1^* P_3) P_2(\cos\theta) \} \quad (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I(\theta) \cdot \vec{P}(\theta) = \vec{n} \lambda^2 \{ & (2 \text{Im } S_1^* P_1 - 2 \text{Im } S_1^* P_3) P_1^1(\cos\theta) \\
 & - (2 \text{Im } P_1^* P_3) P_2^1(\cos\theta) \} \quad (50)
 \end{aligned}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion (z.B. $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$) ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \int I \, d\Omega = \lambda^2 \int \sum A_m P_m(\cos\theta) \, d\cos\theta \, d\phi \\
 &= 2\pi \lambda^2 \sum A_m \int_{-1}^{+1} \underbrace{P_0(\cos\theta) P_m(\cos\theta)}_{\equiv 1} \, d\cos\theta \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{2}{2 \cdot 0 + 1} \delta_{0m} = 2 \text{ für } m = 0}
 \end{aligned}$$

$$\sigma = 4\pi k^2 A_0 \quad (51)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion ist also durch den 1. Koeffizienten der Entwicklung des zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitts nach Legendrepolyomen gegeben.

Aus den Tabellen 3 und 4 ersieht man die folgenden allgemein gültigen Gesetzmäßigkeiten:

- a) Die Interferenz zweier Partialwellen gleicher (verschiedener) Parität trägt nur zur geraden (ungeraden) A_m bzw. B_m bei.
- b) Interferenz zweier Partialwellen mit J_1 und J_2 trägt nur zu solchen A_m bzw. B_m bei, für die $|J_1 - J_2| \leq m \leq J_1 + J_2$ ist.
- c) Das Betragsquadrat einer Amplitude mit Spin J trägt nicht zu B_m bei, aber zu allen geradzahligen A_m mit $m \leq 2J$.
- d) Für Amplituden t_i und t_j ist $A_m \sim \text{Re } t_i^* t_j = \vec{t}_i \cdot \vec{t}_j$ (Skalarprodukt der beiden Vektoren). A_m wird maximal, wenn die beiden Vektoren in Phase sind (parallele Vektoren). $B_m \sim \text{Im } t_i^* t_j = \vec{t}_i \times \vec{t}_j$ (Vektorprodukt) erreicht sein Maximum, wenn die beiden Amplituden orthogonal sind.

3.1.3 Mehrdeutigkeiten

Aus Tabelle 3 und 4 folgt ferner, daß eine Vertauschung der beiden zu einem J -Wert gehörigen Paritäten (Ersetzung $S_1 \leftrightarrow P_1$, $P_3 \leftrightarrow D_3$, $D_5 \leftrightarrow F_5$ usw.) $I(\cdot)$ ungeändert läßt, während das Vorzeichen der Polarisation $\vec{P}(\theta)$ umgedreht wird. Daraus folgt die Minami Ambiguität:

Bei der Streuung von Spin 0 Teilchen an unpolarisierten Spin $\frac{1}{2}$ - Teilchen kann man nicht aus der Winkelverteilung (d.h. $d\sigma/d\Omega$) allein auf die Parität der Partialwelle eines Zwischenzustandes schließen.

Ferner beobachtet man in Tab. 3 und 4 sowie aus (47) und (48), daß bei Ersetzung jeder Partialwelle durch ihr konjugiert Komplexes ($S_1 \leftrightarrow S_1^*$, $P_1 \leftrightarrow P_1^*$) wiederum $I(\theta)$ erhalten bleibt und $\vec{P}(\theta)$ sein Vorzeichen ändert.

Wenn man die Energieabhängigkeit der Partialwellen kennt, läßt sich die Zweideutigkeit der komplexen Konjugation durch die Wigner-Bedingung auflösen (Forderung des Umlaufs entgegen dem Uhrzeigersinn, der durch die komplexe Konjugation umgekehrt würde). Aus der noch verbleibenden Minamiambiguität gibt es folgende Auswege:

a) Messung der Polarisation $\vec{P}(\theta)$ durch Verwendung eines polarisierten Targets

In den letzten 10 Jahren ist die Technik der polarisierten Targets auf einen hohen Stand entwickelt worden. Man kühlt bestimmte Substanzen wie Alkohole auf Temperaturen von $0.5 - 1^{\circ} \text{K}$ und bringt sie in magnetische Felder von $20 - 50$ kilogauß. Durch Ausnutzung der starken paramagnetischen Felder der Elektronenhülle werden die magnetischen Momente der Kerne und damit ihre Spins ausgerichtet. Man erreicht heute Polarisationen der freien Protonen in der Substanz von $50 - 80 \%$ (d.h. solcher Protonen, die nicht in einem Kern gebunden sind).

Bei Verwendung eines polarisierten Targets lautet die Winkelverteilung $I_p(\theta)$ statt (45)

$$\begin{aligned} I_p(\theta) &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\rho M^+ M) = |f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2 + 2 \text{Re}(f^* g) \vec{n} \cdot \vec{P}_T \\ &= I_0(\theta) \{1 + \vec{P}_0(\theta) \cdot \vec{P}_T\} \end{aligned} \quad (52)$$

Hierbei ist ρ die sogenannte Spindichtematrix * im Anfangszustand

$$\rho = \mathbf{1} + \vec{P}_T \cdot \vec{P}_T \quad (53)$$

* Beschreibung der Eigenschaften der Dichtematrix z.B. in E. Segrè, Appendix F, Nuclei and Particles, Benjamin Inc, N.Y. 1964.

Artikel von W. Koch in Proceedings of the 1964 Easter School for Physicists, CERN Report No 64-13 Vol.II, S.113 ff.

\vec{P}_T ist der Vektor der Targetpolarisation (vor der Reaktion),
 $I_0(\theta) \equiv I(\theta)$ und $\vec{P}_0(\theta) \equiv \vec{P}(\theta)$ sind die Winkelverteilung bzw.
Polarisation, die man bei unpolarisiertem Target erhält (s.(41),
(42)).

Man kann also $\vec{P}_0(\theta)$ aus (52) bestimmen, wenn man $I_+(\theta)$, $I_0(\theta)$
und \vec{P}_T gemessen hat.

In der Praxis mißt man, um systematische Fehler zu vermeiden, die
Asymmetrie

$$A(\theta) = \frac{I_+(\theta) - I_-(\theta)}{I_+(\theta) + I_-(\theta)} = P_0(\theta) \cdot P_T(\theta), \quad (54)$$

wobei I_+ und I_- , die bei einem Winkel θ gemessenen
Intensitäten sind für Targetpolarisation in Richtung von \vec{n}
(Normale auf der Streuebene) bzw. umgekehrt dazu.

$A(\theta)$ liefert bei Kenntnis von $P_T(\theta)$ direkt $P_0(\theta)$.

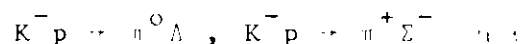
b) Messung der Polarisation $\vec{P}(\theta)$ durch Doppelstreuung

Wenn man das auslaufende Baryon ein zweites Mal streut (z.B.
an einem Kohlenstofftarget) kann man aus der beobachteten
Asymmetrie bei der zweiten Streuung auf die Polarisation $\vec{P}(\theta)$
bei der ersten Streuung schließen.

Die zweite Streuung wirkt als Analysator der Polarisation
 $\vec{P}(\theta)$. Diese Technik ist wegen der starken Intensitätseinbuße
schwierig.

c) Messung der Polarisation $\vec{P}(\theta)$ über einen paritätsverletzenden Zerfall des Baryons

Wenn das auslaufende Baryon über die paritätsverletzende schwache
Wechselwirkung zerfällt (z.B. Λ^0, Σ) kann man seine Polarisation
 $\vec{P}(\theta)$ aus der Zerfallswinkelverteilung bestimmen. Diese Technik
wird insbesondere bei Reaktionen wie



in Formationsexperimenten mit Blasenkammern angewendet, da die
 Λ - und Σ -Zerfälle in der Blasenkammer leicht nachgewiesen werden
können.

3.1.4 Partialwellenentwicklung für endliche ℓ_{\max}

Die Entwicklungen (43) - (46) sind unendliche Summen über ℓ und damit praktisch nicht handhabbar. Die praktische Anwendung hängt davon ab, ob die Summen hinreichend schnell konvergieren und bei endlichen $\ell = \ell_{\max}$ abgebrochen werden können.

Die kurze Reichweite der starken Wechselwirkung liefert ein Plausibilitätsargument für die Wahl von ℓ_{\max} : Wenn diese Reichweite gleich r und der zugehörige klassische Drehimpuls $k \cdot r$ ist, sollten Drehimpuls mit $\ell \gg k \cdot r$ keinen nennenswerten Beitrag zur Streuamplitude liefern (wegen der Zentrifugalbarrieren). Die zugehörige Partialwellenamplitude sollte vernachlässigbar sein. Für die starke πN -Wechselwirkung ist $r \approx 1 \text{ f} = (197 \text{ MeV}/c)^{-1}$. Dann wird $\ell_{\max} \approx \frac{k}{197}$ (k in Einheiten von MeV/c). Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \ell_{\max} &= 4 \text{ für } E = M_R = 2040 \text{ MeV} \\ \ell_{\max} &= 5 \text{ für } E = M_R = 2356 \text{ MeV.} \end{aligned}$$

In der Praxis findet man in der Tat, daß höhere Partialwellen unterhalb dieser Energien kaum beitragen.

Für $\ell \leq \ell_{\max}$ werden (43) - (46) zu

$f(\theta) = \frac{1}{k_\alpha} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} [(\ell+1)t_\ell^+ + \ell t_\ell^-] P_\ell(\cos \theta)$	(43 a)
$g(\theta) = \frac{1}{k_\alpha} \sum_{\ell=1}^{\ell_{\max}} [t_\ell^+ - t_\ell^-] P_\ell^1(\cos \theta)$	(44 a)
$\bar{I}(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lambda^2 \sum_{\ell=0}^{2\ell_{\max}} A_\ell P_\ell(\cos \theta)$	(45 a)
$\vec{P}(\theta) \cdot \vec{I}(\theta) = \vec{n} \lambda^2 \sum_{\ell=1}^{2\ell_{\max}} B_\ell P_\ell^1(\cos \theta)$	(46 a)

(beachte die Summationsgrenzen)

Zur vollständigen Beschreibung der Streuung für $\ell = \ell_{\max}$ muß man alle t_ℓ^\pm für $\ell \leq \ell_{\max}$ kennen. Es gibt dann $\ell_{\max} + 1$ Bahndrehimpulszustände, zu jedem ℓ gibt es zwei Partialwellenamplituden t_ℓ^\pm .

Jede elastische Partialwellenamplitude ist durch 2 reelle Zahlen η_ℓ und δ_ℓ gegeben. Eine relative Phase (δ_0) kann man willkürlich festsetzen. Insgesamt muß man also

$$2 \cdot 2 (\ell_{\max} + 1) - 1 = 2 (2 \ell_{\max} + 1) \text{ reelle Zahlen bestimmen.}$$

Die Messung der Winkelverteilung für elastische Streuung (z.B. $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$) liefert, wenn sie laut (45a) nach Legendrepolynomen entwickelt,

$2\ell_{\max} + 1$ reelle Parameter (A_m). Die Messung der Rückstoßprotonpolarisation liefert laut (46a) $2\ell_{\max}$ Größen.

Die Messung des totalen Wirkungsquerschnitts liefert über das optische Theorem eine weitere Größe:

$$G_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \text{Im} [e^{i\delta_{\ell}^+} - 1] \quad \text{mit} \quad \text{Im} [e^{i\delta_{\ell}^+} - 1] = \sin \delta_{\ell}^+ \quad \text{Re} [e^{i\delta_{\ell}^+} - 1] = -\cos \delta_{\ell}^+ + 1$$

Insgesamt sind das $2(2\ell_{\max} + 1)$ Größen.

D.h. um die elastische $\pi^+ p$ -Streuung bei einer Energie vollständig zu beschreiben, muß man den differentiellen Wirkungsquerschnitt, die Polarisationswinkelverteilung $\vec{P}(\theta) \cdot I(\theta)$ und den totalen $\pi^+ p$ -Wirkungsquerschnitt messen.

Um nun die Energieabhängigkeit der Streuamplituden zu bestimmen, muß man den vollständigen Satz von Messungen bei verschiedenen Energiewerten durchführen (in Schritten, die klein genug sind gegenüber der Breite der Resonanzen, die man finden will).

3.1.5 Anwendung: Phasenanalyse

Wenn man vollständige Sätze von hinreichend genauen Messungen bei verschiedenen Energien hat, kann man eine Phasenanalyse für $\ell \leq \ell_{\max}$ machen (engl.: Phase Shift Analysis). Man beschafft sich zunächst einen Satz von Startwerten für die η_{ℓ}^{\pm} und δ_{ℓ}^{\pm} (z.B. aus einer früheren Phasenanalyse). Dann rechnet man mit Hilfe der Startwerte aus (45a), (46a) und Tab. 3 und 4 die zugehörigen Startwerte G_r für $I(\theta)$ und $\vec{P}(\theta) \cdot I(\theta)$ bei verschiedenen Werten von θ aus. Diese Werte werden mit den (bei denselben θ) gemessenen Werten G_{gem} von $I(\theta)$ und $\vec{P}(\theta) \cdot I(\theta)$ verglichen. Man versucht den Ausdruck

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{G_r - G_{\text{gem}}}{\Delta G_{\text{gem}}} \right)^2 \quad (55)$$

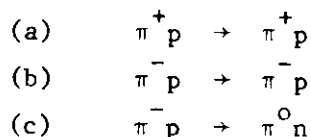
zu minimalisieren.

ΔG_{gem} ist der Fehler der gemessenen Größen. Die Summation geht über alle gemessenen Werte. Man verwendet verschiedene Minimalisierungsverfahren, bei denen die Parameter η_{ℓ}^{\pm} und δ_{ℓ}^{\pm} schrittweise verändert werden, bis ein Minimum von χ^2 , d.h. optimale Übereinstimmung von gemessenen und berechneten Werten erreicht ist.

Meist erhält man bei einer festen Energie mehrere Lösungen für die η_ℓ^\pm und δ_ℓ^\pm . Man trägt die resultierenden t_ℓ^\pm im Arganddiagramm als Funktion der Energie auf. Die Auswahl der endgültigen Werte erfolgt bei der sogenannten energieunabhängigen Phasenanalyse durch einfache Kriterien. Man fordert z.B., daß sich eine Partialwellenamplitude bei einem kleinen Energieschnitt nicht drastisch ändert, d.h., daß t_ℓ^\pm im Arganddiagramm einen "kontinuierlichen" Verlauf hat. Bei der energieabhängigen Phasenanalyse verwendet man zusätzliche theoretische Information (z.B. von Dispersionsrelationen), um die "richtigen" Lösungen bei jeder Energie auszusuchen.

3.1.6 Verallgemeinerung auf andere πN -Reaktionen

Die drei Reaktionen



sind experimentell relativ leicht zugänglich. Wenn alle drei Reaktionen untersucht werden sollen, zerlegt man die zugehörigen "beobachteten" Partialwellenamplituden in Isospinamplituden $t_\ell^\pm (3/2)$ und $t_\ell^\pm (1/2)$ zum Isospin $\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad t_\ell^\pm (+) & \equiv t_\ell^\pm (3/2) \\ \text{(b)} \quad t_\ell^\pm (-) & = \frac{1}{3} (t_\ell^\pm (3/2) + 2 t_\ell^\pm (1/2)) \\ \text{(c)} \quad t_\ell^\pm (c) & = \frac{\sqrt{2}}{3} (t_\ell^\pm (3/2) - t_\ell^\pm (1/2)) \end{aligned} \quad (56)$$

Die Ausdrücke für die Amplituden f und g und für $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\vec{P}(\theta) I(\theta)$ werden im Falle (b) und (c) komplizierter.

Ziel der Phasenanalyse ist es, die Partialwellenamplituden $t_\ell^\pm (3/2)$ und $t_\ell^\pm (1/2)$ für reine Isospinzustände zu bestimmen, so daß man neben Spin und Parität auch den Isospin der Resonanzen bestimmen kann.

3.1.7 Ergebnisse

In den letzten acht Jahren wurden Phasenanalysen für die in 3.1.6 genannten πp -Reaktionen von mehreren Gruppen durchgeführt. Gleichzeitig lieferten experimentelle Gruppen immer mehr und genauere Messdaten. Dadurch war es möglich, feinere Effekte zu untersuchen. Die Zahl der gesicherten Nukleonresonanzen mit Massen unterhalb 2 GeV stieg von 1964 bis 1971 von 4 auf 14. Diese Resonanzen sind in Tab. 2 aufgeführt.

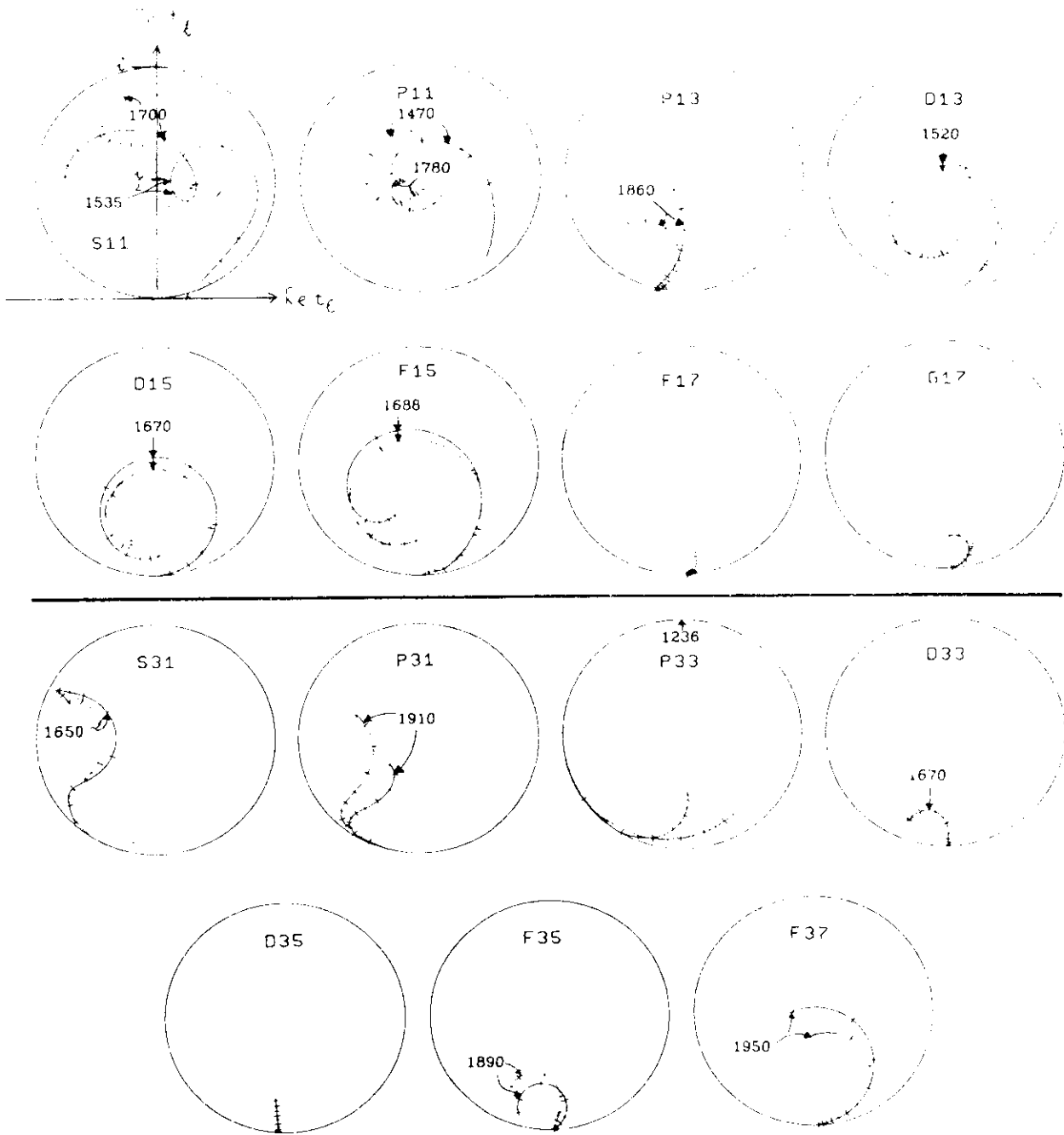


Abb. 2: Ergebnisse einer Phasenanalyse der πN -Streuung. Das Bild zeigt den Verlauf der verschiedenen Partialwellenamplituden im Arganddiagramm als Funktion der Energie. Schritte der Energie von 50 MeV sind - beginnend bei 1400 MeV - durch Skalierungsmarken angezeigt. Die Partialwellen sind mit der Schreibweise von Tab. 2 bezeichnet.

Die Kurven sind Ergebnisse einer in Glasgow gemachten energieabhängigen Phasenanalyse für jeweils zwei verschiedene Sätze von Startwerten. Die Unterschiede zwischen den beiden gezeigten Lösungen geben einen Eindruck von der Genauigkeit der Lösungen.

Abb. 2 zeigt die Arganddiagramme von einer in Glasgow gemachten Phasenanalyse. Der Verlauf der Partialwellenamplituden als Funktion der Energie wird durch die Kurven angegeben. Man beachte, daß diese Kurven erst durch Interpretation und Glättung der "experimentell" bestimmten Werte von t_{ℓ}^{\pm} bei den einzelnen Energiewerten erhalten wurden. Schritte der Energie von 50 MeV sind durch Skalierungsmarken angezeigt. Einige der Kurven verlaufen in ungefährrer Kreisform, andere weichen (wegen der Untergrundbeiträge) stark davon ab. Die Resonanzdurchgänge sind durch einen Pfeil und die zugehörige Resonanzmasse gekennzeichnet. In der S_{11} Partialwelle beobachtet man z.B. zwei Resonanzen bei 1535 und 1700 MeV. In Abb. 3 sind Partialwellenwirkungsquerschnitte aufgetragen, die man aus den t_{ℓ}^{\pm} berechnen kann. Die Wirkungsquerschnitte haben Maxima an den in Tabelle 2 angegebenen Resonanzstellen. Im Partialwellenwirkungsquerschnitt für S_{11} beobachtet man wieder die beiden Resonanzen bei 1535 und 1700 MeV. Für Energien oberhalb 2 GeV stößt man mit den Partialwellenanalysen auf Schwierigkeiten, da die Zahl der beteiligten Partialwellen zunimmt und die Resonanzeffekte immer kleiner werden.

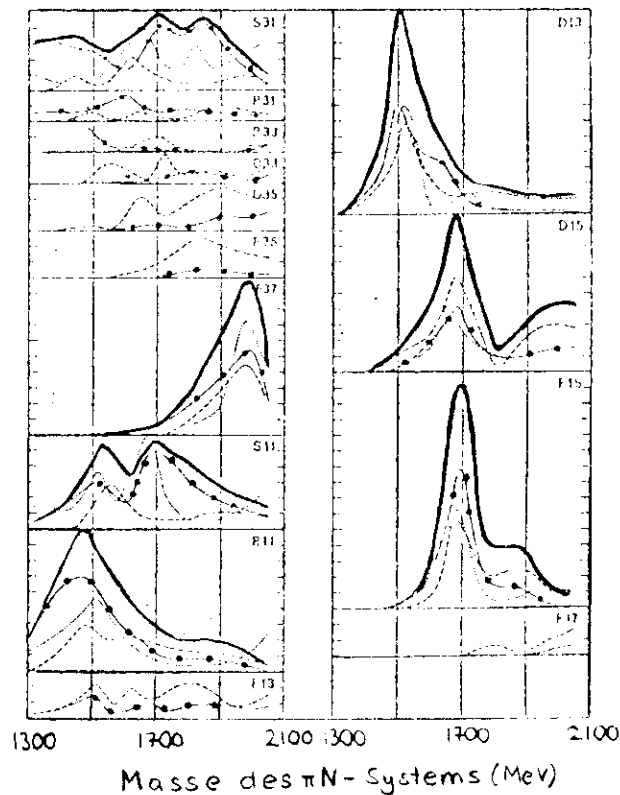
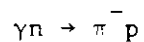
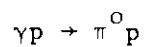
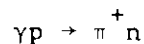
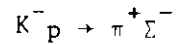
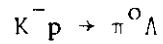
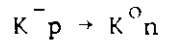


Abb. 3 Partialwellenwirkungsquerschnitte, die aus einer Lösung der Phasenanalyse der πN -Streuung von Bareyre et al. berechnet wurden. Bedeutung der Kurven: Ausgezogene Kurve = σ_{tot} ; strichpunktierte Kurve = Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung; gestrichelte Kurve = Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung; gepunktete Kurve = Maß der Variation der Amplitude. Ordinatenkala = 2 mb pro Schritt.

Aus: Bareyre et al., Phys. Rev. 165, 1730 (1968)

3.2 Phasenanalysen in KN- und γ N-Reaktionen

Phasenanalysen sind mit einigem Erfolg auch auf KN- und γ N-Reaktionen angewendet worden. Man konzentriert sich auf Zweiteilchenprozesse wie



Die Analyse der $K^- p$ Reaktionen ist der in 3.1.2 - 3.1.7 besprochenen Prozedur sehr ähnlich (da die aufgeführten Teilchen gleiche Spins wie die behandelten π N-Reaktionen haben). In den aufgeführten γp -Reaktionen ist die Situation komplizierter, da wegen des Photospins mehr Amplituden beitragen. Man muß wesentlich mehr Größen messen, um einen vollständigen Satz von Messungen zu erhalten (Verwendung von polarisierten Photonstrahlen und polarisierten Targets, Messung der Rückstoßproton-Polarisation durch Doppelstreuung). Phasenanalysen für das γ N-System liefern die Partialbreiten $\Gamma_{N^* \rightarrow N\gamma}$ für die Nukleonresonanzen.

3.3 Platz der Phasenanalyse in der Elementarteilchenphysik

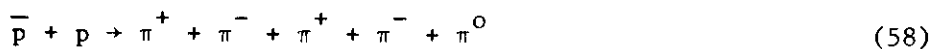
Hier soll kurz angedeutet werden, welchen Platz die Phasenanalyse und ihre Ergebnisse innerhalb der Elementarteilchenphysik einnehmen. Technisch gesehen, ist sie ein solides und wirkungsvolles Werkzeug, um die Spin-Paritäts- (und Isospin)-Struktur von Streuprozessen bei Energien bis 2 oder 3 GeV aufzuklären. Der der Phasenanalyse zugrundeliegende theoretische Rahmen stützt sich auf gesicherte Tatsachen bzw. Konzepte der Quantenmechanik (Drehimpulsformalismus). Die Ergebnisse tragen wesentlich zu unserer Kenntnis der Existenz und Eigenschaften von Resonanzen bei. Diese Ergebnisse führen aber erst dann zu einem tieferen Verständnis, wenn es gelingt, sie in eine umfassende Theorie des Teilchenspektrums einzuordnen. Eine solche Theorie ist das Quarkmodell (S. Kapitel II).

4. RESONANZERZEUGUNG IN PRODUKTIONSEXPERIMENTEN

4.1 Einleitung und Begriff der effektiven Masse

Wir hatten in Abschnitt 3 gesehen, daß Phasenanalysen sehr wirkungsvolle Werkzeuge sind, um in Formationsexperimenten gebildete Resonanzen zu entdecken. Die Mehrzahl der heute bekannten Nukleonresonanzen und ein Teil der Hyperonresonanzen mit Strangeness -1 (d.h. angeregte Zustände der Λ - und Σ -Hyperonen) sind auf diese Weise gefunden worden. Die meisten mesonischen Resonanzen und die Resonanzen mit Strangeness <-1 sind aus technischen Gründen (d.h. wegen des Fehlens geeigneter Strahlen und Targets) bisher nicht den Formationsexperimenten zugänglich. Man muß versuchen, sie in Produktionsexperimenten nachzuweisen. Die wichtigsten Experimente hierzu wurden in den 60er Jahren mit Hilfe von Wasserstoffblasenkammern ausgeführt. Wir beschreiben kurz, wie man Produktionsprozesse in der Blaskammer mißt und kinematisch analysiert.

In einer Blaskammer kann man die Spuren der geladenen Teilchen einer Reaktion z.B.



sichtbar machen. Durch Anlegen eines Magnetfeldes kann das Ladungsvorzeichen und - über eine Krümmungsmessung - der Impulsbetrag der geladenen Teilchen bestimmt werden. Eine Messung der Erzeugungswinkel erlaubt dann, den Impulsvektor der geladenen Teilchen zu berechnen. Wir nehmen ferner an, daß die Massen aller geladenen Teilchen bekannt sind (Teilchenmassen können bei günstigen Umständen in der Blaskammer aus der Ionisation, d.h. der Blaskammerdichte, bestimmt werden; s. Kapitel III, Band II). Damit kennt man die 4-Impulse⁺⁾ p aller geladenen Teilchen. Unbekannt ist lediglich der 4-Impuls des neutralen Teilchens in (57) und (58). Da 4-Impulserhaltung gilt, kann man mit Hilfe der Erhaltungssätze (vier Bestimmungsgleichungen) die vier 4-Impulskomponenten des neutralen Teilchens berechnen. Man berechnet ferner das Quadrat des 4-Impulses

⁺⁾ Wir benutzen in diesem Abschnitt 4-Vektoren. Der 4-Impuls ist gegeben durch $p = (p_0, i\vec{p})$; dabei ist $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ der 3-Impulsvektor des Teilchens und $p_0 = E$ seine Gesamtenergie. Es gilt $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ (m = Ruhemasse des Teilchens). Das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren ist in der hier benutzten Metrik gegeben durch

$$p \cdot p' = (p_0, i\vec{p})(p'_0, i\vec{p}') = p_0 p'_0 - \vec{p} \cdot \vec{p}'. \quad \text{Damit wird das Quadrat des 4-Impulses}$$

$$p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

$$p_{\text{neutral}}^2 = E_{\text{neutral}}^2 - \vec{p}_{\text{neutral}}^2 = m_{\text{neutral}}^2,$$

und prüft, ob m_{neutral} gleich der Masse des Neutrons (Gl. (57)) bzw. des π^0 -Mesons (Gl. (58)) ist. Auf diese Weise lassen sich Reaktionen mit einem neutralen Teilchen in der Blaskammer eindeutig identifizieren.

Wie finden wir nun Resonanzen? Wir gehen von der Vorstellung aus, daß einige der erzeugten Teilchen für eine kurze Zeit einen angeregten Zwischenzustand mit definierter Masse und festen Quantenzahlen bilden. Zunächst betrachten wir die Masse der Resonanzen. Wir hatten oben gesehen, daß das Quadrat eines 4-Impulses das Quadrat der Ruhemasse des zugehörigen Teilchens ergibt. Analog bilden wir die sogenannte effektive Masse eines (resonanten) Systems von n Teilchen

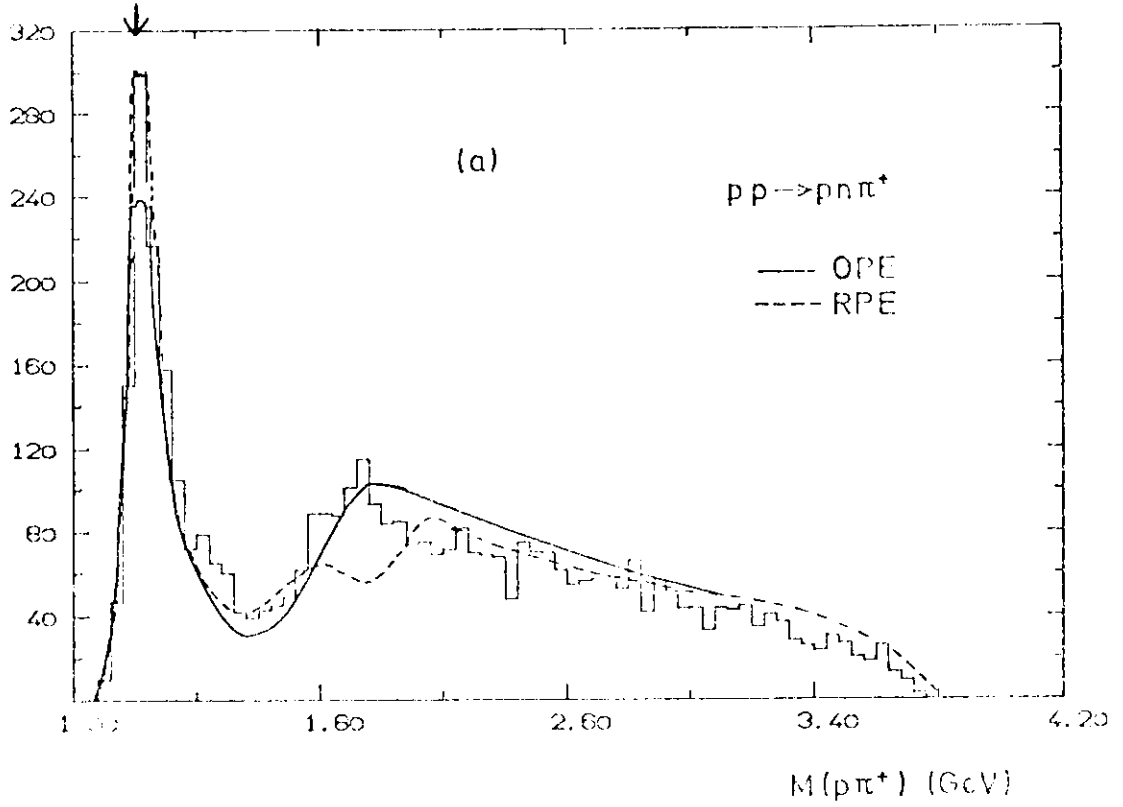
$$\begin{aligned} M_{\text{eff}}^2 &= (p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2 \\ &= (E_1 + E_2 + \dots + E_n)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n)^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Die effektive Masse ist die Gesamtenergie, die ein System von n Teilchen in ihrem gemeinsamen Ruhesystem hat. Als Beispiel bilden wir die effektive Masse^{+) des π^+ p-Systems in Gl. (57).}

$$M_{p\pi^+}^2 = (p_p + p_{\pi^+})^2 = (E_p + E_{\pi^+})^2 - (\vec{p}_p + \vec{p}_{\pi^+})^2$$

^{+) Skalarprodukte von 4-Vektoren sind invariant gegen Lorentztransformationen. Man kann die effektive Masse in jedem beliebigen Lorentz-Bezugssystem berechnen; dazu muß man die 4-Impulse in einem beliebigen aber festen Bezugssystem (bei Blaskammerexperimenten im Laborsystem) kennen.}

$P_{33}(1236)$



No. of events / 0.1 GeV

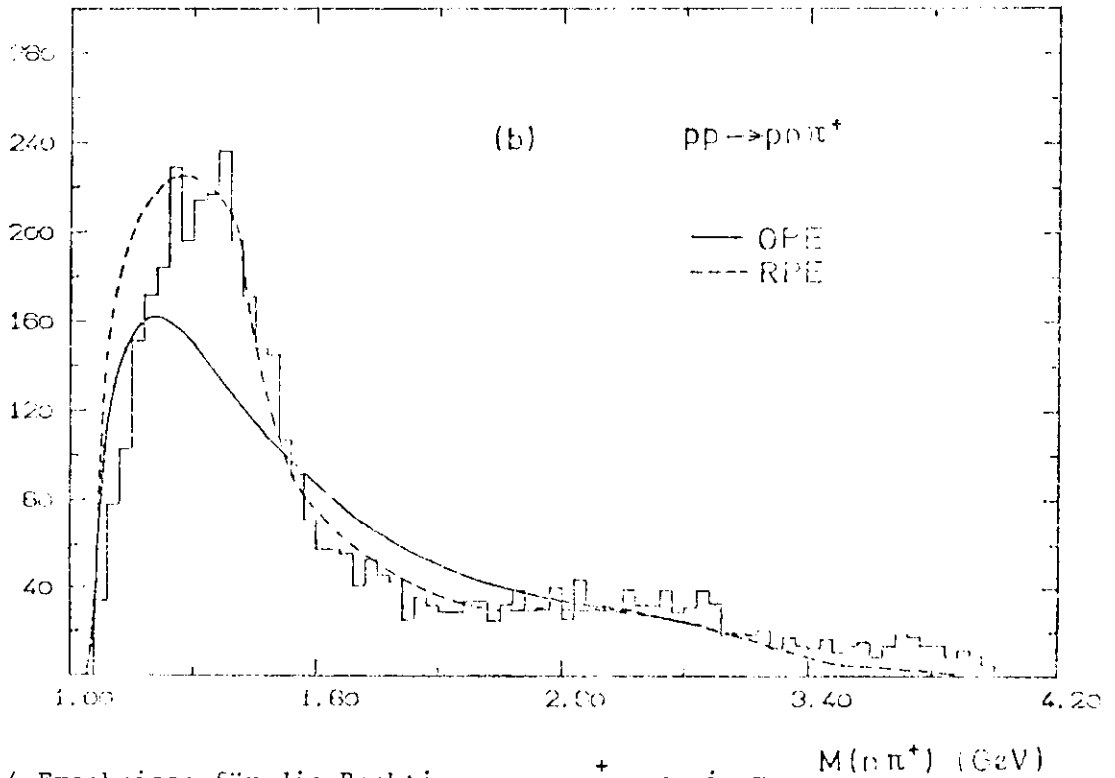


Abb. 4 Ergebnisse für die Reaktion $pp \rightarrow pn\pi^+$ aus einem Blasenkammerexperiment bei 12 GeV/c Strahlimpuls. Die Histogramme sind die experimentellen Verteilungen der effektiven Masse des $p\pi^-$ - und $n\pi^-$ -Systems. Die Kurven sind Modellvorhersagen.

Ein typisches Blasenkammerexperiment liefert eine größere Zahl von Reaktionen (Ereignissen) des Typs (57). Man trägt die effektive Masse $M_{\pi^+\pi^-}$ für jedes Ereignis in einem Histogramm auf. Abb. 4 a) zeigt ein solches Histogramm von einem Experiment mit einem Protonenstrahl von 12 GeV/c Impuls. Man beobachtet ein resonanzartiges Maximum bei einer Masse von etwa 1240 MeV. Dieses Maximum ist uns bereits von den Phasenanalysen als Resonanz in der P_{33} -Partialwellenamplitude bekannt. Die Breite der Resonanz beträgt etwa 120 MeV, was (nach der Unschärferelation $\tau \cdot \Gamma \hat{=} \hbar$) einer Lebensdauer von etwa $5 \cdot 10^{-24}$ sec entspricht. Die übrige Verteilung hat keine besonders ausgeprägten Maxima. Hier überlagern sich wahrscheinlich einige mit kleinerer Rate erzeugte Nukleonresonanzen höherer Masse mit einem nichtresonanten Untergrund. Abb. 4 b) zeigt die Verteilung der effektiven Masse des $\pi^+\pi^-$ -Systems von Reaktion (57). Man beobachtet ein ca. 500 MeV breites Maximum. Das Maximum läßt sich - wie genauere Untersuchungen zeigen - nicht als einfache Resonanz erklären.

Abb. 5 zeigt effektive Massenverteilungen der Reaktion (58). Es ist jeweils die effektive Masse der Kombination von drei π -Mesonen mit Gesamtladung ± 1 , ± 2 und 0 aufgetragen. Bei den geladenen Kombinationen beobachtet man kein statistisch signifikante resonanzartige Struktur. In der Verteilung der effektiven Masse des $\pi^+\pi^-\pi^0$ -Systems tritt ein Maximum bei 780 MeV auf. Hier handelt es sich um das ω -Meson.

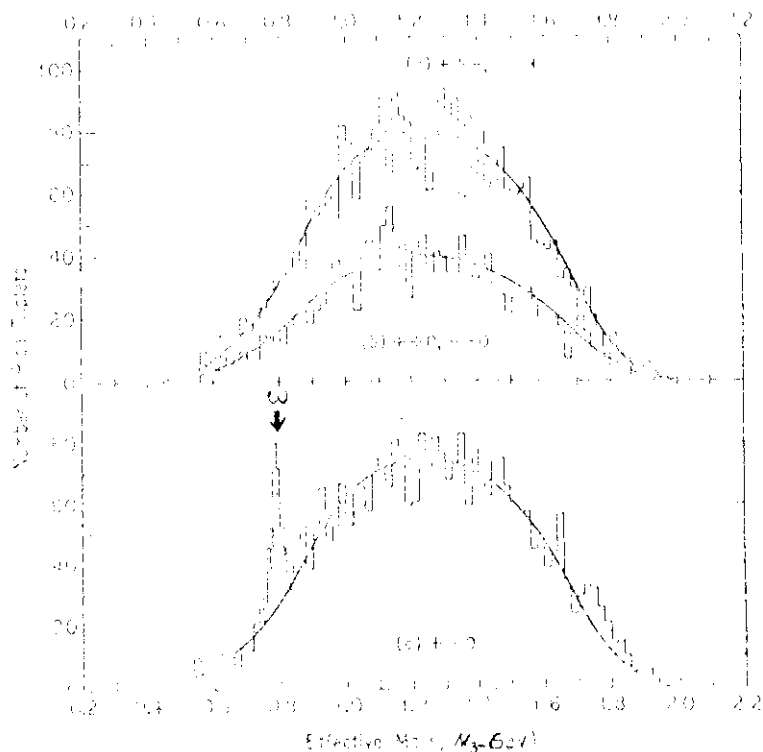


Abb. 5 Ergebnisse der Reaktion $pp \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-\pi^0$ aus einem Blasenkammerexperiment. Die Histogramme sind die Verteilungen der effektiven Masse von Kombinationen von jeweils drei π -Mesonen mit Gesamtladung (a) ± 1 , (b) ± 2 , (c) 0. Die Kurven sind Phasenraumverteilungen (s.u.). (Aus B.C. Maglic et al. Phys. Rev. Letters, 7, 178 (1960))

Wie kann man Resonanzen vom nichtresonanten Untergrund abtrennen? Dazu benötigen wir als wichtigstes Hilfsmittel das Konzept des Phasenraums.

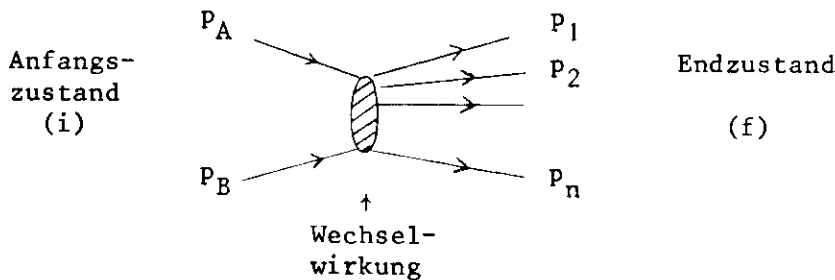
4.2 Phasenraum, Matricelement und Wirkungsquerschnitt

4.2.1 Herleitung des Zusammenhangs zwischen Reaktionsamplitude und Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten allgemein die Reaktion



bei der die Teilchen A,B den Anfangszustand bilden und der Endzustand durch die 4-Impulse der erzeugten (oder gestreuten) Teilchen, $p_1 \dots p_n$, charakterisiert sein soll.

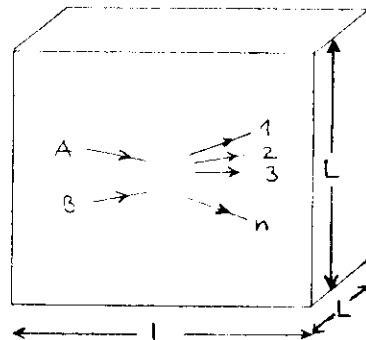


Energie-Impulserhaltung bedeutet

$$p_i \equiv p_A + p_B = p_1 + p_2 + \dots + p_n \equiv p_f.$$

Wir denken uns zunächst alle Teilchen in einem sehr großen, aber endlichen kubischen Kasten der Seitenlänge L und des Volumens $V = L^3$ eingeschlossen.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Ablaufen der Reaktion (60) vom Anfangszustand (i) in den durch die $p_1 \dots p_n$ festgelegten Endzustand (f) innerhalb einer Zeit T sei mit R_{fi} bezeichnet. Sie ist proportional zum 4-dimensionalen Kronecker- δ für die 4 Komponenten von p_f und p_i . Daher schreiben wir sie in der Form



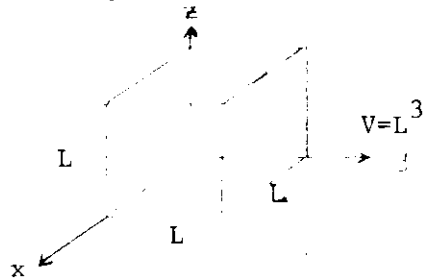
$$R_{fi} = \delta_{p_f p_i}^{(4)} \frac{VT}{(2\pi)^4} M_{fi} \quad (61)$$

und definieren hierdurch das sogenannte "Matrixelement M_{fi} " für den Übergang des Zustands i in den Zustand f ". Das Kronecker- δ sichert die 4-Impulserhaltung. Die Reaktionswahrscheinlichkeit/Zeiteinheit Γ (\equiv reziproke mittlere Zeitdauer τ bis zum Eintreten der Reaktion) ist dann gleich

$$\frac{1}{\tau} \equiv \Gamma = \frac{|R_{fi}|^2}{T} = \frac{V^2 T}{(2\pi)^8} \delta_{P_f P_i}^{(4)} |M_{fi}|^2. \quad (62)$$

Dies ist jedoch nicht das, was wir wirklich messen können. Wegen der endlichen Größe und Energieauflösung unserer Zähler können wir keinen einzelnen Endzustand allein für sich beobachten, sondern wir lassen stets einen gewissen (wenn auch vielleicht kleinen) endlichen Bereich von Impulsen und Energien zu. Was wir wirklich beobachten, ist (62) summiert (bzw. integriert) über alle erfaßten Endzustandsimpulse.

Wir wollen also (62) über alle Endzustände innerhalb eines gewissen Bereichs $\Delta^3_{\vec{p}} = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ der Impulse jedes Teilchens des Endzustands summieren. Wieviele verschiedene Zustände gibt es für ein Teilchen innerhalb eines gewissen Impulsbereichs? Diese Überlegung wird dadurch sehr erleichtert, daß wir uns alle Teilchen in einen Kasten mit dem Volumen $V = L^3$ eingeschlossen denken. In einem solchen Kasten sind für ein freies Teilchen nur diskrete Werte des Impulses \vec{p} möglich, denn die Impulseigenfunktionen des Teilchens sind



$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = N \exp(i \vec{p} \cdot \vec{r}) = N \exp(i(p_x x + p_y y + p_z z))$$

(wo N ein hier uninteressanter Normierungsfaktor, $N = L^{-3/2}$, ist) mit

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z \quad (n_x, n_y, n_z = \text{ganze Zahlen}). \quad (63)$$

Die letztere Bedingung bewirkt, daß die Wellenfunktion überall auf der Oberfläche des Kastens den gleichen Wert hat; dies ist notwendig, da sie dort ja überall der gleichen Randbedingung unterliegen muß, die durch die Beschaffenheit der Wände des Kastens gegeben ist.

Wieviele verschiedene diskrete Werte des Impulses kann ein in V eingeschlossenes Teilchen innerhalb eines gegebenen Impulsbereichs, etwa zwischen \vec{p} und $\vec{p} + \Delta^3\vec{p}$, dann haben? Aus der Randbedingung der Wellenfunktion ergibt sich

$$\text{Anzahl der Zustände im Impulsbereich } \Delta^3\vec{p} = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta^3\vec{p} \quad (64)$$

Damit wird die Reaktionswahrscheinlichkeit/Zeiteinheit Γ , nunmehr aber summiert über jeweils die Bereiche $\Delta^3\vec{p}_i$ ($i=1\dots n$) der Endzustandsimpulse, nach (62)

$$\frac{1}{\tau} \equiv \Gamma = \frac{V^2 T}{(2\pi)^8} \underbrace{\left(\frac{V}{(2\pi)^3}\right)^n \Delta^3\vec{p}_1 \dots \Delta^3\vec{p}_n}_{\text{= Anzahl der Endzustände}} \delta^{(4)}_{p_f p_i} \overline{|M_{fi}|^2} \quad (4)$$

(Matrixelement)²
gemittelt über den betrachteten Impulsbereich
 $\Delta^3\vec{p}_1 \dots \Delta^3\vec{p}_n$

Nunmehr können wir uns der Beschränkung durch den gedachten Kasten V sowie die endliche betrachtete Zeitspanne T entledigen und betrachten die Reaktionswahrscheinlichkeit/Zeiteinheit im limes $V \rightarrow \infty$ und $T \rightarrow \infty$. Die Impulse $\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n$ sind dann nicht mehr diskret, sondern bekommen ein kontinuierliches Spektrum, so daß

$$\Delta^3\vec{p}_1 \dots \Delta^3\vec{p}_n \overline{|M_{fi}|^2} \rightarrow \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n |M_{fi}|^2$$

und damit wird die Reaktionswahrscheinlichkeit/Zeiteinheit

$$\frac{1}{\tau} \equiv \Gamma = \frac{V^{n+1}}{(2\pi)^{3n+4}} \int \dots \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n \delta^{(4)}(p_f - p_i) |M_{fi}|^2, \quad (65)$$

unter Benutzung der Hilfsformel

$$\delta^{(4)}(p_f - p_i) = \lim_{V, T \rightarrow \infty} \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}_{p_f p_i}, \quad (66)$$

die wir jetzt noch herleiten müssen. Das Kronecker- δ wird hierbei durch die δ -Funktion ersetzt; für $p_f = p_i$ ergibt sich nicht mehr 1 sondern ∞^4 . Die Hilfsformel (66) beruht auf der Darstellung der (eindimensionalen) δ -Funktion durch Exponentialfunktionen (vgl. z.B. Bd. II, Kapitel IV, oder jedes Lehrbuch der Quantenmechanik):

$$\delta(p_x - p'_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p_x - p'_x)x} dx \xrightarrow{L \text{ endlich}} \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(p_x - p'_x)x} dx = \frac{L}{2\pi} \delta_{p_x p'_x}$$

wobei für die Impulse p_x, p'_x wiederum die Randbedingung (63) der Impulseigenfunktionen in einem Kasten $V = L^3$ gelten soll. Die Formel (66) ist die unmittelbare Verallgemeinerung der obigen Formel auf 4 Dimensionen.

Wir führen jetzt noch den Wirkungsquerschnitt σ ein. Er ist definiert als

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Reaktionen/Zeiteinheit}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen A/(Fläche-Zeiteinheit)}} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \text{A} \longrightarrow \text{B} \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist (solange die Teilchen A und B kollinear sind) eine relativistische Invariante, mit der Dimension einer Fläche. Wir machen hier der Einfachheit halber eine spezielle Wahl für die Dichte der einfallenden Teilchen, die im Laborsystem zu nehmen ist.

$$\sigma = \frac{\Gamma}{\rho_A v_A} = \frac{\Gamma}{\frac{1}{V} v_A} \quad (67)$$

wobei ρ_A die Dichte der Teilchen A (Anzahl/Volumen) und v_A ihre Geschwindigkeit relativ zu den (als ruhend angenommenen) Targetteilchen B ist. Da wir in unserem Kasten $V = L^3$ je ein Teilchen A und B angenommen hatten, ist $\rho_A = \frac{1}{V}$. Damit wird mit (65) der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $A + B \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$

$$\sigma = \frac{1}{v_A} \frac{V^{n+2}}{(2\pi)^{3n+4}} \int \dots \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n \delta^{(4)}(p_f - p_i) |M_{fi}|^2 \quad (68)$$

(Wirkungsquerschnitt im Laborsystem mit nichtinvariantem Phasenraumfaktor)

Diese Formel drückt also den Zusammenhang zwischen dem Wirkungsquerschnitt σ (Dimension Fläche) und dem Matrixelement M_{fi} aus, welches nach (61) und (66) durch

$$R_{fi} = \delta^{(4)}(p_f - p_i) M_{fi} \quad (61')$$

definiert ist; das heißt, es ist bis auf die Impuls-Energie-erhaltende δ -Funktion gleich der Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Ablaufen der Reaktion. Das Quadrat dieses Matrixelements, das im allgemeinen natürlich von den genauen Werten der Endzustands- (und Anfangszustands-) Impulse abhängt, ist also über den beobachteten Bereich der Endzustandsimpulse zu integrieren, wobei die $\delta^{(4)}(p_f - p_i)$ -

Funktion die Erhaltung von Gesamtimpuls und -energie sichert. Das Integral über die Endzustandsimpulse nennt man das Phasenraumintegral (eigentlich Impulsraum-Integral). Schließlich enthält die Formel noch den Faktor V^{n+2} . Dies bedeutet nicht etwa, daß für einen ∞ großen Kasten der Wirkungsquerschnitt ∞ groß wird; vielmehr enthält das Matrixelement M_{fi} je einen Faktor \sqrt{V} für jedes der $n+2$ an der Reaktion beteiligten Teilchen, nämlich als Normierungsfaktor der Wellenfunktionen dieser Teilchen; daher ist der Ausdruck für σ insgesamt von der Größe des Normierungsvolumens V unabhängig. Wir werden das in Bd. II, Kap. IV bei der expliziten Berechnung von Matrixelementen im Detail sehen.

4.2.2 Erläuterungen zum Phasenraum

In der klassischen Mechanik kann ein Teilchen in einem definierten Bewegungszustand (d.h. mit definiertem Ort (x, y, z) und Impuls (p_x, p_y, p_z)) als Punkt in einem 6-dimensionalen Phasenraum dargestellt werden. Umgekehrt entspricht der Punkt im Phasenraum einem definierten Bewegungszustand des Teilchens. In der klassischen Mechanik gibt es keine Begrenzung für die Dichte der Punkte im Phasenraum. Ein gegebener Wert von x kann mit jedem Wert von p_x kombiniert werden usw. Im Prinzip kann man gleichzeitig Messungen von x und p_x mit unendlicher Genauigkeit machen. Klassisch kann das Teilchen die Punkte im Phasenraum kontinuierlich besetzen.

In der Quantenmechanik dagegen ist es auf Grund der Unschärferelation

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \hbar$$

unmöglich, Ort und Impuls gleichzeitig beliebig genau zu messen. Ein Bewegungszustand kann nur mit dieser Unbestimmtheit angegeben werden; ein Teilchen besetzt daher ein endliches Volumen $(2\pi\hbar)^3 = (2\pi)^3$ im Phasenraum. (Beachte: $\hbar = 1$). Es ist daher plausibel, daß die Zahl N der unterscheidbaren Zustände, die ein Teilchen annehmen kann, gleich dem Volumen im Phasenraum geteilt durch die Größe der Elementarzelle $(2\pi)^3$ ist:

$$N = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{x} d^3\vec{p} .$$

Wenn das Teilchen in einem endlichen geometrischen Volumen V eingeschlossen ist, wird also

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} = \frac{V}{(2\pi)^3} . \text{ ("Volumen im Impulsraum");}$$

dies ist die bereits hergeleitete Formel (64). Eigentlich müßte man hier eine Σ statt eines \int schreiben, da wir ja diskrete Impulszustände haben; aber bei sehr großem V kan man sich die Impulse als praktisch kontinuierlich verteilt vorstellen.

Bei mehreren auslaufenden Teilchen einer Reaktion wird die Zahl der möglichen Zustände im Phasenraum durch die notwendige Forderung der Impuls- und Energieerhaltung bei der Reaktion eingeschränkt. Der Phasenraum ist also ein statistischer Orts-Impulsraum. Man spricht von einer Phasenraumverteilung, wenn die Verteilung der 4-Impulse (oder der effektiven Massen) einer Reaktion als eine statistische - lediglich durch Impuls- und Energieerhaltung eingeschränkte - Verteilung beschrieben werden kann

4.2.3 Wirkungsquerschnitt mit invariantem Phasenraum (Møller-Formel)

Wir hatten in 4.2.1 und 4.2.2 mit einer Teilchendichte von 1 Teilchen/Volumen V für jedes Teilchen gerechnet. Ein bewegter Beobachter sieht das Volumen um den Faktor γ verkleinert, und die

Energie E des Teilchens um den Faktor γ vergrößert. Die Teilchendichte steigt also um den gleichen Faktor γ wie die Energie. Damit steigt

$$\boxed{\bullet E}$$

ruhender Beobachter

$$\boxed{\bullet E\gamma}$$

bewegter Beobachter,

$$\sqrt{\gamma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

nach Gl. (65) auch die Reaktionswahrscheinlichkeit proportional zu E für jedes Teilchen. Wir berücksichtigen dies besser gleich durch eine Neu-Definition des Matrizelements:

$$\left| M_{fi}^{\text{invariant}} \right|^2 = 2E_A 2E_B 2E_1 \dots 2E_n \left| M_{fi} \right|^2 ; \quad (69)$$

Diese Form hängt nicht mehr von der Bewegung des Beobachters ab, ist also invariant.*

* Wir geben noch eine andere Argumentation, um die Invarianz der einzelnen Faktoren in Gl. (70) (S. 68) zu zeigen: 1.) Der Faktor $4 \frac{E_A E_B}{\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}}$ ist invariant, denn er ist der Spezialfall des invarianten Flußfaktors $F = 4 \frac{E_A E_B}{\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}}$ im Laborsystem.

2.) Das Volumenelement im Impulsraum $d^3 \vec{p}_i / E_i$ ist invariant, wie man leicht zeigt: Wir betrachten zunächst den invarianten Ausdruck

$$\iiint d^4 p \delta(p^2 - m^2) = \iiint d^3 \vec{p} dE \delta(p^2 - m^2).$$

$d^4 p$ ist ein Volumenelement im 4-Impulsraum und ist daher invariant. Die δ -Funktion ist ebenfalls invariant. Nun ist wegen $dE^2 = 2E dE$ und $p^2 = E^2 - \vec{p}^2$

$$\iiint d^3 \vec{p} dE \delta(p^2 - m^2) = \iiint d^3 \vec{p} \int \frac{dE^2}{2E} \delta(E^2 - \vec{p}^2 - m^2) = \iiint \frac{d^3 \vec{p}}{2E},$$

Aus Gl. (68) wird dann

$$\sigma = \frac{1}{4v_A E_A E_B} \frac{V^{n+2}}{(2\pi)^{3n+4}} \left\{ \dots \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3\vec{p}_n}{2E_n} \delta^{(4)}(p_f - p_i) |M_{fi}^{inv}|^2 \right. \quad (70)$$

(Møller-Formel)

Phasenraumfaktor
≡ "Invarianter Phasenraum"

δ-Funktion für Energie-
Impulserhaltung

Notation:

- σ (Integrierter) Wirkungsquerschnitt für die Reaktion (60) im Laborsystem.
Bei Ersetzung von $4v_A E_A E_B$ durch $F = 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$ gilt (70) in jedem System, in dem A und B kollinear sind.
Differentielle Wirkungsquerschnitte erhält man durch Ableitung von (70) nach den gewünschten Variablen.
- v_A Geschwindigkeit des Strahlteilchens A relativ zu dem (als ruhend angenommen) Targetteilchen B = Geschwindigkeit von A im Laborsystem.
- E_j Gesamtenergie von Teilchen j
- \vec{p}_j 3-Impuls von Teilchen j
- $p_{i,f}$ Summe der 4-Impulse im Anfangszustand bzw. Endzustand;
 $p_i = p_A + p_B; p_f = p_1 + \dots + p_n$
- M_{fi}^{inv} invariantes Übergangsmatrixelement für Reaktion (60). M_{fi}^{inv} enthält auch die Spinabhängigkeit der Reaktion.
- V Volumen, in dem das System eingeschlossen ist.
Bei expliziter Ausrechnung des Matrixelements hebt sich der Faktor V^{n+2} weg. (vgl. Kap. IV.)

Der Phasenraumfaktor enthält die "Kinematik" der Reaktion, d.h. die Wirkung von Energie- und Impulserhaltung. Das Matrixelement enthält die "Dynamik", dh. im klassischen Bild die Wirkung der die Reaktion vermittelnden Kräfte, die je nach Wechselwirkung sehr verschieden sein können. Zum Beispiel eine Resonanzzeugung wird durch das Matrixelement, also die Dynamik, beschrieben.

Im einfachsten Fall (keine Resonanzzeugung) wird etwa

$$|M_{fi}^{inv}|^2 = \text{const};$$

dann ist der Wirkungsquerschnitt allein durch die Phasenraumeigenschaften gegeben,

Forts. Fußnote S. 67 wobei $E^2 = p^2 + m^2$ zu nehmen ist, was für jedes reelle Teilchen erfüllt ist. Somit ist $d^3\vec{p}/2E$ invariant.

3.) Da der Wirkungsquerschnitt invariant ist (per def.) muß auch der restliche Faktor $V^{n+2} \cdot |M_{fi}^{inv}|^2$ invariant sein. Beachte, daß sich V^{n+2} bei expliziter Ausrechnung des Matrixelementes herauskürzt.

d.h., die Wahrscheinlichkeit für Beobachtung eines Teilchens innerhalb eines Impulsbereiches ist proportional zur Anzahl der darin möglichen quantenmechanischen Zustände. Daher spricht man auch vom statistischen Phasenraum. Meist wissen wir wenig über M_{fi} und müssen die Phasenraumeigenschaften kennen, um die dynamischen Eigenschaften von den kinematischen zu trennen.

4.2.4 Beispiel: Invarianter Zwei-Teilchen-Phasenraum

Wir berechnen als Beispiel den Phasenraumfaktor in (70) für eine Reaktion mit zwei auslaufenden Teilchen. Wir nennen den Phasenraumfaktor P_2 .

$$P_2 = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \delta^{(4)}(p_f - p_i)$$

Die δ -Funktion kann man in eine δ -Funktion für den 3-Impuls und eine für die Energie aufspalten

$$P_2 = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^2\vec{p}_2}{2E_2} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_A - \vec{p}_B) \delta(E_1 + E_2 - E_A - E_B)$$

Der Einfachheit halber betrachten wir die Reaktion im Schwerpunktsystem, das durch $\vec{p}_A = -\vec{p}_B$ gekennzeichnet ist. (Setze $E = E_A + E_B$)

$$P_2 = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^2\vec{p}_2}{2E_2} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(E_1 + E_2 - E)$$

Wir integrieren über p_2

$$\begin{aligned} P_2 &= \int \frac{1}{4E_1 E_2(|\vec{p}_1|)} d^3\vec{p}_1 \delta(E_1 + E_2(|\vec{p}_1|) - E) \\ &= \int \frac{1}{4E_1 E_2(|\vec{p}_1|)} d\Omega_1 |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| \underbrace{\delta(E_1 + \frac{E_2(|\vec{p}_1|)}{\sqrt{p_1^2 + m_2^2}} - E)}_{\text{const}} \end{aligned}$$

Da die beiden Teilchen räumlich isotrop emittiert werden, liefert die Integration über $d\Omega_1$ einen Faktor 4π . Die Integration über $|\vec{p}_1|$ ergibt ⁺⁾

⁺⁾ Wir benutzen die folgende Eigenschaft der δ -Funktion,

$$\int g(x) \delta(\phi(x)) dx = \frac{g(x_0)}{|\phi'(x_0)|}, \text{ wenn } \phi(x_0) = 0.$$

(Gilt für alle Funktionen $g(x)$, die bei $x = x_0$ stetig sind).

$$P_2 = \frac{\pi |\vec{p}_1|^2}{E_1 E_2} \frac{1}{\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_1|}{E_2}}$$

$$P_2 = \frac{\pi |\vec{p}_1|}{E} = \frac{\pi}{2E^2} \sqrt{[E^2 - (m_2 - m_1)^2] [E^2 - (m_2 + m_1)^2]} \quad (71)$$

D.h., der Phasenraumfaktor bei einem Zweiteilchenendzustand ist durch den Quotienten von 3-Impulsbetrag und Gesamtenergie im Schwerpunktsystem gegeben: Dieser Ausdruck ist Lorentz-invariant.

Für eine größere Zahl von Teilchen im Endzustand läßt sich der Phasenraumfaktor meist nicht mehr analytisch angeben. Man kann jedoch eine Rekursionsformel aufstellen und den Phasenraumfaktor auf einem Rechner mit Monte-Carlo-Verfahren berechnen.

4.3 Resonanz in einem Dreiteilchenendzustand (Dalitzplot)

Wir betrachten jetzt eine Reaktion mit drei Teilchen im Endzustand. In diesem Fall nimmt der Phasenraumfaktor P_3 eine besonders einfache Form an: Er ist konstant, wenn man die effektiven Zweiteilchenmassen M_{12} und M_{23} als Variable verwendet.

Wir betrachten die Reaktion wieder im Schwerpunktsystem. Dann wird

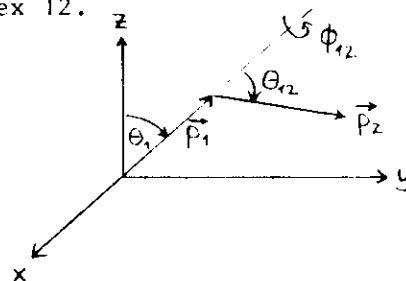
$$P_3 = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3} \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \quad (72)$$

Integration über \vec{p}_3 ergibt

$$P_3 = \int \frac{1}{8E_1 E_2 E_3} d\Omega_1 |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| d\Omega_2 |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E)$$

(Die Integration der δ -Funktion impliziert, daß man den übrigen Integranden an der Stelle $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ nehmen soll.) Die Richtung eines der auslaufenden Teilchen z.B. \vec{p}_1 bezüglich einer beliebigen Achse z ist nicht besonders ausgezeichnet. Daher liefert die Integration über $d\Omega_1$ einen Faktor 4π . Die Richtung von \vec{p}_2 messen wir (als willkürliche Konvention) bezüglich \vec{p}_1 als Polarachse und bezeichnen die zugehörigen Winkel mit dem Index 12.

$$d\Omega_2 \rightarrow d\phi_{12} d \cos \theta_{12}$$



Für unpolarisierte Teilchen gibt es keine azimuthale Abhängigkeit und man kann über $d\phi_{12}$ integrieren. Dann wird

$$P_3 = \int \frac{8\pi^2}{8E_1 E_2 E_3} \vec{p}_1^2 d|\vec{p}_1| \vec{p}_2^2 d|\vec{p}_2| d(\cos\theta_{12}) \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E) \quad (73)$$

θ_{12} ist bei festem \vec{p}_1 und \vec{p}_2 durch die Impulserhaltung bestimmt.

$$-\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_3^2 = \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2| \cos\theta_{12},$$

so daß $|\vec{p}_3| d|\vec{p}_3| = |\vec{p}_1||\vec{p}_2| d(\cos\theta_{12})$.

Wegen $\vec{p}^2 = E^2 - m^2$ gilt

$$|\vec{p}| d|\vec{p}| = E dE = E dT, \quad (74)$$

wobei T die kinetische Energie ist. Dann wird (73)

$$P_3 = \pi^2 \int dT_1 dT_2 dT_3 \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E)$$

$\underbrace{T_1 + T_2 + T_3 + m_1 + m_2 + m_3 - E}$

Integration über T_2 liefert schließlich

$$P_3 \propto \int dT_1 dT_3 \quad (75)$$

D.h. die Dichte der Endzustände ist konstant, wenn man sie gegen T_1 und T_3 aufträgt.

Wir führen jetzt statt der kinetischen Energien die effektiven Massen M_{12} und M_{23} ein.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } M_{12}^2 &= (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\ &= (E - E_3)^2 - \vec{p}_3^2 \\ &= E^2 + m_3^2 - 2EE_3 \\ &= E^2 + m_3^2 - 2Em_3 - 2ET_3 \end{aligned}$$

Also ist M_{12}^2 eine lineare Funktion von T_3 mit

$$d(M_{12}^2) \propto dT_3$$

Ähnlich findet man

$$d(M_{23}^2) \propto dT_1$$

Also

$$P_3 \propto \int d(M_{12}^2) d(M_{23}^2)$$

(76)

Der invariante Phasenraumfaktor ist konstant als Funktion der effektiven Massenquadrate M_{12}^2 und M_{23}^2 , d.h. für eine reine Phasenraumverteilung von Ereignissen ist das M_{12}^2 - M_{23}^2 Diagramm (Dalitz-Plot) gleichmäßig mit Ereignissen besetzt.

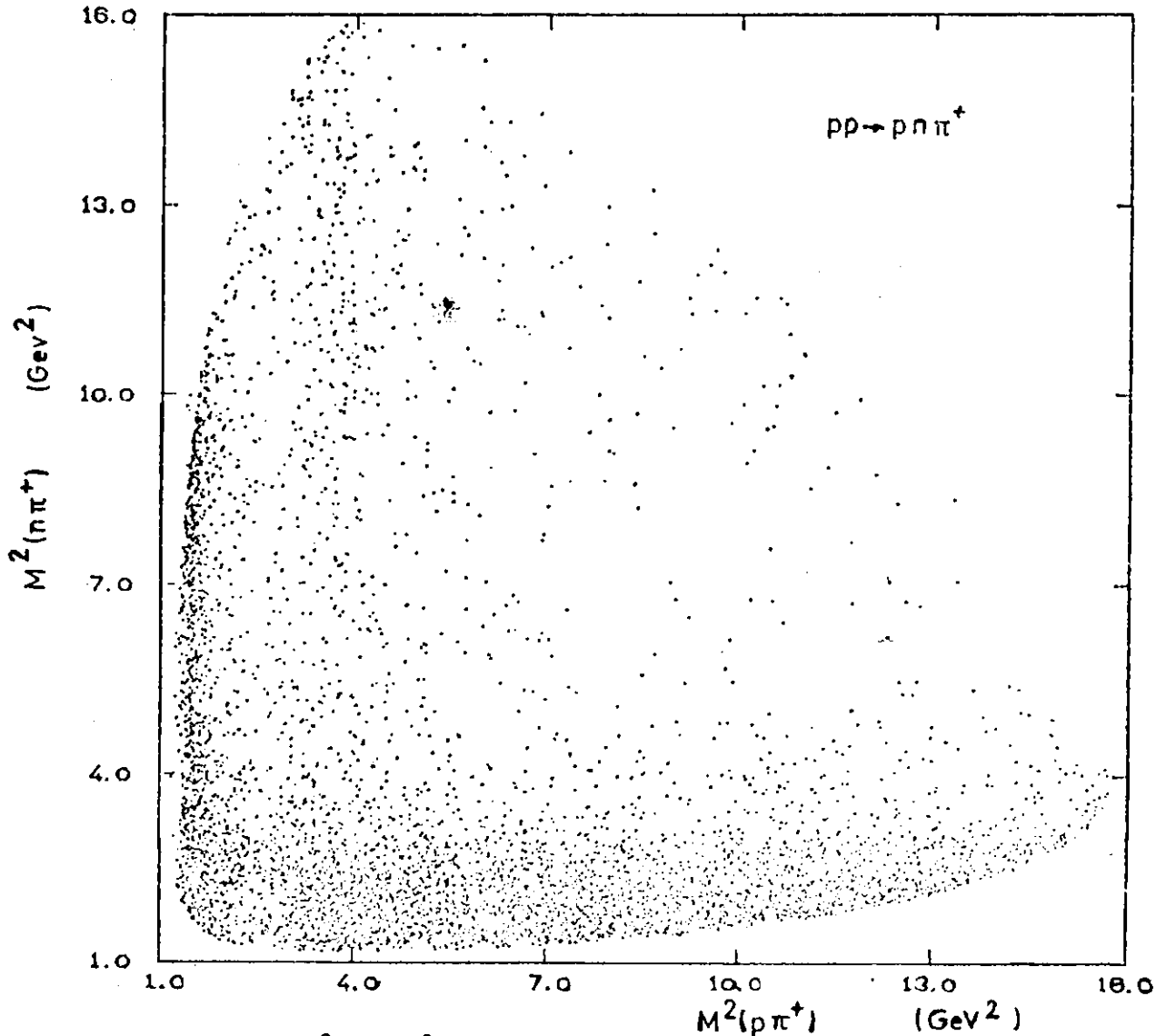
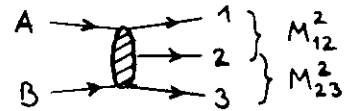


Abb. 6 Dalitzplot $M_{p\pi}^2$ vs. $M_{n\pi}^2$ für die Reaktion $pp \rightarrow pn\pi^+$.

Die Grenzen des Dalitz-Plots sind durch die Begrenzung von $M_{p\pi}^2$ und $M_{n\pi}^2$ durch Energie- und Impulserhaltung gegeben.

Abb. 6 zeigt den Dalitz-Plot für die Reaktion (57). Für ein konstantes Matrixelement würde man eine Gleichverteilung der Punkte erwarten. Das Vorliegen von Variationen des Matrixelementes zeigt sich unmittelbar in einer Inhomogenität der Verteilung im Dalitzplot. Z.B. beobachtet man ein dichtes Band von Ereignissen entlang der linken Ordinate. Wenn man die Ereignisse von Abb. 6 auf die $M_{p\pi}^2$ -Achse projiziert (vgl. Abb. 4), sieht man, daß dieses Band von der Erzeugung der Resonanz $P_{33}(1236)$ stammt. Hier muß das Matrixelement so formuliert werden, daß es die Resonanzproduktion beschreibt, etwa durch die Breit-Wigner-Amplitude

$$M_{fi}^{inv} \approx \text{const} \frac{1}{M_{res} - M_{p\pi^+} - \frac{i\Gamma}{2}} .$$

In besonders einfachen Fällen kann man die effektiven Massenverteilungen von Mehrteilchenendzuständen als Überlagerung von Phasenraumverteilungen und Resonanzbeiträgen beschreiben.

4.4 Was lernt man aus Resonanzproduktion in Produktionsexperimenten?

Produktionsexperimente mit Resonanzproduktion haben im wesentlichen zwei Ziele:

- i) Abtrennung der Resonanzen und Messung der Wirkungsquerschnitte,
- ii) Bestimmung der Quantenzahlen der Resonanzen.

zu i) Die Abtrennung der Resonanzen vom Untergrund ist in 4.1 - 4.3 grob skizziert worden. In der Praxis können erhebliche Probleme auftreten durch sogenannte Endzustandswechselwirkungen (s. Abschnitt 1.2). Außerdem bestehen theoretische Unsicherheiten über die korrekte Beschreibung der Resonanzform (insbesondere in den Schwänzen der Resonanzkurven). Im allgemeinen kann man nur Resonanzen einigermaßen sicher abtrennen, deren Wirkungsquerschnitt mindestens von ähnlicher Größenordnung wie der des darunterliegenden Untergrundes ist. Die Abtrennung liefert totale und differentielle Wirkungsquerschnitte, die wichtige Informationen zum Test von Modellen für Erzeugungsprozesse darstellen. Wir können hier nicht näher auf solche Modelle eingehen.

zu ii) Die Bestimmung der Quantenzahlen (J,P,I,G,C,Y) von mesonischen und hyperonischen Resonanzen war ein Haupterfolg zahlreicher in den 60er Jahren durchgeführter Blasenkammerexperimente. Man kann die Quantenzahlen durch Analyse

der Zerfallswinkelverteilungen und durch Vergleich der verschiedenen Zerfallsweisen einer Resonanz bestimmen. Wir verweisen dazu auf die Spezialliteratur (s.u.). Die Kenntnis der Quantenzahlen ist entscheidend für die Identifizierung von Resonanzen und für ihre Einordnung in Teilchenfamilien (vgl. Kap. II). Bisher glaubt man z.B. die Mehrzahl der im Quarkmodell vorgesehenen mesonischen Resonanzen mit Massen unterhalb 1.5 GeV gefunden zu haben. Oberhalb 1.5 GeV stößt man auf große Schwierigkeiten, da die Resonanzen breiter werden (d.h. sich überlappen) und die Erzeugungswirkungsquerschnitte rasch abnehmen.

Literatur:

Zum Phasenraum:

- O. Skjeggstad, Notes on Phase Space, in
Proceedings of the 1964 Easter School for Physicists
CERN-Report 64-13, Band II (1964);
- Hagedorn, Relativistic Kinematics
Benjamin Inc., New York, 1964

Zur Bestimmung der Quantenzahlen:

- W. Koch, Some Methods of Spin Determination of Elementary
Particles and Resonances,
CERN-Report 64-13, Band II (1964)
- D.B. Lichtenberg, Meson and Baryon Spectroscopy
Springer Verlag, New York, 1965

Zur Wahl der Resonanzform:

- J.D. Jackson, Nuovo Cimento, 34, 1644 (1964)

Anhang:

Entwicklungen einer ebenen Welle nach Kugelfunktionen (Gl. 2)

Ein freies spinloses Teilchen mit dem Impuls \vec{p} kann durch die gemeinsamen Eigenfunktionen der Operatoren $p_j = -i \partial/\partial x_j$ ($j = 1, \dots, 3$) beschrieben werden:

$$\psi \propto e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{ebene Welle}).$$

Die Operatoren H , \vec{k}^2 und ℓ_z ($H =$ Hamilton-Operator) bilden ebenfalls einen vollständigen Satz kommutierender Observabler, deren gemeinsame Eigenfunktion durch

$$j_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

gegeben sind. Die Kugelfunktionen $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ sind die gemeinsamen Eigenfunktionen von \vec{k}^2 und ℓ_z mit

$$\vec{k}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$$\ell_z Y_\ell^m(\theta, \phi) = m Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell.$$

Die sphärischen Besselfunktionen $j_\ell(\rho)$ sind die Lösungen der radialen Wellengleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right) \right] f_\ell = 0,$$

die sich durch die Abtrennung der Winkelvariablen in der Schrödingergleichung ergibt.

Die ebene Welle $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ stellt ein freies Teilchen mit dem Impuls $\vec{p} = \vec{k}$ dar; sie repräsentiert jedoch keinen wohldefinierten Drehimpulszustand. Die Funktion $j_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi)$ stellt andererseits keinen wohldefinierten Impulszustand dar.

Die Funktionen $j_\ell(kr) Y_\ell^m(\theta, \phi)$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, so daß

sich $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ nach diesen Funktionen entwickeln läßt:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m}(\vec{k}) Y_{\ell}^m(\Theta, \phi) j_{\ell}(kr). \quad (A1)$$

Wählt man die z-Achse entlang \vec{k} , so wird $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\cos\Theta}$ unabhängig von ϕ , und in (A1) kommen nur Glieder mit $m=0$ vor. Wegen

$$Y_{\ell}^0 = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos\Theta)$$

folgt:

$$e^{ikr\cos\Theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos\Theta).$$

Für die Koeffizienten c_{ℓ} ergibt sich nach längerer Rechnung:

$$c_{\ell} = (2\ell + 1) i^{\ell},$$

so daß

$$e^{ikr\cos\Theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos\Theta).$$

Wegen

$$j_{\ell}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x} \sin(x - \frac{1}{2}\ell\pi)$$

folgt

$$e^{ikr\cos\Theta} \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi) P_{\ell}(\cos\Theta)$$

für $r \rightarrow \infty$. Dieses Ergebnis läßt sich umformen in

$$e^{ikr\cos\Theta} \sim \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[e^{ikr} - (-)^{\ell} e^{-ikr} \right] P_{\ell}(\cos\Theta)$$

Das ist Gleichung (2) aus Abschnitt 2.2.

II. TEILCHENKLASSIFIKATION NACH DEM QUARKMODELL *

1. Eigenschaften der Quarks

Im Quarkmodell macht man die Annahme, daß alle Elementarteilchen aus Bausteinen, den sogenannten Quarks bestehen. Dabei sollen die Mesonen aus $q\bar{q}$, die Baryonen aus qqq , die Antibaryonen aus $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ zusammengesetzt sein. Es gibt 3 verschiedene Zustände des Quarks:

p, n, λ ; dazu die Antiteilchen $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda}$.

Die Eigenschaften der Quarks sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

q-Typ	B	Selt-sam-keit	Y	I	I_Z	Q	μ/μ_q	Spin	P	
p	1/3	0	1/3	1/2	1/2	2/3	2/3	1/2	+	} Isospin-Dublett, also gleiche Masse
n	1/3	0	1/3	1/2	-1/2	-1/3	-1/3	1/2	+	
λ	1/3	-1	-2/3	0	0	-1/3	-1/3	1/2	+	

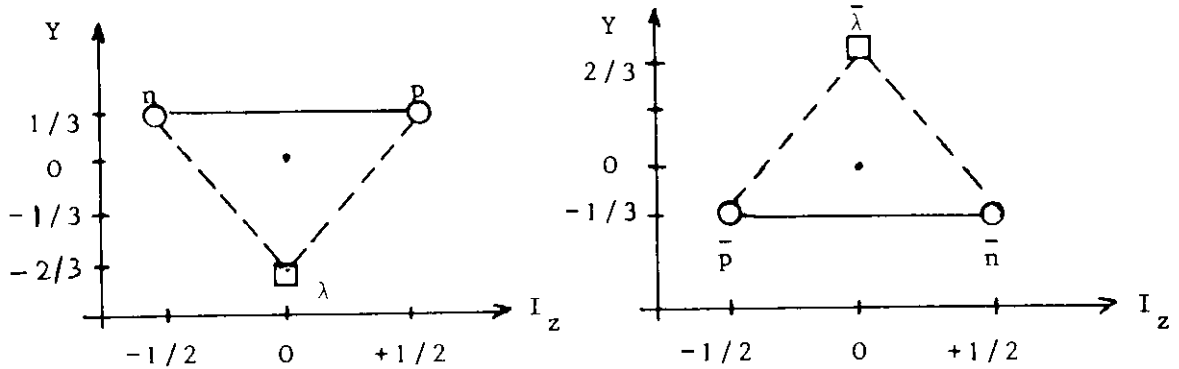
Tabelle I. Eigenschaften der Quarks

Hier folgt Y aus $Y=B+Selt-sam-keit$; Q (in Einheiten der Elementarladung) aus $Q=I_Z+Y/2$ (siehe Kap. I., 1.2.3). Das magnetische Moment μ der Quarks (in Vielfachen einer zunächst unbekanntenen Konstanten μ_q) ist proportional^{***} zur Ladung Q. Für den Spin nimmt man die einfachste Möglichkeit $S = \frac{1}{2}$ an.

* Eine ausgezeichnete Darstellung des Quarkmodells findet man in J.J.J. Kokkedee, The Quark Model, W.A. Benjamin, New York 1969.

** Dies folgt aus SU(3)-Invarianz der starken Wechselwirkung zusammen mit der Annahme minimaler elektromagnetischer Kopplung. Das Prinzip der minimalen elektromagnetischen Kopplung ("aller Magnetismus beruht auf Strömen") besagt, daß es nur eine fundamentale Art der Wechselwirkung des Photons gibt, nämlich die mit Ladungen. Die anomalen magnetischen Momente aller Teilchen beruhen nach dieser Hypothese nicht auf einer fundamental neuen Wechselwirkung des Photons, sondern entstehen durch Ströme (d.h. bewegte Ladungen) virtueller Teilchen (z.B. der Mesonenwolke eines Hadrons). In SU(3) ist $\{3\} \times \{\bar{3}\} = \{8\} + \{1\}$, aber die richtigen Verhältnisse der Quark-Ladungen ergeben sich nur, wenn sich das Photon wie das Mitglied eines $\{8\}$ verhält. Wenn aber alle elektromagnetischen Wechselwirkungen auf Wechselwirkungen mit den Ladungen (also mit Quarkladungen) zurückgehen, muß sich das Photon in allen Wechselwirkungen wie ein $\{8\}$ -Teilchen verhalten. Daher $\mu \propto Q$ für Quarks. Für die Baryonen gilt $\mu \propto Q$ nicht, da die Kopplung des $\{8\}$ -Photons an $\{8\} \times \{8\}$ nicht eindeutig ist (D- und F-Kopplung); die Ladung ist hierbei reine F-Kopplung, für das magnetische Moment aber $D/F = 3/2$.

"Gewichtsdiagramm" ($Y I_z$ -Diagramm):



Bei den Antiquarks haben alle "ladungsartigen", additiven Quantenzahlen (B, Y, I_z, Q) das entgegengesetzte Vorzeichen wie bei den Quarks.

Die Annahme, daß die 3 Quarks sich in ihren starken Wechselwirkungen gleich verhalten (sofern sie sich im gleichen räumlichen und Spin-Zustand befinden), führt auf die Invarianz aller starken Wechselwirkungen unter $SU(3)$, analog zum Fermi-Yang-Modell für $SU(2)$ (s.S.4). Demnach treten Hadronen in $SU(3)$ -Multipletts auf, die mehrere $SU(2)$ - (Isospin-) Multipletts umfassen. Der "eightfold way"* führt von der Einordnung der stabilen Mesonen und Baryonen in Oktetts zur Folgerung, daß ihre 2-Teilchen-Resonanzen nur solche Multipletts bilden können, die in der Zerlegung

$$\{8\} \times \{8\} = \{27\} + \{10\} + \{\bar{10}\} + \{8\} + \{8\} + \{1\}$$

vorkommen (so wurde Ω^- vorausgesagt). Die Annahme, daß alle Hadronen aus Quarks aufgebaut sind, führt natürlich noch weiter: Das Auftreten von $\{27\}$ und $\{\bar{10}\}$ ist in erster Ordnung verboten (vgl. Abschn. 7), und es können weitere Beziehungen zwischen den erlaubten Multipletts hergestellt werden. Bei der Klassifikation von Resonanzen ist das Quarkmodell daher besonders nützlich, wie wir im folgenden sehen werden.

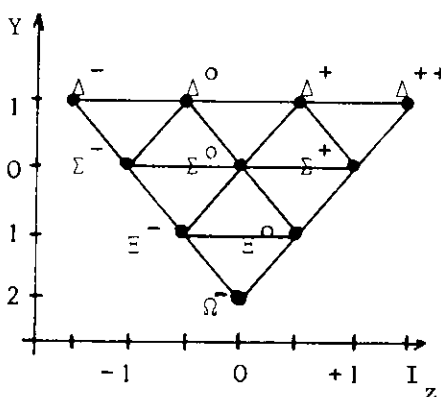
* Der Name unterscheidet diesen Weg von einem früheren, wo die Zusammenfassung von p (Proton), n und Λ zu einem $SU(3)$ -Triplet versucht wurde (Sakata-Modell).

2. Die niedrigsten Baryonenzustände

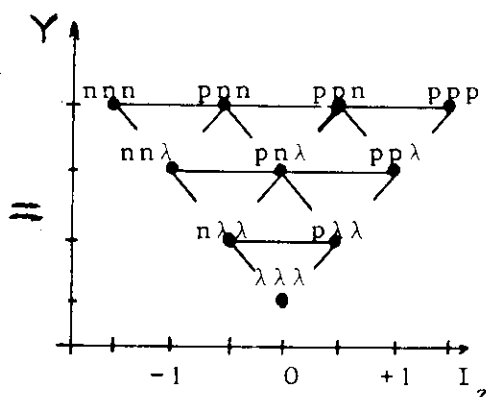
Als niedrigste Zustände beobachtet man ein $\{8\}$ mit $J^P = \frac{1}{2}^+$ (die stabilen Baryonen) und ein $\{10\}$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$. Insgesamt sind dies $8 \times 2 + 10 \times 4 = 56$ Zustände, wenn man die Spinzustände mitzählt.

Das $\{10\}$ der Baryonen-Resonanzen mit $J^P = \frac{3}{2}^+$ ist leicht erklärbar, da es genau 10 verschiedene Kombinationen von 3 Quarks gibt:

m (MeV)	J^P	Selt- sam- keit	I
1236	$3/2^+$	0	$3/2$
1385	$3/2^+$	-1	1
1530	$3/2^+$	-2	$1/2$
1672	$3/2^+$	-3	0



Das beobachtete Dekuplett $\{10\}$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$



Quarkinhalt des $\{10\}$.
(Beachte, daß sich Y und I_z der Quarks addieren.)

Unter der Annahme einer Quark-Massendifferenz

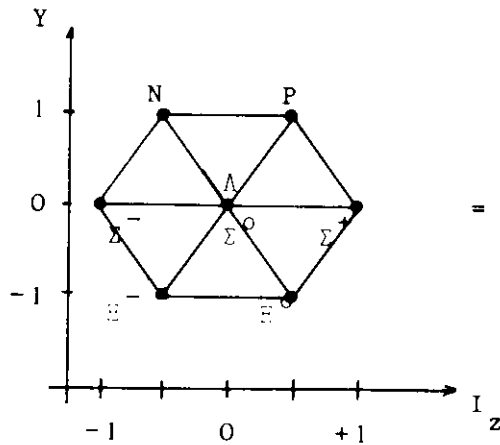
$$m_\lambda - m_p = 146 \text{ MeV}, \quad m_p = m_n$$

folgt unmittelbar die beobachtete Massenaufspaltung des $\{10\}$ (wenn die Bindungsenergie unabhängig von der Art der Quarks ist).

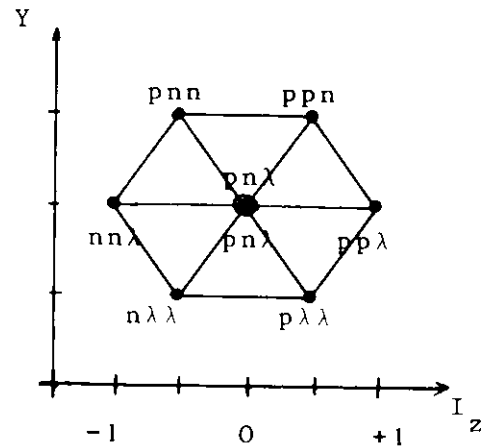
Nimmt man weiter an, daß sich die Quarks in relativen S-Wellenzuständen befinden, d.h. keinen Bahndrehimpuls haben, so folgt die beobachtete Parität $P=+1$. Die Spins muß man dann als parallel annehmen, so daß sie sich zu $J = 3/2$ addieren.

Das $\{8\}$ der (gegen starke Zerfälle) stabilen Baryonen mit $J^P = \frac{1}{2}^+$ sieht so aus:

m (MeV)	J ^P	Selt- sam- keit	I
938	$\frac{1}{2}^+$	0	1/2
1116 1192	$\frac{1}{2}^+$	-1	0, 1
1315	$\frac{1}{2}^+$	-2	1/2



Das beobachtete Oktett {8} mit $J^P = \frac{1}{2}^+$



Aus den Quantenzahlen folgender Quarkinhalt des {8}

Hier stellen sich folgende Fragen:

- Weshalb fehlen die "Ecken" in {8}?
- Weshalb tritt $pn\lambda$ zweimal auf?
- Wie können wir die Massenaufspaltung des {8} verstehen?

Zur Beantwortung dieser Fragen sehen wir uns die Wellenfunktionen der niedrigsten Baryonenzustände im Quarkmodell an.

Die Wellenfunktion des niedrigsten gebundenen qqq -Zustands mit Gesamtdrehimpuls J hat die Form

$$\psi = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) |q_1^{m_1}; q_2^{m_2}; q_3^{m_3}\rangle \quad (1)$$

wo $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ die räumliche Wellenfunktion des $3q$ -Grundzustands ist, und die $SU(3)$ - und Spin-Funktion $|\dots\rangle$ die Art und Spin-Komponenten (\uparrow oder \downarrow) der Quarks beschreibt (die $SU(3)$ -Wellenfunktion ist einfach die Erweiterung der bekannten Isospin-Wellenfunktion von 2 auf 3 fundamentale Zustände!).

Dekuplett:

Wir gehen aus von Δ^{++} mit $J = \frac{3}{2}$, $J_z = +\frac{3}{2}$. Die Wellenfunktion ist

$$\psi = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) |\Delta^{++}, J_z = +\frac{3}{2}\rangle$$

mit $|\Delta^{++}, J_z = +\frac{3}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \quad (2)$

(wir schreiben \hat{q} für q^+ , \underline{q} für q^+). Keines der Quarks ist hier vor den anderen physikalisch ausgezeichnet. Hieraus konstruieren wir ein Δ^{++} mit $J_z = +\frac{1}{2}$, indem wir die Spinrichtung eines der Quarks umklappen; das gibt $|\hat{p}\hat{p}\underline{p}\rangle$ oder $|\hat{p}\underline{p}\hat{p}\rangle$ oder $|\underline{p}\hat{p}\hat{p}\rangle$ mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit. Insgesamt also erhält man die (bezüglich Vertauschung der Quarks) vollständig symmetrische Linearkombination

$$|\Delta^{++}, J_z = +\frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{1}}{3}|\hat{p}\hat{p}\underline{p}\rangle + \frac{\sqrt{1}}{3}|\hat{p}\underline{p}\hat{p}\rangle + \frac{\sqrt{1}}{3}|\underline{p}\hat{p}\hat{p}\rangle, \quad (3)$$

in der wieder alle 3 Quarks gleichberechtigt auftreten. Ebenso

$$|\Delta^{++}, J_z = -\frac{1}{2}\rangle = \frac{\sqrt{1}}{3}|\hat{p}\underline{p}\underline{p}\rangle + \frac{\sqrt{1}}{3}|\underline{p}\hat{p}\underline{p}\rangle + \frac{\sqrt{1}}{3}|\underline{p}\underline{p}\hat{p}\rangle, \quad (4)$$

und $|\Delta^{++}, J_z = -\frac{3}{2}\rangle = |\underline{p}\underline{p}\underline{p}\rangle. \quad (5)$

Ferner können wir aus $|\Delta^{++}, J_z = \frac{3}{2}\rangle$ den (bezüglich der Wechselwirkung zwischen den Quarks äquivalenten) Zustand $|\Delta^+, J_z = \frac{3}{2}\rangle$ konstruieren, indem wir eines der p in ein n umwandeln. Wir erhalten mit gleicher Wahrscheinlichkeit $|\hat{p}\hat{p}\hat{n}\rangle$, $|\hat{p}\hat{n}\hat{p}\rangle$ und $|\hat{n}\hat{p}\hat{p}\rangle$, insgesamt also die vollständig symmetrische Linearkombination

$$|\Delta^+, J_z = \frac{3}{2}\rangle = \frac{\sqrt{1}}{3}|\hat{p}\hat{p}\hat{n}\rangle + \frac{\sqrt{1}}{3}|\hat{p}\hat{n}\hat{p}\rangle + \frac{\sqrt{1}}{3}|\hat{n}\hat{p}\hat{p}\rangle, \quad (6)$$

in der wieder alle 3 Quarks gleichberechtigt auftreten. Jedes der 3 Quarks ist mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$ ein p , mit $1/3$ ein n .

Dasselbe können wir mit dem Zustand $|\Delta^{++}, J_z = +\frac{1}{2}\rangle$ tun, wobei wir die ebenfalls vollständig symmetrische Funktion

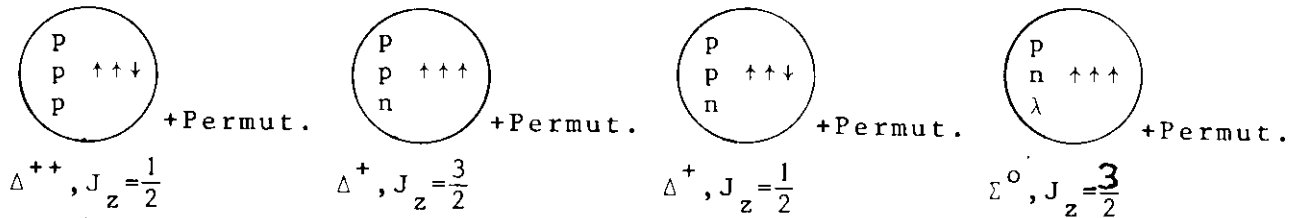
$$\begin{aligned} |\Delta^+, J_z = \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{3}|\hat{p}\hat{p}\underline{n}\rangle + \frac{1}{3}|\hat{p}\hat{n}\underline{p}\rangle + \frac{1}{3}|\hat{n}\hat{p}\underline{p}\rangle + \\ &+ \frac{1}{3}|\hat{p}\underline{p}\hat{n}\rangle + \frac{1}{3}|\hat{p}\underline{n}\hat{p}\rangle + \frac{1}{3}|\hat{n}\underline{p}\hat{p}\rangle \\ &+ \frac{1}{3}|\underline{p}\hat{p}\hat{n}\rangle + \frac{1}{3}|\underline{p}\hat{n}\hat{p}\rangle + \frac{1}{3}|\underline{n}\hat{p}\hat{p}\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

erhalten. Als letztes Beispiel konstruieren wir den Zustand $|\Sigma^0, J_z = \frac{3}{2}\rangle$ des $\{10\}$, indem wir in $|\Delta^+, J_z = \frac{3}{2}\rangle$ eines der beiden p in ein λ umwandeln; wir erhalten

$$\begin{aligned}
 |\Sigma^0, J_z = \frac{3}{2}\rangle = & \sqrt{\frac{1}{6}}|\hat{p}\hat{n}\lambda\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|\hat{n}\lambda\hat{p}\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|\lambda\hat{p}\hat{n}\rangle + \\
 & + \sqrt{\frac{1}{6}}|\lambda\hat{n}\hat{p}\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|\hat{n}\hat{p}\lambda\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|\hat{p}\lambda\hat{n}\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

(Dekuplett)

Analog erhält man alle übrigen Wellenfunktionen der Mitglieder des $\{10\}$. Man findet also, daß die $|\dots\rangle$ -Funktion des $\{10\}$ jeweils (bezüglich Vertauschung der 3 Quarks) vollständig symmetrische Linearkombinationen sind; und daß der SU(3)-Anteil und der Spin-Anteil jeweils auch für sich vollständig symmetrisch gegen Vertauschung sind.



Struktur der Baryonen des Dekupletts

Oktett:

Man nimmt an, daß die räumliche Wellenfunktion des $\{8\}$ (mindestens näherungsweise) die gleiche ist wie die des $\{10\}$, d.h. gleich der Grundzustandswellenfunktion $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ für 3 Quarks. Ferner nehmen wir an, daß die Gesamtwellenfunktion Ψ immer die gleichen Symmetrieeigenschaften unter Vertauschung zweier Quarks hat (etwa Fermistatistik, Ψ antisymmetrisch; oder Parastatistik, Ψ symmetrisch. Welche Art von Statistik bei den Quarks vorliegt, ist noch nicht bekannt. Siehe dazu Abschnitt 8).

Dann muß die kombinierte SU(3)- und Spin-Funktion, ebenso wie beim {10}, auch beim {8} vollständig symmetrisch gegen Vertauschung irgend zweier der Quarks sein.

Der Unterschied zum {10} resultiert daraus, daß wir beim {8} nun den Gesamtspin $J_z = \frac{1}{2}$ für die 3 Quarks haben wollen. Wir konstruieren zum Beispiel die Wellenfunktion des Protons P, bestehend aus ppn, mit $J_z = +\frac{1}{2}$. Eine Möglichkeit dazu besteht darin, zunächst 2 Quarks zum Gesamtspin $S_{12} = 0$ zu kombinieren; das gibt die (antisymmetrische) Singulett-Spinfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\uparrow - \downarrow\downarrow) \quad (S_{12} = 0)$$

Damit die Gesamtfunktion symmetrisch wird, muß die zugehörige SU(3)-Funktion ebenfalls antisymmetrisch sein; die einzige Möglichkeit hierzu, unter Benutzung der p und n Quarks, ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (pn - np) \quad (\text{Isospin } I_{12} = 0)$$

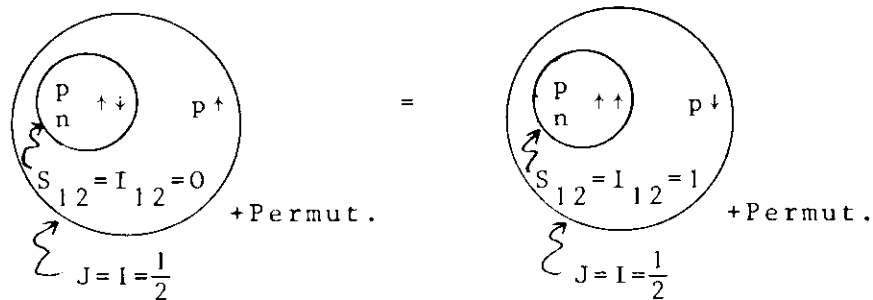
Wir kombinieren beides in eine Spin- und SU(3)-Funktion und fügen das dritte Quark (das weitere p) mit Spin \uparrow hinzu:

$$(\hat{p}\hat{n} - \hat{p}\hat{n} - \hat{n}\hat{p} + \hat{n}\hat{p})\hat{p}.$$

Der Faktor in Klammern ist jetzt vollständig symmetrisch gegen Vertauschung des 1. und 2. Quarks. Um aber auch Symmetrie gegen Vertauschung des 2. und 3. Quarks, sowie des 3. und 1. Quarks zu erreichen, addieren wir die durch diese Vertauschungen entstehenden Linearkombinationen hinzu und erhalten so die vollständig symmetrische Wellenfunktion des Protons (mit $\frac{1}{\sqrt{18}}$ als Normierungsfaktor):

$$\begin{aligned} |P, J_z = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ & 2|\hat{p}\hat{p}\hat{n}\rangle + 2|\hat{p}\hat{n}\hat{p}\rangle + 2|\hat{n}\hat{p}\hat{p}\rangle \\ & - |\hat{p}\hat{p}\hat{n}\rangle - |\hat{p}\hat{n}\hat{p}\rangle - |\hat{n}\hat{p}\hat{p}\rangle \\ & - |\hat{p}\hat{p}\hat{n}\rangle - |\hat{p}\hat{n}\hat{p}\rangle - |\hat{n}\hat{p}\hat{p}\rangle \} \end{aligned} \quad (9)$$

Alternativ hätten wir die 2 ersten Quarks zum Gesamtspin $S_{12}=1$ kombinieren und dann mit dem 3. Quark zu $J=\frac{1}{2}$ zusammensetzen können, um anschließend die gesamte Funktion wie vorher zu symmetrisieren. Dabei hätten wir schließlich die gleiche Wellenfunktion erhalten.*



Struktur des Protons mit $J_z=\frac{1}{2}$

Vergleich zwischen $|P, J_z=\frac{1}{2}\rangle$ und $|\Delta^+, J_z=\frac{1}{2}\rangle$: Beide sind vollständig symmetrisch gegen Vertauschung irgend zweier Quarks. Aber $|\Delta^+, J_z=\frac{1}{2}\rangle$ ist sogar vollständig symmetrisch gegen Vertauschung nur der Spins, oder nur der Art, des j-ten und k-ten Quarks; $|P, J_z=\frac{1}{2}\rangle$ dagegen nur bei gleichzeitiger Vertauschung von Spin und Art der Quarks. Spin- und SU(3)-Anteil von $|P, J_z=\frac{1}{2}\rangle$ allein sind weder völlig symmetrisch noch antisymmetrisch; man nennt sie daher "gemischt symmetrisch". Erst ihre Kombination ergibt eine völlig symmetrische Funktion.

Wegen dieser gemischten Symmetrie kann man aus dem Proton durch Ersetzen des n durch ein p keinen ppp Zustand mit $J=\frac{1}{2}$ aufbauen; man erhält bei diesem Versuch nur eine identisch verschwindende Wellenfunktion! Dies ist der Grund für das Fehlen der "Ecken" (die ja eine symmetrische SU(3)-Funktion haben) beim Oktett.

* Denn nach Symmetrisierung gibt es nur zwei linear unabhängige Zustände $\text{Sym}(\hat{p}\hat{p}\hat{n})$ (= Summe aller 6 Permutationen von $\hat{p}\hat{p}\hat{n}$) und $\text{Sym}(\hat{p}\hat{p}\hat{n})$, und eine Linearkombination davon liegt im Dekuplett ($|\Delta^+, J_z=1/2\rangle \propto \text{Sym}(\hat{p}\hat{p}\hat{n}) + \text{Sym}(\hat{p}\hat{p}\hat{n})$), so daß für das Oktett nur die eine dazu orthogonale Möglichkeit bleibt ($|\Delta^+, J_z=1/2\rangle \propto \text{Sym}(\hat{p}\hat{p}\hat{n}) - \text{Sym}(\hat{p}\hat{p}\hat{n})$).

Für die Wellenfunktion des Neutrons findet man auf die gleiche Weise*

$$\begin{aligned}
 |N, J_z = \frac{1}{2}\rangle = & - \frac{1}{\sqrt{18}} \{ 2|\hat{n}\hat{n}\hat{p}\rangle + 2|\hat{n}\hat{p}\hat{n}\rangle + 2|\hat{p}\hat{n}\hat{n}\rangle \\
 & - |\hat{n}\hat{p}\hat{p}\rangle - |\hat{n}\hat{p}\hat{n}\rangle - |\hat{p}\hat{n}\hat{n}\rangle \\
 & - |\hat{p}\hat{n}\hat{p}\rangle - |\hat{n}\hat{p}\hat{p}\rangle - |\hat{p}\hat{n}\hat{p}\rangle \} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Für $pn\lambda$ jedoch erhält man 2 verschiedene Wellenfunktionen, weil jetzt drei linear unabhängige Zustände $\text{Sym}(\hat{p}\hat{p}\hat{\lambda})$, $\text{Sym}(\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda})$, $\text{Sym}(\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda})$ zur Verfügung stehen, aus denen noch zwei zu ihrer Summe ($\propto \sum^0$ im Dekuplett) orthogonale Linearkombinationen gebildet werden können. Um die richtigen Spins und Isospins zu bekommen, gehen wir so vor:

(a) Wenn wir zunächst 2 Quarks zu $S_{12}=0$ zusammensetzen und dann mit dem dritten Quark zu $J=\frac{1}{2}$ kombinieren (und dann noch die durch Vertauschung von 2 \leftrightarrow 3 und 3 \leftrightarrow 1 entstehenden Linearkombinationen zur Gesamtsymmetrisierung addieren), bekommen wir die Funktion

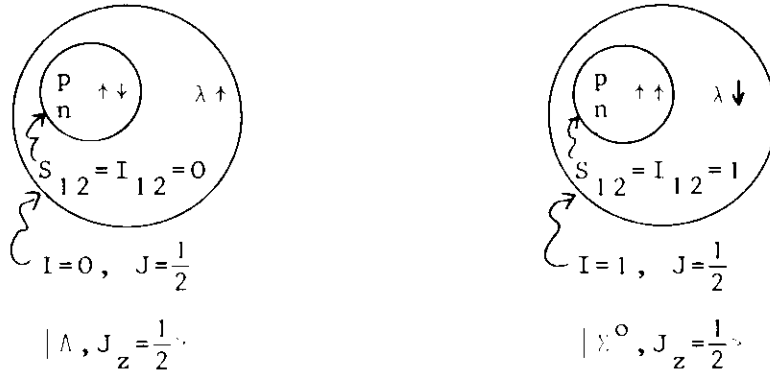
$$\begin{aligned}
 |\Lambda, J_z = \frac{1}{2}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{12}} \{ |\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda}\rangle - |\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda}\rangle - |\hat{n}\hat{\lambda}\hat{p}\rangle + |\hat{n}\hat{\lambda}\hat{p}\rangle - |\hat{\lambda}\hat{p}\hat{n}\rangle + |\hat{\lambda}\hat{p}\hat{n}\rangle \\
 & + |\hat{\lambda}\hat{n}\hat{p}\rangle - |\hat{\lambda}\hat{n}\hat{p}\rangle - |\hat{n}\hat{p}\hat{\lambda}\rangle + |\hat{n}\hat{p}\hat{\lambda}\rangle + |\hat{p}\hat{\lambda}\hat{n}\rangle - |\hat{p}\hat{\lambda}\hat{n}\rangle \} \quad (11)
 \end{aligned}$$

(b) Zusammensetzung von 2 Quarks zu $S_{12}=1$ mit anschließender Addition des 3ten Quarks zu $J=\frac{1}{2}$, gibt (nach Gesamtsymmetrisierung) jetzt aber eine von der obigen verschiedene Wellenfunktion:

$$\begin{aligned}
 |\Sigma^0, J_z = \frac{1}{2}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{36}} \{ 2|\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda}\rangle + 2|\hat{n}\hat{p}\hat{\lambda}\rangle + 2|\hat{p}\hat{\lambda}\hat{n}\rangle + 2|\hat{n}\hat{\lambda}\hat{p}\rangle + 2|\hat{\lambda}\hat{n}\hat{p}\rangle + 2|\hat{\lambda}\hat{p}\hat{n}\rangle \\
 & - |\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda}\rangle - |\hat{p}\hat{n}\hat{\lambda}\rangle - |\hat{n}\hat{p}\hat{\lambda}\rangle - |\hat{n}\hat{p}\hat{\lambda}\rangle - |\hat{p}\hat{\lambda}\hat{n}\rangle - |\hat{p}\hat{\lambda}\hat{n}\rangle \\
 & - |\hat{n}\hat{\lambda}\hat{p}\rangle - |\hat{n}\hat{\lambda}\hat{p}\rangle - |\hat{\lambda}\hat{n}\hat{p}\rangle - |\hat{\lambda}\hat{n}\hat{p}\rangle - |\hat{\lambda}\hat{p}\hat{n}\rangle - |\hat{\lambda}\hat{p}\hat{n}\rangle \} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Diese beiden Funktionen sind orthogonal zueinander. Dies erklärt also das Auftreten von zwei verschiedenen $pn\lambda$ Zuständen im Oktett.

* Das Minuszeichen ergibt sich dabei automatisch; es entspricht auch der Isospin-Vorzeichen-Konvention. - Weitere Beispiele findet man explizit angegeben bei W. Thirring, Proc. 5th Internat. Universitätswochen in Schladming, 1965, S. 205



Struktur des Λ und Σ^0 des Oktetts

Man sieht sofort, daß diese beiden Zustände nicht identisch sind, da der eine den Gesamtisospin $I=0$, der andere $I=1$ hat (wegen $I_\lambda=0$).

Zusammenfassung: Die niedrigsten Zustände der Baryonen sind ein $\{8\}$ mit $J^P = \frac{1}{2}^+$ und ein $\{10\}$ mit $J^P = \frac{3}{2}^+$. Sie können als qqq -Zustände mit Bahndrehimpuls Null betrachtet werden; der beobachtete Drehimpuls J kommt also durch die Addition der Quarkspins zustande. Wäre die Wechselwirkung zwischen den Quarks spinunabhängig, dann hätten alle diese 56 Zustände (Spinzustände mitgezählt) die gleiche Bindungsenergie.

Massenaufspaltung des $\{8\}$: Wenn die Bindungsenergie E_B exakt unabhängig von der Art der Quarks wäre, d.h. die Massendifferenzen innerhalb des Oktetts der stabilen Baryonen auf dem Unterschied der Quarkmassen m_λ und $m_p = m_n$ beruhten, wäre

$$\begin{aligned}
 m_p &= 3m_p - E_B \\
 m_\Sigma &= m_\Lambda = 2m_p + m_\lambda - E_B \\
 m_\Xi &= m_p + 2m_\lambda - E_B
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt $m_\lambda - m_p = 180$ MeV, in qualitativer Übereinstimmung mit den beim Dekuplett gefundenen 146 MeV; ferner $m_\Lambda = m_\Sigma = \frac{m_p + m_\Xi}{2} = 1130$ MeV, was zwischen m_Λ und m_Σ liegt.

Tatsächlich ist $m_{\bar{u}} - m_{\bar{s}} = 75 \text{ MeV}$, das heißt die Brechung der SU(3)-Symmetrie (Störung der Gleichheit der Kräfte zwischen den verschiedenen Typen von Quarks) macht sich hier ziemlich stark bemerkbar. Die physikalische Ursache für den $u - s$ Massenunterschied ist bisher nicht bekannt. (Dagegen ist die Gell-Mann-Okubo Massenformel

$$m_p + m_{\bar{s}} = \frac{1}{2} (3m_{\bar{u}} + m_{\bar{d}}), \quad (13)$$

die auf einer speziellen aber naheliegenden Annahme über das Verhalten der symmetriebrechenden Kräfte beruht, ziemlich gut erfüllt.)

Beispiel für die Anwendung der Wellenfunktionen: Wir können nun z.B. die magnetischen Momente der Baryonen berechnen. Für qqq -Zustände ohne Bahndrehimpuls (also keine Bahnmomente) kommt das resultierende magnetische Moment allein durch die Eigenmomente der Quarks zustande:

$$\vec{\mu} = \sum_{i=1}^3 \vec{\mu}_i \quad (14)$$

Aus den Wellenfunktionen lesen wir ab, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten jedes Quarks in den Zuständen

	\hat{p}	\downarrow p	\hat{n}	\downarrow n	
sich wie	5/9	1/9	1/9	2/9	beim P
und	1/9	2/9	5/9	1/9	beim N

verhalten. Die Beiträge zu μ_z sind für diese 4 Zustände gleich

$$+\frac{2}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad +\frac{1}{3}$$

in Einheiten von μ_q (Tabelle I). Das resultierende μ_z wird also

$$\text{für das P: } \mu_P = 3 \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \right) \mu_q = \mu_q$$

$$\text{für das N: } \mu_N = 3 \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} \right) \mu_q = -\frac{2}{3} \mu_q$$

(Faktor 3 wegen der 3 Quarks!) Also

$$\mu_N / \mu_P = -2/3$$

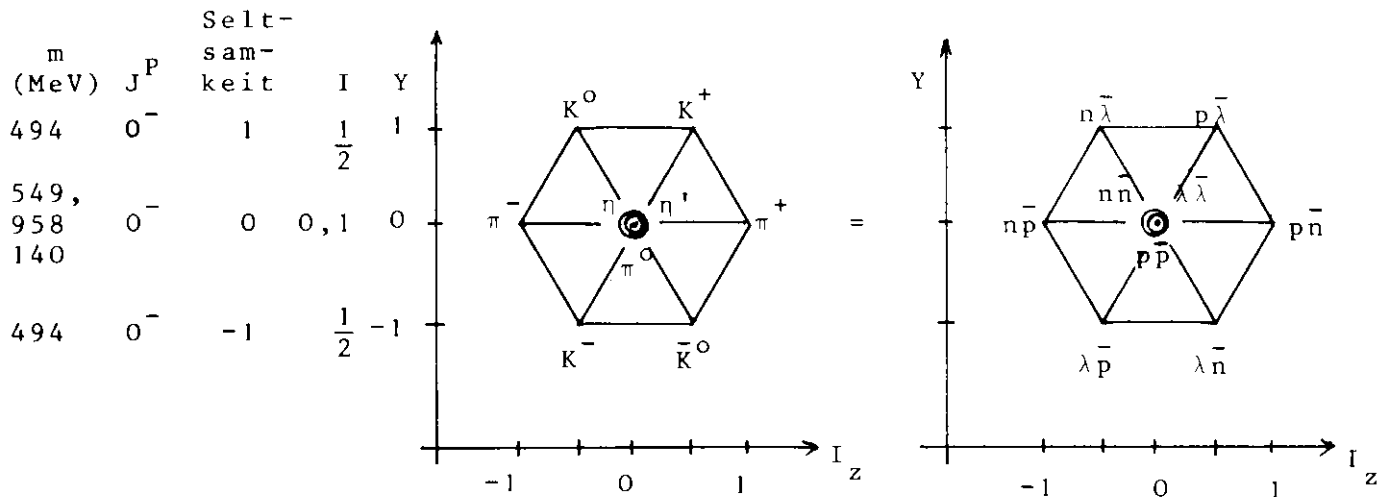
$$(\text{exp. } \frac{-1.91}{+2.78} = -0.68).$$

Ganz analog sagt das Quarkmodell die magnetischen Momente der anderen Baryonen des {8} und des {10} voraus.

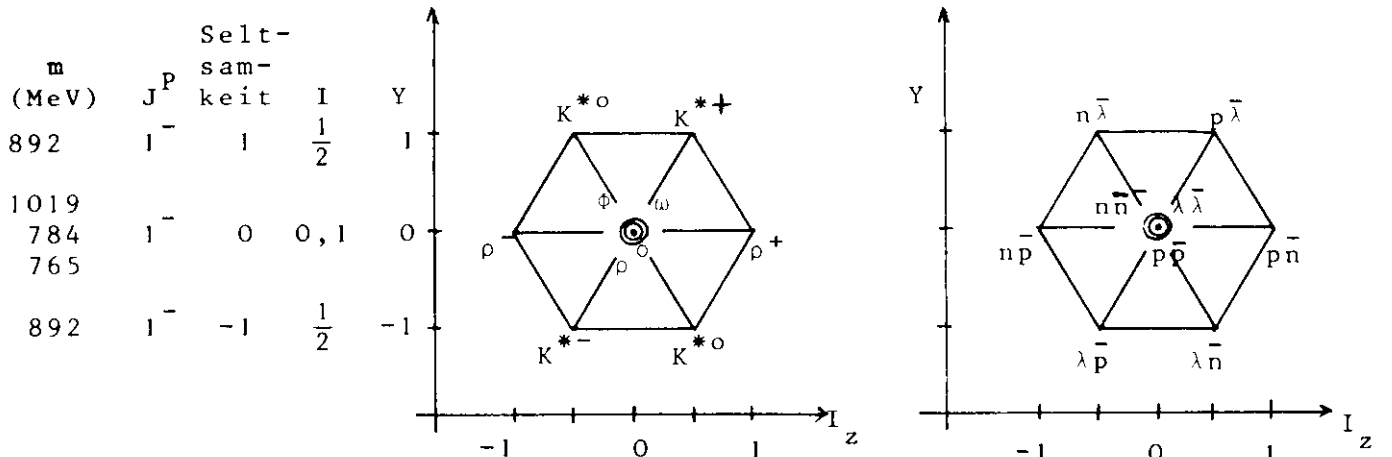
3. Die niedrigsten Mesonenzustände

Als niedrigste Mesonenzustände beobachtet man ein {1} und ein {8} mit $J^P = 0^-$, sowie 9 Mesonen ({1} + {8} mit starker Mischung, "Nonet") mit $J^P = 1^-$. Insgesamt sind dies $1 \times 1 + 1 \times 8 + 3 \times 9 = 36$ Zustände, Spinzustände eingerechnet.

Es gibt gerade 9 verschiedene $q\bar{q}$ -Kombinationen, so daß das Auftreten von je 9 verschiedenen Mesonen verständlich ist.



Die 9 beobachteten $J^P = 0^-$ Mesonen und ihr Quarkinhalt



Die 9 beobachteten $J^P = 1^-$ Mesonen und ihr Quarkinhalt

Spin und Parität: Die Wellenfunktion ist

$$\psi = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_{qm; \bar{q}\bar{m}} \quad (m, \bar{m} \text{ die } z\text{-Komponenten des Spins})$$

wobei $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ die räumliche Wellenfunktion des Grundzustands ist, mit Bahndrehimpuls $L=0$ (S-Wellenzustand). Das ergibt negative Parität, da Teilchen und Antiteilchen bei halbzahligen Spin entgegengesetzte innere Paritäten haben.

Die möglichen Spinwellenfunktionen für 2 Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen sind (vgl. S. 6).

J	J_z		
$(\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2)$	0	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$ Singulett
	1	$\left\{ \begin{array}{l} +1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \uparrow\uparrow \\ \frac{\sqrt{1}}{2}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ \downarrow\downarrow \end{array} \right\}$ Triplett

(15)

Das erklärt also ganz zwanglos die beobachteten Quantenzahlen $J^P = 0^-$ und $J^P = 1^-$.

Damit werden die Wellenfunktionen für SU(3) und Spin:

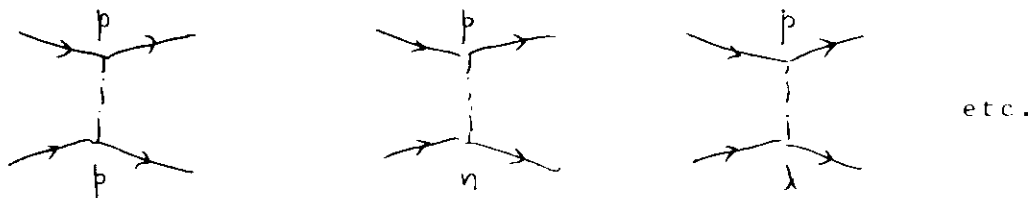
$$\begin{aligned}
 |\rho^-, J_z = +1\rangle &= |\hat{n}\hat{p}\rangle \\
 |\rho^+, J_z = 0\rangle &= \frac{\sqrt{1}}{2}(|\hat{p}\hat{u}\rangle + |\hat{p}\hat{d}\rangle) \\
 |\pi^+\rangle &= \frac{\sqrt{1}}{2}(|\hat{p}\hat{u}\rangle - |\hat{p}\hat{d}\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

etc.

Das einzige Problem sind jetzt nur noch die 3 zusammenfallenden Zustände im Mittelpunkt $Y = I_z = 0$. Die Fragen, die wir nun untersuchen wollen, sind:

- Was ist die genaue Quarkzusammensetzung der Zustände mit $Y = I_z = 0$?
- Wieso zerfallen die 9 Zustände in {8} + {1}?
- Wieso haben wir starke Mischung zwischen {8} und {1} Zuständen bei den $J^P = 1^-$, aber nicht bei den $J^P = 0^-$ Mesonen?

Wir gehen zunächst wieder von unserer fundamentalen Annahme aus, daß die Bindungsenergie zwischen Quarks unabhängig ist von der Art der beteiligten Quarks. Wir denken uns die Kräfte zwischen den Quarks durch den Austausch eines (hypothetischen) Feldquants vermittelt:

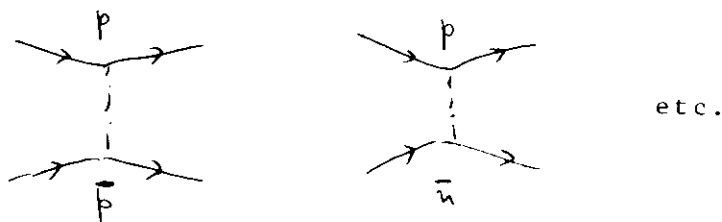


Wir kennen die Natur dieses Feldes nicht; es ist dies nur ein Modell, mittels dessen wir uns einige Konsequenzen der fundamentalen Annahme über die Art-Unabhängigkeit der Quarkkräfte überlegen wollen.

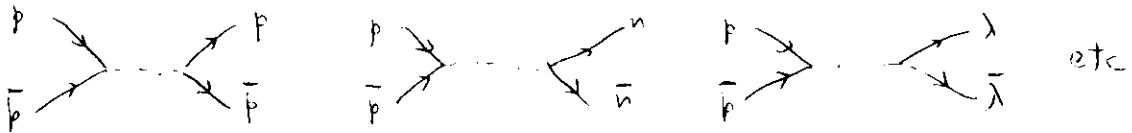
Das einfachste Beispiel für eine denkbare (aber sicher übersimplifizierte) Wechselwirkung zwischen Quarks, die unserer fundamentalen Annahme genügt, ist dann durch folgende Annahmen über das ausgetauschte Feldquant gegeben:

- Es gibt nur eine Art von Feldquant. (Dann muß es $I=0$ und $Y=0$ (Ladungsschwerpunkt!) und damit auch $Q=0$ (Gell-Mann-Nishijima) haben.)
- Das Feldquant hat die gleiche Wechselwirkung mit jedem der 3 Quarks.

Dann sind die Kräfte zwischen Quarks also unabhängig von der Art der Quarks. Das gleiche Feld vermittelt auch die $q\bar{q}$ -Wechselwirkung:



Aber für $p\bar{p}$, $n\bar{n}$ und $\lambda\bar{\lambda}$ Wechselwirkung haben wir zusätzlich die Möglichkeit der Annihilation mit anschließender Paarbildung:



Hier ist zu beachten, daß aus dem durch Annihilation entstandenen Feldquant schließlich mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein $p\bar{p}$, $n\bar{n}$ oder $\lambda\bar{\lambda}$ Paar entsteht! Deshalb ist die Kombination $\frac{1}{3}p\bar{p}$ plus $\frac{1}{3}n\bar{n}$ plus $\frac{1}{3}\lambda\bar{\lambda}$ oder, als Wellenfunktion,

$$|n'\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|p\bar{p}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|n\bar{n}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\lambda\bar{\lambda}\rangle \quad (17)$$

(wir lassen den stets gleichen Spinanteil hier immer fort) ausgezeichnet: Sie geht, bei einer solchen Vernichtungswechselwirkung, wieder in sich selbst über. Dagegen kann man 2 andere, dazu orthogonale Linearkombinationen finden, nämlich

$$|\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|p\bar{p}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|n\bar{n}\rangle \quad (18)$$

und
$$|\eta\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\lambda\bar{\lambda}\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}|p\bar{p}\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}}|n\bar{n}\rangle, \quad (19)$$

bei denen sich offensichtlich für die Vernichtungswechselwirkung die verschiedenen entstehenden Beiträge gerade gegenseitig aufheben. Bei diesen trägt daher, ebenso wie für die 6 "äußeren" Zustände des Oktetts (die sich wegen $Q=0$ nicht in das Feldquant vernichten können), die Vernichtungswechselwirkung nicht zur Bindungsenergie bei.

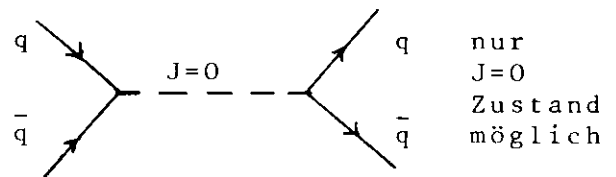
Daher gehören π^0 und η zum Oktett, während die Linearkombination η' ein Singulettzustand ist, für den man im allgemeinen eine von den Oktettzuständen verschiedene Bindungsenergie erwarten wird. Die als π^0 bezeichnete Linearkombination enthält, wie das π^+ und π^- , kein λ -Quark, und stellt daher den das Pion-Isospin-Triplett vervollständigenden mittleren Zustand dar.

Die Linearkombinationen für ω_1 , ρ^0 und ϕ_8 (siehe Abschnitt 4) sind natürlich, bis auf die Spinfunktion, die gleichen wie für η' , π^0 und η .

Wir machen nun eine noch weitergehende Annahme über die Quark-Antiquark-Wechselwirkung: Wir nehmen an, die $q\bar{q}$ -Wechselwirkung sei in niedrigster Näherung spin-unabhängig.

In unserem einfachsten Modell beschreiben wir dies durch ein Feldquant vom Spin Null. Dann ergibt sich sofort die Konsequenz für die Mesonen

mit $J=1$, daß zu ihren Bindungskräften wegen Drehimpulserhaltung die $q\bar{q}$ -Vernichtung in ein Feldquant



nicht beiträgt. Daher haben hier das {8} und das {1} die gleiche Bindungsenergie; sie bilden also tatsächlich ein Nonet.

Der einzige der $q\bar{q}$ -Zustände, der in dieser Spinunabhängigkeits-Näherung noch durch abweichende Bindungsenergie ausgezeichnet ist, ist also der Singulettzustand {1} mit $J^P=0^-$, d.h. das η' -Meson. Die übrigen 35 Zustände (Spins mitgezählt) haben dann in dieser Näherung alle die gleiche Bindungsenergie*. Dies ist die Ursache der starken Singulett-Oktett-Mischung bei den $J^P=1^-$ Mesonen (siehe Abschnitt 4).

Massenaufspaltung der Mesonen-Oktetts:

Auf Grund der Massendifferenz der Quarks ist

$$m_\pi = 2m_p - E_B$$

$$m_K = m_{\bar{K}} = m_p + m_\lambda - E_B$$

$$m_\eta = \frac{2}{3} \cdot 2m_\lambda + \frac{1}{3} \cdot 2m_p - E_B$$

(da das η mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ein $\lambda\bar{\lambda}$ -Zustand, und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ ein Zustand aus $p\bar{p}$ oder $n\bar{n}$ ist). Eliminiert man hieraus m_λ , m_p und E_B , so erhält man

$$4m_K = 4m_{\bar{K}} = 3m_\eta + m_\pi$$

* Diese einfache, anschauliche Plausibilitätserklärung für das Zerfallen der 36 Zustände in ein Singulett plus 35-plette bei spinunabhängiger $q\bar{q}$ -Wechselwirkung versagt, falls wir $q\bar{q}$ -Zustände mit Bahndrehimpuls $L \neq 0$ betrachten. Die Zerlegung $36 = 1 + 35$ bleibt trotzdem allgemein richtig, da sie nur durch die Spineigenschaften der Kräfte bewirkt wird und mit möglichen Bahndrehimpulsen nichts zu tun hat.

Man glaubt aber, es sei besser, in dieser Formel an Stelle der Massen m der Mesonen die Massenquadrate m^2 zu benutzen. Die Gründe dafür sind:

- Es stimmt besser.
- Die Bewegungsgleichung für Baryonen (Dirac-Gleichung) enthält m als fundamentalen Parameter, die für Bosonen (Klein-Gordon-Gleichung) dagegen enthält m^2 . Das hat zur Folge, daß in alle Theorien für Bosonen immer m^2 (statt m) direkt eingeht.
- Verschiedene, mehr oder weniger plausible Modelle legen es ebenfalls nahe.

Damit ergibt sich die Gell-Mann-Okubo (quadratische) Massenformel

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2 \quad (20)$$

oder

$$m_\eta^2 = \frac{m_K^2 + m_\pi^2}{2} + \frac{5}{6} (m_K^2 - m_\pi^2). \quad (20')$$

Hiernach wurde $m_\eta = 567$ MeV vorhergesagt; tatsächlich ist $m_\eta = 549$ MeV. Eine gewisse Bestätigung für das Auftreten der Massenquadrate in den Massenformeln für Mesonen ist die Tatsache, daß die Größe

$$\delta = m_K^2 - m_\pi^2 \quad \text{bzw.} \quad m_{K^*}^2 - m_\rho^2, \quad (21)$$

die bei Benutzung der Massenquadrate dem $\lambda - \rho$ Quark-Massenunterschied entspricht, für alle Mesonenoktetts etwa gleich groß ist.

Für die $J^P = 1^-$ Mesonen erhält man für die Masse des dem η entsprechenden Teilchens ϕ_8 aus

$$4m_{K^*}^2 = 3m_{\phi_8}^2 + m_\rho^2 \quad (22)$$

den Wert $m_{\phi_8} = 930$ MeV, während $m_{\phi} = 1019$ MeV und $m_\omega = 784$ MeV. Dies zeigt uns die starke Oktett-Singulett-Mischung: Die beobachteten Mesonen ϕ und ω gehören beide teils dem Oktett, teils dem Singulett an. Dies diskutieren wir im folgenden Abschnitt.

4. $\phi\omega$ -Mischung

Wir betrachten die zum Oktett beziehungsweise Singulett gehörenden (hypothetischen) $J^P = 1^-$ Mesonen

$$\begin{aligned}
 |\phi_8\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{6}}(|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle) + \sqrt{\frac{2}{3}}|\lambda\bar{\lambda}\rangle \\
 |\omega_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}(|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle) + \sqrt{\frac{1}{3}}|\lambda\bar{\lambda}\rangle
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Sie haben vollständig gleiche Quantenzahlen B, Y, I, I_3, J^P .

Wir vernachlässigen für den Augenblick die Massendifferenzen der Quarks. Der physikalisch bedeutsame Unterschied zwischen diesen beiden $q\bar{q}$ -Zuständen besteht dann nur darin, daß die Bindungskräfte verschieden sind (Vernichtungswechselwirkung nur beim Singulettzustand $|\omega_1\rangle$); sie sind also Eigenzustände des Energieoperators mit verschiedenen Eigenwerten (Massen).

Was passiert nun, wenn die Bindungskräfte nahezu spin-unabhängig sind? Wie wir in 3. sahen, werden dann die Bindungsenergien und damit die Massen der beiden Zustände gleich groß. D.h. die beiden Zustände $|\phi_8\rangle$ und $|\omega_1\rangle$ sind dann vollständig entartet und unterscheiden sich durch keine ihrer physikalischen Eigenschaften mehr. Jede Linearkombination dieser beiden Zustände hat dann ebenfalls die identischen physikalischen Eigenschaften wie $|\phi_8\rangle$ und $|\omega_1\rangle$ selbst, so daß $|\phi_8\rangle$ und $|\omega_1\rangle$ in keiner Weise mehr physikalisch vor ihren Linearkombinationen ausgezeichnet sind.

Jetzt berücksichtigen wir die Massendifferenz $m_\lambda > m_p = m_n$ der Quarks. Dann sind nicht mehr $|\phi_8\rangle$ und $|\omega_1\rangle$ Eigenzustände des Energieoperators, sondern vielmehr sind es die Linearkombinationen

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_8\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|\omega_1\rangle = |\lambda\bar{\lambda}\rangle \\
 |\omega\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}}|\phi_8\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\omega_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

mit den Eigenwerten $m_\phi = 2m_\lambda - E_B$, $m_\omega = 2m_p - E_B$.

Im realistischen Fall gibt es sowohl Massendifferenzen zwischen den Quarks, als auch eine Spin-Abhängigkeit der $q\bar{q}$ -Bindungskräfte. Die wahren Eigenzustände des Energieoperators, d.h. die beobachteten "stationären" Zustände*, sind daher weder

* Diese Zustände sind natürlich nicht wirklich stationär, da die $J^P=1^-$ Mesonen instabil sind. Aber wir sehen im Augenblick von den Zerfällen (bei denen schließlich mindestens zwei $q\bar{q}$ -Paare auftreten) ab und behandeln die $J^P=1^-$ Mesonen wie gebundene reine $q\bar{q}$ -Zustände.

mit den oben angegebenen "idealen" Linearkombinationen $|\phi\rangle$ und $|\omega\rangle$, noch mit $|\phi_8\rangle$ und $|\omega_1\rangle$ exakt identisch. Vielmehr wird sich irgendeine andere Linearkombination, die wir im allgemeinen Fall in der Form

$$|\phi\rangle = \cos\theta |\phi_8\rangle + \sin\theta |\omega_1\rangle \quad (25)$$

$$|\omega\rangle = -\sin\theta |\phi_8\rangle + \cos\theta |\omega_1\rangle$$

schreiben können, einstellen. Für den angegebenen "idealen" Fall wäre

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{1}}{2} = 35^\circ.$$

Empirisch finden wir folgendes:

Aus

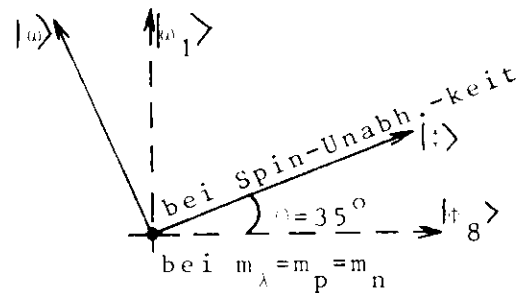
$$|\phi_8\rangle = \cos\theta |\phi\rangle - \sin\theta |\omega\rangle$$

folgt $m_{\phi_8} = (\cos^2\theta) m_\phi + (\sin^2\theta) m_\omega$; dies wird wieder als für die

Massenquadrate gültig angenommen:

$$m_{\phi_8}^2 = \cos^2\theta m_\phi^2 + \sin^2\theta m_\omega^2 \quad (26)$$

Mit $m_{\phi_8} = 930$ MeV aus der Massenformel und den beobachteten Werten von m_ϕ und m_ω ergibt sich $\theta = 40^\circ \pm 1^\circ$, relativ nahe beim idealen Mischungswinkel $\theta = 35^\circ$ für spinunabhängige $q\bar{q}$ -Wechselwirkung.



5. Höhere (angeregte) $q\bar{q}$ -Zustände

5.1 Rotationsanregung

Wie bei Molekülen erwarten wir angeregte Rotationszustände mit Bahndrehimpuls L . Der Gesamt-Spin

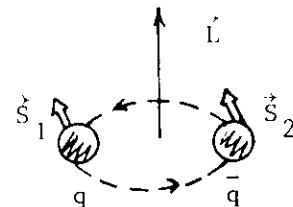
$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \quad \text{mit } S = 0, 1$$

addiert sich mit \vec{L} zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Wegen der entgegengesetzten inneren Paritäten von q und \bar{q} ist die Parität dieser Mesonzustände

$$P = (-1)^{L+1} \quad (27)$$



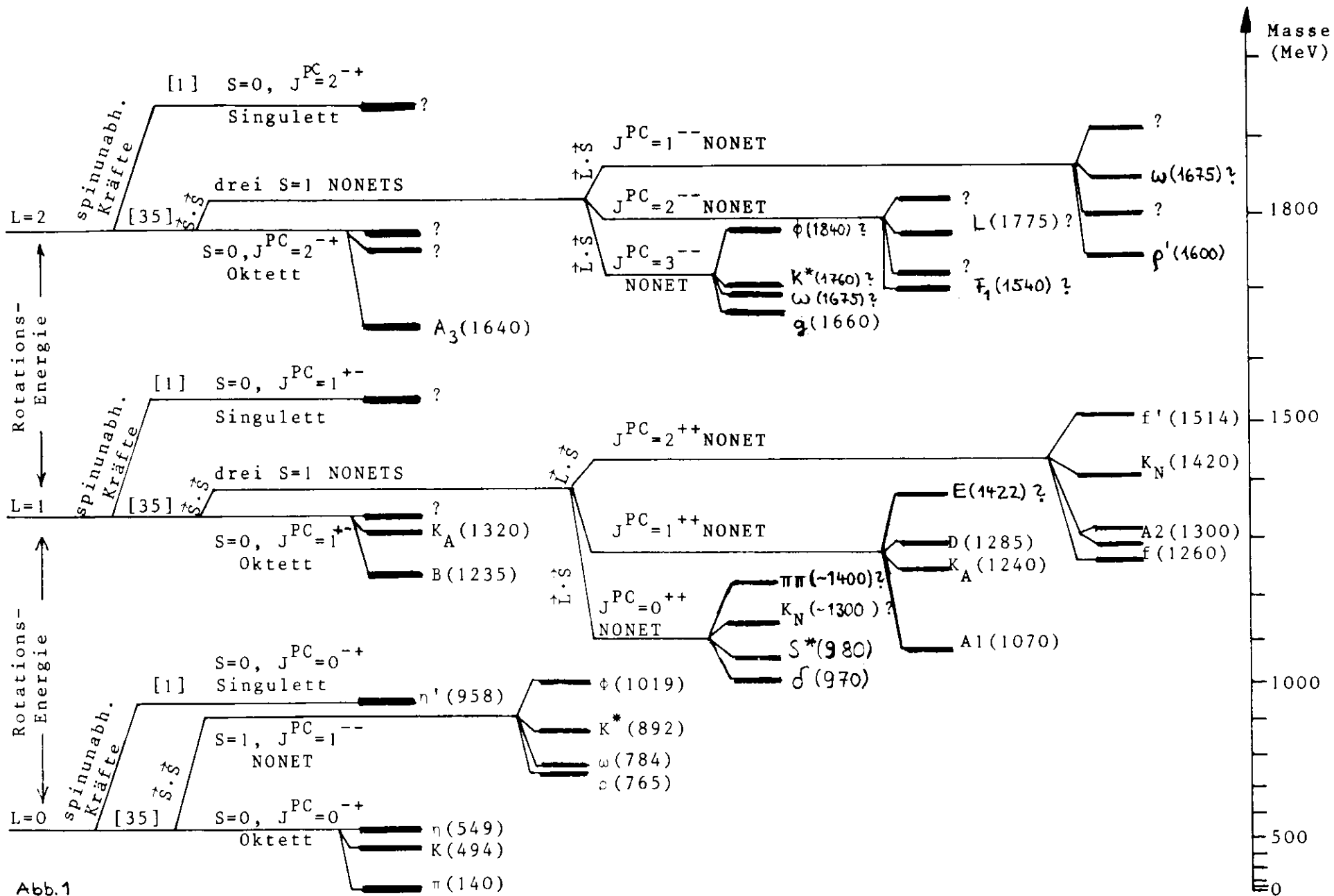


Abb. 1
 Termschema der $(q\bar{q})$ -Rotationszustände, schematisch und vereinfacht. Skala linear in $(\text{Masse})^2$.
 S =Gesamtspinquantenzahl. Aufspaltung durch Quarkspin-unabhängige Kräfte, durch Spin-Spin-Wechselwirkung ($\vec{S} \cdot \vec{S}$), durch Spin-Bahn-Kopplung ($\vec{L} \cdot \vec{S}$) und durch Massendifferenz der Quarks.

Ferner ist für die neutralen nicht-seltsamen $q\bar{q}$ -Zustände, die ja Eigenzustände von C sind,

$$C = -(-1)^L (-1)^{S+1} = (-1)^{L+S} . \quad (28)$$

Für jedes $L > 0$ erhalten wir für $S = 0$ wie vorher ein $\{8\}$ und $\{1\}$ mit Spin $J = L$. Aber für $S = 1$ bekommen wir jetzt drei verschiedene Nonets, je eines für die 3 möglichen Werte $L - 1$, L , und $L + 1$ von J . Die Massen dieser 3 Nonets sind voneinander verschieden infolge von Spin-Bahn-Kräften, d.h. Termen proportional zu $\vec{L} \cdot \vec{S}$ im Energieoperator.*

Das resultierende Energieniveauschema, zusammen mit der Zuordnung zu den beobachteten Mesonen, ist bis zu $L = 2$ in der Abbildung 1 gezeigt. Diese Abbildung faßt die heute bekannten Zuordnungen zusammen. Darüber hinaus sind einige schwerere Mesonen als die dort aufgeführten gefunden worden; man vermutet, daß sie zu den Zuständen der höheren Rotationsniveaus gehören.

5.2 Vibrationsanregung

Im Prinzip sollten auch Vibrationszustände im $q\bar{q}$ -System möglich sein, in denen die Quarks zu internen radialen Schwingungen verschiedener Ordnung angeregt sind. (Die Rotationsniveaus der Abbildung 1 sind gewissermaßen die Feinstruktur und Hyperfeinstruktur des niedrigsten Vibrationszustands; analoge Strukturen sollte es auch für angeregte Vibrationszustände geben, was zu Mesonen mit den gleichen Quantenzahlen, aber höheren Massen, führen sollte.)

Bisher sind solche Vibrationszustände nicht mit Sicherheit nachgewiesen. Ein möglicher Kandidat ist das $E(1422)$ Meson. Falls es $J^{PC} = 0^{-+}$ hat, wie es möglich erscheint, hätte man 10 Mesonen mit $J^{PC} = 0^{-+}$, während nur insgesamt 9 davon in den Rotationsniveaus Platz finden können. Das $E(1422)$ wäre dann als ein im ersten angeregten Vibrationszustand befindliches π anzusehen. Aber - wo ist dann das angeregte Pion?

* Beim Aufbau der $q\bar{q}$ -Zustände können wir nicht, wie bei den qqq -Zuständen der Baryonen, mit Symmetrieeigenschaften bei Vertauschung von q 's argumentieren, da q und \bar{q} ja nicht identisch sind. An die Stelle von Symmetrieaussagen über die Wellenfunktion treten daher hier die C -Paritäts-Eigenschaften.

Bei $L=1$ tritt, zusätzlich zu den uns bereits beim Grundzustand begegneten $\{10\}$ und $\{8\}$, noch ein Singulett $\{1\}$ mit vollständig antisymmetrischer $SU(3)$ -Funktion auf:

$$|A_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|pn\lambda\rangle + |n\lambda p\rangle + |\lambda pn\rangle - |\lambda np\rangle - |np\lambda\rangle - |p\lambda n\rangle) \quad (29)$$

(wechselt das Vorzeichen bei Vertauschung von irgend zwei Quarks). Dies ist ein Singulett, da es nur existieren kann für einen Zustand aus $pn\lambda$, aber nicht für irgendeine andere 3-Quark-Konfiguration (da diese Wellenfunktion für 2 identische Quarks stets verschwindet). Es muß also auch ein Isospin-Singulett sein, also die Quantenzahlen $I=Y=Q=0$ wie das gewöhnliche Λ haben.

Die möglichen J^P (letzte Spalte von Tabelle II) folgen natürlich aus

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S};$$

die Zustände zu verschiedenen J spalten sich wieder auf (aber offenbar bei den Baryonen nur relativ schwach) durch Spin-Bahn-Kräfte.

Die experimentelle Situation ist, zusammen mit dem Niveauschema, in der Abbildung 2 gezeigt. Zu jedem der erwarteten Multipletts für $L=1$ ist bereits mindestens ein Teilchen gefunden worden.

Der nächst-höhere angeregte Rotationszustand sollte $L=2$ und positive Parität haben. Wegen der Vorzeichenerhaltung bei Vertauschung eines geraden Bahndrehimpulszustands sind die Symmetrie-Eigenschaften der räumlichen Wellenfunktion genauso wie für den $L=0$ Grundzustand. Daher erwarten wir, wie im Grundzustand, Dekupletts mit $S=3/2$ und Oktetts mit $S=1/2$ (siehe Abbildung 2).

Danach folgt $L=3$ mit negativer Parität, wieder mit $\{10\}$, $\{8\}$, $\{8\}$ und $\{1\}$ wie bei $L=1$, etc. Die beobachteten Baryonen-Multipletts passen alle in dieses Schema.

Die Zuordnung wird allerdings etwas erschwert durch die Möglichkeit der Mischung zwischen den Λ 's des $S=1/2$ Oktetts und des $S=1/2$ Singuletts; ferner zwischen den beiden $\{8\}$ mit $S=1/2$ und $S=3/2$ und gleichem J^P .

6. Höhere Baryonzustände

Die bisher betrachteten Baryonzustände hatten positive Parität, was mit der Vorstellung in Einklang ist, daß die drei Quarks keinen Bahndrehimpuls haben. Als nächst höhere Anregungsstufe erwartet man Zustände mit $L = 1$; damit erhält man $J^P = \frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-, \frac{5}{2}^-$ und gerade solche Zustände werden auch bei etwas höheren Massen gefunden.

Mit der Einführung von einer Einheit des Bahndrehimpulses ist notwendig eine Änderung des Verhaltens der räumlichen Wellenfunktion unter Vertauschung zweier Quarks verbunden: Werden 2 Quarks in einer relativen p-Welle miteinander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen; in einer relativen s-Welle dagegen nicht. Die räumliche Wellenfunktion kann also weder vollständig symmetrisch noch vollständig antisymmetrisch sein; sie wird gemischt-symmetrisch.

Damit die Gesamtwellenfunktion stets ein definiertes Symmetrieverhalten hat, muß dann die SU(3)- und Spin-Wellenfunktion des L=1-Zustandes ebenfalls gemischt-symmetrisch werden.

In Tabelle II stellen wir die Möglichkeiten für den Aufbau einer total-symmetrischen (wie im L=0 Grundzustand) und einer gemischt-symmetrischen SU(3)- und Spinfunktion (wie für L=1 benötigt) zusammen. Man sieht, daß man bei L=0 ein 56-plet von SU(3)- und Spinzuständen erhält, bei L=1 ein 70-plet.*

Gesamt Spin S	Symm. der Spinfkt.	kombiniert mit SU(3)-Multipl.	Symm. der SU(3)-Funktion	Anzahl der Zustände	L	Mögliche J^P
3/2	symm.	{10}	symm.	$4 \times 10 = 40$	0	$\frac{3}{2}^+$ $\frac{1}{2}^+$
1/2	gemischt	{8}	gemischt	$2 \times 8 = \frac{16}{56}$		
3/2	symm.	{8}	gemischt	$4 \times 8 = 32$	1	$\frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-, \frac{5}{2}^-$
1/2	gemischt	{10}	symm.	$2 \times 10 = 20$		
		{8}	gemischt	$2 \times 8 = 16$		
		{1}	antisymm.	$2 \times 1 = \frac{2}{70}$		$\frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-$

Tabelle II. Aufbau der vollst. symm. (für L=0) und der gemischt-symmetrischen (für L=1) SU(3)- und Spin-Funktion für 3-Quark-Zustände.

* Dies sind natürlich SU(6)-Multipletts, da man hier einen Raum mit den 6 Basiszuständen $\hat{p} \hat{p} \hat{n} \hat{u} \hat{s} \hat{\lambda}$ betrachtet.

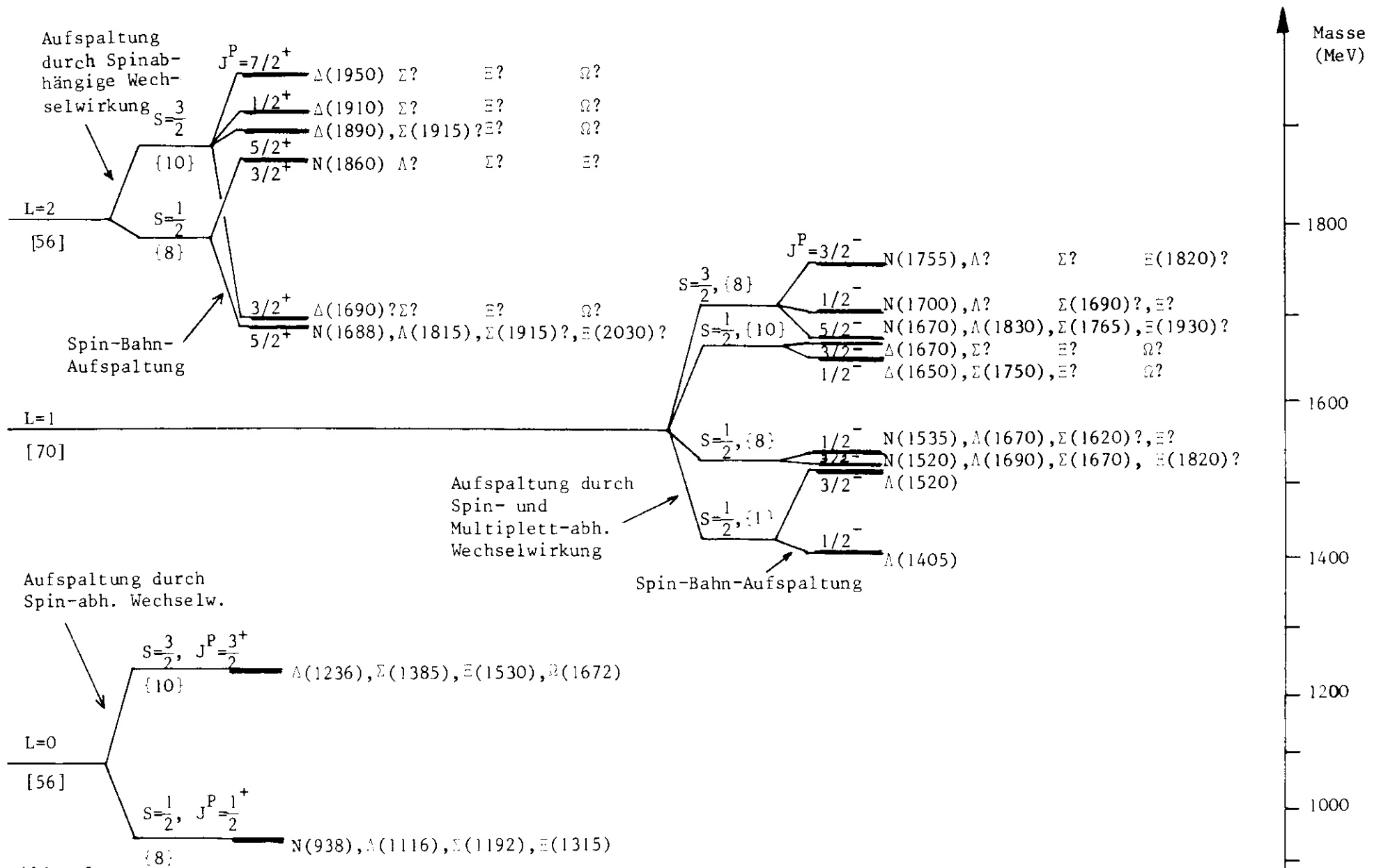


Abb. 2

Termschema der Baryonen-Rotationsniveaus, schematisch und vereinfacht. Skala linear in $(\text{Masse})^2$. S = Gesamtspinzahl der 3 Quarks. Aufspaltung innerhalb der Oktetts und Dekupletts nicht gezeichnet; eingezeichnete Masse der $\{8\}$ und $\{10\}$ ist die des nicht-seltamen Mitglieds (N bzw. Δ). Zustände, für die kein Massenwert angegeben ist, sind noch nicht gefunden.

Vibrationsniveaus sollten, ähnlich wie bei den Mesonen, auch hier grundsätzlich möglich sein. Die niedrigsten Vibrationszustände wären die zu Vibration angeregten $L=0$ -Zustände. Dies würde also ein $\{8\}$ und ein $\{10\}$ mit den gleichen Quantenzahlen $J^P = \frac{1}{2}^+$ und $J^P = \frac{3}{2}^+$ wie im Grundzustand des Baryons ergeben, nur mit höherer Masse.

Mögliche beobachtete Kandidaten für Vibrationszustände sind die folgenden:

J^P	Grundzustand	1. Vibrationsanregung	2. Vibrationsanregung
$\frac{1}{2}^+$	N(938)	N(1470)	N(1785)
$\frac{3}{2}^+$	Δ (1236)	Δ (1690)?	Δ (2160)?

7. Exotische Teilchen

Definition: Alle Teilchen, die nicht aus $q\bar{q}$ (Mesonen) beziehungsweise qqq (Baryonen) aufgebaut werden können. (Insbesondere sind die Quarks selber exotisch.)

Mesonen ($B=0$):

Wir unterscheiden 2 Arten exotischer Teilchen:

I. Art: Alle, die nicht in $\{8\}$ oder $\{1\}$ passen.

Beispiele: Resonanzen mit $|Q| = 2$.

II. Art: Teilchen mit

$$J^{PC}_n = 0^{--}; 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+} \dots (\text{"abnormales C"})$$

wo C_n die Ladungsparität des zum gleichen Isospin-Multiplett gehörenden neutralen Mesons ist (nur für das neutrale ist die Ladungsparität ja definiert). Die obigen Kombinationen lassen sich (vgl. Abb. 1) nicht aus $q\bar{q}$ aufbauen.*

* Für $q\bar{q}$ -Zustände ist (vgl. (28)) $C_n P = (-)^{S+1}$. Aus $q\bar{q}$ mit $S=0$ erhält man nun $J^P = 0^-, 1^+, 2^- \dots$ d.h. nur die abnormale Serie. Die normale Serie $J^P = 0^+, 1^-, 2^+ \dots$ hat also immer $S=1$; dafür ist dann aber stets $C_n P = +1$. Schließlich kann $J^P = 0^-$ nur mit $S=L=0$ erreicht werden; hier muß also $C_n P = -1$ sein.

Exotische Mesonen beider Arten müßten im Quarkmodell komplizierter Struktur haben, etwa $q\bar{q}q\bar{q}$.

Baryonen (B=1):

Exotisch sind diejenigen, welche nicht in {10}, {8} oder {1} passen.

Beispiele:

(a) Baryonresonanz (das sogenannte "Z") mit Seltsamkeit $=+1$, also $Y=+2$. Wäre beobachtbar als KN-Resonanz.

(b) Baryon mit $I=5/2$ (etwa $p\pi^+\pi^+$ oder $n\pi^-\pi^-$ Resonanz).

Solche Teilchen müßten im Quarkmodell etwa als $qqqq\bar{q}$ -Zustände beschrieben werden.

Bisher ist kein exotisches Teilchen mit Sicherheit nachgewiesen worden.* Diese Tatsache stellt das eindrucksvollste Argument für das Quarkmodell dar. Denn es gibt bisher keine andere überzeugende Erklärung dafür, warum gerade Teilchen mit diesen Quantenzahlen nicht beobachtet werden. Andererseits ist aber auch kein a priori Grund bekannt, weshalb gerade nur diese einfachen Quark-Konfigurationen $q\bar{q}$ und qqq zu metastabilen Zuständen führen.

8. Existenz und Eigenschaften der Quarks

Trotz der Erfolge des Quarkmodells wissen wir nicht, ob die Quarks als physikalische Teilchen existieren. Es könnte sein, daß sich aus unbekanntem Gründen die Hadronen nur so verhalten, als ob sie aus Quarks aufgebaut wären, und als ob die starken Wechselwirkungen zwischen den hypothetischen Quarks näherungsweise vom Typ des Quarks (p, n oder λ) unabhängig sind. Aus der bisherigen Jagd nach den Quarks ist nur klargeworden, daß ihre Masse (falls sie existieren) ≥ 3 GeV ist. Da es keine sichere theoretische Vorhersage für die Masse gibt, beweist das Nicht-Auffinden vielleicht niemals die Nichtexistenz der Quarks.

* Vor einiger Zeit glaubte man, den Zerfall $\Sigma^-(966) \rightarrow (4\pi)^-$ mit $J^P = 0^+$ gesehen zu haben. Demnach wäre $G = +1$, und bei $I = 1$ (sonst exotisch 1. Art!) folgte $C_n = (-1)^I G = -1$, also abnormales C. Inzwischen sieht es aber so aus, daß Σ^- in $\pi\pi$ zerfällt (also $G = -1$, $C_n = +1$ hat), wo dann π unter Verletzung der G-Erhaltung elektromagnetisch in 3π zerfallen kann.

Die Bindungsenergie der leichten Mesonen muß von der Größenordnung ≥ 10 GeV sein, um die Ruhemasse der Quarks fast zu kompensieren. Man kann nicht a priori erwarten, daß eine Dynamik, die zu derart starker Bindung führt, mit einem Potential in einer Schrödingergleichung beschrieben werden kann. Um so erstaunlicher ist es, daß die beobachteten Resonanzen zu den niedrigsten Zuständen in einem topfförmigen, tiefen $q\bar{q}$ -Potential mit Rotationsanregung passen. Wir kennen das Verhalten dieses Potentials nicht, und können daher auch nicht vorhersagen, wie die Folge der Vibrationsniveaus eines $q\bar{q}$ -Moleküls aussieht. Vor allem kennen wir natürlich keine dynamischen Gesetze, aus denen wir die Quark-Wechselwirkungen berechnen könnten; wir wissen nur, daß sie bei Anwendung auf Quark-Antiquark-Bindung eine Struktur haben müssen, die der einer Schrödingergleichung mit Potentialtopf ähnelt.

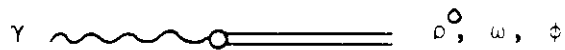
Bei der Betrachtung der Baryonen fallen noch weitere Schwierigkeiten auf: Es ist nicht klar, wieso gerade gebundene Zustände von qqq und $q\bar{q}$ auftreten, nicht aber von qq , oder $qqqq$, oder $qqqq\bar{q}$ (letzteres könnte z.B. einer Σ -Resonanz entsprechen). Außerdem ist auch die Statistik, der die Quarks gehorchen, nicht bekannt. Da sie halbzahligen Spin haben müssen, ist es plausibel anzunehmen, daß sie wie alle anderen Teilchen mit halbzahligem Spin Fermionen sind. Weil aber die $SU(6)$ -Funktion des Protons symmetrisch ist, müßte dann die räumliche Wellenfunktion antisymmetrisch mit $L = 0$ sein. Zwar gibt es in 3-Teilchen-Systemen solche Wellenfunktionen; aber die Quarkpaare darin haben Relativdrehimpulse $\neq 0$, und es ist nicht zu verstehen, warum der Grundzustand so kompliziert sein soll, während das Muster der Drehimpulsanregungen im Spektrum so einfach ist. Darum wird die Möglichkeit einer Parastatistik diskutiert, wonach auf eine mit den Prinzipien der allgemeinen Feldtheorie verträgliche Weise Fermionwellenfunktionen nicht antisymmetrisch zu sein brauchen. Physikalisch hat diese Hypothese Ähnlichkeit mit dem Quarkmodell von Han und Nambu, in dem es 3 Triplets von gewöhnlichen Fermiquarks gibt. Das Spektrum der möglichen Zustände wird dann reichhaltiger, aber man kann plausibel machen, daß gerade Oktett und Dekuplett am tiefsten liegen. Weil solche Auswege aus dem Dilemma bestehen, rechnet man heute viel in dem "symmetrischen Quark-Modell", bei dem einfach angenommen wird, daß die gesamte

Quark-Wellenfunktion symmetrisch ist. Der räumliche Grundzustand des Baryons ist dann eine vollständige S-Welle, und von den Anregungen können viele Eigenschaften aus der Annahme abgeleitet werden, daß die qq-Wechselwirkung einem harmonischen Oszillatorpotential in einer Schrödingergleichung entspricht.

Man baut also ein "naives Quarkmodell", d.h. man läßt - wie in diesen Vorlesungen - die Einwände gegen die Anwendung von Methoden aus der nichtrelativistischen Physik und gegen die Existenz von Quarks zunächst außer Acht. Wie wir gesehen haben, gibt das Modell die groben Züge richtig wieder, so daß man von einem Bohrschen Modell für die Hadronen sprechen kann.

9. Übungsaufgaben

(1) Das Photon kann direkt virtuell in die $J^P = 1^-$ Mesonen ρ^0 , ω , ϕ übergehen:

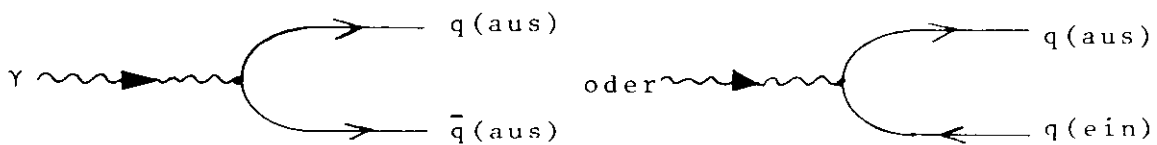


Zeige, daß (bei idealer $\phi\omega$ -Mischung) der entstehende Meson-Zustand ρ^0 's, ω 's und ϕ 's im Verhältnis

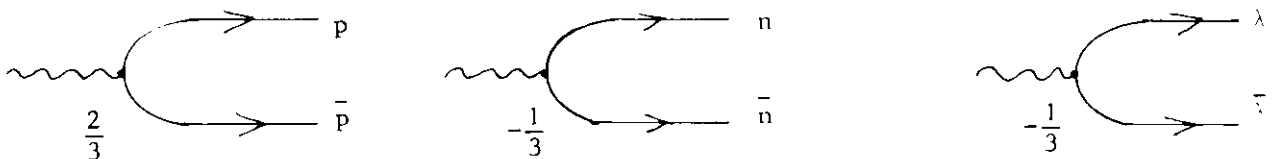
$$\rho^0 : \omega : \phi = 9 : 1 : 2$$

enthält.

Lösung: Im Quarkmodell bedeutet der Übergang $\gamma \rightarrow$ Meson eine Kopplung des Photons an $q\bar{q}$ -Zustände:



Das Photon koppelt an die Quarkladung und an das magnetische Moment. Da beide proportional zueinander sind (siehe Abschn. 1), ist das Verhältnis der Kopplung an $p\bar{p}$, $n\bar{n}$ und $\lambda\bar{\lambda}$ gleich dem Verhältnis der Quarkladungen:



Also entsteht ein Zustand

$$|\gamma\rangle \rightarrow \frac{2}{3}|p\bar{p}\rangle - \frac{1}{3}|n\bar{n}\rangle - \frac{1}{3}|\lambda\bar{\lambda}\rangle$$

oder, bei richtiger Normierung,

$$|\gamma\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}(2|p\bar{p}\rangle - |n\bar{n}\rangle - |\lambda\bar{\lambda}\rangle)$$

(da $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$!).

Nun ist ja (siehe Abschnitt 3. und 4.)

$$|\rho^0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|p\bar{p}\rangle - |n\bar{n}\rangle) \quad (\text{wie } \pi^0!)$$

$$|\omega\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle)$$

$$|\phi\rangle = |\lambda\bar{\lambda}\rangle$$

woraus durch Umkehrung

$$|p\bar{p}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\rho^0\rangle + |\omega\rangle)$$

$$|n\bar{n}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(-|\rho^0\rangle + |\omega\rangle)$$

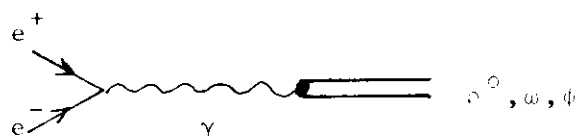
$$|\lambda\bar{\lambda}\rangle = |\phi\rangle$$

folgt. Damit erhalten wir die wichtige Zerlegung

$$|\gamma\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{1}{12}}(3|\rho^0\rangle + |\omega\rangle - \sqrt{2}|\phi\rangle) \quad (30)$$

Die beobachteten Wahrscheinlichkeiten für Übergänge $\gamma \rightarrow \rho^0, \omega, \phi$ sind natürlich proportional zu den Quadraten der Entwicklungskoeffizienten in (30).

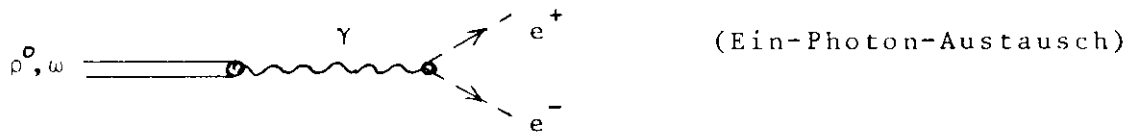
Das 9 : 1 : 2 Verhältnis läßt sich im Prinzip direkt bei Speicherring-Experimenten in der Reaktion



beobachten. Tatsächlich erhält man noch Korrekturen zu dem idealen Verhältnis infolge der SU(3)-Symmetriebrechung, die sich ja auch in der ω - ϕ -Massendifferenz zeigt.

(2) Man bestimme den Mischungswinkel θ der $J^P = 1^-$ Mesonen aus dem Verhältnis $\Gamma_{\rho^0 \rightarrow e^+e^-} / \Gamma_{\omega \rightarrow e^+e^-}$ der leptonischen Zerfallsbreiten des ρ^0 und ω Mesons.

Anleitung: Zeige zuerst, daß das Photon zu einem SU(3)-Oktett gehört. Ferner benutze das Modell



für die leptonischen Zerfälle. Benutze das Resultat der Aufgabe (1).

Lösung: Der an das γ gekoppelte Zustand von ρ^0, ω, ϕ von Aufgabe (1), nämlich

$$|\gamma\rangle = \sqrt{\frac{1}{12}}(3|\rho^0\rangle + |\omega\rangle - \sqrt{2}|\phi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|p\bar{p}\rangle - |n\bar{n}\rangle - |\lambda\bar{\lambda}\rangle)$$

kann zunächst zum $\{8\}$ oder $\{1\}$ (oder beiden) gehören. Tatsächlich ist er aber orthogonal zum Zustand $|\eta'\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}(|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle + |\lambda\bar{\lambda}\rangle)$ (siehe (17)), da $\langle \eta' | \gamma \rangle = \sqrt{\frac{1}{18}}(2 - 1 - 1) = 0$ ist. Also hat er keine Singulett-Komponente und muß daher ein reiner Oktett-Zustand sein. Explizit findet man aus (18) und (23) leicht, daß

$$|\gamma\rangle = -\frac{1}{2}|\phi_8\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|\rho^0\rangle$$

ist. Hieraus folgt (mit (25))

$$\langle \gamma | \rho^0 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \langle \gamma | \omega \rangle = -\sin\theta \langle \gamma | \phi_8 \rangle = \frac{1}{2} \sin\theta,$$

wo θ der ϕ - ω Mischungswinkel ist. Hieraus folgt

$$\frac{\Gamma_{\rho^0 \rightarrow e^+e^-}}{\Gamma_{\omega \rightarrow e^+e^-}} = \left(\frac{\sqrt{3}/2}{\frac{1}{2}\sin\theta} \right)^2 = \frac{3}{\sin^2\theta} = \frac{(0.60 + 0.08) \times 10^{-4} \times 125 \text{ MeV}}{(0.66 + 0.17) \times 10^{-4} \times 11.9 \text{ MeV}}$$

$$\longrightarrow \theta \approx 35^\circ$$

(3) Man bestimme die magnetischen Momente der Baryonresonanzen des Dekupletts, z.B. des $\Delta(1236)$, nach dem Quarkmodell.

Lösung: Da alle drei Spinvektoren parallel zueinander sind, addieren sich die magnetischen Momente der Quarks (ebenso wie ihre Ladungen). Die Bahnbewegung der Quarks trägt nicht zum magnetischen Moment bei, da alle Bahndrehimpulse der Quarks Null sind. Also

$$\mu = \text{const. } Q$$

Damit

$$\mu_{\Lambda^{++}} = 2\mu_q, \quad \mu_{\Lambda^{-}} = -\mu_q, \quad \mu_{\Omega^{-}} = -\mu_q \quad \text{etc.}$$

(wo $\mu_q = \mu_p = 2.79$, siehe Abschnitt 2)

(4) Man leite die Coleman-Glashow-Massenformel für die elektromagnetischen Massendifferenzen der stabilen Baryonen her:

$$\underbrace{m_p - m_n + m_{\Sigma^{-}} - m_{\Sigma^{+}}}_{\text{exp. } 6.6 \pm 0.1 \text{ MeV}} = \underbrace{m_{\Sigma^{-}} - m_{\Sigma^{+}}}_{6.6 \pm 0.7 \text{ MeV}}$$

Anleitung: Man nehme an, daß die elektromagnetische Massendifferenz zwischen Teilchen des gleichen SU(3)- und Isospin-Multipletts (dh. gleiche Bindungsenergie der Quarks, selbst für die SU(3)-brechenden, aber isospinerhaltenden Kräfte) gleich ist der Summe aus den elektromagnetischen Massendifferenzen der Quarks, plus den Erwartungswerten der elektromagnetischen Wechselwirkungsenergien (Coulomb- und magn. Momente-Wechselwirkung) zwischen je 2 der Quarks.

Lösung: Es sei $\delta = m_p - m_n$ die (als rein elektromagnetisch angenommene) Massendifferenz zwischen p und n Quark. Dann ist

$$m_P - m_N = m(ppn) - m(pnn) = \delta + U_{pp} + 2U_{pn} - U_{nn} - 2U_{p\lambda}$$

$$m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^+} = m(nn\lambda) - m(pp\lambda) = -2\delta + U_{nn} + 2U_{n\lambda} - U_{pp} - 2U_{p\lambda}$$

$$m_{\Xi^-} - m_{\Xi^0} = m(n\lambda\lambda) - m(p\lambda\lambda) = -\delta + 2U_{n\lambda} + U_{\lambda\lambda} - 2U_{p\lambda} - U_{\lambda\lambda}$$

woraus durch Vergleich unmittelbar die Massenformel folgt.

(5) Photoproduktion des $\Delta(1236)$:

$$\gamma + P \rightarrow \Delta^+(1236)$$

- (a) Zeige, daß nach dem Quarkmodell der Übergang ein rein magnetischer Dipol (M1) ist, d.h. der elektrische Quadrupol-Anteil (E2) verschwindet. (Experimentell ist der E2-Anteil $\leq 4\%$.)
- (b) Berechne das Übergangsmatrixelement für den obigen Photoproduktionsprozeß. (Vgl. mit Experiment: Der berechnete Wert kommt $\sim 20\%$ zu klein heraus.)

Lösung:

(a) P und $\Delta^+(1236)$ haben die gleiche räumliche Wellenfunktion $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$; bei dem Übergang findet lediglich eine Umorientierung der Spins statt. Dabei entsteht (oder wird absorbiert) natürlich reine M1 Strahlung, da die Spinvektoren der Quarks ja mit magnetischen Dipolen behaftet sind.

(b) Man kann das Übergangsmatrixelement

$$\langle \Delta^+, J_Z = \frac{1}{2} | \sum_{i=1}^3 \mu_{Z,i} | P, J_Z = \frac{1}{2} \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3} \underbrace{\mu_q}_{=\mu_p}$$

mittels der im Text angegebenen 3q-Wellenfunktion leicht ausrechnen. Man muß nur beachten, daß der Operator $\mu_{Z,i}$ auf das i-te q wirkt, und proportional zu

$$\sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist. So wird zum Beispiel der Term

$$\langle \hat{p}\hat{p}\hat{q} \left| \sum_{i=1}^3 \mu_{Z,i} \right| \hat{p}\hat{p}\hat{q} \rangle = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \mu_q$$

und der Term

$$\langle \hat{p}\hat{p}\hat{q} \left| \sum_{i=1}^3 \mu_{Z,i} \right| \underline{p}\hat{p}\hat{q} \rangle = 0 + 0 + 0$$

(da $\mu_{Z,i} \propto \sigma_{Z,i}$ den Spin $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des i -ten Quarks nicht umklappt, und der 1. Term der Summe daher ebenso wie der 2. und 3. Term der Summe über i Null ist wegen der Orthogonalität von $\langle \hat{p}\hat{p}\hat{q} |$ und $\langle \underline{p}\hat{p}\hat{q} |$.) Die gesamte Ausrechnung ist ohne besondere Schwierigkeit durchführbar; mit den richtigen Normierungsfaktoren der Wellenfunktionen (wie im Text angegeben) bekommt man dann das oben hingeschriebene Ergebnis.