

Interner Bericht
DESY F1-73/8
Juni 1973

DESY-Bibliothek
17. JULI 1973

Elementarteilchenphysik II

Band II

Elektromagnetische Wechselwirkungen und Feynmangraphen

von

P. Söding und H. Spitzer

Elementarteilchenphysik II

Band II

Elektromagnetische Wechselwirkungen
und Feynmangraphen

von

P. Söding und H. Spitzer

Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Hamburg
und II. Institut für Experimentalphysik der
Universität Hamburg

Vorwort

Wir legen hier das Material einer Vorlesung über Elementarteilchenphysik II vor, die 1972 in Hamburg für Physikstudenten ab 7. Semester gehalten wurde. Die Vorlesung setzt elementare Kenntnisse der nicht-relativistischen Quantenmechanik und der Elementarteilchenphysik I (relativistische Teilchengleichungen, Quantenzahlen) voraus.

In dieser Vorlesung werden einige wichtige Konzepte der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung behandelt. In Kapitel I wird der Resonanzbegriff eingeführt im Rahmen des Partialwellenformalismus für Teilchenstreuung. Anschließend wird die Entdeckung von Nukleonresonanzen durch Phasenanalyse der πN -Streuung dargestellt. Kapitel II behandelt die Klassifikation von Teilchen im Quarkmodell. Kapitel III gibt einen Überblick über elektromagnetische Wechselwirkungen von Elementarteilchen (ohne Photo- und Elektroproduktion). Hierbei beschränken wir uns auf eine kurze Beschreibung der Prozesse und eine handliche Sammlung der relevanten Formeln. In Kapitel IV werden die Feynmanregeln zur Berechnung von Matrixelementen für elektromagnetische Prozesse eingeführt. Wir verzichten auf die umfangreiche Herleitung mit Hilfe der Störungstheorie der Quantenelektrodynamik und geben stattdessen vereinfachte, plausible Herleitungen. Die Anwendung der Regeln wird - Schritt für Schritt - bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts für Elektron-Proton-Streuung demonstriert. Abschließend werden die Formfaktoren der Nukleonen eingeführt und diskutiert.

Das Material der Vorlesung ist so ausgearbeitet worden, daß es für das Selbststudium benutzt werden kann. Dabei haben wir jedoch nicht versucht, formal und inhaltlich den Ansprüchen gerecht zu werden, die man an ein Lehrbuch stellen muß. Teile von Kapitel I und Kapitel II sind der Vorlesung von P. Söding auf der Herbstschule für Hochenergiephysik in Maria Laach 1969 entnommen.

Beachte: Abbildungen und Gleichungen werden für jedes Kapitel unabhängig voneinander (von 1 beginnend) durchnummeriert.

Inhalt

Kapitel III ÜBERBLICK ÜBER ELEKTROMAGNETISCHE WECHSELWIRKUNGEN VON ELEMENTARTEILCHEN

	Seite
Zusammenfassung	1
1. <u>Einleitung</u>	1
2. <u>Reaktionen von geladenen Teilchen</u>	4
2.1 Coulombstreuung	4
2.1.1 Streuung von Spin0-Teilchen an einem unendlich schweren Körper (Rutherfordstreuung)	5
2.1.2 Streuung von Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen an einem unendlich schweren Körper	6
2.1.3 Elektron-Nukleonstreuung (Mottstreuung)	7
2.1.4 Møllerstreuung $e^+e^- \rightarrow e^-e^-$	8
2.1.5 Bhabhastreuung $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$	9
2.2 Annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ und $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	11
2.3 Coulombstreuung und Energieverlust in Materie	12
2.3.1 Energieverlust durch Ionisation	12
2.3.2 Energie-Reichweitebeziehung	16
2.3.3 Straggling	16
2.3.4 Winkeldispersion durch Vielfachstreuung	16
2.4 Bremsstrahlung von Elektronen	18
2.5 Vergleich des Energieverlustes von Elektronen durch Ionisation und Bremsstrahlung	23
3. <u>Reaktionen von Photonen</u>	25
3.1 Comptonstreuung am Elektron $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$	25
3.2 Paarbildung $\gamma Z \rightarrow e^+e^- Z$	29
3.3 Vergleich der Absorption von Photonen durch Photoeffekt, Comptonstreuung und Paarerzeugung	33
4. <u>Elektromagnetische Schauer</u>	34

Kapitel IV DIE FEYNMANREGELN UND IHRE ANWENDUNG AUF ELEKTRO-
MAGNETISCHE PROZESSE

	Seite
	Zusammenfassung 37
1.	<u>Einleitung</u> 37
2.	<u>Voraussetzungen</u> 38
2.1	Metrik und Bezeichnungen 39
2.2	"Virtuelle" Teilchen und Propagator 41
2.3	Beschreibung von freien Elektronen 43
2.4	Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon 46
2.5	Beschreibung von freien Photonen 47
3.	<u>Aufstellung der Feynmanregeln</u> 51
3.1	Matrixelement für Elektron-Proton-Streuung 52
3.2	Herleitung der Propagatorfunktion 54
3.3	Feynmanregeln für die Faktoren im Matrixelement 56
4.	<u>Berechnung der Elektron-Proton Streuung</u> <u>(punktförmiges Dirac-Proton)</u> 58
4.1	Aufstellung des Matrixelementes M_{fi} 58
4.2	Summation und Mitteilung über Spins 60
4.3	Einführung von invarianten kinematischen Größen 63
4.4	Berechnung des Wirkungsquerschnitts 64
5.	<u>Allgemeine Bemerkungen zur elektromagnetischen</u> <u>Wechselwirkung</u> 67
6.	<u>Formfaktoren und Rosenbluthformel der Elektron-</u> <u>Nukleon-Streuung</u> 70
6.1	Teilchenaustausch in der starken Wechselwirkung 71
6.2	Formfaktoren des Protons und Rosenbluthformel 72
6.3	Klassische Interpretation der Formfaktoren 76
6.4	Bestimmung der Formfaktoren des Protons und Neutrons 77
6.5	Eigenschaften der Formfaktoren des Protons und Neutrons 80
<u>Anhang</u>	<u>Liste der wichtigsten Bezeichnungen</u> 82
	Abbildungen 84

Die theoretische Rechnung des Wertes hat eine ähnliche Genauigkeit, und stimmt mit dem Experiment innerhalb der Fehler überein.

Darüber hinaus hat die elektromagnetische Wechselwirkung eine überragende Stellung im täglichen Leben.*

Im folgenden werden zunächst die elektromagnetische Stoßprozesse von geladenen Teilchen besprochen, und zwar die Coulombstreuung, Bremsstrahlung und Annihilation. Dann werden die e.m. Stoßprozesse von Photonen behandelt: Comptonstreuung und Paarbildung. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die behandelten elektromagnetischen Stoßprozesse. Für jeden Reaktionstyp ist nur eine Beispielreaktion und ein Graph in niedrigster Ordnung angegeben. Neben den rein elektromagnetischen Wechselwirkungen, die sich exakt mit Hilfe der QED berechnen lassen, gibt es sogenannte Mischwechselwirkungen, bei denen die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung beitragen. Sie werden hier nicht besprochen.

* Wir fassen hier den Begriff e.m. Wechselwirkung weiter und schließen die nichtrelativistische Elektrodynamik mit ein: Die meisten Prozesse des Lebens und der Energiegewinnung lassen sich auf chemische Vorgänge zurückführen. Chemische Vorgänge sind Änderungen der durch Elektronen vermittelten Molekül- oder Atombindungen, also elektromagnetische Wechselwirkungen. Die meisten Eigenschaften von Materialien können durch mikroskopische Eigenschaften, d.h. durch die Bindungszustände der Elektronen des Gitters oder Moleküls erklärt werden. Neben der elektromagnetischen Wechselwirkung spielt im täglichen Leben nur die Gravitationswechselwirkung eine Rolle.

Tabelle 1 Überblick über elektromagnetische Wechselwirkungen (Stoßprozesse)

Wechselwirkendes Teilchen	$e^+, e^-, \mu, \mu,$ <u>geladene Hadronen</u>			<u>Photon</u>		
	Prozeß	Beispiel Reaktion	Graph in niedrigster Ordnung (Beispiel)	Prozeß	Beispiel Reaktion	Graph in niedrigster Ordnung (Beispiel)
Elektromagnetische Prozesse von Elementarteilchen miteinander	Coulombstreuung	$pp \rightarrow pp$ für $\Theta \approx 0$		Comptonstreuung	$\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$	
	Bremsstrahlung	$e^- p \rightarrow e^- p \gamma$		Paarbildung	$\gamma p \rightarrow e^+ e^- p$	
	Annihilation	$e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$				
Elektromagnetische Prozesse von Elementarteilchen in Materie	Coulombstreuung, Bremsstrahlung, Annihilation	s.o.		Comptonstreuung, Paarbildung	s.o.	
	Energieverlust durch Ionisation (Vielfachstreuung, Straggling)			Photoeffekt	$\gamma \text{ Atom} \rightarrow e^- \text{ Atom}$	
Mischwechselwirkung (elektromagnetische und starke Wechselwirkung)	eN Streuung	$e^- p \rightarrow e^- p$		Comptoneffekt an Hadronen	$\gamma p \rightarrow \gamma p$	
	Elektroproduktion	$e^- p \rightarrow e^- p \pi^0$		Photoproduktion	$\gamma p \rightarrow p \pi^+ \pi^-$	
	$e^+ e^-$ Annihilation in Hadronen	$e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$				

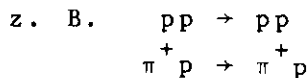
2. Reaktionen von geladenen Teilchen

2.1 Coulombstreuung

Als Coulombstreuung bezeichnet man die elastische Streuung zwischen zwei geladenen Teilchen (oder Kernen), die durch die von den Ladungen ausgehenden Coulombkräfte vermittelt wird. Ein klassisches Beispiel ist die Rutherford-Streuung von α -Teilchen an schweren Kernen. Wie bei der Rutherfordstreuung enthält der differentielle Wirkungsquerschnitt für Coulombstreuung meist einen Faktor $\sim 1/\sin^4 \frac{\Theta}{2}$. Dieser Ausdruck wird für kleine Streuwinkel Θ sehr groß. D.h. die Coulombstreuung ist am stärksten für kleine Streuwinkel.

Unter dem Sammelbegriff Coulombstreuung faßt man mehrere Prozesse zusammen, die teilweise andere Namen haben:

a) Coulombstreuung von Hadronen bei kleinen Θ



Die Coulombstreuung von Hadronen ist von der starken Wechselwirkung überlagert und spielt nur bei kleinen Streuwinkeln eine Rolle*

b) Streuung von Elektronen an Nukleonen oder Kernen

Diese Streuung erlaubt, die Ladungsverteilung von Nukleonen und Kernen zu untersuchen. Für den Fall der Streuung eines Elektrons an einem schweren Körper mit punktförmiger Ladung spricht man von Mottstreuung.

c) Møller Streuung $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$

d) Bhabha Streuung $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$

Diese beiden Prozesse können am besten in $e^+ e^-$ oder $e^- e^-$ Speicherringen untersucht werden.

* Die Coulombstreuung hat hier eine wichtige Anwendung. Die Coulombstreuamplitude interferiert mit dem Realteil der starken Wechselwirkungsamplitude. Durch Messung des Interferenzmusters im differentiellen Wirkungsquerschnitt kann man den Realteil der starken Amplitude bestimmen.

2.1.1 Streuung von Spin 0 Teilchen an einem unendlich schweren Körper
(Rutherfordstreuung)

Man nimmt an, daß ein geladenes Teilchen mit Spin 0 an einem geladenen Streuzentrum mit unendlich großer Masse gestreut wird. Das Streuzentrum soll wie ein exaktes Coulombfeld wirken (d.h. wie eine Punktladung). Das ist der Fall, wenn das Projektil das Streuzentrum in einem Abstand passiert, der größer ist als der Kernradius aber kleiner als der Atomradius.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch die Formel von Rutherford:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_R = \frac{Z^2 e^4 z^2}{4(p\beta)^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad (1)$$

(im Laborsystem)

<u>Notation:</u>	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$	differentieller Wirkungsquerschnitt im Laborsystem (ruhendes Target)	
	ze	Ladung des Projektils	} Man setzt * $e^2 \rightarrow \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha \frac{1}{137}$
	Ze	Ladung des Targets	
	p	Impuls des Projektils	
	$\beta = \frac{v}{c}$	Geschwindigkeit des Projektils	
	Θ	Ablenkwinkel des Projektils	

Herleitung: s.z.B. P. Stähelin, Kernphysik, Vorlesungsskriptum, Hamburg, 1969.

Gültigkeit: Die Formel gilt näherungsweise im Grenzfall kleine Streuwinkel für Streuung von leichten Teilchen an schweren Teilchen, von Teilchen an Kernen und von leichten Kernen an schweren Kernen (dh. $M_{\text{Projektil}} \ll M_{\text{Target}}$). Sie gilt auch für Streuung von Teilchen mit Spin bei sehr kleinen Streuwinkeln, z.B. für Elektronstreuung an Kernen, wenn $\cos^2 \frac{\Theta}{2} \approx 1$, $\frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \ll 1$, s. Gl.(3).

* Wir verwenden die in der Hochenergiephysik üblichen Einheiten c (für Geschwindigkeit), \hbar (für Energie x Zeit) und GeV oder MeV (für Energie). Um Schreibarbeit zu sparen, setzen wir ferner $\hbar=c=1$ in allen Formeln. Damit wird die Geschwindigkeit dimensionslos, gemessen in Bruchteilen von c; der Drehimpuls J dimensionslos, gemessen in Vielfachen von \hbar ; Energie, Masse und Impuls haben alle die Dimension Energie und werden in GeV gemessen. Die Zeiteinheit wird $1 \text{ GeV}^{-1} = 6.5819 \times 10^{-25} \text{ sec}$, die Längeneinheit $1 \text{ GeV}^{-1} = 0.19732 \text{ f}$ ($1 \text{ f} = 10^{-13} \text{ cm}$).

Energie-, Winkel- und

Z Abhängigkeit: Laut (1) wächst der Wirkungsquerschnitt mit dem Quadrat der Ladungszahl des Targets. Er fällt mit dem Impuls des Projektils wie $\frac{1}{p}$ und hat die charakteristische Winkelabhängigkeit $\sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$.

Beachte, daß das Integral von (1) über alle Streuwinkel divergiert. Das liegt an der unendlich großen Reichweite des Coulombfeldes einer Punktladung. In der Praxis ist die Reichweite auf den Atomradius begrenzt, da bei größeren Abständen die Hüllenelektronen die positive Kernladung vollständig abschirmen.

2.1.2 Streuung von Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen an einem unendlich schweren Körper

Für Streuung von Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen nach größeren Streuwinkeln muß die Formel (1) modifiziert werden.

Mott hat die relativistische Diractheorie für Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen angewandt. Daraus ergibt sich in guter Näherung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_R \cdot \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{Z\pi\beta}{137} \sin \frac{\Theta}{2} (1 - \sin \frac{\Theta}{2}) \right] \quad (2)$$

(im Laborsystem)

Notation: $\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_R$ Wirkungsquerschnitt für Rutherfordstreuung (s. Gl.(1)), andere Bezeichnungen wie in 2.1.1
 Z enthält das Ladungsvorzeichen von Projektil und Target. Z ist positiv für negative Ladung des Projektils und positive Ladung des Targets.

Gültigkeit: Die Formel gilt in guter Näherung bei kleinen und größeren Streuwinkeln für Streuung von unpolarisierten Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen an schweren Teilchen oder Kernen und für Streuung von leichten Spin $\frac{1}{2}$ Kernen an schweren Kernen. Sie gilt für relativistische Projektilen nur falls $Z/137 \leq 0.2$. Voraussetzung für die Gültigkeit ist, wie bei der Rutherfordstreuung, daß das Streuzentrum als Punktladung wirkt. Das ist der Fall für hinreichend große Stoßparameter bzw. hinreichend kleine Impulsüberträge q auf das Target. (Es muß sein $qR \ll 1$; dabei ist $R = \text{Kernradius}$ und $q \sim p \sin \theta$).

Winkel- und Z-
Abhängigkeit:

Der zweite Term in (2) trägt nur bei größeren Streuwinkeln bei. Der letzte Term trägt nur bei großen Streuwinkeln und schweren Targetkernen bei. Bei kleineren Streuwinkeln nähert sich die Formel der Rutherfordformel.

2.1.3 Elektron - Nukleon - Streuung (Elektron - Kern - Streuung)

Die Streuung von relativistischen Elektronen an einem schweren Körper mit endlicher Masse M und mit einer Punktladung Z wird beschrieben durch die

Mottformel:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_M = \frac{Z^2 e^4}{4E^2} \frac{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\Theta}{2}} \quad (3)$$

(im Laborsystem)

Notation:

- Ze Ladung des Targetkerns (Nukleons) mit $e^2 = \frac{1}{137}$ (s.o.)
- M Masse des Targetkerns
- E Gesamtenergie des einfallenden Elektrons
- Θ Streuwinkel des Elektrons im Laborsystem

Gültigkeit: Die Formel gilt angenähert für Streuung von relativistischen Elektronen (d.h. $E \gg m_e$, m_e = Masse des Elektrons) an Nukleonen oder Kernen bei kleinen Streuwinkeln, d.h. bei kleinen Impulsüberträgen q auf das Target. (Es soll sein $qR \ll 1$, wo R der Kernradius ist. Beispiel: $R_{\text{proton}} \approx 1 \text{ f} = \frac{1}{197 \text{ MeV}} \Rightarrow$ Bedingung $p \cdot \Theta \approx q \ll 197 \text{ MeV}$). Bei größeren Streuwinkeln muß die Formel modifiziert werden. Nukleonen und Kerne haben in Wirklichkeit keine punktförmigen Ladungen sondern eine räumliche elektromagnetische Struktur. Man interpretiert diese Struktur als räumliche Verteilung der Ladung, des magnetischen Moments und eventueller höherer elektrischer und magnetischer Momente. Die Verteilungen werden durch sogenannte Formfaktoren beschrieben. Zu einem Teilchen mit der Spinquantenzahl J gibt es $2J + 1$ Formfaktoren.

Beispiel: a) Das Proton hat Spin $\frac{1}{2}$

Es gibt 2 Formfaktoren, die die Verteilung der Ladung und des magnetischen Momentes beschreiben.

b) Das Deuteron hat Spin 1.

Es gibt 3 Formfaktoren. Die ersten beiden haben dieselbe

Bedeutung wie beim Proton. Der dritte beschreibt die Verteilung des elektrischen Quadrupolmomentes im Deuteron.

Die relativistische Elektron-Nukleonstreuung bei größeren Streuwinkeln wird durch die sog. Rosenbluthformel beschrieben.

Literatur: Herleitung der Rosenbluthformel und der Formfaktoren,
G. Källén, Elementarteilchenphysik, BI Hochschultaschenbuch
Nr. 100/100a/100b (1965), S. 234-256.

2.1.4 Møllerstreuung $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem ist in niedrigster Ordnung der QED gegeben durch

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_o^2 \left(\frac{m_e}{E} \right)^2 \left(\frac{3 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2} \quad (4)$$

(im Schwerpunktsystem)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0,518 \cdot 10^{-32} \frac{\text{cm}^2}{\text{sr}} \frac{1}{E^2} \cdot \left(\frac{3 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2, \quad E \text{ in GeV}$$

Notation:

- r_o klassischer Elektronenradius, $r_o = 2.818$ fermi
- m_e Elektronenmasse
- E Gesamtenergie eines Elektrons
- θ Streuwinkel im Schwerpunktsystem

Herleitung: S.z.B. W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Clarendon Press, Oxford (1954), S.231-239
(Setze $p^2 \sim E^2$ in Heitlers Gl. 24)

Gültigkeit: Die Formel gilt im Prinzip sehr gut für unpolarisierte Elektronen. Man muß jedoch berücksichtigen, daß die Elektronen in Prozessen höherer Ordnung zusätzlich γ Quanten abstrahlen können, die zu einer Energieminderung der Elektronen führen. Diese Prozesse faßt man als sog.

Strahlungskorrekturen zusammen. Sie lassen sich rechnerisch behandeln. Sie hängen von der Anordnung und Energieauflösung der Meßapparatur ab.

Die Strahlungskorrekturen können bei $E = 3 \text{ GeV}$ 20 bis 40 % betragen, je nach Anordnung.

Energie und

Winkelabhängigkeit: Der Wirkungsquerschnitt fällt mit $1/E^2$. Die Winkelabhängigkeit ist in Abb. 1 dargestellt. Da die beiden auslaufenden Elektronen identische Teilchen sind, kann man nicht unterscheiden, welches Elektron in Richtung θ und welches in Richtung $180 - \theta$ emittiert wird. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist daher symmetrisch um 90° .

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitts. Das Ergebnis muß durch 2 geteilt werden, da wegen der Identität der Elektronen jeder Zustand zweimal in der differentiellen Winkelverteilung gezählt wird. Man beachte, daß Gl. (4) nicht über alle Winkel integriert werden kann, da das Integral bei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ divergiert.

Diese Divergenz hängt mit der in der Herleitung gemachten (physikalisch nicht realisierbaren) Forderung zusammen, daß sich die beiden Elektronen streuen, ohne dabei Photonen zu emittieren. Die Emission von niederenergetischen Photonen kann bei kleinen Elektronenstreuwinkeln ($\theta = 0, 180^\circ$) nicht vernachlässigt werden.

Wir geben auch noch den Wirkungsquerschnitt im Laborsystem an:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left(4 \frac{\gamma+1}{\beta^2 \gamma} \right)^2 \frac{\cos \theta}{[2+(\gamma-1)\sin^2\theta]^2} \left[\frac{4}{(1-x^2)^2} - \frac{3}{1-x^2} + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^2 \left(1 + \frac{4}{1-x^2} \right) \right]$$

(Laborsystem)

(4a)

Notation:

- $r_0 = 2.818 \text{ fermi}$
- $\gamma = \frac{E}{m_e}$
- $E = \text{Gesamtenergie des einlaufenden Elektrons}$
- $\beta = \frac{v}{c}, \text{ Geschwindigkeit des einlaufenden Elektrons}$
- $\theta = \text{Streuwinkel}$

$$x = \frac{2 - (\gamma+3) \sin^2\theta}{2 + (\gamma-1) \sin^2\theta}$$

(alle Größen im Laborsystem)

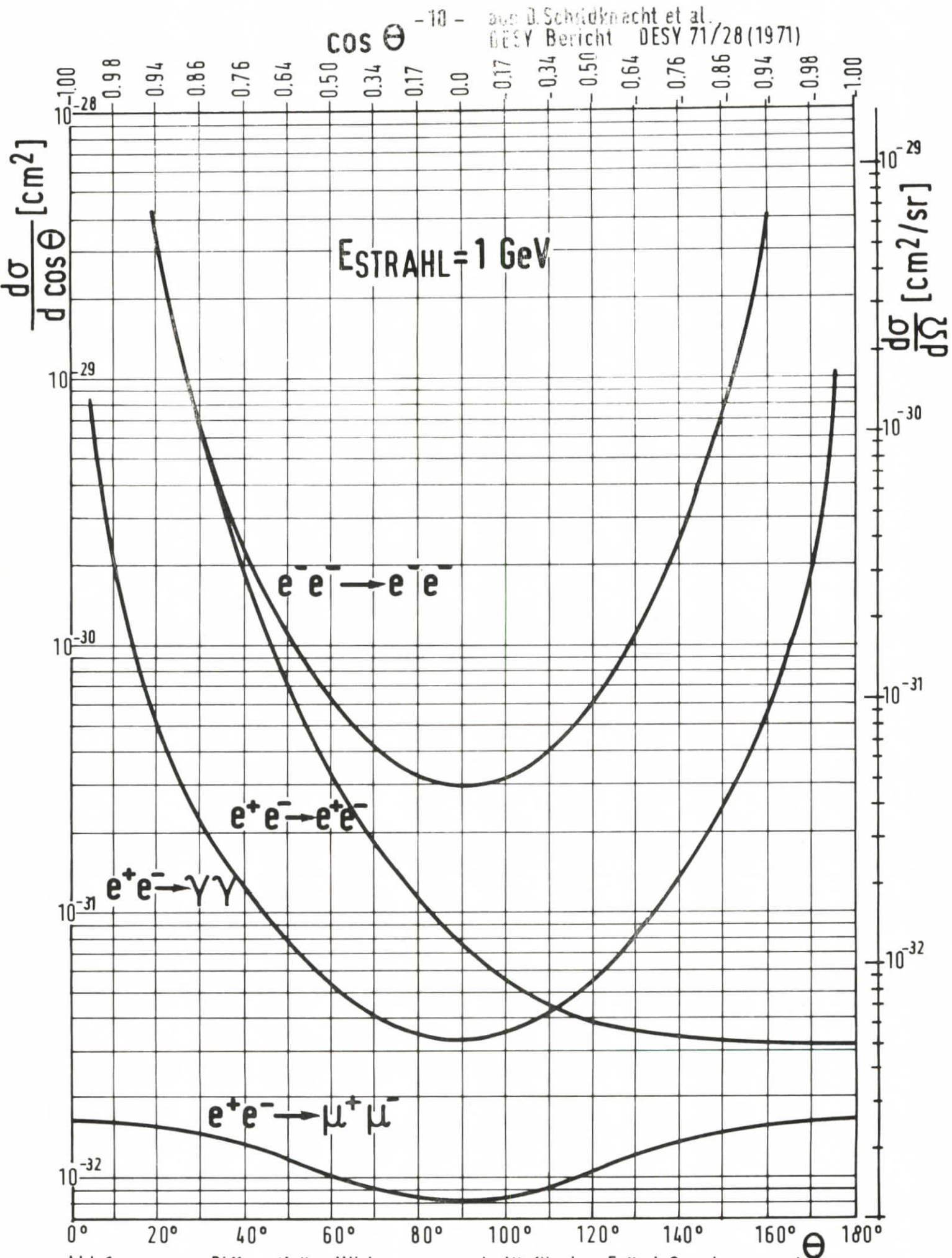


Abb.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt für den Fall, daß e^- bzw. γ oder μ^- in Richtung Θ, φ erzeugt wird. Θ = Produktionswinkel im e^+e^- Schwerpunktsystem.

2.2. Annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ und $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Wir geben jetzt die Wirkungsquerschnitte für weitere wichtige Prozesse an, die man mit einem Speicherring häufig beobachtet. Der Prozeß $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ heißt Annihilation oder Paarvernichtung. In niedrigster Ordnung der QED gilt für unpolarisierte Primärteilchen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{m_e}{E}\right)^2 \left[\frac{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta + \left(\frac{m_e}{E}\right)^2 \cos^2 \theta} \right] \quad (6)$$

$$= 1.036 \cdot 10^{-32} \frac{\text{cm}^2}{\text{sr}} \frac{1}{E^2} \left[\quad \right], E \text{ in GeV}$$

$$\sigma_{\text{tot}} (e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\pi\alpha^2}{4pE} \left[2(\beta^2-2) + \frac{3-\beta^4}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \approx \frac{\pi\alpha^2}{2E^2} \left[\log \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right] \quad (7)$$

(S.Heitler, Quantum Theory of Radiation, S. 269)

Notation: E, p Gesamtenergie, Impuls des einlaufenden Elektrons
 $\beta = \frac{v}{c}$ Geschwindigkeit des einlaufenden Elektrons
 $\alpha = \frac{1}{137}$, $r_0 = 2.818$ fermi
 $\theta =$ Streuwinkel des γ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{1}{16} r_0^2 \left(\frac{m_e}{E}\right)^2 \beta_\mu \left[(1+\cos^2\theta) - (1-\beta_\mu^2) \sin^2\theta \right] \quad (8)$$

$$= 0.129 \cdot 10^{-32} \frac{\text{cm}^2}{\text{sr}} \frac{\beta_\mu}{E^2} \left[\quad \right], E \text{ in GeV}$$

$$\sigma_{\text{tot}} (e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \approx \frac{2.2 \cdot 10^{-32} \text{cm}^2}{E^2}, E \text{ in GeV} \quad (9)$$

(Alle Formeln im Schwerpunktsystem)

Notation: $\beta_\mu = \frac{|\vec{p}_\mu|}{E}$
 $\theta =$ Streuwinkel des μ im Schwerpunktsystem
 andere Bezeichnungen wie in 2.1.4.

Gültigkeit: wie in 2.1.4

Winkelabhängigkeit: Die Winkelabhängigkeit der beiden Prozesse ist in Abb. 1 dargestellt.

Literatur: zu Speicherringexperimenten
D. Schildknecht et.al. DESY-Bericht DESY 71/28 (1971)

2.3 Coulombstreuung und Energieverlust in Materie

Bewegte geladene Teilchen, die auf die neutralen Atome der Materie treffen, treten über die Coulombkräfte hauptsächlich in Wechselwirkung mit den Atom-
elektronen. In einem einzelnen Stoß gibt das Projektil zwar nur einige eV
an das Elektron ab - was zur Anregung oder Ionisation des betroffenen Atoms
führt - aber die große Zahl dieser Prozesse bewirkt, daß sie den größten
Teil des Energieverlust des Projektils ausmachen. Demgegenüber fallen die
wenigen Kerntreffer kaum ins Gewicht, auch wenn der Energieübertrag bei
einem solchen Ereignis weitaus größer sein kann. Effekte der Coulombstreu-
ung in Materie bilden die Grundlage für verschiedene Nachweismethoden von
Elementarteilchen. Sie werden daher hier kurz aufgeführt.

2.3.1 Energieverlust durch Ionisation (schwere Teilchen $M \gg m_e$)

Der Energieverlust eines bewegten geladenen Teilchens durch Ionisation in
der Schichtdicke dx ist gegeben durch die

Bethe Blochformel:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi n_e \frac{(ze)^2}{m_e v^2} \left[\ln \frac{2m_e v^2}{I} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2 \right] \quad (10)$$

Notation:

dE	Energieverlust des Projektils in der Schichtdicke dx
n_e	Zahl der Elektronen pro cm^3 des Absorbers
ze	Ladung des Projektils ($e^2 = \frac{\hbar c}{137} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fermi}}{137}$)
m_e	Elektronenmasse
$v = \beta c$	Geschwindigkeit des Projektils
I	mittleres Anregungspotential des Absorbers

I wird experimentell bestimmt

Substanz	Z	I (eV)	I/Z
H ₂	1	19	19
He	2	44	22
Be	4	64	16
Luft	7.2	94	13.1
Al	13	166	12.7
Cu	29	371	12.8
Xe	54	660	12.2
Pb	82	1070	13.1

(aus H. Enge, Introduction to Nuclear Physics, Addison-Wesley (1966) S.184)

I ist ungefähr proportional zur Kernladung Z des Absorbers.

Gültigkeit: Die Formel gilt

- für Energieverlust von Teilchen mit beliebigem Spin und einer Masse, die groß ist verglichen mit m_e .
- für nicht zu große Energien, so daß die Polarisation * des Absorbers keine Rolle spielt. Bei relativistischen Energien müssen Korrekturen für die Polarisation des Absorbers und andere Effekte angebracht werden.
- für nicht zu kleine Energien: Die Ladung Ze des Projektils soll nicht durch Einfang von Elektronen verringert werden. Es soll sein $\beta \gg Z/137$, so daß v wesentlich größer ist als die Bahngeschwindigkeit der Elektronen in der K-Schale.

Herleitung und

Diskussion: S.z.B. P. Stähelin, Kernphysik, Skriptum 1969

Verlauf und Eigenschaften:

dE/dx hat folgenden Verlauf als Funktion von v

* Dichte Medien können bei Durchgang eines geladenen Teilchens lokal polarisiert werden. Diese Polarisation vermindert den Coulombstreuungsquerschnitt bei kleinen Winkeln, d.h. großen Stoßparametern. Als groß gelten hier Stoßparameter, die vergleichbar sind mit dem Atomabstand. Dann können mehrere Atome an der Wechselwirkung teilnehmen und die Polarisation spielt eine Rolle.

aus P. Stähelin, Kernphysik, Skriptum Hamburg 1969

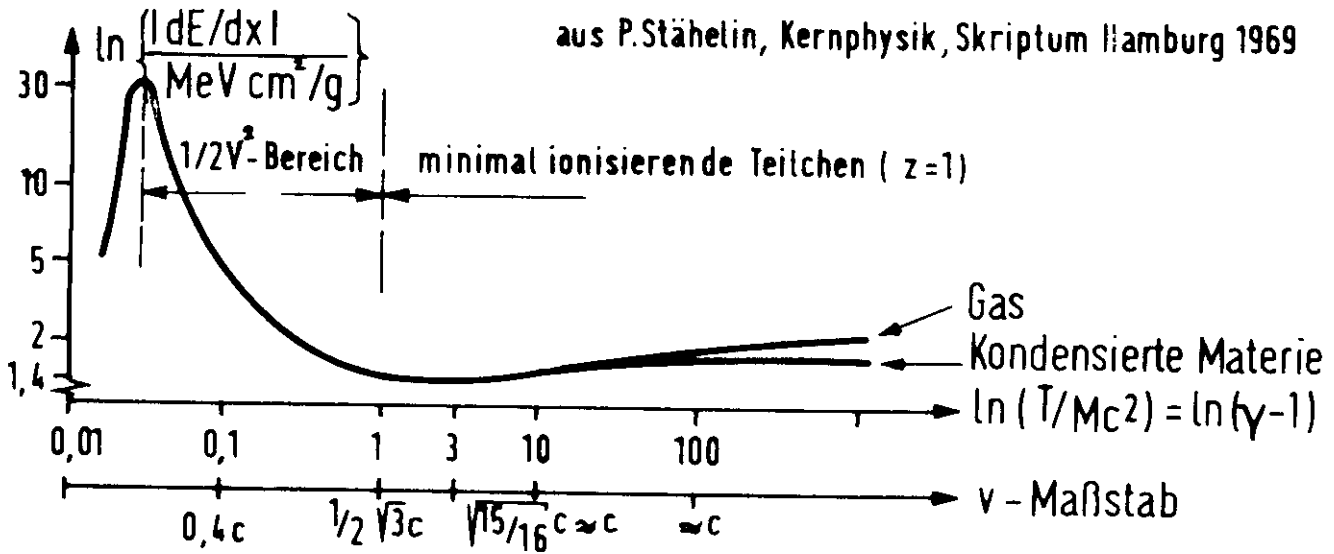


Abb. 2 Energieverlust $|dE/dx|$ von einfach geladenen Teilchen in Materie (Bethe-Bloch-Formel für $z=1$)

$\frac{dE}{dx}$ fällt im nichtrelativistischen Bereich wie $\frac{1}{v^2}$, erreicht ein Minimum bei $p \approx 3M$ (p, M = Impuls und Ruhemasse des Projektils) und steigt dann schwach wieder an (relativistischer Anstieg der Ionisation). In kondensierter Materie steigt dE/dx auf etwa den 1.4 fachen Wert der Minimumionisation an.

Der Energieverlust hängt bei festem Z und gleicher Geschwindigkeit nicht von der Masse des Projektils ab. Wenn man dE/dx über der kinetischen Energie aufträgt, haben die Kurven für verschiedene Teilchen die gleiche Form und sind versetzt gegeneinander.

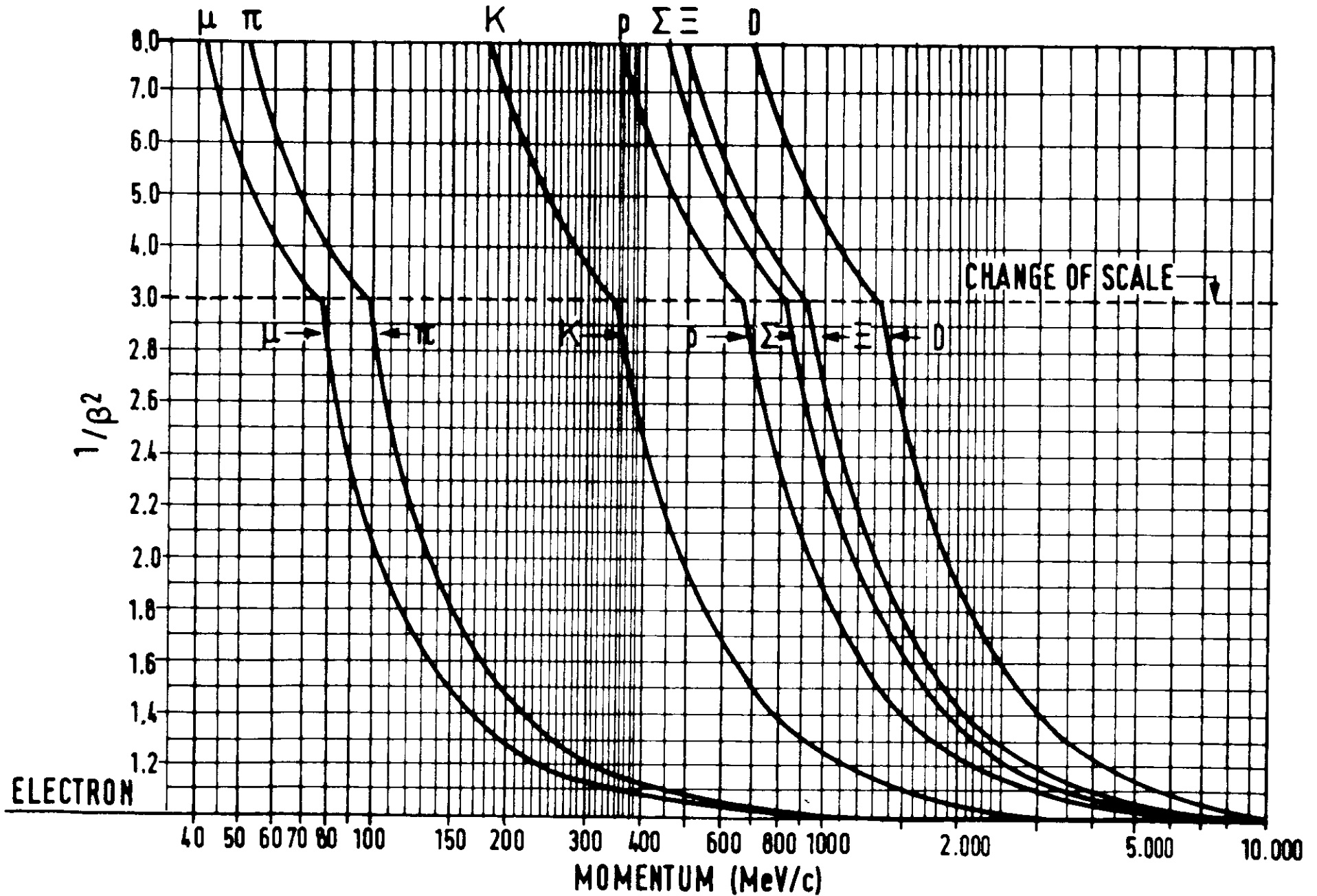
Da die Zahl der Elektronen/cm³ für alle Substanzen ungefähr gleich ist, ist ihr Bremsvermögen ($\frac{dE}{dx}$) ungefähr gleich.

Anwendung:

- a) Der Energieverlust $-\frac{dE}{dx}$ von Teilchen bekannter Masse M wird z.B. mit Szintillationszählern gemessen (dE/dx ist proportional dem Szintillationslichtpuls). Daraus kann man (im $1/v^2$ Bereich) die kinetische Energie des Teilchens bestimmen.
- b) Die Blasendichte einer Spur in der Blaskammer ist proportional zu $\frac{1}{\beta^2}$. Durch Messung von Impuls und Blasendichte kann man die Teilchenmasse bestimmen. Abb. 3 zeigt den Zusammenhang zwischen Ionisation (Blasendichte) und Teilchenimpuls in Wasserstoff für verschiedene Teilchenmassen. In der Blaskammer können Protonen bis zu Impulsen von

$1/\beta^2$ v. MOMENTUM

THEOR. VARIATION OF BUBBLE DENSITY WITH MOMENTUM



1.4 GeV/c auf Grund der Ionisation von π Mesonen unterschieden werden.

Nachschlagewerk: Energieverlust und Reichweite von Teilchen in verschiedenen Materialien sind dargestellt in

P. Trower, University of California at Berkeley, Bericht UCRL 2426 Vol. II + IV (1966 Edition) (stehen in der DESY-Handbibliothek).

2.3.2 Energie-Reichweite-Beziehung

In einem genügend dicken Absorber kann ein Teilchen seine gesamte Energie durch Ionisation verlieren. Die Reichweite des Teilchens bis zum Abstoppen ist seiner Einschußenergie proportional. Man erhält die sogenannten Energie-Reichweitebeziehungen durch Integration der Bethe-Blochformel über dE von 0 bis E (bis auf kleine Korrekturen). Abb. 4 zeigt den Verlauf der Energie-Reichweitebeziehung in einer Wasserstoffblasenkammer (hier aufgetragen als Impuls-Reichweitebeziehung) für verschiedene Teilchen.

Anwendung

In Blaskammer- und Zählerexperimenten bestimmt man die Energie von "langsamen" Protonen (mit Impulsen $p \lesssim \frac{1}{2} M_p$) durch Messung ihrer Reichweite in einem Absorber. In der Blaskammer können Reichweiten und damit auch Energien sehr genau bestimmt werden.

Nachschlagewerk: s.o. (2.3.1)

2.3.3 Straggling

Unter Straggling versteht man Schwankungen in der Reichweite von Teilchen auf Grund statistischer Fluktuationen in der Energieabgabe durch Ionisation. Der Effekt spielt für Elektronen eine Rolle.

2.3.4 Winkeldispersion durch Vielfachstreuung

Die vielen Coulombstreuungsprozesse (Vielfachstreuung), die ein geladenes Teilchen in Materie erfährt, führen zu einer statistischen Richtungsänderung.

RANGE AND ENERGY LOSS IN LIQUID HYDROGEN

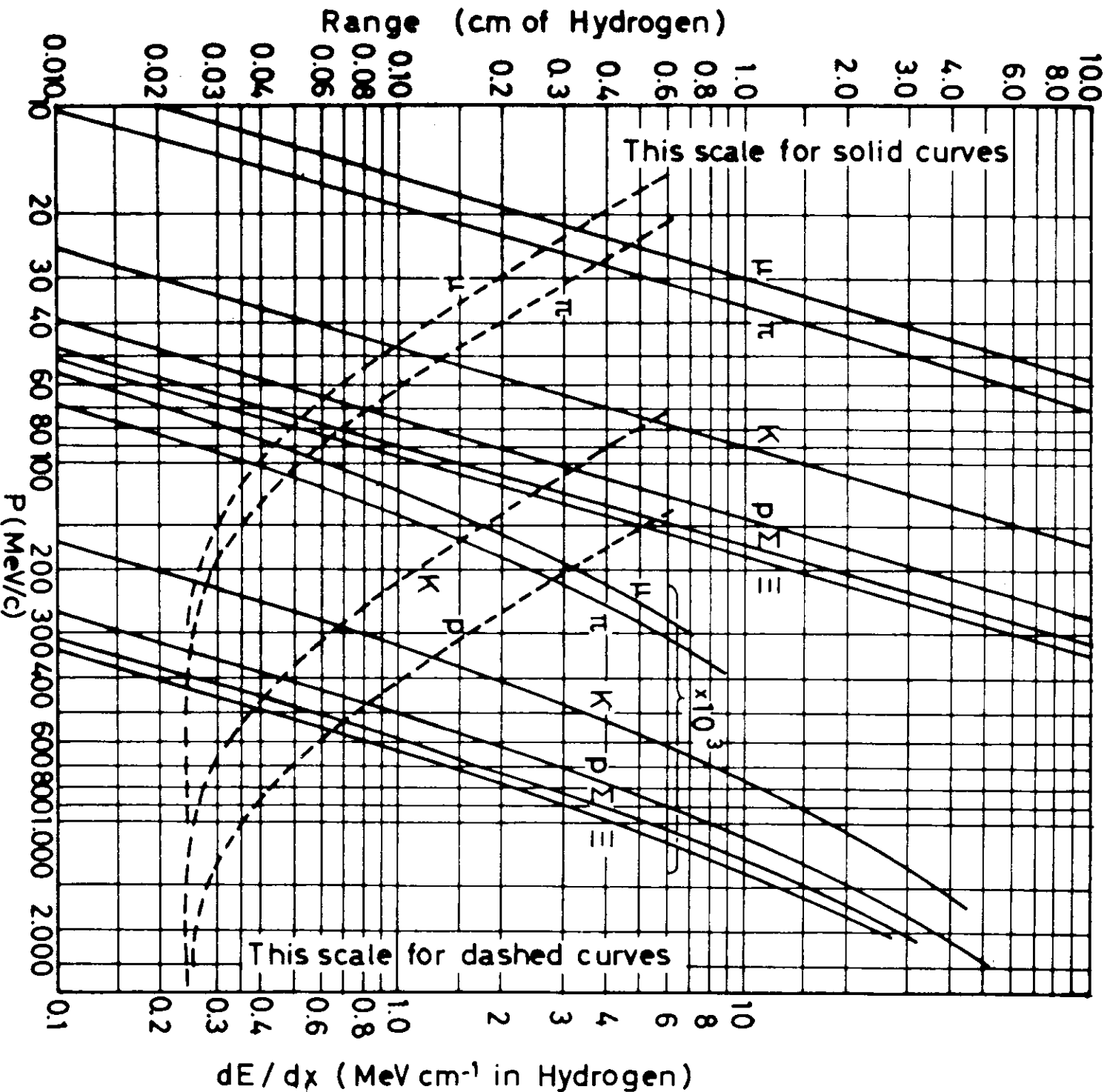


Abbildung 4

Range and energy loss in liquid hydrogen bubble chamber, determined by a μ^+ range of 1.103 ± 0.003 cm from the $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ decay. Liquid hydrogen conditions: $T = 27.6 \pm 0.1^\circ K$; $P = 48 \pm 5$ psia; $\rho = (5.86 \pm 0.06) 10^{-2} \text{ g/cm}^3$. (Data by Clark and Diehl, UCRL-3789, 1957.) Bubble chamber physicists: note that the number of bubbles per cm is proportional to $1/\beta^2$, not to dE/dx .

p = Impuls des Teilchens

Die mittlere Winkeländerung nach Durchlaufen einer Schichtdicke x ist

$$\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} = z \frac{21.2 \text{ MeV}}{p \beta} \sqrt{\frac{x}{x_0}} \quad (11)$$

Notation:

- $\langle \theta^2 \rangle$ mittlere quadratische Winkeländerung durch Vielfachstreuung
- $z e$ Ladung des Projektils
- p Teilchenimpuls in MeV
- $\beta = \frac{v}{c}$ Teilchengeschwindigkeit
- $\frac{x}{x_0}$ Dicke des Absorbers in Einheiten der Strahlungslänge (s. 2.4)

Der in eine Ebene projizierte mittlere Ablenkwinkel ist um einen Faktor $\sqrt{2}$ kleiner.

Verlauf: Die mittlere Winkeldispersion durch Vielfachstreuung fällt wie $\frac{1}{p}$ und wächst mit \sqrt{x} für relativistische Teilchen.

Gültigkeit: Die Formel ist auf 30 % genau. Die Verteilung der Ablenkwinkel ist nur angenähert gaußisch. Es gibt erhebliche Abweichungen bei großen Ablenkwinkeln infolge von Coulombeinzelstreuungen.

Die mittlere Versetzung eines Teilchens $\sqrt{\langle y^2 \rangle}$ gegenüber der ursprünglichen Richtung ist nach Durchlaufen der Schichtdicke x

$$\sqrt{\langle y^2 \rangle} = \frac{x \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}}{3 \sqrt{2}} \quad (12)$$

2.4 Bremsstrahlung von Elektronen

Wenn ein geladenes Teilchen durch Materie läuft, strahlt es Energie in Form von Photonen ab. Dieser Prozeß heißt Bremsstrahlung. Die einfache Emission eines reellen Photons durch ein geladenes Teilchen ist aus Gründen der Energie- und Impulserhaltung nicht möglich. Bremsstrahlung findet nur im Feld eines geladenen Teilchens oder Kerns statt, der den Rückstoßimpuls des Prozesses aufnehmen kann. In Materie tragen sowohl das Kernfeld als auch die Felder der Hüllenelektronen zur Bremsstrahlung bei. Bremsstrahlung spielt für Elektronen bei relativistischen Energien eine große Rolle, für schwerere geladene Teilchen sind die Wirkungsquerschnitte sehr klein.

Bremsstrahlung kann im Rahmen der QED exakt berechnet werden. Im Grenzfall großer Elektronenenergien ($E \gg m_e$) erhält man die folgende Näherungsformel

$$\phi(E, k) dk dx = \frac{dx}{x_0} \frac{dk}{k} F(E, k) \quad (13)$$

(im Laborsystem)

Notation:

E = Gesamtenergie des einfallenden Elektrons

k = Energie des emittierten Photons

$\phi(E, k) dk dx$ = Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron der Energie E in einem Target der Dicke dx/x_0 ein Photon mit einer Energie im Intervall $[k, k + dk]$ emittiert.

$F(E, k)$ ist eine schwach von E und k abhängige Funktion.

Man kann für $E \gtrsim 100$ MeV näherungsweise setzen

$F(E, k) \approx 1$ (auf 10-20 % genau)

$\frac{dx}{x_0}$ ist die Dicke des Absorbers in Einheiten von x_0 .

x_0 ist die sogenannte Strahlungslänge.

x_0 ist eine Materialkonstante und ist gegeben durch

$$\frac{1}{x_0} = 4 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 Z(Z+1) \frac{N_0}{A} \rho \ln(183 Z^{-1/3}) \cdot \left[1 + 0.12 \left(\frac{Z}{82} \right)^2 \right] \quad (14)$$

mit $\frac{e^2}{mc^2} = r_0 = 2.818 \text{ f} =$ klassischer Elektronenradius

Z = Kernladungszahl

$N_0 = 6.022 \cdot 10^{23}/\text{mol} =$ Loschmidtsche Zahl (englisch: Avogadros number)

A = Atomgewicht des Targets

$\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137}$; Feinstrukturkonstante

ρ = Dicht des Targetmaterials (g/cm^3)

Die physikalische Bedeutung der Strahlungslänge ist folgende: Die Energie eines hochenergetischen Elektrons wird im Mittel um einen Faktor e reduziert, wenn es die Länge x_0 in einem Absorber durchquert.

Die Wahrscheinlichkeit ϕ ist mit dem Wirkungsquerschnitt σ verknüpft durch

$$\phi = \sigma \cdot \underbrace{\frac{N_0 \cdot \rho}{A}}_{\text{Zahl der Targetkerne/cm}^3} \cdot \underbrace{dx}_{\text{Targetdicke [cm]}} \quad (15)$$

Zahl der Targetkerne/cm²

Gültigkeit: Die Formel ⁽¹³⁾ gilt für Bremsstrahlung von relativistischen Elektronen ($E \gg m_e$) in einem dünnen Target der Dicke $dx \ll x_0$.

Abhängigkeit

von E, k und Z: Der nach k differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{dk}$ wird oft Bremsspektrum genannt. Er gibt die Energieverteilung der emittierten Photonen für einen Elektronenstrahl fester Einfallenergie an. Abb. 5 zeigt ein solches Bremsspektrum, aufgetragen als $k \cdot \frac{d\sigma}{dk}$; $k \frac{d\sigma}{dk}$ hat denselben Verlauf wie $F(E,k)$, d.h. es verläuft wie ein angenähertes Rechteck. $\frac{d\sigma}{dk}$ selbst steigt wie $\frac{1}{k}$ an mit abnehmendem k. Der gesamte Energieverlust eines Elektrons der Energie E beim Durchqueren der Schichtdicke dx ist

$$-\frac{dE}{dx} \Big|_{\text{Bremsstr.}} \approx \frac{1}{x_0} \int_0^E k \frac{dk}{k} = \frac{E}{x_0} \quad (16)$$

d.h. der integrierte Energieverlust durch Bremsstrahlung wächst linear mit E. Die Z-Abhängigkeit der Bremsstrahlung steckt in der Strahlungslänge x_0 . Aus (14) folgt, daß $\frac{1}{x_0} \sim Z(Z+1)$ ist, d.h. der Energieverlust durch Bremsstrahlung wächst etwa wie Z^2+Z . Die drittletzte und zweitletzte Spalte von Tabelle 2 zeigen Werte von x_0 für verschiedene Materialien. Man sieht, daß x_0 mit wachsendem Z abnimmt.

Winkelverteilung der emittierten Photonen:

Die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts ist angenähert (s. Skizze)

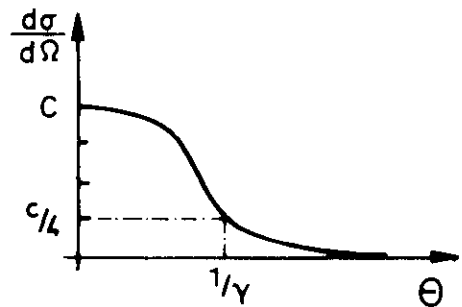
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{C}{(1+\theta^2 \gamma^2)^2}$$

θ = Winkel des emittierten Photons

$$\gamma = \frac{E}{m_e}$$

m_e = Elektronenmasse

C = Konstante



Für einen Elektronenstrahl von 5 GeV (typische Energie bei DESY) ist $\gamma = 10^4$.

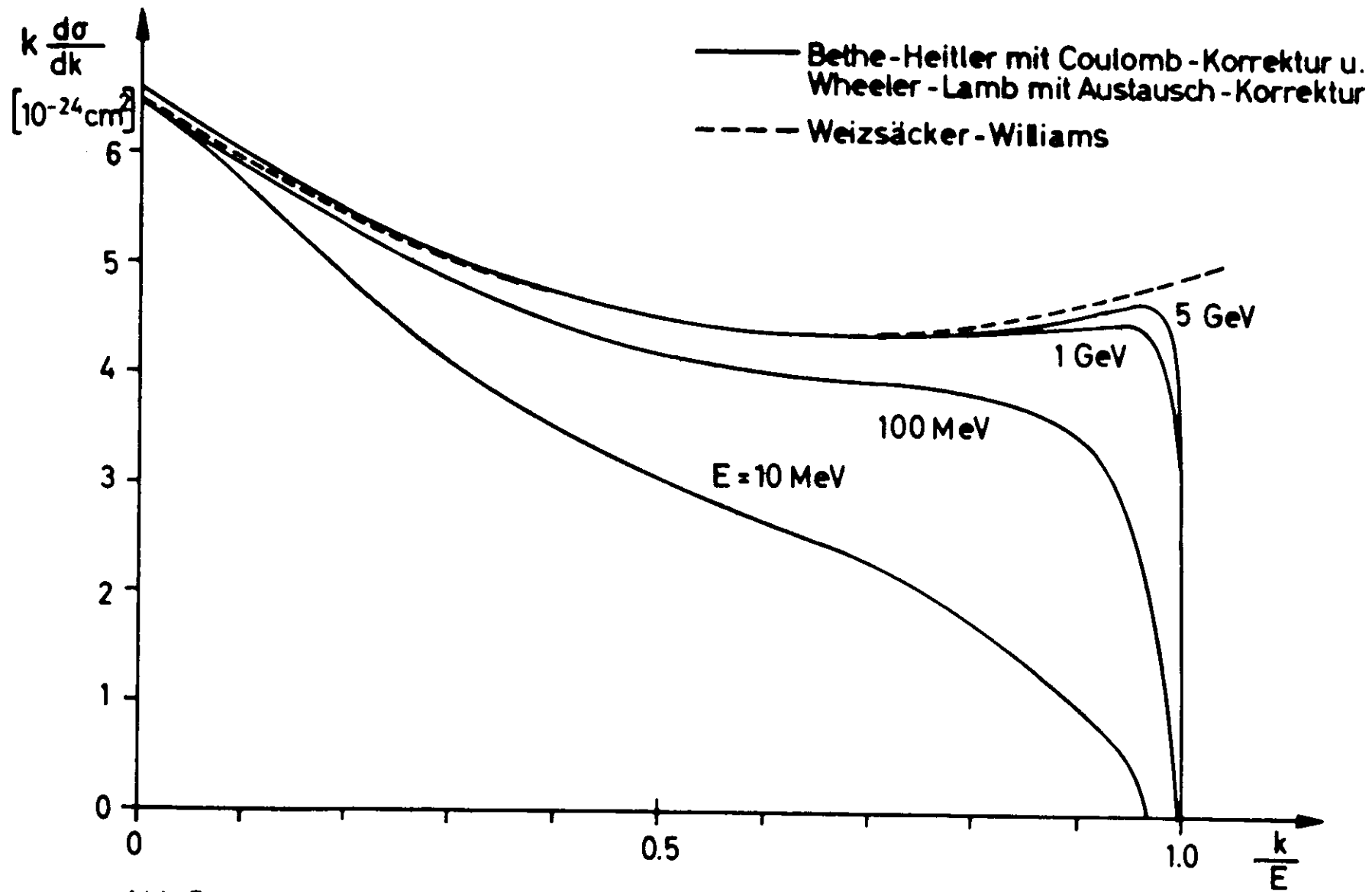


Abb. 5 Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung, $E = 5 \text{ GeV}$, $Z = 22$ (Titan)
 E = Energie des einlaufenden Elektrons
 k = Energie des emittierten Photons

TABELLE 2

ATOMIC AND NUCLEAR PROPERTIES OF MATERIALS

Material	Z	A	Cross Section σ^a barns	Collision Length		Minimum $-dE/dx^c$ MeV $g^{-1} cm^2$	MeV cm^{-1}	Radiation Length L_{rad}^d		Density ρ $g cm^{-3}$
				L_{coll}^b $g cm^{-2}$	cm			g cm^{-2}	cm	
H ₂	1	1.01	0.063	26.5	374 ^e	4.13	0.292 ^e	62.8	887 ^e	0.0708 ^e
D ₂	1	2.01	0.100	33.4	202 ^e	2.07	0.342 ^e	126	764 ^e	0.165 ^e
He	2	4.00	0.16	42.0	336 ^e	1.94	0.243 ^e	93.1	745 ^e	0.125 ^e
Li	3	6.94	0.23	50.4	94.4	1.69	0.902	83.3	156	0.534
Be	4	9.01	0.28	55.0	29.8	1.60	2.96	66.0	35.7	1.848
C	6	12.01	0.33	60.4	f	1.78	f	43.3	f	$\approx 1.55^f$
N ₂	7	14.01	0.36	63.6	78.7 ^e	1.81	1.46 ^e	38.6	47.8 ^e	0.808 ^e
Ne	10	20.18	0.465	72.1	60.1 ^e	1.73	2.08 ^e	29.1 ⁱ	24.3 ^{e, j}	1.200 ^{e, k}
Al	13	26.98	0.57	79.2	29.3	1.62	4.37	24.3	9.00	2.70
Fe	26	55.85	0.92	101.2	12.9	1.48	11.6	13.9	1.37	7.87
Cu	29	63.54	1.00	105.4	11.8	1.44	12.9	13.0	1.45	8.96
Sn	50	118.69	1.55	129.7	17.7	1.28	9.4	8.9	1.22	7.31
W	74	183.85	2.02	150.8	7.81	1.17	22.6	6.8	0.35	19.3
Pb	82	207.19	2.20	156.2	13.8	1.13	12.8	6.4	0.56	11.35
U	92	238.03	2.42	163.6	≈ 8.63	1.09	≈ 20.7	6.1	≈ 0.32	18.95
Air				64.6	53610 ^g	1.81	0.0022 ^g	37.2	30870 ^g	0.001205 ^g
Freon (CF ₃ Br)				87.1	≈ 58	1.52	≈ 2.3	16.7	≈ 11	≈ 1.5
H ₂ (bubble chamber, 27° K)				26.5	442 ^h	4.13	0.248 ^h	62.8	1050 ^h	$\approx 0.060^h$
H-Ne mixture (bubble chamber) ^j				67.3	96.1	1.83	1.28	29.8 ⁱ	42.6 ⁱ	0.70
H ₂ O				57.2	57.2	2.03	2.03	36.4	36.4	1.00
Ilford Emulsion				103.0	27.0	1.44	5.49	11.2	2.94	3.815
LiF				63.8	24.2	1.69	4.46	39.8	15.1	2.64
Mylar (C ₅ H ₄ O ₂)				59.1	42.8	1.91	2.64	40.4	29.3	1.38
NaI				119.0	32.4	1.32	4.84	9.5	2.59	3.67
Polyethylene (CH ₂)				51.0	≈ 55	2.09	≈ 1.92	45.3	≈ 49	≈ 0.92
Polystyrene (CH) ^f				54.9	≈ 52	2.03	≈ 2.13	44.3	≈ 42	≈ 1.05
Propane (C ₃ H ₈ , bubble chamber)				48.9	119	2.28	0.94	45.9	112	0.41

- a. $\sigma = \sigma_{natural} \cdot \pi (h/m_e c)^2 \times A^{2/3} = 62.8 mb \times A^{2/3}$ } NOTE: These quantities are calculated assuming a "nuclear
 b. $L_{coll} = A/(N\sigma_{natural}) = 26.5 g cm^{-2} \times A^{1/3}$ } radius" = $(h/m_e c) A^{1/3} = (1.40) A^{1/3}$. Thus they are to be taken
 c. From W. H. Barkas and M. J. Berger, Tables of Energy Losses and Ranges of Heavy Charged Particles,
 NASA SP-3013 (1964).
 d. Mainly from O. I. Dovzhenko and A. A. Pomanskii, Soviet Physics JETP 18, 187 (1964).
 e. For liquid phase at 1 atm. and boiling temperature.
 f. Density variable.
 g. At 20° C.
 h. May vary by about $\pm 3\%$, depending on operating conditions.
 i. From F. R. Huson, Ionization Loss, Range, Straggling and Multiple Scattering, BNL 11386 (1967).
 j. 53.7 atomic percent Ne.
 k. Density of gas at STP = $0.900 \times 10^{-3} g cm^{-3}$, i.e., 0.75×10^{-3} times the density (1.200) of the boiling liquid.
 l. Typical scintillator; e.g., PILOT B has an atomic ratio H/C = 1.1.

MULTIPLE COULOMB SCATTERING*

The rms projected angle θ due to multiple Coulomb scattering (only) of a particle of charge z (in units of electron charge), momentum p (in MeV/c), and velocity v (in units of c) is

$$\theta_{proj} = z \frac{15}{\beta v} \sqrt{\frac{L}{L_{rad}}} (1 + \epsilon) \text{ radians;}$$

where L = length in scatterer.

For $L \geq 1/10 L_{rad}$, ϵ is generally $< 1/10$. The distribution of θ is not truly Gaussian.†

The rms projected displacement y on traversing an absorber of thickness L is

$$y_{rms} = L \theta_{proj} \sqrt{3}.$$

* Mainly from G. Z. Molière, Naturforsch. 3(a), 78 (1948).

† See, for example, the experimental work of A. D. Hansen, L. H. Lanzl, E. M. Lyman, and M. B. Scott, Phys. Rev. 84, 634 (1951).

RADIOACTIVITY AND RADIATION PROTECTION

Unit of activity = Curie:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ disintegrations/sec}$$

Unit of exposure dose for x and γ radiation = Roentgen:

$$1 \text{ R} = 1 \text{ esu/cm}^2 = 87.8 \text{ erg/g} (5.49 \times 10^7 \text{ MeV/g}) \text{ of air}$$

Unit of absorbed dose = rad:

$$1 \text{ rad} = 100 \text{ erg/g} (6.25 \times 10^7 \text{ MeV/g}) \text{ in any material}$$

Unit of dose equivalent (for protection) = rem:

$$\text{rems (Roentgen equivalents for man)} = \text{rads} \times \text{QF},$$

where QF (quality factor) depends upon the type of radiation and other factors. For γ rays and HE protons, $QF \approx 1$; for thermal neutrons, $QF \approx 3$; for fast neutrons, QF ranges up to 10; and for α particles and heavy ions, QF ranges up to 20.

Maximum permissible occupational dose for the whole body:

$$5 \text{ rem/year (or } \approx 100 \text{ millirem/week)}$$

Fluxes (per cm^2) to liberate 1R in carbon:

$$3 \times 10^7 \text{ minimum ionizing singly charged particles}$$

$$0.9 \times 10^9 \text{ protons of 1 MeV energy}$$

(These fluxes are correct to within a factor of 2 for all materials.)

Natural background: 120 to 130 millirem/year

- cosmic radiation (charged particles + neutrons) ~ 25
- cosmic radiation (γ rays) ~ 25
- radiation from rocks and air (γ rays) ~ 73

Cosmic ray background in counters: $\sim 1/\text{min}/\text{cm}^2/\text{ster}$

Der größte Teil der Intensität der Bremsstrahlung wird innerhalb eines Kegels mit dem Öffnungswinkel $\frac{1}{\gamma} = \frac{m_e}{E}$ emittiert, d.h. die Bremsstrahlung ist bei hohen Energien schärf nach vorwärts gebündelt. Für größere Winkel fällt der Wirkungsquerschnitt wie θ^{-4} . Bei Targetdicken $\frac{dx}{x_0} \gg \frac{1}{100}$ muß die Winkeldispersion der einfallenden Elektronen durch Vielfachstreuung berücksichtigt werden. Sie führt zu einer Aufweitung der Winkelverteilung der Photonen.

Strahlungskorrekturen

Strahlungskorrekturen, d.h. elektromagnetische Prozesse höherer Ordnung tragen zum Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung nur wenige Prozent bei.

Bremsstrahlung von schwereren Teilchen

Bremsstrahlung von schwereren Teilchen ist wegen $x_0 \sim m^2$ um einen Faktor $\left[\frac{m_e}{\text{Teilchenmasse}} \right]^2$ unterdrückt. Für das nächstschwerere Teilchen, das μ Meson, ist $\left[\frac{m_e}{m_\mu} \right]^2 = \left(\frac{0.51}{105} \right)^2 \approx 0.25 \cdot 10^{-4}$.

Literatur:

Eine ausführliche Darstellung der Wirkungsquerschnitte und Strahlungskorrekturen wird gegeben von H.D. Schulz, DESY-Bericht, DESY 66/16 (1966) (unveröffentlicht),

Näherungsformeln für $F(E,k)$ stehen bei B. Rossi, High Energy Particles, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. N.J. 1956, S.48 ff.

2.5. Vergleich des Energieverlustes von Elektronen durch Ionisation und Bremsstrahlung.

Wir vergleichen jetzt die Energieabhängigkeit des Energieverlustes von Elektronen durch Ionisation und Bremsstrahlung. Der Energieverlust $\frac{dE}{dx}$ durch Ionisation wird durch die Bethe-Blochformel beschrieben. Der Energieverlust durch Bremsstrahlung ist angenähert $-\frac{dE}{dx} \sim \frac{E}{x_0}$.

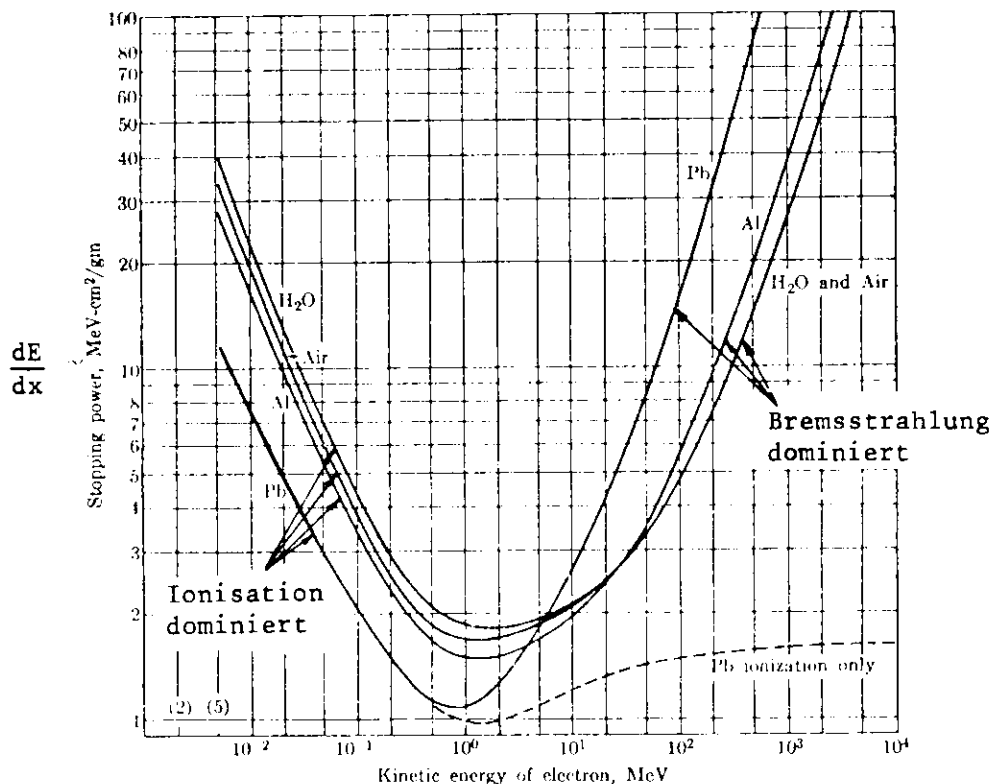


Abb. 6 Total stopping power for electrons in air, water, aluminum, and lead. For lead, the contribution from ionization (collision) alone is also shown. (Adapted from W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, London: Oxford University Press, 1954.)

aus: H. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley 1966, S.190

Abb. 6 zeigt den Energieverlust von Elektronen auf Grund beider Effekte in verschiedenen Materialien. Bei kleinen Energien dominiert Energieverlust durch Ionisation, bei großen Energien Energieverlust durch Bremsstrahlung. Das Minimum fällt etwa mit dem Minimum des Energieverlustes durch Ionisation bei $p \approx 3 \cdot m_e$ zusammen. Bei der sogenannten kritischen Energie E_c werden die Energieverluste durch Ionisation und Bremsstrahlung gleich groß. Man findet für Blei $E_c = 7.8 \text{ MeV}$,
für Wasserstoff $E_c = 300 \text{ MeV}$.

Oberhalb der kritischen Energie überwiegt der Energieverlust durch Bremsstrahlung und Bildung von elektromagnetischen Schauern.

Für schwerere Teilchen spielt Bremsstrahlung (fast) keine Rolle und es genügt, den Energieverlust durch Ionisation zu betrachten.

3. Reaktionen von Photonen

Im folgenden werden die wichtigsten elektromagnetischen Reaktionen von Photonen, die Comptonstreuung und die Paarbildung besprochen.

3.1 Comptonstreuung am Elektron $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

Als Comptonstreuung bezeichnet man die elastische Streuung von Photonen an geladenen Teilchen oder Kernen. Wir beschränken uns hier auf die Comptonstreuung am Elektron. (Die Comptonstreuung am Proton ist inzwischen theoretisch und experimentell untersucht worden. Sie läßt sich nicht allein mit den Mitteln der QED behandeln, da Effekte der starken Wechselwirkung eine Rolle spielen.)

Bei der Comptonstreuung ändert sich die Energie des Photons. Auf Grund der Kinematik gilt:

$$k' = \frac{k}{1 + \frac{k}{m_e} (1 - \cos\theta)} \quad (17)$$

(Laborsystem)

Notation:

k	Energie des einfallenden Photons
k'	Energie des gestreuten Photons
m_e	Elektronmasse
θ	Streuwinkel des gestreuten Photons



Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts unterscheidet man folgende Fälle:

a) extrem nichtrelativistisch

Der Wirkungsquerschnitt läßt sich mit klassischen Mitteln herleiten (s.z.B. P. Stähelin, Vorlesung Kernphysik, Hamburg 1969, S.H14/15).

Man erhält für Comptonstreuung von unpolarisierten Photonen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_o^2}{2} (1 + \cos^2\Theta) \quad (18)$$

(Laborsystem)

Der totale Wirkungsquerschnitt beträgt (unabhängig von der Polarisation)

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} r_o^2 \approx 0.665 \text{ barn} \quad (19)$$

(Thomsonwirkungsquerschnitt)

Notation: $r_o = 2.181 \text{ f} = \text{klass. Elektronenradius}$
 $\Theta = \text{Streuwinkel des Photons im Laborsystem}$

Gültigkeit: Die Formeln gelten für extrem nichtrelativistische Photonen, d.h. $k \ll m_e$ (Elektronmasse).

Abhängigkeit von k und Θ . Der differentielle Wirkungsquerschnitt hängt nicht von der Einfallenergie ab (für $k \ll m_e$) und verläuft wie $(1 + \cos^2\Theta)$ (symmetrisch um 90°).

b) allgemein (relativistisch und nichtrelativistisch)

Die exakte Berechnung würde von Klein und Nishina mit Hilfe der relativistischen Diractheorie durchgeführt. Es gilt für unpolarisierte Photonen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_o^2}{2} \frac{k'^2}{k^2} \left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - \sin^2\Theta \right) \quad (20)$$

(Laborsystem)

Notation: wie bei Gl. (17) und (18)

Herleitung: W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Clarendon Press, Oxford, 1957, S. 215-219.

Gültigkeit: Die Formel gilt exakt. Sie geht im Grenzfall kleiner k (d.h. $k \rightarrow k'$) in Gl. (18) über.

Abhängigkeit von θ und k' : Für $\theta \ll \sqrt{\frac{2m_e}{k}}$ gilt $\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx r_o^2$, d.h. $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist

von θ unabhängig. Für größere Winkel $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{k}}$ fällt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ etwa wie

$\frac{r_o^2}{2 m_e / k(1-\cos\theta)}$. Abb. 7 zeigt den Verlauf von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für verschiedene

Werte von $\alpha = \frac{k}{m_e}$. Die Energieverteilung der gestreuten Photonen ergibt sich aus (17) und (20) zu

$$\frac{d\sigma}{dk'} = \pi r_o^2 \frac{m_e}{k^2} \left[\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} + \left(\frac{m_e}{k'} - \frac{m_e}{k} \right)^2 - 2m_e \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k} \right) \right] \quad (20a)$$

(Laborsystem)

Der totale Wirkungsquerschnitt für Comptonstreuung am Elektron ist gegeben durch

$$\sigma_{tot} = 2\pi r_o^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1+2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \ln(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\}$$

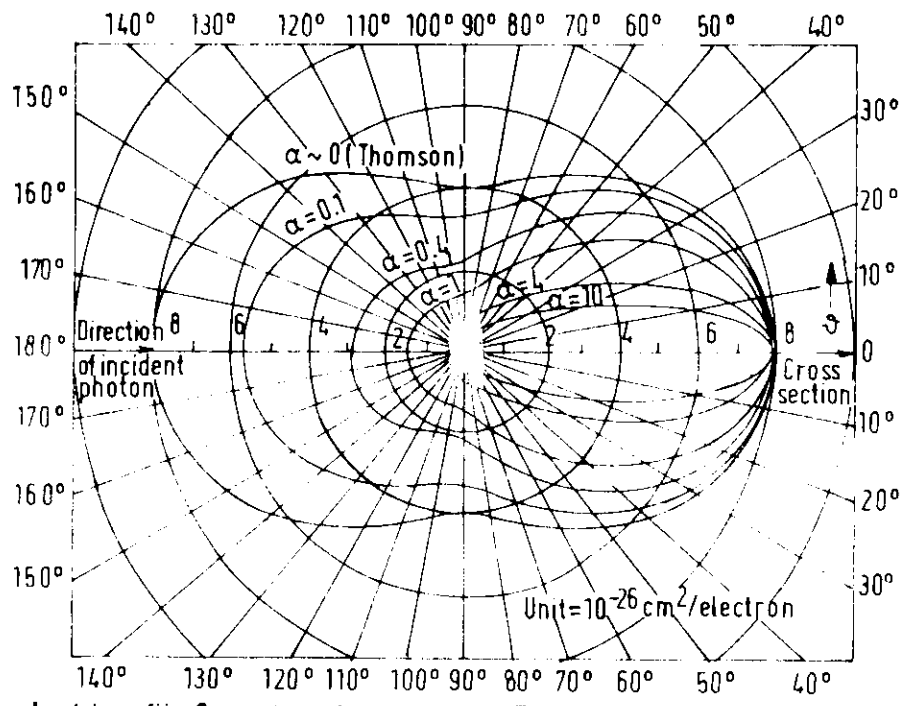
(21)

Notation: $\alpha = \frac{k}{m_e}$
sonst wie oben

Näherungsformel: Für $\frac{k}{m_e} \gg 5$ gilt die Näherungsformel

$$\sigma_{tot} = \pi r_o^2 \frac{m_e}{k} \left(\ln \frac{2k}{m_e} + \frac{1}{2} \right) \quad (21a)$$

Verlauf: Abb. 8 zeigt den Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts für Comptonstreuung am Elektron. Er fällt bei hohen Energien schwächer als $\frac{1}{k}$.



$\alpha = \frac{k}{m_e}$
 $k =$ Energie des einl. Photons
 $m_e =$ Elektronmasse
 aus: R. Evans
 The Atomic Nucleons
 Mac Graw Hill,
 1955, S. 683

Abb. 7 $d\sigma/d\Omega$ für Compton streuung am Elektron

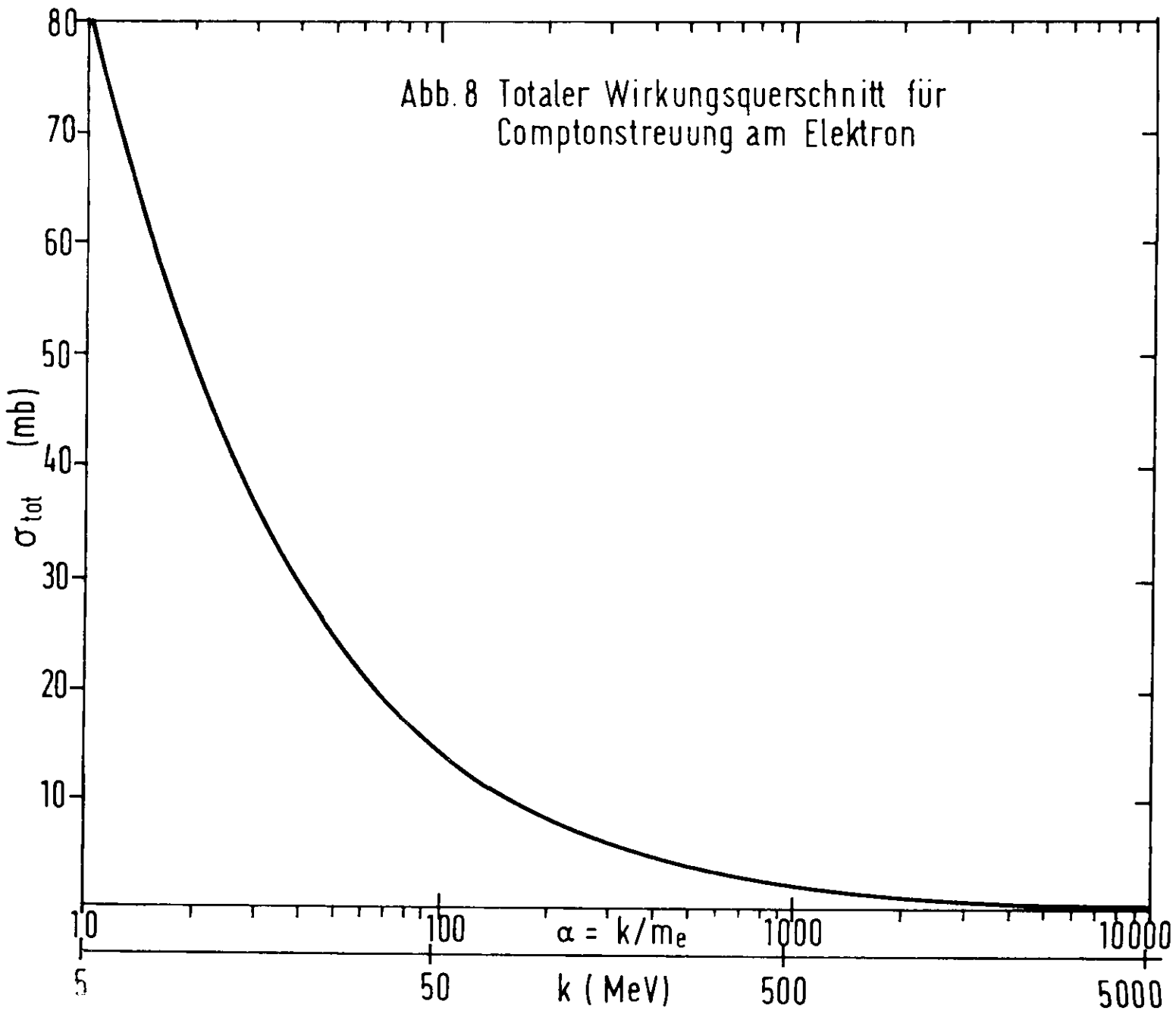


Abb. 8 Totaler Wirkungsquerschnitt für Comptonstreuung am Elektron

Comptonstreuung an Hüllenelektronen

Die obigen Formeln gelten für die Comptonstreuung an freien Elektronen. Die Ergebnisse sind auf Hüllenelektronen übertragbar, solange die Rückstoßenergie des Elektrons seine Bindungsenergie beträchtlich übertrifft. Der totale Comptonwirkungsquerschnitt verschiedener Absorber variiert also wie Z .

3.2 Paarbildung $\gamma Z + Ze^+e^-$

Treffen Photonen mit einer Energie $k > 2 m_e$ (bei Elektronentarget ist die Schwelle $k = 4 m_e$) auf Materie, so können sie im Feld der Kerne und Hüllenelektronen Elektron-Positronpaare erzeugen. Der Prozeß ist im Rahmen der QED eng mit der Bremsstrahlung von Elektronen verwandt. Wie die Bremsstrahlung von Elektronen so dominiert die Paarbildung von Photonen bei hohen Energien über andere konkurrierende Prozesse (Comptonstreuung). Wirkungsquerschnitte können mit Hilfe der QED exakt berechnet werden.

Im Fall größer Energien ($k \gg m_e$) erhält man folgende Näherungsformel

$$\phi(k, E_+) dE_+ dx = \frac{dx}{x_0} \frac{dE_+}{k} g(E_+, k) \quad (22)$$

(Laborsystem)

Notation:

- E_+ Gesamtenergie des erzeugten Positrons
- k Energie des einlaufenden Photons
- x_0 Strahlungslänge (s. Gl. 14)
- $\frac{dx}{x}$ Targetdicke in Einheiten von x_0
- $\phi(k, E_+) dE_+ dx$ Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon der Energie k in einem Target der Dicke dx ein e^+e^- Paar mit einer Positronenergie im Intervall $[E_+, E_+ + dE_+]$ erzeugt.
- $g(E_+, k)$ ist eine schwach von E_+ und k abhängige Funktion.

Man kann näherungsweise setzen für $k \gtrsim 100$ MeV

$$g(E_+, k) \approx \frac{7}{9} \quad (\text{auf } 10\text{-}20\% \text{ genau})$$

Gültigkeit: Die Formel gilt für Paarbildung bei relativistischen Energien ($k \gg m_e$) in einem dünnen Target.

Abhängigkeit von E_+ und Z :

Abb. 9 zeigt den Verlauf von $g(E_+, k)$, aufgetragen über E_+/k , dh. die Verteilung der Energie der erzeugten Positronen (Elektronen). $g(E_+, k)$ hat für $k \gtrsim 100$ MeV angenähert die Form eines Rechtecks, das sich nur noch schwach mit k ändert. Die Paare mit allen möglichen Werten von E_+ treten etwa gleich häufig auf. Die Z -Abhängigkeit steckt in $\frac{1}{x_0}$ und verhält sich etwa wie $Z(Z+1)$, analog zur Bremsstrahlung. $g(E_+, k)$ hängt nur schwach von Z ab (relative Unterschiede für verschiedene Z sind $\lesssim 10\%$).

Totaler Wirkungsquerschnitt

Der totale Wirkungsquerschnitt steigt zunächst mit wachsendem k an und erreicht dann angenähert ein Plateau, da für große k gilt

$$\int_0^1 g(E_+, k) d\left(\frac{E_+}{k}\right) \approx \text{const.} = \frac{7}{9} \quad (22a)$$

$$\text{und } \int \phi d(E_+/k) dx \approx dx/x_0 \cdot \frac{7}{9}$$

Abb. 10 zeigt den Verlauf des totalen Paarbildungsquerschnitts in Wasserstoff nach einer Rechnung von Knasel. Der asymptotische Wirkungsquerschnitt ist etwa 20 mb. Die Rechnung ist etwa auf 0.5 % genau und wurde durch Messungen innerhalb der Fehler von ca. 1 % bestätigt.

Strahlungskorrekturen

Die Strahlungskorrekturen zur Paarbildung sind klein. Sie betragen in Wasserstoff ca. 0.9 %.

Paarerzeugung von schweren Teilchen, z.B. $\gamma Z \rightarrow Z\mu^+\mu^-$

Paarerzeugung von schweren Teilchen ist wegen $x_0 \sim m^2$ um einen Faktor

$$\left[\frac{m_e}{\text{Teilchenmasse}} \right]^2 \text{ unterdrückt. Für } \mu \text{ Paarerzeugung ist } \left[\frac{m_e}{m_\mu} \right]^2 \approx$$

$\approx 0.25 \cdot 10^{-4}$, d.h. z.B. $\sigma(\gamma H_2 \rightarrow H_2\mu^+\mu^-) \approx 0.5 \mu\text{b}$ für $k \gtrsim 1$ GeV. Bei der Paarerzeugung von π und K Mesonen trägt die starke Wechselwirkung bei. Man findet deshalb größere Wirkungsquerschnitte als nach der QED erwartet, z.B. $\sigma(\gamma p \rightarrow p\pi^+\pi^-) \approx 14 \mu\text{b}$ für $k = 10$ GeV.

Literatur: z.B. H.D. Schulz, DESY-Bericht, DESY 66/16 (1966)

T. M. Knasel, DESY-Bericht, DESY 70/3 (1970)

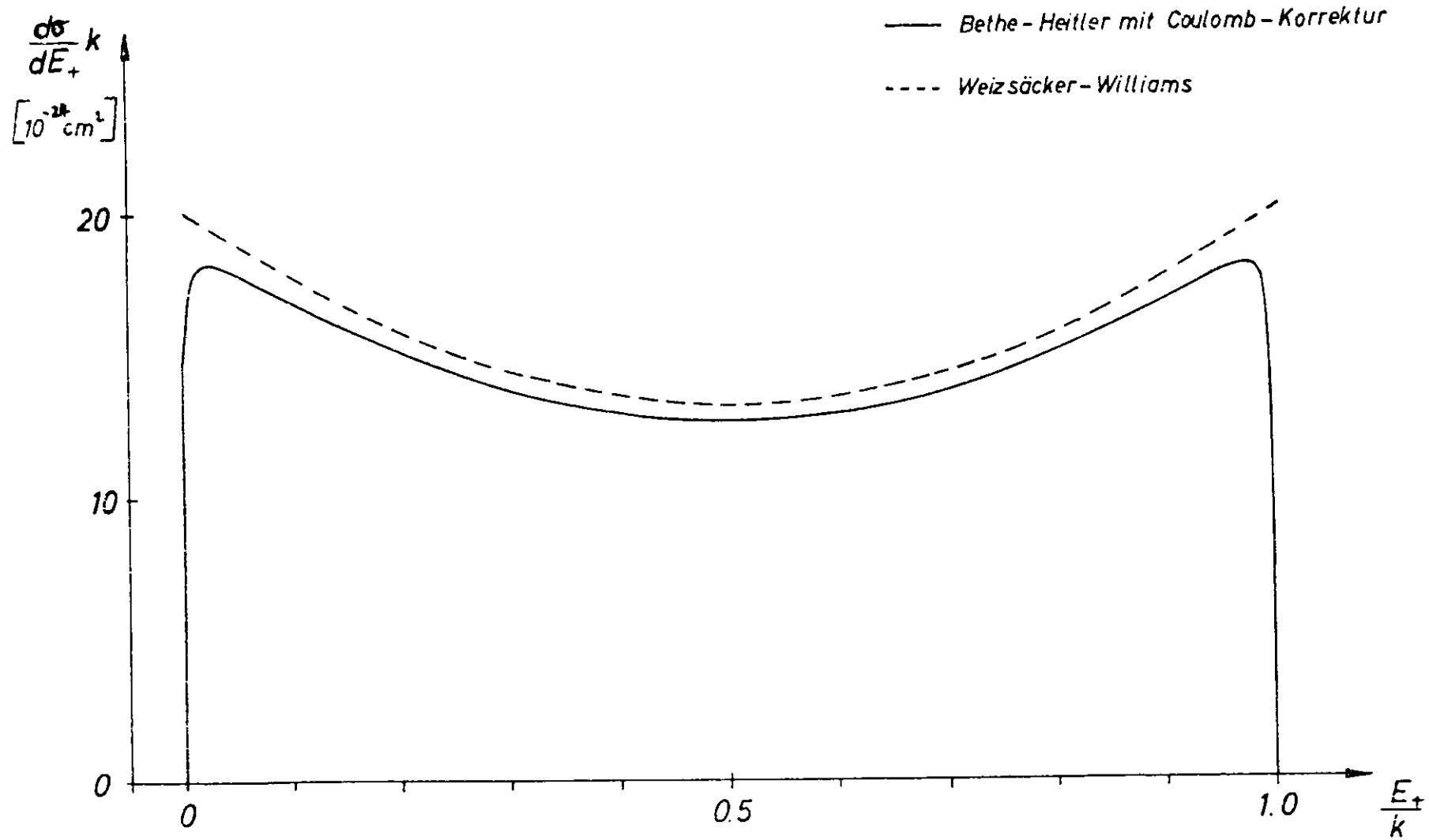


Abb.9 Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung, $k=5\text{ GeV}$, $Z=47$ (Silber)

Benutzt: $\frac{d\sigma}{dE_+} k = \frac{A}{N_0 g x_0} g(E_+, k)$ (vgl. Gl.(15))

E_+ = Energie des erzeugten Positrons
 k = Energie des einlaufenden Photons

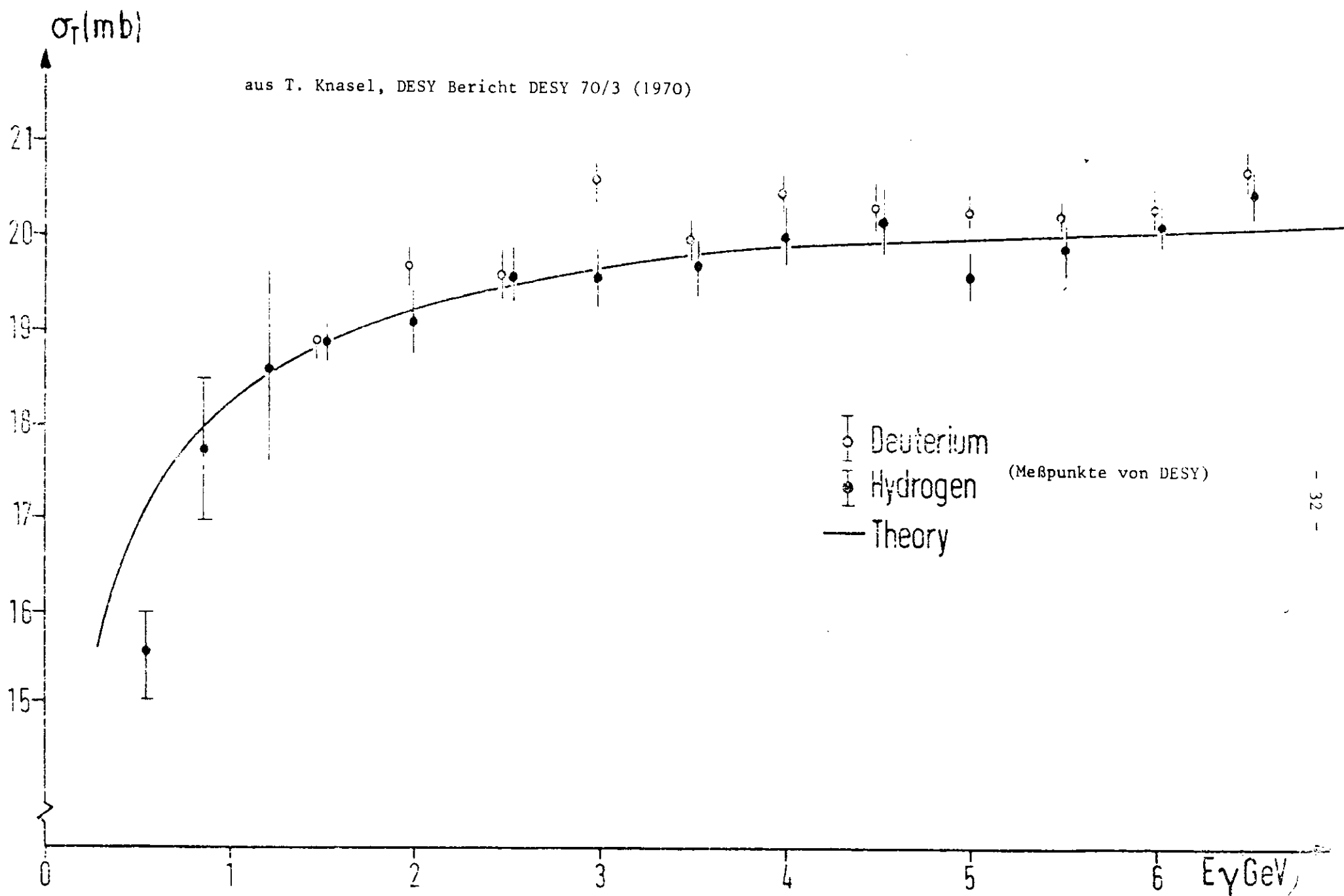


Abb.10 Totaler Wirkungsquerschnitt für e^+e^- Paarbildung an Wasserstoff (Deuterium)

E_γ = Energie des einlaufenden Photons.

3.3. Vergleich der Absorption von Photonen durch Photoeffekt, Comptonstreuung und Paarerzeugung

Außer Paarerzeugung und Comptoneffekt trägt bei kleinen Energien auch der Photoeffekt zur Absorption von γ Quanten in Materie bei. Auf den Photoeffekt wird hier nicht näher eingegangen. Die Absorption von Photonen in Materie wird beschrieben durch

$$I(x) = I_0 e^{-\kappa x} \quad (23)$$

Notation: I_0 Einfallende Photonenintensität
 $I(x)$ Photonenintensität nach Durchqueren der Schichtdicke x
 κ Absorptionskoeffizient mit der Dimension 1/Länge;
 $1/\kappa$ wird oft mittlere freie Weglänge genannt.

κ hängt mit dem Wirkungsquerschnitt zusammen über

$$\kappa = \frac{N_0 \rho}{M_A} \cdot \sigma \quad (24)$$

Notation: $N_0 = 6.022 \cdot 10^{23}/\text{mol}$ = Loschmidtsche Zahl
 ρ = Dichte des Absorbers (g/cm^3)
 M_A = Atomgewicht des Absorbers ($\approx A$)
 $N_0 \cdot \rho / M_A$ = Zahl der Targetkerne/ cm^3

Es ist
$$\kappa = \kappa_{\text{Photo}} + \kappa_{\text{Compton}} + \kappa_{\text{Paar}} \quad (25)$$

Statt κ verwendet man auch $\kappa' = \kappa/\rho$.

Aus (15), (22a) und (24) erhält man $\kappa_{\text{Paar}} \approx \frac{7}{9} \frac{1}{x_0}$ (für $k \gtrsim 100$ MeV). Die Intensität eines Photonenstrahls wird in einem Absorber der Länge $x_0 \cdot 9/7$ durch Paarbildung auf 1/e der Einfallintensität reduziert.

Die Energieabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten κ' für Blei und die Beiträge der drei Prozesse sind in Abb. 11 dargestellt. Man sieht, daß bei hohen Energien die Paarbildung über die anderen Prozesse dominiert. Für andere Materialien haben die einzelnen Beiträge in Abb. 11 andere Häufigkeiten wegen der verschiedenen Z Abhängigkeit von Comptonstreuung ($\sim Z$) und Paarbildung ($\sim Z(Z+1)$). Man kann sich die Situation für Wasserstoff leicht aus Abb. 8 und 10 konstruieren.

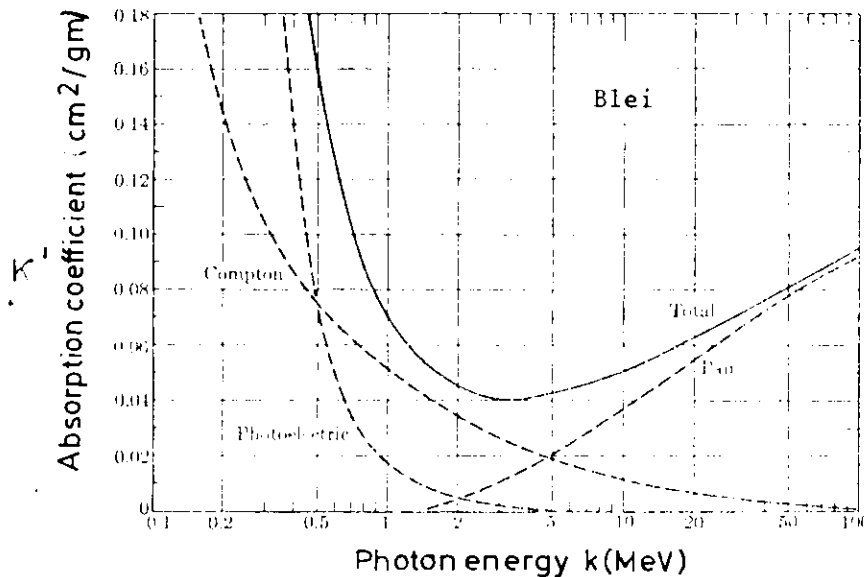


Abb.11 Total mass-absorption coefficients for gamma rays in lead and the contributions from the photoelectric effect, the Compton effect, and pair production.

Aus: H. Enge, Introd. to Nuclear Physics,
Addison-Wesley 1966, S.193

4. Elektromagnetische Schauer

Wenn ein hochenergetisches Elektron oder Photon auf ein "dickes Stück" Materie (d.h. viele Strahlungslängen) fällt, so löst es einen Schauer aus. Das einfallende Teilchen macht Bremsstrahlung bzw. Paarbildung. Dabei entstehen im allgemeinen zwei Teilchen mit großer Energie (e, γ bzw. e^+, e^-). Diese reagieren wieder und lösen 4 Teilchen aus usw. Die Zahl der Teilchen wächst in einem Kaskadenprozeß solange, bis die Energie pro Teilchen die kritische Energie erreicht hat. Unterhalb der kritischen Energie überwiegt der Energieverlust durch Ionisation über Energieverlust durch Bremsstrahlung und die Elektronenkomponente wird durch Ionisationsverluste reduziert bzw. zur Ruhe gebracht, während die Photonenkomponente durch Freisetzung von Elektronen ihre Energie verliert. Abb. 12 zeigt die Zahl der Elektronen in einem Schauer (aufgetragen als $\log_{10} N$) als Funktion der Dicke des Absorbers (in Strahlungslängen). Der Parameter der einzelnen Kurven ist die Energie E des den Schauer auslösenden Teilchens (angegeben in vielfachen der kritischen Energie E_c). Die Zahl der Elektronen im Schauermaximum beträgt (lt. Abb. 12)

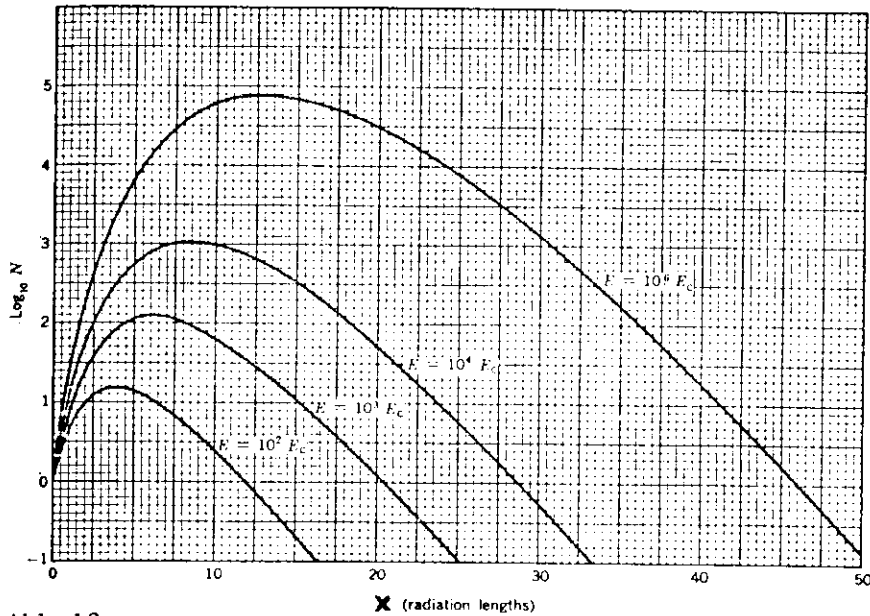


Abb. 12 The total number N of electrons in a shower initiated by an electron of energy E , as a function of the depth x in radiation lengths. E_c is the critical energy of the material. [After Rossi and Greisen, *Revs. Modern Phys.*, **13**, 240 (1941).]

aus R. Leighton, Principles of Modern Physics,
Mc Graw Hill, 1959, S.693.

ca. $0.1 E/E_c$ Die Zahl der Elektronen im Schauer fällt bei einer Absorberdicke von $3 x_m$ wieder auf 1 ab, wobei x_m die Dicke beim Schauersmaximum bezeichnet. Die kritische Energie liegt bei

$E_c = 102$	MeV	für Kohlenstoff
= 88.7	MeV	für Stickstoff
= 77.7	MeV	für Sauerstoff
= 48.8	MeV	für Aluminium
= 24.3	MeV	für Eisen
= 7.8	MeV	für Blei
= 84.2	MeV	für Luft
= 83.8	MeV	für Wasser

Elektromagnetische Schauer spielen eine große Rolle beim Eindringen von Teilchen der Höhenstrahlung in die Erdatmosphäre und bei der Abschirmung von Elektronen- und Photonenstrahlen an Hochenergiebeschleunigern.

Anwendung: Messung von Photonenenergien in einem Schauerzähler

In der Hochenergiephysik nutzt man die Schauerbildung aus, um die Energie von Photonen oder Elektronen zu messen. Man verwendet die folgenden Anordnungen:

a) Blei- Szintillatorsandwich

Etwa 10 - 20 sich abwechselnde Schichten von 0.5 - 1 cm dicken Bleiplatten werden hintereinander aufgestellt. Die Intensität des Szintillationslichts aus den einzelnen Szintillatorschichten ist der Zahl der in der jeweiligen Schicht vorhandenen Schauerelektronen proportional. Man mißt also Schauerkurven wie in Abb. 12, aus denen die Energie des Primärteilchens bestimmt werden kann.

b) Beiglas-Cerenkovzähler

Photonen werden in bleihaltigem Glas aufgeschauert. Die Schauerelektronen erzeugen Cerenkov-Licht, dessen Intensität gemessen wird. Mit dem Verfahren a) und b) kann man Photonenenergien auf ca. 10 % genau messen.

c) Total- absorbierende Zähler

Man baut große Blöcke von NaJ Szintillator, die so bemessen sind, daß alle Elektronen eines Schauers darin zur Ruhe kommen. Mit diesem relativ kostspieligen Verfahren kann man Photonenergien von 1 - 20 GeV auf ca. 1 - 2% genau messen.

Literatur zur Schauertheorie

1. B. Rossi, High Energie Particles, Prentice Hall Inc.
Englewood Cliffs. N.J. 1956
2. W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation,
Clarendon Press, Oxford, 1954, S. 386 ff.

IV. Die Feynmanregeln und ihre Anwendung auf elektromagnetische Wechselwirkungen

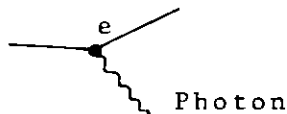
Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die Feynmanregeln zur Berechnung von Übergangsmatrixelementen von elektromagnetischen Wechselwirkungen hergeleitet und angewendet. Wir verzichten auf die umfangreiche, ziemlich abstrakte Herleitung der Feynmanregeln mit Hilfe der Störungstheorie der Quantenelektrodynamik und geben stattdessen vereinfachte plausible Herleitungen. Die Regeln werden zur expliziten Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für Elektron-Proton Streuung (Mottformel) benutzt. Dabei haben wir versucht, alle Zwischenschritte verständlich zu machen. Anschließend führen wir die Formfaktoren der Nukleonen ein. Wir setzen elementare Kenntnisse der Diracgleichung und der Formulierung von Wirkungsquerschnitt und Übergangsmatrixelement in der relativistischen Streutheorie voraus.

1. Einleitung

Die Feynmanregeln sind ein Rezept zur Berechnung von Matrixelementen für elektromagnetische Prozesse*. Aus den Matrixelementen erhält man Wirkungsquerschnitte oder andere meßbare Größen. Die Feynmanregeln sind von großer praktischer Bedeutung, weil sie - im Gegensatz zu vielen anderen theoretischen Formalismen der Hochenergiephysik - erlauben, die behandelten (elektromagnetischen) Prozesse exakt zu berechnen. R.P. Feynman hat um 1948 folgendes Konzept zur Beschreibung von elektromagnetischen Wechselwirkungen entwickelt:

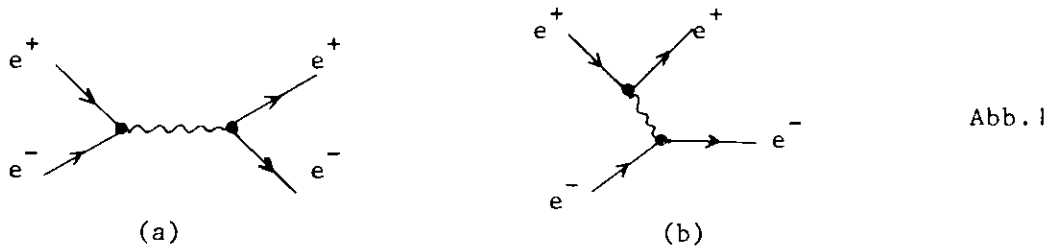
Jede elektromagnetische Wechselwirkung kann man sich aus Fundamentalprozessen zusammengesetzt denken, bei denen ein Photon an ein Elektron (oder an die Ladung



e und das magnetische Moment eines anderen Teilchens) ankoppelt. Die Kopplung, dh. die Wechselwirkungsstärke, wird durch die Ladung e beschrieben. Ein Diagramm, das aus solchen Fundamentalprozessen zusammengesetzt ist, heißt Feynman-diagramm.

* Mit gewissen Modifikationen kann man diese Regeln auch zur Beschreibung von schwachen und starken Wechselwirkungen verwenden. In beiden Fällen sind jedoch nur die niedrigsten Näherungen brauchbar.

Als konkretes Beispiel betrachten wir zunächst die elastische e^+e^- Streuung:



Dies sind die Feynman-Diagramme niedrigster Ordnung. Die Diagramme haben drei wesentliche Bestandteile:

- (a) äußere Linien, die die ein- und auslaufenden freien Teilchen beschreiben,
 - (b) Vertices, die die Ankopplung des Photons beschreiben,
 - (c) innere Linien (Propagatoren), die die ausgetauschten Teilchen beschreiben.
- In diesem Konzept wird die Wechselwirkung durch Austausch von Teilchen vermittelt.

Die Feynmanregeln sind das Rezept, wie man jedem graphischen Bestandteil der Feynmandiagramme bestimmte Größen zuordnet. Man erhält das Matrixelement für den Prozess durch einfaches Aneinandermultiplizieren dieser Größen.

Neben den in Abb. 1 dargestellten Diagrammen gibt es noch (beliebig viele) kompliziertere Diagramme, die aus mehr als zwei Fundamentalprozessen zusammengesetzt sind. Feynman hat gezeigt, daß man das Matrixelement in einer Störungsrechnung nach den Beiträgen der Diagramme verschiedener Ordnung entwickeln kann. Als Ordnung bezeichnet man die Anzahl der Fundamentalprozesse. Wie wir sehen werden, enthält ein Diagramm n-ter Ordnung einen Faktor e^n , wo $e = (4\pi/137)^{1/2}$. Die niedrigsten Ordnungen liefern daher im allgemeinen schon ziemlich gute Näherungen.

2. Voraussetzungen

Im folgenden werden die Größen hergeleitet bzw. angegeben, die man zur Beschreibung der inneren und äußeren Linien und der Vertices von Feynmandiagrammen braucht. Dazu führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

2.1. Metrik und Bezeichnungen

a) Wir verwenden die folgenden Vierervektoren:

4-Impuls $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (\vec{p}, p_4)$ mit $p_4 = ip_0 = iE$ ($c = \text{Lichtgeschwindigkeit} \equiv 1$)

$\vec{p} = 3\text{-Impuls}$

$E = \text{Gesamtenergie des Teilchens}$

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

$m = (\text{Ruh}) \text{Masse des Teilchens}$

4-Ort $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\vec{x}, x_4)$ mit $x_4 = i t$

$t = \text{Zeit}$

$\vec{x} = \text{Ortsvektor}$

Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes $A = (\vec{A}, i\phi)$

mit $\vec{A} = \text{Vektorpotential der klassischen Elektrodynamik}$

$\phi = \text{elektrostatistisches Potential}$

4-Polarisationsvektor des Photons $\epsilon = (\vec{\epsilon}, \epsilon_4)$

mit $\vec{\epsilon} = \text{räumlicher Polarisationsvektor des Photons}$

$\vec{\epsilon}$ ist ein Einheitsvektor und zeigt in Richtung des Vektors der elektrischen Feldstärke.

b) Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren ist in der hier benutzten Metrik*

$$p^2 = (\vec{p}, ip_0) \cdot (\vec{p}, ip_0) = \vec{p}^2 - p_0^2 = \vec{p}^2 - E^2 = -m^2$$

Wenn $|p^2|$ das Quadrat der Ruhmasse eines Teilchens ist, sagt man, "das Teilchen ist auf der Massenschale". Freie Teilchen sind stets auf der Massenschale.

Das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren ist relativistisch invariant.

Man bezeichnet 4-Vektoren auch durch Größen mit griechischen Indizes, z.B. p_μ , x_μ , A_μ . Das Skalarprodukt wird dann geschrieben als

$$p^2 = \sum_{\mu=1}^4 p_\mu p_\mu \equiv \underbrace{p_\mu p_\mu}$$

Häufig verwendete Abkürzung: Zwei gleichlautende griechische Indizes implizieren eine Summation von 1...4.

* In einer anderen, häufig benutzten Metrik setzt man

$$p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = E^2 - \vec{p}^2 = +m^2$$

Im folgenden benutzen wir diese Summationskonvention. Wenn wir eine einzelne Größe mit griechischem Index wie p_μ hinschreiben, ist stets $\mu = 1, \dots, 4$ impliziert, d.h. die Schreibweise $A_\mu = \epsilon_\mu e^{ikx}$ repräsentiert vier Beziehungen:
 $A_1 = \epsilon_1 e^{ikx}, \dots, A_4 = \epsilon_4 e^{ikx}$.

c) Differentialoperatoren

Wir verwenden die Operatoren:

"Nabla" $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}) = (\vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial x_4}) = (\vec{\nabla}, -i \frac{\partial}{\partial t})$

"Quabla" $\square = \nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ↑
Minuszeichen beachten

Wie in der nichtrelativistischen Quantenmechanik ordnet man \vec{p} und E die folgenden Operatoren zu

$p \leftrightarrow \frac{1}{i} \vec{\nabla}$ $E \leftrightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ (beachte $\hbar = 1$)

also $p = (\vec{p}, iE) \leftrightarrow (\frac{1}{i} \nabla, -\frac{\partial}{\partial t}) = -i \nabla$

dh. für den Operator zu p gilt $p_{op} = -i \nabla$.

d) Ebene Welle

Die ebene Welle zum Impuls k ist gegeben durch $e^{ikx} = e^{i(\vec{k}\vec{x} - k_0 t)}$

e) δ-Funktion

Wir benutzen die folgenden Eigenschaften der δ-Funktion:

1) $\delta(x-x') = 0$ für $x \neq x'$ $x, x', z = 4$ -Vektoren

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') d^4 x' = 1$

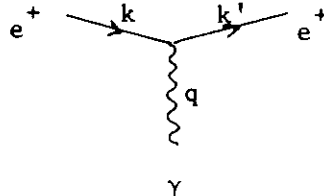
3) $\delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(x-x')} d^4 z$

4) $\delta(x) = \delta(-x)$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x)$

2.2. "Virtuelle" Teilchen und Propagator

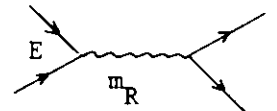
In diesem Abschnitt behandeln wir die inneren Linien der Feynmandiagramme und führen den Begriff des virtuellen Teilchens und des Propagators ein. Wir betrachten den oberen Vertex von Abb.1(b). Die zugehörigen 4-Impulse seien k, k' und q



Am Vertex gilt 4-Impulserhaltung. Für endliche Streuwinkel (dh. endliche Impulsüberträge) ist $q = k' - k \neq 0$. Dann wird auch das Quadrat der "Masse" $-q^2 \neq 0$. D.h. ein auf einer inneren Linie ausgetauschtes Photon hat eine Masse $\sqrt{-q^2} \neq 0$. Für ein reelles (freies) Photon ist dagegen die "Ruh"masse $m = 0$. Man spricht daher bei einem Teilchenaustausch von virtuellen Teilchen (d.h. Teilchen, die nicht auf der Massenschale sind). Das ausgetauschte Teilchen bleibt nur für die sehr kurze Dauer der Wechselwirkungen virtuell, dh. nicht auf der Massenschale. Der Beitrag eines ausgetauschten Teilchens zum Matrixelement (= Übergangsamplitude) heißt Propagator. Wir geben jetzt zwei Plausibilitätsargumente für die Form des Propagators an.

(a) Via Breit-Wigner Amplitude

Erinnern wir uns an die resonanten Zwischenzustände bei der Streuung von zwei Teilchen bei einer Gesamtenergie E im Schwerpunktsystem. Wir beschreiben sie durch eine Breit-Wigner-Amplitude (s.Band I)



$$\frac{1}{m_R^2 - E^2 - i\frac{\Gamma}{2}} \quad \text{oder relativistisch} \quad \frac{1}{m_R^2 - E^2 - im_R\Gamma} ;$$

m_R und Γ sind die Ruhmasse und Breite des resonanten Zwischenzustandes. Jetzt betrachten wir ein stabiles Zwischenteilchen, dh. $\Gamma = 0$. Wir bekommen daher einen Faktor in der Amplitude von der Form

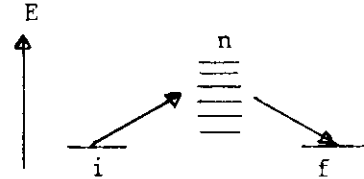
$$E^2 = p^2 + m^2 \quad \frac{1}{m^2 - E^2} = \frac{1}{m^2 + q^2}, \quad (q = 4\text{-Impuls des virtuellen Teilchens})$$

wenn m die Ruhmasse und $E^2 = -q^2$ das Quadrat der Masse des virtuellen Teilchens ist. Diesen Faktor nennt man den Propagator. Speziell für das Photon ist auch $m^2 = 0$, also der Propagator ist $\frac{1}{q^2}$.

In Abb.1(a) ist $q^2 \neq 0$. In Abb.1(b) wird $q^2 \rightarrow 0$ für Streuwinkel $\Theta \rightarrow 0$, d.h. der Propagator $1/q^2$ und damit die Amplitude gehen gegen ∞ für $q^2 \rightarrow 0$, wie bekannt von der Vorwärts-Coulombstreuung.

(b) Via Störungstheorie 2. Ordnung

Erinnern wir uns an die nichtrelativistische Störungstheorie 2ter Ordnung (wie sie z.B. aus der Kernphysik bekannt sein sollte): Ein Übergang zwischen zwei Zuständen



$$i \rightarrow f$$

gehe über einen Satz von Zwischenzuständen n vor sich; die Energie braucht bei den Übergängen $i \rightarrow n$ und $n \rightarrow f$ nicht erhalten zu sein (Unschärferelation; der Zwischenzustand existiert nur kurze Zeit), und das Matrixelement ist

$$H_{fi} = \sum_n \frac{H_{fn} H_{ni}}{E_i - E_n},$$

d.h. es ist proportional dem Produkt der Übergangsmatrixelemente H_{fn} und H_{ni} für die Übergänge $i \rightarrow n$ und $n \rightarrow f$ und der "Propagationsfunktion" des Zwischenzustandes n der Form $\frac{1}{E_i - E_n}$. Bei Energieerhaltung geht die Amplitude $\rightarrow \infty$. Die relativistische Verfallgemeinerung ist exakt ebenso wie bei der Breit-Wigner-Formel beschrieben* und liefert den Propagator:

$$\frac{1}{E_i - E_n} \rightarrow \frac{1}{E_i^2 - E_n^2} = \frac{1}{-q^2 - m^2} \quad \frac{1}{E_n^2 - E_i^2} = \frac{1}{m^2 + q^2}$$

Wir sehen hieraus, daß die Anwendung des Propagators hier relativistische Störungstheorie 2. Ordnung bedeutet; die Masse (oder Energie im Schwerpunktsystem) des Zwischenzustandes ist allerdings beim Propagator auf einen festen Wert m , (nämlich die Masse, die das ausgetauschte Teilchen als freies Teilchen haben würde) festgelegt.

Die vorstehenden Erläuterungen sollen nur die wichtigen Begriffe "virtuelles" ausgetauschtes Teilchen und "Propagator" einführen; wir werden später (in 3.2) noch einmal eine exakte Herleitung des Propagators (mit Hilfe der Greenschen Funktion) geben.

* s. Band I. S. 30

2.3. Beschreibung von freien Elektronen

Wir beschreiben jetzt die ein- und auslaufenden (freien) Elektronen und Positronen. Ihre Zustandswellenfunktionen $\psi(x)$ sind die Lösungen der freien Diracgleichung

$$(1) \quad \boxed{(\gamma_\mu \nabla_\mu + m) \psi(x) = 0}$$

$$\left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi(x) = 0$$

Die γ 's sind 4×4 Matrizen und erfüllen die Beziehung

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 2 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (\text{antivertauschbar})$$

$\delta_{\mu\nu}$ ist das Kroneckersymbol

Explizite Darstellung der γ Matrizen:

$$(2) \quad \boxed{\begin{array}{l} \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3) \\ \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Pauli-Matrizen}}$$

Damit sind die γ 's hermitisch: $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$; ferner $\gamma_1\gamma_1 = \gamma_2\gamma_2 = \gamma_3\gamma_3 = \gamma_4\gamma_4 = 1$.
Für später benötigen wir den Tensor $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$ mit den Komponenten

$$\sigma_{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \sigma_{23} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{31} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad \sigma_{21} = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Die Lösungen der Diracgleichung lauten

(Quantisierungsachse ist +3-Richtung)	Elektron mit Impuls \vec{p}	Positron mit Impuls \vec{p}
Spin \uparrow	$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} u^1(\vec{p}) e^{ipx}$	$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}^3(-\vec{p}) e^{ipx}$
Spin \downarrow	$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} u^2(\vec{p}) e^{ipx}$	$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}^4(-\vec{p}) e^{ipx}$

(V = Volumen des Kastens, in dem das System eingeschlossen ist.)

Die 4-komponentigen Spinoren u^i haben die Form

$$u^1(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m + p_0}{2p_0}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{m + p_0} \\ \frac{p_1 + ip_2}{m + p_0} \end{pmatrix} \quad u^2(\vec{p}) = \sqrt{\frac{m + p_0}{2p_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1 - ip_2}{m + p_0} \\ \frac{-p_3}{m + p_0} \end{pmatrix}$$

(3b)

$$u^3(-\vec{p}) = \sqrt{\frac{m + p_0}{2p_0}} \begin{pmatrix} \frac{-p_1 + ip_2}{m + p_0} \\ \frac{p_3}{m + p_0} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u^4(-\vec{p}) = \sqrt{\frac{m + p_0}{2p_0}} \begin{pmatrix} \frac{p_3}{m + p_0} \\ \frac{p_1 + ip_2}{m + p_0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der "adjugierte Spinor" ist durch $\bar{u}^i \equiv u^{i*} \gamma_4$ definiert.

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \bar{u}^1(p) &= \sqrt{\frac{m + p_0}{2p_0}} \left(1 \quad 0 \quad \frac{p_3}{m + p_0} \quad \frac{p_1 - ip_2}{m + p_0} \right) \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{m + p_0}{2p_0}} \left(1 \quad 0 \quad \frac{-p_3}{m + p_0} \quad \frac{-p_1 + ip_2}{m + p_0} \right) \end{aligned}$$

Die Normierung ist so gewählt, daß wir 1 Teilchen pro Volumen V haben: §

$$\text{Dichte } \rho = \frac{\text{Zahl}}{\text{Vol.}} = \psi^* \psi = \frac{1}{V} u^{i*}(\vec{p}) u^i(\vec{p}) = \frac{1}{V} \quad (\text{für } i = 1, \dots, 4).$$

Die Spinoren $u^i(\vec{p})$ sind die Lösungen der Gleichung

$$(4) \quad (i\gamma_\mu p_\mu + m) u(\vec{p}) = 0,$$

welche die Transformation der Diracgleichung in dem Impulsraum darstellt (man erinnere sich: $p_{op} = -i \nabla$).

§ Beachte, daß die von uns - der Einfachheit halber - gewählte Normierung der Spinoren bzw. der Wellenfunktionen ψ relativistisch nicht invariant ist. Infolgedessen wird auch das aus den Zustandswellenfunktionen ψ gebildete Matricelement (Abschnitt 4.1) nicht-invariant. Wir berücksichtigen das bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts durch Verwendung der Wirkungsquerschnittsformel mit nicht-invariantem Matricelement.

Zur Notation: Wir benutzen griechische Indizes zur Kennzeichnung der vier Komponenten von 4-Vektoren im Orts-Zeit-Raum! Beispiel: p_μ, γ_μ ($\mu = 1, \dots, 4$) Die vier γ -Matrizen bilden zusammen einen vierkomponentigen Vektor im 4-Vektorraum.

Die vier Komponenten der Spinoren u^i und die 4x4 Komponenten jeder γ -Matrix werden dagegen mit lateinischen Buchstaben indiziert. Denn die Spinoren und einzelnen γ -Matrizen sind Größen im 4-dimensionalen Spinorraum, der nicht mit dem 4-dimensionalen Orts-Zeit-Raum verwechselt werden darf.

Die folgenden Identitäten werden wir später noch brauchen:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^2 u_a^i(\vec{p}) \bar{u}_b^i(\vec{p}) = \frac{1}{2p_0} (-i\gamma_\mu p_\mu + m)_{ab} = \frac{1}{2p_0} \left(-i \sum_{\mu=1}^4 (\gamma_{ab})_\mu p_\mu + m_{ab} \right)$$

$$\sum_{i=3}^4 u_a^i(-\vec{p}) \bar{u}_b^i(-\vec{p}) = \frac{1}{2p_0} (-i\gamma_\mu p_\mu - m)_{ab}$$

Die Summation auf der linken Seite geht über die beiden möglichen Spinstellungen eines durch u beschriebenen Teilchens oder Antiteilchens. Hier sind a und b Spinorindizes. Läßt man a und b unabhängig voneinander von 1 bis 4 laufen, so erhält man auf der linken Seite jeweils die 16 Elemente einer 4×4 Matrix. Rechts stehen ebenfalls die Elemente einer 4×4 Matrix. Gl.(5) läßt sich durch Einsetzen verifizieren z.B. für $a = b = 1$ wird

$$\sum_{i=1}^2 u_1^i(\vec{p}) \bar{u}_1^i(\vec{p}) = \frac{1}{2p_0} (-i\gamma_\mu p_\mu + m)_{11}$$

$$u_1^1(\vec{p}) \bar{u}_1^1(\vec{p}) + u_1^2(\vec{p}) \bar{u}_1^2(\vec{p}) = \frac{1}{2p_0} \left(-i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{11}^\mu p_\mu + m \right)$$

$$\frac{m + p_0}{2p_0} \cdot 1 + \frac{m + p_0}{2p_0} \cdot 0 = \frac{1}{2p_0} (-i \cdot 1 \cdot p_4 + m)$$

$$\frac{m + p_0}{2p_0} = \frac{p_0 + m}{2p_0}$$

2.4. Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon

Nun sehen wir uns die Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon an. Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des Dirac-Elektrons ist ja

$$(6) \quad j_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (\mu = 1, \dots, 4),$$

daher ist der elektrische Strom gegeben durch $-ej_\mu$ und die Wechselwirkungsenergie dichte des Stromes des Elektrons mit einem elektromagnetischen Feld durch

$$(7) \quad H^{em.} = -ej_\mu A_\mu = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$$

wo A_μ = Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes, $A_\mu = (\vec{A}, i\phi)$.

ϕ = Elektrostat. Potential

\vec{A} = Vektorpotential

Beweis: Wir führen die elektromagnetische Wechselwirkung nach der üblichen Vorschrift in die obige Diracgleichung Gl.(4) ein:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}, \quad p_0 = E \rightarrow p_0 - e\phi$$

Dann ist die Diracgleichung mit elektromagnetischer Wechselwirkung

$$(8) \quad [i\vec{\gamma}\vec{p} - ie\vec{\gamma}\vec{A} + i\gamma_4(ip_0) - ie\gamma_4(i\phi) + m] u(\vec{p}) = 0$$

Um zu sehen, wie der Hamiltonoperator jetzt aussieht, bringen wir dies in die Form $Hu(\vec{p}) = Eu(\vec{p})$ (wo $E = p_0$); dh. wir bringen den Term $-\gamma_4 p_0$ auf die rechte Seite als $\gamma_4 p_0$ und multiplizieren beide Seiten von links mit γ_4 ; dann steht rechts wegen $(\gamma_4)^2 = 1$ der Energieoperator p_0 und links steht der Hamiltonoperator

$$(9) \quad H_{op} = i\gamma_4\vec{\gamma}\vec{p} - ie\gamma_4\vec{\gamma}\vec{A} + e\phi + \gamma_4 m.$$

Der durch das A_μ -Feld neu hinzugekommene Teil des Hamiltonoperators (Energieoperators) ist also

$$H_{op}^{em.} = -ie\gamma_4(\vec{\gamma}\vec{A} + \underbrace{\gamma_4 i\phi}_{A_4}) = -ie\gamma_4\gamma_\mu A_\mu$$

und damit wird die elektromagnetische Wechselwirkungsenergie dichte

$$H^{em.} = \psi^* H_{op}^{em.} \psi = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu \psi, \quad \text{q.e.d.}$$

2.5. Beschreibung von freien Photonen

Ein freies Photon mit Impuls $\vec{k} = (\vec{k}, ik_0)$ und Polarisationsvektor $\epsilon = (\vec{\epsilon}, \epsilon_4)$ beschreiben wir durch eine ebene elektromagnetische Welle des 4-Vektorpotentials:

$$(10) \quad A_\mu(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2k_0 V}}}_{\text{Normierungs- faktor}} \underbrace{\epsilon_\mu(\vec{k})}_{\text{Polar- Vektor (Einheits- vektor)}} \underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{ebene Welle (vom Betragsquadrat 1)}} \quad (\mu = 1, \dots, 4)$$

Die räumliche Komponente $\vec{\epsilon}$ des Polarisationsvektors beschreibt die Richtung des elektrischen Vektors (d.h. der elektrischen Feldstärke).

Wenn man von der Polarisation des Photons redet ist stets der Polarisationszustand des Vektors der elektrischen Feldstärke (des Photons) gemeint und nicht der Polarisationszustand des Photonenspins.

In (10) ist die Normierung so gewählt, daß wir wieder 1 Photon/V, d.h. eine Energiedichte k_0/V haben (beachte $\hbar = 1$).

Beweis: Die Energiedichte ist nach der bekannten Formel aus der klassischen Elektrodynamik

$$U = \frac{1}{8\pi} [|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2] + \text{konjugiert Komplexes.}$$

Das konjugiert Komplexe müssen wir addieren, da wir in der Quantenmechanik stets mit komplexen Wellen arbeiten (siehe Gl.(10), die Energiedichte aber natürlich reell ist. Wir rechnen uns \vec{E} und \vec{H} der ebenen Welle mit Hilfe des in Gl.(10) definierten Vektorpotentials \vec{A} aus.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi, & \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} \\ &= + ik_0 \vec{A} - i\phi \vec{k} & &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} \end{aligned}$$

da, auf die ebene Welle $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - k_0 t)}$ angewandt, natürlich $\nabla \rightarrow i\vec{k}$ und $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -ik_0$ ergibt.

Es sei nun das skalare Potential $\phi = 0$ (reines Wirbelfeld, quellenfrei); dann wird

$$U = \frac{1}{8\pi} \frac{(k_o^2 + \vec{k}^2 + k_o^2 + \vec{k}^2)}{2k_o V} = \frac{4k_o^2}{8\pi \cdot 2k_o V} = \frac{1}{4\pi} \frac{k_o}{V}$$

Die Energiedichte der Welle kommt also mit der in (10) gewählten Normierung um den Faktor $\frac{1}{4\pi}$ zu klein heraus. Man kompensiert das nun einfach dadurch, daß man in Gl.(7) e entsprechend vergrößert, d.h. man nimmt nicht $e^2 = \frac{1}{137}$ sondern $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ (beachte: stets wird $\hbar = c = 1$ gesetzt). Dies ist die allgemein übliche Konvention in der Teilchenphysik.

Bei der Beschreibung von Photonen unterscheidet man die folgenden Typen der Polarisation: (Wir nehmen an, das Photon bewegt sich in z-Richtung, d.h. $\vec{k} = (0,0,|\vec{k}|)$)

Polarisationsvektor		Spinvektor
$\epsilon_{\mu}^1 = (1,0,0,0)$	Polarisation in x-Richtung	kohärente Überlagerung von Spinausrichtung
$\epsilon_{\mu}^2 = (0,1,0,0)$	Polarisation in y-Richtung	parallel und entgegen der Flugrichtung
$\epsilon_{\mu}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0,0)$	Zirkulare Polarisation in +z-Richtung (R)	Spinausrichtung in Flugrichtung (z-Richtung) (positive Helizität)
$\epsilon_{\mu}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0,0)$	Zirkulare Polarisation in -z-Richtung (L)	Spinausrichtung entgegen der Flugrichtung (negative Helizität)

Lorentzkonvention:

In der klassischen Elektrodynamik ist bekanntlich das Viererpotential nicht eindeutig festgelegt. Z.B. \vec{A} ist nur bis auf ein beliebiges wirbelfreies Vektorfeld festgelegt; über die Quellen von \vec{A} kann man beliebig verfügen. Ähnlich ist ϕ nicht festgelegt. Daher kann man für A_{μ} noch eine Zusatzforderung aufstellen. Man verlangt üblicherweise in der klassischen Elektrodynamik, daß A_{μ} die sogenannte Lorentzkonvention

$$(11) \quad \nabla_{\mu} A_{\mu} = 0$$

erfüllt. Für ebene Wellen lautet die Lorentzkonvention

$$(11a) \quad k_{\mu} \epsilon_{\mu}(\vec{k}) = 0.$$

Aus (11a) entnimmt man, daß der Polarisationsvektor transversal zum 4-Impulsvektor ist. Diese Konvention übernimmt man auch in der Quantenelektrodynamik für freie Photonen.

Eichinvarianz:

Auch durch die Lorentzkonvention ist das Viererpotential $A_\mu(x)$ noch immer nicht eindeutig festgelegt. Man kann z.B. das Vierervektorpotential $A_\mu(x)$ ersetzen durch

$$(12) \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \nabla_\mu \chi(x) \quad (\text{"Eichtransformation"})$$

Hierbei sei zunächst $\chi(x)$ eine beliebige skalare Funktion die von $x = (\vec{x}, it)$ abhängt. D.h. bei einer Eichtransformation wird der 4-Gradient einer beliebigen skalaren Funktion zu A_μ addiert. Wir zeigen jetzt, daß sich bei der Eichtransformation (12) die Feldstärken \vec{E} und \vec{H} nicht ändern.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi & \text{b) } \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} \\ \text{ersetze } A &= (\vec{A}, i\phi) \text{ durch } A' = (\vec{A} + \text{grad } \chi, i\phi - i\frac{\partial \chi}{\partial t}) \\ \text{b) } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \chi - \text{grad } \phi + \text{grad } \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \\ \text{b) } \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} + \underbrace{\text{rot grad } \chi}_0 = \text{rot } \vec{A} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{per def. (allgemeine Beziehung zwischen rot und grad)} \end{aligned}$$

Wir wollen außerdem verlangen, daß das in Gl.(12) gewählte A'_μ auch die Lorentzkonvention (11) erfüllen soll. Dazu muß gelten:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A'_\mu &\stackrel{(12)}{=} \underbrace{\nabla_\mu A_\mu}_{(11)} + \nabla_\mu \nabla_\mu \chi(x) \stackrel{(11)}{=} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{also } \nabla_\mu \nabla_\mu \chi(x) \equiv \nabla^2 \chi(x) \equiv \square \chi(x) = 0$$

D.h. $\chi(x)$ muß so gewählt werden, daß $\square \chi(x) = 0$ erfüllt ist.

Wir betrachten jetzt ein durch $A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2k_0 V}} \epsilon_\mu(\vec{k}) e^{ikx}$ beschriebenes freies Photon. Invarianz gegenüber der Transformation (12) bedeutet dann: Nichts ändert sich bei der Ersetzung

$$(12a) \quad \boxed{\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \lambda k_\mu} \quad (\lambda = \text{Skalar})$$

Beweis: Wir wählen

$$\chi(x) = -i \frac{\lambda}{\sqrt{2k_0 V}} e^{ikx}$$

Nun erfüllt die ebene Welle e^{ikx} für ein freies Photon die Wellengleichung

$$\square e^{ikx} = (k_0^2 - \vec{k}^2) e^{ikx} = 0,$$

wie man leicht nachrechnet. Daher ist $\square \chi(x) = 0$ erfüllt. Die Eichtransformation (12) führt zu

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + \nabla_\mu \left(-i \lambda \frac{1}{\sqrt{2k_0 V}} e^{ikx} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k_0 V}} \epsilon_\mu e^{ikx} + \lambda \frac{1}{\sqrt{2k_0 V}} k_\mu e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k_0 V}} (\epsilon_\mu + \lambda k_\mu) e^{ikx} \end{aligned}$$

Wenn also zwei Polarisationsvektoren sich nur um ein Vielfaches des Impulsvektors unterscheiden, stellen sie das gleiche Photon dar.

Mit Hilfe der Eichinvarianz gewinnt man den folgenden Satz.

Satz: Für gegebenes \vec{k} hat ein freies Photon nur zwei linear unabhängige Polarisationszustände (z.B. x und y; oder + und -).

Beweis: Nehme Eichtransformation (12a) mit $\lambda = -\frac{\epsilon_4}{k_4}$
dann $\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu - \frac{\epsilon_4}{k_4} k_\mu$, so daß $\epsilon'_4 = 0$.

Die Lorentzkonvention erfordert nun $0 = k_\mu \epsilon'_\mu = \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}$
d.h. $\vec{\epsilon}$ muß senkrecht zum Impulsvektor \vec{k} stehen; $\vec{\epsilon}$ kann nur zwei linear unabhängige Einstellungen haben.

Für später benötigen wir eine Formel für die Summation über alle möglichen Polarisationszustände, die wir jetzt herleiten. Wir schreiben zunächst einen allgemeinen Ansatz für die Summe über alle möglichen Zustände eines Photons mit 4-Impuls k_μ

$$(13) \quad \sum_{\substack{\text{alle Polari-} \\ \text{sationszu-} \\ \text{stände} \\ i = 1, 2}} \epsilon_\mu^i(k) \epsilon_\nu^i(k) = a \delta_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu$$

Die rechte Seite ist ein Ansatz mit a und b konstant. Die rechte Seite muß ein Tensor mit den Indices μ und ν sein, zu dessen Bildung wir nur den einen 4-Vektor k_μ zur Verfügung haben! Über die Polarisationsvektoren haben wir bereits summiert, d.h. wir betrachten einen unpolarisierten Zustand. Nun kann der b -Term in einer eichinvarianten Formel niemals beitragen, denn die ϵ_μ 's treten ja stets multipliziert mit etwas auf, das so beschaffen sein muß, daß bei Ersetzung von ϵ_μ durch k_μ sich Null ergibt wegen (12a):

$$\sum_{\text{pol.}} \epsilon_\mu \epsilon_\nu X_{\mu\nu} \quad \text{wo} \quad k_\mu X_{\mu\nu} = k_\nu X_{\mu\nu} = 0 \quad \text{wegen Eichinvarianz (12a)}$$

Ferner muß sein $a = 1$; das sieht man z.B., wenn man $\mu = \nu = 1$ setzt, unter Benutzung der expliziten Polarisationsvektoren von S.48. Also ist

$$(14) \quad \boxed{\sum_{\substack{\text{alle Pol.-} \\ \text{Zustände}}} \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu(k) = \delta_{\mu\nu}}$$

Nunmehr haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um Matrixelemente für die elektromagnetische Wechselwirkung explizit auszurechnen.

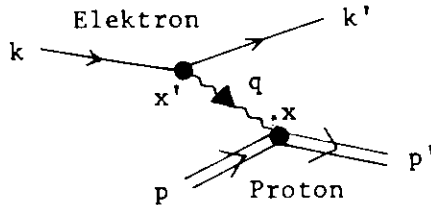
3. Aufstellung der Feynman-Regeln

Unser Ziel ist es, einen Ausdruck für das Übergangsmatrixelement hinzuschreiben, aus dem man die durch die Feynmanregeln gegebenen Größen ("Zutaten") einzeln ablesen kann.

3.1. Matrixelement für Elektron-Proton-Streuung

Wir betrachten als Beispiel die Elektron-Proton-Streuung.

Die Elektron-Proton-Streuung wird in niedrigster Ordnung beschrieben durch das folgende Feynmandiagramm:



k, k', p, p' und q sind die Viererimpulse von Elektron, Proton und Photon (s. Zeichnung). An jedem Vertex gilt 4-Impulserhaltung

$$k+p = k'+p'$$

$$k-k' = q = p' - p .$$

Die Impulse denken wir uns festgehalten. Die Emission des Photons am oberen Vertex soll am Ort x' , die Absorption am unteren Vertex soll am Ort x stattfinden. Wir betrachten für die Wechselwirkung an jedem Vertex (d.h. für den an jedem Vertex stattfindenden Fundamentalprozess) die Wechselwirkungsenergie-dichte (Gl.(7)). Beim Einsetzen von ψ und $\bar{\psi}$ in (7) verfahren wir analog wie bei der Definition eines s -Matrixelements, das wie folgt zusammengesetzt ist:

$$s\text{-Matrixelement} = \left\langle \begin{array}{l} \text{Wellenfunktion} \\ \text{des auslaufenden} \\ \text{Teilchens} \end{array} \right| \text{Operator} \left| \begin{array}{l} \text{Wellenfunktion} \\ \text{des einlaufenden} \\ \text{Teilchens} \end{array} \right\rangle$$

Dann kan man setzen

Oberer Vertex:
$$H^{em}(x') = - i \underbrace{e \bar{\psi}(x')}_{\text{Elektron aus}} \underbrace{\gamma_\mu A_\mu(x)}_{\text{Operator}} \underbrace{\psi(x')}_{\text{Elektron ein}}$$

Elektron
aus, $\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}(\vec{k}') e^{ik'x'}$

Elektron
ein, $\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} u(\vec{k}) e^{ikx'}$

mit $\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}(\vec{k}') e^{-ik'x'}$

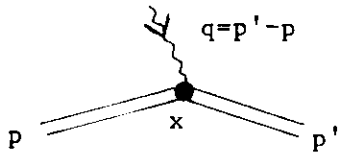
Unterer Vertex: $H^{em}(x) = -ie \overline{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x)$

(16) Proton aus, $\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} u^i(\vec{p}') e^{ip'x}$ Proton ein, $\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} u^i(\vec{p}) e^{ipx}$

mit

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2q_0 V}} \epsilon_\mu e^{iqx}$$

Wir betrachten nun den unteren Vertex, am Ort x . Die Wechselwirkung kann bei irgendwelchen x erfolgen (wir halten ja die Impulse fest, der Ort ist dann völlig unbestimmt!). Wir müssen also über x integrieren!



(17a)
$$\int d^4x H^{em}(x) = \int d^4x \left\{ -ie \frac{1}{\sqrt{V}} \overline{u}^i(\vec{p}') \gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2q_0 V}} \epsilon_\mu \frac{1}{\sqrt{V}} u^i(\vec{p}) e^{i(-p'+q+p)x} \right\}$$

$$= -ie \frac{1}{\sqrt{V}} \overline{u}^i(\vec{p}') \gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2q_0 V}} \epsilon_\mu \frac{1}{\sqrt{V}} u^i(\vec{p}) \underbrace{\int d^4x e^{i(-p'+q+p)x}}_{\equiv (2\pi)^4 \delta(q-p'+p)}$$

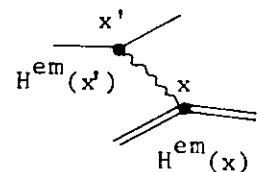
Die auf der rechten Seite auftauchende δ Funktion erzwingt die 4-Impulserhaltung am unteren Vertex. Analog erhält man für den oberen Vertex:

(17b)
$$\int d^4x' H^{em}(x') = -ie \frac{1}{\sqrt{V}} \overline{u}^i(\vec{k}') \gamma_\nu \frac{1}{\sqrt{2q_0 V}} \epsilon_\nu \frac{1}{\sqrt{V}} u^i(\vec{k}) (2\pi)^4 \delta(k-k'-q)$$

Das gesamte Matrixelement M_{fi} ist dann das Produkt dieser beiden über die Orte x' bzw. x integrierten Vertexfaktoren (17a,b) (die H^{em} sind ja die Matrixelemente für die entsprechenden Übergänge mit Emission bzw. Absorption eines Photons). Es kommen hier jedoch noch folgende Änderungen hinzu:

1. Die beiden Photonen sind hier nicht zwei freie Photonen, sondern es handelt sich um das gleiche Photon, das im Punkte x' emittiert und in x absorbiert wird.
2. Ferner muß man deshalb als Faktor die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür anbringen, daß ein im Punkt x' emittiertes Photon zum Punkt x hin propagiert!

Dies nennt man die Propagatorfunktion.



Wir leiten jetzt die Propagatorfunktion her.

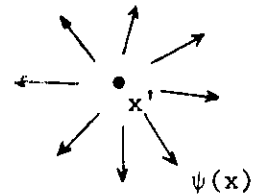
3.2. Herleitung der Propagatorfunktion

Wir müssen für die Propagation die Bewegungsgleichung herleiten. Für jedes freie Teilchen (von beliebigem Spin) gilt bekanntlich die Klein-Gordon-Gleichung, die den relativistischen Zusammenhang zwischen Energie, Impuls und Masse ausdrückt:

$$(18) \quad (\mathbf{p}_{\text{op.}}^2 + m^2) \psi(x) \equiv ((-i\nabla)^2 + m^2) \psi(x) = (-i\hbar \nabla)^2 \psi(x) = 0$$

(d.h. für ein freies Teilchen (mit $\vec{p} = \vec{p}' = 0$ oder $\vec{p}' \neq 0$) sind auf der Massenschale von Null verschieden sein). Jetzt ist zu beachten, daß wir eine (in Raum und Zeit) punktförmige Teilchenquelle am Punkt \vec{x}' haben; nur $\vec{x} \neq \vec{x}'$ ist dann das Teilchen zwar frei, aber die Bewegungsgleichung ist nicht regulär! Die Bewegungsgleichung lautet jetzt

$$(19) \quad (\square - m^2) \psi(x) = -e \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$



Die δ -Funktion beschreibt die Identität $\int \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = 1$ analog zum Falle des Potentialfeldes, dessen Äquipotential durch die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ gegeben ist und für den die Poisson-Gleichung bei \vec{x}' gilt

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Die Lösung von Gleichung (19) ist ähnlich zu (20)

Wir entwickeln die gesuchte Lösung in Fourier-Exponentialfunktionen:

$$(20) \quad \psi(x) = \int A_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} d^3p$$

mit dem Entwicklungskoeffizienten $A_{\vec{p}}$. In Gleichung (19) ergibt

$$\int A_{\vec{p}} (\square - m^2) e^{i\vec{p}\vec{x}} d^3p = -e \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Man ersetzt den Operator \square durch $\square = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ und die Eigenfunktion $e^{i\vec{p}\vec{x}}$ angewandt wird; \square ist dann $(-\vec{p}^2 - \partial^2/\partial t^2)$ multipliziert jetzt diese Gleichung mit $e^{-i\vec{p}'\vec{x}}$ und integriert über \vec{x} .

$$\int A_p (-p^2 - m^2) \underbrace{\int e^{-ip'x} e^{ipx} d^4x d^4p}_{= (2\pi)^4 \delta^4(p'-p)} = - \int \delta(x-x') e^{-ip'x} d^4x$$

$$- (2\pi)^4 A_p (p'^2 + m^2) = -e^{-ip'x'}$$

also $A_p = + \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^4 (m^2 + p^2)}$ (hier ' an p weggelassen)

Dies eingesetzt in (20) gibt uns die gesuchte Lösung von (19) in der Form

$$(21) \quad \psi(x) = + \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ip(x-x')}}{m^2 + p^2} d^4p$$

D.h. die Wellenfunktion eines von einer punktförmigen Quelle bei x' stammenden Teilchens (man nennt sie auch Greensche oder Einflußfunktion), die ja die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür ist, das bei x' emittierte Teilchen bei x zu finden, hängt nur vom 4-dimensionalen Abstand $x - x'$ von der Quelle ab!

Wir schreiben deshalb besser $\Psi(x - x')$ und dies ist die gesuchte Propagationsfunktion!

Gleichung (18) und (19) sind Bewegungsgleichungen von Spin 0-Teilchen. Für Teilchen mit Spin muß man die entsprechenden Modifikationen in Gl.(21) anbringen; z.B. für Photonen einen Faktor $\sum_i \epsilon_\mu^i \epsilon_\nu^i$, da sowohl am Ort der Absorption wie am Ort der Erzeugung der Polarisationsvektor des Photons mit dem γ_μ bzw. γ_ν in dem Vertexfaktor $H^{em}(x)$ multipliziert auftritt und das Photon jede mögliche Spineinstellung i haben kann.* Damit lautet die Propagationsfunktion für Photonen

$$(21a) \quad \Psi_{\mu\nu}(x-x') = \frac{\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{iq(x-x')}}{q^2} d^4q. \quad (\text{beachte } m^2=0 \text{ für Photonen})$$

Wir führen jetzt den Propagator ins Matricelement ein. Wir hatten in 3.1. den oberen und unteren Vertex als Fundamentalprozesse mit Emission bzw. Absorption eines freien Photons betrachtet. Dieses Photon liefert den folgenden Beitrag zum Integranden in (17a) und (17b)

$$(22a) \quad \frac{1}{2q_0 V} \epsilon_\mu \cdot \epsilon_\nu e^{iq(x-x')}$$

* Über die möglichen Spineinstellungen (bzw. Polarisationszustände) wird summiert.

Bei Ausführung der Integration über x und x' ging $e^{iq(x-x')}$ in zwei δ -Funktionen auf (s. (17a,b)):

$$\delta(k - k' - q) \cdot \delta(q - p' + p)$$

Für eine korrekte Behandlung des Photonpropagators müssen wir also (22a) durch (21a) ersetzen. Hier ist nach Gl.(14) $\sum_i \epsilon_\mu^i \epsilon_\nu^i = \delta_{\mu\nu}$.

Nach dieser Ersetzung und Ausführung der Integrationen über x und x' in (17) kann man auch die Integration über q in (21a) ausführen

$$(22b) \quad \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \underbrace{\frac{1}{q} \delta(q - p' + p)}_{\equiv \text{Funktion von } q} \underbrace{\delta(k - k' - q)}_{\delta\text{-Funktion}} d^4q$$

$$= \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \delta(k - k' - p' + q)$$









Der Faktor $\delta(k - k' - p' + p)$ in (22b) erzwingt 4-Impulserhaltung für die Gesamtreaktion. Diesen Faktor ziehen wir (als willkürliche Konvention) aus dem Matrixelement heraus und berücksichtigen ihn im Phasenraumfaktor (s. Abschnitt 4.4, Gleichung (34) und (35)). Dann ist der Beitrag des Photonpropagators zum Matrixelement

$$(22c) \quad \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 q^2} ,$$

3.3. Feynmanregeln für die Faktoren im Matrixelement

Wir hatten in 3.1. das Matrixelement M_{fi} als Produkt der beiden Vertexfaktoren $H^{em}(x) H^{em}(x')$, integriert über alle x und x' , hingeschrieben. Dabei mußte der Beitrag des Photonpropagators korrekt durch (22c) statt durch (22a) beschrieben werden. Aus Gl.(17) und (22c) wird die folgende Tabelle für die Faktoren im Matrixelement (= Übergangswahrscheinlichkeits-Amplitude) verständlich:

Tabelle 1 Feynmanregeln

Begründung s. Gl.	Bestandteil des Feynman-Diagramms	zugehöriger Ausdruck
(17)	\vec{k}  Photon (ein oder aus)	$\frac{1}{\sqrt{2k_0}} \epsilon_\mu$
(14), (22c)	\vec{q}  Photon-Propagator	$\frac{\delta_{\mu\nu}}{q}$
(3a), (17)	\vec{p}  Elektron (ein)	$\frac{1}{\sqrt{V}} u^i(\vec{p}) \quad (i=1,2)$
(3a), (17)	\vec{p}  Positron (ein)	$\frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}^i(-\vec{p}) \quad (i=3,4)$
(3a), (17)	\vec{p}  Elektron (aus)	$-\frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}^i(\vec{p}) \quad (i=1,2)$
(3a), (17)	\vec{p}  Positron (aus)	$-\frac{1}{\sqrt{V}} u^i(-\vec{p}) \quad (i=3,4)$
(5), (21)	\vec{p}  Elektron Positron Propagator	$\frac{-i\gamma_\mu p_\mu + m}{m^2 + p^2} \quad (\vec{p} \text{ in Richtung des Pfeils})$
(17)	Faktor (1) $(2\pi)^4$ für jeden Vertex, und 4-Impulserhaltung an jedem Vertex	
(21)	(2) $i(2\pi)^{-4}$ für jeden Propagator (Zwischenzustand) (3) $(-1)^\ell$ für ℓ geschlossene Elektronschleifen z.B.  (4) Bei identischen Teilchen im Endzustand bekommt Amplitude mit vertauschten Teilchen einen Faktor ∓ 1 (id. Elektronen, Photonen).	
(17)	Für den Photon-Elektron-Vertex ist der Hamiltonoperator in der Form $-ie\gamma_\mu$ zu nehmen, gesetzt zwischen die Funktionen für <u>aus-</u> und <u>ein-</u> laufende Elektronen (in dieser Reihenfolge!) und Photonen, bzw. für Elektronen und Photonen im Zwischenzustand.	

Zum Elektron(Positron)-Propagator für ein intermediäres (virtuelles) Elektron (Positron) bemerken wir noch, daß die Ableitung die gleiche ist wie für den Photonpropagator, mit der Ersetzung

$$A_\mu \rightarrow \psi, \text{ entsprechend (vgl. (3a) und (10)) } \frac{\epsilon_\mu(k)}{\sqrt{2k_0}} \rightarrow u(p)$$

und daher der Faktor im Zähler $\delta_{\mu\nu} \rightarrow i\gamma_\mu p_\mu + m$ (vgl. Gl. (5) und (14)).

Für Protonen gelten dieselben Regeln wie für Elektronen, in der Näherung, daß auch die Diracgleichung für Protonen gilt. (Auf Modifikationen kommen wir in Abschnitt 6 zu sprechen.)

Wir gehen hier nicht so weit, auch noch die Faktoren i , -1 , oder $(-1)^{\ell}$ in (2)-(4) (oder andere numerische Faktoren) im Detail abzuleiten. Die Faktoren folgen aus der exakten Behandlung mit Hilfe der Feldtheorie. Dazu siehe Literatur:

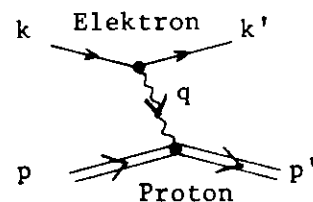
- Etwas: CERN Report 64-13, Band III Seite 81 (1964);
- Bjorken-Drell, BI Hochschultaschenbuch Band 98;
- G. Källén, BI Hochschultaschenbuch Band 100;
- Feynman, Theory of Fundamental Processes (W.A. Benjamin, Inc.)
- Penzlin, Fortschr. Physik, Band 11, S. 357 (1963)

4. Berechnung der Elektron-Proton-Streuung (punktförmiges (Dirac)-Proton)

Wir berechnen jetzt mit Hilfe der Feynmanregeln das Matrixelement und den Wirkungsquerschnitt für Elektron-Proton-Streuung. Dabei nehmen wir an, daß das Proton eine punktförmige Ladungsverteilung und ein durch die Diractheorie gegebenes magnetisches Moment hat (also kein anomales magnetisches Moment). Die Modifikationen, die man wegen der räumlichen elektromagnetischen Struktur des Protons einführen muß, werden in Abschnitt 6 besprochen.

4.1. Aufstellung des Matrixelementes M_{fi}

Mit den Faktoren aus Tabelle 1 wird das Matrixelement M_{fi}



$$\begin{aligned}
 (23) \quad M_{fi} &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}^j(\vec{k}') (-ie)\gamma_{\mu} \frac{1}{\sqrt{V}} u^i(\vec{k}) (2\pi)^4}_{\text{oberer Vertex}} \cdot \underbrace{\frac{\delta_{\mu\nu}}{q} i(2\pi)^{-4}}_{\text{Propagator}} \\
 &\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}^{\ell}(\vec{p}') (-ie)\gamma_{\nu} \frac{1}{\sqrt{V}} u^k(\vec{p}) (2\pi)^4}_{\text{unterer Vertex}} \\
 &= - \frac{ie^2 (2\pi)^{-4}}{V^2} \underbrace{\bar{u}^j(\vec{k}') \gamma_{\mu} u^i(\vec{k})}_{\text{oberer Vertex}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{q} \underbrace{\bar{u}^{\ell}(\vec{p}') \gamma_{\nu} u^k(\vec{p})}_{\text{unterer Vertex}}
 \end{aligned}$$

Da die Spinstellungen der ein- und auslaufenden Teilchen noch nicht festgelegt und unabhängig voneinander sind, haben wir die zugehörigen Spinoren mit 4 unabhängigen Indices i, \dots, ℓ indiziert. Im folgenden setzen wir $\mu = \nu$ und lassen $\delta_{\mu\nu}$ fort.

Wir wollen zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts $(M_{fi})^2 = M_{fi} M_{fi}^*$ haben. Man beachte, daß

$$\bar{u} = u^* \gamma_4,$$

und daß für ein Produkt im 4-komponentigen Spinorraum der Art

$$X = \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}) = u^*(\vec{p}') \gamma_4 \gamma_\mu u(\vec{p})$$

gilt

$$(24) \quad X^{*T} = \left(u^*(\vec{p}') \gamma_4 \gamma_\mu u(\vec{p}) \right)^{*T} = u^*(\vec{p}) \gamma_\mu^+ \gamma_4^+ u(\vec{p}') = u^*(\vec{p}) \gamma_\mu \gamma_4 u(\vec{p}').$$

Daher

$$(25) \quad M_{fi}^* = \frac{ie^2 (2\pi)^4}{V^2} u^{i*}(\vec{k}) \gamma_\mu \gamma_4 u^j(\vec{k}') \frac{1}{q} u^{k*}(\vec{p}) \gamma_\mu \gamma_4 u^\ell(\vec{p}')$$

bei Vertauschen der beiden γ_μ mit γ_4 ändert sich für $\mu = 4$ ja nichts; für $\mu = 1, 2, 3$ zweimal das Vorzeichen, wegen $\gamma_i \gamma_4 = -\gamma_4 \gamma_i$ für $i = 1, 2, 3$, also ebenfalls nichts.

$$= \frac{ie^2 (2\pi)^4}{V^2} \underbrace{\bar{u}^i(\vec{k}) \gamma_\mu}_{\substack{\downarrow \\ \text{ersetze } \mu \rightarrow \nu}} u^j(\vec{k}') \frac{1}{q} \underbrace{\bar{u}^k(\vec{p}) \gamma_\mu}_{\substack{\downarrow \\ \mu \rightarrow \nu}} u^\ell(\vec{p}')$$

Bei Anwendung von (24) zur Berechnung von (25) haben wir in Wirklichkeit M_{fi}^{*T} gebildet. Das liefert dasselbe Ergebnis wie M_{fi}^* , da M_{fi} ein Skalar ist.

Damit wird (23) (25)

$$(26) \quad |M_{fi}|^2 = M_{fi} M_{fi}^* = \frac{e^4 (2\pi)^8}{V^4} \bar{u}^j(\vec{k}') \gamma_{\mu ab} u^i(\vec{k}) \bar{u}^i(\vec{k}) \gamma_{\nu cd} u^j(\vec{k}') \cdot \bar{u}^\ell(\vec{p}') \gamma_{\mu ef} u^k(\vec{p}) \bar{u}^k(\vec{p}) \gamma_{\nu gh} u^\ell(\vec{p}') \cdot \frac{1}{q^4}$$

Der Ausdruck (26) ist eine längliche Matrixmultiplikation, bei der 4-komponentige Zeilenvektoren \bar{u} , Spaltenvektoren u in γ -Matrizen γ_μ bzw. γ_ν multipliziert werden. Man kann eine Matrixmultiplikation in Summenschreibweise darstellen, z.B. $\sum_{j=1}^4 a_{ij} b_{jk} = c_{ik}$. Wir verfahren hier analog und haben in (26) der Deutlichkeit halber die Spinorindices a...h explizit als Summationsindices eingeführt. Es wird jeweils über gleichlautende Indices summiert. Außer über die Spinorindices wird natürlich auch über die griechischen Indices summiert. Da sich Gl.(26) als Summe darstellen läßt, kann man die einzelnen Bestandteile der Summanden beliebig umordnen, etwa

$$(27) \quad |M_{fi}|^2 = \frac{e^4 (2\pi)^8}{V^4} \frac{1}{q^4} \gamma_\mu_{ab} \underbrace{u^i(\vec{k})}_{b} \underbrace{\bar{u}^i(\vec{k})}_{c} \gamma_\nu_{cd} \underbrace{u^j(\vec{k}')}_{d} \underbrace{\bar{u}^j(\vec{k}')}_{a} \cdot \gamma_\mu_{ef} \underbrace{u^k(\vec{p})}_{f} \underbrace{\bar{u}^k(\vec{p})}_{g} \gamma_\nu_{gh} \underbrace{u^\ell(\vec{p}')}_{h} \underbrace{\bar{u}^\ell(\vec{p}')}_{e}$$

4.2. Summation und Mittelung über Spins

In Gl.(23) - (27) sind die Spinstellungen von Elektron und Proton noch nicht spezifiziert, sondern durch die Laufindices i, j, k, ℓ gekennzeichnet. Im Experiment sind die einlaufenden Teilchen meist unpolarisiert, d.h. die beiden möglichen voneinander unabhängigen Spinstellungen treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Wir mitteln daher den Wirkungsquerschnitt über die Spinrichtungen der Anfangsteilchen. Das ergibt

$$\text{Einlaufendes Elektron} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} u^i(\vec{k})_b \bar{u}^i(\vec{k})_c$$

$$\text{Einlaufendes Proton} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} u^k(\vec{p})_f \bar{u}^k(\vec{p})_g$$

Wenn die Polarisation der auslaufenden Teilchen nicht gemessen wird, muß man außerdem über alle möglichen Spinrichtungen der Endteilchen summieren. Die Summation aller möglichen Spinzustände liefert

$$\text{Auslaufendes Elektron} \quad \leftrightarrow \quad \sum_{j=1,2} u^j(\vec{k}')_d \bar{u}^j(\vec{k}')_a$$

$$\text{Auslaufendes Proton} \quad \leftrightarrow \quad \sum_{\ell=1,2} u^\ell(\vec{p}')_h \bar{u}^\ell(\vec{p}')_e$$

Diese Summen können durch die Ausdrücke in Gl.(5) ersetzt werden. Das gibt, angewandt auf Gl.(27):

$$(28) \quad \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |M_{fi}|^2 = \frac{e^4 (2\pi)^8}{4 V^4} \frac{1}{q^4} \gamma_{\mu ab} \dots$$

wobei z.B. $\sum_{\substack{\text{Spins} \\ i=1,2}} u^i(\vec{k})_b \bar{u}^i(\vec{k})_c = \frac{1}{2k_0} (-i\gamma_{\lambda} k_{\lambda} + m)_{bc}$ gesetzt wird.

Für Elektronen und Protonen haben wir jetzt den gleichen Faktor, nur mit $k \leftrightarrow p, k' \leftrightarrow p'$ ersetzt. Dieser Faktor wird

$$(29) \quad \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} \gamma_{\mu ab} u^i(\vec{k})_b \bar{u}^i(\vec{k})_c \gamma_{\nu cd} u^j(\vec{k}')_d \bar{u}^j(\vec{k}')_a \\ = \gamma_{\mu ab} \frac{1}{2k_0} (-i\gamma_{\lambda} k_{\lambda} + m)_{bc} \gamma_{\nu cd} \frac{1}{2k'_0} (-i\gamma_{\kappa} k'_{\kappa} + m)_{da}$$

Wir sehen, daß hier der erste und letzte Spinorindex gleich (= a) ist. Wenn wir den ganzen Ausdruck über die Indices b bis d aufsummieren, bleibt eine Matrix übrig, deren Diagonalelemente durch die Indices aa gegeben sind. Summation über a bedeutet, daß man die Spur dieser Matrix bildet.

Wir kehren jetzt wieder zur Matrixschreibweise zurück und lassen die Indices a, b... fort; damit ist der Faktor (29)

$$= \text{Spur} \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{2k_0} (-i\gamma_{\lambda} k_{\lambda} + m) \gamma_{\nu} \frac{1}{2k'_0} (-i\gamma_{\kappa} k'_{\kappa} + m) \right\} \\ (29a) \quad = \frac{1}{4k_0 k'_0} \left[-k_{\lambda} k'_{\kappa} \text{Sp}(\gamma_{\mu} \gamma_{\lambda} \gamma_{\nu} \gamma_{\kappa}) - ik_{\lambda} m \text{Sp}(\gamma_{\mu} \gamma_{\lambda} \gamma_{\nu}) - ik'_{\kappa} m \text{Sp}(\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\kappa}) \right. \\ \left. + m^2 \text{Sp}(\gamma_{\mu} \gamma_{\nu}) \right]$$

Zur Auswertung dieser Spuren benutzen wir die folgenden Regeln für Spuren von γ -Matrizen:

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \text{Sp } (\gamma_\mu) = 0 \\
 & \text{Sp } (\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 \delta_{\mu\nu} \\
 & \text{Sp } (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda) = 0 \\
 & \text{Sp } (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\kappa) = 4 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\kappa} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa} + \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda})
 \end{aligned}$$

Diese Regeln kann man explizit verifizieren mittels der Form der γ -Matrizen, s. Gl.(2). Für kompliziertere Produkte gibt es Rekursionsformeln, siehe Bjorken-Drell, BI Hochschultaschenbuch 98, Abschnitt 7.2.

Damit bekommen wir für (29a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{4k_o k_o^\dagger} \{-k_\lambda k'_\kappa (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\kappa} + \delta_{\mu\kappa} \delta_{\lambda\nu}) + m^2 \delta_{\mu\nu}\} \\
 (29b) \quad & = \frac{1}{k_o k_o^\dagger} \{-k_\mu k'_\nu + (kk')\delta_{\mu\nu} - k_\nu k'_\mu + m^2 \delta_{\mu\nu}\}
 \end{aligned}$$

Für den Protonenfaktor erhält man exakt das analoge, mit $k \rightarrow p$
 $k' \rightarrow p'$.

Mit (27) und (29b) wird das über die Spins gemittelte bzw. summierte $|M_{fi}|^2$

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |M_{fi}|^2 = \frac{e^4 (2\pi)^8}{4 V^4} \frac{1}{q} \frac{1}{k_o k_o^\dagger p_o p_o^\dagger} \{-k_\mu k'_\nu - k_\nu k'_\mu + ((kk') + m^2) \delta_{\mu\nu}\} \cdot \\
 & \cdot \{-p_\mu p'_\nu - p_\nu p'_\mu + ((pp') + M^2) \delta_{\mu\nu}\} \\
 & = \frac{e^4 (2\pi)^8}{4 V^4} \frac{1}{q} \frac{1}{k_o k_o^\dagger p_o p_o^\dagger} \cdot \{2(kp)(k'p') + 2(kp')(k'p) + 4[(kk') + m^2][((pp') + M^2)] \\
 & \quad - 2(kk')[(pp') + M^2] - 2(pp')[(kk') + m^2]\} \\
 & = \frac{e^4 (2\pi)^8}{4 V^4} \frac{1}{q} \frac{1}{k_o k_o^\dagger p_o p_o^\dagger} \cdot \{2(kp)(k'p') + 2(kp')(k'p) + 4m^2 M^2 + 2M^2(kk') + 2m^2(pp')\}
 \end{aligned}$$

m ist die Elektronenmasse

M ist die Protonenmasse

4.3. Einführung von invarianten kinematischen Größen

Wir drücken jetzt die in der geschweiften Klammer von (31) vorkommenden Ausdrücke durch relativistisch invariante Größen aus:

$$\begin{aligned}
 (p-p')^2 &\equiv q^2 = p^2 + p'^2 - 2(pp') = -2M^2 - 2(pp') \longrightarrow (pp') = -\left(M^2 + \frac{q^2}{2}\right) \\
 (k-k')^2 &\equiv q^2 = k^2 + k'^2 - 2(kk') = -2m^2 - 2(kk') \longrightarrow (kk') = -\left(m^2 + \frac{q^2}{2}\right) \\
 (k+k)^2 &\equiv -s = k^2 + p^2 + 2(kp) = -m^2 - M^2 + 2(kp) \longrightarrow (kp) = \frac{s-M^2-m^2}{2} \\
 (32) \quad (k'+p')^2 &\equiv -s = k'^2 + p'^2 + 2(k'p') = -m^2 - M^2 + 2(k'p') \quad (k'p') = -\frac{s-M^2-m^2}{2} \\
 (p'k) &= (p'k') + p'^2 - (pp') = -\frac{s}{2} + \frac{M^2}{2} + \frac{m^2}{2} + \frac{q^2}{2} = -\frac{s-M^2-m^2}{2} + \frac{q^2}{2} \\
 (pk') &= (pk) + p^2 - (pp') = -\frac{s-M^2-m^2}{2} + \frac{q^2}{2}
 \end{aligned}$$

s, q^2, M und m sind relativistisch invariante Größen, da sie das Skalarprodukt von zwei Vierervektoren sind;

s ist das Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem.

Ferner vernachlässigen wir alle Terme $\propto m^2$. Dann wird die geschweifte Klammer in Gl.(31)

$$\begin{aligned}
 \{ \dots \} &= 2 \frac{(s-M^2)^2}{4} + 2 \frac{(s-M^2-q^2)^2}{4} - 2M^2 \frac{q^2}{2} \\
 &= (s-M^2)^2 - q^2(s-M^2) + \frac{q^4}{2} - q^2M^2 \\
 &= (s-M^2)^2 - q^2\left(s - \frac{q^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

und (31) wird zu

$$(33) \quad \boxed{\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |M_{fi}|^2 = \frac{e^4 (2\pi)^8}{4 V^4} \frac{1}{q} \frac{1}{k'_0 k'_0 p'_0 p'_0} \left[(s-M^2)^2 - q^2 \left(s - \frac{q^2}{2} \right) \right]}$$

Jetzt haben wir das Matrixelement auf leicht handhabbare Größe zurückgeführt und können den Wirkungsquerschnitt berechnen.

4.4. Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Wir benutzen den folgenden Zusammenhang zwischen Wirkungsquerschnitt σ und Matrixelement M_{fi} im Laborsystem:

$$(34) \quad \sigma = \frac{1}{v_{rel}} \frac{v^4}{(2\pi)^{10}} \underbrace{\int d^3\vec{p}' d^3\vec{k}' \delta^4(p' + k' - p - k)}_{\text{relativistisch nichtinvarianter Phasenraum}} |M_{fi}|^2 \quad \S$$

Dabei ist v_{rel} die Relativgeschwindigkeit zwischen dem einlaufenden Elektron und dem einlaufenden Proton (beachte: unsere Normierung war 1 Teilchen/Volumen V). Dann wird der Wirkungsquerschnitt für Streuung von unpolarisierten Teilchen

$$(35) \quad \sigma^{unpol} = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \sigma = \frac{1}{v_{rel}} \frac{v^4}{(2\pi)^{10}} \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}'}{2p'_0} \frac{d^3\vec{k}'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k)}_{4p'_0 k'_0} \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |M_{fi}|^2$$

$$= \int d\Omega^* \frac{|\vec{k}^*|}{4\sqrt{s}} = \text{invarianter 2 Teilchen-Phasenraum}$$

und

$$(36) \quad \frac{d\sigma^{unpol}}{d\Omega^*} \stackrel{(33)}{=} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{|\vec{k}^*|}{v_{rel} \sqrt{s} k'_0 p_0} \frac{1}{q} [(s-M^2)^2 - q^2 (s - \frac{q^2}{2})]$$

Notation: Größen im Gesamtschwerpunktsystem der Reaktion werden mit einem * gekennzeichnet.

Wir müssen v_{rel} , k_0 und p_0 im Laborsystem nehmen, da (34) und (35) für Größen im Laborsystem gelten. Beachte, daß im Laborsystem gilt $p_0 = M$; s und q^2 sind Invariante; k^* und $d\Omega^*$ sind laut Definition im Schwerpunktsystem zu nehmen.

Wir setzen jetzt $\frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} = \alpha$ (Feinstrukturkonstante) (vgl. Abschnitt 2.5)

Ferner gilt $v_{rel} k_0 = |\vec{k}|$ im Laborsystem. Schließlich gilt (bei Vernachlässigung der Terme $\propto m^2$)

§ Wir müssen hier die Formel für den Wirkungsquerschnitt mit nicht-invariantem Phasenraumfaktor verwenden. Bei dem obigen Ansatz ist eine nicht-invariante Normierung der Zustandswellenfunktionen ψ angenommen worden. Daraus resultiert ein relativistisch nicht-invariantes Matrixelement wie in Gl. (68) von Band I, Kap. I.; Gl. (34) muß im Laborsystem genommen werden, da die Gl. (34) zugrunde liegende Form des Wirkungsquerschnitts (Gl. (67) von Band I, Kap. I) im Laborsystem formuliert ist.

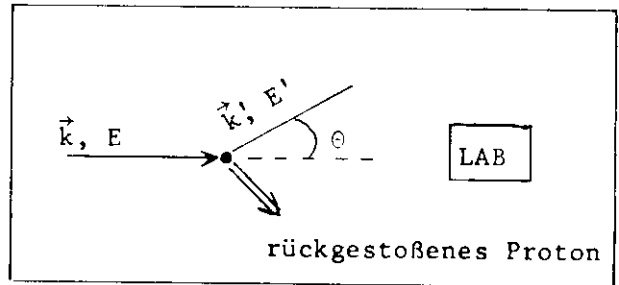
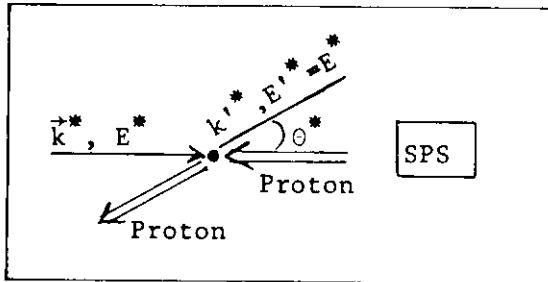
$$(37) \quad s - M^2 \approx 2M k_0 \approx 2M |\vec{k}| \approx 2\sqrt{s} |\vec{k}^*| \quad \S$$

Dies alles eingesetzt in (36) ergibt

$$(38) \quad \boxed{\frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega^*} = \frac{4\alpha^2 |\vec{k}^*|^2}{q^4} \frac{(s - M^2)^2 - sq^2 + q^4/2}{(s - M^2)^2}}$$

Das ist der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem (SPS) für Streuung von Elektronen an einem punktförmigen (Dirac) Proton.

Nun drücken wir noch alles durch die Laborenergie $k_0 = E$ und den Laborstreu-
winkel θ des Elektrons aus.



Den Zusammenhang zwischen SPS und LAB Größen verschafft man sich am besten über die Invariante q^2 , die wir einmal im SPS, einmal im LAB ausrechnen können:

$$\begin{aligned} \text{Im SPS:} \quad q^2 &= (\vec{k} - \vec{k}')^2 = \underbrace{k^2}_{\frac{m^2}{2}} + \underbrace{k'^2}_{\frac{m^2}{2}} - 2(k_0 k'_0) \approx -2(\vec{k} \cdot \vec{k}') \\ (39) \quad &= -2(\vec{k} \cdot \vec{k}') + 2EE' = -2|\vec{k}^*|^2 \cos\theta^* + 2E^{*2} \\ &\approx 2|\vec{k}^*|^2 (1 - \cos\theta^*) \end{aligned}$$

§ Dies folgt aus den Beziehungen

$$(a) \quad s = \sqrt{m^2 + M^2} + 2M k_0$$

$$(b) \quad |\vec{k}^*| = \sqrt{(\gamma^* k_0 - \gamma^* \beta^* |\vec{k}|)^2 - m^2}$$

$$\text{mit } \gamma^* = \frac{k_0 + M}{\sqrt{s}}, \quad \gamma^* \beta^* = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{s}}$$

S. z.B. P. Beckmann, J. v. Behr, Formeln zur relativistischen Kinematik
DESY Notiz A.2.79 (1961)

Im LAB: $q^2 = -2(\vec{k} \cdot \vec{k}') + 2EE'$ (wie oben)

$$(40) \quad = -2|\vec{k}| |\vec{k}'| \cos\theta + 2EE' \approx 2EE' (1 - \cos\theta)$$

E' hängt aber auch noch von θ ab, da die Rückstoßenergie des Protons im Laborsystem von θ abhängt:

$$\text{Aus } q^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2 = p'^2 + p^2 - 2(\vec{p}' \cdot \vec{p}) = -2M^2 - \underbrace{2(\vec{p}' \cdot \vec{p})}_{=0} + \underbrace{2E_{\text{proton}}}_{=M} E'_{\text{proton}}$$

$$\text{folgt } E'_{\text{proton}} = \frac{q^2 + 2M^2}{2M};$$

ferner ist $E' = E + M - E'_{\text{proton}}$ (Energieerhaltung)

$$= E - \frac{q^2}{2M} = E - \frac{EE'}{M}(1 - \cos\theta)$$

dies nach E' aufgelöst ergibt

$$(41) \quad \boxed{\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

und somit

$$(42) \quad \boxed{q^2 = \frac{2E^2 (1 - \cos\theta)}{1 + \frac{E}{M} (1 - \cos\theta)}}$$

Durch Differenzieren von (39) und (40) nach $\cos\theta^*$ bzw. $\cos\theta$ findet man

$$(43) \quad \boxed{dq^2 = -2|\vec{k}^*|^2 d\cos\theta^* = -2E'^2 d\cos\theta;}$$

Dies liefert uns die Umrechnung der Raumwinkelelemente vom SPS ins LAB!

Durch Einsetzen von (37), (41), (42) und (43) in die Wirkungsquerschnittsformel (38) erhält man nun das Resultat für den differentiellen Streuquerschnitt im Laborsystem

$$(44) \quad \boxed{\frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \left[1 + \frac{q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right]}$$

"Rutherford"

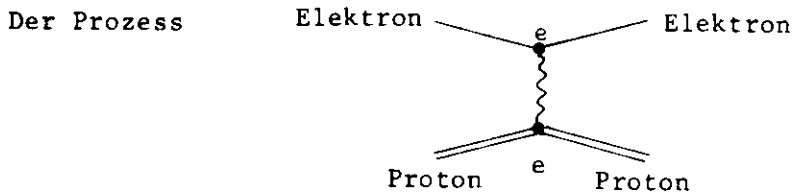
Rückstoßkorrektur

"Mott"

Manchmal wird auch dieser Teil Mottquerschnitt genannt

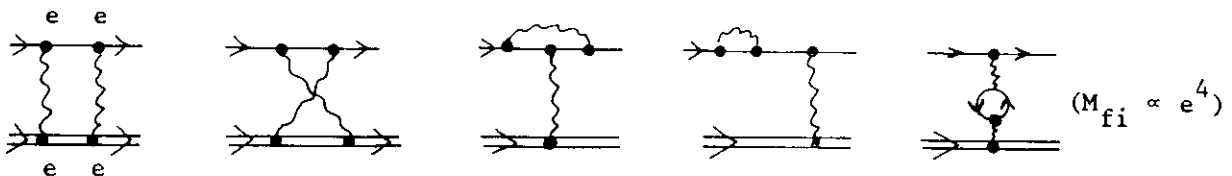
Die Modifikationen zur Rutherfordformel verschwinden für $\Theta \approx 0$. Sie beschreiben also die Wirkung des Spins des Elektrons und Protons (und der damit verbundenen Dirac-Magnetischen Momente), und die relativistischen Korrekturen für den Rückstoß des gestoßenen Protons; denn es sind diese Dinge, die in der elementaren quantenmechanischen Behandlung, die die Rutherfordformel liefert, unberücksichtigt bleiben. Unsere Ableitung galt aber nur unter der Annahme, daß sich das Proton wie ein schweres Elektron verhält (kein anomales (Pauli-) magnetisches Moment, keine Ausdehnung der Ladungs- und Magnetverteilung!) Bevor wir auf die dazu nötigen Modifikationen kommen, folgen noch einige abschließende Bemerkungen über rein elektromagnetische Wechselwirkungen.

5. Allgemeine Bemerkungen zur elektromagnetischen Wechselwirkung



wurde von uns in 2. Ordnung in e ausgerechnet; das Matrixelement M_{fi} war proportional e^2 . D.h. die elektromagnetische Wechselwirkung trat zweimal auf. Das Matrixelement entsprach auch dem nichtrelativistischen störungstheoretischen Matrixelement 2. Ordnung (s. Abschnitt 2.2). Allgemein erhält man die von uns aufgestellten Feynmanregeln aus der Quantenelektrodynamischen Störungsrechnung, in der die Matrixelemente nach Potenzen von e entwickelt werden; aber wie wir sahen, kann man die Feynmanregeln auch intuitiv ableiten, ohne die Q.E.D. zugrunde zu legen.

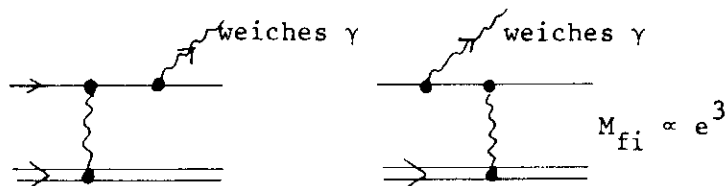
Feynmangraphen 4. Ordnung für den gleichen Prozeß sind z.B.



Ein Graph n -ter Ordnung enthält n Fundamentalprozesse . Die exakte Lösung ist die Summe über alle Amplituden (Graphen) aller Ordnungen.

Da $e^2 = \frac{4\pi}{137} \ll 1$, tragen im allgemeinen die höheren Ordnungen wenig bei, und

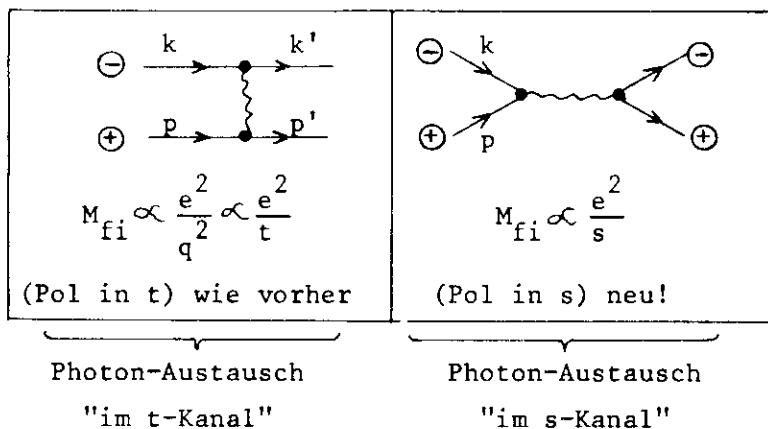
meist liefert die niedrigste mögliche Ordnung eine gute Näherung für die Gesamtamplitude. Die höheren Ordnungen nennt man auch "Strahlungskorrekturen". Dazu gehören auch Prozesse, bei denen zusätzlich "weiche" (d.h. niederenergetische) Photonen emittiert werden, die man (infolge nicht unendlich guter Energieauflösung) experimentell nie ausschließen kann:



Wir schreiben jetzt die Graphen in niedrigster Ordnung für drei andere elektromagnetische Prozesse hin.

(1) Elastische e^-e^+ Streuung (Bhabhastreuerung)

In niedrigster Ordnung tragen zwei Graphen bei:



Man benutzt die beiden Invarianten:

(45)

$$t \equiv -q^2 = -(k-k')^2$$

$$s \equiv -(k+p)^2 = -(k'+p')^2$$

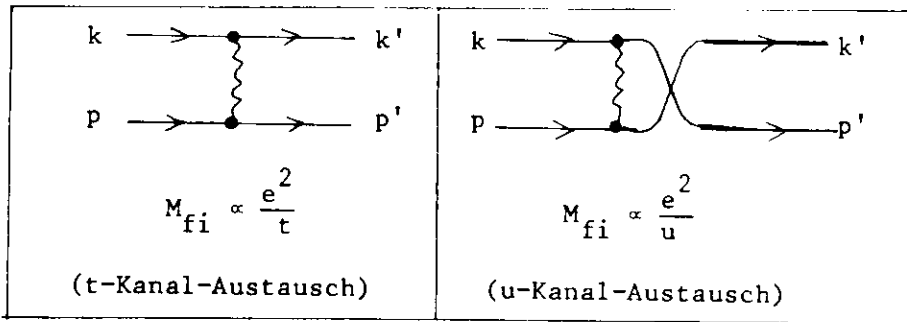
Im linken Graph ist der Propagator und damit das Matrixelement proportional zu $1/t \equiv 1/-q^2$ wie bei der Elektron-Protonstreuung. D.h. das Matrixelement geht gegen ∞ für $q^2 \rightarrow 0$. Entsprechend geht der differentielle Wirkungsquerschnitt gegen ∞ für $q^2 \rightarrow 0$, d.h. für Streuwinkel $\theta \rightarrow 0$.*

* In der "Praxis" verhindern die durch die Strahlungskorrekturen beschriebenen Prozesse, daß der Wirkungsquerschnitt bei $\theta \rightarrow 0$ divergiert.

hat also einen Pol in t , man spricht von Photon-Austausch im t -Kanal. Im rechten Graph ist der Propagator wieder umgekehrt proportional zum Quadrat des Photonvierervektors, der hier jedoch durch die Summe der 4-Vektoren der beiden einlaufenden Teilchen gegeben ist. Das Matrixelement hat einen Pol in s und man spricht von Photon-Austausch im s -Kanal. Ein solcher Graph ist analog zur Bildung von s -Kanal-Resonanzen durch Formation. Hier ist jedoch die "Resonanzmasse" $m_R = 0$. Bei der ep -Streuung gibt es keinen entsprechenden Graphen, weil das Elektron in der elektromagnetischen Wechselwirkung nicht direkt an das Proton koppelt (Man hätte sonst einen Zwischenzustand mit Baryonenzahl und Leptonenzahl $\neq 0$; das gibt es nicht).

(2) Elastische e^-e^- Streuung (Møllerstreuung)

In niedrigster Ordnung gibt es ebenfalls zwei Graphen (wegen der Ununterscheidbarkeit der Elektronen):

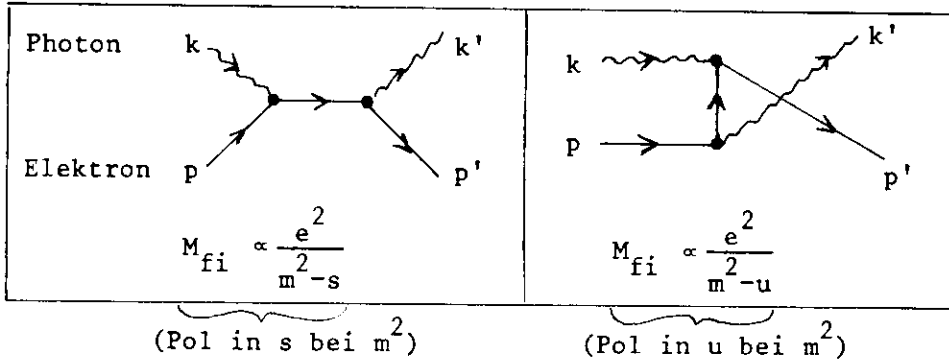


Man benutzt die Invarianten

$$(46) \quad \begin{aligned} t &\equiv - (k-k')^2 = - (p-p')^2 \\ u &\equiv - (k-p')^2 = - (k'-p)^2 \end{aligned}$$

Im linken Graphen ist der Propagator umgekehrt proportional zu t . Man hat Photonaustausch im t Kanal. Der Wirkungsquerschnitt geht gegen ∞ für Streuwinkel $\Theta \rightarrow 0$. Im rechten Graphen ist der Propagator umgekehrt proportional zu $u = - (k-p')^2$. Man spricht von Photon-Austausch im u -Kanal. Der Wirkungsquerschnitt geht gegen ∞ für $u \rightarrow 0$, d.h. für Streuwinkel $\Theta \rightarrow 180^\circ$.

(3) Compton-Streuung am Elektron



Hier tragen zwei Graphen mit Elektronaustausch im s - und u -Kanal bei. Die Propagatoren sind deswegen umgekehrt proportional zu $m^2 - s$ und $m^2 - u$ (siehe Liste der Feynmanregeln). Die Matrixelemente haben Pole bei $s = m^2$ und $u = m^2$. Nach unseren Regeln können wir für alle diese Prozesse jetzt die Matrixelemente der niedrigsten Ordnung sofort hinschreiben. Das Gesamtmatrixelement (= Σ der Graphen) wird dann quadriert und (gegebenenfalls) über die Spins summiert. Dies alles wird ebenso ausgeführt wie in unserem Beispiel der ep Streuung.

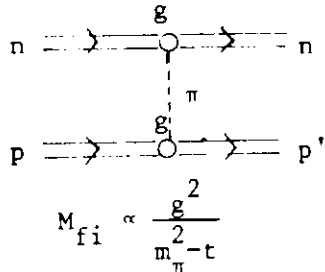
Die Auswertung der Graphen höherer Ordnung ist im Prinzip ebenfalls möglich, aber meist mit sehr hohem Rechenaufwand verbunden. Auch treten bei diesen Graphen divergente Integrationen auf; jedoch kann man durch bestimmte Rezepte (Renormierung) trotzdem endliche und sinnvolle Resultate erhalten. Hierauf gehen wir nicht näher ein (siehe Spezialliteratur, z.B. Bjorken-Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie, BI Hochschultaschenbuch, Band 101/101a). In allen bisher gemessenen rein elektromagnetischen Prozessen lieferten die Feynman-Regeln (oder die Q.E.D.) exakte Übereinstimmung mit dem Experiment; in vielen Fällen war die Genauigkeit einige 10^{-6} tel!

6. Formfaktoren und Rosenbluthformel der Elektron-Nukleon-Streuung

Bisher wurde angenommen, daß das Proton eine punktförmige Ladung und ein (Dirac)-magnetisches Moment hat. In Wirklichkeit hat es eine räumliche elektromagnetische Struktur und zusätzlich ein anomales magnetisches Moment. Bei der Beschreibung der Struktur und des anomalen Moments muß man den Effekt der starken Wechselwirkung berücksichtigen. Wir machen deshalb einen Exkurs über Teilchenaustausch in der starken Wechselwirkung.

6.1. Teilchenaustausch in der starken Wechselwirkung

Wir betrachten als Beispiel die pn-Streuung



Die einfachste Möglichkeit für einen Teilchenaustausch ist der Austausch eines Pions im t-Kanal. Das Matrixelement hat dann einen Pol bei $t = m_\pi^2$.

Aber die Kopplungskonstante, die der Ladung e entspricht, ist hier

$$\frac{g^2}{4\pi} = 15!$$

D.h. die störungstheoretische Entwicklung konvergiert sicher nicht. Trotzdem ist es manchmal sinnvoll, nur den niedrigsten Graphen zu betrachten, nämlich dann, wenn man in der Nähe des Pols des Propagators bei

$$t = -(p-p')^2 = m_\pi^2$$

ist, so dass dann die Amplitude durch diesen Graphen dominiert wird. Dieser Ansatz heißt Ein-Pion-Austauschmodell.

Im physikalischen Gebiet ist $t = -(p-p')^2 = -p^2 - p'^2 + 2pp'$

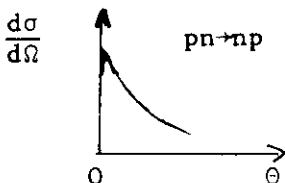
$$= +2M^2 + 2(\vec{p} \cdot \vec{p}') - 2EE'$$

Werte das im Laborsystem aus:

$$t = 2M^2 + 0 - 2ME' = 2M(M-E') \leq 0$$

also der Pol kann nicht erreicht werden; aber bei kleiner Rückstossenergie E' (d.h. kleinem Streuwinkel Θ) kommt man ihm nahe.

Experimentell findet man, daß viele Reaktionen, bei denen Ein-Pion-Austausch auf Grund der Quantenzahlen und Kopplungen der beteiligten Teilchen möglich ist, für kleine Streuwinkel einen nach dem Ein-Pionenaustauschmodell erwarteten Wirkungsquerschnitt haben. Die Benutzung des Modells wird also durch die Übereinstimmung mit dem Experiment nicht durch eine solide theoretische Herleitung nahegelegt.

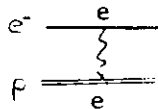


Beispiel: Die Proton-Neutron-Streuung wird in Vorwärtsrichtung vom sogenannten Diffraktionsmaximum beherrscht. In Rückwärtsrichtung (d.h. in Vorwärtsrichtung für die Ladungsaustauschstreuung $pn \rightarrow np$) zeigt der differen-

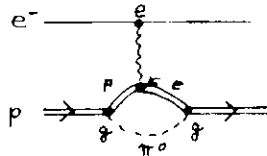
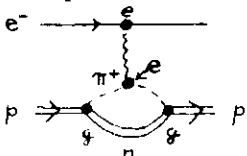
tielle Wirkungsquerschnitt den nach dem Ein-Pion-Austauschmodell erwarteten Verlauf.

6.2 Formfaktoren des Protons und Rosenbluthformel

Die Elektron-Proton-Streuung an einem punktförmigen Diracproton wird, wie oben gezeigt, in niedrigster Ordnung durch den Graphen

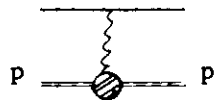


beschrieben. Wegen der starken Wechselwirkung des Protons gibt es aber auch Graphen der Art



etc.

Hier dissoziiert das Proton in ein virtuelles Nukleon und ein virtuelles π -Meson. Das ausgetauschte Photon koppelt an eines der beiden virtuellen Teilchen an, die dann wieder rekombinieren. Die Wechselwirkungsstärke an den Vertices $p\pi^+$ bzw. $p\pi^0$ ist der Kopplungskonstante g der starken Wechselwirkung proportional. Wegen der Grösse von g müssen wir alle Ordnungen in g betrachten; doch wollen wir uns immer noch auf die niedrigste Ordnung in e (d.h. auf den Austausch eines Photons) beschränken. Die Summe aller beitragenden Graphen stellt man schematisch durch den folgenden Graph dar:



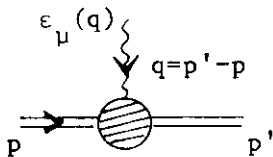
Was am unteren Vertex (in der Blase) vorgeht, ist beliebig kompliziert bezüglich der hadronischen (starken) Wechselwirkung. Irgendeins der Hadronen absorbiert das intermediäre Photon. Man kann sich z.B. vorstellen, daß das Photon nicht nur mit dem ("nackten") Proton allein, sondern auch mit der Mesonenwolke des Protons reagieren kann. Durch diese Möglichkeit entstehen auch das anomale magnetische Moment und eine effektive räumliche Ausdehnung des Protons, so wie es in einer elektromagnetischen Wechselwirkung "gesehen" wird.

Wir wollen jetzt die Wechselwirkung am unteren Vertex beschreiben, so daß wir ein vollständiges Matrixelement für ep -Streuung aufstellen können. Für

ein punktförmiges Dirac-Proton wurde die Wechselwirkung von Photon und Proton beschrieben durch (s. Feynmanregeln in Abschnitt 3.3):

$$(47) \quad -ie \bar{u}(\vec{p}') \gamma_\mu u(\vec{p}).$$

Dieser Term wurde aus der Diracgleichung mit elektromagnetischer Wechselwirkung (und zwar in minimaler Erweiterung) gewonnen (s. Abschnitt 2.4). Er beschreibt vollständig die Wirkung der Ladung und des Dirac-magnetischen Momentes des Protons. Wir brauchen jetzt zunächst einmal einen zusätzlichen Term, der die Wirkung des anomalen magnetischen Moments beschreibt. (Das anomale magnetische Moment wird auch Pauli-Moment genannt, im Gegensatz zum (normalen) Dirac-Moment.) Dieser zusätzliche Term kann von den 4-Impulsen p_μ und p'_μ abhängen. Da das Proton an das Photon mit dem Polarisationsvektor $\epsilon_\mu(q)$ ankoppelt, muß der Term aus den Vektoren p_μ , p'_μ , γ_μ und ϵ_μ gebildet werden. Er muß lorentzinvariant und eichinvariant sein. Es zeigt sich, daß der folgende Ausdruck die richtige Form hat, um den Beitrag des anomalen Moments zur Wechselwirkung zu beschreiben:



$$(48) \quad \frac{ie}{2M} \bar{u}(\vec{p}') \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) u(\vec{p}) (p'_\nu - p_\nu) \epsilon_\mu(\vec{q})$$

$$= \frac{ie}{2M} \bar{u}(\vec{p}') \sigma_{\mu\nu} u(\vec{p}) q_\nu \epsilon_\mu(\vec{q})$$

(s. Definition von $\sigma_{\mu\nu}$ in Abschnitt 2.3)
 $\frac{e}{2M}$ ist das Kernmagneton, das magnetische "Einheitsmoment".

Begründung

a) Wir zeigen zunächst, daß der Ausdruck (48) eichinvariant ist. Eichinvarianz bedeutet nach Gl. (12a), daß der Ausdruck (48) bei der Ersetzung $\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \lambda q_\mu$ unverändert bleibt, d.h. es muß sein

$$(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) q_\nu q_\mu = \underbrace{\gamma_\mu \gamma_\nu q_\nu q_\mu}_{=0} - \underbrace{\gamma_\nu \gamma_\mu q_\nu q_\mu}_{=0} = 0$$

Das sieht man sofort, wenn man die Summation über gleichlautende Indizes ausführt.

b) Wir zeigen weiter, daß (48) genau die Wirkung eines magnetischen Moments beschreibt (nicht etwa auch die Wirkung einer Ladung wie (47)). Dazu bilden wir den nichtrelativistischen Grenzfall von (48) für ein ruhendes Proton. Die Spinoren u reduzieren sich für $\vec{p}, \vec{p}' \rightarrow 0$ auf:

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(vgl. Gl. (3b))

Der räumliche Anteil von $\bar{u}(\vec{p}') \sigma_{\mu\nu} u(\vec{p})$ reduziert sich auf Terme wie

$$\bar{u}^1 \sigma_{12} u^1 = \underbrace{1 \ 0 \ 0 \ 0} \begin{pmatrix} \sigma_3 \\ -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält Ausdrücke wie bei Verwendung der Paulischen 2x2-Spinoperatoren und von nichtrelativistischen zweikomponentigen Spinoren. D.h. Gl. (48) hat eine Struktur wie ein Spinoperator und ist damit zur Beschreibung der Wirkung eines magnetischen Momentes (das mit keiner zusätzlichen Ladung verbunden ist) geeignet.

c) Wir prüfen jetzt, ob es zusätzlich zu Gl. (48) weitere mögliche Terme gibt.

1) Versuche $\bar{u} u (p-p')_{\mu} \epsilon_{\mu} = \bar{u} u q_{\mu} \epsilon_{\mu}$:

Dies ist jedoch nicht eichinvariant, denn für $\epsilon_{\mu} \rightarrow q_{\mu}$ bekommen wir $\bar{u} u q_{\mu} q_{\mu} = \bar{u} u q^2$, und $q^2 \neq 0$ im allgemeinen.

2) Versuche $\bar{u} u (p+p')_{\mu} \epsilon_{\mu}$:

Dies geht, aber wir können zeigen, daß es auf die zwei bereits betrachteten Fälle $\bar{u} \gamma_{\mu} u \epsilon_{\mu}$ und $\bar{u} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}) u (p'-p)_{\nu} \epsilon_{\mu}$ zurückgeführt werden kann!

Beweis: Benutze die Diracgleichung $\gamma_{\nu} p_{\nu} u = iMu$
und Diracgleichung für \bar{u} : $\bar{u} \gamma_{\nu} p_{\nu} = iM\bar{u}$

(letzteres ist aus $\gamma_{\nu} p_{\nu} u = iMu$ abzuleiten durch Bildung des konj. komplexen; dann von rechts mit γ_4 multiplizieren, dann $\gamma_{\mu} \leftrightarrow \gamma_4$ vertauschen).

Damit wird $\bar{u} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}) (p'-p)_{\nu} u = \bar{u} \left[\underbrace{\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} p'_{\nu}} - \underbrace{\gamma_{\nu} \gamma_{\mu} p'_{\nu}} - \underbrace{\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} p_{\nu}} + \underbrace{\gamma_{\nu} \gamma_{\mu} p_{\nu}} \right] u$

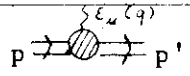
(Vert.-Rel.)

$$-\gamma_{\nu} \gamma_{\mu} + 2\delta_{\mu\nu}$$

$$-\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + 2\delta_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2\bar{u} \left[\underbrace{\gamma_\nu p'_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu p'_\nu}_{=iM} - (p'+p)_\mu \right] u \\
 \text{(Diracgl. s.o.)} & \quad =iM \quad =iM \\
 &= -4iM \bar{u} \gamma_\mu u + 2 \bar{u} u (p'+p)_\mu, \text{ qed.}
 \end{aligned}$$

Ähnlich kann man zeigen, daß alle anderen Kombinationen von γ 's, p' und p auf die beiden Terme zurückgeführt werden können.

D.h. man kann den Vertex  allgemein in der Form der zwei Terme

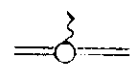
(49) $-ie \bar{u} \left[F_1^p(q^2) \gamma_\mu - \frac{F_2^p(q^2)}{2M} \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right] u$

schreiben.

In Gl. (49) haben wir zwei skalare Faktoren F_1^p und F_2^p eingeführt. Gl. (47) und (48) beschreiben ja nur die Wirkung einer (punktförmigen) Ladung und von (punktförmigen) anomalen magnetischen Momenten. Man muß noch zusätzlich die räumliche Verteilung von Dirac- und Pauli-Struktur des Protons berücksichtigen. Dazu können wir jeweils für den Dirac- und den Pauli-Term in (49) einen Formfaktor einführen, d.h. zwei zunächst unbekannte zusätzliche Faktoren F_1 und F_2 . Diese Faktoren müssen aber lorentzinvariant sein, damit die Lorentztransformationseigenschaften des Ausdrucks (49) nicht zerstört werden. Daher können sie nur von der einzigen invarianten Variablen, die man aus p und p' bilden kann, nämlich $pp' = -(M^2 + \frac{q^2}{2})$ abhängen. Formfaktoren sind also skalare Faktoren im Matrixelement, die die räumliche Ausdehnung von Ladung und magnetischem Moment beschreiben, und die (außer von festen Massen) nur vom Quadrat des Impulsübertrages auf das Proton als einziger Variabler abhängen.

Da die Struktur des Protons durch die starke Wechselwirkung bestimmt ist, können die Formfaktoren, so wie auch die Stärke des (anomalen) Pauli-Moments, nicht im Rahmen der Quantenelektrodynamik berechnet werden. Ihre Berechnung würde vielmehr eine Theorie der starken Wechselwirkung erfordern, die wir bisher nicht haben. Wir können also vorläufig die Formfaktoren nur messen.

Man beachte, daß die statischen Eigenschaften des Protons die Werte der Formfaktoren bei $q^2 = 0$ bestimmen. Ladung $-e = -eF_1^p(0)$, Pauli-Moment $1.793 \frac{e}{2M} = \frac{e}{2M} F_2^p(0)$, wobei $e/2M$ das Kernmagneton ist.

Wir können jetzt mit dem Ausdruck (49) für den Vertex  die Berechnung des Matrixelementes M_{fi} wiederholen. Die Rechnung verläuft ebenso wie in den Abschnitten 4.1 - 4.4, sie ist lediglich etwas länger. (siehe z.B. G. Källen, Elementarteilchenphysik, BI Hochschultaschenbuch 100, S. 245/246)

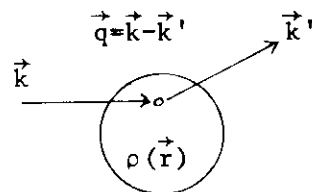
Das Ergebnis ist die Rosenbluthformel für elastische Elektron-Protonstreuung im Laborsystem (ohne Polarisationsmessung)

$$(50) \quad \frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \cos^2 \frac{\Theta}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\Theta}{2}\right)} \left[F_1^P{}^2 + \frac{q^2}{4M^2} F_2^P{}^2 + \frac{q^2}{2M^2} (F_1^P + F_2^P)^2 \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right]$$

- Notation:
- $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$
 - $\Theta, \Omega =$ Streuwinkel bzw. Raumwinkel des Elektrons im Laborsystem
 - $E(E') =$ Gesamtenergie des einlaufenden (auslaufenden) Elektrons
 - $M =$ Masse des Protons
 - $q^2 \approx 2EE' (1 - \cos\Theta)$ Quadrat des 4-Impulsübertrages vom einlaufenden auf das auslaufende Proton.
 - $F_1^P(q^2) =$ Dirac-Formfaktor des Protons (beschreibt Ladung und normales magnetisches Moment)
 - $F_2^P(q^2) =$ Pauli-Formfaktor des Protons (beschreibt anomales magnetisches Moment)

6.3 Klassische Interpretation der Formfaktoren

Wir wissen z.B. aus der Kernphysik, daß klassisch bei Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung mit Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ die Amplitude

$$(51) \quad A(\Theta) = A_{\text{Punktladung}}(\Theta) \underbrace{\int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}_{= F(\vec{q})}$$


ist. Hier ist $F(\vec{q})$ die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung. Bei kugelsymmetrischer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|)$ wird $F(\vec{q}) = F(|\vec{q}|)$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist daher

$$(52) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{Punktladung}} F^2(|\vec{q}|) ;$$

$|\vec{q}|$ ist hier der Betrag des übertragenen 3-Impulses \vec{q} ; da bei nicht zu großen Streuwinkeln der Energieübertrag q_0 klein ist, ist er also ungefähr gleich $\sqrt{q^2} = \sqrt{q^2 - q_0^2}$.

Es ist, wie in der Rosenbluthformel tritt also infolge der räumlichen Ausdehnung einfach der Faktor $F(q^2)$ zu dem Ausdruck für einen punktförmigen Streukörper. Im nichtrelativistischen Grenzfall können wir daher $F_1(q)$ und $F_2(q)$ als die Fouriertransformierten der Verteilungen von Ladung und anomalem magnetischen Moment ansehen. Für $q^2 = 0$ muß daher sein

$$(53) \quad \begin{aligned} F_1^P(0) &= 1 \\ F_2^P(0) &= 1.79 = \text{anomalies magnetisches Moment} \\ &\quad (\text{in Einheiten von Kernmagnetonen } \frac{e}{2M}) \end{aligned}$$

D.h. für kleine q^2 (also kleine Streuwinkel bzw. große Stoßparameter d.h. große Abstände des Projektils vom Target) wirkt das Target wie eine Punktladung und wie ein "statisches" magnetisches Moment. Für größere q^2 (kleinere Stoßparameter) drücken die Formfaktoren die Abweichung von dieser Situation aus.

6.4 Bestimmung der Formfaktoren des Protons und Neutrons

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Bestimmung von Formfaktoren aus den experimentellen Daten.

In der Praxis verwendet man statt F_1 und F_2 häufig die folgende Linearkombination

$$(54) \quad \begin{aligned} G_E^P &= F_1^P - \frac{q^2}{4M^2} F_2^P \\ G_M^P &= F_1^P + F_2^P \end{aligned}$$

Hiermit läßt sich die Rosenbluthformel so umformen, daß sie keine gemischten Terme der neuen Formfaktoren mehr enthält:

$$(55) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}^{\text{unpol}} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \frac{1}{(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\Theta}{2})^2} \times$$

$$= \tilde{c}_{NS} \left[\frac{1}{1 + q^2/4M^2} G_E^P + \frac{q^2}{4M^2} \left(\frac{1}{1 + q^2/4M^2} + 2 \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right) G_M^P \right]$$

(Rosenbluthformel im Laborsystem. Notation wie in (50))

Die Normierung der neuen Formfaktoren ist

$$(56) \quad \begin{array}{l} G_E^P(0) = 1 \\ G_M^P(0) = 2.79 \end{array}$$

Der Hauptvorteil der Formfaktoren G verglichen mit den Formfaktoren F liegt in der einfacheren Schreibweise der Rosenbluthformel. Es existiert "zufälligerweise" ein spezielles Koordinatensystem*, in dem G_E und G_M sehr eng der elektrischen Ladungsverteilung und der Verteilung des magnetischen Dipolmoments entsprechen. Deswegen werden G_E und G_M elektrische und magnetische Formfaktoren genannt (vgl. G. Källen, Elementarteilchenphysik, BI Hochschultaschenbuch 100, S. 248/249).

G_E^P und G_M^P werden auf folgende Weise aus dem Experiment extrahiert. Man macht mehrere Messungen von $d\sigma/d\Omega$ bei festgehaltenem q^2 , indem man jeweils verschiedene Einstellungen von θ und E oder E' wählt gemäß Gl. (40) $q^2 = EE'(1-\cos\theta)$. Dann trägt man (nach Anbringung von Strahlungskorrekturen) die Größe

$$(57) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega} &= \frac{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}{a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{G_E^{P2} + (q^2/4M^2)G_M^{P2}}{1 + q^2/4M^2} + \frac{2q^2}{4M^2} G_M^{P2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{G_E^{P2} + \tau G_M^{P2}}{1 + \tau} + 2\tau G_M^{P2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

gegen $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$ auf (mit $\tau = q^2/4M^2$). Bei festgehaltenem q^2 beschreibt diese Gleichung eine Gerade, die sogenannte Rosenbluthgerade. Aus der Steigung der Geraden erhält man $2q^2/4M^2 \cdot G_M^{P2}$, aus dem Wert für $\theta = 0$ erhält man eine Kombination von G_E^{P2} und G_M^{P2} . Abb. 1 illustriert den Verlauf der Rosenbluthgeraden. Eine Wiederholung der Prozedur für verschiedene Werte von q^2 liefert den Verlauf der Formfaktoren als Funktion von q^2 .

* Es handelt sich um ein System, in dem die 3-Impulse des ein- und auslaufenden Protons entgegengesetzt gleich sind, das sogenannte Breitensystem.

Die Vorhersage, daß die experimentellen Punkte auf einer Geraden liegen sollen, ist eine nichttriviale Aussage der Theorie. Sie beruht im wesentlichen darauf, daß wir bei der Herleitung des Matrixelementes mit Hilfe der Feynmanregeln nur die niedrigste Ordnung, d.h. Ein-Photon-Austausch betrachtet haben. Jede experimentell gefundene Abweichung von der Rosenbluthgeraden müßte als Hinweis dafür angesehen werden, daß andere Diagramme eine wesentliche Rolle spielen. Man hat bisher keine solchen Abweichungen gefunden.

Die Formfaktoren des Protons sind in den vergangenen 15 Jahren durch Messungen an verschiedenen Elektronenbeschleunigern bestimmt worden. Abb. 2 und 3 zeigen den Verlauf von G_M und G_E als Funktion von q^2 . Die Formfaktoren fallen sehr stark mit q^2 ab.

Der obige Formalismus läßt sich auch auf die Elektron-Neutronstreuung anwenden. Man muß nur die Formfaktoren des Protons in Gl. (50), (54), (55) und (57) durch die entsprechenden des Neutrons ersetzen:

	Normierung	Bedeutung
(58)	$F_1^P(q^2) \rightarrow F_1^n(q^2) ; F_1^n(0) = 0$	Ladung + Dirac-Moment
	$F_2^P(q^2) \rightarrow F_2^n(q^2) ; F_2^n(0) = -1.91$	anomales magnetisches Moment
	$G_E^P(q^2) \rightarrow G_E^n(q^2) ; G_E^n(0) = 0$	Elektrischer Formfaktor
	$G_M^P(q^2) \rightarrow G_M^n(q^2) ; G_M^n(0) = -1.91$	Magnetischer Formfaktor

Für $q^2 = 0$ muß $G_E^n = 0$ sein, da die Gesamtladung des Neutrons Null ist.

Experimentell bestimmt man die Formfaktoren des Neutrons aus der Elektron-Deuteronstreuung nach geeigneten Korrekturen für die Beiträge des Protons zur Streuung am Deuteron. Abb. 4 und 5 zeigen den Verlauf von G_M^n und G_E^n als Funktion von q^2 . G_M^n fällt ähnlich stark mit wachsendem q^2 ab, wie die Formfaktoren des Protons. G_E^n dagegen ist klein bzw. mit Null verträglich.

Das Trennverfahren von G_E und G_M mit Hilfe der Rosenbluthgeraden versagt (aus mathematischen Gründen) wenn $(q^2/4M^2)G_M^2 \gg G_E^2$ wird. Das ist für

große q^2 der Fall ($q^2 \gtrsim 5 \text{ GeV}^2$). Infolgedessen ist im Augenblick nur der Verlauf des magnetischen Formfaktors des Protons für $q^2 \gtrsim 5 \text{ GeV}^2$ bekannt. Eine Trennung von G_E und G_M ist im Prinzip möglich wenn man die elastische Streuung von polarisierten Elektronen an einem polarisierten Target mißt (Elektronen- und Protonenspins in Strahlrichtung ausgerichtet). Der Wirkungsquerschnitt dafür ist gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{q^2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \frac{2\tau}{1-\epsilon} \left[G_M^2 + \epsilon_L G_E^2 + 2G_E G_M \sqrt{\frac{\epsilon_L}{2}(1-\epsilon)} \right]$$

(s. N. Dombey, Rev. Mod. Phys. 41, 236 (1969))

Notation: Wie in (50) und (57)

E' = Energie des gestreuten Elektrons

$$\epsilon = [1 + 2(1+\tau) \text{tg}^2 \Theta/2]^{-1}$$

$$\epsilon_L = \epsilon/\tau$$

6.5. Eigenschaften der Formfaktoren des Protons und Neutrons

Ein Vergleich der Abbildungen 2 - 5 zeigt, daß die Formfaktoren angenähert das folgende empirische Skalierungsgesetz befolgen:

$$(59a) \quad G(q^2) \equiv \frac{G_E^P(q^2)}{G_E^P(q^2)} = \frac{G_M^P(q^2)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(q^2)}{|\mu_n|} \quad \begin{array}{l} \mu_p = 2.79 \text{ Kernmagnetonen} \\ \mu_n = -1.91 \text{ "} \end{array}$$

$$(59b) \quad G_E^n(q^2) = 0$$

D.h. (a) Die q^2 -Abhängigkeit (klassisch: Die räumliche Verteilung) der Ladung des Protons und des magnetischen Dipolmomentes von Proton und Neutron ist gleich. Das Skalierungsgesetz gilt nur angenähert. Abb. 6 und 7 zeigen Ergebnisse für die Verhältnisse $[\mu_p G_E^P/G_M^P]^2$ und $\mu_p G_M^n/\mu_n G_M^P$. Danach scheint das Skalierungsgesetz (59a) für $q^2 = 2 \text{ GeV}^2$ auf 10,- 15% genau zu gelten. (b) Der elektrische Formfaktor des Neutrons ist klein (oder Null). D.h. das Neutron hat nur eine schwache oder keine Ladungsstruktur.

Die q^2 -Abhängigkeit der Formfaktoren wird näherungsweise durch die

Dipolformel

$$(60) \quad G(q^2) = \left[\frac{1}{1 + (q^2/0.71)} \right]^2 \quad (q^2 \text{ in } \text{GeV}^2)$$

beschrieben. Dies ist eine empirische Formel. Die Formfaktoren fallen also für große q^2 ($\gg 0.71 \text{ GeV}^2$) wie $1/q^4$ ab. Der differentielle Wirkungsquerschnitt selbst fällt dann für $q^2 \lesssim 4M^2$ wie q^{-10} bis q^{-12} , da die Formfaktoren in Gl. (55) quadratisch auftreten und durch den Rutherfordwirkungsquerschnitt ein Faktor q^{-4} hereinkommt. Die Dipolformel (60) gilt nur angenähert. Experimentell wurden Abweichungen von 5 - 10% gefunden (s. Abb. 8).

Aufgrund der Dipolformel erwartet man, daß $G_{E,M} \rightarrow 0$ geht für $q^2 \rightarrow \infty$. Sehr große q^2 bedeuten sehr kleine Stoßparameter. Die Ladung des Protons scheint also über ein bestimmtes Volumen verteilt zu sein. Es gibt keinen harten Kern (hardcore), indem ein Teil der Ladung punktförmig konzentriert ist. Sonst würde man endliche Werte von G für $q^2 \rightarrow \infty$ finden. Messungen der inelastischen Elektron-Proton-Streuung deuten jedoch an, daß man dieses Bild modifizieren muß.

Zu Abschnitt 6.3 hatten wir darauf hingewiesen, daß die Formfaktoren in klassischer Betrachtung als Fouriertransformierte der Ladungsverteilung interpretiert werden können. Umgekehrt kann man die Ladungsverteilung als Fouriertransformierte des Formfaktors schreiben. Wir tun das für den Dipolformfaktor

$$G(q^2) = \left[\frac{1}{1 + \frac{q^2}{18.1}} \right]^2 \quad (q^2 \text{ in } f^2)$$

Die zugehörige (klassische) Ladungsverteilung ist (mit $q = |\vec{q}|$)

$$(61) \quad \rho(r) = e \int G(q^2) e^{-i\vec{q}\vec{r}} d^3\vec{q}$$

$$\rho(r) \Big|_{\text{Dipol}} = e \cdot 3.06 \exp(-4.25r) \quad (r \text{ in } f)$$

In der nichtrelativistischen Betrachtungsweise hat das Proton also eine exponentiell abfallende, räumliche Ladungsverteilung.

Es gibt verschiedene Versuche, den Verlauf der Formfaktoren aus Modellrechnungen abzuleiten. Wir gehen darauf nicht ein.

A n h a n g

Liste der wichtigsten Bezeichnungen (zu Kap. IV)

<u>Bezeichnung</u>		<u>Definition bzw. Einführung in Abschnitt</u>
$A = (\vec{A}, i\phi)$	4-Vektorpotential	2.1
$e^2/4\pi$	siehe α	
E	Gesamtenergie des einlaufenden Elektrons	4.3
E'	Gesamtenergie des auslaufenden Elektrons	4.3
$F_1^{p,n}$	Dirac-Formfaktor des Protons (Neutrons)	6.2
$F_2^{p,n}$	Pauli-Formfaktor des Protons (Neutrons)	6.2
$g^2/4\pi=15$	Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung am $pp\pi$ Vertex	6.1
$H^{em} = -ej_{\mu} A_{\mu}$	Wechselwirkungsenergiedichte des Elektronstromes mit einem elektromagnetischen Feld	2.4
$j_{\mu} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$	Wahrscheinlichkeitsstromdichte des Diracelektrons	2.4
$G_E^{p,n}$	elektrischer Formfaktor des Protons (Neutrons)	6.4
$G_M^{p,n}$	magnetischer Formfaktor des Protons (Neutrons)	6.4
k	Impuls des einlaufenden Elektrons (Photons)	2.2
k'	Impuls des auslaufenden Elektrons (Photons)	2.2
M	Masse des Protons	
m	Masse des Elektrons	
M_{fi}	Übergangsmatrixelement der betrachteten Reaktion	4.1
$p = (\vec{p}, iE)$	4-Impulsvektor	2.1
p	4-Impuls des einlaufenden Protons	3.1
p'	4-Impuls des auslaufenden Protons	3.1
$q = p' - p$	4-Impuls des ausgetauschten Photons	2.2
$s = -(k+p)^2$	Quadrat der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem	4.3
$u^i(\vec{p}), i=1,..4$	Spinoren für Spin 1/2 Teilchen (Spinwellenfunktionen)	2.3

V	Volumen, in dem das betrachtete System eingeschlossen ist	2.1
$x = (\vec{x}, it)$	4-Ortsvektor	2.1
Gesternete Größen müssen im Gesamtschwerpunktsystem genommen werden.		
$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$	Feinstrukturkonstante	2.5
$\delta_{\mu\nu}$	Kroneckersymbol	
$\gamma = (\vec{\gamma}, \gamma_4)$ oder γ_μ	γ -Matrizen	2.3
$\nabla = (\vec{\nabla}, -i\frac{\partial}{\partial t})$	Nabla (4-Operator)	2.1
$\square = \nabla_\mu \cdot \nabla_\mu$	Quabla	2.1
$\epsilon = (\vec{\epsilon}, \epsilon_4)$ oder ϵ_μ	4-Polarisationsvektor des Photons	2.1, 2.5
θ	Streuwinkel des Elektrons im Laborsystem	4.3
$\sigma_i, i=1,2,3$	Paulische Spinmatrizen	2.3
$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$	Tensor	2.3
$\tau = q^2/4M^2$		6.4
ϕ	Elektrostatistisches Potential	2.1
$\Psi(x), \vec{\Psi}(x)$	Lösungen der Diracgleichung (Ortswellenfunktion)	2.3
Ω	Raumwinkel zum Streuwinkel θ	4.3

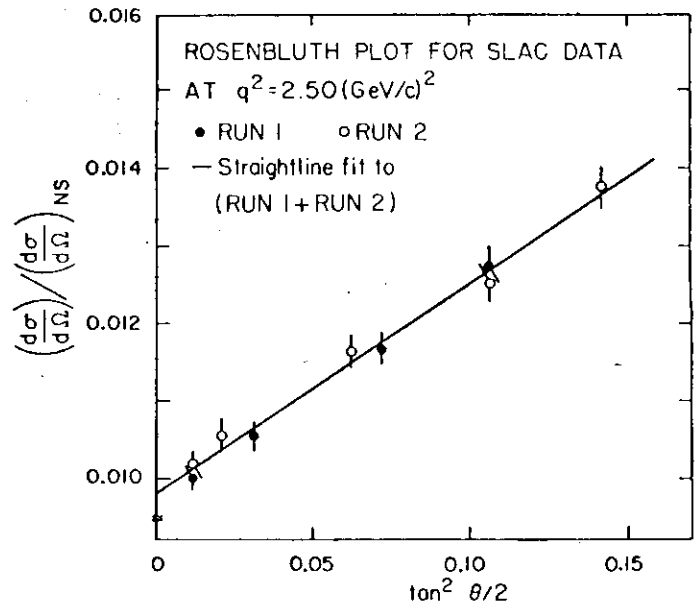
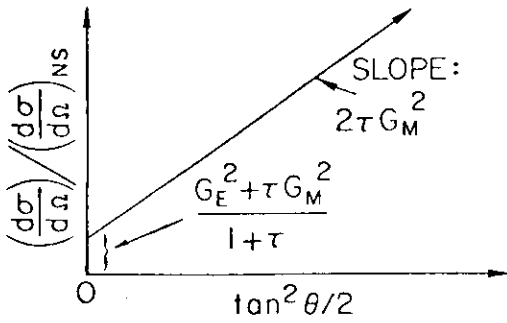


Abb. 1 Prinzipskizze und Beispiel der Rosenbluthgerade (für $q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2$)

(Definition von σ_{NS} wie in Gl. (55))

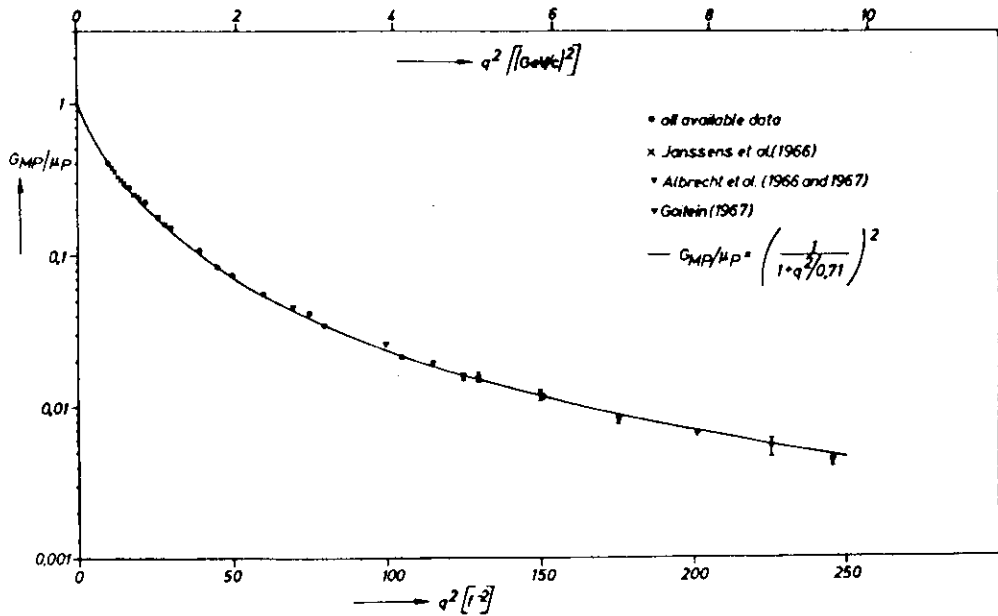


Abb. 2

The magnetic form factor G_{MP} divided by the magnetic moment of the proton μ_p as a function of the momentum transfer. [WEBER, Proc. Symposium on Electron and Photon Interactions, Stanford (1967), p. 59.]

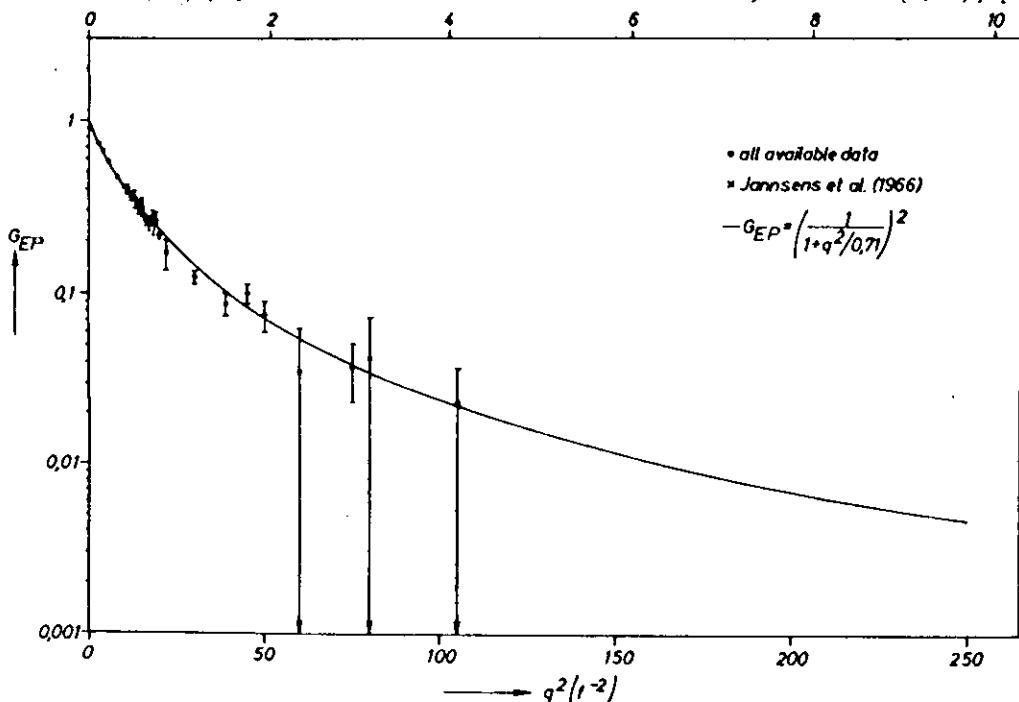


Abb. 3

The charge form factor of the proton G_{EP} as a function of q^2 . [WEBER, Proc. Symposium on Electron and Photon Interactions, Stanford (1967), p. 59.]

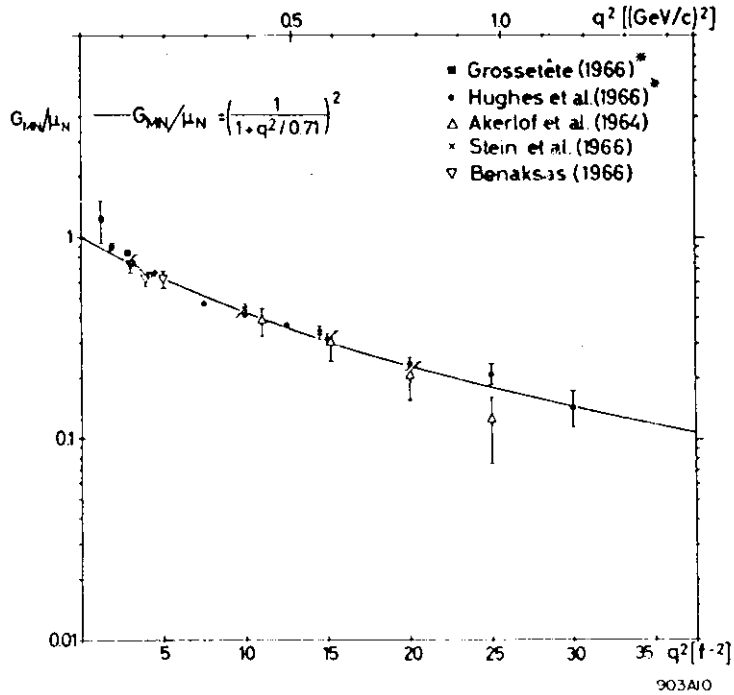
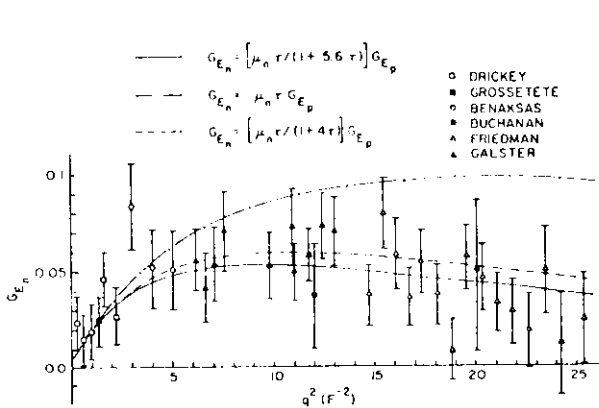


Abb. 4

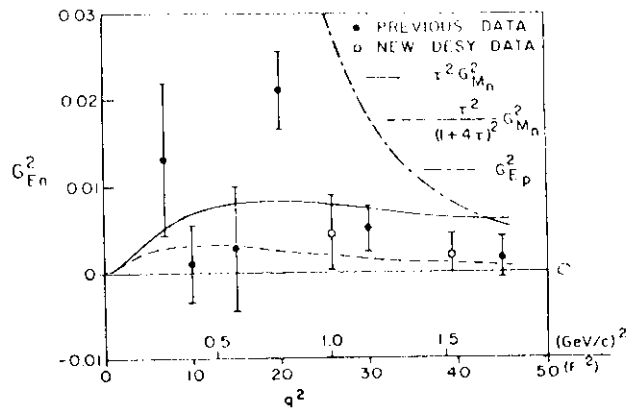
The magnetic form factor of the neutron G_{MN} , divided by the neutron magnetic moment μ_N .

aus G. Weber, Proceedings of the Int. Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Stanford 1967



(a)

The neutron electric form factor, $G_{EN}(q^2)$, derived from elastic e-d scattering data. The Feshbach-Lomon deuteron wave function was used with $N_g^2 = 0.65 F^{-1}$ Ref. 12.



(b)

G_{EN}^2 determined in a recent compilation of previous quasi-elastic e-d data, Ref. 17, compared with the new DESY values, Ref. 24. The curves provide a comparison with other form factors.

Abb. 5

(a) Der elektrische Formfaktor des Neutrons G_{EN} . Abb. 5(b) zeigt das Quadrat von G_{EN} mit einer weiterreichenden Abszissenskala. Aus R. Wilson, Proceedings of the International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Ithaca N.Y. 1971

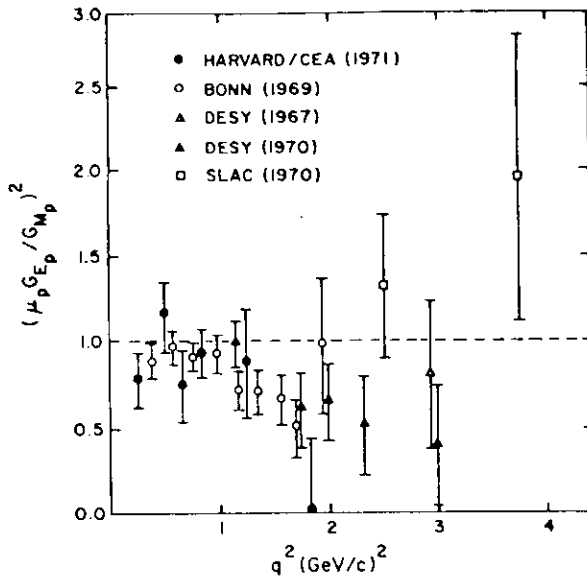


Abb. 6 Comparison between the values of $(\mu_p G_{Ep} / G_{Mp})^2$ obtained by various laboratories.

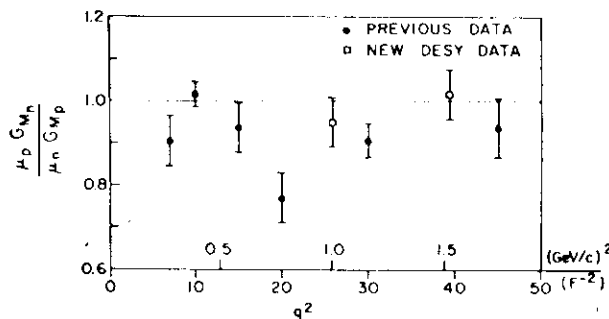


Abb. 7 The values of $\mu_p G_{Mn} / \mu_n G_{Mp}$ reported in a recent compilation of previous quasi-elastic e-d data, Ref. 17, compared with new DESY values, Ref. 24, obtained by the n-p coincidence method.

Abb. 6 und 7 aus
 R. Wilson, Elastic Scattering
 and Resonant Electroproduction
 in Proc. Int. Symp. El. Photon
 Interactions
 Ithaca, N.Y. (1971) S. 98

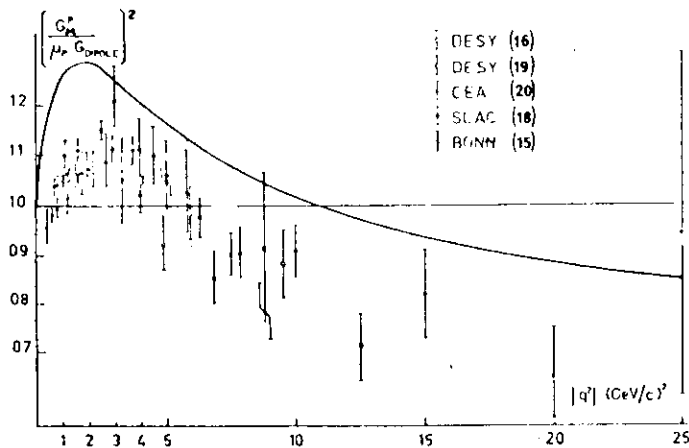


Abb. 8 Experimentelle Ergebnisse für das Verhältnis $|G_M^p / \mu_p G_{Dipol}|^2$ als Funktion von q^2 . Für exakte Gültigkeit der Dipolformel sollte das Verhältnis 1 sein. (Aus J.G. Rutherglen, Nucleon Formfactors, in Proc. Int. Symp. El. Photon Interactions, Liverpool 1969, S.170)