

DESY A 2.37

Hamburg, den 27.10.1958  
Dr. Ste/Schw.

Magnetsektor mit konstantem Feldgradienten

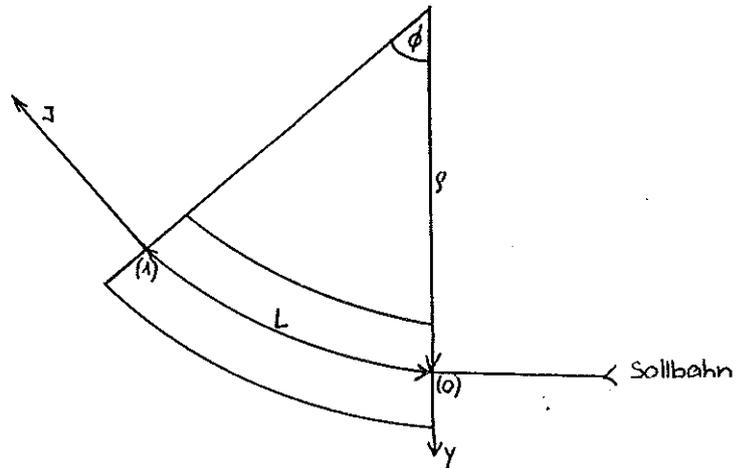
Analysiermagnete mit konstantem Feld und magnetische Quadrupollinsen sind die gebräuchlichsten Elemente zur Abtrennung und Fokussierung von Teilchenstrahlen hoher Energie. Die Transformationen für diese Elemente folgen als Spezialfälle aus der allgemeinen linearen Transformation eines Magnetsektors mit konstantem Feldgradienten und sind zusammengestellt in einheitlicher Schreibweise. Bezüglich seiner Fokussierungseigenschaft lässt sich der Magnetsektor darstellen als Linse mit einer bestimmten Brennweite und Hauptebenenlage, und die Gleichungen dafür sind angegeben.

Beim Entwurf einer Strahlführung kommt es im allgemeinen darauf an, bei gegebener maximaler Impulsstreuung eine vorgegebene Strahlemittanz mit möglichst kleinem Aufwand herzustellen. Die Akzeptanzen der im Strahlengang verwendeten Elemente sollten daher möglichst übereinstimmen und in ihrer Lage im Phasenraum aufeinander abgestimmt sein. Die Akzeptanzflächen der hier betrachteten Elemente sind für eine konstante Öffnungsweite  $a$  untersucht und für verschiedene Fälle graphisch dargestellt.

Bei einem Sektormagneten mit konstantem Feld, der als Impuls-Analysiermagnet betrieben wird, hängt die aufgenommene Strahlemittanz ab von der verlangten Impulsauflösung. Dieser Zusammenhang ist dargestellt in Abhängigkeit von den verwendeten Parametern und wird für verschiedene Fälle diskutiert.

I. Allgemeine lineare Transformation eines Magnetsektors mit konstantem Feldgradienten; Analysiermagnet und Quadrupol-linse als Spezialfälle

Abb. 1



Für einen Magnetsektor mit konstantem Feldgradienten  $\frac{\partial B}{\partial y}$  gelten für kleine Abweichungen von einem Sollkreis mit dem Krümmungsradius

$\rho = \frac{P_0}{eB}$  die folgenden Transformationen:

Radiale Komponente:

Koordinaten:  $y, y' = \frac{dy}{ds}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Positiver} \\ \text{Feldgradient } \ddot{u} \\ - \frac{P_0}{e\rho^2} < \frac{\partial B}{\partial y} < 0 \end{array} \right\} \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} \cos 4\alpha & \alpha \sin 4\alpha \\ -\frac{1}{\alpha} \sin 4\alpha & \cos 4\alpha \end{pmatrix} \vec{Y}_0 + \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\rho} (1 - \cos 4\alpha) \\ \frac{\alpha}{\rho} \sin 4\alpha \end{pmatrix} \frac{\Delta P}{P_0} \quad (1a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Negativer} \\ \text{Feldgradient} \\ \text{mit } \frac{\partial B}{\partial y} < - \frac{P_0}{e\rho^2} \end{array} \right\} \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} \cos i4\alpha & i \sin i4\alpha \\ \frac{1}{\alpha} \sin i4\alpha & \cos i4\alpha \end{pmatrix} \vec{Y}_0 + \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\rho} \cos i4\alpha \\ \frac{\alpha}{\rho} \sin i4\alpha \end{pmatrix} \frac{\Delta P}{P_0} \quad (1b)$$

mit  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\rho} \sqrt{1-n} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{e}{P_0} \frac{\partial B}{\partial y}}$

$$n = - \frac{\rho}{B_0} \frac{\partial B}{\partial y}$$

Vertikale Komponente:

Koordinaten:  $z, z' = \frac{dz}{ds}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Positiver} \\ \text{Feldgradient} \\ \frac{\partial B}{\partial y} > 0 \end{array} \right\} \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi_R & R \sin \psi_R \\ \frac{1}{R} \sin \psi_R & \cos \psi_R \end{pmatrix} \vec{z}_0 \quad (1c)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Negativer} \\ \text{Feldgradient} \\ \frac{\partial B}{\partial y} < 0 \end{array} \right\} \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi_R & R \sin \psi_R \\ -\frac{1}{R} \sin \psi_R & \cos \psi_R \end{pmatrix} \vec{z}_0 \quad (1d)$$

mit

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \sqrt{|n|} = \sqrt{\frac{e}{p_0} \left| \frac{\partial B}{\partial y} \right|}$$

Die folgenden Spezialfälle ergeben sich hieraus:

A. Stark fokussierender Magnetsektor mit  $n \gg 1$

Man kann die eins gegen  $n$  vernachlässigen und in den Gleichungen (1) setzen

$$Q = R = \frac{1}{\sqrt{\frac{e}{p_0} \left| \frac{\partial B}{\partial y} \right|}} \quad (2)$$

B. Quadrupollinse

Die Transformation folgt aus den Gleichungen (1) mit  $\rho \rightarrow \infty$  und  $Q = R$ . Damit verschwindet der impulsabhängige Vektor. Führt man ausserdem die Koordinatenvektoren  $\vec{y}$  und  $\vec{z}$  ein mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} Y \\ R Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \frac{dY}{d\psi} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} Z \\ R Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ \frac{dZ}{d\psi} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \psi = \frac{s}{R} \quad (3)$$

so vereinfachen sich die Transformationen (1) für eine radial fokussierende Linse zu

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \vec{y}_0 \quad (4a)$$

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \vec{z}_0 \quad \text{mit} \quad \psi = \frac{l}{R} \quad (4b)$$

Für eine radial defokussierende Linse vertauschen sich die beiden Matrizen.

C. Sektormagnet mit konstantem Feld

Man erhält die Transformation aus den Gleichungen (1a) und (1c) für

$\frac{\partial B}{\partial y} = 0$ ,  $Q = \rho$ ,  $R \rightarrow \infty$ . In den Koordinaten

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y \\ \rho y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{d\psi} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{Z} = \begin{pmatrix} z \\ \rho z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \frac{dz}{d\psi} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \psi = \frac{s}{\rho} \quad (5)$$

ergibt sich

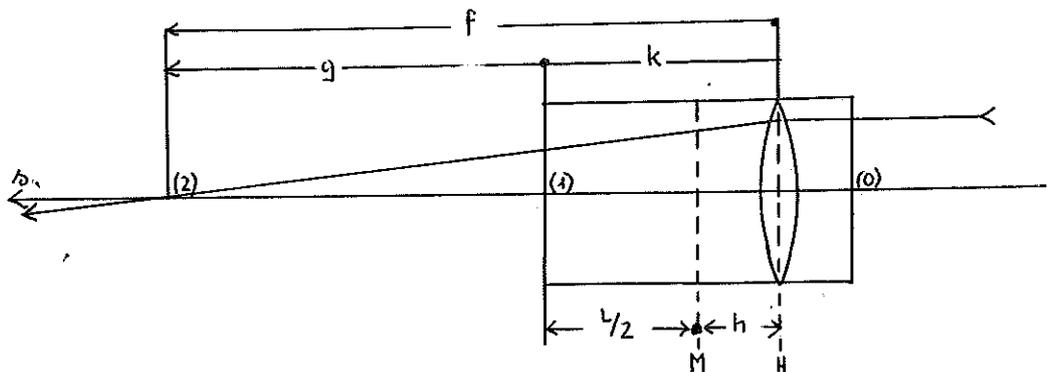
$$\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \vec{Y}_0 + \rho \begin{pmatrix} 1 & -\cos \phi \\ & \sin \phi \end{pmatrix} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (6a)$$

mit  $\phi = \frac{L}{\rho}$

$$\vec{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{Z}_0 \quad (6b)$$

II. Darstellung eines Magnetsektors als Linse

Abb. 2: Fokussierende Linse



Für die fokussierte Komponente in einer Quadrupollinse bzw. in einem Magnetsektor mit  $n \gg 1$  und für die radiale Komponente in einem Sektormagnet konstanten Feldes gilt in den Koordinaten

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{d\psi} \end{pmatrix}$$

die Transformation

$$\vec{\tilde{y}}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \vec{\tilde{y}}_0 \quad (7)$$

mit  $\psi = \frac{s}{r}$  ;  $\Psi = \frac{L}{r}$  ;

$$r = \begin{cases} R = \frac{1}{\left| \frac{e}{p_0} \frac{\partial B}{\partial y} \right|} & \text{für Quadrupollinse} \\ \rho = \frac{p_0}{eB} & \text{für Sektormagnet mit} \\ & B = \text{const.} \end{cases}$$

Der Brennpunkt (2) ist dadurch bestimmt, dass für  $\tilde{y}_0^1 = 0$  immer  $\tilde{y}_2 = 0$  ist:

$$\vec{\tilde{y}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & g/r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \vec{\tilde{y}}_0 = \begin{pmatrix} \cos \psi - g/r \sin \psi & \sin \psi + g/r \cos \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \vec{\tilde{y}}_0$$

$$\tilde{y}_2 = (\cos \psi - g/r \sin \psi) \tilde{y}_0^1 = 0$$

$$g = r \cdot \text{ctg } \psi \quad (8)$$

Dann ist

$$\tilde{y}_2^1 = -\sin \psi \cdot \tilde{y}_0^1$$

und die Brennweite  $f$  und die Lage der Hauptebene  $H$  ergeben sich aus der Bedingung

$$-\frac{f}{r} \tilde{y}_2^1 = \frac{f}{r} \sin \psi \cdot \tilde{y}_0^1 = \tilde{y}_0^1$$

$$f = \frac{r}{\sin \psi} \quad \underline{\text{Brennweite}} \quad (9)$$

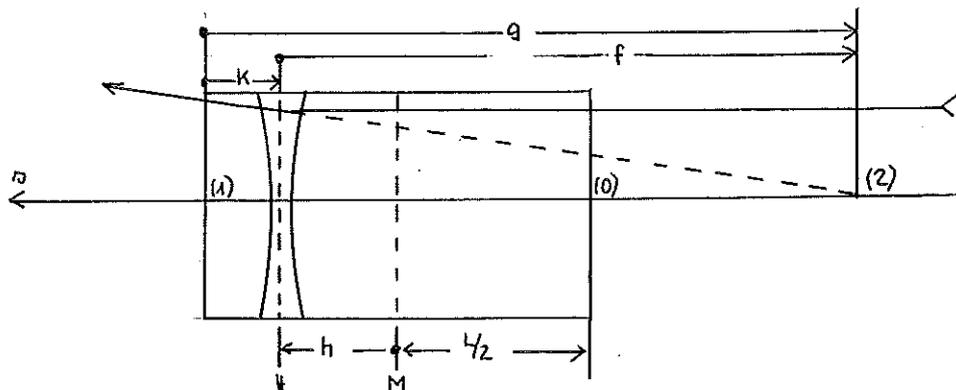
$$k = g - f = -r \cdot \text{tg } \frac{\psi}{2} \quad (10)$$

Damit wird

$$k = \frac{L}{2} + k = -r \left( \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} - \frac{\Psi}{2} \right) \quad \underline{\text{Versetzung der Hauptebene}} \quad (11)$$

bezogen auf die Mittelebene M der Linse. Für abnehmendes  $\Psi$  geht  $h$  gegen Null; für  $\Psi = \frac{L}{r} = \frac{\pi}{4}$  z.B. ist bereits  $h = 0,027 \cdot L$ , d.h. die Hauptebenenversetzung beträgt weniger als 3 % der Linsenlänge.

Abb. 3: Defokussierende Linse



Für die defokussierte Komponente in einer Quadrupollinse bzw. in einem Magnetsektor erhält man analog

$$g = -R \cdot L \operatorname{tg} \psi \quad (12)$$

$$f = -\frac{R}{\sin \psi} \quad \underline{\text{Brennweite}} \quad (13)$$

$$k = g - f = -R \operatorname{Tg} \frac{\Psi}{2} \quad (14)$$

$$h = \frac{L}{2} + k = R \left( \frac{\Psi}{2} - \operatorname{Tg} \frac{\Psi}{2} \right) \quad \underline{\text{Hauptebenenversetzung}} \quad (15)$$

Für  $\Psi \rightarrow 0$  gilt  $h \rightarrow 0$ ; für  $\Psi \rightarrow \infty$  gehen  $f$ ,  $g$  und  $k$  gegen Null und  $h$  gegen  $L/2$ .

### III. Akzeptanz einer fokussierenden Linse

Für ein Teilchen mit  $\frac{\Delta p}{p_0} = 0$  hat die Transformation der fokussierten Komponente in einem Magnetsektor mit  $n \gg 1$ , in einer Quadrupollinse und in einem Sektormagnet mit  $B = \text{const.}$  übereinstimmend die in Gleichung (7) gegebene Form

$$\vec{\tilde{y}}_1 = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi \\ -\sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \vec{\tilde{y}}_0$$

Diese Transformation stellt in der  $\tilde{y}, \tilde{y}'$ -Ebene eine Drehung um den Winkel  $\Psi$  im Uhrzeigersinne dar. Betrachtet man eine Linse, die überall die Öffnungsweite  $a$  hat, so ist ihre Akzeptanzfläche gleich der grösstmöglichen Figur, die während dieser Drehung ganz innerhalb der durch die Parallelen  $\tilde{y} = -\frac{a}{2}$  und  $\tilde{y} = +\frac{a}{2}$  gebildeten Grenzen liegt. Es ergibt sich ein Rhombus mit zwei abgerundeten Ecken, der in Abb. 4 für verschiedene Drehwinkel  $\Psi$  dargestellt ist. Sein Flächeninhalt, die Akzeptanz  $\alpha$ , ist in den Koordinaten  $y$  und  $y' = \frac{dy}{ds}$  gegeben durch

$$\alpha = \begin{cases} \frac{a^2}{2r} \left( \frac{2}{\sin \Psi} - \text{tg} \frac{\Psi}{2} + \frac{\Psi}{2} \right) = \frac{a^2}{4r} \left( \Psi + 2 \text{ctg} \frac{\Psi}{2} \right) & \text{für } 0 < \Psi \leq \pi \\ \frac{\pi}{4} \frac{a^2}{r} & \text{für } \pi \leq \Psi \end{cases} \quad (16)$$

Für  $\Psi \geq \pi$  wird die Akzeptanzfläche in der  $y, y'$ -Ebene zu einer Ellipse mit den Halbachsen  $\frac{a}{2}$  und  $\frac{a}{2r}$ . Für kleine  $\Psi$  ist

$$\alpha \approx \frac{a^2}{r \cdot \sin \Psi} \approx \frac{a^2}{L} \quad \left( \Psi = \frac{L}{R} \ll 1 \right).$$

Abb. 4

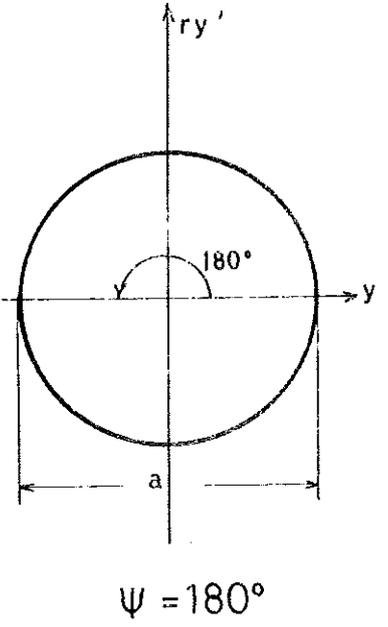
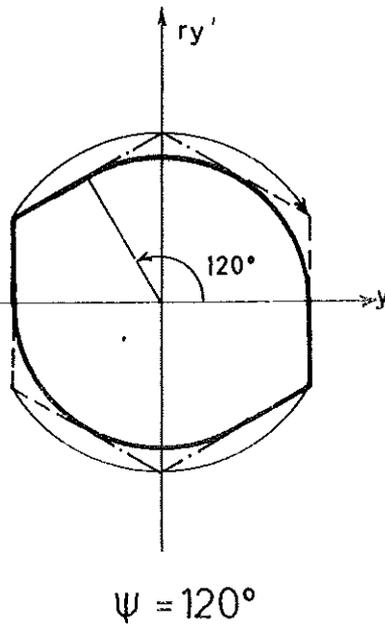
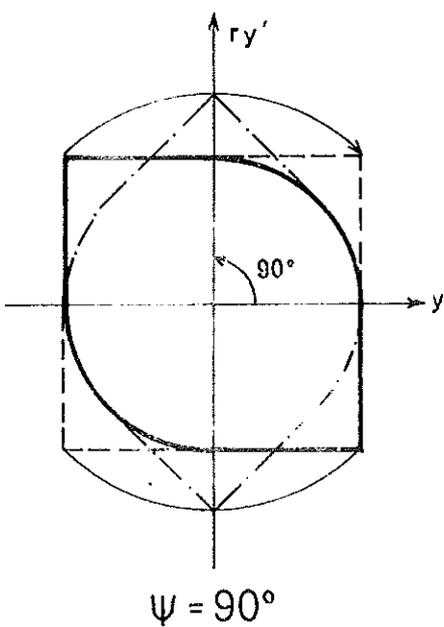
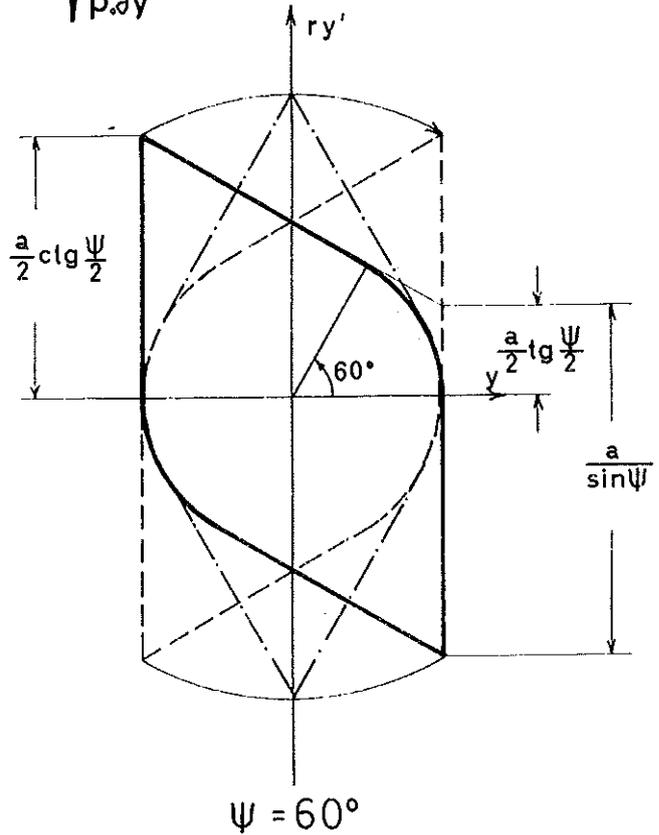
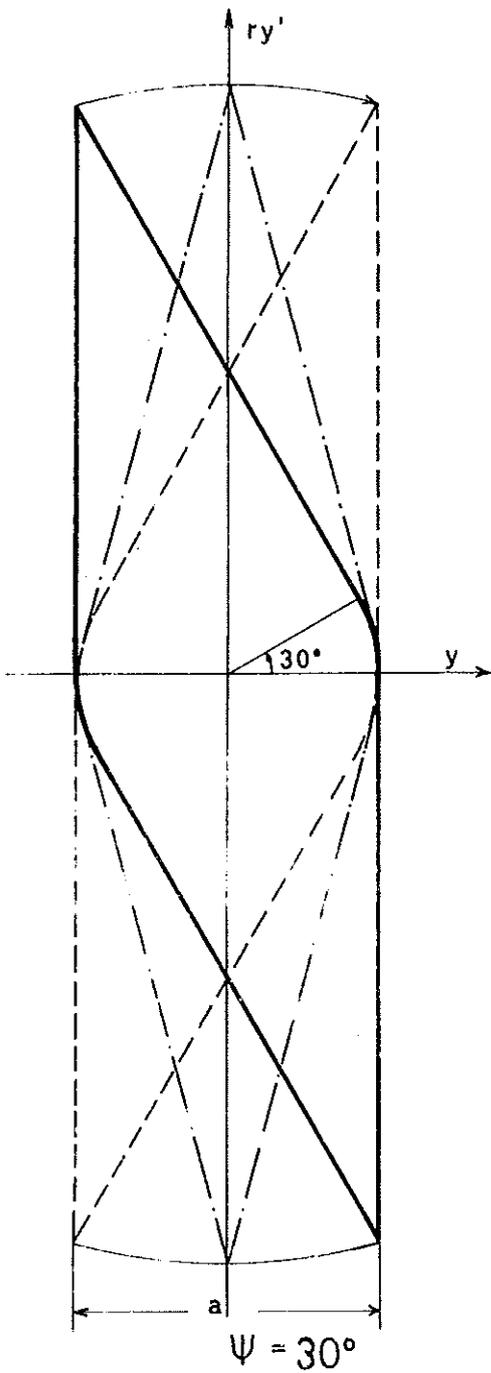
Akzeptanzflächen einer fokussierenden Linse.

— Anfang  
 - - - Mitte  
 - - - Ende

} der Linse  
 L=Länge der Linse

$a = \text{Öffnungsbreite der Linse}$      $\Psi = \frac{L}{r}$

$r = \begin{cases} g = \frac{p}{eB} & \text{für Sektormagneten mit } B = \text{const.} \\ R = \frac{1}{\sqrt{e\partial B / p\partial y}} & \text{für Quadrupollinse} \end{cases}$



#### IV. Akzeptanz einer defokussierenden Quadrupollinse

Die Transformation der defokussierten Komponente in einer Quadrupollinse ist gegeben durch

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \vec{y}_0 \quad (17)$$

Dies lässt sich auch schreiben in der Form

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} e^\psi & 0 \\ 0 & e^{-\psi} \end{pmatrix} \vec{w} \quad \text{mit} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \vec{y}$$

In einem um  $45^\circ$  gedrehten Koordinatensystem  $w, w'$  bedeutet also die Transformation (17) eine Streckung in  $w$ -Richtung um den Faktor  $e^\psi$  und eine Zusammenziehung in  $w'$ -Richtung um den Faktor  $e^{-\psi}$ . Die Punkte wandern also bei der Transformation auf quadratischen Hyperbeln, deren Asymptoten die Geraden  $\tilde{y}' = \tilde{y}$  und  $\tilde{y}' = -\tilde{y}$  sind. Die Akzeptanzfläche, die sich dabei für konstante Öffnungsweite  $a$  ergibt, ist ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt mit wachsendem Drehwinkel  $\psi$  schnell abnimmt, wie in Abb. 5 dargestellt ist. Man erhält in den Koordinaten  $y, y' = \frac{dy}{ds}$  für die Akzeptanz

$$\alpha = \frac{a^2}{R \sin \psi} \quad (18)$$

Für kleines  $\psi$  wird

$$\alpha = \frac{a^2}{L} \quad \left( \psi = \frac{L}{R} \ll 1 \right)$$

wie beim feldfreien Schlitz.

Abb. 5

Akzeptanzflächen einer defokussierenden Quadrupollinse.

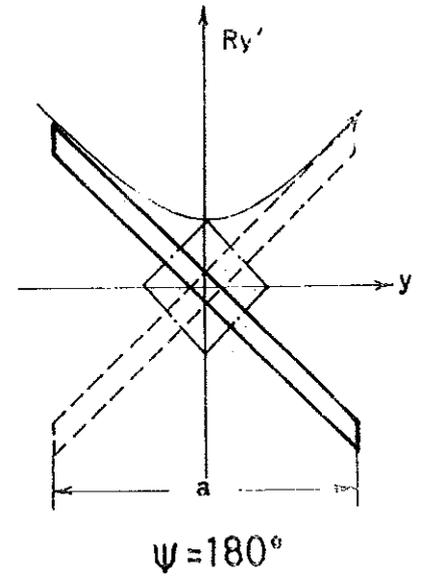
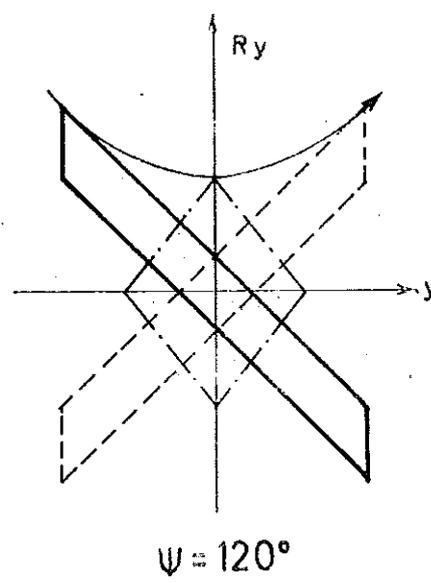
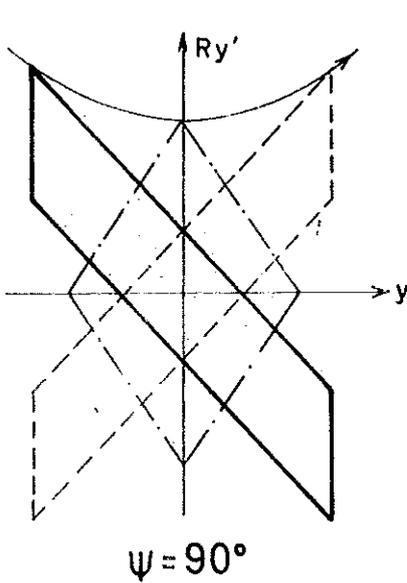
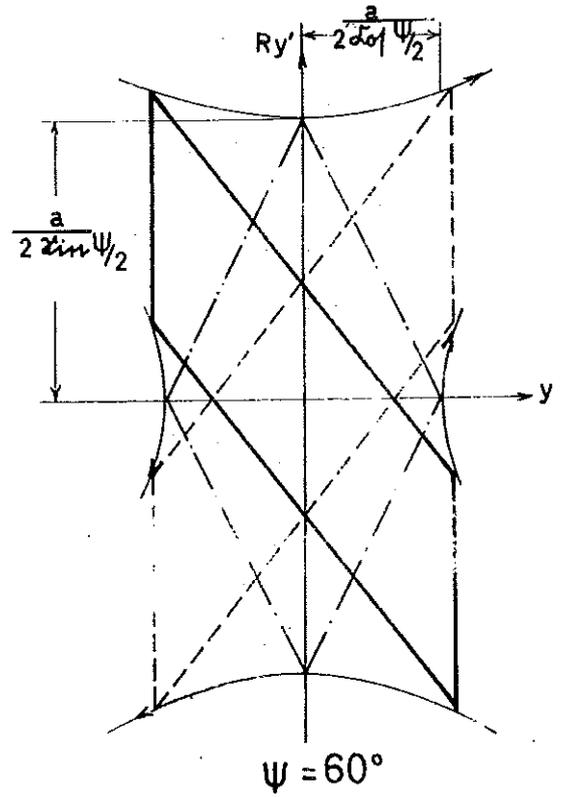
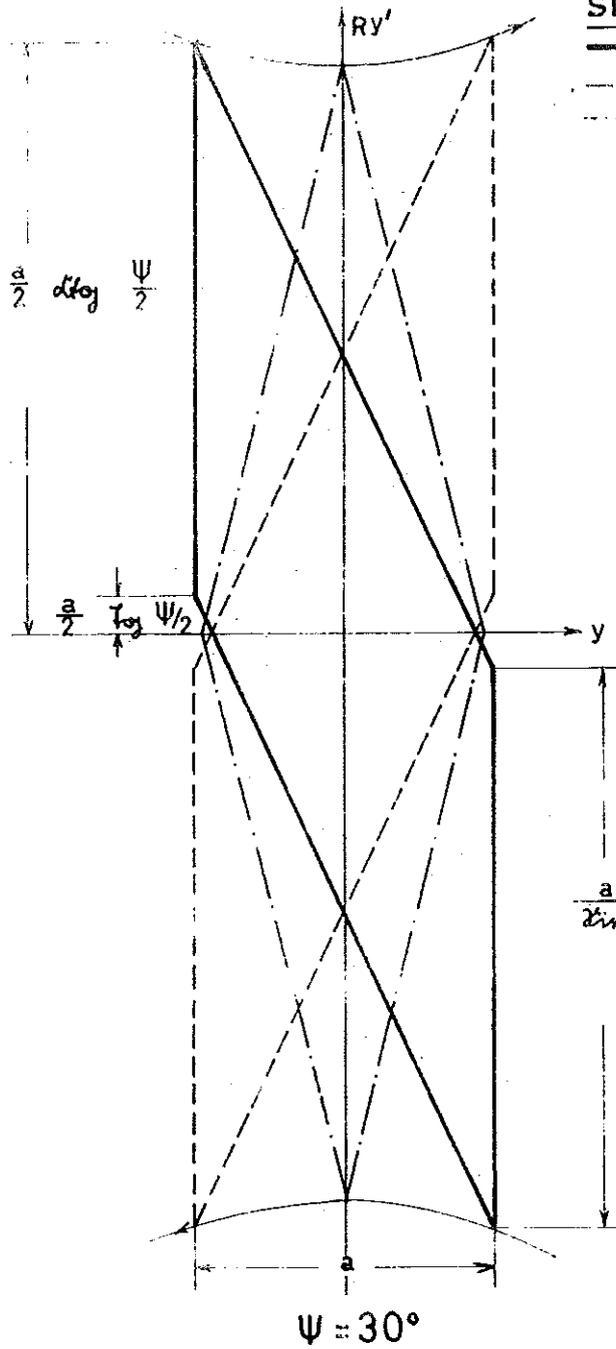
— Anfang  
 - - - Mitte  
 ····· Ende

$L =$  Länge der Linse

$a =$  Öffnungsweite der Linse.

$$R = \frac{1}{\sqrt{\frac{e \partial B}{p \partial y}}}$$

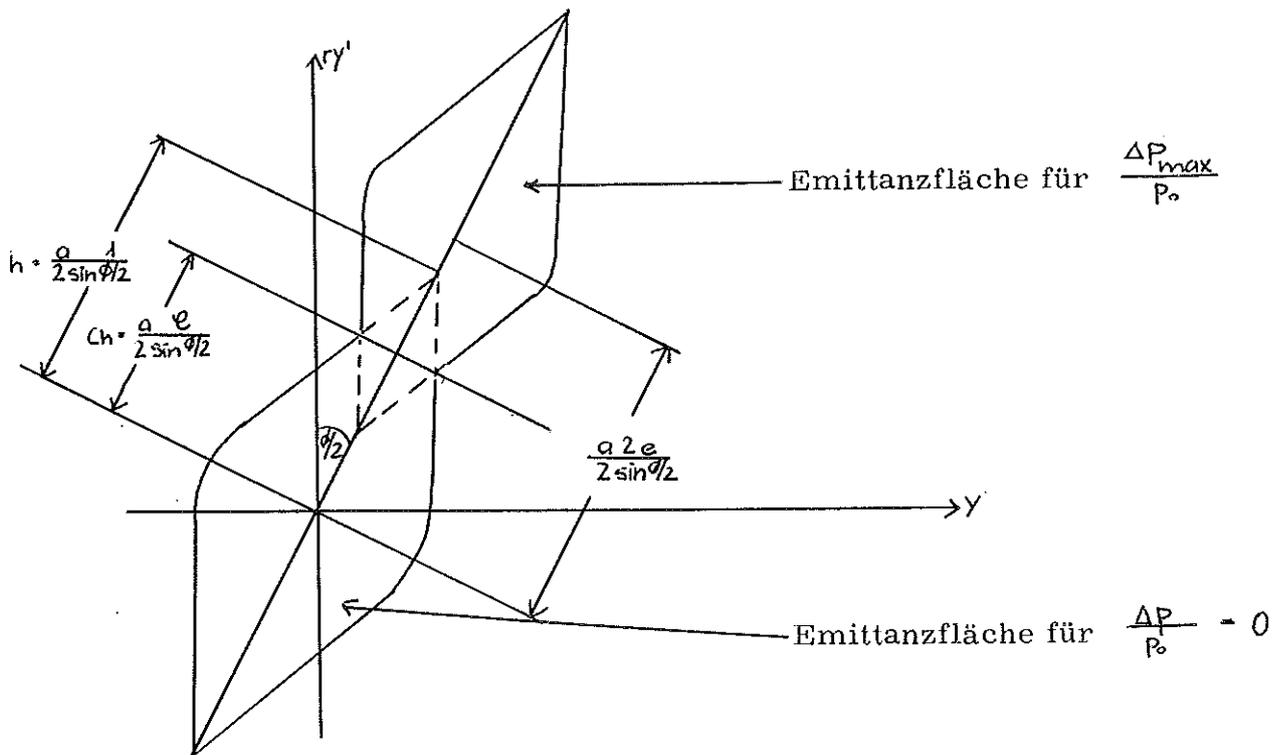
$$\psi = \frac{L}{R}$$



V. Impulsauflösung eines Analysiermagneten

Die Impulsauflösung  $\frac{\Delta P_{\max}}{P_0}$  eines Analysiermagneten ist dadurch bestimmt, dass am Ende des Separators die Emittanzflächen zweier Strahlen mit einer relativen Impulsabweichung  $\frac{\Delta P}{P_0}$  vollständig voneinander getrennt sind.

Abb. 6: Strahlemittanzflächen am Ausgang des Analysiermagneten



Aus Gleichung (6a) folgt für ein Teilchen mit den Anfangsbedingungen  $\vec{\tilde{y}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  das Verhältnis

$$\frac{\tilde{y}'_1}{\tilde{y}_1} = \text{ctg } \phi/2 ,$$

d.h. in der  $\tilde{y}, \tilde{y}'$ -Ebene erfolgt die zu  $\frac{\Delta P}{P_0}$  proportionale Verschiebung der Strahlemittanzfläche in Richtung der Geraden

$$\tilde{y}' = \text{ctg } \phi/2 \cdot \tilde{y} ,$$

wie in Abb. 6 dargestellt ist. Die Ausdehnung der Emittanzfläche

in dieser Richtung ist also mitbestimmend für das Auflösungsvermögen des Magneten. Es sollen nun die folgenden 2 Fälle betrachtet werden:

a) Ablenkungswinkel  $\phi = \frac{L}{\rho} < 1$

Die Abrundungen in der Akzeptanzfläche können dann vernachlässigt werden, und es ist in der  $y, y'$ -Ebene

$$\alpha = \frac{a^2}{\rho \cdot \sin \phi}$$

Wir nehmen an, dass der Strahl an den Eingang des Analysiermagneten so angepasst ist, dass er die Akzeptanzfläche vollständig ausfüllt, jedoch mit der Einschränkung, dass noch alle Teilchen daraus entfernt sind, deren Abstand von der Geraden

$$\tilde{y}' = -\operatorname{tg} \phi/2 \cdot \tilde{y}$$

mehr als  $\mathcal{C} \cdot h$  beträgt, wobei  $h$  die halbe Achse des Rhombus sei und  $\mathcal{C}$  ein zwischen Null und Eins liegender "Füllfaktor" (siehe Abb. 6). Die Strahlemittanz  $\mathcal{E}$  in der  $y, y'$ -Ebene ist dann

$$\mathcal{E} = \mathcal{C} (2 - \mathcal{C}) \frac{a^2}{\rho \sin \phi}, \quad 0 < \mathcal{C} \leq 1 \quad (19)$$

und die durch  $\frac{\Delta P_{\max}}{P_0}$  am Ausgang des Magneten hervorgerufene Verschiebung des Rhombus in Richtung seiner Achse  $h$  muss in der  $y, y'$ -Ebene mindestens

$$2 \mathcal{C} \cdot h = \mathcal{C} \frac{a}{\sin \phi/2}$$

betragen. Diese Bedingung lautet mit den Koordinaten  $y, y'$

$$\left( \frac{\Delta P_{\max}}{P_0} \right)^2 (y^2 + \rho^2 y'^2) = \left( 2 \rho \frac{\Delta P_{\max}}{P_0} \cdot \sin \phi/2 \right)^2 \geq \left( \mathcal{C} \frac{a}{\sin \phi/2} \right)^2$$

oder 
$$\mathcal{C} = 2 \frac{\rho}{a} \frac{\Delta P_{\max}}{P_0} \cdot \sin^2 \phi/2; \quad 0 < \mathcal{C} \leq 1 \quad (20)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (20) in Gleichung (19) folgt damit für  $0 < \varrho \leq 1$

$$\varepsilon = 2a \frac{\Delta P_{max}}{P_0} \operatorname{tg} \phi/2 \left( 1 - \frac{\rho}{a} \frac{\Delta P_{max}}{P_0} \sin^2 \phi/2 \right) \quad (21)$$

Wählt man den ökonomischsten Fall, bei dem in (21) das Gleichheitszeichen gilt, und differenziert nach der Magnetlänge  $L = \rho \cdot \phi$ , so erhält man

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial L} = \frac{\Delta P_{max}}{P_0} \left[ \frac{a}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos^2 \phi/2} - \frac{\Delta P_{max}}{P_0} \sin^2 \phi/2 (3 + \operatorname{tg}^2 \phi/2) \right] \quad (22)$$

Mit  $\phi < 1$ , was wir ohnedies vorausgesetzt haben, kann  $\operatorname{tg}^2 \phi/2$  gegen 3 vernachlässigt werden, und durch Nullsetzen von (22) erhält man

$$\sin \phi = \sin \frac{L}{\rho} \approx \sqrt{\frac{4}{3} \frac{a}{\rho \cdot \frac{\Delta P_{max}}{P_0}}} \quad (23)$$

Wenn man die Magnetlänge  $L$  variiert bei gegebenem Krümmungsradius  $\rho$  und festgehaltener Öffnungsweite  $a$ , so nimmt also  $\varepsilon$  für das in Gleichung (23) gegebene  $\phi$  ein Maximum an. Für weiter anwachsendes  $\phi$  nimmt  $\varepsilon$  ab infolge der abnehmenden Akzeptanz; für abnehmendes  $\phi$  nimmt  $\varepsilon$  ab, weil die Separierungskraft des Magneten abnimmt. An der Stelle des Maximums beträgt der Füllfaktor  $\varrho \approx \frac{2}{3}$ .

Für  $\phi = \frac{L}{\rho} \ll 1$  wird aus Gleichung (21), wenn dort das Gleichheitszeichen gilt,

$$\varepsilon \approx \frac{aL}{\rho} \frac{\Delta P_{max}}{P_0} - \frac{1}{4} \frac{L^3}{\rho^2} \left( \frac{\Delta P_{max}}{P_0} \right)^2 \quad \text{für } 0 < \varrho \leq 1 \quad (24)$$

Daraus folgt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{a}{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} &= \frac{1}{1 - \varrho/2} \\ \frac{L}{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial L} &= \frac{1 - \frac{3}{2} \varrho}{1 - \varrho/2} \\ \frac{\rho}{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} &= \frac{1 - \varrho}{1 - \varrho/2} \end{aligned} \quad \text{mit } \varrho = \frac{1}{2} \frac{L^2}{a\rho} \frac{\Delta p_{\max}}{p_0}$$

$$0 < \varrho \leq 1 \quad (25)$$

Die aufgenommene Strahlemittanz nimmt monoton zu mit wachsender Öffnungsweite  $a$  (bei festgehaltenem  $L$  und  $\rho$ ) und mit abnehmendem Krümmungsradius  $\rho$  (bei festem  $L$  und  $a$ ). Bei der Variation von  $L$  ergibt sich das obengenannte Maximum in  $\mathcal{E}$  für  $C = \frac{2}{3}$ . Die Gleichungen (25) können beim Entwurf eines Analysiermagneten von Nutzen sein, wenn es darauf ankommt, für gegebenes  $\mathcal{E}$  und  $\frac{\Delta p_{\max}}{p_0}$  die Magnetkosten so klein wie möglich zu halten.

Um eine quantitative Vorstellung von dem Zusammenhang zwischen Magnetdimensionen, Impulsauflösung  $\frac{\Delta p_{\max}}{p_0}$  und Strahlemittanz  $\mathcal{E}$  zu geben, sollen die Gleichungen (20) und (21) auf ein Beispiel angewandt werden:

Es sei:

Teilchenimpuls	$p_0 = 4 \text{ GeV}/c$
Feldstärke	$B = 1,5 \frac{\text{Vsec}}{\text{m}^2} \quad (15\ 000)$
Krümmungsradius	$\rho = 9 \text{ m}$
Öffnungsweite	$a = 32 \text{ cm}$
Magnetlänge	$L = 6,30 \text{ m}$

Dann ist der Drehwinkel  $\phi = \frac{L}{\rho} = 0,7 = 40^\circ$ , und damit erreicht man eine Impulsauflösung

$$\frac{\Delta p_{\max}}{p_0} = 10\% \text{ für } \varrho = \frac{2}{3}, \text{ d.h. } \mathcal{E} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{m}$$

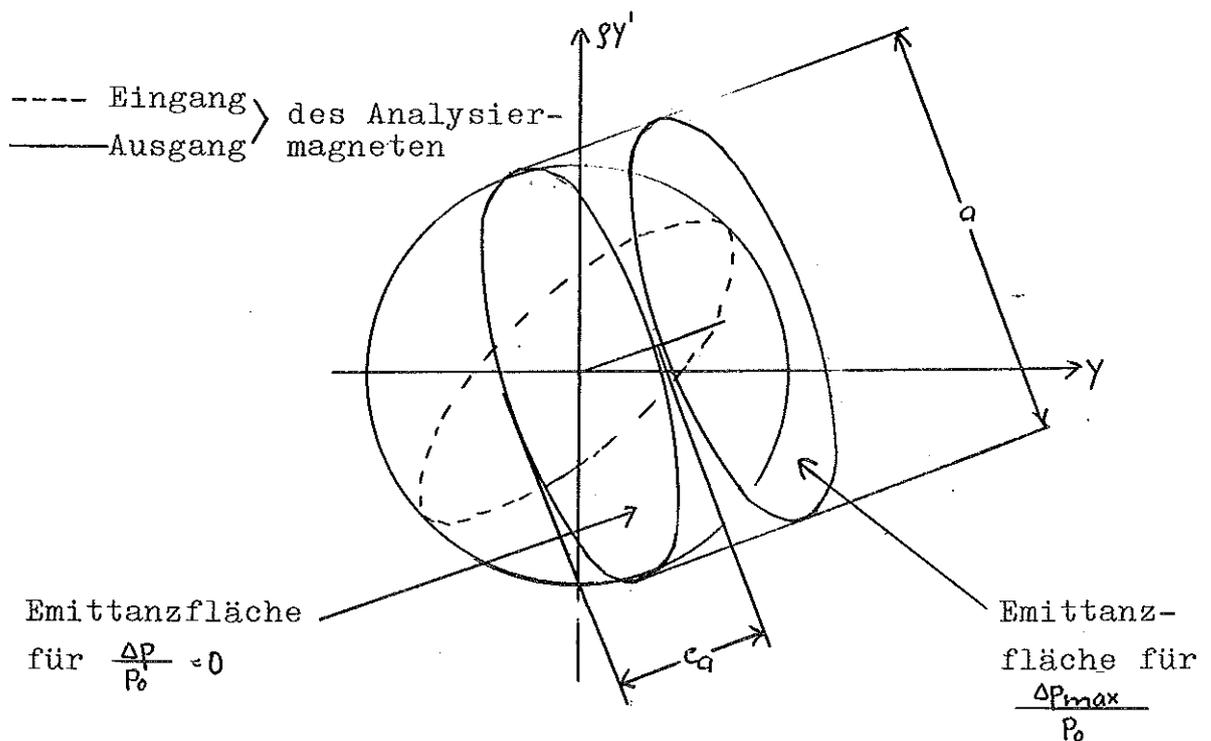
$$\frac{\Delta p_{\max}}{p_0} = 1,5\% \text{ für } \varrho = 0,1, \text{ d.h. } \mathcal{E} = 0,34 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{m}$$

b) Ablenkungswinkel  $\phi = \frac{4}{\rho} > \frac{\pi}{2}$

Die Akzeptanz  $\alpha$  des Magneten ist dann nach Gleichung (16) im wesentlichen gegeben als Inhalt der Ellipse mit den Halbachsen  $\frac{a}{2}$  und  $\frac{a}{2\rho}$ , d.h.

$$\alpha \approx \frac{\pi}{4} \frac{a^2}{\rho}$$

Abb. 7: Strahlemittanzflächen



Die Strahlemittanz werde als Ellipse angenommen, deren Halbachsen in der  $\tilde{y}, \tilde{y}'$ -Ebene  $\frac{a}{2}$  und  $C \frac{a}{2}$  betragen, wobei der "Füllfaktor"  $C$  zwischen Null und Eins liegt, und die so orientiert ist, dass am Ausgang des Magneten die kleinere Halbachse  $C \frac{a}{2}$  in Richtung der durch  $\frac{\Delta P}{P_0}$  verursachten Versetzung weist (siehe Abb. 7). Dann ergibt sich für gegebenes  $\frac{\Delta P_{max}}{P_0}$  die Bedingung

$$\left(\frac{\Delta P_{max}}{P_0}\right)^2 (y^2 + \rho y'^2) - \left(2\rho \frac{\Delta P_{max}}{P_0} \sin \frac{\phi}{2}\right)^2 \geq (\rho \cdot a)^2$$

oder

$$\varrho \leq 2 \frac{\rho}{a} \frac{\Delta p_{\max}}{p_0} \sin \phi/2 \quad (26)$$

und damit für  $0 < \varrho \leq 1$

$$\varepsilon = \varrho \cdot \frac{\pi}{4} \frac{a^2}{\rho} \leq \frac{\pi}{2} a \frac{\Delta p_{\max}}{p_0} \sin \phi/2 \quad (27)$$

d.h. bei gegebenem  $\frac{\Delta p_{\max}}{p_0}$  ist  $\varepsilon$  proportional  $a$  und hängt im übrigen nur von dem Verhältnis  $\frac{1}{\rho}$  ab. Für die partiellen Ableitungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{a}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} &= 1 \\ \frac{\phi}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} &= \frac{\phi}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

Für wachsenden Ablenkungswinkel  $\phi$  nimmt  $\varepsilon$  bei der Annäherung an  $\phi = \pi$  nur noch sehr schwach zu, und für  $\phi > \pi$  nimmt es wieder ab.