

DESY A 2.45

Hamburg, den 13.4.1959
Dr.Ti/Schw.

Messung der Emittanz des Linacs

1) Einleitung

In der DESY-Notiz A 2.40 sind die Möglichkeiten untersucht worden, wie man den aus dem Linac kommenden Strahl an die Akzeptanz des Synchrotrons in horizontaler und vertikaler Richtung anpassen kann. Es ist dort gezeigt, daß man durch zwei Quadrupoltripel die Anpassung in beiden Achsen unabhängig voneinander vornehmen kann. Als nächster Schritt soll in diesem Bericht untersucht werden, wie man die Emittanz des Linacs messen kann; denn aus der Emittanz folgen ja erst die zur Anpassung einzustellenden Parameter der Quadrupollinsen. Die Untersuchung wird nicht die volle Allgemeinheit einschließen, denn bei einer x-beliebigen Dichteverteilung in der Phasenfläche wird es letzten Endes keine andere Möglichkeit geben, als den Strahl Punkt für Punkt in seinem Querschnitt mittels Blenden durchzumessen. Stattdessen wird gezeigt, inwieweit es vernünftig ist, eine Gaussverteilung der Stromdichte über den kanonischen Koordinaten (hier x und $x' = \frac{dx}{ds}$) anzunehmen, und mit dieser Verteilung soll dann die Möglichkeit der Emittanzmessung untersucht werden.

2) Teilchendichte im Phasenraum

Wegen $W = 40 \text{ MeV} = \text{const}$ haben wir es hier nur mit dem 4-dimensionalen Phasenraum x, x', y, y' zu tun. Die Zahl der Teilchen in einem Volumenelement $d\Omega = dx dy dx' dy'$ ist allgemein gegeben durch

$$dN = N(x, y, x', y') d\Omega \quad (1)$$

worin die Funktion N näher zu untersuchen ist. Leider kann man einen 4-dimensionalen Raum schlecht zeichnen, dagegen sind die Projektionen in die x, y -Ebenen oder die Phasenebenen x, x' bzw. y, y' anschaulich:

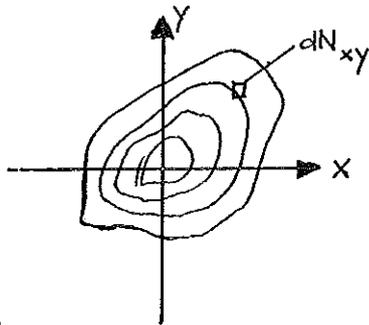


Fig. 1a

$$dN_{xy} = \iint_{(x')(y')} N d\Omega$$

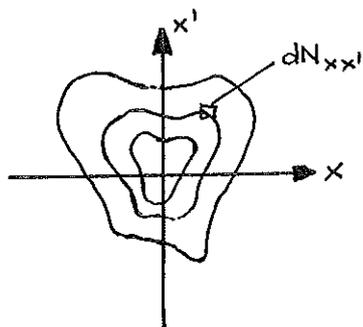


Fig. 1b

$$dN_{xx'} = \iint_{(y)(y')} N d\Omega$$

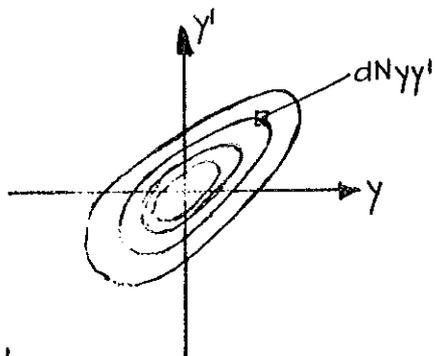


Fig. 1c

$$dN_{yy'} = \iint_{(x)(x')} N d\Omega$$

Die eingezeichneten Linien bezeichnen die Orte $dN_{ik} = \text{const.}$. Wir werden weiter unten sehen, daß uns als Linien gleicher Teilchendichte, insbesondere Ellipsen, interessieren.

Zunächst soll gezeigt werden, daß unter verhältnismäßig einfachen Annahmen (1) eine Gaussverteilung in allen vier Koordinaten darstellt. Diese Voraussetzungen sind:

a) Die Dichteverteilung im Strahl ist rotationssymmetrisch, d.h.

$$N(x, y, x', y') = N(x^2 + y^2, x', y')$$

b) Die Dichteverteilung über der x-Koordinate ist unabhängig von der Verteilung über die x'-Koordinate, also

$$dN_{xx'} = \iint_{(y)(y')} N d\Omega = g(x) \cdot h(x) dx dx'$$

c) Im Phasenraum x, x' sei $dN_{x, x'}$ konstant auf Ellipsen. O.B.d.A. kann man dafür eine achsenparallele Ellipsenschar annehmen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'}{a'}\right)^2 = \text{const.}$$

$$dN_{xx'} = \iint_{(y)(y')} N d\Omega = f\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'}{a'}\right)^2\right\} dx dx'$$

Wir wollen zunächst die Folgerungen aus diesen Annahmen betrachten und dann deren Berechtigung untersuchen.

Aus a) ergibt sich zunächst, daß die Verteilungen in den Phasenflächen x, x' und y, y' identisch sind, denn wegen der Zylindersymmetrie muß es gleichgültig sein, in welchem Achsenabschnitt man die Phasenfläche untersucht. Damit sind auch die unter c) geforderten Ellipsenscharen identisch in beiden Phasenflächen. Es ergeben sich daraus eine Reihe von Symmetrieeigenschaften:

$N(x, y, x', y')$ ist symmetrisch in

$$(x, x' / y, y') ; (x/y) ; (x'/y')$$

Aus b) und c) folgt schließlich die Gaussverteilung:

$$g(x) \cdot h(x') = f \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{x'}{a'} \right)^2 \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg(x)}{dx} \cdot h(x') &= f' \left\{ \dots \right\} \cdot \frac{2x}{a^2} \\ \frac{dh(x')}{dx'} \cdot g(x) &= f' \left\{ \dots \right\} \cdot \frac{2x'}{a'^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a^2 \\ 2x \end{aligned} \quad \begin{aligned} g' \\ q \end{aligned} = \begin{aligned} a'^2 \\ 2x' \end{aligned}$$

hieraus findet man leicht, daß

$$g(x) \cdot h(x') = \sqrt{A} e^{-k \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{x'}{a'} \right)^2 \right\}}, \quad A, k = \text{Konstanten} \quad (2)$$

Die gleiche Verteilung findet man wegen a) in der y, y' -Ebene und, da beiden Phasenebenen unabhängig voneinander sind, ist die gesuchte Dichteverteilung das Produkt beider, also

$$N(x, y, x', y') = A e^{-k \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \left(\frac{x'}{a'} \right)^2 + \left(\frac{y'}{a'} \right)^2 \right\}} \quad (3)$$

Zur Bestimmung der Konstanten k, A kann man zunächst sehen, daß $k = -1$ eine physikalisch vernünftige Verteilung ergibt.

A folgt aus der Normierung. Bedeutet N_0 die Teilchendichte

bei $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, so ist

$$dN_{xy} = A e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} \int_{(x)} \int_{(y)} e^{-\left(\frac{x'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{y'}{a'}\right)^2} d\Omega$$

$$= A a'^2 \pi e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} dx dy = N_0 e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} dx dy \rightarrow A = \frac{N_0}{a'^2 \pi}$$

Damit N_0 die richtige Dimension (l^{-3}) erhält, muß man sich noch das hier unterdrückte Koordinatenpaar (z, p_z) hinzudenken.

Die Gesamtzahl der Teilchen in einer Scheibe der Dicke 1 cm ist dann

$$N_{ges} = N_0 \int_{(x)} \int_{(y)} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} dx dy = N_0 a^2 \pi = \frac{i_{ges}}{e \cdot c}$$

Der Zusammenhang zwischen dem Linacstrom i_{ges} (zeitliches Mittel) und N_0 ist (mit e = Leistung, c = Geschwindigkeit der Elektronen):

$$i_{ges} = e \cdot c \cdot N_{ges} = e c \pi a^2 N_0 \quad \text{so daß} \quad (4)$$

$$A = \frac{I_{ges}}{2c(\pi a a')^2} = \frac{N_{ges}}{(\pi a a')^2} \quad \text{wird} \quad (5)$$

Jedenfalls erhält (1) jetzt die Form:

$$dN = \frac{N_{ges}}{(\pi a a')^2} e^{-\left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{a'}\right)^2 \right\}} dx dx' dy dy' \quad (6)$$

Es erscheint vielleicht trivial, eine Gaussverteilung als Ergebnis zu bekommen, da man diese von vornherein gern vermutet. An den Voraussetzungen jedoch kann man prüfen, wo diese Vermutung fundiert ist. Voraussetzung a) ist zunächst sicher im Linac sehr gut erfüllt, da, bis auf geringe Fehler, alles zylindersymmetrisch ist von der Kathode bis zum Ausgang. Forderung b) ist zumindest an der Kathode erfüllt, wie bei Knop (Dissertation, Bonn 1958) gezeigt wird. Darüber hinaus wird dort abgeleitet, daß $h(x') = e^{-\left(\frac{x'}{a'}\right)^2}$ ist, was das Ergebnis (6) teilweise bestätigt. Außerdem wird eine Gaussverteilung in $(x^2 + y^2)$ tatsächlich annähernd beobachtet (Miller, J.Br. IRE 14, 361, (1954)). Zur Voraussetzung c) kann schließlich gesagt werden, daß die Acceptanz im Synchrotron Ellipsenform hat und somit jede Strahlanpassung von Ellipsen ausgehen muß, nötigenfalls sind also andere Dichteverteilungskurven in Ellipsen einzuschließen, die dann die praktisch verwertbare Emittanz darstellen.

3) Teilchendichte nach Durchlaufen eines feldfreien Raumes

Die Verteilung (6) soll darum nunmehr als reell zugrunde gelegt werden, und es soll untersucht werden, wie man diese messen kann. Die Messung läuft natürlich darauf hinaus, in einer Phasenebene das Achsenverhältnis und eine Achse derjenigen Ellipse am Linacausgang zu bestimmen, die einen gewissen Gesamtstrom i_0 einschließt.

Dazu soll zunächst untersucht werden, wie sich die Stromverteilung (6) nach einem Laufräum der Länge L ändert. Die Behandlung steht in Beziehung zu einer Arbeit von T.R. Walsh AERE, A/R 2711, in der die Änderung der Phasenellipse längs eines Laufraumes untersucht

wird und gezeigt wird, daß der Strahl stets eine reelle oder virtuelle "Taille" hat an der Stelle, wo die Ellipse achsenparallel ist. Mittels der Tailleparameter läßt sich der Strahl dann längs des Weges leicht beschreiben. Dies ist auch der Grund, weshalb für (6) zunächst nur eine Ellipsenschar in Normalform angenommen wurde.

Ein Volumenelement in der x, x' -Phasenebene enthält die Teilchenzahl

$$dN_{xx'} = \frac{N_{ges}}{(aa'\pi)^2} e^{-\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x'}{a'}\right)^2\right\}} dx dx' \int \int_{(y)(y')} e^{-\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{a'}\right)^2\right\}} dy dy' \quad (7)$$

$$= \frac{N_{ges}}{aa'\pi} e^{-\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'}{a'}\right)^2\right\}} dx dx'$$

nach dem Laufräum $s = L$ transformieren sich x und x' wie

$$X = x + Lx' \quad x = X - LX'$$

bzw.

$$X' = x' \quad x' = X'$$

so daß die Verteilung an der Stelle L die Form hat:

$$dN_{XX'} = \frac{N_{ges}}{aa'\pi} e^{-\left(\frac{X}{a}\right)^2} e^{\frac{2L}{a^2} XX'} e^{-[L^2+F^2]\frac{X'^2}{a^2}} dX dX' \quad (8)$$

mit $F = \frac{a}{a'}$

Der Messung leicht zugänglich ist die Verteilung über x , also bilden wir für die Stelle $s = 0$ (Taille des Strahls):

$$dN_x = \frac{N_{ges}}{aa'\pi} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \int_{(x')} e^{-\left(\frac{x'}{a'}\right)^2} dx' = \frac{N_{ges}}{a'\pi} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \quad (9)$$

und für die Stelle $s = L$:

$$dN_X = \frac{N_{ges}}{aa'\pi} e^{-\left(\frac{X}{a}\right)^2} dX \int_{(X')} e^{\frac{2L}{a^2} XX'} e^{-[L^2+F^2]\left(\frac{X'}{a}\right)^2} dX'$$

was mit der Umformung $X' = \eta + \frac{LX}{L^2+F^2}$ zu der Verteilung führt:

$$dN_X = \frac{N_{ges}}{a'\pi} \frac{F}{\sqrt{L^2+F^2}} e^{-\left(\frac{X}{a}\right)^2} \frac{F^2}{L^2+F^2} dX \quad (10)$$

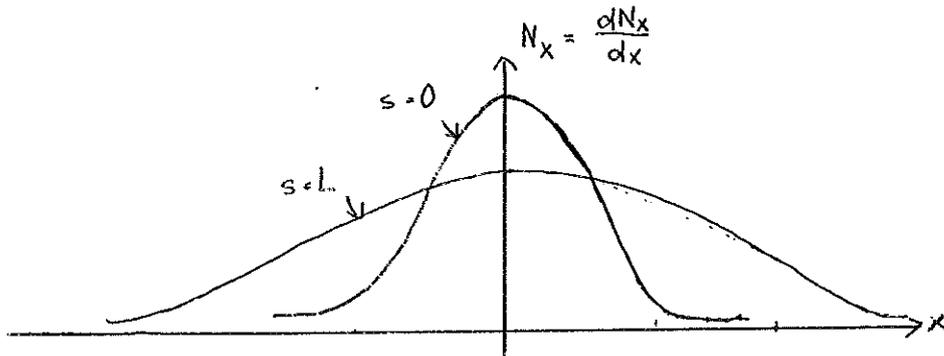
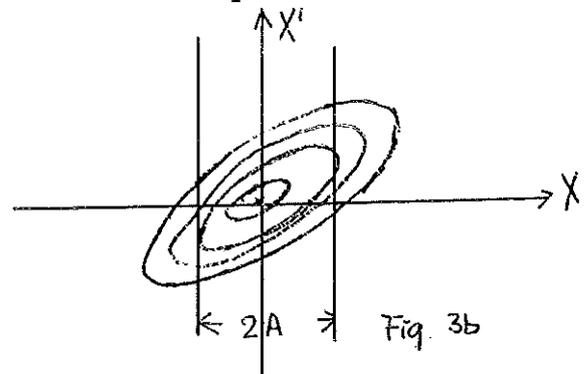
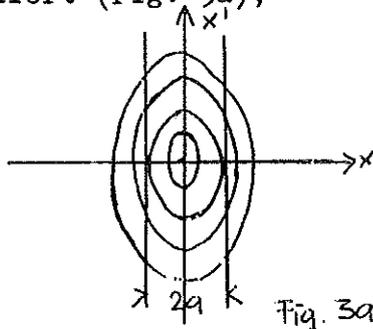


Fig. 2 Qualitativer Verlauf der Verteilungen (9) und (10)

Geben (9) und (10) die Teilchenzahl in dem kleinen Intervall dx an, d.h. den hinter einer Schlitzblende der Breite dx gemessenen Strom so interessiert auch der Gesamtstrom, der durch eine symmetrische Blende etwa der Öffnung $2a$ hindurchtritt. An der Stelle $s = 0$ findet man aus (9):

$$N_{2a} = 2 \frac{N_{qzs}}{a\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \quad (11)$$

Durch diese Blende wird im Phasenraum die Ellipse der Achse a markiert (Fig. 3a),



natürlich tragen zu dem Strom hinter der Blende auch die Phasenflächen außerhalb dieser Ellipse a bei. Die Frage ist jetzt, welche Blendenöffnung, $2A$, muß man an der Stelle $s = L$ wählen, damit der gleiche Strom hindurchtritt wie bei $s = 0$ (Fig. 3b).

Wir berechnen dazu die maximale Ausdehnung des Strahls \hat{X} bei $s = L$, da diese vermutlich die gesuchte Blendenöffnung ergibt, was aber wegen der Teilchen außerhalb dieser Ellipse nicht ganz trivial ist.

Die Ellipsen bei $s = 0$ und $s = L$ kann man beschreiben durch:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos \varphi & X &= a \cdot \cos \varphi + La' \sin \varphi \\ x' &= a' \cdot \sin \varphi & X' &= a \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (12)$$

X findet man aus

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\varphi} &= -a \sin \varphi + La' \cos \varphi = 0 \rightarrow Ag \hat{\varphi} = \frac{L}{F} \\ \hat{X} &= a \sqrt{1 + \left(\frac{L}{F}\right)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Tatsächlich stellt $2X$ die gesuchte Öffnungsweite dar, denn aus (10) findet man:

$$\begin{aligned} N_{2\hat{X}} &= 2 \frac{N_{ges}}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{a\sqrt{1+\left(\frac{L}{F}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{F}\right)^2}} e^{-\left(\frac{X}{a}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{L}{F}\right)^2}} dX \\ &= 2 \frac{N_{ges}}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} e^{-\left(\frac{\varphi}{a}\right)^2} d\varphi = N_{2a} \end{aligned}$$

Die Linien gleichen Strominhaltes liegen also auf Hyperbeln, nach Gl. (13), mit dem Scheitel bei $L = 0$, (= engste Stelle des Strahls).

Man kann leicht zeigen, daß bei der hier vorausgesetzten Rotations-symmetrie das Gleiche für Kreisblenden gilt.

4) Bestimmung der Emittanzparameter am Linacausgang mittels Laufstrecken

In Gleichung (12) ist angegeben, wie sich die Phasenellipsen einfach beschreiben lassen mittels der Achsen a, a' an der Taille des Strahls und dem von dort durchlaufenen Weg L . Eine Ellipse der Schar am Linacausgang (Index Null) wird also beschrieben durch a, a', L_0 oder besser $F = \frac{a}{a'}$, a, L_0 . D.h. es muß die Lage der Taille relativ zum Linacende bestimmt werden; diese kann, optisch gesprochen, reell oder virtuell sein, also hinter oder vor dem Linacausgang liegen.

Man erkennt darum sofort, wie man die drei gesuchten Größen aus drei Messungen an den Orten L_0, L_1, L_2 ermitteln kann: Durch Variation der Blendenöffnung stellt man diejenige Öffnung X fest, die den Strom

$$I_0 = I_{ges} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-\eta^2} d\eta$$

nach Gleichung (11) durchläßt (nur als Beispiel gedacht).

Nach Gleichung (13) erhält man die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\hat{X}_0 &= a \sqrt{1 + \left(\frac{L_0}{F}\right)^2} \\ \hat{X}_1 &= a \sqrt{1 + \left(\frac{L_{10} + L_0}{F}\right)^2} \\ \hat{X}_2 &= a \sqrt{1 + \left(\frac{L_{20} + L_0}{F}\right)^2}\end{aligned}\quad (14)$$

worin die Größen $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \hat{X}_2, L_{10} = L_1 - L_0, L_{20} = L_2 - L_0$ bekannt, und die Größen L_0, a, F gesucht sind.

Man findet:

$$L_0 = -\frac{1}{2} \frac{L_{10}^2 \hat{X}_2^2 - L_{20}^2 \hat{X}_1^2}{L_{10} \hat{X}_2^2 - L_{20} \hat{X}_1^2}$$

$$F = \left[\frac{L_0^2 - (L_{10} + L_0)^2 \left(\frac{\hat{X}_0}{\hat{X}_1}\right)^2}{\left(\frac{\hat{X}_0}{\hat{X}_1}\right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad a = \hat{X}_0 \left[1 + \left(\frac{L_0}{F}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Eine Variante dieser Messung bietet sich sofort an, wenn man Gleichung (10) betrachtet. Mißt man an drei Stellen den Strom, der durch eine schmale Blende der Breite $dX = \delta$ auf der Achse, d.h. bei $X = 0$ hindurchgeht, so hat man für L_0, F, a die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}i_0 &= \frac{i_{ges} \cdot \delta}{a \sqrt{\pi}} \left[1 + \left(\frac{L_0}{F}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ i_1 &= \frac{i_{ges} \cdot \delta}{a \sqrt{\pi}} \left[1 + \left(\frac{L_{10} + L_0}{F}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ i_2 &= \frac{i_{ges} \cdot \delta}{a \sqrt{\pi}} \left[1 + \left(\frac{L_{20} + L_0}{F}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (16)$$

mit der Lösung

$$L_0 = -\frac{1}{2} \frac{L_{10}^2 i_2^2 - L_{20}^2 i_1^2}{L_{10} i_2^2 - L_{20} i_1^2}; \quad i_{10} = \frac{i_1}{i_0}, \quad i_{20} = \frac{i_2}{i_0}$$

$$F = \left[\frac{L_0^2 - (L_{10} + L_0)^2 i_{10}^2}{i_{20}^2 - 1} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$a = \frac{i_{ges} \delta}{i_0} \left[1 + \left(\frac{L_0}{F}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Diese Messung kann man auch mit einem dünnen Draht als Auffänger machen, der in irgendeiner Weise eine stromproportionale Anzeige gibt. Die Bestimmung von a nach Gleichung (17) geht dann allerdings nicht mehr wegen der unterschiedlichen Meßmethoden für i_{ges} und i_0 .

Dagegen kann man, indem man den Draht quer durch den Strahl führt, die Verteilung $i(X)$ (Fig. 2) aufnehmen und damit die Gültigkeit der Gaußverteilung prüfen.

Aus dem Wert $X_{(1/2)}$ bei $i(X=0) \cdot \frac{1}{2}$ erhält man dann wieder a:

$$a = X_{(1/2)} \cdot \left[1 + \left(\frac{L}{F} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (17a)$$

Die beschriebenen Meßmethoden haben den Nachteil, daß nacheinander an drei verschiedenen Stellen gemessen werden muß, was immerhin einigen apparativen- und Zeitaufwand erwarten läßt. In den folgenden Abschnitten wird untersucht, wie man unter Benutzung einer Quadrupollinse einfacher zum Ziele kommt.

5) Teilchendichte hinter einer Quadrupollinse



Bei $s = 0$ sei wie früher die Taille des Strahls, d.h. die Phasenellipse ist dort achsenparallel. Bei $s = L$ befinde sich eine dünne Quadrupollinse der Brechkraft B . Wir berechnen die Dichteverteilung dN_x in der x -Koordinate des Strahls im Abstand l hinter der Linse.

Die Verteilung bei $s = L$ wird beschrieben durch Gleichung (10), sie muß identisch sein mit der Verteilung kurz hinter der Linse, $s = L(+)$, da eine Quadrupollinse den Ort ungeändert läßt. Dies soll zunächst gezeigt werden.

Zur Vermeidung von Indizes sollen im Folgenden für die x -Koordinate verschiedene Symbole verwendet werden, wie: X, ξ, ξ' .

Die Transformation durch die Linse schreibt sich dann folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} \quad (18)$$

In Gleichung (8) eingesetzt ergibt sich:

$$dN_{\xi\xi'} = \frac{N_{qes}}{a a' r} e^{-\frac{\xi^2}{a^2} \left\{ 1 - 2LB + [L^2 + F^2] B^2 \right\} - \frac{1}{a'^2} \left\{ 2\xi\xi' [L-B[L^2 + F^2]] - \xi'^2 [L^2 + F^2] \right\}} \cdot d\xi d\xi' \quad (19)$$

dN_{ξ} erhält man daraus durch Integration über ξ' . Dieses Integral wird, ähnlich wie bei (10), umgeformt durch die Substitution

$$\xi' = \eta + \frac{L - B[L^2 + F^2]}{L^2 + F^2} \xi$$

wonach man dieselbe Verteilung wie Gleichung (10) erhält.

Nach einer Laufstrecke l hinter der Linse transformieren sich die Koordinaten wie

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi' \end{pmatrix}$$

Führt man das in Gleichung (19) ein, so erhält man einen Ausdruck der Gestalt

$$dN_{\xi \xi'} = \frac{N_{ges}}{aa' r} e^{-\frac{1}{a^2} \{ \alpha \xi^2 + \beta \xi \xi' + \gamma \xi'^2 \}}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \alpha &= 1 - 2LB + (L^2 + F^2)B^2 \\ \beta &= -2 [l \cdot \alpha + \{L - B(L^2 + F^2)\}] \\ \gamma &= l^2 \alpha + 2l \{L - B(L^2 + F^2)\} + (L^2 + F^2) \end{aligned} \quad (20)$$

Man erhält damit als Verteilung über die ξ -Koordinate durch Integration über ξ' :

$$dN_{\xi} = \frac{N_{ges}}{aa' r} e^{-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \alpha} \int_{(\xi')} e^{-\frac{1}{a^2} (\beta \xi \xi' + \gamma \xi'^2)} d\xi d\xi'$$

was mit der Substitution

$$\xi' = \eta - \frac{1}{2} \frac{B}{\gamma} \xi$$

und unter Berücksichtigung, daß gilt $\alpha \gamma - \beta^2 = F^2$

zu dem Ergebnis führt:

$$dN_{\xi} = \frac{N_{ges}}{a' r} \frac{F}{\sqrt{\gamma}} e^{-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \frac{F^2}{\gamma}} d\xi \quad (21)$$

Die Verteilung ist ähnlich der Verteilung (10), nur, daß Amplitude und Halbwertsbreite nun noch von der Brechkraft der Linse abhängen.

6) Bestimmung der Emittanzparameter mittels Quadrupollinse

Wir setzen voraus, daß die Brechkraft der Linse bekannt und reproduzierbar einzustellen ist (das setzt z.B. auch voraus, daß die Energie der Teilchen bekannt ist). Dann ist es mit ihrer Hilfe möglich, die Emittanzmessung an einem festen Ort vorzunehmen.

Zunächst soll noch angemerkt werden, daß die Breite der Verteilung an der Taille des Strahls, a , für die Anpassung zur Injektion nicht von großer Bedeutung ist, vielmehr genügen für die Anpassung die Parameter L und F , also das Achsenverhältnis und die Lage der Taille. a läßt sich jedenfalls immer leicht nach der durch Gleichung (17a) beschriebenen Methode messen, wenn man L und F kennt, da die Prüfung auf eine Gaußverteilung sowieso anderen Messungen vorangeht. Wir betrachten hier also nur die Messung von L und F .

Da liegt es zunächst nahe, die Messung wie unter 4) beschrieben, mit variabler Blendenöffnung durchzuführen. Man sieht leicht, daß mit dem Aufbau nach Fig. 4, bei zwei verschiedenen Brechkraften der Linse B_1, B_2 , sich die Blendenöffnungen b_i verhalten müssen wie

$$b_1/b_2 = \sqrt{\gamma_1/\gamma_2} \quad (\text{s. Gl. (20)} \quad (22)$$

wenn beide Male der gleiche Strom hindurchgehen soll. Durch Gleichsetzen der Integrale über Gleichung (21) erkennt man dies sofort als Verallgemeinerung von Gleichung (13).

Die Messung besteht also darin, daß man für einen bestimmten Strom, i_0 , die Blendenöffnungen $b_0 = b, b_1, b_2$ ermittelt, bei den Brechkraften B_0, B_1, B_2 . Bezeichnet dann $\gamma_i = \gamma(B_i)$, so erhält man die zwei Gleichungen

$$b_1 = b \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}} \quad ; \quad b_2 = b \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_0}}$$

worin, wenn etwa $B_0 = 0$ gewählt wird,

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \ell^2 + 2\ell L + (L^2 + F^2) \\ \gamma_i &= \ell^2 \left\{ 1 - 2LB_i + (L^2 + F^2)B_i^2 \right\} + 2\ell \left\{ L - B_i(L^2 + F^2) \right\} + (L^2 + F^2) \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$

bedeuten (nach Gleichung 20). Mit Abkürzungen

$$\begin{aligned} J &= 2 \ell L & K &= L^2 + F^2 \\ \beta_i &= (1 - \ell B_i) & b_{i0} &= \frac{b_i}{b_0}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

erhält man daraus das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} J (b_{10}^2 - \beta_1) + K (b_{10}^2 - \beta_1^2) &= \ell^2 (1 - b_{10}^2) \\ J (b_{20}^2 - \beta_2) + K (b_{20}^2 - \beta_2^2) &= \ell^2 (1 - b_{20}^2) \end{aligned} \tag{23}$$

Zur Bestimmung von J und K und damit von L und F.

Ähnlich wie unter 4) beschrieben, kann man dieselbe Messung auch mit einer engen zentralen Schlitzblende machen und erhält ein entsprechendes Gleichungssystem zur Bestimmung der gewünschten Parameter. Die Messung mit einem Draht ist dieser äquivalent, jedoch einfacher, weil man keinen besonderen Auffänger benötigt.

Zusammenfassung

Die vorhergehenden Überlegungen zeigen, wie sich ein wohlerzogener Linacstrahl benimmt und messen läßt. Als erstes muß also geprüft werden, ob eine Gaußverteilung vorliegt, etwa mit der angedeuteten Drahtmethode. Bei positivem Befund wird man wahrscheinlich der Linsenmethode den Vorzug geben, da man nur eine Meßstelle hat. Findet man keine Gaußverteilung, so kann man eine Gaußkurve umschreiben, oder wenn die Abweichungen zu stark sind, müßte man die Emittanzen punktweise durchmessen, d.h. eine Schlitzblende am Linacausgang und eine zweite in gewissem Abstand dahinter, was zwar einen größeren Zeitaufwand erfordert und ein zweifaches Blendensystem benötigt, aber genaue Auskunft über die Emittanz geben sollte, falls die Meßtechnik befriedigend gelöst werden kann. Die Probleme, die in der Meßtechnik stecken, sollen hier zum Schluß noch angeführt werden: Kühlung der Blenden, Streuung an den Blenden und ihre Durchlässigkeit. Änderung der Emittanz über die Pulslänge vor allem am Anfang und Ende des Pulses, Konstruktion und Eichung des Auffängers.

Es ist noch zu früh, um über die Meßmethode zu entscheiden, wohl aber kann man angeben, welche Elemente im Strahlengang vorzusehen sind zur Bestimmung der Emittanz. Das sind: Ein Blendensystem hinter dem ersten Quadrupoltripel und unter Umständen ein zweites nahe am Linacausgang. Die beiden ersteren Elemente braucht man sowieso zur Anpassung und zur Strahldefinition. Die Blenden gestatten z.B. eine bequeme und schnelle Stromreduktion im Betrieb.

Dr. U. Timm